

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Циовкиной Людмилы Юрьевны  
«Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов»  
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук  
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Цель диссертационного исследования состоит в изучении групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов при заданных ограничениях на строение графа или на действие группы на графе. В качестве ограничения на строение графа в диссертации чаще всего рассматривается свойство антиподальности. Связный граф является антиподальным, если отношение «совпадать или быть на максимальном расстоянии» на вершинах графа является отношением эквивалентности. Антиподальные дистанционно регулярные графы являются накрытиями дистанционно регулярных графов меньшего диаметра и представляют интерес как один из двух классов непримитивных дистанционно регулярных графов (вторым классом является класс двудольных дистанционно регулярных графов). В качестве ограничения на действие группы в диссертации в основном рассматривается транзитивность на дугах. Группа  $G$  автоморфизмов графа действует транзитивно на дугах (или флаг-транзитивно, граф при этом принято называть реберно симметричным), если для любых двух смежных вершин  $x$  и  $y$  и любых двух смежных вершин  $x'$  и  $y'$  найдется автоморфизм  $F$  из  $G$  такой, что  $F(x)=x'$  и  $F(y)=y'$  (дугой, или флагом, как раз и называется упорядоченная пара смежных вершин).

**Актуальность** темы диссертации объясняется представлением дистанционно регулярных графов в виде метрических схем отношений и глубокими связями как с теорией конечных групп, так и с исследованиями в теории кодирования. Схемы отношений многие исследователи рассматривают как обобщение групп, в терминах которых возможны альтернативные подходы к изучению групп как таковых. Многие дискретные метрические пространства, связанные с приложениями в теории информации, представляют из себя метрические схемы отношений, соответствующие дистанционно регулярным графам, например, графам Хэмминга, Джонсона, Грассмана, билинейных форм. Хотя группы автоморфизмов упомянутых графов хорошо известны, у них могут быть делители, являющиеся дистанционно регулярными графами с неисследованными группами автоморфизмов. В частности, известно, что граф смежных классов линейного полностью регулярного кода является дистанционно регулярным графом, при этом часто проблемы существования полностью регулярного кода и дистанционно регулярного графа с соответствующими параметрами известны независимо в теории кодирования и алгебраической теории графов, соответственно. Примером кодов, у которых граф смежных классов является реберно симметричным антиподальным дистанционно регулярным графом, то есть напрямую попадающим в предмет исследования диссертации, являются

коды Препараты (точнее,  $Z_4$ -линейные коды с параметрами кодов Препараты, поскольку для оригинальных кодов Препараты смежные классы не определены).

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 150 источников. Общий объем диссертации составляет 217 стр.

Во введении обоснована актуальность исследований, сформулирована их цель, описаны методы исследования, дана общая характеристика работы, сформулированы основные результаты.

В первой главе диссертации приведены основные определения и предварительные результаты, в последующих пяти главах приведены основные результаты диссертации, сформулированные в виде теорем и их следствий (в отдельных случаях предложений), с полными доказательствами.

Во второй главе проводится классификация флаг-транзитивных групп  $G$  автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов  $\Gamma$  диаметра 3 в случае, когда полная группа автоморфизмов графа индуцирует аффинную группу подстановок на множестве его антиподальных классов. Основными результатами главы являются теоремы 2.1 и 2.2, в которых характеризуются возможные группы автоморфизмов таких графов, и теорема 2.3 со следствием 2.4, в которых графы охарактеризованы с точностью до изоморфизма. Кроме того, на с.88 приведены в виде замечания результаты вычислений на компьютере, в ходе которых установлены существование и единственность графа для каждого из пяти случаев, которые выделены под общим названием «экстраспециальные».

В третьей главе приведена классификация антиподальных дистанционно регулярных графов смежных классов диаметра 3 с  $r > 2$  (параметр  $r$  обозначает мощность каждого антиподального класса) квазипростых групп  $U_3(q)$ ,  $SU_3(q)$ ,  $Sz(q)$  и  ${}^2G_2(q)$ . В таких графах соответствующая группа является группой автоморфизмов (не обязательно полной), действующей транзитивно на дугах. При этом построены неизвестные ранее бесконечные семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3. Кроме того, исследована дистанционная регулярность и локальная сильная регулярность графов на множествах инволюций групп  $U_3(q)$ ,  $SU_3(q)$ ,  $L_2(2^n)$  (граф называется локально сильно регулярным, если окрестность каждой вершины – сильно регулярный граф), получены ответы на вопросы, заданные в работах других специалистов в данной области. Основные результаты главы сформулированы в теоремах 3.1, 3.3, 3.6, 3.7, 3.9, а также предложениях 3.4 и 3.5.

В четвертой главе завершается (с учетом работ предшественников и главы 3) классификация групп автоморфизмов реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в случае почти простого действия группы на антиподальных классах. Результат доказан в теореме 4.1, а теорема 4.2 подытоживает результаты двух глав.

Пятая глава посвящена классификации антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, обладающих следующими двумя свойствами: *абелевость* – группа всех автоморфизмов графа, фиксирующих (как множества) все антиподальные классы, является абелевой и действует регулярно на каждом антиподальном классе; *свойство (\*)* – граф имеет транзитивную группу автоморфизмов, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок на множестве его антиподальных классов. Таким образом, рассматриваемые графы являются вершинно транзитивными, но не обязательно реберно симметричными. Основным результатом главы является теорема 5.7 (и ее следствие 5.9), хотя промежуточные утверждения, сформулированные в виде предложений, также представляют интерес.

Шестая глава посвящена классификации недвудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4: реберно симметричных дистанционно регулярных антиподальных накрытий графов эрмитовых форм  $\text{Her}_m(2, q^2)$  и  $\text{AT}_4$ -графов (лежащих на границе Кулена–Юришича–Тервиллигера). Теорема 6.1 характеризует антиподальные накрытия графов  $\text{Her}_m(2, q^2)$  при условии, что группа автоморфизмов накрытия индуцирует дистанционно транзитивную группу на  $\text{Her}_m(2, q^2)$ . В остальной части главы устанавливаются необходимые условия на группу автоморфизмов  $\text{AT}_4(p, p+2, r)$ -графов и их локальных графов; теорема 6.2 и ее следствие 6.3 носят общий характер, а в теоремах 6.4–6.8 рассмотрены конкретные параметры графов, про существование которых неизвестно (эти теоремы существенно сужают область поиска; в частности, установлено несуществование реберно симметричных графов с рассмотренными параметрами).

**Значимость** полученных результатов. Теоретическая значимость исследования состоит в получении ответов на фундаментальные вопросы алгебры и алгебраической теории графов, связанные с представлением конечных групп группами автоморфизмов дистанционно регулярных графов и проблемой существования дистанционно регулярных графов с заданными параметрами. Проведено глубокое и полное исследование групп автоморфизмов реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 и получен ряд важных результатов для графов с другими параметрами.

Результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами. Основные результаты работы опубликованы в 15 статьях в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Большинство результатов (11 статей) получены лично автором диссертации; результаты, опубликованные в четырех статьях [141], [143], [147], [148] (нумерация согласно библиографии в диссертации), получены в соавторстве, при этом вклад автора диссертации является преобладающим в двух из них, [141] и [143], а результаты статей [147] и [148] получены в неразделимом соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих. Результаты, вошедшие в диссертацию, прошли широкую апробацию,

докладывались на многочисленных международных и российских научных конференциях и семинарах.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

### **Замечания.**

Во введении в описании результатов главы 2 на с. 17 используется неопределенное обозначение  $K$ , которое определяется только в формулировках последующих теорем.

В разделе с определениями и обозначениями хорошо было бы определить обозначения встречающихся в работе групп ( $SU_3(q)$ ,  $L_2(q)$ ,  $Sz(q)$ , ...), а также привести их свойства, используемые в изложении.

Группа  $CG(\Gamma)$  определена только во введении. В основной части диссертации определение отсутствует (по идее определение должно быть в разделе 1.1 «Определения и обозначения»).

В доказательстве леммы 1.4 на с.35 написано «Утверждение (3) следует из [67, следствие 6.3]». Это так, но следует пояснить подробнее, в [67, следствие 6.3] ничего не сказано про полурегулярность группы.

В лемме 1.6 на с.37 вместо «в частности» должно быть «более того», поскольку идущее далее утверждение не является частным случаем предыдущего, а усиливает его (в случае, когда  $r$  делится на квадрат простого числа). Здесь же (после «в частности») не ясно, зачем нужно условие  $r > 2$ , ведь при  $r = 2$  утверждение верно согласно предыдущему утверждению.

На с.158 в первом абзаце параграфа 5.2 вместо  $Soc(G)$  должно быть  $Soc(G^2)$ .

Непонятно, почему термин «дистанционно-транзитивный» везде в тексте пишется с дефисом, а «дистанционно регулярный» без дефиса, как и другие аналогичные термины. Было бы естественно писать одинаково, без дефиса (тут стоит заметить, что оригинальный термин англоязычный, а использование дефиса в русском и английском языках подчиняется разным правилам). Также мне кажется неестественным и непонятным без определения термин «интранзитивный» в русскоязычном варианте.

Указанные замечания никак не умаляют теоретической значимости результатов диссертационной работы Циовкиной Л.Ю. В целом хочется отметить аккуратное оформление текста, а также точные ссылки на использованный материал, с указанием конкретных утверждений в цитируемом источнике, что очень помогает читателю, пытающемуся глубже разобраться в теории.

Диссертация Циовкиной Людмилы Юрьевны на тему «Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов» имеет внутреннее единство, обладает новизной и является завершенной научно-квалификационной работой, в которой на основании

выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в алгебры и алгебраической теории графов. Результаты диссертационного исследования Циовкиной Л.Ю. соответствуют паспорту научной специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертация соответствует критериям п. 9 «Положения о присуждении учёных степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ № 842 от 24.09.2013 г. (ред. от 11.09.2021 г.), а ее автор, Циовкина Людмила Юрьевна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,  
доктор физ.-мат. наук, профессор РАН  
Кротов Денис Станиславович,  
главный научный сотрудник

Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им.  
С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Почтовый адрес: Российская федерация, Новосибирск, 630090, пр. Академика Коптюга, 4.

E-mail: [krotov@math.nsc.ru](mailto:krotov@math.nsc.ru)

Телефон: +7(383)3297542

29 апреля 2022г.

Подпись Д. С. Кротова заверяю: