

## ОТЗЫВ

официального оппонента Азарова Дмитрия Николаевича

на диссертацию Дудкина Федора Анатольевича

”Групповые и алгоритмические свойства обобщённых групп Баумсллага–Солитера”,

представленную на соискание ученой степени доктора

физико-математических наук по специальности 01.01.06 —

математическая логика, алгебра и теория чисел

Свободные конструкции (свободное произведение с объединением и HNN-расширение) играют важную роль в комбинаторной и геометрической теории групп. Часто оказывается, что в результате применения свободных конструкций получаются группы, свойства которых связаны со свойствами базовых групп весьма неожиданным образом. Например, группы Баумсллага–Солитера являются HNN-расширениями бесконечной циклической группы и обладают необычными свойствами. Изучению этих свойств посвящены десятки работ.

Основной объект исследования диссертации Ф. А. Дудкина — обобщённые группы Баумсллага–Солитера. Конечно порождённая группа, действующая на дереве так, что все вершинные и рёберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы, называется *обобщённой группой Баумсллага–Солитера* ( $GBS$  группа). По теореме Басса–Серра  $GBS$  группы представляются в виде фундаментальных групп графов групп с бесконечными циклическими вершинными и рёберными группами. Это означает, что всякую  $GBS$  группу можно ”собрать” из бесконечных циклических групп с помощью свободных конструкций.

Оказывается,  $GBS$  группы интересны не только как примеры свободных конструкций. Изучением их свойств активно занимались математики на протяжении последних 25-и лет. Например, Д. Робинсон, Д. Дегрис, Н. Петросян и др. изучали геометрические и гомологические свойства  $GBS$  групп, их действия на различных объектах. Структурные и комбинаторные свойства  $GBS$  исследовали П. Крофоллер, Ж. Левитт, А. Дэльгадо и др. Особое внимание специалистов привлечено к проблеме изоморфизма  $GBS$  групп. Частичные результаты в этом направлении получены М. Форестером, М. Клэем и Ж. Левиттом.

Проблемы, рассматриваемые Ф. А. Дудкиным в его диссертации, как раз и относятся к очерченному кругу задач и, на мой взгляд, представляются весьма актуальными для современной теории групп.

Первая глава диссертации носит вспомогательный характер. В ней даются необ-

ходимые определения, вводятся обозначения и формулируется ряд вспомогательных результатов, используемых в дальнейшем.

Среди результатов диссертации можно выделить четыре направления, каждое из которых рассматривается в соответствующей главе.

Свойства  $GBS$  групп тесно связаны со свойствами групп Баумслэга–Солитера. Поэтому для изучения  $GBS$  групп полезно изучать группы Баумслэга–Солитера и их связь с  $GBS$  группами.

Во второй главе диссертации рассматриваются группы Баумслэга–Солитера со взаимно простыми параметрами. Для таких групп получено копредставление абстрактного соизмерителя и описаны неприводимые представления подгрупп конечного индекса (конструкция абстрактного соизмерителя в последнее время изучается достаточно интенсивно в различных направлениях).

Кроме того, во второй главе описаны все  $GBS$  группы, содержащие группу Баумслэга–Солитера с взаимно простыми параметрами в качестве подгруппы. Последний результат одновременно и независимо получен Ж. Левиттом. Однако, в диссертации кроме критерия существования такой подгруппы найдено ещё и само вложение. Значимость этого результата предопределяется тем, что многие свойства  $GBS$  групп связаны с аналогичными свойствами вложимых в них групп Баумслэга–Солитера.

Заметное место среди результатов диссертации занимает описание централизованной размерности  $GBS$  групп. Явно описать централизаторы элементов и наборов элементов подчас оказывается нелегкой задачей. В третьей главе диссертации Ф. А. Дудкина такое описание получено для  $GBS$  групп в явном виде. Это позволяет описать все цепочки вложенных централизаторов. Полученное описание хорошо согласовано с цепочками вложенных подграфов соответствующего графа с метками.

На основе этого описания диссертанту удалось построить алгоритм вычисления централизованной размерности  $GBS$  групп. Ввиду того, что класс групп данной конечной централизованной размерности универсально аксиоматизируем, полученные результаты позволяют приступить к задаче описания классов универсально (экзистенциально) эквивалентных  $GBS$  групп. В диссертации доказан критерий универсальной (экзистенциальной) эквивалентности  $GBS$  групп, представленных деревьями с метками. Кроме того, построен алгоритм проверки универсальной эквивалентности таких  $GBS$  групп.

В четвертой главе изучаются классы  $GBS$  групп. Получен критерий аппроксимируемости  $GBS$  групп конечными  $\pi$ -группами, который существенно обобщает ре-

зультат Д. И. Молдаванского, доказанный для обычных групп Баумслэга–Солитэра. Этот критерий показал, что свойства  $GBS$  групп существенно зависят от образа модулярного гомоморфизма.

Важными примерами  $GBS$  групп являются группы торических узлов  $T(p, q)$ . Такие группы получаются в результате свободного произведения двух бесконечных циклических групп с объединением по третьей бесконечной циклической группе. Причем  $p$  и  $q$  — индексы соответствующих вложений. Диссертант доказывает, что других групп 1-узлов среди  $GBS$  групп нет. Кроме того, описаны все группы  $n$ -узлов, которые являются  $GBS$  группами для  $n \geq 3$ .

В 2015 году Ж. Левитт описал все небольшие  $GBS$  группы и поставил вопрос об описании подгрупп конечного индекса в них. Эти подгруппы тоже являются  $GBS$  группами, и их полное описание получено в диссертации.

В пятой главе изучаются классические алгоритмические проблемы для  $GBS$  групп. Ряд авторов пытались решить проблему изоморфизма для  $GBS$ , но получили лишь частичное продвижение в этом вопросе. В диссертации решена проблема изоморфизма для  $GBS$  групп с одним мобильным ребром. В общем случае эта, по-видимому, весьма сложная проблема остается нерешенной и представляет существенный интерес.

С помощью теории накрытий для графов групп удалось получить критерий вложения произвольной  $GBS$  группы в  $GBS$  группу, представленную конечным числом редуцированных графов с метками и описать алгоритм проверки вложимости и построения вложения.

Диссертация представляет собой завершенное научное исследование на актуальную тему, в котором решены проблемы, имеющие важное значение для теории групп. Результаты диссертации могут найти и уже находят дальнейшие применения в комбинаторной и геометрической теории групп.

По теме диссертации автором опубликованы 13 печатных работ в рецензируемых научных изданиях, входящих в список ВАК и рецензируемых в базах данных Web of Science и Scopus. Лишь одна из них написана в соавторстве, но и в ней вклад диссертанта является решающим. Результаты работ неоднократно докладывались соискателем на научных конференциях и семинарах и хорошо известны специалистам по теории групп. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. В целом текст диссертации хорошо написан. Все основные результаты снабжены подробными и аккуратными доказательствами.

Тем не менее вынужден отметить, что в тексте диссертации присутствуют до-

садные опечатки: "элемент" вместо "элемент" на странице 46, "противоречия" вместо "противоречие" на странице 98 и др. В формуле на странице 20 "потеряны" скобки.

Следует отметить, что все замеченные недочеты носят чисто технический характер, могут быть легко устранены и не влияют на содержание, научную ценность и положительную оценку всей работы в целом.

Считаю, что диссертация Ф. А. Дудкина "Групповые и алгоритмические свойства обобщённых групп Баумслэга–Солитера" удовлетворяет требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание степени доктора наук, а её автор, Дудкин Федор Анатольевич, безусловно, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук,

доцент Азаров Дмитрий Николаевич.

153025, г. Иваново, ул. Ермака, 39,

телефон: +7 (4932) 32-62-10, e-mail: azarovdn@mail.ru

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

"Ивановский государственный университет"

Профессор кафедры

фундаментальной математики

Д. Н. Азаров

21 марта 2022 г.

Подпись Д. Н. Азарова заверяю: