

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
Российская Федерация, 191023,
г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д. 27
телефон: 312-40-58, факс: 310-53-77
от 26.10.2021 № 02-2171
на № _____ от _____

УТВЕРЖДАЮ
Директор ФГБУН
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
член-корреспондент РАН
М. А. Всемиров
_____, 2021

О Т З Ы В

ведущей организации на диссертационную работу Скрасанова Савелия Вячеславо-
вича "Классы максимальных подгрупп в конечных группах", представленную на со-
искание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертация С. В. Скрасанова посвящена решению трех следующих, на первый
взгляд не связанных между собой, проблем теории конечных групп: описание 2-
замыканий групп ранга 3, построение эффективного алгоритма для нахождения под-
группы наименьшего индекса в заданной группе, доказательство теоремы Виланда-
Хартли для субнормальных подгрупп группы, принадлежащей полному классу. В
действительности же, в каждой из этих задач требуется охарактеризовать подгруппы
некоторой группы, для которых выполняется определенное условие максимальности.
Так, для первой задачи оно означает "быть максимальной группой автоморфизмов
графа ранга 3 в симметрической группе", для второй задачи максимальность пони-
мается как свойство иметь наименьший индекс, а в третьей задаче речь идет о мак-
симальных субнормальных подгруппах относительно полного класса. Таким обра-
зом, задачи, решаемые в диссертации, выходят далеко за рамки абстрактной теории
групп, и их решение предполагает использование методов теории групп подстановок,
алгебраической комбинаторики и теории сложности вычислений.

Перейдем к основным результатам диссертации. В первой главе речь идет о груп-
пах ранга 3. Полная классификация таких групп достигнута к 1987 г. усилиями ряда
математиков, включая Э. Баннаи, В. Кантора, М. Либек и др. Однако полученная
классификация не представлялась исчерпывающей, поскольку различные группы
ранга 3 могут действовать как группы автоморфизмов одного и того же сильно ре-
гулярного графа Γ , то есть быть 2-эквивалентными в терминологии Г. Виланда. В то
же время 2-замыкания всех таких групп совпадают и равны полной группе автомор-
физмов графа Γ . Это приводит к естественной проблеме описания 2-замыканий групп
ранга 3, решаемой в первой главе (теорема 1). Решение достигается тщательным ана-
лизом арифметических свойств левых групп ранга 3 и параметров соответствующих
сильно регулярных графов. Построенная теория позволяет лучше понять контрпри-
мер к гипотезе И. Н. Пономаренко, найденный автором и приведенный в §1.6.

Основные результаты второй главы представлены теоремой 3, показывающей, что
наименьший индекс собственной подгруппы данной группы G может быть найден за
полиномиальное время от числа образующих этой группы, и теоремой 4, в которой
помимо индекса находится и множество всех таких подгрупп, но уже за время, по-

линомиальное от порядка группы G . В обоих случаях строится соответствующий алгоритм. Отметим, что нахождение эффективного фундаментального алгоритма в вычислительной теории групп (оба алгоритма, построенные в диссертации, фундаментальны уже потому, что не накладывается никаких ограничений на G) часто оказывается трудной математической проблемой: достаточно сказать, что широко известная проблема изоморфизма графов эквивалентна нахождению стабилизатора группы подстановок. Не исключением являются и алгоритмы, построенные для доказательства теорем 3 и 4. Сами алгоритмы достаточно просты и изящны, но обоснование верхней оценки на время их работы требует глубокого понимания вычислительной теории групп. В качестве следствия получается решение проблемы представимости группы на дереве, поставленной С. Дуттом и П. П. Курурой (2009).

Третья глава посвящена доказательству утверждения (теорема 5), которое было анонсировано Г. Виландом в 1980 г., но доказательство которого так и не было опубликовано; в настоящей работе это утверждение называется теоремой Виланда–Хартли для субмаксимальных $\mathfrak{X}$ -подгрупп, где $\mathfrak{X}$ – полный класс групп, то есть инвариантный относительно прямых произведений, гомоморфных образов и расширений. В этой теореме речь идет о фундаментальном свойстве максимальных $\mathfrak{X}$ -подгрупп данной группы. Частными случаями этого утверждения являются теорема Виланда–Хартли для нормальных подгрупп, обобщение теоремы Силова, полученное Л. А. Шеметковым в 2003 г., и др. Приведенное доказательство теоремы 5 достаточно элегантно, хотя и не выходит за рамки стандартной теории групп. В качестве следствия получен критерий сопряженности субмаксимальных $\mathfrak{X}$ -подгрупп.

Диссертация написана и оформлена очень профессионально, практически без опечаток, стилистических погрешностей и неточностей (отметим лишь опечатку в слове “замечание” на стр. 17, строка 9, неудачный оборот “алгоритм ... следует” на стр. 41, неточность в утверждении перед следствием 1.3 на стр. 17, где пропущено условие $|\Delta| > 1$). Все результаты этой работой являются новыми и снабжены понятными и подробными доказательствами, а их достоверность не вызывает никаких сомнений. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

К недостаткам работы можно отнести лишь некоторую сухость в подаче материала, приводящую к тому, что понятия, хорошо известные лишь специалистам, не объясняются подробно. К ним относятся, например, сильно регулярные графы и их параметры, несколько раз упоминаемые в первой главе, или время работы алгоритма, ключевое для понимания теорем 3 и 4 второй главы. Сказанное, разумеется, относится в большей степени к форме, и никоим образом не влияет ни на содержательность диссертации, ни на ее высокую оценку.

Диссертация является целостным математическим исследованием и представляется существенным вкладом как в теорию конечных групп, так и алгебраическую комбинаторику и теорию сложности алгоритмов. Результаты диссертации и методы их доказательства могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В. А. Стеклова РАН, механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, Институте математики им. С. Л. Соболева СОРАН, а также в других научных центрах России.

Результаты диссертации представлены в четырех работах, опубликованных в журналах из списка ВАК. Лишь одна из них написана в соавторстве, но и в ней вклад диссертанта является существенным и четко определенным. Содержание дис-

сертации неоднократно докладывалось автором на конференциях, в том числе и международных (включая 8-ой европейский конгресс математиков, Порторож, Словения, 2021).

Всё сказанное выше позволяет заключить, что диссертация С. В. Скрасанова "Классы максимальных подгрупп в конечных группах" удовлетворяет требованиям ВАК Минобрнауки, предъявляемым к кандидатским диссертациям в соответствии с критериями, установленными "Положением о порядке присуждения ученых степеней" от 24.09.2013 No. 842, а её автор Скрасанов Савелий Вячеславович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв ведущей организации обсужден и одобрен на заседании лаборатории алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Заведующий лабораторией алгебры и теории чисел,
доктор физико-математических наук
член-корреспондент РАН

И. А. Панин

Сведения о ведущей организации: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Адрес организации: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27

Телефон: +7 (812) 312-40-58

E-mail: admin@pdmi.ras.ru

Подпись руки_

