ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу
Скресанова Савелия Вячеславовича «Классы максимальных подгрупп в конечных группах» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертационной работе С.В. Скресанова представлены три направления исследований в теории конечных групп.

Первым из этих направлений является изучение 2-замыканий конечных групп подстановок. Если G — группа подстановок на множестве X, то ее 2-замыканием называется наибольшая группа подстановок на X, которая имеет на декартовом квадрате $X \times X$ множества X те же орбиты, что и группа G. Другими словами, 2-замыкание группы G состоит в точности из тех подстановок на X, которые индуцируют автоморфизмы на всех ее орбитальных орграфах (т. е. ориентированных графах с множеством вершин X и множеством ребер, совпадающим с одной из орбит G на $X \times X$). Образно выражаясь, 2-замыкание группы подстановок — это ее аппроксимация, получаемая с использованием только орбитальных оргафов группы, а нахождение для группы подстановок ее 2-замыкания — это вопрос о точности такой аппроксимации. Задача нахождения 2-замыканий конечных групп подстановок естественным образом возникает также при исследовании их орбитальных орграфов. Систематическое изучение 2-замыканий конечных групп подстановок восходит к работе Х. Виланда 1969 г., в которой был обоснован общий метод исследования группы подстановок на конечном множестве посредством рассмотрения ее орбит на степенях этого множества. В последующих работах Ш. Прэгер, Я. Саксла, М. Либека было показано, что для многих представляющих интерес конечных групп подстановок их 2-замыкания несильно отличаются от самих групп. В последние десятилетия наблюдается значительный рост активности в изучении 2-замыканий конечных групп подстановок. В круг интересов попали, в частности, вопросы алгоритмической сложности нахождения 2-замыканий конечных групп подстановок. В диссертационной работе изучаются 2-замыкания конечных групп подстановок ранга 3, т. е. с 3 орбитами на декартовом квадрате. 2-замыкание такой группы совпадает с группой всех автоморфизмов орбитального орграфа, построенного по любой из двух недиагональных орбит группы. Среди конечных групп подстановок ранга 3 имеется много групп, представляющих значительный интерес. Также значительный интерес представляют их орбитальные орграфы (например, в контексте исследования сильно регулярных графов). Конечные группы подстановок ранга 3 были описаны в работах Э. Баннаи, У. Кантора, Р. Либлера, Я. Саксла, М. Либека с использованием классификации конечных простых групп. Отметим, что хотя малость ранга и позволила получить описание конечных групп подстановок ранга 3, она же скорее способствует возможности отличия строения группы от строения ее 2-замыкания. Поэтому описание 2-замыканий конечных групп подстановок ранга 3 — важная, актуальная и далеко не простая задача. В **главе 1** диссертации получено описание 2-замыканий всех конечных групп подстановок ранга 3 достаточно большой степени (теоремы 1 и 2). Этот важный результат во многом решает задачу описания 2-замыканий конечных групп подстановок ранга 3, поскольку для нахождения 2-замыканий остающихся нерассмотренными групп ранга 3 небольших степеней могут быть привлечены компьютерные вычисления. Кроме того, в главе 1 диссертации строятся примеры конечных разрешимых групп подстановок, 2-замыкания которых содержат композиционные факторы, отличные как от циклических, так и от знакопеременных групп, что дает отрицательный ответ на вопрос И.Н. Пономаренко (вопрос 19.67 из «Коуровской тетради»). Более того, строится бесконечная серия таких конечных разрешимых групп подстановок, причем первая группа в этой серии является разрешимой группой подстановок ранга 3.

Вторым направлением исследований, представленным в диссертационной работе, является изучение максимальных подгрупп наименьшего индекса конечных групп. Интерес к ним обусловлен тем, что подстановочное представление группы на смежных классах по такой подгруппе является нетривиальным подстановочным представлением группы наименьшей степени и часто оказывается наиболее удобным для работы с группой. Для всех конечных простых групп такие подгруппы были найдены в работах Б. Куперстейна, В.Д. Мазурова, А.В. Васильева (этот результат используется в диссертации). **Глава 2** диссертации посвящена алгоритмической сложности вопросов, касающихся максимальных подгрупп наименьшего индекса конечных групп. Доказывается, что для группы подстановок степени n, заданной порождающими подстановками, имеется полиномиальный от n алгоритм нахождения этого наименьшего индекса (теорема 3), а для группы порядка n, заданной таблицей умножения, имеется полиномиальный от n алгоритм нахождения всех ее собственных подгрупп наименьшего индекса (теорема 4). Ввиду той роли, которую играют при изучении конечных групп их максимальные подгруппы наименьшего индекса, ясна важность этих результатов. С использованием первого из них в главе 2 также дается положительный ответ на вопрос С. Дутты и П. Курура о существовании для дерева T с m вершинами, заданного множеством ребер, и группы подстановок G степени n, заданной порождающими подстановками, полиномиального от $m+n$ алгоритма, распознающего наличие нетривиального гомоморфизма G в $Aut(T)$.

Третьим направлением исследований конечных групп, представленным в диссертационной работе, является изучение их максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп, где $\mathfrak{X}$ — полный (т. е. замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений) класс конечных групп — направление исследований, восходящее к теоремам Силова. В 1979 г. на конференции в г. Санта-Круз, на которой классификация конечных простых групп уже обсуждалась как вполне достижимая, Х. Виландом была выдвинута программа изучения максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп для произвольного полного класса конечных групп $\mathfrak{X}$ посредством рассмотрения проекций этих подгрупп на факторы композиционного ряда группы. Однако важный для реализации этой программы результат, утверждающий, что пересечение максимальной $\mathfrak{X}$-подгруппы с субнормальной подгруппой содержит каждую нормализующую его $\mathfrak{X}$-подгруппу из этой субнормальной подгруппы (что является обобщением теоремы Виланда – Хартли для нормальных подгрупп), хотя и был анонсирован Х. Виландом в трудах конференции, но его доказательство так и не было опубликовано. В **главе 3** диссертации дается доказательство этого результата (теорема 5), устраняющее это существенное препятствие для реализации программы Х. Виланда,

Трем указанным главам диссертационной работы предшествует **введение**, в котором обосновывается важность и актуальность тем исследования, формулируются цели исследования, перечисляются основные результаты работы с указанием методов их получения. Кроме того, имеются **заключение**, **приложение** с таблицами, **список условных обозначений** и **список литературы**. Работа изложена на 65 страницах, список литературы включает 68 наименований.

Изложение материала продуманное. Замеченные недостатки незначительны и легко исправляемы. В следствии из главы 2 следовало бы уточнить, что за полиномиальное от $m + n$ время (где m — число вершин дерева, n — степень группы подстановок). Теорему 5 правильнее было бы называть (во введении и главе 3) не теоремой Виланда – Хартли для субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп, а обобщением теоремы Виланда – Хартли на субмаксимальные $\mathfrak{X}$-подгруппы. Имеется незначительное количество опечаток (например, на с. 6 в определении полного класса, на с. 33 в формуле, определяющей овоид Сузуки – Титса).

Таким образом, диссертация С.В. Скресанова представляет собой законченную научную работу, основные результаты которой вносят существенный вклад в теорию конечных групп. Основные результаты, полученные в диссертации являются новыми (теорема 5 была анонсирована Х. Виландом в 1979 г., но доказательство так и не было опубликовано), актуальными, представляют значительный теоретический интерес и будут использоваться в дальнейших исследованиях. Они снабжены строгими математическими доказательствами. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Основные результаты своевременно опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК (всего 4 статьи), и неоднократно докладывались на различных российских и международных научных конференциях и семинарах.

Считаю, что диссертация С.В. Скресанова «Классы максимальных подгрупп в конечных группах» полностью соответствует всем требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Скресанов Савелий Вячеславович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доктор физ.-мат. наук,
ведущий научный сотрудник
отдела алгебры и топологии
Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Института математики и механики
им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения
Российской академии наук Трофимов Владимир Иванович

03 ноября 2021 г.

Подпись В.И. Трофимова заверяю:
ученый секретарь Института
кандидат физ.-мат. наук О.Н. Ульянов

Почтовый адрес:
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108,
Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Телефон: +7 (343) 3628107
E-mail: trofimov@imm.uran.ru