

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Мамонтова Андрея Сергеевича
«Периодические группы с плотным спектром»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация А.С.Мамонтова посвящена классической тематике — исследованию различных условий на периодичность элементов группы, обеспечивающих ее конечность. Наиболее известным вопросом такого рода является проблема Бернсайда о периодических группах, поставленная еще в 1902 году: конечна ли для данного n любая конечно порожденная группа периода n , т.е. группа, удовлетворяющая тождественному соотношению $x^n = 1$. Или, в эквивалентной формулировке, является ли любая группа периода n локально конечной. Несмотря на значительные усилия нескольких поколений математиков, до окончательного решения проблемы еще далеко. Известна лишь локальная конечность групп периодов 2, 3, 4 и 6, а при достаточно больших значениях периода n свободная группа $B(m, n)$ в многообразии групп периода n с $m \geq 2$ порождающими бесконечна.

Хотя доказательство локальной конечности групп периодов 2 и 3 является несложным упражнением, а доказательство локальной конечности групп периода 4 — содержанием небольшой заметки, локальная конечность групп периода 6 была установлена лишь в 1958 году (теорема М.Холла), через полвека после формулировки самой проблемы Бернсайда, и потребовала значительного объема вычислений. Вопрос о локальной конечности групп периода 5 — уже открытая проблема. В этом случае можно лишь надеяться на положительный ответ, хотя, очевидно, возможное доказательство этого утверждения также потребует сложных вычислений. Есть определенная надежда доказать локальную конечность групп периодов 8 и 12. Это связано с тем, что значения этих периодов имеют лишь простые делители 2 и 3. За исключением нескольких относительно несложных случаев, доказательство локальной конечности групп с различными условиями периодичности элементов представляет собой чрезвычайно трудную техническую задачу. Любые частичные результаты в этом направлении представляют значительный интерес.

Один из классических вариантов постановки задачи о локальной конечности периодических групп — вопрос о локальной конечности группы G в случае, когда известно множество $\omega(G)$ порядков элементов группы (ее *спектр*). Первые результаты в этом направлении были получены еще в 30–40-х годах прошлого века, когда Б.Нойман и И.Н.Санов доказали локальную конечность групп с $\omega(G) = \{1, 2, 3\}$ и с $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ соответственно. Проблема Бернсайда — частный случай этого вопроса, когда $\omega(G)$ есть множество делителей числа n . Как и в случае проблемы Бернсайда, чем больше числа содержатся в множестве $\omega(G)$, тем труднее оказывается получение положительного ответа на этот вопрос. Существующими методами удается исследовать лишь группы, для которых спектр $\omega(G)$ содержит числа из первого десятка. Вопросы о локальной конечности периодических групп, содержащих элемент порядка в интервале от 13 до, скажем, 30 (за

возможными отдельными исключениями) представляют собой, по-видимому, трудную математическую проблему, подходов к которой в настоящее время не известно.

Во многих случаях из локальной конечности группы можно получить некоторую информацию о структуре группы. Таким образом, тесно связанным с вопросом о локальной конечности группы с заданным спектром является естественный вопрос об описании ее структуры. В более общей формулировке возникает вопрос о структуре групп с заданными условиями на порядки элементов. В случае, когда группа является локально конечна, задача по существу сводится к аналогичной задаче для конечных групп. Однако существенную информацию о структуре группы можно получить и в случае, когда локальная конечность групп не установлена. В качестве примера такого результата можно отметить описание групп со спектром $\{1, 2, 5\}$, полученное М.Ньюманом (1979). Наиболее сильное утверждение о структуре группы с данным спектром возникает, когда удается доказать единственность с точностью до изоморфизма группы G , обладающей данным спектром $\omega(G)$. О таких группах говорят, что G *распознаваема по спектру*. Наличие этого свойства группы было доказано для групп $PSL(2, 2^m)$ (А.Х.Журтов, В.Д.Мазуров, 1999) и $PSL(2, 7)$ (Д.В.Лыткина, А.А.Кузнецов, 2007). Можно говорить об относительном варианте этого понятия — распознаваемости по спектру в данном классе групп $\mathcal{M}$. При этом вопросы о распознаваемости групп, в частности, конечных простых групп, по спектру в классе всех *конечных* групп и различные модификации этих вопросов активно исследовались специалистами по конечным группам в течение последних нескольких десятилетий.

По всем упомянутым выше вопросам было получено значительное число результатов (среди авторов — Б.Нойман, И.Н.Санов, М.Ньюман, Н.Гупта, В.Д.Мазуров, Э.Ябара, Р.Брандл, Б.Ши, Д.В.Лыткина и др.), причем, за последние 20 лет активность таких исследований существенно возросла. Особенно следует отметить работы В.Д.Мазурова и новосибирской научной школы, внесших существенный вклад в становление и развитие этой тематики.

Основное содержание диссертации А.С.Мамонтова состоит из 5 глав. Главы состоят, в свою очередь, из разделов.

Глава 1 диссертации носит вспомогательный характер. В ней даются необходимые определения, вводятся обозначения и формулируется ряд вспомогательных результатов, используемых в дальнейшем.

В Главе 2 доказывается ряд структурных результатов о периодических группах. Утверждения из этой главы существенным образом используются в доказательствах в последующих главах диссертации. Один из результатов (Теорема 1) имеет и несомненный самостоятельный интерес. Теорема утверждает, что в группе G периода $4(2k + 1)$, если инволюция i вместе с любым сопряженным ей элементом порождает 2-группу, то весь класс сопряженности i^G порождает 2-группу. Этот результат является аналогом известной теоремы Бэра-Сузуки для конечных групп. Вопрос об истинности аналога теоремы Бэра-Сузуки для периодических групп был сформулирован, в частности, в Коуровской тетради.

Глава 3 диссертации посвящена результатам о локальной конечности и структуре групп со спектром, состоящим из «небольшого» набора чисел. Как было отмечено выше, существующие методы позволяют исследовать лишь случаи, когда спектр содержит

числа из первого десятка (и уже в этих случаях доказательства требуют серьезной технической работы).

Основной результат раздела 3.1 — Теорема 2, утверждающая, что любая группа, спектр которой является подмножеством множества $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, локально конечна. Так как список всех значений периода, для которого проблема Бернсайда решена положительно, состоит из чисел 2, 3, 4 и 6, эта теорема является естественным обобщением этого положительного решения.

В разделе 3.2 рассматривается случай, когда спектр группы G состоит из чисел 1, 3, 5 и делителей числа 8 (более компактно это условие на спектр записывается в виде $\mu(G) = \{3, 5, 8\}$, где $\mu(G)$ состоит из максимальных по отношению делимости чисел из $\omega(G)$, а спектр $\omega(G)$ состоит, соответственно, из всех натуральных делителей чисел из $\mu(G)$). Теорема 3 утверждает, что в этом случае для G имеет место единственная возможность — G изоморфна группе Матье M_{10} . Этот результат, с одной стороны, дает полное описание групп с данным спектром, а с другой — дает новый пример группы, распознаваемой по спектру в классе *всех* групп.

Раздел 3.3 посвящен еще одному подобному результату (Теореме 4) — распознаваемости по спектру группы G с $\mu(G) = \{3, 4, 5, 7\}$. В этом случае G изоморфна конечной простой группе $PSL(3, 4)$. Следует отметить, что распознаваемость по спектру групп M_{10} из Теоремы 3 и $PSL(3, 4)$ в классе конечных групп по существу была известна ранее, а из нее несложно выводится распознаваемость этих групп по спектру в классе локально конечных групп. Таким образом, основное достижение диссертанта в этих двух результатах — доказательство локальной конечности групп с указанным спектром.

В разделе 3.4 рассматриваются группы со спектрами $\mu(G) = \{4, 5, 9\}$ и $\mu(G) = \{4, 7, 9\}$. Основной результат (Теорема 5) утверждает, что групп с $\mu(G) = \{4, 5, 9\}$ не существует, а всякая группа G с $\mu(G) = \{4, 7, 9\}$ локальна конечна и является расширением некоторой 2-группы с помощью $PSL(2, 8)$. Как и в предыдущих случаях, существенный вклад диссертанта в доказательство этого результата состоит в установлении локальной конечности рассматриваемых групп, а полученное структурное описание вытекает из известных ранее результатов о соответствующих конечных группах.

Результаты разделов 3.5 и 3.6 посвящены группам периода 12. Доказана локальная конечность этих групп в двух случаях: когда порядок произведения любых двух инволюций группы G отличен от 4 (Теорема 6) и когда порядок произведения любых инволюций группы G отличен от 6 (Теорема 7). Кроме того, Теорема 7 дает структурное описание соответствующей группы G . Помимо самостоятельного интереса, ценность этих результатов обусловлена также тем, что вопрос о локальной конечности групп периода 12 является открытой проблемой, и любой частичный результат в этом направлении может быть полезен при исследовании общего случая.

Основные результаты Главы 4 касаются групп с так называемым «плотным» спектром, т.е. спектром вида $\{1, 2, \dots, n\}$. Конечные группы с таким условием изучались в работе Р.Брандла и В.Ши (1991), в которой получена полная их классификация. В частности, конечных групп с плотным спектром при $n \geq 9$ не существует, а при $n = 7$ такая конечная группа единственна и изоморфна знакопеременной группе A_7 . В случае бесконечных групп с плотным спектром возникает естественный вопрос об их локальной конечности. Если ответ на этот вопрос положительный, то описание таких групп можно получить на основе результата Брандла-Ши. С другой стороны, утверждение

о существовании конечно порожденных бесконечных групп с плотным спектром для достаточно больших значений n выглядит вполне правдоподобным (вопрос открыт). В случае $n \leq 5$ локальная конечность таких групп вытекает из упомянутого выше результата В.Д.Мазурова (2000).

В Главе 4 доказывается локальная конечность групп со спектрами $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. В качестве следствия в первом случае получается структурное описание групп, аналогичное описанию Брандла-Ши, а во втором случае для группы остается единственная возможность — быть изоморфной группе A_7 . Локальная конечность групп со спектром $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ вместе с их структурным описанием составляет содержание Теоремы 8. Теорема 9 утверждает распознаваемость по спектру группы A_7 , — и мы получаем еще один замечательный пример группы, распознаваемой по спектру в классе всех групп. Еще один результат Главы 4 — некоторое частичное описание структуры групп с $\mu(G) = \{6, 7\}$ (Теорема 10). Заметим, что вопрос о локальной конечности групп периода 7 открыт, и, по-видимому, является очень трудным; этим обуславливается невозможность существующими методами исследовать структуру таких групп в случае, если они не являются локально конечными.

В Главе 5 диссертации рассматриваются группы, на которые накладываются условия на порядки элементов уже без обязательного требования периодичности. Пусть D — некоторый класс сопряженных инволюций группы G . Пара (G, D) называется *группой n -транспозиций*, если D порождает G и порядок произведения любых двух инволюций из D не превосходит n . Интерес к таким группам возник в связи с изучением конечных простых групп. В частности, наибольшая спорадическая конечная простая группа («Монстр») может быть представлена как группа 6-транспозиций. Основным результатом Главы 5 (Теорема 11) дает полное описание минимальных 3-порожденных групп 6-транспозиций, состоящее из конечного списка явно заданных групп. Здесь группа n -транспозиций (G, D) называется минимальной 3-порожденной, если любая собственная подгруппа группы G , порожденная тремя элементами из D , является группой, порожденной двумя такими элементами (и, следовательно, является диэдральной группой порядка не больше $2n$).

Как результаты диссертации, так и доказательства этих результатов объединены общим мотивом — доказательством локальной конечности групп, в которых имеется большое число элементов конечного порядка (в большинстве случаев рассматриваются периодические группы). С большой степенью приближенности, подход А.С.Мамонтова к доказательству локальной конечности рассматриваемой группы G можно описать следующим образом. Мы начинаем с описания «небольшой» подгруппы G . Например, во многих случаях в качестве нее берется подгруппа, порожденная двумя элементами a и b порядка 2 и 3 соответственно. Описание всех возможных вариантов таких подгрупп дается Леммой 2.2.1 Главы 2. Затем мы постепенно вводим в рассмотрение другие элементы группы G . Двигаясь таким образом шаг за шагом, на каждом шаге мы получаем новые классы подгрупп группы G , которые являются гомоморфными образами групп с известными порождающими и определенным образом подобранным конечным множеством определяющих соотношений. При этом часть определяющих соотношений возникает из условий на порядки элементов группы, причем, сами порядки не известны,

а известно лишь их возможное конечное число вариантов. Получаем, таким образом, конечное число вариантов групп, заданных порождающими и определяющими соотношениями. Ключевым моментом шага доказательства является применение к полученным группам алгоритма перечисления смежных классов, реализованного на компьютере в пакете GAP для алгебраических вычислений. С помощью этого алгоритма мы получаем возможные варианты для исследуемых подгрупп группы G на данном шаге доказательства. Затем мы рассматриваем новые подгруппы группы G и т.д. до тех пор, пока структура группы G или ее локальная конечность будет окончательно не установлена. В процессе доказательства возникает необходимость привлечения многочисленных фактов теории групп — классических теорем, полученных ранее результатов других авторов, свойств конкретных конечных групп и т.п. Следует отметить, что диссертант демонстрирует виртуозное владение соответствующей техникой.

Диссертация изложена ясно и достаточно подробно, хотя в ряде мест в доказательствах следовало бы дать и более подробное пояснение. Имеется несколько замечаний, не влияющих на общую оценку диссертации:

- (1) Стр. 18. При формулировке утверждения « $F_{42} < F_{294}$ » следует сослаться на Лемму 2.4.1.
- (2) Стр. 34. Фразу «Предположим противное» из начала доказательства Леммы 2.5.3 следует уточнить. Формулировка Леммы 2.5.3 состоит из двух утверждений и имеется в виду «предположим, что первое утверждение Леммы 2.5.3 неверно». Аналогичное замечание относится к нескольким другим местам диссертации.
- (3) Стр. 38. Рассуждения в абзаце «Элементы ax^{-1}, x, k удовлетворяют условиям Леммы 2.5.6. . . » проводится в предположении $k \neq 1$.
- (4) Стр. 39, строка 7. Вместо $(tb)^6 = (tab)^4$ должно быть $(tb)^6 = (tab)^4 = 1$.
- (5) Стр. 46. В формулировке Леммы 3.1.4 вместо $\langle t, C_G(Z(\langle a, b \rangle)) \rangle$ должно быть $\langle t, Z(\langle a, b \rangle) \rangle$.
- (6) Стр. 48, последний абзац. Следует сформулировать и сослаться на соответствующий результат Шункова.
- (7) Стр. 49. Следовало бы объяснить более подробно, почему из результатов работы [89] следует $G \simeq M_{10}$.
- (8) Стр. 57. В первой фразе доказательства Леммы 3.5.1 должно быть « $|zt| = 6$ или $|zt| = 2$ ».
- (9) Стр. 68, строка 3. В действительности в дальнейшем доказательстве используется предположение, что G — контрпример к Теореме 8 и Предложению 4.1.1.
- (10) Стр. 68. В доказательстве результата работы [47] используется классификация конечных простых групп; было бы корректно отметить это и для Теоремы 8.

Давая общую оценку результатов диссертации, можно с уверенностью утверждать, что диссертация А.С.Мамонтова представляет собой значительное научное достижение. В диссертации доказана локальная конечность и исследована структура групп, спектр которых принадлежит целой серии возможных вариантов, содержащих небольшие числа. При этом даже небольшое ослабление верхней оценки на порядки элементов, составляющих спектр исследуемой группы, приводит к принципиальным трудностям такого исследования, по-видимому, неразрешимыми с помощью существующих методов. Таким

образом, можно утверждать, что диссертация покрывает собой значительную часть возможных результатов в этом направлении. Кроме результатов о группах с данным спектром, диссертация содержит и ряд других результатов, имеющих несомненное научное значение. В частности, была установлена локальная конечность и описана структура некоторых специальных классов групп периода 12, что может быть использовано при исследовании локальной конечности как групп периода 12 в общем случае, так и для других классов групп, локальная конечность которых не известна.

Результаты диссертации являются новыми и могут быть использованы специалистами в области конечных групп, периодических групп, групп с условиями конечности и других специалистов в области алгебры. Утверждения снабжены подробными доказательствами, а их достоверность не вызывает сомнений. Все результаты своевременно опубликованы в научных журналах, включенных в перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук.

Автореферат диссертации полно и правильно отражает результаты диссертации.

Резюмируя вышесказанное, считаю, что диссертация А.С.Мамонтова удовлетворяет всем требованиям п.9 «Положения о присуждении ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Мамонтов Андрей Сергеевич, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
Лысенко Игорь Геронтьевич,
ведущий научный сотрудник
Математического института им. В.А.Стеклова
Российской академии наук

Почтовый адрес:
Россия, 119991
Москва, ул. Губкина, 8
Тел.: +7(495) 984-81-41
E-mail: lysionok@mi-ras.ru

« » ноября 2021 года