ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Ильи Борисовича Горшкова
«Структура конечных групп с данными размерами классов сопряженных элементов»,
представленной на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

Размер класса сопряженности, который, как известно, также равен индексу централизатора, наряду с порядком является одной из основных числовых характеристик элемента конечной группы. Еще в самом начале XX века в 1904 году В. Бернсайд в своей работе о разрешимости $\{p, q\}$-групп показал, что конечная группа, имеющая класс сопряженности, размер которого — простое число, не может быть простой. В 1938 году С. А. Чунихин установил непростоту конечных групп с изолированными классами сопряженных элементов, полное же описание таких групп было получено Л. С. Казариным в 1981 году. Отметим также работы Р. Бэра, П. Х. Галлахера, Л. Ф. Косвинцева, И. А. Макдоналда и Р. Шмидта этого периода.

Естественный вопрос о том, что можно сказать о конечной группе G, зная множество всех размеров классов сопряженных элементов (в диссертации это множество, из которого для удобства исключена 1, обозначается через $N(G)$), является центральным для данной диссертации. В серии работ, последняя из которых датируется 1970 годом, Н. Ито исследовал строение групп с небольшим множеством $N(G)$. Оказывается, что если множество $N(G)$ одноэлементно, то группа G нильпотентна, если мощность $|N(G)| = 2$, она разрешима, наконец, простая группа G с $|N(G)| = 3$ — это группа $PSL(2, 2^m)$. Отметим также нетривиальную работу А. Р. Камины 1972 года, в которой доказана нильпотентность группы G с $N(G) = \{p^a, q^b, p^a q^b\}$.

Завершение классификации конечных простых групп открыло новые горизонты в этой классической тематике. В 1987 году Дж. Г. Томпсон в письме В. Ши высказал гипотезу, вопрос о справедливости которой в 1992 году бы внесен в «Коуровскую тетрадь» А. С. Кондратьевым.

Гипотеза Томпсона. Пусть L — конечная неабелева простая группа, а G — конечная группа с тривиальным центром. Тогда равенство $N(G) = N(L)$ влечет изоморфизм групп G и L.

Первый существенный прогресс в доказательстве справедливости гипотезы Томпсона был достигнут Г. Ченом в середине 1990-х годов. Он разработал метод, позволяющий решать данную проблему для простых групп с несвязным графом простых чисел, что дало возможность проверить гипотезу для большого числа исключительных групп лиева типа, классических групп малых размерностей и спорадических простых групп.

Дальнейшее продвижение в решении данного вопроса произошло в 2009-2010 гг. в работах А. В. Васильева и И. Б. Горшкова, в которых были получены первые примеры простых групп со связным графом простых чисел, для которых справедлива гипотеза Томпсона. Обобщая и развивая эти методы, Н. Ахanджиде сумела доказать гипотезу для всех простых проективных специальных линейных групп (2011). В серии последующих работ, последняя из которых опубликована в 2017 году, она показала, что гипотеза Томпсона справедлива для всех серий простых классических групп за исключением ортогональных групп в размерностях 8 и 16. Последние две серии остались камнем преткновения — методы, предложенные Аханджиде, для них не работали.

В вопросе характеризации простых групп размерами классов сопряженных элементов особняком стоят знакопеременные группы подстановок G. Дело в том, что множество $N(G)$ в этом случае не обладает рядом полезных свойств, которые использовались для проверки гипотезы Томпсона для групп лиева типа, в том числе и классических групп. Поэтому случай знакопеременных групп всегда считался наиболее сложным. Тем не менее, Горшкову удалось доказать справедливость гипотезы Томпсона для знакопеременных групп (по модулю гипотезы Гольдбаха о представлении любого четного числа в виде суммы двух простых) в серии из четырех весьма нетривиальных работ, которые составляют содержание первой главы диссертации.

Горшкову также удалось преодолеть трудности, возникшие с ортогональными группами в размерностях 8 и 16. Для этого ему потребовалось несколько обобщить понятие группы, удовлетворяющей $\{p,q\}^*$-условию, возникшее в уже упоминавшейся работе Камины, и доказать замечательную теорему, интересную саму по себе, вне зависимости от гипотезы Томпсона. Оказывается, в конечной группе с тривиальным центром, удовлетворяющей $\{p,q\}^*$-условию, пересечение централизатора любого p-элемента с централизатором любого q-элемента всегда тривиально. Доказательство этого результата составляет содержание третьей главы диссертации. Используя его, Горшков показал справедливость гипотезы Томпсона для оставшихся серий ортогональных групп (четвертая глава) и тем самым завершил ее проверку для всех конечных простых групп.

Таким образом, Илья Борисович Горшков внес решающий вклад в решение открытой более 30 лет широко известной теоретико-групповой гипотезы Дж. Томпсона.

В диссертации содержится еще один яркий результат (пятая глава). Заметим, что симметрические группы подстановок — один из наиболее важных и изученных объектов в теории групп. Тем ценнее каждый новый существенный результат о них. Именно к таким результатам относится полученная диссертантом теорема: каждая конечная группа, множество порядков элементов которой совпадает с множеством порядков элементов симметрической группы S_n при $n > 10$, изоморфна S_n. Иными словами, за конечным числом исключений каждая симметрическая группа распознается по спектру, т.е. множеству порядков элементов, в классе конечных групп. Указанный результат лежит в русле исследований проблемы распознавания конечных групп по спектру. В этих исследованиях после известных общих результатов о простых группах, центр внимания смещается на почти простые группы, к которым и относятся группы S_n при $n \geq 5$.

Считаю, что диссертация И. Б. Горшкова «Структура конечных групп с данными размерами классов сопряженных элементов» соответствует всем критериям, установленным в положении о присуждении научных степеней: работа посвящена актуальной теме, полученные в ней результаты, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение, являются новыми, полностью и правильно обоснованы, своевременно и в полном объеме опубликованы в научных изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК. Результаты и методы, предложенные автором, будут использованы в дальнейших исследованиях по теории групп. Вышеизложенное позволяет утверждать, что И. Б. Горшков заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

Научный консультант
доктор физико-математических наук

профессор Андрей Викторович Васильев
660090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
телефон: +7 383-3297646
e-mail: vasand@math.nsc.ru
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
главный научный сотрудник лаборатории теории групп ___________ А. В. Васильев
29 июля 2020 г.

Подпись А. В. Васильева заверяю:
Зам. директора ИМ СО РАН
доктор физико-математических наук ___________ Е. П. Вдовин
29 июля 2020 г.