ОТЗЫВ

научного консультанта на диссертацию Файзрахманова Марата Хайдаровича «Обобщенно вычислимые нумерации и спектры степеней счетных семейств», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Всесторонне и интенсивное исследование обобщенно вычислимых семейств было инициировано в конце прошлого столетия появлением статей Гончарова, Сорби (1997) и Вехнера (1998), в которых эффективные свойства семейств изучались как с позиции структур их нумераций, так и спектров их степеней соответственно.

Первая позиция заключается в изучении обобщенно вычислимых нумераций относительно конструктивных языков, описывающих нумеруемое семейство объектов. Наибольшее продвижение в этом направлении было достигнуто при исследовании нумераций семейств множеств из арифметической и разностной иерархий в работах Бадаева, Гончарова, Лемппа, Подзорова, Соломона, Сорби и др. Относительно недавно в совместной статье Бадаева и Гончарова (2014) стали изучаться и нумерации семейств, равномерно вычислимых относительно произвольного оракула. Такие нумерации были названы A-вычислимыми, где A – заданный оракул. В процитированной работе было продемонстрировано, что ряд ранее открытых проблем для семейств арифметических множеств может быть решен путем перехода к A-вычислимым семействам и наложением надлежащих ограничений на оракул A. Там же была намечена начальная программа исследований A-вычислимых нумераций, которая реализована в диссертационной работе соискателя. Отметим, что A-вычислимые нумерации являются частным случаем нумераций, вычислимых в подходящих допустимых множествах. Исследование таких нумераций было инициировано Ершовым (1996), а продолжено в работах Пузаренко, в том числе совместных с автором этого отзыва и соискателем. Результаты этих работ так же изложены в диссертации.

Вторая позиция заключается в изучении классов тьюринговых степеней множеств, относительно которых семейство является вычислимым. Это направление имеет непосредственные приложения в теории вычислимых моделей, поскольку каждому семейству множеств может быть сопоставлена алгебраическая система с сохранением основных алгоритмических инвариантов, включая спектр степеней. Оно, помимо работ Вехнера, развивалось и в работах Гринберга, Миллера, Монталбана, Сламана, а также автора отзыва. Сфера применения вычислимых семейств и их нумераций в других разделах теории вычислимых моделей подробно описана в работе Гончарова, Харизановой, Найт и др. (2005). В диссертационной работе соискатель, совместно с научным консультантом, исследует спектры степеней не только семейств множеств, но и наследственно счетных конструкций над ними, что приводит к примерам алгебраических систем с ранее не известными спектрами.

Перейдем к обзору основных результатов диссертации.

1. Решены вопросы о спектре возможных мощностей и решеточности полурешеток Роджерса A-вычислимых семейств для произвольного множества A. Для вычислимых в классическом смысле семейств данные вопросы были сформулированы Ершовым (1967), а решены Хуторецким (1971) и Селивановым (1976) соответственно. Для семейств, вычислимых в арифметической иерархии, сформулированные вопросы были решены в работе Гончарова и Сорби (1997). Так в каждом случае полурешетки Роджерса либо одноэлементны, либо имеют бесконечную мощность и не являются решетками. В диссертации установлено, что это справедливо для всех A-вычислимых семейств. Решение сформулированной проблемы основано на вложении в их полурешетки Роджерса бесконечных идеалов m-степеней множеств, сводимых по Тьюрингу к невычислимому множеству A, которые, как оказалось, не являются решетками. Это одновременно опровергает гипотезу Арсланова и Джокуша о существовании невычислимых в.п. множеств A, для которых упомянутые идеалы являются решетками.

2. Получены новые достаточные условия справедливости теоремы Хуторецкого (1971) для A-вычислимых семейств. Следствием этих условий является положительное решение проблемы Подзорова (2004) о предельности наибольших элементов полурешеток Роджерса семейств арифметических множеств. Кроме того, найденные достаточные условия показывают, что если контрпример к теореме Хуторецкого в обобщенном случае и существует, то он должен быть довольно замысловатым.

3. Найден критерий существования универсальных A-вычислимых нумераций конечных семейств A-в.п. множеств. С начала 2000-х годов и вплоть до настоящего времени частные случаи этого критерия публиковались в работах Бадаева, Гончарова и Подзорова. В них также были поставлены вопросы о его справедливости для всех невычислимых множеств A. Соискателем было доказана, что критерий справедлив для оракулов гипериммуной степени и только для них. Кроме того, для оракулов гипериммунно свободной степени в диссертации устанавливается, что конечные семейства A-в.п. множеств удовлетворяют теореме Ершова-Лахлана (1968) о существовании универсальных вычислимых нумераций конечных вычислимых семейств.

4. Установлено, что класс минимальных нумераций любого бесконечного семейства арифметических множеств эффективно бесконечен. Понятие эффективной бесконечности

классов нумераций представляет собой естественное продолжение понятия продуктивности множеств натуральных чисел. Оно было введено и впервые изучено в работе Гончарова и А. и В. Яхнисов (1993). Публикация этой работы инициировала исследование эффективной бесконечности естественных бесконечных классов нумераций (например, классов однозначных, позитивных и минимальных нумераций семейства всех в.п. множеств). К началу 2000-х годов эти исследования стали проводиться и для семейств арифметических множеств. Так в работе Бадаева и Гончарова (2001) доказывается бесконечность множества минимальных вычислимых нумераций любого бесконечного семейства арифметических множеств, а также ставится в вопрос об его эффективной бесконечности, впоследствии решенный соискателем.

5. Найдены законы, взаимосвязывающие гиперарифметичность множества А$\in\Pi_1^1(\Sigma_1^1)$ с наличием однозначных вычислимых $\Pi_1^1-(\Sigma_1^1-)$нумерацией семейства его $\Pi_1^1-(\Sigma_1^1-)$подмножеств. Если А является m-полным в своем уровне, то указанное семейство является представлением семейства всех Σ-подмножеств одного распространенного в теории допустимых множеств класса наследственно конечных надстроек. Эти результаты развивают исследования Оунгса (1970) однозначных нумераций семейств из аналитической иерархии. Они были получены соискателем в нераздельном соавторстве с Пузаренко и научным консультантом.

6. Исследованы спектры степеней наследственно счетных семейств. Для каждого натурального n>0 построено наследственно счетное семейство ранга n, у которого спектр степеней отличен от спектров всех наследственно счетных семейств рангов m<n. Данный результат, полученный соискателем в нераздельном соавторстве с научным консультантом, показывает, что наследственно счетные семейства представляют новый эффективный метод построения спектров степеней алгебраических систем.

7. Для каждого вычислимого ординала α найдено наследственно счетное семейство (а следовательно и алгебраическая система) ранга α+1, у которого спектр степеней совпадает с классом степеней не α-низких множеств. Данный результат получен соискателем в нераздельном соавторстве с научным консультантом. Для вычислимых ординалов-последователей системы с соответствующими спектрами были найдены в работе Гончарова, Харизановой, Найт и др. (2005).

Таким образом, диссертация Файзрахманова Марата Хайдаровича «Обобщенно вычислимые нумерации и спектры степеней счетных семейств» является работой, в которой решен ряд открытых вопросов в теории нумераций, поставленных в работах ведущих специалистов в этой области, а также развита спектральная теория наследственно счетных семейств, что вносит весомый вклад в теорию вычислимости и вычислимых моделей.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Файзрахманова Марата Хайдаровича «Обобщенно вычислимые нумерации и спектры степеней счетных семейств» удовлетворяет требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный консультант
доктор физико-математических наук
профессор РАН, доцент ______________________ И.Ш. Калимуллин

Почтовый адрес: 420008, г. Казань,
ул. Кремлевская, 18,
Казанский (Приволжский) федеральный университет.
Телефон: (843)233-70-60,
e-mail: ikalimul@gmail.com
Наименование организации: Казанский (Приволжский)
федеральный университет,
должность: главный научный сотрудник
учебно-исследовательской лаборатории
алгоритмических методов алгебры и логики