

ОТЗЫВ  
официального оппонента  
на диссертацию Масловой Натальи Владимировны  
«Арифметические свойства и нормальное строение конечных групп»,  
представленную на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Диссертация Масловой Натальи Владимировны относится к интенсивно разрабатываемому в настоящее время научному направлению в теории конечных групп – исследованию строения группы в зависимости от ее арифметических инвариантов, восходящему ещё к работам: У. Бернсайда (разрешимость бипримарных групп); Ф. Холла и С.А. Чунихина, установившим разрешимость конечной группы, в которой каждая силовская подгруппа дополняема; Дж. Томпсона и В. Фейта, доказавшим разрешимость групп нечетного порядка. Глубокое взаимное влияние арифметических свойств конечной группы и ее нормального строения было установлено во многих работах в последние годы. Известная теорема Х. Виланда о конечных группах с нильпотентной холловой подгруппой получила дальнейшее развитие в работах Р. Бэра, Л.А. Шеметкова, Б. Хартли, Дж. Томпсона и других. Решению проблемы Х. Виланда, о том является ли  $D_\pi$ -группой расширение  $D_\pi$ -группы с помощью  $D_\pi$ -группы, были посвящены ряд работ Л.А. Шеметкова. Интенсивные исследования в этом направлении уже на другом уровне были продолжены после завершения классификации конечных простых групп. Л.С. Казариным были усилены результаты Л.А. Шеметкова по проблеме Х. Виланда; глубокие результаты были получены Ф. Гроссом при исследовании групп с заданной холловой подгруппой; в работах В.Д. Мазурова, В.П. Вдовина, Д.О. Ревина получено полное решение отмеченной проблемы Х. Виланда; классификация холловых подгрупп в неабелевых простых группах получена в работах В.П. Вдовина и Д.О. Ревина, в частности, установлена их пронормальность. Множество порядков всех элементов конечной группы называется ее спектром, а множество всех простых делителей порядка группы называется ее простым спектром, с которым непосредственно связан граф Грюнберга-Кегеля. Вопросу распознавания почти простых групп по спектру и по простому спектру (графу Грюнберга-Кегеля) были посвящены многочисленные исследования за последние 30 лет многих алгебраистов как в России так и за рубежом: В. Ши, Р. Брандль, В.Д. Мазуров, А.С. Кондратьев, А.В. Васильев, А.В. Заварницын и многие другие. В работе А.В. Васильева, М.А. Гречкосеевой, В.Д. Мазурова установлено, что каждая конечная простая группа распознаваема по порядку и спектру, причем многие простые группы распознаваемы только по спектру.

К этому направлению относится и диссертация Н.В. Масловой. Поэтому тема диссертации является актуальной.

В диссертации решается ряд интересных проблем, которые естественным образом возникли в ходе исследований связи арифметических свойств и нормального строения конечных групп, а также разрабатываются новые методы исследования строения конечной группы в зависимости от ее арифметических инвариантов. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Во введении приводится обзор исследований по проблематике, которой посвящена диссертация, и формулируются ее основные проблемы и результаты.

Первая глава диссертации, в основном, носит вспомогательный характер. Важным инструментом исследования в диссертации является приведенная в первой главе классификация максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых группах. Эта классификация была получена в 1985-87 гг. независимо в работах М. Либека и Я. Саксла (Великобритания) и У. Кантора (США) и завершена Н.В. Масловой. Результаты о максимальных подгруппах нечетных индексов конечных простых классических групп степени не менее 13 вошли в кандидатскую диссертацию Н.В. Масловой. Для получения

результатов о максимальных подгруппах нечетных индексов в конечных простых классических группах степени не более 12 Н.В. Масловой использовались результаты диссертации П. Клейдмана (Великобритания), которая содержит ряд неточностей. Эти неточности были исправлены в 2013 г. в монографии Дж. Брая, Д. Хольта и К. Рони-Дугал, и с учетом этих результатов Н.В. Масловой в первой главе настоящей диссертации была проведена ревизия классификации максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых классических группах. Также указанная классификация была реализована Н.В. Масловой и ее студентом в качестве программы для ЭВМ, свидетельство о государственной регистрации которой приведено в приложении.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию нормального строения конечных групп с холловыми максимальными подгруппами и конечных минимальных относительно простого спектра групп. В этой главе получены следующие результаты:

- получено полное описание нормального строения конечных групп, в которых все максимальные подгруппы холловы, в частности, решена проблема 17.92 из "Коуровской тетради", поставленная В.С. Монаховым (Беларусь), и широко обобщены результаты В.С. Монахова о нормальном строении  $\pi$ -разрешимых групп, у которых все максимальные подгруппы, индексы которых являются  $\pi$ -числами, холловы;

- доказаны дополняемость максимальных подгрупп в группах, в которых все максимальные подгруппы холловы, тем самым получено подтверждение гипотезы, выдвинутой в 2008 г. Т.В. Тихоненко и В.Н. Тютяновым (Беларусь);

- доказана порождаемость групп, в которых все максимальные подгруппы холловы, парой сопряженных элементов, тем самым получено частичное подтверждение гипотезы, записанной П. Шумяцким (Бразилия) в "Коуровскую тетрадь" под номером 17.125,

- разработаны методы исследования нормального строения минимальных относительно простого спектра групп, исследованы неабелевы композиционные факторы и свойства нормальных рядов конечных групп, минимальных относительно простого спектра.

Разработанные во второй главе методы исследования нормального строения минимальных относительно простого спектра групп и групп с холловыми максимальными подгруппами могут быть перенесены на другие классы групп с арифметическими ограничениями на максимальные подгруппы. Например, подобные результаты о неабелевых композиционных факторах были получены В.А. Ведерниковым для класса конечных групп, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа холлова.

Третья глава посвящена исследованию пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных группах. Гипотеза о пронормальности всех подгрупп нечетных индексов в конечных простых группах была выдвинута в 2012 г. Е.П. Вдовиным и Д.О. Ревиным (Новосибирск) на основании анализа доказательства пронормальности холловых подгрупп в конечных простых группах. В третьей главе диссертации получены следующие результаты:

- построен пример конечной неабелевой простой группы, содержащей непроноормальную подгруппу нечетного индекса, тем самым опровергнута гипотеза, выдвинутая Е.П. Вдовиным и Д.О. Ревиным;

- получен критерий пронормальности добавлений к абелевой подгруппе в конечной группе;

- получена классификация конечных неабелевых простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны и силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор в группе;

- получены критерии пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп.

Результаты третьей главы дают существенное продвижение на пути получения классификации конечных неабелевых простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны. Полное решение этой проблемы позволило бы достичь прогресса в изучении пронормальности максимальных и субмаксимальных  $\mathfrak{X}$ -подгрупп,

которое является важной частью программы Х. Виланда, предложенной в 1979 г. на знаменитом Летнем институте по конечным группам в городе Санта-Круз.

Общее направление исследования свойств группы по свойствам ее графа Грюнберга–Кегеля возникло в связи с исследованием распознаваемости группы по ее графу Грюнберга–Кегеля.

Четвертая глава диссертации посвящена исследованию строения конечной группы по свойствам ее графа Грюнберга–Кегеля, в этой главе получены следующие результаты:

- получено описание всех случаев совпадения графов Грюнберга–Кегеля и всех случаев совпадения спектров конечной неабелевой простой группы и ее собственной подгруппы, тем самым дан исчерпывающий ответ на вопрос К. Паркера (Великобритания); аналогичный результат был получен Т. Бернессом и Э. Ковато (Великобритания) на несколько месяцев позднее;

- получено описание всех конечных неабелевых простых групп, которые не являются критическими по спектру, тем самым дан исчерпывающий ответ на вопрос В.Д. Мазурова (Новосибирск) и В. Ши (Китай), поставленный в 2012 г.;

- построен новый пример конечной группы, которая однозначно характеризуется изоморфным типом своего графа Грюнберга–Кегеля;

- получен критерий изоморфизма графа Грюнберга–Кегеля конечной почти простой группы графу Грюнберга–Кегеля некоторой разрешимой группы, тем самым получено решение проблемы, записанной автором диссертации под номером 19.52 в "Коуровскую тетрадь", в классе почти простых групп;

- описаны конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых не содержат 3-клик.

В заключении сформулированы основные результаты работы, а также приведены предполагаемые направления дальнейшего применения этих результатов.

Все, содержащиеся в диссертации, результаты являются новыми. Впервые они были получены автором диссертации.

Все утверждения (теоремы, леммы, следствия), сформулированные в диссертации, снабжены подробными и полными доказательствами. Используемые факты на отдельных этапах рассуждений, не доказанные в тексте, приведены с точными ссылками на публикации в рецензируемых научных изданиях (монографии, статьи в научных журналах), в которых они доказаны. Этим гарантирована полная обоснованность и достоверность всех содержащихся в диссертации результатов.

Результаты диссертации получены автором в 2009 – 2018 гг. и полностью опубликованы в 30 научных трудах. Основные положения и выводы диссертации опубликованы в 19 статьях из перечня ВАК России, которые также входят в международные базы данных и системы цитирования. Диссертация прошла солидную апробацию на ведущих профильных семинарах (кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова, «Теория групп» и «Алгебра и логика» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, семинар отдела алгебры и топологии Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН), на Международных и Всероссийских конференциях.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Ее научная значимость следует хотя бы из того факта, что в ней содержится решение целого ряда проблем, поставленных специалистами высокого международного уровня. Результаты диссертации, а также методы, разработанные для их доказательства, могут быть использованы (и уже используются) в дальнейших исследованиях по теории конечных групп, проводимых в научных центрах России, Китая, Великобритании, Бразилии, Испании, Республики Беларусь и других стран. Они могут быть использованы при чтении специальных курсов и подготовке курсовых, дипломных, диссертационных работ.

Диссертация написана достаточно подробно и аккуратно. Она создает у читателя целостное представление об исследованиях связи арифметических инвариантов конечной группы и ее нормального строения. Текст автореферата полностью соответствует содержанию диссертации.

В тексте диссертации имеется несколько опечаток, но они не повлияли на доказательство утверждений. Пожелания: Н.В. Масловой была получена классификация максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых классических группах и в почти простых группах с цоколем, изоморфным конечной простой классической группе степени не менее 13. Было бы полезным получить классификацию максимальных подгрупп нечетных индексов в почти простых, но не простых группах с цоколем, изоморфным конечной простой классической группе степени не более 12. Такой результат был бы полезен как для продолжения исследования пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных группах, так и, например, при исследовании факторизаций конечных групп.

Отметим, что в диссертационной работе Н. В. Масловой получен ряд новых научных результатов, являющихся заметным вкладом в развитие классического направления теории конечных групп – исследования строения конечной группы во взаимосвязи с ее арифметическими параметрами. Автором диссертации получен ряд результатов и разработан ряд новых методов, которые уже находят и будут находить применение в дальнейших исследованиях связи арифметических инвариантов и строения конечных групп.

Всё вышесказанное позволяет утверждать, что диссертация Масловой Натальи Владимировны «Арифметические свойства и нормальное строение конечных групп» является научно-квалификационной работой, в которой на основе выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение, т. е. удовлетворяет требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», и её автор, Маслова Наталья Владимировна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры  
высшей математики и методики преподавания математики  
ГАОУ ВО «Московский городской педагогический университет»  
Ведерников Виктор Александрович  
24.01.2019 г.

Контактная информация:

Домашний адрес – 127427, г. Москва, ул. Кашёнкин Луг, дом 8, корп. 2, кв. 77  
Телефон – 8-906-097-41-29, адрес электронной почты – vavedernikov@mail.ru