

ОТЗЫВ

научного консультанта на диссертацию Порошенко Евгения Николаевича ”Строения и теории частично коммутативных и близких к ним алгебр Ли”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Впервые понятие частично коммутативной группы появилось в работе А. Баудиша в 1981 году. Эта группа определялась по свободной группе конечного ранга F и графу, вершинами которого служат фиксированные свободные порождающие группы F . При замене свободной группы F на группу, свободную в некотором многообразии групп, возникают частично коммутативные группы из данного многообразия. В 1980 году Л.Макар-Лиманов и соавторы опубликовали работу об изоморфизме частично коммутативных ассоциативных алгебр. Они называли эти алгебры графовыми. Графовы алгебры были определены аналогично группам в многообразии ассоциативных алгебр. Начиная с 80-х годов прошлого века интенсивно исследовались частично коммутативные группы и значительно меньше алгебры. Так через 15 лет неполный обзор по частично коммутативным группам содержал уже 82 наименования. Развитие теорий частично коммутативных групп и алгебр происходило в тесной связи, обогащая друг друга. Результаты, полученные для частично коммутативных алгебр, позволяли доказать теоремы для частично коммутативных групп. Так, например, автор этого отзыва установил, что элементарные теории частично коммутативных метабелевы групп совпадают тогда и только тогда, когда они изоморфны. При доказательстве существенную роль сыграла теорема из упомянутой работы Макар-Лиманова. Вместе с тем существенное влияние на развитие частично коммутативных алгебр оказывают результаты, полученные для групп. Работа диссертанта является убедительным свидетельством плодотворного влияния теории частично коммутативных групп на частично коммутативные алгебры.

Диссертация находится на стыке алгебры и математической логики, что характерно для тематики школы, основанной академиком А. И. Мальцевым. Автор исследует строение и элементарные теории частично коммутативных алгебр Ли и близких к ним алгебр. Следует особенно подчеркнуть, что рассматриваемые в диссертации частично коммутативные алгебры определены не только конечными графами, как это

обычно делалось ранее, но и бесконечными графами.

Перейдем к обзору основных результатов диссертации.

1. Построены линейные базисы для частично коммутативных алгебр Ли и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли. В первом случае, используя метод базисов Грёбнера — Ширшова, строится множество мономов $\mathcal{L}_R(A; G)$, которое и служит базисом. Во втором случае применяются методы, позволившие решить аналогичную задачу для метабелевых частично коммутативных групп.

Теорема 2.7. Пусть R — область целостности и G — неориентированный граф без петель, с множеством вершин A . Тогда множество всех $PCLS$ -слов является базисом частично коммутативной R -алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$.

Теорема 2.11. Пусть R — область целостности и G — неориентированный граф без петель. Множество $\text{Bas}(A; G)$ является базисом частично коммутативной метабелевой R -алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A; G)$.

2. Полностью описаны централизаторы частично коммутативных алгебр Ли (теорема 3.15). Для частично коммутативных метабелевых алгебр Ли дано не полное, но достаточно эффективное описание (теорема 3.23). Кроме того приведено более детальное описание централизаторов линейных комбинаций порождающих в частных случаях, когда определяющий граф является циклом или деревом.

3. Произведено сравнение универсальных теорий частично коммутативных алгебр, определенных деревьями конечного или бесконечного типа, а также циклами. Более точно, доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.4. Пусть R — область целостности, а C_n и C_m — циклические графы на n и m вершинах, соответственно, ($n, m > 3$). Частично коммутативные R -алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; C_n)$ и $\mathcal{L}_R(B; C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$.

Теорема 4.24. Пусть R — область целостности, G — дерево бесконечного типа с множеством вершин A , а H — дерево конечного типа с множеством вершин B . Тогда частично коммутативные R -алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{L}_R(B; H)$ не являются универсально эквивалентными.

По графу G определяется граф G^* и доказываются следующие критерии.

Теорема 4.25. Пусть R — область целостности, G и H — деревья конечного типа с множествами вершин A и B , соответственно, причем $|A| > 2, |B| > 2$. Частично коммутативные R -алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{L}_R(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.

Теорема 4.29. Пусть R — область целостности, G и H — деревья бесконечного типа с множествами вершин A и B , соответственно. Частично коммутативные R -алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{L}_R(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда деревья G^* и H^* взаимно локально вложимы.

Аналогичные теоремы получены для метабелевых алгебр Ли (4.9, 4.38–4.40) и для метабелевых групп (4.43–4.45).

Теорема 4.52 утверждает, что существуют две частично коммутативные метабелевы алгебры Ли, одна из которых определена деревом, а другая графом с циклами, универсальные теории которых совпадают. Таким образом, для рассматриваемых алгебр имеет место ситуация, аналогичная частично коммутативным метабелевым группам.

4. Доказаны критерии элементарной эквивалентности для частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли (как двусловных систем). Приведем точную формулировку первой части одной из теорем.

Теорема 5.6. Пусть \mathbb{F} — произвольное поле, G и H — конечные неориентированные графы без петель, с множествами вершин A и B , соответственно. Частично коммутативные алгебры Ли $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}(A; G)$ и $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}(B; H)$, рассматриваемые как двусловные алгебраические системы, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.

Интересен аналогичный критерий для колец Ли.

Теорема 5.12. Пусть G и H — произвольные конечные неориентированные графы без петель, с множествами вершин A и B , соответственно. Частично коммутативные кольца Ли $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(A; G)$ и $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(B; H)$, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.

Теоремы 5.6 и 5.12 доказаны также для метабелевых алгебр и колец, соответственно.

5. Пусть \mathbb{F} алгебраически замкнутое поле характеристики ноль, для которого существует алгоритм, проверяющий разрешимость произвольной конечной системы линейных уравнений над \mathbb{F} . Доказано, что существует алгоритм для вычисления коммутаторной ширины произвольного элемента g из производной мультиоднородной метабелевой алгебры Ли над \mathbb{F} (теоремы 6.11 и 6.12).

6. Получен новый критерий для примитивных систем элементов свободного метабелева кольца. А именно, доказана

Теорема 7.8. Система элементов свободного метабелевого конечно порожденного кольца $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(A)$ примитивна тогда и только тогда, когда она равномерно распределена на многообразии метабелевых колец Ли.

Этот результат дополняет другой критерий примитивности систем элементов указанного кольца (теорему 7.4), доказанный ранее У. У. Умирбаевым для свободных метабелевых алгебр Ли над полем.

7. Найдены базисы Грёбнера — Ширшова для алгебры Онсагера (теорема 8.3) и тетраэдной алгебры (теорема 8.4).

Таким образом, диссертация Порошенко Евгения Николаевича ”Строения и теории частично коммутативных и близких к ним алгебр Ли” является работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное достижение в развитии соответствующего научного направления.

В связи с вышеизложенным считаю, что диссертация Порошенко Евгения Николаевича ”Строения и теории частично коммутативных и близких к ним алгебр Ли” удовлетворяет требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный консультант

Заслуженный работник высшей школы,
доктор физико-математических наук,
профессор

Е. И. Тимошенко

Подпись Е. И. Тимошенко заверяю:

Почтовый адрес: 630072, г. Новосибирск 72,
Проспект К. Маркса, 20, Новосибирский го-
сударственный технический университет.

Телефон: 383-2-3461166

E-mail: eitim45@gmail.com

Наименование организации: Новосибирский
государственный технический университет.

Должность — профессор кафедры
Алгебры и математической логики.