

"УТВЕРЖДАЮ"

первый проректор  
Омского государственного  
университета  
им. Ф.М. Достоевского

..... Р. Л. Иванов

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ–  
ФГБОУ ВО "Омский государственный  
университет им. Ф.М. Достоевского" на  
работу

**Нурлана Талгатовича Когабаева**

**ВЫЧИСЛИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ**

представленную на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук  
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра  
и теория чисел

=====  
Понятие проективной плоскости первоначально происходит из классической геометрии. Проективная плоскость определяется как геометрическая структура, расширяющая обычное понятие евклидовой плоскости. Она характеризуется добавлением "точек на бесконечности". Впо-

следствии понятие проективной плоскости существенно расширяется. Существуют как конечные, так и бесконечные проективные плоскости. Они находят многочисленные приложения в самых разных областях математики. Проективные плоскости исследуются различными методами: геометрическими, топологическими, комбинаторными и алгебраическими.

Изначальный традиционный подход к исследованию проективных плоскостей основывается на определении понятия проективной плоскости как множества точек с заданной на нём системой подмножеств, называемых прямыми. Здесь использовались как геометрические, так и комбинаторные методы исследования.

В семидесятые годы прошлого столетия А.И. Ширшов предложил и всячески продвигал алгебраическую концепцию проективной плоскости как частичной алгебраической системы. Данный подход активно развивался как самим А.И. Ширшовым, так и его учениками и последователями, в частности, А.А. Никитиным. Ими были приведены конструкции проективных плоскостей как частичных алгебраических систем, в которых каждый элемент представим в виде некоторого неассоциативного слова от порождающих. На основе этих конструкций были изучены различные вопросы вложения проективных плоскостей в конечно порождённые проективные плоскости, а также вопросы о представлении проективных плоскостей в виде гомоморфных образов конечно порождённых проективных плоскостей. Был также получен целый ряд результатов алгоритмического характера. Отметим работы В.В. Вдовина в этом направлении.

Диссертационная работа Н.Т. Когабаева также использует алгебраическое или, можно сказать, теоретико-модельное определение проективной плоскости, восходящее к А.И. Ширшову. Диссертация посвящена изучению классических вопросов теории вычислимых моделей, интенсивно исследуемых в настоящее время. Исследуются проблемы описания структур из данного класса, имеющих вычислимые представления, вопросы равномерной вычислимости, автоматные структуры, вопросы существования вычислимых нумераций и т.п. Особо важное значение имеет рассмотрение вопроса о разрешимости теории класса свободно порождённых проективных плоскостей. Также рассматриваются проблемы вычислимой категоричности и, более общо, вопросы вычислимой размерности структур из данного класса и спектров категоричности вычислимых структур из данного класса, а также вопросов вычислительной сложности.

В работе дается обзор известных результатов по указанным проблемам, а также приводятся литературные источники, в которых содержится достаточно полная информация по данной области исследований.

В целом цели исследования и основные задачи представлены достаточно ясно. Из текста понятно, что было ранее известно, что предстояло сделать, и даже приведены неформальные рассуждения, позволяющие судить о рабочих моментах исследования, которые бывают часто не видны при формальном оформлении результатов.

Основные результаты диссертационной работы:

- Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.
- Доказано, что классы свободных, свободно порождённых, дезарговых, папповых и произвольных проективных плоскостей не имеют вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.
- Установлено, что в классе свободных проективных плоскостей реализуются только две вычислимые размерности: 1 и  $\omega$ .
- Показано, что класс свободно порождённых проективных плоскостей полон относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Значит, в нём реализуется любая конечная вычислимая размерность и  $\omega$ .
- Установлена наследственная неразрешимость теории класса свободно порождённых проективных плоскостей.
- Доказана полнота класса папповых проективных плоскостей относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Установлено совпадение вычислимых размерностей папповой (дезарговой) проективной плоскости и её координатного поля (тела).
- Даны точные оценки сложности проблем изоморфизма, вложимости и вычислимой категоричности в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей. Для класса свободных проективных плоскостей конечного ранга даны точные оценки сложности проблем изоморфизма и вложимости.

Заметим, что первый из перечисленных результатов о том, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений, получен в соавторстве с А.С. Денисенко. Последней принадлежит описание автоматных моделей в классах свободных, дезарговых и папповых проективных плоскостей. Приведенный результат в определенном смысле завершает это описание. Остальные результаты получены диссертантом без соавторов.

Наследственная неразрешимость класса всех свободно порождённых проективных плоскостей установлена с использованием интерпретации симметричных иррефлексивных графов модифицированной для случая конечных графов. Заметим, что неразрешимость теории всех проективных плоскостей является классическим результатом А. Тарского, полученным в 1949 году. Более того, из его результатов следует наследственная неразрешимость классов папповых и дезарговых проективных плоскостей. Полученный в диссертации результат является существенным дополнением к этим достижениям.

Исследуемые в диссертационной работе проблемы являются актуальными в теории вычислимых моделей. Например, изучение вопросов реализуемости различных видов спектров степеней и эффективных размерностей в счётных структурах рассматриваются как в общем случае, так и в конкретных классах алгебраических систем. Рассматривалась проблема реализуемости спектров степеней счётных структур, изучались вопросы реализуемости конечных вычислимых размерностей структур и их константных обогащений, исследовались возможные спектры степеней отношений на структурах, а также степени категоричности и спектры категоричности структур. В данном направлении следует отметить работы Гончарова, Калимуллина, Фролова, Кудинова, Харизановой, Фокиной, Найт, Хусаинова, Чолака, Шора, Венера, Миллера, Сламана, а также Романовского, Молокова. Этот список можно продолжать.

В работе используются методы теории вычислимых моделей и алгебраической теории проективных плоскостей. В частности, для представления свободно порождённых проективных плоскостей используется известная конструкция А.И. Ширшова. Также для представления папповых (дезарговых) проективных плоскостей используется их координатное представление с помощью полей (тел). Невычислимость классов проективных плоскостей дается с помощью теоремы С.С. Гончарова о неограниченных моделях и её следствий. Результаты о полноте спектра получены с использованием достаточного признака эффективной полноты Д.Р. Хиршвельдта, Б. Хусаинова, Р.А. Шора и А.М. Слинко.

Результаты диссертационной работы являются новыми, они полностью доказаны и опубликованы. Они также были представлены в докладах на крупных научных конференциях. Результаты имеют существенное значение для алгебры, математической логики, теории моделей и вычислимости. Они могут быть включены в специальные курсы, читаемые в различных университетах. Внутреннее единство работы обеспечено выбором проблем и методов их решения.

Диссертационная работа соответствует пункту п. 9 «Положения о

присуждении учёных степеней» о требованиях, предъявляемых к докторским диссертациям ("Положение" утверждено Постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842). А именно: диссертационная работа является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Диссертационная работа Н.Т. Когабаева "Вычислимые представления проективных плоскостей" полностью соответствует требованиям, предъявляемым докторским диссертациям, её автор – Н.Т. Когабаев заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

Отзыв заслушан и одобрен на заседании Алгебраического семинара при Омском государственном университете им. Ф. М. Достоевского 10 мая 2018 года, протокол №1.

Руководитель семинара

В.Н. Ремесленников

Секретарь семинара

А.В. Трейер

Отзыв подготовил:

Доктор физико-математических наук  
профессор

В. А. Романьков,

заведующий кафедрой компьютерной математики и программирования  
Института математики и информационных технологий Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского.

10 мая 2018 года, г. Омск, Россия.