

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Ю. А. МИХАЛЬЧИШИНОЙ «ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП КОС И ГРУППЫ УЗЛОВ», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Классическая теория узлов имеет дело с гладкими вложениями наборов несвязных ориентированных окружностей $\sqcup \mathbb{S}^1$ в трёхмерную сферу $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$, которые называют *зацеплениями*. При этом, если набор состоит из одной ориентированной окружности \mathbb{S}^1 , то данное зацепления называют *узлом*. Как математическая теория, теория узлов возникла в конце восемнадцатого века, а к отцам-основателям теории относят Эйлера, Вандермонда и Гаусса.

Начиная с работы Кауфмана 1996 года, в теории узлов активно развивается направление в котором на смену классическим объектам, таким как косы, узлы, зацепления, вводят более общие объекты: виртуальные косы, виртуальные узлы и виртуальные зацепления. В новой теории естественно возникают аналогии и обобщения результатов классической теории узлов. Важными объектами исследования являются различного рода представления построенных групп виртуальных кос VB_n и групп кос со спайками WB_n . Как и в классической теории узлов, в новой теории основным вопросом является классификация узлов и зацеплений, но уже виртуальных.

Основными результатами диссертации являются следующие.

1. Построено представление группы виртуальных кос в группу автоморфизмов свободного произведения конечно порождённых свободной и свободной абелевой групп, которое обобщает все ранее известные подобные представления группы виртуальных кос.

2. Построены продолжения представлений Вады для группы кос на группу виртуальных кос.

3. По каждому построенному представлению, аналогично классическому случаю, определена группа виртуального зацепления и показано, что она является инвариантом виртуального зацепления.

Диссертация изложена на 84 страницах и состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Библиография содержит 41 наименование.

Текст диссертации хорошо структурирован. В первой главе приведены определения и обозначения, относящиеся к исследуемым представлениям группы кос B_n и виртуальных кос VB_n . В пятом параграфе первой главы даётся комбинаторный подход Виртингера, позволяющий по диаграмме классического зацепления найти его группу, являющуюся инвариантом зацепления. Этот подход в дальнейшем играет центральную роль в построении инвариантов уже виртуальных зацеплений.

Вторая глава посвящена построению и исследованию нового представления группы виртуальных кос и линейных локальных представлений классической группы

кос. Построенное новое представление φ_M группы виртуальных кос VB_n в группу автоморфизмов $\text{Aut}(F_n * \mathbb{Z}^{2n+1})$ обобщает построенные ранее представления в группы автоморфизмов $\text{Aut}(F_n * \mathbb{Z}^{n+1})$, $\text{Aut}(F_n * \mathbb{Z}^2)$ и $\text{Aut}(F_{n+1})$ в том смысле, что при подходящем гомоморфизме подлежащих свободных произведений построенное представление совпадает с ранее известными (Предложение 1). Это в частности означает, что ядро построенного представления не превосходит ядер обобщаемых представлений. Кроме того построены представления группы виртуальных кос VB_n в группу автоморфизмов $\text{Aut}(F_n * \mathbb{Z}^n)$ которые продолжают представления Артина и Вады для классической группы кос B_n в группу автоморфизмов свободной группы $\text{Aut}(F_n)$.

Вопрос о точности построенных представлений рассмотрен частично: в предложении 3 указана виртуальная крашенная коса из ядра продолжений представлений Вады W_1, W_2 , а для представления в $\text{Aut}(F_n * \mathbb{Z}^n)$, продолжающего представление Артина, и представления в группе автоморфизмов $\text{Aut}(F_n * \mathbb{Z}^{2n+1})$ показано только совпадение их предполагаемых ядер.

Во втором параграфе строятся различные представления группы кос со спайками WB_n . Одно из них, на основе представления φ_M , в группу автоморфизмов $\text{Aut}(F_n * \mathbb{Z}^{n+1})$. Другие, как продолжения точных представлений Вады для классических групп кос. В этих случаях получаются представления в группы автоморфизмов: $\text{Aut}(F_n)$, $\text{Aut}(\mathbb{Z}_4 \times \dots \times \mathbb{Z}_4)$, $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 * \dots * \mathbb{Z}_2)$, здесь везде n сомножителей.

В третьем параграфе второй главы исследуются локальные линейные представления классической группы кос B_n в общую линейную группу $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, т.е. представления при которых порождающим $\sigma_i, i = 1, \dots, n-1$, сопоставляются блочно диагональные матрицы из трёх блоков $\text{diag}(I_{i-1}, R_i, I_{n-i-1})$, где первый и третий блок – это единичные матрицы порядка $i-1$ и $n-i-1$ соответственно, а второй блок R_i – матрица порядка 2. Если при этом все блоки R_i совпадают, то данное локальное линейное представление называют однородным. Так в теореме 4 дано описание всех локальных линейных представлений группы кос B_3 , а в следствии 1 описаны все локальные однородные линейные представления групп кос B_n , где представление Бурау является одним из частных случаев. И наконец, используя метод Магнуса, опирающийся на производные Фокса, по представлениям Вады построены линейные представления группы кос B_n в общую линейную группу $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. В теореме 5 показано, что каждое из этих построенных представлений либо совпадает с представлением Бурау, либо эквивалентно представлению Бурау при фиксированном значении параметра $t = -1$.

В третьей главе строятся группы виртуальных зацеплений по новым представлениям группы виртуальных кос описанных в предыдущей главе. Способ построения этих групп по представлению был предложен Бардаковым и Белинджери в 2012 году, при этом для данных групп был приведён дублирующий алгоритм вычисления генетического кода по диаграмме виртуального зацепления. В диссертации этот подход был применён к вновь построенному представлению группы виртуальных кос VB_n в группу автоморфизмов $\text{Aut}(F_n * \mathbb{Z}^{2n+1})$. Показано, что построенные таким об-

разом группы виртуальных зацеплений являются их инвариантами. В заключительных параграфах вычислены эти новые инварианты для нескольких классических и виртуальных зацеплений. При этом, построены инварианты и на основе представлений группы виртуальных кос VB_n продолжающих представления группы кос B_n Артина и Вады. По результатам этих построений сделаны выводы о полноте данных инвариантов, некоторые из них не отличают виртуального зацепления от его зеркального образа, а также о несовпадении других инвариантов, построенных по различным представлениям группы виртуальных кос VB_n .

Отмечу некоторые замечания, возникшие по ходу чтения диссертации и автореферата.

На с.14 диссертации написано: «Представление φ_A является продолжает представление Артина...» По-видимому, слово «является» здесь – лишнее.

На с.65 диссертации, в генетическом коде группы виртуального зацепления $G_l(\beta)$, которая по введённым определениям является гомоморфным образом свободного произведения $F_n * \mathbb{Z}^n$, пропущены соотношения перестановочности порождающих v_1, \dots, v_n свободной абелевой группы \mathbb{Z}^n .

Таким образом, замечания, возникшие при чтении автореферата и диссертации, незначительны или носят характер опечаток. Все основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и опубликованы в 6 работах, при этом четыре из них опубликованы в изданиях, которые входят в перечень ВАК. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на различных международных математических конференциях. Автореферат точно и полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация Ю.А. Михальчишиной «Представления групп кос и групп узлов» соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК и Минобрнауки к кандидатским диссертациям по математике, а её автор Юлия Андреевна Михальчишина заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук, Олег Вадимович Брюханов

почтовый адрес: пр. К. Маркса, д. 26, г. Новосибирск, 630087

телефон: (383) 346-55-31

электронная почта: bryuoleg@ngs.ru

Частное образовательное учреждение высшего профессионального образования Центросоюза Российской Федерации «Сибирский университет потребительской кооперации», факультет Экономики и управления, кафедра статистики и математики, доцент

О.В. Брюханов

7 мая 2018 г.