

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Когабаева Нурлана Талгатовича “Вычислимые представления проективных плоскостей”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертационная работа Нурлана Талгатовича Когабаева относится к теории конструктивных моделей, возникшей на стыке теории моделей и теории нумераций в пятидесятых годах прошлого века в работах А.Фрёлиха и Дж.Шефердсона, М.О. Рабина, А.И. Мальцева. Всемирно известны успехи представителей Сибирской школы математической в области теории конструктивных моделей. Её первое поколение воспитывалось на статье А.И.Мальцева «Конструктивные алгебры I» и монографии Ю.Л. Ершова «Проблемы разрешимости и конструктивные модели» и соответственно решало проблемы, инициированные этими работами. Эта проблематика нашла свое естественное отражение и в работе диссертанта, как представителя второго поколения Сибирской школы специалистов по конструктивным моделям. К ней относятся вопросы существования конструктивных моделей, изоморфных алгебраическим системам заданного класса, вопросы существования равномерной конструктивизации (вычислимой нумерации) конструктивных моделей класса, а также вопросы алгоритмической размерности структур данного класса. По этой проблематике опубликованы сотни работ по различным классам алгебраических систем: полям, кольцам, группам, линейным порядкам, булевым алгебрам, решеткам и т.д. Итогом этого периода бурного роста теории конструктивных моделей стало выход свет в конце прошлого века в издательстве Elsevier двухтомника Handbook of Recursive Mathematics под редакцией Ю.Л. Ершова, С.С. Гончарова, А.Нероуда и Дж.Б.Реммеля. К этому же периоду относится опубликование монографий «Конструктивные модели» С.С. Гончарова и Ю.Л. Ершова и «Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy» К. Эша и Дж.Ф.Найт. В этих монографиях и статьях последнего десятилетия наметились различные обобщения понятия вычислимого представления модели, когда предикаты и операции алгебраической системы могут быть реализованы с помощью конечных автоматов, или, напротив, когда они могли быть и не вычислимыми, а вместо вычислимых изоморфизмов рассматриваются изоморфизмы, вычислимые относительно диаграммы модели. Соответственно, расширилась и углубилась проблематика теории конструктивных моделей, появились понятия спектра степеней алгебраической структуры, как совокупности тьюринговых степеней ее обобщенно вычислимых представлений, d -вычислимой размерности и др. Исследования по автоматным представлениям и по оценке совокупностей тьюринговых степеней, которые реализуют те или иные алгебраические или

алгоритмические свойства класса алгебраических систем, находятся в центре внимания современных исследователей обобщенно конструктивных моделей. В этом отношении исследования, проведенные Н.Т. Когабаевым, не являются исключением.

Отличительной особенностью диссертационной работы является предмет ее исследований, а именно такие объекты классической геометрии, как свободные проективные плоскости, свободно порожденные проективные плоскости, папповы проективные плоскости, дезарговы проективные плоскости. Напомним, что конструктивные модели – это прежде всего алгебраические системы, в которых объекты закодированы натуральными числами так, что операции и отношения на кодах объектов являются вычислимыми, в частности всюду определенными. Вместо традиционного определения проективной геометрии, как множества точек и прямых, связанных известным отношением инцидентности, Н.Т. Когабаев использует чисто алгебраическую концепцию А.И. Ширшова, согласно которой проективная плоскость рассматривается как частичная алгебраическая система. Эта концепция, развитая в 1980-тых годах в работах ее автора, а также А.А. Никитина и В.В. Вдовина, позволила разработать новые понятия и методы, в том числе для решения алгоритмических проблем теории проективных плоскостей. Здесь уместно отметить, что ни одна из упомянутых выше общих проблем теории конструктивных моделей не была решена другими исследователями для классов проективных плоскостей. Можно с уверенностью констатировать, что диссертанту принадлежит собственное научное направление исследований внутри теории конструктивных моделей, связанное с решением алгоритмических проблем в теории проективных плоскостей, причем эти исследования носят нетривиальный характер. Причиной нетривиальности исследований автора служит частичность (не всюду определенность) алгебраической операции в концепции А.И. Ширшова, следствием которой является частичность вычислимого кодирования (нумерации) объектов проективной плоскости. Как известно, А.И. Мальцев ограничивался рассмотрением только всюду определенных, простых в его терминологии, нумераций. В случае частичных нумераций на первый план выходит проблема правильного подбора вводимых определений. Оппоненту принадлежит пример того, как, казалось бы, естественное определение сводимости частичных вычисляемых нумераций приводит к нонсенсу, когда к конструктивному объекту могут вычислимо сводиться континуум других объектов, в том числе и неконструктивных. Кроме решения общих проблем теории конструктивных моделей, диссертант решает открытую проблему разрешимости элементарной теории свободно порожденных проективных плоскостей, известную еще со времен А. Тарского. Таким образом, исследования по Н.Т. Когабаева по теме диссертации являются весьма актуальными.

Диссертация состоит из введения и пяти глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы, насчитывающий 95 наименований.

Во введении диссертант формулирует общие проблемы теории конструктивных моделей, исследованию которых применительно к теории проективных плоскостей посвящена диссертационная работа, и дает краткий, но информативный обзор современного состояния исследований по этим проблемам. Затем он точно формулирует концепцию А.И. Ширшова алгебраического подхода к исследованию проективных плоскостей и дает обзор немногочисленных сведений и проблем по теории проективных плоскостей, полученных на основе этой концепции. Завершает введение обзор содержания диссертации.

В главе 1 изложены необходимые предварительные сведения из теории вычислимых моделей и теории проективных плоскостей.

Основные результаты диссертации содержатся в главах 2-5.

Глава 2 состоит из четырех параграфов, в трех из них для построения вычислимых представлений проективных плоскостей использована нетривиальная алгебраическая техника: для широкого подкласса свободно порожденных плоскостей, включающего класс свободных проективных плоскостей, это сделано с помощью конструкции А.И. Ширшова; для дезарговых и папповых плоскостей - методом интерпретации ассоциативных тел и соответственно полей в проективных плоскостях. В противовес вычислимым представлениям, в Теорема 2.4.5 доказано, что автоматные представления не возможны для любых свободно порожденных проективных плоскостей. Эта теорема вместе с результатами А.С. Денисенко дает полный ответ на вопрос о существовании автоматного представления для проективных плоскостей, рассматриваемых в диссертации классов: только конечные дезарговы плоскости имеют автоматные представления, а все остальные – нет.

В теории конструктивных моделей одним из наиболее интересных является вопрос о существовании универсальных объектов для класса моделей, имеющих вычислимое представление. Построение вычислимых универсальных моделей часто осуществляется путем построения прямой суммы всех вычислимых представлений моделей класса, взятых с точностью до вычислимого изоморфизма, относительно какой-либо вычислимой нумерации таких представлений. В главе 3 дается отрицательный ответ на вопрос о существовании вычислимых нумераций типов вычислимого изоморфизма для основных классов проективных плоскостей: свободно порожденных, свободных, произвольных, дезарговых и папповых плоскостей; иными словами, нет равномерно эффективной процедуры построения вычислимых представлений проективных плоскостей для каждого из этих классов. Для последних двух классов это утверждение доказывается с помощью нетривиальных диагональных рассуждений. Для остальных трех классов доказательство существенно опирается на теорему С.С. Гончарова о

неограниченных моделях. Попутно установлено, что алгоритмическая размерность любой свободной проективной плоскости либо равна 1, либо бесконечна, причем размерность равна 1 тогда и только тогда, когда её ранг конечен (Следствие 3.3.2).

Глава 4 по своей содержательности является, на мой взгляд, центральной главой диссертационной работы Н.Т. Когабаева. В §§4.1,4.2 разрабатывается интерпретация счётных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей бесконечного ранга и исследуются её алгебраические свойства. В §4.4 эта интерпретация модифицируется для конечных графов.

Теорема 4.3.5 устанавливает по существу, что графы и их интерпретации в классе свободно порождённых проективных плоскостей бесконечного ранга обладают одинаковыми алгоритмическими характеристиками такими, как спектр степеней вычислимых представлений, алгоритмические размерности и др. В качестве следствия получается, что алгоритмическая размерность вычислимых свободно порождённых проективных плоскостей бесконечного ранга может принимать любое значение от 1 до бесконечности (Следствие 4.3.7).

Полные аналоги Теоремы 4.3.5 и Следствия 4.3.7 для вычислимых папповых плоскостей получены в §4.6. При этом в §4.5 используется интерпретация полей в классе папповых плоскостей, разработанная в главе 2.

На основе интерпретации из §4.4 диссертант доказывает Теорему 4.4.3 о том, что элементарная теория класса свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима, что является решением открытой проблемы со времен А. Тарского.

Основными результатами главы 5 являются точные оценки сложности алгоритмических проблем, полученные для классов папповых, дезарговых и всех проективных плоскостей относительно аналитической иерархии:

Σ_1^1 – для проблем изоморфизма и вложимости;

Π_1^1 – для проблемы вычислимой категоричности.

В заключении приводится список основных результатов диссертации.

Диссертационная работа хорошо структурирована, написана ясным языком. Из недостатков следует отметить лишь небольшое количество стилистических погрешностей. Например, фраза наверху страницы 28: «Конфигурация является закрытой, если любой её элемент инцидентен не менее трём элементам».

Основные результаты диссертации являются новыми и опубликованы в 21 работе, из них 10 статей входят перечень ВАК рецензируемых научных журналов. Результаты диссертационной работы докладывались на ряде Международных конференций и научных семинарах. Доказательства основных результатов достаточно полные, многие из них весьма

нетривиальны и используют методы теории конструктивных моделей и алгебраической теории проективных плоскостей. Достоверность основных результатов не вызывает сомнений. Они носят теоретический характер и могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории вычислимых проективных плоскостей, а также быть использованы при чтении специальных курсов по теории конструктивных моделей и теории проективных плоскостей.

Таким образом, диссертация Когабаева Нурлана Талгатовича “Вычислимые представления проективных плоскостей” является работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное достижение в развитии соответствующего научного направления.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

В связи с вышеизложенным считаю, что диссертация Н.Т. Когабаева “Вычислимые представления проективных плоскостей” удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор

С.А. Бадаев

Подпись С.А. Бадаева заверяю

Почтовый адрес: Республика Казахстан, 050040, Алматы, проспект аль-Фараби, 71, Казахский национальный университет им. аль-Фараби.

Телефон: 007-727-221-1568

E-mail: Serikzhan.Badaev@kaznu.kz

Наименование организации: Казахский национальный университет им. аль-Фараби.

Должность: Профессор кафедры фундаментальной математики.