ОТЗЫВ НАУЧНОГО КОНСУЛЬТАНТА
на диссертацию Когабаева Нурлана Талгатовича
«Вычислимые представления проективных плоскостей»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация Н.Т. Когабаева посвящена исследованию классических вопросов теории вычислимых моделей и вопросов разрешимости элементарных теорий для классов проективных плоскостей. Теория вычислимых моделей является одним из наиболее актуальных и активно развивающихся направлений математической логики, восходящим к классическим работам А.И. Мальцева, М.О. Рабина, А. Фрёлиха и Дж. Шефердсона. В работах по теории вычислимых моделей получен обширный спектр результатов, относящихся к изучению вычислимых представлений алгебраических систем из таких классов как абелевы группы, булевы алгебры, линейные порядки, поля и др. Проективные плоскости являются классическими объектами современной геометрии, для которых в работах А.И. Ширшова, А.А. Никитина, В.В. Вдовина и других авторов был развит алгебраический подход, позволивший решить ряд алгебраических проблем в классе проективных плоскостей. Тем не менее большинство вопросов теории вычислимых моделей для класса проективных плоскостей до сих пор оставались открытыми. Кроме этого, продолжительное время оставалась открытой проблема разрешимости элементарной теории свободно порождённых проективных плоскостей. В данной диссертации, основываясь на алгебраическом подходе А.И. Ширшова, соискатель развивает теорию вычислимых проективных плоскостей и решает ряд основных проблем теории вычислимых моделей в классах папповых, дезарговых, свободных и свободно порождённых проективных плоскостей. В диссертации также решается известная проблема разрешимости элементарной теории свободно порождённых проективных плоскостей.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. В первой главе приводятся необходимые предварительные сведения из теории вычислимых моделей и теории проективных плоскостей.

Вторая глава посвящена проблеме существования вычислимых представлений моделей из различных классов проективных плоскостей. Предложен основанный на конструкция Ширшова метод построения вычислимых представлений для свободно порождённых проективных плоскостей. Доказывается, что дезаргова (паппова) проективная плоскость имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда её координатное тело (поле) имеет вычислимое представление. Кроме этого, доказывается, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений. Данный результат лежит в русле исследований автоматных моделей, инициированных А. Нероудом и Б. Хусаиновым. Как оказалось, в большинстве классов моделей требование автоматности накладывает существенные ограничения на алгебраическую сложность модели. Результат Н.Т. Когабаева вместе с ранее полученными результатами А.С. Денисенко демонстрирует, что в классе проективных плоскостей теория автоматных моделей также оказывается достаточно бедной.

Третья глава посвящена проблеме существования вычислимых нумераций типов вычислимого изоморфизма для основных классов проективных плоскостей. Вычислимость классов моделей изучалась в работах В.П. Добрицы, С.С. Гончарова, Ю.Л. Ершова, Дж. Найт и др. В этих работах получены серии результатов о существовании или отсутствии вычислимой нумерации для различных классов алгебраических систем. В данной главе доказывается, что ни один из следующих классов вычислимых проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости. Кроме этого получено полное описание вычислимых размерностей свободных проективных плоскостей: вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна 1 или ω; свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен. При получении результатов главы в каждом случае использовались различные варианты метода неограниченных моделей С.С. Гончарова с учётом особенностей и структурных свойств рассматриваемых классов.

Четвёртая глава посвящена доказательству того, что класс всех свободно порождённых проективных плоскостей и класс всех папповых проективных плоскостей являются полными относительно спектров степеней и эффективных размерностей. В частности, отсюда следует, что в этих классах проективных плоскостей реализуются все возможные вычислимые размерности. В 1980 году С.С. Гончаровым было доказано, что вычислимая размерность любой модели произвольной сигнатуры может быть реализована как вычислимая размерность некоторого частичного порядка. Позже Д. Хиршвельдт, Б. Хусаинов, Р. Шор и А. Слинько показали, что спектры степеней и эффективные размерности, которые удаётся реализовать в каких-либо моделях, можно также реализовать в таких классах как неориентированные графы, решётки, кольца, области целостности, коммутативные полугруппы, 2-ступенно нильпотентные группы. Они же предложили называть подобные классы структур полными относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Для доказательства эффективной полноты класса свободно порождённых проективных плоскостей Н.Т. Когабаевым построена оригинальная интерпретация симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых плоскостей бесконечного ранга. В качестве одного из следствий предложенной интерпретации также доказывается наследственная неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей. Отметим, что неразрешимость теорий папповых и дезарговым проективных плоскостей была установлена А. Тарским в 1949 году, а вопрос о разрешимости теории свободно порождённых проективных плоскостей долго оставался открытым. Для доказательства эффективной полноты класса папповых проективных плоскостей используется доказанный Р. Миллером, Б. Пуненом, Х. Шутенсом и А. Шлапентох результат об эффективной полноте класса полей и разработанные соискателем эффективные конструкции, позволяющие по заданному представлению координатного поля строить представление соответствующей папповой плоскости, и, наоборот, в заданном представлении папповой плоскости определять представление для её координатного поля.

Пятая глава посвящена получению точных оценок сложности некоторых естественных алгоритмических проблем в определённых классах вычислимых проективных плоскостей. Один из подходов классификации вычислимых структур в некотором классе K основан на изучении алгоритмической сложности проблемы изоморфизма в K. Принято считать, что класс K обладает вычислимой классификацией, если проблема изоморфизма в данном классе имеет гиперарифметическую сложность. В работах У. Калверта, Дж. Найт, С.С. Гончарова, А. Ниса и других авторов были найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма для ряда известных классов моделей. В данной главе доказывается, что в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема изоморфизма достигает максимальной сложности, т.е. является m-полным Σ^1_1-множеством. Далее Н.Т. Когабаевым устанавливается, что проблема изоморфизма в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ^0_3-множеством внутри класса. Вместе с проблемой изоморфизма в диссертации исследуется сложность проблемы вложимости. Доказывается, что для классов папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема вложимости имеет такую же сложность как и проблема изоморфизма, т.е. является m-полным Σ^1_1-множеством. Однако, проблема вложимости в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга вычислима внутри класса. Таким образом, в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга сложность проблемы вложимости меньше, чем сложность проблемы изоморфизма. Наконец, в конце главы Н.Т. Когабаев оценивает сложность проблемы вычислимой категоричности и доказывает, что эта проблема является m-полным Π^1_1-множеством в следующих классах: папповы плоскости, дезарговы плоскости, произвольные проективные плоскости. Отметим, что в общем случае проблема получения точной оценки сложности вычислимой категоричности долго оставалась открытой, лишь в 2015 году Р. Доуни, А. Кач, С. Лемпп, А. Льюис-Пай, А. Монталбан и Д. Турецки установили, что проблема вычислимой категоричности является m-полным Π^1_1-множеством. Н.Т. Когабаев использует разработанные им методы для переноса упомянутого выше результата в класс проективных плоскостей.

Все результаты диссертации являются новыми, снабжены корректными доказательствами и получены автором диссертации самостоятельно. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 статьях в журналах «Алгебра и логика», «Сибирский математический журнал», «Вестник НГУ, Серия: математика, механика, информатика», и прошли апробацию на конференциях в России и за рубежом, на научных семинарах ИМ СО РАН и НГУ. Один из результатов диссертации включён в список важнейших результатов ИМ СО РАН за 2015 год.

Диссертация Н.Т. Когабаева является цельным и законченным научным исследованием, а её результаты представляют собой научное достижение в теории вычислимых моделей. Автором диссертации создано новое научное направление, посвящённое алгоритмическим проблемам в теории проективных плоскостей, и получено решение известной проблемы о разрешимости элементарной теории свободно порождённых проективных плоскостей. Считаю, что представленная диссертация «Вычислимые представления проективных плоскостей» соответствует всем критериям, установленным в положении о порядке присуждения учёных степеней, а её автор Когабаев Нурлан Талгатович заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный консультант
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор С.С. Гончаров

«____» __________ 2017 г.

Гончаров Сергей Савостьянович, директор,
ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
адрес: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4,
телефон: +7 (383) 3332892, e-mail: s.s.goncharov@math.nsc.ru