

ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ  
о диссертации Ильева Артема Викторовича  
«ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД ГРАФАМИ,  
РАЗРЕШИМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ И  
АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ  
ГРАФОВ И МАТРОИДОВ»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертационной работе А.В. Ильева алгебраическими и теоретико-модельными методами исследуются классические комбинаторные объекты – обыкновенные графы, а также матроиды, представляющие собой важный класс гиперграфов специального вида.

Целью диссертации является исследование проблем совместности и нахождения решений систем уравнений над обыкновенными графами, проблем аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных подграфов, и наследственных классов матроидов конечного ранга, а также проблем разрешимости универсальных теорий наследственных классов графов.

Актуальность темы диссертации обусловлена тем, что в настоящее время алгебраические методы широко используются в теории графов. Также в последнее время для исследования графов все чаще применяется теоретико-модельный аппарат математики. Сформировалось целое направление исследований, получившее название алгебраической теории графов, и можно говорить о формировании нового направления – логической теории графов. Алгебраические методы с успехом применяются и в теории матроидов.

Изучение решений уравнений и систем уравнений над фиксированной алгебраической системой  $A$ , а также решение следующих отсюда задач называется алгебраической геометрией над  $A$ . В монографии<sup>1</sup> для произвольной алгебраической системы  $A$  языка  $L$  доказана универсальная теорема о совместности системы уравнений  $S$  над  $A$  и даны общие неалгоритмические процедуры вычисления радикала системы  $S$  и построения ее общего решения, называемого координатной алгеброй. Применение общих понятий и теорем из этой монографии дает возможность определить четкий алгоритм решения систем уравнений над графами, что является одной из целей диссертации.

Решение систем уравнений над графами является новым направлением алгебраической геометрии. Существует тесная связь этого направления с проблемами разрешимости теорий наследственных классов графов. Проверка принадлежности графа некоторому классу входит в качестве процедуры в алгоритмы

---

<sup>1</sup> Даниярова Э.Ю., Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.

проверки разрешимости универсальных теорий наследственных классов графов. Эта процедура может быть оформлена в виде решения конечной серии систем уравнений над графами. Большой интерес вызывает проблема разрешимости универсальных теорий различных классов графов. Изучение универсальных теорий особенно актуально в силу их значения в теории моделей.

В свою очередь, проблемы разрешимости теорий наследственных классов графов тесно связаны с вопросами конечной и универсальной аксиоматизируемости этих классов, которые также вызывают традиционный интерес.

Перейдем к обзору основных результатов диссертации.

Результаты первой главы относятся к алгебраической геометрии над обыкновенными графами. Исследованы три вида систем уравнений над обыкновенными графами: бескоэффициентные системы уравнений, т.е. когда язык графов не содержит констант; системы уравнений с одной переменной; произвольные системы уравнений – для языков, в которых множество констант совпадает с множеством вершин графа. Для каждого вида систем уравнений предложены алгоритмы проверки совместности и алгоритмы построения общего решения системы уравнений – координатного графа.

Во второй главе исследуются проблемы аксиоматизируемости различных классов графов на языке логики первого порядка, а также разрешимости их универсальных теорий. Доказан критерий аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов, т.е. классов графов, замкнутых относительно операций удаления вершин и ребер. Найдены необходимые и достаточные условия универсальной и конечной аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов. Доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов.

В третьей главе предложено эквивалентное определение матроида в терминах поверхностей различного ранга, удовлетворяющих заданным аксиомам инцидентности. В случае обыкновенного матроида его характеристика представляет собой эквивалентное определение комбинаторной геометрии. Доказана конечная аксиоматизируемость класса матроидов фиксированного ранга  $r$ , а также двух наследственных классов матроидов ограниченного ранга – класса матроидов ранга, не большего  $r$ , и класса матроидов разбиения ранга, не большего  $r$ . Установлено, что наследственный класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.

Представленные в диссертации результаты являются новыми и строго обоснованы. Все основные результаты диссертации получены А.В. Ильевым лично, отражены в 10 публикациях, включая 3 статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК, и прошли необходимую апробацию на научных конференциях и семинарах.

Считаю, что диссертационная работа А.В. Ильева «ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД ГРАФАМИ, РАЗРЕШИМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ И АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ И МАТРОИДОВ» удовлетворяет критериям, предъявляемым к кандидатским диссертациям в соответствии с п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, а соискатель, Ильев Артем Викторович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный руководитель

Ремесленников Владимир Никанорович  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий лабораторией комбинаторных  
и вычислительных методов алгебры и логики  
Омский филиал ФГБУН Института математики  
им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН  
адрес: 644099, Омск, ул. Певцова, 13  
тел.: 8(3812)97-22-51,  
e-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

В.Н. Ремесленников

Подпись В.Н. Ремесленникова заверяю

Начальник ОК

Л.А. Шлюшинская