

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Шевлякова Артёма Николаевича «Алгебраическая геометрия над полугруппами и булевыми алгебрами», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Алгебраическая геометрия – это одна из классических областей математики, изучающая решения систем алгебраических уравнений над полем. Со временем появились попытки решений некоторых классов уравнений над конкретными алгебрами, в том числе, над некоторыми классами групп, полугрупп, алгебр Ли и др. Все это со временем вызвала к жизни проблему изучения общих принципов решений систем уравнений над произвольной (универсальной) алгеброй, а затем и над алгебраической системой, и стало предвестником появления новой возникшей сравнительно недавно научной области в математике – универсальной алгебраической геометрии. Изучение универсальной алгебраической геометрии было начато в работах Б. И. Плоткина (1997, 2002 гг.) для алгебр. Несколько позже с 2008 г. коллектив авторов в составе Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова активно и довольно успешно начали разработку общих основ универсальной алгебраической геометрии над произвольными алгебраическими системами. Ими проделана интересная и важная работа, в частности, доказаны так называемые объединяющие теоремы, позволяющие изучать те или иные понятия универсальной алгебраической геометрии с разных точек зрения. В 2016 г. упомянутые авторы издали монографию «Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами», в которой систематизированы общие результаты в этом новом направлении, намечены основные задачи по изучению основных понятий и сформулированы ряд открытых проблем и вопросов.

Решение некоторых из них применительно к булевым алгебрам, полугруппам и алгебраическим системам с предикатом «не равно», касающихся понятий алгебраического множества и координатной алгебры, геометрической эквивалентности, нетеровости и его обобщений q_w - и u_w -компактности, эквациональной области и является основной целью обсуждаемой диссертации.

Основные результаты диссертации, на наш взгляд, следующие.

1. Для булевой алгебры, рассматриваемой в языке с константами, найдены необходимые и достаточные условия слабой нетеровости, а также q_w - и u_w -компактности. Получены результаты о геометрической эквивалентности булевых алгебр.

2. Описаны эквациональные области в классе всех полугрупп в языке без констант, в классах инверсных и клиффордовых (т. е. являющихся объединением групп) полугрупп в языке с константами и унарной операцией обращения, а также охарактеризованы такие области в классе полугрупп с конечным наименьшим идеалом в полугрупповом языке с константами.
3. Доказано, что свободная полурешетка F бесконечного ранга, рассматриваемая в языке с константами, нетерова по совместным системам. Описаны координатные полурешетки, соответствующие неприводимым алгебраическим множествам над F . Указан критерий совместности систем уравнений над F . Приведен алгоритм проверки совместности систем уравнений над F .
4. Развита универсальная алгебраическая геометрия над языками, содержащими предикатный символ $\neq$. Получена классификация ко-областей, нетеровых по уравнениям, q_w - и u_w -компактных алгебраических систем таких языков. Кроме того, для произвольной алгебраической системы языка L , содержащего предикатный символ $\neq$, описаны неприводимые множества и неприводимые координатные алгебры.
5. Для линейно упорядоченной полурешетки L из l элементов, в случае, когда число переменных n в уравнениях больше l , изучены свойства неприводимых алгебраических множеств. Кроме того, вычислено среднее число неприводимых компонент алгебраических подмножеств.
6. Найдена полурешетка порядка n , над которой число несовместных уравнений от m переменных максимально (минимально). Показано, что наиболее вероятным решением случайно выбранного уравнения от одной переменной над произвольной полурешеткой ранга $n \geq 6$ будет пустое множество.

Отметим, что кроме упомянутых здесь основных результатов в диссертации содержатся и другие представляющие научный интерес. Например, результаты подраздела 2.6, касающиеся эквациональных областей полугрупп с нетривиальным центром, Ряд интересных результатов имеется среди следствий основных результатов. Все вместе это создает широкую картину исследований, проведенных автором.

Основные результаты диссертации являются новыми. Все они получены автором лично и опубликованы в 13 статьях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, что соответствует требованию (не менее 10) ПОЛОЖЕНИЯ О ПРИСУЖДЕНИИ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ, и прошли широкую апробацию — они докладывались на ряде Международных конференций и научных семинарах.

Доказательства основных результатов достаточно полные, для ряда из них весьма нетривиальны и опираются как на общие результаты алгебраической геометрии над алгебраическими системами, так и на результаты теорий моделей, булевых алгебр и

полугрупп. При этом автор демонстрирует широкую эрудицию, хорошую осведомленность и изобретательность. Достоверность основных результатов не вызывает сомнений. Они носят теоретический характер и могут найти применение в дальнейших исследованиях по развитию универсальной алгебраической геометрии.

Диссертация изложена на 173 страницах, содержит введение, шесть разделов с полученными результатами и список литературы. Разделы разбиты на подразделы, список литературы содержит 130 наименований. Нумерация утверждений (теорем, лемм, следствий), определений и примеров сквозная внутри каждого раздела и состоит из двух чисел: первое число — это номер раздела, второе — порядковый номер внутри раздела.

Изложение материала диссертации, в основном, продумано. Во введении приводится краткий обзор предшествующих результатов и обосновывается актуальность темы исследования, дается краткое изложение результатов, выносимых на защиту, основная проблематика и краткое изложение содержания диссертации. Раздел 0 содержит предварительные сведения из теорий полугрупп, булевых алгебр, алгебраических систем и универсальной алгебраической геометрии, что облегчает чтение диссертации. Затем идут шесть разделов, разбитых на подразделы, с изложением полученных результатов. В основном продумана система обозначений. Автором проделана большая работа по изучению и систематизации научной литературы (только в диссертацию включено 130 источников), связанной с темой диссертации. Изложение материала адресное, приводимые в диссертации результаты, в том числе и авторские, сопровождаются ссылкой на соответствующие источники.

Тем не менее оформление диссертации и автореферата, а также представление в них основных результатов, не лишены недостатков.

1. В диссертации в небольшом количестве имеются опечатки. Например, в конце с. 69 в формулировке теоремы 2.14 вместо символа $L_s(S)$ должен быть символ $L_{s-inv}(S)$, а на с. 132 в названии раздела 5 слово «полугруппами» надо заменить словом «полурешетками».
2. Для выключенных формул лучше было бы использовать двойную нумерацию, в которой первое число указывало бы раздел, что облегчило бы их поиск при ссылках.
3. При оформлении принят современный стиль изложения: разбиение на разделы, подразделы и пункты (последние автор не использует) вместо традиционного — на главы, параграфы и пункты. Но в тексте диссертации и автореферата используются термины глава и параграф, хотя обозначение параграфа нигде не используется.
4. Вряд ли является оправданным то обстоятельство, что теоремы, приводимые в диссертации и автореферате, имеют разную нумерацию (в диссертации двой-

ную, а в автореферате указывается их порядковый номер). Это создает дополнительные трудности при их чтении и написании отзыва.

5. Иногда при изложении материала формулируются в виде теорем утверждения с тривиальными доказательствами. Например, на с. 43 формулировки двух теорем 1.5 и 1.6, а также их доказательства занимают неполную страницу (к чести автора они не присутствуют среди перечня основных результатов). Конечно автор вправе назвать *теоремой* любое истинное утверждение теории, но обычно в диссертации слово *теорема* стараются использовать для *основных результатов*, а в других случаях используют слова *предложение*, *наблюдение*, *факт* и др. В связи с этим при изложении хорошо бы формулировке основных результатов в диссертации либо предпосылать слова: «Следующий результат является одним из основных», либо, учитывая предыдущее замечание, сделать в диссертации *отличительной чертой основных результатов их порядковую нумерацию, совпадающую с нумерацией в автореферате*.
6. На стр. 10 в 3-ем абзаце снизу диссертации замечание о том, что «несмотря на почти полное совпадение формулировок теорем 2.23 и 2.28 (в автореферате – 9 и 12) ни один результат не следует из другого, поскольку в теореме 2.23 полугруппы рассматриваются в языке с обращением $L_{s-inv}(S)$, а в теореме 2.28 используется язык без обращения $L_s(S)$ » не является убедительным. На самом деле, теорема 2.28 является частным случаем теоремы 2.23, так как конечная простая полугруппа является вполне простой, а поэтому объединением конечных групп и, следовательно, операция обращения в ней выражается на полугрупповом языке, как и в любой периодической группе: при $n > 1$ из $x^n = e$ следует $x^{-1} = x^{n-1}$.
7. В разделе 2 диссертации, посвященном изучению эквациональных областей в полугруппах, подразделы **2.4. Вполне простые полугруппы** и **2.5. Конечные простые полугруппы**, поскольку фигурирующие в их названии полугруппы являются клиффордовыми, следовало бы включить в раздел **2.3. Клиффордовы полугруппы**, а основные результаты указанных подразделов – теоремы 2.14, 2.23 и 2.28 (в автореферате – 8, 9 и 12) – заменить одной фундаментальной имеющей весьма нетривиальное доказательство теоремой, описывающей эквациональные области в важном классе клиффордовых полугрупп в языке L_{s-inv} . К сожалению, формулировка такой теоремы отсутствует и в диссертации, и автореферате. Ради справедливости следует отметить, что среди краткого изложения основных результатов и в диссертации на с. 6, и в автореферате на с. 6 в пункте 3(b) утверждается получение описания эквациональных областей в классе клиффордовых полугрупп (оно на самом деле со-

держится в диссертации и вытекает из теорем 2.14 и 2.23 (теорем 8 и 9 в автореферате)), но при этом делается ссылка на статью [121] автора, в которой содержится лишь сведение этого описания к вполне простым полугруппам (в теории полугрупп считается описанием сведение к группам).

8. В связи со сказанным в пунктах 6 и 7 при кратком изложении основных результатов и в диссертации на с. 6, и в автореферате на с. 6, приведя пункт 3(b), необходимо было добавить ссылку на статью автора [122]. В этом случае статьи [121] и [122] обеспечили бы описание эквациональных областей в классе клиффордовых полугрупп. Тот факт, что основной результат доказывается в двух статьях только добавил бы этому результату весомость. Пункты 3(c) и 3(d) следовало бы опустить, так как содержащиеся в нем результаты являются частными случаями результата пункта 3(b).
9. Название подраздела **2.7. Конечные полугруппы** лучше бы, на наш взгляд, заменить на **Полугруппы с наименьшим конечным идеалом**, что больше соответствовало бы содержанию этого подраздела. При этом вместо теорем 2.38, 2.41 и 2.46 (в автореферате – теорем 16, 17, 18) в качестве основного результата на основе их сформулировать одну глубокую теорему, сводящую описание эквациональных областей в классе полугруппы с наименьшим конечным идеалом (ядром) к *конечным полугруппам, ядра которых, являясь эквациональными областями и вполне простыми полугруппами, имеют исчерпывающее описание* в силу предшествующих результатов.
10. Обращает на себя внимание большое количество теорем, приведенных в разделе **Содержание работы** в автореферате (их 23, причем вряд ли оправдано, что в этот список включена теорема 7 другого автора), которые автор, по-видимому, считает основными результатами. Как свидетельствуют замечания 8 и 9, среди них встречаются незавершенные и частные, из которых можно получить более общие и завершенные теоремы, подтверждающие справедливость представленных к защите результатов. Произошло это, на наш взгляд, от неверного подхода к изложению основных результатов диссертации *от частного к общему*, то время как в диссертациях обычно формулируют максимально общие и завершенные результаты, а частные, если в этом есть необходимость, отмечают особо. Отчасти это объясняется компоновкой диссертации из статей, иногда без вдумчивого и критического осмысления полученного текста.

Отмеченные недостатки (первые 5 из них носят редакционный характер) относятся в большинстве своем к оформлению и представлению основных результатов, а поэтому не уменьшают научной значимости диссертации. В ней получен ряд интересных в определенном смысле завершенных и нетривиально доказываемых научных результатов.

Она имеет внутреннее единство и привносит весомый вклад в разработку актуальной проблематики универсальной алгебраической геометрии для булевых алгебр, полугрупп и алгебраических систем.

Автореферат правильно и довольно полно отражает ее содержание за исключением лишь быть может того, что в автореферате нигде нет оговорки о том, что перечисленные в нем на с. 6 результаты под номером 6 получены для случая, когда число n переменных, входящих в запись уравнений, больше числа l элементов полурешетки, в то время как в тексте диссертации на с. 133 в замечании 5.1 об этом сказано.

В целом диссертация А. Н. Шевлякова представляет собой научно-квалификационную работу, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение. На основании вышеизложенного, считаю возможным признать, что диссертация «Алгебраическая геометрия над полугруппами и булевыми алгебрами» отвечает критериям Положения о порядке присуждения ученых степеней, а ее автор, Шевляков Артём Николаевич, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математики
и методики обучения математике
ФГБОУ ВО «Омский государственный
педагогический университет»
15 ноября 2017 года

Л.М. Мартынов

Набережная им. Тухачевского, 14, г. Омск, 644099;
mail@omgpu.ru; www.omgpu.ru