

ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
на диссертацию Звездиной Марии Анатольевны
«Конечные почти простые группы, изоспектральные простым»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация М.А. Звездиной посвящена вопросу о том, насколько хорошо конечные неабелевы простые группы определяются порядками своих элементов. В диссертации завершено исследование этого вопроса для нескольких серий простых групп лиева типа.

Идея описывать строение конечной группы исходя из множества порядков ее элементов встречается уже у У. Бернсайда, который классифицировал конечные группы, содержащие элементы порядка 2 и не содержащие элементы других четных порядков. Из этого результата, в частности, следует, что неабелевы простые группы $PSL_2(2^m)$, где $m > 1$, однозначно задаются множеством порядков своих элементов. В 1980–1990-х годах в работах В.Дж. Ши, Р. Брандла, В.Д. Мазурова было установлено, что это свойство присуще многим неабелевым простым группам, и с этих работ начались широкомасштабные исследования распознаваемости простых групп по множеству порядков элементов.

Назовем множество порядков элементов группы ее спектром, а группы с одинаковыми спектрами — изоспектральными. Некоторой мерой того, насколько хорошо группа S определяется своим спектром, является число $h(S)$ различных конечных групп, изоспектральных S , хотя более важным и интересным является строение таких конечных групп. Говорят, что для группы S решена проблема распознаваемости по спектру, если известно $h(S)$ и в случае конечного $h(S)$ описаны все конечные группы, изоспектральные S . За время, прошедшее с выхода пионерских работ В.Дж. Ши, проблема распознаваемости была решена для многих классов неабелевых простых групп, в том числе для спорадических групп (В.Дж. Ши, В.Д. Мазуров и др.) и знакопеременных групп (И.Б. Горшков, А.В. Заварницин и др.). Однако в самом большом классе неабелевых простых групп, классе групп лиева типа, группы с полностью решенной проблемой распознаваемости до недавнего времени были скорее исключением, чем правилом. Ситуация кардинально изменилась в 2014 году, когда была доказана гипотеза В.Д. Мазурова о том, что $h(S)$ конечно, если S — простая группа лиева типа достаточно большого лиева ранга, и, более того, любая конечная группа G , изоспектральная такой простой группе S , является почти простой группой с цоклем, изоморфным S , т.е. с точностью до изоморфизма удовлетворяет условию $S \leq G \leq \text{Aut } S$ (А.В. Васильев, А.В. Заварницин, В.Д. Мазуров, А.С. Кондратьев, М.А. Гречкосеева и др.). Таким образом, центральное место в проблеме распознаваемости простых групп по спектру заняла задача описания почти простых расширений групп лиева типа, изоспектральных своему цоклю.

В диссертационной работе эта задача решается в следующих важных случаях: цокль — одна из исключительных групп ${}^3D_4(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$ (теоремы 3–6) или цокль — симплектическая или ортогональная группа над полем характеристики 2 (теоремы 1 и 2). Важность этих случаев обусловлена тем, что их рассмотрение завершает исследование проблемы распознаваемости исключительных групп в произвольной характеристике и групп лиева типа в характеристике 2. Кроме того, теоремы 3–6 дают примеры бесконечных серий исключительных групп, которые не являются распознаваемыми по спектру. До их доказательства единственным таким примером была группа ${}^3D_4(2)$ (В.Д. Мазуров, 2013). Кроме собственно описания почти простых групп, изоспек-

тральных доколе, в работе дано арифметическое описание спектров групп ${}^3D_4(q)$ и $F_4(q)$, что потребовало от автора тщательного изучения связанных централизаторов полупростых элементов рассматриваемых групп в рамках подхода, разработанного Р.В. Картером. Теоремы 1, 2, 5 и 6 получены М.А. Звездиной самостоятельно, теоремы 3 и 4 — в неразделимом соавторстве со мной. Я не возражаю против использования этих результатов в диссертации.

Естественным усилением свойства распознаваемости по спектру является распознаваемость по графу простых чисел. Граф простых чисел группы, введенный К. Грюнбергом и О. Кегелем в связи с некоторыми кохомологическими вопросами теории целочисленных групповых колец, определяется по ее спектру: множество вершин — это множество простых чисел из спектра и две вершины, помеченные числами p и q , смежны, если pq лежит в спектре. Граф простых чисел содержит гораздо меньше информации о группе, чем ее спектр, однако некоторые неабелевы простые группы распознаваемы и по графу простых чисел. С другой стороны, несмотря на то, что давно и хорошо известны пары простых групп одинакового порядка, известны пары простых групп с одинаковым спектром, до сих пор не описаны пары простых групп с одинаковым графом простых чисел. В диссертации доказано, что граф простых чисел знакопеременной группы степени, большей 9, не может совпадать с графом простых чисел спорадической группы или группы Лиева типа, т.е. в рамках рассматриваемой задачи, может совпадать только с графом простых чисел другой знакопеременной группы (теорема 7). Как оказалось, окончательное описание пар знакопеременных групп с одинаковым графом простых чисел возможно только по модулю некоторого усиления бинарной гипотезы Гольдбаха о представимости четного числа в виде суммы двух простых, и это описание получено в теореме 8. Теоремы 7 и 8 получены М.А. Звездиной самостоятельно.

Все результаты диссертации являются новыми, представляют цельное и содержательное научное исследование, снабжены корректными доказательствами, полностью и своевременно опубликованы в рецензируемых научных журналах. Они прошли апробацию на конференциях в России и за рубежом, на семинарах в ИМ СО РАН и НГУ. Один из результатов диссертации включен в список важнейших результатов ИМ СО РАН за 2016 год. Результаты могут использоваться для дальнейших исследований по теории групп. Некоторые результаты и методы могут использоваться в специальных курсах.

Считаю, что представленная диссертация «Конечные почти простые группы, изоспектральные простым» соответствует всем критериям, установленным в положении о присуждении ученых степеней, а соискатель — Мария Анатольевна Звездина — заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный руководитель
внс ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.
17 января 2017 г.

М.А. Гречкосеева

Гречкосеева Мария Александровна,
ведущий научный сотрудник,
ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
адрес: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
телефон: +7 (383) 3297646, e-mail: gma@math.nsc.ru