Отзыв научного руководителя на диссертацию Андрея Артемовича Симонова «ОГРАНИЧЕННО ТОЧНО ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПСЕВДОМАТРИЧНЫМ УМНОЖЕНИЕМ», представленной на соискание ученой степени кандидата физико математических наук по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Изначально группы возникли как группы, действующие на некотором множестве: группы подстановок, группы преобразований и т. д. Настоящая диссертация также посвящена изучению групп, действующих на множестве. При этом рассматриваются множества, являющиеся обобщением полей, колец и других алгебраических систем. Также вводятся новые алгебраические системы и изучаются группы, действующие на них.

Напомним, что группа G, действующая на множестве M, называется *транзитивной*, если для произвольных $x, y \in M$ существует $g \in G$, такой что $y = g(x)$. Группа называется *n-транзитивной*, если для произвольных наборов $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in M^n$, из попарно различных элементов, существует $g \in G$ такой, что $y_i = g(x_i)$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Если при этом элемент g определяется единственным образом, то G называется *точно n-транзитивной*. Следовательно, при изучении n-транзитивных групп мы рассматриваем действие не только на множестве M, но и на следующем подмножестве

$$F(M, n) = \{(m_1, \dots, m_n) \in M^n | m_i \neq m_j \text{ при } i \neq j\} \subseteq M^n.$$

Изучение точно транзитивных групп началось еще на заре становления теории групп. Еще К. Жордан (1872) доказал, что если G – конечная точно n-транзитивная группа и $n \geq 4$, то G является одной из следующих групп: симметрической S_n или S_{n+1}, знакопеременной A_{n+2} или одной из групп Матьё: M_{11}, M_{12}.

Г. Цассенхауз (1936) показал, что любую точно 2-транзитивную группу можно представить как группу аффинных преобразований конечного почти-поля, а точно 3-транзитивную группу — как группу дробно-линейных преобразований конечного поля или почти-поля. Г. Карзел (1965) определил *почти-область* и построил взаимно-однозначное соответствие между почти-областями и точно 2-транзитивными группами. П. Кара, Р. Киебум, Т. Верлоет (2012) изучали категорию почти-областей и категорию точно 2-транзитивных групп и доказали их эквивалентность.

Из обзора полученных результатов видим, что точно 2-транзитивные и 3-транзитивные группы возникают как группы аффинных или дробно-линейных преобразований некоторых алгебраических систем. С другой стороны, все известные примеры точно n-транзитивных групп при $n > 3$ являются конечными группами и полностью описаны К. Жорданом.

В настоящей диссертации вводится некоторое обобщение точно транзитивных групп. Пусть N – непустое подмножество множества $F(M, n)$. Группа G называется N-ограниченно точно *n-транзитивной*, если для любых $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in N$ существует единственный $g \in G$ такой, что $g(x_i) = y_i$ для $i = 1, \dots, n$. В частности, если $N = F(M, n)$, то группа G является точно n-транзитивной.

Рассмотрим типичный пример. Общая линейная группа $G = GL_n(F)$ над полем F действует на векторном пространстве $M = F^n$. Подмножество $F(M, n)$ — множество, состоящее из попарно различных векторов. Если в качестве подмножества N выбрать множество всех базисов пространства M, то G будет являться N-ограниченно точно n-транзитивной группой.

Также в диссертации определяется псевдоумножение матриц, обобщающее обычное умножение матриц и изучаются группы и другие алгебраические системы, которые можно построить при помощи такого псевдоумножения.

Диссертация состоит из введения, трех глав (разбитых на параграфы), заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 90 страниц. Список литературы содержит 57 наименований. Материалы диссертации опубликованы в 19 печатных работах. Из них 5 статей в рецензируемых журналах, из которых 4 входят в перечень ВАК.

Перейдем к более подробному описанию основных результатов диссертации.

В **первой главе** изучаются ограниченно точно n-транзитивные группы и n-псевдополя, устанавливается связь между ними. В частности, в § 1.1 даются определения и простейшие свойства ограниченно точно n-транзитивных групп, приводятся основные примеры таких групп. Так, в теореме 1 строятся группы, являющиеся ограниченно точно 2-транзитивными. Для этого берется K — правое почти-кольцо, содержащее мультипликативную группу, определяется некоторое подмножество $N \subseteq K^2$ и на нем вводится бинарная операция так, что N превращается в группу, которая действует на K и это действие является N-ограниченно точно 2-транзитивным. При этом построенная группа изоморфна группе аффинных преобразований правого почти-кольца K.

В § 1.2 даётся определение n-псевдополя и доказываются простейшие его свойства. В § 1.3 строятся ограниченно точно n-транзитивные группы над n-псевдополями. При этом построение проводится индукцией по n, а в качестве базы индукции берутся группы, построенные в лемме 5, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1. В § 1.4 при помощи ограниченно точно n-транзитивных групп строятся n-псевдополя. В § 1.6 доказывается основная теорема первой главы о категорной эквивалентности класса ограниченно точно n-транзитивных групп и класса n-псевдополей.

Во **второй главе** рассматривается псевдоматричное умножение. В § 2.1 строятся примеры псевдоматричного умножения для матриц из $M_n(F)$ над полем F:

$$X \odot Y = XAY + XB + CY + D,$$

где A, B, C, D - фиксированные матрицы из $M_n(F)$. В частности, при некоторых матрицах A, B, C, D возникает умножение $\circledast$, определенное Г. Г. Михайличенко. В теореме 6 доказано, что алгебраическая система $\langle M_n(F); \odot, +\rangle$ является ассоциативным кольцом тогда и только тогда, когда B, C, D – нулевые матрицы.

Целью § 2.1 является доказательство двух теорем. Первая из которых утверждает, что некоторое множество $G_n \subseteq M_n(F)$, $n \geq 2$, является группой относительно операции $\circledast$. В частности, при $F = \mathbb{R}$ эта группа изоморфна группе Михайличенко. Вторая теорема утверждает, что группа G_n изоморфна некоторой подгруппе группы $GL_{n+1}(F)$. Таким образом, увеличив размер матриц, приходим к стандартному произведению матриц.

В § 2.2 даётся общее определение псевдоматричного умножения и изучаются его свойства. В частности, доказано, что каждая N-ограниченно точно n-транзитивная группа являться примером псевдоматричной группы. В заключении параграфа установлена связь между псевдоматричными и ограниченно точно n-транзитивными группами.

В первом параграфе **третьей главы** даётся формальное определение алебраических систем, возникших в неявном виде в работах Ю. И. Кулакова при изучении физических законов. Также эти системы изучалиь в работах Г. Г. Михайличенко, Е. Е. Витяева, В. К. Ионина и др. В первом параграфе, устанавливается связь алгебраических систем Кулакова с псевдоматричными алгебраическими системами. Приводится доказательство вложимости алгебраических систем Кулакова произвольного ранга в алгебраические системы Кулакова минимального ранга (ответ на вопрос Ю. И. Кулакова (1988)). В заключении доказано, что категория алгебраических систем Кулакова и категории псевдоматричных алгебраических систем категорно эквивалентны.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Некоторые результаты второй главы получены совместно с научным руководителем при равном участии сторон, остальные результаты получены автором самостоятельно. Диссертация написана ясно, грамотно, хорошим математическим языком. Автореферат точно и полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация полностью отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям: тема диссертации актуальна, представленные в ней результаты составляют цельное и значительное научное исследование, являются новыми, снабжены корректными доказательствами, своевременно и полностью опубликованы в научных изданиях. Результаты и методы, предложенные автором, могут использоваться в дальнейших исследованиях по теории групп и алгебраическим системам. Автор диссертации Андрей Артемович Симонов заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Научный руководитель
Бардаков Валерий Георгиевич
доктор физико–математических наук,
доцент, ведущий научный сотрудник
лаборатории обратных зада[illegible]кой физики
ФГБУН "Институт матем[illegible]Соболева, СО РАН"
Новосибирск, пр. Ак. К[illegible]-69

20 сентября 2016 г. В. Г. Бардаков