ОТЗЫВ

о диссертации О. Г. Паршиной
«Периодические структуры в бесконечных словах
и раскрасках бесконечных циркулянтных графов»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Основная часть представленного О. Г. Паршиной исследования относится к комбинаторному анализу бесконечных символьных последовательностей (бесконечных слов) над конечными алфавитами. Тот факт, что в одной из глав задачи удобнее формулировать в терминах раскрасок бесконечной цепи типа $\mathbb{Z}$ в конечное число цветов, не меняет сути дела. Цельность исследования, на мой взгляд, отчасти нарушена последней из рассматриваемых задач (задачей о минимальном носителе), которая также может быть отнесена к комбинаторному анализу, но не имеет видимой связи с другими постановками. Тем не менее, вся рассматриваемая в диссертации тематика соответствует паспорту специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика.

Остановимся подробнее на структуре и результатах диссертации. Диссертация состоит из введения, содержащего, в том числе, небольшой литературный обзор по рассматриваемой тематике, и четырех глав с результатами автора.

Объектом исследования в первой главе являются слово Туэ–Морса — вероятно, самая знаменитая конструкция в комбинаторике слов, впервые в явном виде построенная в работе Туэ 1912 года, а также «обобщенные» слова Туэ–Морса, полученные расширением одного из эквивалентных определений слова Туэ–Морса с бинарного алфавита на произвольный конечный алфавит. Это определение является арифметическим: n-ый символ последовательности определяется суммой цифр двоичного представления числа n, поэтому интерес автора к ранее не изученным арифметическим свойствам слова Туэ–Морса и его обобщений вполне естественен. Изученные вопросы близки к понятию арифметической сложности слова — одной из «подсчитывающих» комбинаторных функций, сопоставляемых слову. Эта функция подсчитывает арифметические подслова, т.е. подпоследовательности данного слова, составленные из символов в позициях, образующих арифметическую прогрессию с произвольной разностью. Автором получены два основных результата: точное значение максимальной длины унарного арифметического подслова в обобщенных словах Туэ–Морса как функции от размера алфавита и ограничения сверху на разность прогрессий (теорема 1), а также верхняя и нижняя оценки на арифметический индекс арифметического подслова обобщенного слова Туэ–Морса как на функцию от размера алфавита и длины подслова (неравенства (1.2) и (1.5)). По неясной мне причине второй результат не сформулирован в тексте в виде теоремы либо двух предложений. Результаты первой главы безусловно положительно оценены экспертами в области комбинаторики слов: доклады по ним были включены в программу международных конференций по комбинаторике слов WORDS 2015 и WORDS 2017, сами результаты опубликованы в трудах этих конференций в престижной серии Lecture Notes in Computer Science издательства Springer.

Во второй главе рассматривается другой известный класс слов над конечными алфавитами, полученный расширением одного из определений знаменитого класса бинарных слов. Этот класс бинарных слов — слова Штурма — был введен Морсом и Хэдлундом в работе 1940 года; одно из эквивалентных определений гласит, что это слова, имеющие ровно $n + 1$ различное подслово длины n для всех n, что является минимально возможным значением для апериодических бесконечных слов. Обобщение, сделанное в работе Арну и Рози 1991 года, позволяет определить слова над произвольным конечным алфавитом, по свойствам очень похожие на слова Штурма. Одно из этих свойств касается структуры «закрытых» подслов, т.е. подслов, начинающихся и заканчивающихся одним и тем же фрагментом, не встречающимся более нигде внутри подслова. Автором получен один основной результат (теорема 2): формула для числа закрытых подслов заданной длины в произвольном заданном слове Арну–Рози. Данная формула использует другие подсчитывающие функции для слов Арну–Рози, изученные ранее в работах других исследователей. Интересным следствием полученного результата является тот факт, что число закрытых подслов в любом слове Арну–Рози (и, в частности, в любом слове Штурма) стремится к бесконечности с ростом длины, что неверно для некоторых других хорошо известных апериодических бинарных слов.

В третьей главе изучаются вопросы, близкие к еще одной подсчитывающей функции — абелевой сложности бесконечных слов. Постановки задач происходят из теории графов, а именно, из задач о совершенных раскрасках (в мировой литературе более известных как задачи о равновесных разбиениях — equitable partitions). Требуется раскрасить вершины неориентированного графа в заданное число цветов так, чтобы окрестности любых двух одноцветных вершин были одинаково окрашены. Часто в данной постановке рассматривается бесконечный граф регулярной структуры (например, квадратная или треугольная решетка на плоскости). В работе рассматриваются бесконечные графы, вершинами которых являются целые числа, а ребрами соединяются те вершины, модуль разности между которыми принадлежит заданному конечному множеству; в качестве таких множеств рассматриваются либо первые n натуральных чисел, либо первые n нечетных натуральных чисел. Получено два основных результата — описания всех совершенных 2-раскрасок для двух описанных выше классов бесконечных графов (теоремы 3 и 4). Несколько странным выглядит то, что первый из результатов есть в списке основных положений, выносимых на защиту, а второй — нет.

Четвертая глава стоит несколько особняком. В ней рассматриваются вопросы о минимальном числе ненулевых координат в подпространствах специального вида конечномерных евклидовых пространств. Автор по касательной упоминает о том, что эти вопросы представляют интерес для случая подпространств в пространствах, связанных с графами, но не приводит никаких содержательных пояснений. В отсутствие таких пояснений результаты автора, связанные с существованием в подпространствах заданного вида векторов с единственной ненулевой координатой (теоремы 5 и 6), оказываются оторванными от остального корпуса результатов и повисают в воздухе. Значительное недоумение вызывает тот факт, что задач, решаемых в главе 4, нет в списке задач диссертации (при этом в списке положений, выносимых на защиту, есть теорема 5 и предложение 3, хотя нет теоремы 6).

В целом, диссертация оставляет хорошее впечатление. Полученные диссертантом результаты можно охарактеризовать как значимый вклад в комбинаторику слов и теорию графов. Все полученные результаты являются новыми и нетривиальными. Доказательства изложены достаточно подробно и четко, чтобы гарантировать достоверность результатов, хотя и не свободны от мелких погрешностей. Текст работы разумно организован и неплохо написан. Все основные результаты своевременно опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. Список конференций, на которых производилась апробация диссертации, весьма убедителен. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Вместе с тем к работе можно высказать ряд замечаний. Замечание принципиального характера одно: при чтении диссертации складывается впечатление, что главу 4 можно было вообще в нее не включать, поскольку материала для защиты и так достаточно, а без данной главы впечатление от диссертации было бы более целостным. Возможно, отсутствие четвертой главы позволило бы автору больше внимания уделить проработке первых трех, поскольку диссертация написана несколько небрежно.

В последующий список замечаний не включены опечатки и орфографические ошибки, число которых невелико.

- с.4: ссылка на Туэ неверна, названный результат — это теорема 6 (Satz 6) в его работе 1906 года, хотя слово Туэ–Морса действительно появилось в работе [1];

- с.7: слова «существует гипотеза» следовало снабдить ссылкой или указать, что это фольклор;

- с.8: во фразе «множество слов с максимальным арифметическим индексом» пропущено «заданной длины»;

- с.8: «В данном случае v называется рамкой слова u» — из предыдущей фразы получается, что рамка встречается в слове только два раза, а ниже в том же абзаце оказывается, что это не так, а рамка — просто перевод термина border;

- с.9–10: связь раскрасок с частичными словами выглядит надуманной и нигде далее не используется; указанная выше в рецензии связь с абелевой сложностью (особенно для множеств разностей вида $\{1, \ldots, n\}$) намного более явная;

- с.15: «мы утверждаем, что $L_{w_{(3)}}(2) = 3$» — где это утверждается/доказывается?

- с.15: «$c, k \in \omega$» — должно быть $k \in \mathbb{N}$;

- с.17: в лемме 1 неравенство для d должно быть строгим;

- с.17: «множество $\{x + id\}$» — пропущено $\mathrm{mod} n$; вообще, автор часто в этой главе пропускает указание на то, что сложение идет по модулю n, и это создает дискомфорт при чтении, поскольку в соседних формулах встречается знак $+$ в двух разных смыслах; стоило ввести другой знак для сложения по модулю; дополнительно, там где автор все-таки пишет $\mathrm{mod} n$, она обычно пропускает скобки, и приходится разбираться, к чему относится взятие по модулю;

- с.18: «$s_q(1 - d_0)$» — из-за пропущенного $\bmod n$ функция вызывается от аргумента, который может быть вне ее области определения;

- с.19: анализ случая 2 не проходит при $x = \dot{q}$, нужно было явно исключить это значение;

- с.19: «$q(n-1)$» — должно быть q^{n-1};

- с.25: «Слово Туэ–Морса и его обобщение являются неподвижными точками равноблочных морфизмов» — следовало явно указать эти морфизмы;

- с.25–26: неясно, почему неравенства (1.2) и (1.5) не оформлены как математические утверждения;

- с.27: определения (би)специальных слов и первых возвратов даны уже после использования этих терминов; отсутствуют ссылки на исследования по последовательностям длин биспециальных слов и длин первых возвратов слов Арну–Рози;

- с.29, лемма 5: S_k — подслово в B_k, но не его суффикс;

- с.30: «$p_{a_k}^{(k)} = p_{a_k}^{(k-1)},\ p_b^{(k)} = p_b^{(k-1)} + p_{a_k}^{(k-1)}$» — нужна ссылка или доказательство;

- с.30: «Индукцией несложно проверить» — следовало сначала вывести формулу (2.3), а потом уже написать, что из нее по индукции следует формула (2.2);

- с.34, Рис. 2.1: стоило явно выписать и доказать формулу для числа закрытых подслов в слове Фибоначчи, это было бы хорошей иллюстрацией теоремы 2;

- с.34: «генерирующая последовательность» — вероятно, имелась в виду направляющая последовательность, определенная на с.29;

- с.36: «Как альтернативный пример, можно рассмотреть слово x ... Легко показать, что все подслова длины $2^n (n \in \mathbb{N})$ открыты» — непонятно, почему автор не рассмотрела и не показала это в тексте диссертации;

- с.37: нужно было упомянуть терминологию равновесных разбиений (equitable partitions) и сослаться на подходящую монографию, например, [C.D. Godsil, Algebraic Combinatorics, Chapman and Hall, New York, 1993];

- с.38: упоминая орбитный метод построения раскрасок, следовало кратко описать его суть и привести ссылку;

- с.39: теорема 3 сформулирована неаккуратно, поскольку термин «порожденная раскраска», определенный выше, не подходит к способу получения 2-раскраски всего графа из 2-раскрасок бесконечных цепей; то же замечание относится к теореме 4 на с.45;

- с.41: для случая $b+c = 2n+1$ пропущено (несложное) рассуждение, доказывающее периодичность раскраски;

- с.44: «смежна ровно с $2s$ белыми и $2(t-1)$ чёрными вершинами» — поменяны местами белые и черные;

- с.49: «Множество его совершенных раскрасок описано в параграфе 3.3» — ошибка верстки, ссылка должна идти на следующий (непронумерованный) параграф;

- с.50: результаты параграфа следовало сформулировать явно в виде утверждений.

Отмеченные выше недостатки несколько снижают впечатление от диссертации О. Г. Паршиной, но не влияют на ее положительную оценку. Считаю, что работа «Периодические структуры в бесконечных словах и раскрасках бесконечных циркулянтных графов» удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением правительства РФ №842 от 24.09.2013, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор О. Г. Паршина заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09.

Официальный оппонент —
доктор физико-математических наук, А. М. Шур
профессор,
ведущий научный сотрудник лаборатории
комбинаторной алгебры
Института естественных наук и математики
Уральского федерального университета
620000 г. Екатеринбург пр. Ленина, 51, +7(343)389-94-68
arseny.shur@urfu.ru