ОТЗЫВ

официального оппонента

на диссертацию Беспалова Евгения Андреевича

«**Методы алгебраической теории графов в исследовании МДР кодов**»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

Тема исследования данной работы связана с тремя важнейшими областями дискретной математики – алгебраической комбинаторикой, теорией кодирования и теорией графов.

Первая глава диссертации посвящена свитчинговой разделимости графов по модулю q. В ней дано описание всех свитчингово неразделимых графов таких, что удаление любой вершины графа приводит к свитчингово разделимому графу. Этот вопрос оказывается важным с точки зрения изучения n-арных квазигрупп, которые можно рассматривать как латинские гиперкубы. n-арные квазигруппы изучались В. Д. Белоусовым и его научной школой с 1960 года. Оказалось, что они тесно связаны с МДР кодами, то есть МДР код можно представить как систему ортогональных латинских гиперкубов. Более того, имеется взаимно однозначное соответствие между n-арными квазигруппами, латинскими гиперкубами и МДР-кодами. Синглтон показал, что если в графе Хэмминга H(n,q) дан код C с кодовым расстоянием d, то мощность C меньше или равна q в степени n-d+1. Код, в котором достигается граница Синглтона, называется максимально дистанционно разделимым кодом (МДР кодом). Заметим, что n-арная квазигруппа называется неразделимой, если ее нельзя представить в виде бесповторной суперпозиции двух квазигрупп меньшей арности. Для порядка 4 существует класс квазигрупп, который затрудняет характеризацию. Это неразделимые n-арные квазигруппы у которых все (n-1)-арные ретракты разделимы. Такие квазигруппы автор называет "критическими". Д. С. Кротов строил критические квазигруппы порядка 4, используя свитчинговую разделимость для графов по модулю 2. Мотивацией для исследования свитчинговой разделимости графов по модулю q был вопрос, можно ли построить критические квазигруппы тем же методом для порядка больше 4. В общей статье с Д. С. Кротовым автор диссертации описал, как по графу с весами можно построить квазигруппу, причем такая квазигруппа будет критической, только если соответствующий граф критический. Данный метод работает при простом q, а порядок построенной квазигруппы равен q в степени 2. Тем самым получен класс квазигрупп, построенных по графам, порядка равного квадрату простого числа. Но в полученной характеризации для графов оказалось, что критические графы существуют, только если q четно, т.

е. при простом q>2 не существует критических графов. Основное следствие полученной характеризации в том, что при простом q>2 в построенном по графам классе квазигрупп порядка q в квадрате нет критических квазигрупп.

Во второй и третьей главе исследуются графы Дуба. Графом Дуба называется граф, который является декартовым произведением m копий графа Шрикханде и n копий полного графа с четырьмя вершинами. Графы Дуба D(m, n) дистанционно-регулярные с тем же массивом пересечений, что и графы Хэмминга H(2m+n,4). Эти графы, так же как и графы Хэмминга, представляют большой интерес для исследований в алгебраической теории графов. Интересно, что граф Шрикханде и граф Хэмминга H(2,4) являются двумя графами с наименьшим числом вершин, которые сильно регулярны и имеют одинаковые параметрамы. Эти графы получаются из плодовитой конструкции Д. Г. Фон-Дер-Флаасса. Также один из другого получается с помощью дуального переключения Зайделя. Это означает, что графы Дуба тоже можно получить таким же образом из графов Хэмминга, используя дуальное переключение Зайделя. Возможно эти факты можно было использовать при изучении графов Дуба. Но автор предпочел использовать представление графа Шрикханде как графа Кэли над абелевой группой, порожденной двумя элементами порядка 4. Как показало его исследование, это оказалось оправдано. Более того автору удалось получить важные свойства автоморфизмов графов Шрикханде и свойства его разбиений на 4-коклики. Очень интересной является лемма 13, доказательство которой можно независимо получить как раз с помощью конструкции Д. Г. Фон-Дер-Флаасса.

Автор определяет МДР коды в графах Дуба аналогично определению МДР кодов в графах Хэмминга. Как мы уже заметили, графы Дуба как и графы Хэмминга интенсивно изучаются. Большой вклад в их изучение был сделан Д. С. Кротовым и его учениками.

Во второй главе диссертации задачей было описать все МДР коды с кодовым расстоянием d>2 в графах Дуба. Результат для кодового расстояния 2 был получен автором совместно с Д. С. Кротовым и в диссертацию не вошел. Другой особый случай – это коды с расстоянием равным диаметру. В этом случае оказалось, что в коде всего 4 вершины, и главная трудность была посчитать число неэквивалентных кодов. Это число в графах D(m,n) растет как кубический полином 3-й степени, причем зависящий только от m. Далее описаны МДР коды с расстоянием 3 в графах D(2,0) и D(1,2). После этого используется важное свойство МДР кодов о том, что проекция и сечение МДР кода также будет МДР кодом. Это позволяет в большинстве оставшихся случаев использовать индукцию, постепенно увеличивая диаметр. В итоге, во второй главе получено полное описание МДР кодов с кодовым расстоянием больше 2. Оказалось что, если кодовое расстояние $2<d<2m+n$, то существует всего 10 неэквивалентных МДР кодов. А именно, по два кода с расстоянием 3 в графах D(2,0) и D(2,1) и с расстоянием 4 в D(2,1) и по одному коду с расстоянием 3 в D(1,2) и D(1,3) и с расстоянием 4 в D(1,3) и D(2,2).

В третье главе исследуются минимальные носители собственных функций в графах Дуба. Эта задача тесно связана с понятием свитчинга, то есть локальное изменение, которое можно определить для многих комбинаторных структур, например совершенных раскрасок. На примере совершенных раскрасок свитчингом называется локальное перекрашивание, после которого получается совершенная раскраска с теми же параметрами. Свитчинг бывает полезен при построении новых раскрасок и получении оценок на число. Например, если уже есть пример совершенной раскраски, то чтобы построить новые раскраски, можно попробовать найти возможные свитчинги в этой раскраске. Причем, если найти n непересекающихся свитчингов, то из данной раскраски получаем 2^n новых различных раскрасок, что дает некоторую нетривиальную оценку на число. Так как совершенной раскраске соответствует собственная функция, то свитчингу соответствует собственная {-1,0,1} функция. Поэтому интересна задача нахождения собственных функций с минимальным носителем. Однако при этом совсем необязательно данной собственной функции соответствует свитчинг в какой-нибудь раскраске.

Таким образом встает задача описания всех собственные функции с минимальным носителем. Эта задача решена в диссертации для минимального собственного значения и второго по величине собственного значения. Наиболее сложный случай – это второе по величине собственной значение. В этом случае в качестве базы используется полученная характеризация собственных функций со вторым по величине собственным значением и минимальным носителем для графов Хэмминга, полученная А. Валюженичем. Причем величина минимального носителя в этом случае в графе D(m, n) оказалась такой же, как и в графе Хэмминга H(2m+n,4), но доказательство при этом совсем другое.

Опечатки специально не искал и думаю в таком сложном тексте они могут присутствовать. Как правило, они не мешают пониманию содержания диссертации, поскольку их всегда можно исправить из контекста. Отмечу только одну, просто для порядка, где приводится пример соответствия между совершенной раскраской и собственной функцией: Совершенной раскраске f соответствует собственная функция g с собственным значением (a-c), определенная следующим образом $g(x) = b$, если $f(x) = 0$, $g(x) = -c$, если $f(x) = 1$. В диссертации вместо символа f присутствует символ g.

В работе получены интересные и важные для теории результаты, по которым имеется пять публикаций, четыре из которых опубликованы в журналах из списка ВАК РФ. Заметим, что по первой главе диссертации имеется две публикации и по второй и третьей главе тоже две. По требованиям ВАК РФ к кандидатским диссертациям по естественным наукам для защиты достаточно двух публикаций. Таким образом, автор диссертации выполнил необходимое условие дважды. Оппонент был впечатлен качеством и научной ценностью полученных результатов.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации и отвечает требованиям ВАК РФ.

Диссертационная работа Беспалова Евгения Андреевича «**Методы алгебраической теории графов в исследовании МДР кодов**» является законченной научно-квалификационной работой. В работе методы алгебраической комбинаторики применены к исследованию МДР кодов и она содержит важный вклад в решение актуальных научных задач “описания МДР кодов и собственных функций в графах Дуба”, который имеет серьезное значение для продолжения исследований в теории графов и алгебраической комбинаторике.

Автор работы Беспалов Евгений Андреевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика.

Официальный оппонент
Главный научный сотрудник
Института математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор /Кабанов Владислав Владимирович/

Подпись официального
оппонента заверяю
Ученый секретарь института /Ульянов Олег Николаевич/