Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
(МИАН)

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел.: (495) 984-81-41. Факс: (495) 984-81-39. Для телеграмм: Москва, 119333, математика
E-mail: steklov@mi.ras.ru http://www.mi.ras.ru
ОКПО 02699547 ОГРН 1027739665436 ИНН/КПП 7736029594/773601001

__________ № 11102-______________

На № ____________ от ______________

"УТВЕРЖДАЮ"

Зам. директора ФГБУН Математический
институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
член-корр. РАН Д. В. Трещев

03 сентября 2015 г.

# ОТЗЫВ

ведущей организации ФГБУН Математический институт
им. В. А. Стеклова Российской академии наук
о диссертационной работе
Хрущева Сергея Евгеньевича
"Построение кратных стохастических интегралов
с помощью рядов ортогональных случайных величин",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика.

В диссертационной работе С. Е. Хрущева предложены несколько различных конструкций кратных стохастических интегралов от детерминированных функций в случае, когда интегрирующий случайный процесс допускает представление в виде функционального ряда с ортогональными случайными коэффициентами. Кроме того, доказаны экспоненциальные неравенства для вероятностей уклонений рассматриваемых стохастических интегралов.

Эта тематика мотивирована статистическими приложениями, связанными с теорией так называемых $U$- и $V$-статистик. С середины прошлого века до нашего времени асимптотический анализ распределений этих статистик является предметом пристального внимания исследователей. Известно, что предельные распределения $U$- и $V$-статистик можно описывать как в виде кратных стохастических интегралов, так и в виде бесконечных полилинейных форм от последовательности центрированных гауссовских случайных величин с известной ковариационной матрицей (Р. Мизес (1947), Х. Рубин и Р. Витали (1980), А. А. Филиппова (1962)). Одна из целей диссертации — описать условия задания кратных стохастических интегралов посредством рядов случайных величин.

Построением кратных стохастических интегралов занимались многие авторы. Н. Винер (1938), К. Ито (1944), Ю. Хью и П. Мейер (1988), Г. В. Джонсон и Г. Каллианпур (1993) изучали те или иные конструкции стохастических интегралов по приращениям винеровского процесса. А. А. Филиппова (1962), А. Дасгупта и Г. Каллианпур (1999) определяли кратные стохастические интегралы для специальных гауссовских процессов, отличных от винеровского. С. Камбанисом и С. Т. Хуангом (1978) изучалась схема построения кратного стохастического интеграла по приращениям произвольного гауссовского процесса, но конструкция интеграла отличалась от схемы построения у А. А. Филипповой, А. Дасгупты и Г. Каллианпура.

В 2005 году И. С. Борисов и А. А. Быстров предложили конструкцию абстрактного стохастического интеграла от неслучайной функции без классического требования ортогональности интегрирующей стохастической меры, которая включала в себя конструкции как одномерных, так и кратных стохастических интегралов по приращениям гильбертовых случайных процессов на прямой. Основное отличие этого подхода от предшествующих методов состоит в возможности определения кратных стохастических интегралов и для негауссовских процессов. Корректное определение интеграла И. С. Борисова и А. А. Быстрова сводится к проверке конечности некоторого детерминированного интеграла по так называемой ковариационной мере. Структура этой меры может быть, вообще говоря, достаточно сложной. Поэтому проверка условий существования такого стохастического интеграла представляет собой отдельную проблему.

Диссертация состоит из введения (включающего обзор работ по теме исследований и обсуждение содержания диссертации по главам), трех глав, заключения, в котором перечисляются основные результаты диссертации, и списка литературы.

Глава 1 посвящена описанию новых достаточных условий существования кратного стохастического интеграла, определенного по схеме И. С. Борисова и А. А. Быстрова, для широкого класса случайных процессов, порождающих интегрирующую стохастическую продакт-меру (теоремы 1–4). Отметим, что полученные условия проверяются достаточно просто, при этом интегрирующие случайные процессы могут быть негауссовскими. Представление интеграла в виде кратного ряда со случайными коэффициентами получено в теореме 5.

В главе 2 предлагается новая схема построения кратного стохастического интеграла для широкого класса процессов, представимых в виде функциональных рядов со случайными ортогональными коэффициентами (так называемые разложения Карунена–Лоэва). Этот класс процессов включается в себя в том числе и негауссовские процессы. При этом кратный стохастический интеграл задается в виде кратного ряда со случайными коэффициентами. Отметим, что эта конструкция подходит для случая не обязательно конечных ковариационных мер — это основное ограничение в конструкции И. С. Борисова и А. А. Быстрова. Теперь теорема 5 предыдущей главы получает другую интерпретацию: она описывает условия, когда с вероятностью 1 совпадают кратные стохастические интегралы, построенные диссертантом (определение 3), и по схеме И. С. Борисова и А. А. Быстрова. Кроме того, во второй главе найдены экспоненциальные оценки для хвостов распределений стохастических интегралов (теорема 6).

В главе 3 рассматривается принципиально иная схема построения кратных стохастических интегралов, основанная на представлении произведения случайных процессов в виде одномерного функционального ряда с ортогональными случайными коэффициентами. При этом кратный стохастический интеграл задается в виде ортогонального ряда случайных величин (см. определение 4). В теореме 7 доказано, что если задавать стохастический интеграл как предел в среднем квадратическом последовательности стохастических интегралов от простых функций, как это сделано при построении интеграла И. С. Борисова и А. А. Быстрова, то в итоге получится случайная величина, совпадающая с вероятностью 1 со стохастическим интегралом, построенным по новой схеме. В главе 3 приведен пример интегрирующего случайного процесса и класса ядер, когда соответствующий стохастический интеграл И. С. Борисова и А. А. Быстрова не существует, но корректно определен стохастический интеграл, заданный согласно определению 4.

Находить в явном виде ортогональные разложения произведения случайных процессов весьма непросто. В главе 3 обобщается определение кратного стохастического интеграла на случаи, когда произведение случайных процессов допускает представление в виде конечной суммы нескольких ортогональных рядов. Находить в явном виде такие разложения проще. В главе 3 описан метод, который позволяет получать указанные разложения для любого центрированного гауссовского процесса, а значит и для стандартного винеровского процесса $W(x)$. По указанному методу построено разложение многопараметрического случайного процесса $W(x_1) \dots W(x_d)$, и на примере этого разложения выписаны необходимые и достаточные условия существования кратного стохастического интеграла, построенного по обобщенному определению.

Достоинством диссертации является аккуратность изложения, существенных недостатков мною не обнаружено. Стоит только отметить неудачную формулировку теоремы 5, которая начинается с введения последовательности простых функций, приближающих $f$. В дальнейшей формулировке эта последовательность не фигурирует. Упоминание об измеримости $f$ то присутствует, то исчезает из формулировок.

Основные результаты диссертации опубликованы в изданиях из списка ВАК России и докладывались на научных конференциях и семинарах. Автореферат точно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Новосибирском государственном университете, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова.

Таким образом, можно заключить, что диссертационная работа С. Е. Хрущева “Построение кратных стохастических интегралов с помощью рядов ортогональных случайных величин” соответствует требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Хрущев Сергей Евгеньевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании отдела теории вероятностей и математической статистики Математического института им. В. А. Стеклова РАН 03 сентября 2015 г. (протокол № 1).

Составитель отзыва
ведущий научный сотрудник
отдела теории вероятностей и математической статистики
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
доктор физико–математических наук А. А. Гущин
119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел. +7 (495) 984 81 41, доб. 37-73
E-mail: gushchin@mi.ras.ru

Заведующий отделом
теории вероятностей и математической статистики
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
доктор физико–математических наук А. С. Холево
119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел. +7 (499) 941 01 92
E-mail: holevo@mi.ras.ru