Важнейшие научные результаты Учреждения Российской академии наук Института математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН за 2010 год

1. Предложен новый способ использования теории моделей для доказательства теоремы Дуади, описывающей абсолютную группу Галуа поля рациональных функций от одной переменной над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

(Директор, академик Ю.Л.Ершов, тел. 333-28-92)

Предложен новый способ переноса теоремы Дуади о том, что абсолютная группа Галуа поля F(x) рациональных функций от одной переменной над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 является свободной проконечной группой со случая F=**C** (поле комплексных чисел) на произвольный. Этот способ использует средства теории моделей, другие способы переноса с использованием теории модели были предложены Ван ден Дрисом и Рибенбоймом.

Ершов Ю.Л. О подполях кольца аделей // Алгебра и логика, 2010, т.49, № 6.

2. Описаны простые супералгебры Ли, возникающие из унитальных простых конечномерных структуризуемых супералгебр характеристики 0, и классифицированы простые конечномерные структуризуемые супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

(С.н.с., к.ф.-м.н. А.П.Пожидаев, в.н.с., д.ф.-м.н. И.П.Шестаков, тел. 363-45-52)

Б.Аллисон в 1978г. определил класс неассоциативных алгебр, содержащий класс йордановых алгебр и допускающий конструкцию структурной алгебры и конструкцию Титса-Кёхера-Кантора (конструкция Аллисона). Алгебры из этого класса, называемые структуризуемыми, являются унитальными алгебрами с инволюцией. Этот класс включает альтернативные алгебры с инволюцией, йордановы алгебры (с тождественной инволюцией), тензорное произведение двух композиционных алгебр, 56-мерный модуль Фрейденталя для алгебры Ли E_7 с естественным бинарным произведением, и алгебры, строящиеся из эрмитовых форм способом, который является некоторым обобщением обычной конструкции йордановых алгебр квадратичных форм.
Однако, ещё в 1972 г. И.Кантор обобщил ТКК-конструкцию, распространив её на более широкий класс алгебр, которые он назвал консервативными. И.Кантор классифицировал конечномерные простые консервативные алгебры второго порядка над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Существует взаимно однозначное соответствие между классом консервативных алгебр второго порядка с левой единицей и классом структуризуемых алгебр. Алгебры Ли, получаемые из центральных простых структуризуемых алгебр при помощи конструкции Аллисона-Кантора, содержат все конечномерные центральные простые алгебры Ли над полем характеристики ноль, имеющие ненулевой ad-нильпотентный элемент.
Центральные простые конечномерные структуризуемые алгебры над полем характеристики ноль были классифицированы Б.Аллисоном. Классификация простых конечномерных структуризуемых алгебр над полем ненулевой характеристики была получена О.Н.Смирновым
А.П.Пожидаевым и И.П.Шестаковым построены четыре серии унитальных простых структуризуемых супералгебр картановского типа, описаны простые супералгебры Ли, возникающие из унитальных простых структуризуемых супералгебр характеристики 0, и классифицированы простые конечномерные структуризуемые супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

А.П.Пожидаев, И.П.Шестаков, Структуризуемые супералгебры картановского типа, ДАН 432, 2, (2010) 167-173.
A.P.Pozhidaev, I.P.Shestakov, Structurable superalgebras of Cartan type, J. of Alg. 323, 12 (2010) 3230-3251.

3. Решен вопрос о зависимости автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для почти простых моделей разрешимых теорий в классах малых, эренфойхтовых и несчетно категоричных теорий.

(Зав.лаб., чл.-к. РАН С.С.Гончаров, тел. 363-45-38)

1. Доказано, что полная теория, в которой простая модель сильно конструктивизируема и неавтоустойчива относительно сильных конструктивизаций, а некоторая модель этой теории автоустойчива относительно сильных конструктивизаций, не ω-стабильна.
2. Доказано, что существует разрешимая эренфойхтова теория, простая модель которой автоустойчива относительно сильных конструктивизаций и даже автоустойчива, но некоторая модель этой теории простая в конечном обогащении константами сильно конструктивизируема, но не автоустойчива.
3. Построен пример полной разрешимой теории со счетным числом счетных моделей, простая модель которой сильно конструктивизируема и неавтоустойчива относительно сильных конструктивизаций, но суще-

ствует простая модель в конечном обогащении константами, которая сильно конструктивизируема и автоустойчива относительно сильных конструктивизаций.
4. Показано, что существует разрешимая несчетно категоричная теория такая, что все ее счетные модели сильно конструктивизируемы и неавтоустойчивы относительно сильных конструктивизаций, но существует несчетно категоричная теория, у которой простая модель автоустойчива относительно сильных конструктивизаций, а все остальные неавтоустойчивы относительно сильных конструктивизаций.

Гончаров С.С., Об автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций почти простых моделей // УМН, 2010, т.65, N5(395), 105-140.
Гончаров С.С., Автоустойчивость простых моделей относительно сильных конструктивизаций // Алгебра и логика, 48, 6, 2009, 729-740.

4. Получено алгебраическое описание автоустойчивых булевых алгебр с выделенными идеалами и множествами атомов по идеалам.

(В.н.с., д.ф.-м.н. П.Е.Алаев, 363-45-82)

Найдено алгебраическое описание автоустойчивых булевых алгебр, в язык которых добавлено конечное количество произвольных идеалов, а также множества атомов по некоторым из этих идеалов. Для каждой пары чисел (n,m), где n – число выделенных идеалов, а m – число идеалов, для которых в язык добавлено множество атомов, построен конечный набор алгебр так, что класс автоустойчивых алгебр совпадает с классом конечных прямых произведений алгебр из этого набора. Типы изоморфизма алгебр из этого набора полностью описаны через некоторую систему конечных инвариантов, указан конструктивный способ строить эти алгебры с помощью некоторой индуктивной схемы. Доказано также, что для данного класса структур автоустойчивость равносильна конечности алгоритмической размерности. Данное исследование завершает серию работ, в которых рядом авторов исследовались частные случаи этой задачи.

Алаев П.Е., Автоустойчивость атомно-идеальных обогащений вычислимых булевых алгебр, ДАН, 2010, т.433, №2, с.151-153.

5. Разработана структурная теория категоричных хорновых классов. В частности, доказана модельная полнота теорий этих классов.

(Зав.лабораторией, д.ф.-м.н. Е.А.Палютин)

Базисные факты структурной теории категоричных хорновых классов были опубликованы автором в 1980-м году. Они являлись обобщениями свойств категоричных квазимногообразий, полное описание которых было получено в 1975 году. За прошедшие 30 лет не было существенного продвижения в направлении получения описания категоричных хорновых классов.
Главное достижение, отображенное в представленном результате, состоит в обнаружении и использовании того факта, что структурная теория категоричных хорновых классов самым тесным образом связана с классом групп, примитивно интерпретируемых в этих классах.

Палютин Е.А., О структурах с категоричной степенью Фреше, Материалы 3-й Российской школы-семинара "Синтаксис и семантика логических систем", Иркутск, 2010 г., стр. 72-74.
Палютин Е.А. Категоричные хорновы классы 2, Алгебра и логика, т. 39, № 6 (2010).

6. Обобщена классификация элементарных полных теорий с конечными предпорядками Рудина – Кейслера на класс всех малых теорий.

(В.н.с., д.ф.-м.н. С.В.Судоплатов, тел. 8913-939-39-11)

Доказано, что в классе малых теорий также имеются две основные характеристики: не более чем счетный предпорядок Рудин – Кейслера на типах изоморфизма простых над кортежами моделей и функция распределения числа предельных моделей над последовательностями типов. Для класса малых теорий получено описание основных характеристик. В предположении континуум-гипотезы построены реализации всех основных характеристик малых теорий.
В работе [Судоплатов С.В. Полные теории с конечным числом счетных моделей. I // Алгебра и логика. 2004. Т.43, N 1. С.110-124] было показано, что каждая теория с конечным числом счетных моделей имеет две основные характеристики: конечный предпорядок Рудин – Кейслера на типах изоморфизма простых над кортежами моделей и функция распределения числа предельных моделей над типами. В работах [Судоплатов С.В. Полные теории с конечным числом счетных моделей. II // Алгебра и логика. 2006. Т.45, N 3. С.314-353] и [Судоплатов С.В. О числе счетных моделей полных теорий с конечными предпорядками Рудина - Кейслера // Сиб.матем.журн. 2007. Т.48, N 2. С.417-422] показано, что все возможные основные характеристики реализуются и, в предположении континуум-гипотезы, имеются реализации всевозможных основных характеристик для теорий с конечными предпорядками Рудин – Кейслера.

Судоплатов С.В. Гиперграфы простых моделей и распределения счетных моделей малых теорий // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, N 7. С. 179-203.
Sudoplatov S.V. Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 169, No. 5. P. 680-695.
Судоплатов С.В. О числе счетных моделей малых теорий Российская школа-семинар «Синтаксис и семантика логических систем», посвящённая 60-летию профессора Ю.Е. Шишмарёва. Тез. докл. Владивосток: Изд-во Дальнаука, 2008. С. 23-25.
Sudoplatov S.V. Distributions of Countable Models of Small Theories // Международная конференция «Мальцевские чтения», посвященная 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева, 24–28 августа 2009 г. Тезисы докладов / Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, 2009. – С. 28-29.

7. Доказано, что группа периода 24, содержащая элемент порядка 3 и не содержащая элементов порядка 6, локально конечна.

(Зав.лабораторией, чл.-к. РАН В.Д.Мазуров, тел. 363-45-70)

Спектром периодической группы G будем называть подмножество ω(G) множества натуральных чисел, состоящее из порядков элементов G. В настоящей работе исследуются группы G, для которых спектр имеет вид $\omega(G)=\{3,2^i \mid i=0, 1,...,m\}$. Если m=0, то G трёхступенно нильпотентна. Если m=1, то G – расширение элементарной абелевой группы посредством группы простого порядка. Если m=2, то G локально конечна и её строение описано. Мы доказываем, что при m=3 группа G также локально конечна.
Теорема 1. Пусть G – группа, для которой ω(G)={1,2,3,4,8}. Тогда G локально конечна и выполнено одно из следующих утверждений: (1) G=VQ, где V – нетривиальная нормальная элементарная абелева 3-подгруппа, Q является 2-группой, которая действует свободно на V и изоморфна либо циклической группе порядка 8, либо группе кватернионов порядка 16; (2) G=T<a>, где T – нормальная нильпотентная 2-подгруппа ступени нильпотентности 2, а порядок a равен 3; (3) G=TS, где T – нильпотентная нормальная 2-подгруппа ступени нильпотентности 2 и периода 4, а S изоморфна симметрической группе степени 3. В частности, G разрешима и её ступень разрешимости не больше, чем 4.
Локально конечные группы G, для которых $\omega(G)=\{3,2^i \mid i=0,1,...,m\}$, обладают аналогичным строением для произвольного m.
Теорема 2. Пусть G – локально конечная группа, для которой $3\in\omega(G)\subseteq\{3,2^i \mid i=0,1,...\}$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений: (1) G=VQ, где V – нетривиальная нормальная элементарная абелева 3-подгруппа, а Q – 2-подгруппа, действующая свободно на V и изоморфная либо локально циклической группе, либо объединению возрастающей цепочки обобщённых групп кватернионов; (2) G=T<a>, где T – двуступенно нильпотентная нормальная 2-подгруппа и порядок a равен 3; (3) G=TS, где T – двуступенно нильпотентная нормальная 2-подгруппа и S изоморфна симметрической группе степени 3. В частности, G разрешима и её ступень разрешимости не превосходит числа 4.
Для достаточно больших m существуют примеры групп G со спектром вида $\omega(G)=\{3,2^i \mid i=0,1,...,m\}$, не являющиеся локально конечными.
Предложение 1. Для любого m≥48 существует простая группа G, не являющаяся локально конечной, для которой $\omega(G)=\{3,2^i \mid i=0,1,...,m\}$.

В.Д. Мазуров. О группах периода 24. Алгебра и логика, 48, № 6 (2010), 642-652.

8. Доказано, что ступень нильпотентности «нижнего» ядра двойной фробениусовой группы ограничена в терминах порядка и ступени нильпотентности «верхнего» дополнения. Получен положительный ответ на вопрос Мазурова 17.72(a) из Коуровской тетради.

(С.н.с., д.ф.-м.н., Н.Ю.Макаренко совместно с П.Шумяцким (Бразилия))

Доказано, что если GFH – двойная фробениусова группа с «верхним» дополнением H порядка q, причем подгруппа неподвижных точек $C_G(H)$ нильпотентна ступени c, то G нильпотентна (c,q)-ограниченной ступени. Тем самым получен положительный ответ на вопрос Мазурова 17.72(a) из Коуровской тетради. Доказательство базируется на аналогичном результате о кольцах Ли: если фробениусова группа автоморфизмов FH с ядром F простого порядка и дополнением H порядка q действует на кольце Ли L таким образом, что подкольцо неподвижных точек $C_L(F)$ группы F тривиально, а подкольцо неподвижных точек $C_L(H)$ группы H нильпотентно ступени c, то кольцо L нильпотентно (c,q)-ограниченной ступени.

Makarenko N.Yu, Shumyatsky P. Frobenius groups as groups of automorphisms // Proc. of the Amer. Math. Soc., 2010, V. 138, N 10, P. 3425–3436.

9. Получены критерии выполнения ослабленных аналогов теоремы Силова для холловых подгрупп в произвольной конечной группе.

(Зам.директора, д.ф.-м.н. Е.П.Вдовин, в.н.с., д.ф.-м.н. Д.О.Ревин, 363-46-42)

Делитель k натурального числа n назовём холловым делителем, если k, n/k взаимно просты. Если π – некоторое множество простых чисел, то через π' обозначим его дополнение в множестве всех простых чисел. Число n называется π-числом, если все простые делители числа n лежат в π. Конечная группа называется π-группой, если её порядок является π-числом. Очевидно, что делитель k натурального числа n является холловым в том и только в том случае, если существует множество простых чисел π такое, что k является π-числом, в то время как n/k является π'-числом. В таком случае холлов делитель будем называть π-холловым делителем (очевидно, что для данного холлова делителя множество π определено неединственным образом). Подгруппа H конечной группы G называется холловой, если её порядок является холловым делителем порядка всей группы. Подгруппа H группы G называется π-холловой, если её порядок является π-холловым делителем порядка группы G.
В 1872 году норвежский математик Л.Силов доказал свою знаменитую теорему:
Теорема. Пусть G – конечная группа порядка pkm, где p – простое число и p,m взаимно просты. Тогда (E) В группе G существует подгруппа порядка pk (называемая силовской p-подгруппой). Ясно, что силовские p-подгруппы – это в точности p-холловы подгруппы. (C) Все силовские подгруппы группы G сопряжены. (D) Любая p-подгруппа группы G содержится в некоторой силовской p-подгруппе.
В 1956 году Ф.Холл, обобщая теорему Силова, ввёл классы E_π, C_π и D_π для обозначения классов конечных групп, содержащих π-холловы подгруппы, ровно один класс сопряжённых π-холловых подгрупп, и класса групп, в которых выполнен полный аналог теоремы Силова для π-холловых подгрупп соответственно. В отличие от теоремы Силова, в общем случае класс E_π-групп может не совпадать с классом всех конечных групп и включения $D_\pi \subseteq C_\pi \subseteq E_\pi$ могут быть строгими.
Авторами получено исчерпывающее описание классов E_π, C_π и D_π.

Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, «Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечной группе», Сибирский математический журнал, т. 51 (2010), N 3, 506-516.
Перевод E.P.Vdovin, D.O.Revin, «Conjugacy criterion for Hall subgroups in a finite group», Siberian mathematical journal, v. 51 (2010), N 3, 402-409.
D.O.Revin, E.P.Vdovin, «Existence criterion for Hall subgroups of finite groups», Journal of Group Theory, doi: 10.1515/JGT.2010.037. (доступно также по адресу http://arxiv.org/abs/0803.3868v3)
D.O.Revin, E.P.Vdovin, «On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups», Journal of Algebra, v. 324 (2010), N 12, 3614–3652.

10. Доказано, что арифметика Пресбургера имеет, по крайней мере, экспоненциальную сложность на любом подмножестве формул, асимптотическая плотность которого экспоненциально быстро стремится к 1.

(Н.с., к.ф.-м.н. А.Н.Рыбалов (ОФИМ СО РАН))

Генерический подход к алгоритмическим проблемам – новое направление исследований, рассматривающее проблему не на всем множестве входных данных, а на подмножестве “почти всех” входов (генерическом множестве). Понятие “почти все” формализуется при помощи введения асимптотической плотности на множестве входов. Многие проблемы, вычислительно трудные в худшем случае, становятся легкими (разрешимыми за полиномиальное время), если рассматривать не все входы, а “почти все” входы (их асимптотическая плотность стремится к 1). Классическим примером такой проблемы является задача линейного программирования, для решения которой на практике применяется симплекс-метод, имеющий экспоненциальную сложность в худшем случае, но для большинства задач работающий за полиномиальное время. С другой стороны, существуют проблемы, которые остаются сложными даже на любом генерическом подмножестве. Например, такие проблемы известны в криптографии (проблема дискретного логарифма).
Арифметика Пресбургера является классической разрешимой теорией первого порядка. Ее фрагменты имеют многочисленные приложения в теории оптимизации и верификации программ. В 1974 г. Рабин и Фишер доказали, что эта теория имеет по крайней мере двойную экспоненциальную сложность в худшем случае, то есть на множестве всех формул. В то же время актуален вопрос об эффективных алгоритмах проверки истинности, которые хорошо бы работали для “почти всех” формул, т.е. на генерических множествах.
В данной работе (Rybalov, 2010) доказывается, что арифметика Пресбургера имеет по крайней мере экспоненциальную сложность на любом подмножестве формул, асимптотическая плотность которого экспоненциально быстро стремится к 1 (строго генерическом множестве). Этот результат является продолжением работы по исследованию генерической сложности классических алгоритмических проблем. Ранее было доказано (Rybalov 2007), что классическая проблема остановки остается неразрешимой на любом строго генерическом множестве. Установлено (Myasnikov, Rybalov, 2008), что любая неразрешимая теория первого порядка остается неразрешимой на любом строго генерическом множестве формул. Построен (Myasnikov, Rybalov, 2008) пример полугруппы с проблемой равенства, неразрешимой на любом генерическом множестве.

A.Rybalov. Generic complexity of Presburger Arithmetic // Theory of Computing Systems, Vol. 46, Num. 1, 2010, pp. 2-8.
A.Rybalov. On the strongly generic undecidability of the Halting Problem // Theoretical Computer Science, Vol. 377, 2007, pp. 268-270.

A.Myasnikov, A.Rybalov. Generic complexity of undecidable problems // Journal of Symbolic Logic, Vol. 73, No. 2, 2008, pp. 656-673.

11. Разработан новый метод исследования геометрии пространств Карно - Каратеодори при условии минимальной гладкости базисных векторных полей.

(С.н.с., к.ф.-м.н. М.Б.Карманова, 363-45-15)

Работа посвящена новому подходу к исследованию локальной геометрии пространств Карно-Каратеодори в условиях минимальной гладкости базисных векторных полей. Пространство Карно-Каратеодори M — связное риманово многообразие с выделенным горизонтальным подрасслоением HM в касательном расслоении TM, удовлетворяющим определенным алгебраическим условиям на коммутаторы векторных полей $X_1,\ldots,X_n$, составляющих базис в HM, n=dim H_pM для всех p в M. Новый подход позволяет нам, во-первых, распространить геометрические результаты работы [Karmanova M.B., Vodopyanov S.K. Geometry of Carnot-Caratheodory spaces, differentiability, area and coarea formulas // In: Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics, Verlag Basel/Switzerland: Birkhauser. 2009. P. 233-335] на все эквирегулярные пространства Карно-Каратеодори с минимально гладкими векторными полями, то есть, такими, что их производные гельдеровы (отметим, что не нужно дополнительно предполагать выполнение условий Remark 2.2.19 из работы), и, во-вторых, улучшить оценки, установленные в этой работе, а также получить их для новых случаев (например, в основной теореме и ее следствиях уже не требуется условие на субриманово «расстояние» между центрами локальных групп). Заметим, что в указанной работе основные результаты получены при условии, что либо глубина M пространства равна 2, либо справедлива теорема Громова о сходимости векторных полей.

В основной теореме получены количественные оценки сравнения локальных геометрий разных локальных групп Карно, кроме того, установлена зависимость этих оценок от показателя гельдеровости производных координатных функций базисных векторных полей и от риманова расстояния между центрами локальных групп.

Отсюда получаем результаты, которые в гладком случае являются основополагающими в теории пространств Карно-Каратеодори: 1) теорема Рашевского-Чоу о возможности соединения любых двух точек горизонтальной кривой; 2) Ball-Box-0-теорема о локальной билипшицевой эквивалентности «боксовой» квазиметрики и метрики Карно-Каратеодори; 3) Локальные аппроксимационные теоремы о сравнении метрик и квазиметрик в локальной группе и в исходном пространстве и др.

М.Б.Карманова. Новый подход к исследованию геометрии пространств Карно-Каратеодори // Докл. АН, 2010, Т. 434, No. 3, С. 309-314.

12. Доказано, что следующие три класса C^1-гладких поверхностей в R^3 совпадают: (i) класс поверхностей, имеющих нулевую внешнюю кривизну по Погорелову; (ii) класс линейчатых развертывающихся поверхностей; (iii) класс поверхностей, сферическое изображение которых не имеет внутренних точек.

(В.н.с., д.ф.-м.н., М.В.Коробков, 363-46-03)

Это утверждение дает ответ на вопрос, поставленный С.З.Шефелем еще четверть века назад (см. [Шефель С.З. C^1-гладкие поверхности ограниченной внешней положительной кривизны // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, No. 5. С.1122–1123]). Результат точен в следующем смысле. Во-первых, хаусдорфова размерность сферического изображения указанных поверхностей может принимать любые значения в интервале [1,2]. Далее, для поверхностей в R^4 аналогичный результат уже не верен: существуют C^1-гладкие линейчатые развертывающиеся гиперповерхности в R^4, сферическое изображение которых имеет положительную трехмерную меру Лебега.

Коробков М.В. Свойства C^1-гладких функций, множество значений градиента которых топологически одномерно // Докл. РАН. 2010. Т. 430, No. 1, С. 18–20.

13. Получено эквивалентное описание аналитических свойств аппроксимативно дифференцируемых отображений римановых многообразий, индуцирующих ограниченный оператор переноса дифференциальных форм с нормой в пространствах Лебега.

(Зав.лабораторией, д.ф.-м.н. С.К.Водопьянов, 363-43-34)

Получены необходимые и достаточные условия аппроксимативно дифференцируемых отображений римановых многообразий, индуцирующих ограниченный оператор переноса дифференциальных форм с нормой в пространствах Лебега.

В качестве следствия, в частности, выведено, что гомеоморфизм класса ACL(M), для которого оператор переноса дифференциальных форм с нормой в пространствеах Лебега является изоморфизмом, неизбежно будет либо квазиконформым, либо квазиизометричным. Приводятся также некоторые применения полученных результатов к исследованию функториальности когомологий в пространствах Лебега.

Исследование этой проблемы для дифференциальных форм естественно приводит к выделению нового класса отображений, для которых миноры матрицы Якоби порядка k обращаются в нуль почти всюду на множестве нулей якобиана. Такие отображения исследовались ранее лишь при k=1.
Доказательство основных результатов существенно базируется на методах работ автора, разработанных для описания необходимых и достаточных аналитических свойств измеримых отображений, индуцирующих ограниченный оператор пространств Соболева с первыми обобщенными производными.

Водопьянов С.К. Пространства дифференциальных форм и отображения с контролируемым искажением // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, No 4. С. 5-32.

14. На общих группах Карно получены интегральные представления типа Соболева, которые являются новыми и в евклидовом пространстве. Получены теоремы вложения и условия их полной непрерывности.

(Зав.лабораторией, д.ф.-м.н. С.К.Водопьянов, с.н.с., к.ф.-м.н. Д.В.Исангулова, тел. 363-43-34)

Интегральные представления для дифференцируемых функций на областях, звездных относительно шара, доказал С. Л. Соболев в 30-е годы прошлого столетия. В интегральном представлении функция, имеющая слабые производные, выражается как сумма гладкой функции или полинома и интеграла типа потенциала от слабых производных данной функции. Эти представления оказались полезными как в теории функциональных пространств, так и в теории уравнений с частными производными. Они применяются также в квазиконформном анализе и в теории упругости. Коэрцитивные оценки возникли в теории дифференциальных операторов как инструмент для нахождения решений дифференциальных уравнений. Области Джона или области с ограниченными внутренним и внешним радиусами ввел Ф. Джон в 1961 году. На областях Джона в $\mathbf{R}^N$ выполняются интегральные представления типа Соболева и теоремы вложения. Определение использует только метрику и может быть распространено на любое метрическое пространство.
Мы получаем интегральные представления и коэрцитивные оценки для однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и конечномерным ядром на областях Джона групп Карно. Группа Карно – это стратифицированная нильпотентная конечномерная группа Ли с выделенным неинтегрируемым подрасслоением в касательном расслоении, которое называется горизонтальным. Векторные поля горизонтального подрасслоения удовлетворяют условию Хёрмандера, т.е. они порождают своими коммутаторами все касательное пространство. Мы рассматриваем группу Карно с метрикой Карно – Каратеодори d_{cc}, которая определяется как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки. (Спрямляемая кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор принадлежит горизонтальному пространству почти всюду.) Обозначим через размерность Хаусдорфа относительно метрики d_{cc}. В общем случае строго больше, чем топологическая размерность группы.
Мы получаем локальные интегральные представления на группе Карно, в котором функция разлагается на сумму гладкой функции и интеграла типа потенциала от слабых производных порядка l. Отметим, что и в евклидовом случае данное представления является новым, потому что ядро сингулярного оператора зависит от одной переменной (y-x), а не от (x,y). Также получено интегральное представление в виде суммы полинома и интеграла типа потенциала. Мы доказываем интегральные представления новым методом. В евклидовых пространствах прототип этого метода был использован В.С.Рычковым. Он основан на представлении функций через свертки со специальным ядром, являющимся суммой двоичных растяжений. Данный метод можно рассматривать как аналог воспроизводящей формулы Кальдерона.
Получение коэрцитивных оценок основано на полученном интегральном представлении, теоремах вложения для потенциалов Рисса и теореме типа Зигмунда – Кальдерона.
На областях Джона общих групп Карно также доказаны неравенство Пуанкаре и теоремы вложения типа Соболева: в пространство интегрируемых функций при $lp<\dim_H$, в пространство непрерывных функций при $lp>\dim_H$, в пространство гёльдеровых функций при $lp>\dim_H$ и в пространства Орлича при $lp=\dim_H$. Во всех случаях указана явная зависимость норм рассматриваемых операторов вложения в зависимости от геометрии области Джона. Получены также условия вполне непрерывности операторов вложения.
Отметим, что в евклидовом случае доказывается только локальная гёльдеровость соболевской функции. Мы вводим модуль непрерывности на всей области Джона. Для этого мы вводим новую метрику, которая зависит от области и локально есть просто степень расстояния d_{cc}.

D.V.Isangulova, S.K.Vodopyanov. Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 58-96.

15. Даны операторные версии классической леммы Фаркаша в теории линейных неравенств.

(Гл.н.с., д.ф.-м.н. С.С.Кутателадзе, тел. 363-46-52)

В рамках булевозначного анализа даны операторные версии классической леммы Фаркаша в теории линейных неравенств. Выведены новые теоремы об альтернативе и различные теоремы о следствиях систем неравенств для операторов, действующих в вещественные и комплексные пространства Канторовича.

Кутателадзе С.С. Новая форма леммы Фаркаша // Сибирский мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 98--109.
Kutateladze S.S. Boolean trends in linear inequalities // J. Appl. Indust. Math. 2010. V. 4, N 3. P. 340--348.

16. Найдены спектральные данные для периодического магнитного нерелятивистского оператора Паули и построена (2+1)-мерная эволюционная система, являющаяся 2D-расширением уравнения Бюргерса.

(С.н.с., к.ф.-м.н. А.Е.Миронов совместно с П.Г.Гриневичем и С.П.Новиковым (ИТФ РАН))

Исследовано многообразие комплексных собственных функций Блоха--Флоке для нулевого уровня двумерного нерелятивистского оператора Паули, описывающего движение заряженной частицы в периодическом магнитном поле с нулевым потоком через элементарную ячейку и нулевым электрическим полем. Это многообразие полностью изучено для широкого класса алгебро-геометрических операторов. Построены примеры неособых алгебро-геометрических периодических полей (с нулевым потоком через элементарную ячейку), отвечающих комплексным римановым поверхностям рода 0. Для более высоких родов построены периодические операторы с эффектом Ааронова--Бома. Построена (2+1)-мерная эволюционная система, являющаяся 2D-расширением уравнения Бюргерса. Найдены алгебро-геометрические данные для решения этой системы.

П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков. Двумерный оператор Шрёдингера: эволюционные (2+1)-системы и их новые редукции; двумерная иерархия Бюргерса и данные обратной задачи // УМН, 65:3(393) (2010), 195–196.
П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков. О нулевом уровне чисто магнитного двумерного нерелятивистского оператора Паули для частиц со спином 1/2 // Теорет. и матем. физ. 164:3 (2010), 333–353.

17. Доказано, что критическим уровням функционала действия в периодической задаче о движении заряженной частицы в магнитном поле почти на всех уровнях энергии отвечают критические точки – периодические траектории частицы.

(Зав.лабораторией, чл.-к. РАН И.А.Тайманов)

Для сильных точных магнитных полей функционал действия (длина + линейный по скоростям магнитный член) не ограничена снизу на пространстве замкнутых стягиваемых кривых и нижние оценки на число критических уровней выводятся с помощью принципа перекидывания циклов. В статье доказано, что для почти каждого уровня энергии принцип перекидывания циклов дает критические точки – периодические магнитные геодезические - на определяемых им критических уровнях.

Тайманов И.А. Periodic magnetic geodesics on almost every energy level via variational methods. Regular and Chaotic Dynamics 15 (2010), 598-605.

18. Найдены новые аналитические решения линейных и нелинейных уравнений математической физики с переменными коэффициентами, содержащие функциональный произвол. Эти решения могут быть использованы для проверки численных алгоритмов и программ решения прямых и обратных задач математической физики.

(Зав.лабораторией, д.ф.-м.н. Ю.Е.Аниконов, с.н.с., к.ф.-м.н. М.В.Нещадим)

Представление решений и коэффициентов дифференциальных уравнений достаточно широко представлено в математической литературе. К этому направлению относится построение функционально-инвариантных решений гиперболических уравнений, аналитические представления решений и коэффициентов параболических уравнений, представление решения и коэффициента уравнения Штурма-Лиувилля с применением в обратных задачах теории рассеяния, построение гармонических и других потенциалов для вычисления решений (скорости) и коэффициентов (давления) системы уравнений газовой динамики и другие. В задачах идентификации предпочтительно для решений динамических систем иметь явные формулы, содержащие параметры, которые и нужно конкретизировать. Для многомерных обратных задач также желательно иметь формулы, представления решений и коэффициентов дифференциальных уравнений, которые содержали бы достаточно широкий произвол в виде функций одного или многих переменных с целью дальнейшей их конкретизации.
В целом исследования авторов направлены на конструктивное построение решений конкретных обратных задач математической физики. Существенным элементом является поиск новых представлений для решений и коэффициентов уравнения.
Так для производящих функций вероятностных процессов получены формулы, содержащие общие нелинейные отображения. Даны приложения таких формул к обратным задачам для дифференциальных уравнений.

Аниконов Ю.Е., Кривцов Ю.В. Нещадим М.В. Конструктивные методы в нелинейных задачах теории управления. // Сибирский журнал индустриальной математики, 2010, т.13, N 2, 30-45.

Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Представления решений, коэффициентов, символов операторов эволюционных уравнений и обратные задачи.// Вестник НГУ. 2010. Т.10, N 2, С. 25 – 36.
Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач математической физики.-// Сибирские электронные известия. Труды первой международной школы-конференции»Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач.» часть 1, 2010, с.11-61
Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Ветвящиеся процессы, отображения и обратные задачи. Препринт 247, ИМ СО РАН, 2010.

19. Получено обобщение локальной теоремы Гнеденко и интегро-локальной теоремы Стоуна-Шеппа для сумм независимых разнораспределенных случайных величин в схеме серий. При выполнении условия Крамера на распределения слагаемых получены также новые интегро-локальные и локальные теоремы в схеме серий, действующие в области больших и умеренно больших уклонений.

(Советник РАН, академик Боровков А.А., тел. сл. 363-45-89)

В течение последних 50-60 лет шло интенсивное изучение асимптотического поведения распределений сумм случайных величин, связанное со многими прикладными задачами. Большинство результатов здесь относится к схеме суммирования элементов последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Существенным продвижением в этой области явился выполненный в последнее десятилетие цикл работ А.А.Боровкова и А.А.Могульского, устанавливающий асимптотику вероятностей больших уклонений во всех возможных диапазонах уклонений. Актуальным, но более трудным является исследование асимптотического поведения распределений сумм разнораспределенных случайных величин в так называемой схеме серий. А.А.Боровкову удалось получить ряд асимптотических результатов о вероятностях больших уклонений и в этой более общей ситуации.

А.А.Боровков. Интегро-локальные и локальные теоремы о нормальных и больших уклонениях сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий. Теория вероятностей и ее применения, 2009, т. 54, вып. 4, с. 417-436.

20. Предложена новая двухшаговая процедура построения оценок в задаче линейной регрессии в случае невыполненения ряда классических предположений. Найдены необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности предложенных оценок.

(С.н.с., к.ф.-м.н. Ю.Ю.Линке, в.н.с., д.ф.-м.н. А.И.Саханенко, тел. 363-45-94)

Задача оценивания неизвестных параметров регрессионных моделей возникает в многочисленных приложениях и по сути сводится к исследованию зависимости экспериментально наблюдаемых данных от тех или иных факторов при условии, что результаты эксперимента содержат случайные погрешности. Известные классические результаты в этой области касаются ситуации, когда ошибки измерений одинаково распределены и не связаны с подлежащими оцениванию параметрами. Авторы представляемой работы исследовали существенно более общую модель линейной регрессии, когда дисперсии наблюдений зависят от неизвестного параметра модели, а коэффициенты линейной зависимости измеряются со случайными ошибками. Ими предложена новая двухшаговая процедура построения оценок, гарантирующая состоятельность этих оценок. Найдены общие необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности введенных оценок. Исследована ситуация, когда эти оценки имеют минимальную асимптотическую дисперсию. Построены оценки для асимптотической дисперсии, позволяющие решать задачи интервального оценивания и проверки гипотез. Исследование оценок проведено при весьма слабых ограничениях на параметры модели.

Линке Ю.Ю., Саханенко А.И. Асимптотически нормальное оценивание в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах. Сиб. матем. Журнал, 2008, т.49.№ 3, с. 592-619.
Линке Ю.Ю., Саханенко А.И. Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии при невыполнении некоторых классических предположений. Сиб. матем. журнал, 2009, т.50, №2, с. 380-396.
Линке Ю.Ю., Саханенко А.И. Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах. Сиб. матем. журнал, 2010, т.51, №1, с.128-145.

21. Установлены двусторонние оценки max-норм обратных матриц для матриц монотонного вида и вполне неотрицательных матриц.

(Уч.секретарь, д.ф.-м.н. Ю.С.Волков, с.н.с., к.ф.-м.н. В.Л.Мирошниченко)

Во многих задачах численно анализа возникает необходимость оценки некоторой нормы для заданной матрицы. Существующие методы, в основном, позволяют оценивать нормы матриц с диагональным преобладанием или сводящихся к ним (М-матрицы). Предложен подход, позволяющий устанавливать оценки для более широкого класса матриц. Установлены двусторонние оценки max-норм обратных матриц для матриц монотонного вида и вполне неотрицательных матриц. Оценки норм использованы при исследовании сходимости процессов интерполяции для сплайнов пятой степени.

Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л. Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам. СМЖ, 2009, т.50, № 6, с. 1248 - 1254.

22. Получены оценки устойчивости для решений задач идентификации коэффициентов систем линейных разностных уравнений.

(С.н.с., к.ф.-м.н. А.А.Ломов, тел. 363-46-64)

В цикле работ исследуется задача идентификации матричных коэффициентов системы линейных разностных уравнений. Матричные коэффициенты определяются таким образом, чтобы решения системы наиболее точно аппроксимировали заданные векторы наблюдения. Хорошо известно, что решения задач идентификации обладают высокой чувствительностью к возмущениям векторов наблюдения. Однако проблема получения априорных оценок, характеризующих погрешность идентификации коэффициентов разностных уравнений, остается открытой. При некоторых предположения в работах впервые удалось получить априорные оценки, характеризующие локальную устойчивость решений задачи идентификации относительно малых возмущений векторов наблюдения. Результаты обобщены на класс задач идентификации для систем разностных уравнений в теории управления.

Ломов А.А. О количественном априорном показателе идентифицируемости параметров линейной системы // Труды VIII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09 (Москва, 26-30 января 2009 г.) М.: ИПУ им. В.А.Трапезникова РАН, 2009. С. 479-491.
Ломов А.А. О локальной устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейного разностного уравнения // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 81-103.
Ломов А.А. Управляемость суммарных линейных систем // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 79-84.
Ломов А.А. О количественных априорных показателях идентифицируемости коэффициентов линейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1. С. 3-15.

23. Изучена модель обмена с дробно-линейными функциями предпочтения у участников. Получены условия существования строгого равновесия и равновесия в слабом смысле (допускается частичная востребованность товаров). Для модели с фиксированными бюджетами разработан алгоритм поиска равновесий, состоящий из конечного числа шагов при естественных предположениях на стартовое состояние.

(Зав.лабораторией, д.ф.-м.н. В.И.Шмырёв, тел. 363-46-32)

В дробно-линейной модели обмена равновесие в классическом определении может и не существовать, и при необременительных предположениях доказывается существование равновесных состояний в более общем смысле - "free disposal-equilibrium". Исследование вопроса опирается на общую теорему для модели Эрроу-Дебре с использованием специфики модели. Приведено простое условие существования равновесия в строгом смысле. Разработанный алгоритм численного отыскания равновесного состояния является дальнейшим развитием оригинального подхода, предложенного автором ранее для классической модели обмена. В отличие от традиционного взгляда на равновесие, основанного на рассмотрении функции избыточного спроса, этот подход базируется на рассмотрении некоторого подмножества структур закупок товаров участниками модели подобно тому, как симплекс-метод в линейном программировании базируется на рассмотрении базисных множеств. Каждой такой структуре сопоставляется два множества цен, - зону предпочтительности структуры и зону ее сбалансированности. Особенность рассматриваемых моделей в том, что вводимые множества являются многогранными и образуют два полиэдральных комплекса в двойственности. Равновесное состояние характеризуется структурой, для которой отвечающие друг другу полиэдры имеют непустое пересечение. Это новый класс задач комплементарности - задачи полиэдральной комплементарности. Он является естественным расширением известного класса задач линейной комплементарности. Возникающее при этом точечно-множественное отображение обладает некоторым свойством слабой монотонности, характерным для задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы коэффициентов задачи.
Для линейных моделей обмена с фиксированными бюджетами упомянутое отображение оказывается в определенном смысле потенциальным. И хотя это уже не имеет места для дробно-линейных моделей, но монотонность отображения сохраняется, что и позволяет обосновать конечность предлагаемого алгоритма отыскания равновесия.

Шмырев В.И. Дробно-линейная модель обмена. Часть 1: Существование и признак равновесия // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Том 17, №1. С. 75-96.
Шмырев В.И. Дробно-линейная модель обмена. Часть 2: Метод встречных траекторий для модели с фиксированными бюджетами // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Том 17, №2. С. 79-96.

24. Доказано, что если из гиперкуба удалить не более чем по одному ребру из каждой 4-грани, то любое разбиение вершин гиперкуба на пары достраивается с помощью оставшихся ребер до гамильтонова цикла.

(С.н.с., к.ф.-м.н Фон-Дер-Флаасс)

Дж. Финк доказал, что всякий 1-фактор в полном графе на множестве вершин гиперкуба Q_n может быть расширен до цикла добавлением некоторых ребер этого гиперкуба. Доказано, что для n>3 некоторые ребра Q_n могут быть удалены без потери указанного свойства. Также получены нижняя и верхняя оценки на минимальное число ребер 2 n-вершинного графа, обладающего этим свойством.

Fon-Der-Flaass D.G. Extending pairings to Hamiltonian cycles // Sib. Elektron. Mat. Izv., 2010, 7, 115--118.

25. Получены точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром. С точностью до изоморфизма описаны все графы заданного диаметра с локальным разнообразием шаров и наименьшим числом вершин.

(С.н.с., к.ф.-м.н. Федоряева Т.И., тел. 363-46-18)

Получены точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром. Таким образом, полностью решена задача о наибольшем и наименьшем числе шаров заданного радиуса для метрических пространств графов фиксированного "объема".
Исследованы n-вершинные графы диаметра d с локальным t-разнообразием шаров, т.е. графы, имеющие n различных шаров радиуса i для любого i<t. Для таких графов найдена нижняя оценка для числа вершин, определяемая через параметры d и t. С точностью до изоморфизма описаны все графы диаметра d с локальным t-разнообразием шаров и наименьшим числом вершин.

Федоряева Т.И. Точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т.16, № 6. С.86-104.
Федоряева Т.И. О графах с заданными диаметром, числом вершин и локальным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т.17, № 1. С.65-74.

26. Предложен эффективный приближённый алгоритм решения задачи коммивояжера на максимум в конечномерном нормированном пространстве, и для него получены условия асимптотической точности.

(С.н.с., к.ф.-м.н. Шенмайер В.В., тел. 8913 9857865)

Задача коммивояжера на максимум заключается в отыскании гамильтонова цикла максимального веса в некотором взвешенном графе. Рассматривается геометрический вариант задачи, в котором вершинами графа являются точки в конечномерном нормированном пространстве, а весами дуг – расстояния между ними относительно некоторой заданной нормы. Задача NP-трудна уже в случае трехмерного евклидового пространства. Для решения задачи представлен приближенный алгоритм с относительной погрешностью, стремящейся к нулю с ростом числа вершин в случае, когда размерность пространства фиксирована. Алгоритм является обобщением известного алгоритма А.И.Сердюкова для задачи коммивояжера на графах в многомерном евклидовом пространстве.

Шенмайер В.В. Асимптотически точный алгоритм для решения задачи коммивояжера на максимум в конечномерном нормированном пространстве // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Том 17. № 4. С. 84-91.

27. Изучены динамические свойства, индуцированные квантовыми эффектами, в широком классе трёхмерных (2+1) суперкалибровочных теорий с расширенным числом суперсимметрий. Установлено, что они важны для описания степеней свободы М2 бран.

(С.н.с., к.ф.-м.н. Н.Г.Плетнёв)

Физика в 2+1 размерностях обладает многими неожиданными свойствами, как для теоретической, так и экспериментальной практики. Это обусловлено тем обстоятельством, что здесь существует новый тип Chern-Simons калибровочных моделей теории поля, известный как инструмент для построения skein- соотношений в теории узлов, а также для описания некоторых явлений конденсированного состояния вещества, таких как квантовый эффект Холла, высокотемпературная свехпроводимость и др. Недавний всплекс интереса к 3d суперкалибровочным теориям с расширенным числом суперсимметрий мотивирован конструкцией суперконформных теоретико-полевых моделей описывающих степени свободы М2 бран. Мы изучаем динамические свойства в широком классе таких моделей, индуцированные квантовыми эффектами.

I.L. Buchbinder, N.G. Pletnev, I.B. Samsonov, Effective action of three-dimensional extended supersymmetric matter on gauge superfield background, JHEP 1004:124, 2010.

I.L. Buchbinder, E.A. Ivanov, O.Lechtenfeld, N.G. Pletnev, I.B. Samsonov, B.M. Zupnik, Quantum N=3, d=3 Chern-Simons Matter Theories in Harmonic Superspace, JHEP 0910:075, 2009;
I.L. Buchbinder, E.A. Ivanov, O.Lechtenfeld, N.G. Pletnev, I.B. Samsonov, B.M. Zupnik, ABJM models in N=3 harmonic superspace, JHEP 0903:096, 2009.