Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского

Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

ЦИОВКИНА Людмила Юрьевна

Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

чл.-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н. А.А. Махнев

Екатеринбург – 2022

Оглавление

Введение **4**

1 Основные определения и предварительные результаты **29**

1.1 Определения и обозначения . . . 29

1.2 Свойства и конструкции антиподальных дистанционно регулярных графов небольшого диаметра и реберно симметричных графов . . . 32

1.3 Дистанционно регулярный граф как метрическая схема и метод Хигмена . . 41

1.4 Вспомогательные результаты из теории чисел и теории групп подстановок . 43

2 Транзитивные на дугах группы автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа диаметра 3: аффинный случай **46**

2.1 Вспомогательные результаты . . . 48

2.2 Доказательство предложения 2.10 и графы с тривиальной накрывающей группой . . . 52

2.3 Случай четного числа антиподальных классов . . . 76

2.4 Случай нечетного числа антиподальных классов . . . 84

2.5 Случай нечетного числа антиподальных классов: дальнейшая редукция . . . 98

3 Транзитивные на дугах квазипростые группы автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа диаметра 3 **108**

3.1 Дистанционно регулярные графы смежных классов групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$ . . 111

3.2 Дистанционно регулярные графы смежных классов групп $U_3(q)$ и $SU_3(q)$ . . 118

3.3 Графы на классах сопряженных элементов групп $L_2(q)$, $U_3(q)$, $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$ . . . 126

3.4 Локальное строение частных графов S_3-инволюций группы $L_2(2^n)$ . . . 128

3.5 Доказательство теоремы 3.9 . . . 132

4 Транзитивные на дугах группы автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа диаметра 3: почти простой случай **139**

4.1 Случай тривиальной накрывающей группы . . . 140

4.2 Случай неточного действия и $|K| \neq r$ . . . 143

4.3 Случай неточного действия и $|K| = r$ . . . 146

4.4 Случай $(\mathrm{Soc}(G^{\Sigma}), |\Sigma|) = (\mathrm{PSL}_d(q), \dfrac{q^d-1}{q-1})$, $d \geq 3$ . . . 149

5 Некоторые вершинно-транзитивные группы автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 **156**

5.1 Редукция к минимальным частным . . . 156

5.2 Некоторые свойства $\widetilde{G}$-вершинно-транзитивных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ . . . 158

5.3 Абелевы минимальные антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 162

5.4 Спорадический случай 173

6 Группы автоморфизмов AT4**-графов и накрытий графов эрмитовых форм** $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ **177**

6.1 Накрытия графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ 178

6.2 Группы автоморфизмов AT4$(p, p+2, r)$-графов 184

6.3 Группы автоморфизмов AT4$(p, p+2, r)$-графов: случай $p = 5$ 193

6.4 Группы автоморфизмов AT4$(p, p+2, r)$-графов: случай $p = 7$ 200

Заключение **206**

Список литературы **208**

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Изучение групп посредством исследования ассоциированных с ними графов, таких как граф Кэли или граф смежных классов, играет важную роль в теории групп. В связи с этим заметное место в теории групп занимает задача описания строения группы в зависимости от свойств симметрии ассоциированных с ней графов. Эти свойства могут иметь различную природу (например, групповую или комбинаторную), а с помощью их конкретного набора можно определить класс групп со схожим строением или даже охарактеризовать группу с точностью до изоморфизма. В свою очередь, аппарат теории групп может быть эффективно применен для описания групп автоморфизмов графов с симметриями заданного вида, а также для классификации самих этих графов. Особый интерес представляет собой исследование групп автоморфизмов графов с такими свойствами симметрии, как дистанционная транзитивность и, более общо, дистанционная регулярность.

Пусть G — это группа подстановок на конечном множестве Ω, Γ — это связный граф (под «графом» здесь и далее подразумевается простой неориентированный граф) на Ω и ∂ — его естественная метрика. Если группа G действует *дистанционно-транзитивно* на Γ, то есть $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и для любых двух упорядоченных пар (x, y) и (x', y') его вершин с $\partial(x, y) = \partial(x', y')$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $(x^g, y^g) = (x', y')$, то граф Γ называется *дистанционно-транзитивным.* Изучение групп подстановок, действующих дистанционно-транзитивно на некотором графе, восходит к работе Д. Г. Хигмана [72], в которой они были введены как «группы максимального диаметра». Мощным импульсом для их исследования стало открытие и построение в середине 20 в. около половины спорадических простых групп как групп ранга 3, а также знаменитая работа Ж. Титса [122], в которой он ввел обобщенные многоугольники с целью геометрической интерпретации некоторых полупростых алгебраических групп, включая группы Шевалле и группы лиева типа. Впоследствии Н. Биггс [35] выделил определенный набор комбинаторных свойств, «эффективно» аппроксимирующий дистанционную транзитивность графа, введя понятие дистанционной регулярности графа. Связный граф называется *дистанционно регулярным* (сокращенно «д.р.г.»), если для произвольной пары его вершин x и y с $\partial(x, y) = k$ число $p^k_{i,j}$ (*число пересечений*) вершин z таких, что $\partial(x, z) = i$ и $\partial(z, y) = j$, зависит только от i, j и k, и не зависит от выбора вершин x и y. Биггс показал, что алгебра смежности (алгебра Боуза-Мейснера) дистанционно регулярного графа порождается его матрицей смежности и обладает некоторыми свойствами полиномиальности, при этом его числа пересечений $p^k_{i,j}$ суть не что иное, как структурные константы этой алгебры (в т.н. стандартном базисе), и могут быть выражены с помощью его *массива пересечений*, то есть последовательности параметров $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, где d — диаметр графа, $b_i = p^i_{i+1,1}$ и $c_i = p^i_{i-1,1}$. Практически в то же время в работе Ф. Дельсарта [54] была установлена эквивалентность дистанционно регулярных графов и P-полиномиальных схем отношений, а также введены двойственные к ним, Q-полиномиальные схемы отношений. Важность исследования групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов подчеркивается тем фактом, что каждая конечная неабелева простая группа, за возможным исключением спорадических групп и групп лиевого типа малого ранга, является группой автоморфизмов Q-полиномиального дистанционно регулярного графа (т.е. (P и Q)-полиномиальной схемы). Более того, классификация таких графов рассматривалась Э. Баннаи и Т. Ито [1] как основа для альтернативного подхода к классификации конечных простых групп при помощи схем отношений («теория групп без групп»). Эти результаты стимулировали дальнейшие исследования дистанционно-транзитивных графов и их групп автоморфизмов, а также изучение таких вопросов, как характеризация дистанционно регулярных графов по массиву пересечений (см. обзоры в [1, 40, 126, 30] и [46]).

Если группа автоморфизмов G графа Γ действует транзитивно на множестве его *дуг*, то есть на множестве упорядоченных пар его смежных вершин, то группа G является *транзитивной на дугах* или *флаг-транзитивной*, а сам граф Γ называется *реберно симметричным*. Очевидно, что дистанционно-транзитивный граф является реберно симметричным дистанционно регулярным графом. Обратное, вообще говоря, неверно, как показывает пример графа Клейна (с массивом пересечений $\{7,4,1;1,2,7\}$), полная группа автоморфизмов которого является флаг-транзитивной, но не дистанционно-транзитивной.

В настоящее время классификация дистанционно-транзитивных групп и графов близка к завершению и внимание исследователей переходит на более широкие классы объектов (см. [125, 24, 81] и [126]). Наряду с тем, одной из основных нерешенных задач, важных как для теории конечных групп, так и для теории дистанционно-транзитивных графов и их обобщений, является *задача описания флаг-транзитивных групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов.* На решение этой задачи и направлена настоящая диссертационная работа.

Ввиду результатов Г. Сабидусси [113] и Ч. Симса [112] каждый связный реберно симметричный граф имеет две теоретико-групповые характеризации, согласно которым он может быть построен как граф смежных классов или как орбитальный граф любой его флаг-транзитивной группы автоморфизмов.

Приведем первую из этих конструкций. Пусть даны неинвариантная подгруппа H группы G и элемент $g \in G - H$. Обозначим через $\Gamma(G,H,HgH)$ *граф смежных классов группы G по подгруппе H (относительно элемента g)*, то есть граф, вершинами которого является множество $R(G,H) = \{Hx \mid x \in G\}$ правых смежных классов G по H, а ребрами — пары $\{Hx, Hy\}$ такие, что $xy^{-1} \in HgH$. Так, если G действует точно на $R(G,H)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$, то $\Gamma(G,H,HgH)$ — связный граф и G действует точно и транзитивно как на вершинах, так и на дугах графа $\Gamma(G,H,HgH)$. С другой стороны, если G — флаг-транзитивная группа автоморфизмов связного неодновершинного графа Γ, H — стабилизатор его вершины a в G, а g — элемент, переставляющий между собой смежные вершины a и a^g, то $g^2 \in H$, $G = \langle H, g\rangle$ и граф Γ *реализуем посредством тройки* (G,H,g), то есть $\Gamma \simeq \Gamma(G,H,HgH)$.

Вторая конструкция — это, по существу, представление реберно симметричного графа без изолированных вершин в виде графа симметричного базисного отношения шуровой схемы отношений (или схемы орбиталов) некоторой транзитивной группы подстановок.

Таким образом, задача описания реберно симметричных дистанционно регулярных графов подразумевает определение троек-представителей (G, H, g), реализующих классы изоморфизма графов, а поскольку схема орбиталов группы G на $R(G, H)$ является измельчением метрической схемы графа, то его алгебра смежности может быть интерпретирована как подалгебра алгебры Гекке группы G относительно H (см., например, [1]).

Введем некоторые определения. Связный граф Γ диаметра d называется *примитивным*, если для всех $i \in \{2, 3, ..., d\}$ граф Γ_i на том же множестве вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ, является связным; в противном случае, граф Γ называется *импримитивным*. По теореме Хигмана (см. [49, теорема 1.9]) свойство дистанционно-транзитивной группы быть примитивной (импримитивной) естественно приближается свойством дистанционно регулярного графа быть примитивным (соотв., импримитивным). Д. Смит [110] доказал, что импримитивность дистанционно регулярного графа валентности $k \geq 3$ влечет его двудольность или *антиподальность* (т.е. бинарное отношение «совпадать или находиться на максимальном расстоянии» на множестве вершин является эквивалентностью). Очевидно, что антиподальные д.р.г. диаметра $d \leq 2$ — это в точности полные графы и полные многодольные графы с долями одинаковых порядков. Н. Биггс и Э. Гардинер (см. [40, предложение 4.2.2] и также [60], [25, теорема 2.9]) показали, что каждый импримитивный дистанционно регулярный граф степени $k \geq 3$ можно преобразовать в некоторый примитивный дистанционно регулярный граф путем применения операций перехода к антиподальным частным или половинным графам. Так, каждый антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра $d \geq 3$ является антиподальным накрытием своего антиподального частного $\bar{\Gamma}$, которое, в свою очередь, является дистанционно регулярным графом диаметра $\lfloor d/2 \rfloor$. При этом если d нечетно или Γ — недвудольный граф, то граф $\bar{\Gamma}$ примитивен, а если d четно и Γ — двудольный граф, то половинный граф $\frac{1}{2}\Gamma$ графа Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра $\lfloor d/2 \rfloor$ (и граф $\overline{\frac{1}{2}\Gamma}$ примитивен) и антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ графа Γ — двудольный граф диаметра $\lfloor d/2 \rfloor$ (и граф $\frac{1}{2}\bar{\Gamma}$ примитивен). Восстановление импримитивного графа Γ по производному графу $\frac{1}{2}\Gamma$ или $\bar{\Gamma}$ является весьма сложной проблемой (см. [81]), которая сопряжена с проблемой классификации антиподальных дистанционно регулярных графов небольшого диаметра $3 \leq d \leq 4$, и, как отмечается в [1, с. 239], аналогична определению группы автоморфизмов простой группы или построению расширения простой группы с помощью ее мультипликатора Шура. Отметим, что наибольший прогресс достигнут в описании тех антиподальных дистанционно регулярных графов, антиподальное частное которых является известным примитивным графом диаметра не меньше 3 (см. [42, 27, 26, 70]). Кроме того, число антиподальных д.р.г. фиксированного диаметра $d \geq 5$, известных к настоящему времени, оказывается очень мало. С другой стороны, антиподальные дистанционно регулярные графы небольшого диаметра $d \in \{3, 4\}$

образуют обширный и бесконечный класс графов, конструкции которых тесно взаимосвязаны с такими важными комбинаторными и алгебраическими объектами, как геометрии Мура, проективные плоскости, обобщенные четырехугольники, делимые дизайны, коды (Препараты, Рида-Маллера, Кердока), (обычные и обобщенные) матрицы Адамара, конечные группы (см. [90, 53, 33, 47, 67, 93, 52, 101, 146]). Следует отметить, что несмотря на то, что антиподальные дистанционно регулярные графы небольшого диаметра интенсивно изучались за последние несколько десятилетий, систематического исследования их групп автоморфизмов не проводилось.

В диссертации проводится исследование транзитивных и, в основном, флаг-транзитивных групп автоморфизмов антиподальных д.р.г. небольшого диаметра $d \in \{3, 4\}$. Отметим, что задача описания таких групп представляет интерес, в том числе, для построения вышеупомянутых объектов. В целом, ее изучение фокусируется вокруг нескольких основных вопросов:

1) определение комбинаторных свойств графа, в частности, его допустимых массивов пересечений;

2) исследование связи локальных комбинаторных свойств графа и строения его группы автоморфизмов (локальный подход);

3) описание группы автоморфизмов графа по ее действиям (i) на вершинах, (ii) на дугах, (iii) на антиподальных классах (глобальный подход).

В диссертации исследования первого вопроса имеют вспомогательный характер, а основное внимание уделяется последним двум вопросам. Перейдем к предметному обсуждению истории и результатов.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет массив пересечений вида $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, где k — степень графа, r — порядок антиподального класса и μ — число общих соседей для двух вершин на расстоянии 2. При этом $2 \le r \le k$, Γ является антиподальным r-накрытием полного графа на $k+1$ вершинах, для параметров r, μ и k справедливо тождество $k - 1 - r\mu = \lambda - \mu$, где λ — число общих соседей для двух смежных вершин, и μ четно всякий раз, когда четно число $k+1$. Из результатов Э. Гардинера [60] следует, что в случае $r = k$ граф Γ изоморфен второй окрестности вершины в неполном графе Мура степени $k + 1 \in \{3, 7, 57\}$. Из результата М. Ашбахера [28] о несуществовании группы ранга 3 степени 3250 и подстепени 57 следует, что если граф Γ дистанционно-транзитивен с $r = k$, то Γ — это 6-цикл или вторая окрестность вершины в графе Хофмана-Синглтона (см. также [62]).

Р. Мэтоном [101] была найдена первая конструкция бесконечного семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 и степени $k = q > 3$, допускающих флаг-транзитивное действие группы $L_2(q)$. Д. Тейлор [121] классифицировал антиподальные дистанционно-транзитивные графы диаметра 3 с $r = 2$, обнаружив в том числе несколько спорадических примеров (для групп Co_3 и HiS) и бесконечных семейств (для групп $SU_3(q)$ и ${}^2G_2(q)$).

Впоследствии К. Годсил, Р. Либлер и Ш. Прэгер [66] завершили классификацию антиподальных дистанционно-транзитивных графов диаметра 3 для оставшихся значений $2 < r < k$ [1]. Ключевую роль в их работе сыграло следующее наблюдение, позволяющее значительно ограничить строение группы автоморфизмов такого графа. Если G — это флаг-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, то (i) группа G индуцирует 2-транзитивную группу подстановок на множестве антиподальных классов и если более того, G — дистанционно-транзитивная группа, то (ii) глобальный стабилизатор $G_{\{F\}}$ антиподального класса F в G индуцирует 2-транзитивную группу подстановок на F. Как известно, по теореме Бернсайда каждая конечная 2-транзитивная группа подстановок является либо аффинной (т.е. ее цоколь является регулярной элементарной абелевой группой), либо почти простой (т.е. ее цоколь является простой неабелевой группой). Более того, на основе классификации конечных простых групп была получена классификация всех конечных 2-транзитивных групп подстановок. Она и стала основным инструментом исследования антиподальных дистанционно-транзитивных графов диаметра 3 в [66]. Отметим, что с тех пор и до настоящего времени было открыто всего около десятка разных бесконечных семейств антиподальных д.р.г. диаметра 3 (в том числе бесконечные семейства реберно симметричных графов, не являющихся дистанционно-транзитивными).

В общем случае флаг-транзитивная группа автоморфизмов G антиподального д.р.г. Γ диаметра 3 может не обладать свойством (ii) и методы, предложенные в [66] для описания стабилизаторов вершин в дистанционно-транзитивных группах, оказываются неприменимыми. Несмотря на то, что строение группы G^{Σ}, индуцируемой флаг-транзитивной группой G на множестве антиподальных классов Σ графа Γ, также значительно ограничено классификационной теоремой, вопросы восстановления группы G по G^{Σ}, равно как и вопрос существования графа Γ для данной группы G, потребовали специального исследования для большинства допустимых групп G^{Σ}, в том числе, разработки новых методов, предлагаемых в диссертации, и применения таких глубоких результатов теории групп, как классификация О'Нэна–Скотта примитивных групп подстановок нечетной степени, классификация примитивных групп подстановок ранга 3, подгрупповое строение конечных простых групп, сведения о группах когомологий конечных групп, теория (обыкновенных и модулярных) представлений.

До недавнего времени класс реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 оставался практически неисследованным в общем случае. Случай $r \in \{2, k\}$ был рассмотрен в работе А.А. Махнева, Д.В. Падучих и автора диссертации [19]. А именно, с применением результата А.А. Махнева и Д.В. Падучих [16] о том, что порядок группы автоморфизмов неполного графа Мура степени $k + 1 = 57$ не делится на $k(k + 1)$, в [19] было показано, что при $r \in \{2, k\}$ полная группа автоморфизмов $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ реберно симметричного антиподального д.р.г. Γ диаметра 3 действует дистанционно-транзитивно. Кроме того, в [19] были найдены необходимые условия существования таких пар (Γ, G) при $\lambda = \mu$, в частности, установлено, что при этом условии

[1] Небольшой пробел в их доказательстве указан и исправлен в [56].

группа G^Σ не является аффинной. Классификация реберно симметричных антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3 с $\mu = 1$ была недавно получена в работе [124], согласно которой при $\mu = 1$ граф Γ изоморфен либо 6-циклу, либо второй окрестности в графе Хофмана-Синглтона, либо графу Мэтона с $k = 2^e$ и $r = k - 1$.

Поэтому, а также ввиду того, что условие $\lambda \neq \mu$ влечет целочисленность спектра матрицы смежности графа Γ и дает некоторые дополнительные соотношения для его параметров r, μ и k, при описании групп $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ можно ограничиться случаем $\mu > 1$ и удобно рассматривать отдельно три ситуации:

I. G^Σ — почти простая группа и $\lambda = \mu$;

II. G^Σ — почти простая группа и $\lambda \neq \mu$;

III. G^Σ — аффинная группа.

В диссертации рассмотрена каждая из них.

В случае I определены все семейства графов, удовлетворяющих необходимым условиям существования из [19]. При этом найдены два новых бесконечных семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, допускающих флаг-транзитивные действия простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$.

В случае II получены необходимые и достаточные условия существования графов Γ с $\lambda \neq \mu$ и описаны их группы G, при этом обнаружено бесконечное семейство антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $k = q^3$ и $\mu = (q^2-1)(q+1)/r$, допускающих флаг-транзитивное действие группы $SU_3(q)$, где q — нечетная степень простого числа и порядок r антиподального класса — это делитель числа $q+1$ такой, что $(q+1)/r$ нечетно, пропущенное Броувером в [41, предложение 12.5.4]. Для этого автором был разработан оригинальный метод анализа паросочетаний в некоторых накрытиях полных графов, допускающих флаг-транзитивную группу автоморфизмов с (B, N)-парой ранга 1, который основан на изучении канонической формы элементов в таких группах.

С применением этих результатов в диссертации классифицированы антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 в случае, когда полная группа автоморфизмов графа действует транзитивно на дугах и индуцирует почти простую 2-транзитивную группу подстановок на множестве его антиподальных классов. А именно, доказано, что при $r \notin \{2, k\}$ и $\mu > 1$ каждый такой граф допускает флаг-транзитивную группу автоморфизмов, изоморфную группе $L_2(q), U_3(q), SU_3(q), Sz(q)$ или ${}^2G_2(q)$, и приведена его конструкция в виде графов смежных классов соответствующей группы. При этом был исследован и решен вопрос об изоморфизме этих графов графам из семейств, построенных Мэтоном [101], Броувером [41, предложение 12.5.4] и Камероном [47, предложение 5.1].

Группа всех автоморфизмов произвольного антиподального д.р.г. Φ, фиксирующих (как множество) каждый его антиподальный класс, обозначается через $\mathcal{CG}(\Phi)$ (она называется также *накрывающей группой* графа Φ).

В случае III в диссертации получено описание групп G графов Γ с $r \notin \{2, k\}$. Для этого был разработан способ определения допустимых флаг-транзитивных групп G графа

Γ в аффинном случае, основанный на редукции к графам, у которых порядок накрывающей группы имеет одно из экстремальных значений. При этом было доказано, что при $\mathcal{CG}(\Gamma) = 1$ возникает всего два различных (с точностью до изоморфизма) графа. Один из них строится как геометрический граф для обобщенного четырехугольника $\mathrm{GQ}(5,3)$ с удаленным спредом (этот обобщенный четырехугольник допускает 24 спреда и его группа автоморфизмов действует транзитивно на них (см. [104])). Его полная группа автоморфизмов имеет абстрактное строение вида $2^4.\mathrm{GL}_2(4).Z_2$. Другой граф может быть получен путем удаления спреда из псевдогеометрического графа для $\mathrm{GQ}(5,3)$, который был впервые построен А. Броувером и Дж. Куленом и независимо М.Х. Клином (см. [43]). Они, кроме того, показали, что окрестность вершины в нем изоморфна графу прямых графа Петерсена, при этом полная группа автоморфизмов имеет абстрактное строение вида $2^4.S_6$. В диссертации доказано, что при $\mathcal{CG}(\Gamma) > 1$ граф Γ является графом Кэли, допускающим регулярную группу автоморфизмов T (полный прообраз цоколя группы G^Σ в G), которая является элементарной абелевой 2-группой при четном $|\Sigma|$ и специальной группой простой экспоненты p с $Z(T) = \mathcal{CG}(\Gamma)$ при нечетном $|\Sigma| = p^e$. При этом было описано допустимое строение стабилизатора вершины в G и найдены ограничения для параметров k, r и μ графа. На основе перечисленных результатов в диссертации было показано, что за исключением т.н. одномерного случая $G^\Sigma \le \mathrm{A\Gamma L}_1(|\Sigma|)$ и случая $\mu = 1$, при $r \notin \{2,k\}$ и нечетном $|\Sigma|$ граф Γ изоморфен графу, получаемому с помощью конструкции Таса-Соммы или Годсила-Хензеля (см., например, [67, конструкция 4.3] и [67, конструкция 6.4]).

Одним из следствий проведенного в диссертации исследования случаев I и II является классификация некоторых графов на множестве инволюций простой группы $G \in \{L_2(q),$ $Sz(q)$, $U_3(q)\}$. *Графом D_n-инволюций* конечной группы X с непустым множеством Ω инволюций, замкнутым относительно сопряжений элементами из X, и непустым множеством $\mathcal{S}$ подгрупп в X, изоморфных диэдральной группе порядка n, также замкнутым относительно сопряжений элементами из X, называется граф на множестве Ω, ребрами которого являются пары вершин $\{u,v\}$ такие, что $\langle u,v\rangle \in \mathcal{S}$. В работе М. Джудичи и Э. Девиллерс [55] была предложена задача описания графов S_3-инволюций конечных простых групп и исследованы графы S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$. В диссертации эта задача решена для групп $U_3(2^n)$, и, более того, классифицированы графы $D_{2\cdot\chi(G)}$-инволюций каждой группы $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$, где $q = 2^n > 2$ и

$$\chi(G) = \begin{cases} 5, & \text{если } G = Sz(q) \\ 3, & \text{если } G \in \{L_2(q), U_3(q)\} \end{cases}.$$

А именно, с применением классического результата М. Судзуки [119] о том, что G действует транзитивно на множестве своих отличимых (distinguished) пар инволюций, установлено, что каждый такой граф, с одной стороны, является реберно симметричным антиподальным д.р.г. диаметра 3, и с другой — совпадает с графом π-локального слияния (π-local fusion graph, см. [31]) группы G, где $\pi = \{\chi(G)\}$ (отдельно отметим, что с применением этих результатов автором было обнаружено, что бесконечные семейства графов π-локального слияния групп G, где π — множество всех нечетных порядков элементов группы G, отличных от $\chi(G)$, принадлежат классу графов Деза, тем самым, найдено новое бесконечное семейство графов Деза [123]). В диссертации также доказано, что для каждого $n \geq 2$ граф S_3-инволюций группы $L_2(2^n)$ изоморфен дистанционно регулярному графу Мэтона степени 2^n с $\mu = 1$, что уточняет результат из [55], и, кроме того, установлено, что несколько бесконечных семейств фактор-графов графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ принадлежат классу локально сильно регулярных графов.

Если Φ — антиподальный д.р.г. диаметра 3 и $\mathcal{CG}(\Phi)$ — абелева группа порядка r, то в соответствии с терминологией из [67] граф Φ будет называться *абелевым*. В диссертации исследуется задача классификации абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, обладающих следующим свойством: $(*)$ Γ *имеет транзитивную группу автоморфизмов G, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ его антиподальных классов.* При этом, не ограничивая общности, можно считать, что G совпадает с полным прообразом группы G^Σ в $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Решение этой задачи для случая, когда подстановочный ранг $\mathrm{rk}(G^\Sigma)$ группы G^Σ равен 2 может быть получено из результатов диссертации, перечисленных ранее, поскольку граф Γ со свойством $(*)$, удовлетворяющий данному условию на ранг, является реберно симметричным. В диссертации исследован класс абелевых антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3 со свойством $(*)$ в следующем случае, когда $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. При этом условии граф Γ оказывается «почти» реберно симметричным, в том смысле, что группа G имеет ровно две орбиты на множестве дуг графа Γ, а сам граф Γ может быть представлен в виде объединения двух графов смежных классов группы G. Для изучения таких графов был разработан метод редукции к т.н. *минимальным* частным графа Γ, который позволяет классифицировать графы Γ в зависимости от типа такого частного. При помощи исследования равномерных (equitable) разбиений множества вершин графа Γ, которые возникают как разбиения на множество орбит некоторых подгрупп группы G, в диссертации получен ряд существенных ограничений на группу G, спектр и параметры графа Γ, а также классифицированы его минимальные частные. На основе полученных результатов решена поставленная задача при условии, что цоколь группы G^Σ является спорадической простой группой. Решение опирается на классификацию примитивных групп подстановок ранга 3 соответствующего типа и отвечающих им графов ранга 3 (см. [46, гл. 11]).

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра $d \in \{4, 5\}$ является антиподальным r-накрытием своего антиподального частного $\bar{\Gamma}$, $r = 1 + b_2/c_{d-2}$ и $\bar{\Gamma}$ — это дистанционно регулярный граф диаметра 2 с массивом пересечений $\{b_0, b_1; 1, \gamma\mu\}$, где $\gamma = r$ при $d = 4$ и $\gamma = 1$ при $d = 5$. При этом если G — дистанционно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ, то G индуцирует группу ранга 3 на $\bar{\Gamma}$ и, более того, граф (ранга 3) $\bar{\Gamma}$ известен (см. [46, гл. 11]), в частности, граф $\bar{\Gamma}$ импримитивен тогда и только тогда, когда $\bar{\Gamma}$ — полный двудольный граф и Γ — двудольный граф диаметра 4.

А.А. Иванов, Р. Либлер, Т. Пенттила и Ш. Прэгер [80] классифицировали дистанционно-транзитивные антиподальные накрытия импримитивных графов ранга 3. В работах Дж. Ван Бона и А. Броувера, А. Юришича, Дж. Хэмметера были классифицированы дистанционно регулярные антиподальные накрытия многих примитивных графов ранга 3 (см. обзор в [24]). Так, Дж. Ван Бон и А. Броувер [42] доказали, что граф эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ не может иметь дистанционно регулярных антиподальных накрытий диаметра 5, за исключением случая $q = 4$, в котором таким накрытием является 5-куб. Известны всего два дистанционно регулярных антиподальных накрытия диаметра 4 графов $\mathrm{Herm}(2, q^2)$: граф Уэлса (единственный граф с массивом пересечений $\{5, 4, 1, 1; 1, 1, 4, 5\}$ (для $q = 2$)) и граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея (граф с массивом пересечений $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$ (для $q = 3$)). В той же работе (см. [42, с. 164]) авторами был поставлен вопрос о существовании других накрытий графов $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, который до сих пор остается нерешенным. Отметим, что в работе М. Альфурайдана [24] была предпринята попытка описания дистанционно-транзитивных антиподальных накрытий известных на тот момент примитивных графов ранга 3 с применением компьютерных вычислений, но оказалось, что она содержит ряд неточностей. Так случай, когда антиподальное частное является графом эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, в [24] был рассмотрен некорректно. В диссертации получено полное описание реберно симметричных дистанционно регулярных антиподальных накрытий диаметра 4 графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, группа автоморфизмов которых индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном, что, в частности, восполняет указанный пробел из [24].

К настоящему времени известно существование бесконечных семейств двудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4 и всего лишь четырнадцать примеров недвудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4. Так, ряд недвудольных антиподальных д.р.г. диаметра 4 был неявно обнаружен в связи с исследованием расширений почти простых групп, порожденных классом 3-транспозиций, в работе С.Д. Смита [111]. Среди них оказалось, например, дистанционно регулярное антиподальное 3-накрытие графа 3-транспозиций третьей группы Фишера Fi_{24}, допускающее флаг-транзитивное действие квазипростой группы $3.Fi_{24}'$ (3-централизатора в монстре Фишера–Грайса), явная конструкция которого приведена С. Нортоном [103].

Ввиду результатов Дж. Кулена, А. Юришича и П. Тервиллигера [84] параметры недвудольного антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4 удовлетворяют *фундаментальной границе*

$$\Big(\theta + \frac{b_0}{b_0 - b_1}\Big)\Big(\eta + \frac{b_0}{b_0 - b_1}\Big) \geq -\frac{b_0 b_1 (b_0 - b_1 - 1)}{(b_0 - b_1)^2},$$

где θ и η — максимальное и минимальное неглавные собственные значения графа Γ соответственно. При этом, если в фундаментальной границе для графа Γ достигается равенство, то граф Γ локально сильно регулярен и его массив пересечений зависит от трех параметров: неглавных собственных значений $p = -1 - b_1/(1 + \eta)$, $-q = -1 - b_1/(1 + \theta)$ локальных подграфов и размера r антиподального класса. В этом случае граф Γ называется *антиподальным плотным графом* диаметра 4 с параметрами (p, q, r) или просто *AT4(p, q, r)-графом.*

За исключением двух дистанционно-транзитивных антиподальных накрытий графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2,q^2)$ с $q=2,3$, графа Фостера $3.\mathrm{Sym}(6)$ и третьего графа Сойчера, все известные недвудольные антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 4 являются плотными (дистанционно-транзитивными) графами: граф Джонсона $J(8,4)$, половинный 8-куб $\frac{1}{2}H(8,2)$, граф Конвея-Смита $3.\mathrm{Sym}(7)$, граф $3.O_6^-(3)$, граф $3.O_7(3)$, граф $3.Fi_{24}$, графы Мейкснера, первый и второй графы Сойчера. Более того, кроме половинного 8-куба, все известные $\mathrm{AT4}(p,q,r)$-графы допускают квазипростую флаг-транзитивную группу автоморфизмов. В общем виде проблема классификации $\mathrm{AT4}(p,q,r)$-графов была поставлена в работе Кулена и Юришича [86], где были найдены некоторые комбинаторные характеризации таких графов и ограничения для их параметров (p,q,r). Впоследствии Юришичем [87] была выдвинута гипотеза о том, что, за исключением нескольких спорадических примеров, параметры каждого $\mathrm{AT4}(p,q,r)$-графа удовлетворяют одному из условий: (i) $q=p+2$; (ii) $q|p$. Особый интерес представляет собой исследование графов с $q=p+2$, так как в этом случае граф имеет нулевой параметр Крейна q_{44}^4 и вторая окрестность произвольной вершины в нем является недвудольным антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 4 [87, теорема 5.5]. А.А. Махнев и Д.В. Падучих [7] доказали, что $r>2$ в любом $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графе. Примером $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графа с $p=2$ является антиподальное 3-накрытие единственного графа ранга 3 с параметрами $(162,56,10,24)$, построенное Л. Сойчером (второй граф Сойчера) с помощью компьютера [114]. Он допускает флаг-транзитивное действие коммутанта одной из максимальных подгрупп спорадической группы Судзуки Suz, т.е. квазипростой группы вида $3_2.U_4(3)$ (в обозначениях из «Атласа конечных групп» [51]), и ввиду результата Броувера [41, теорема 11.4.6] характеризуется своим массивом пересечений. Вторая окрестность вершины в нем — (реберно симметричный, но не дистанционно-транзитивный) третий граф Сойчера (с массивом пересечений $\{32,27,8,1;1,4,27,32\}$) [114]. Существование $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графов с $p>2$ неизвестно, в частности, уже на протяжении 20 лет открытым является вопрос их существования даже для небольших допустимых значений параметра p (см., например, [86, 87] и [89]). Естественно возникает вопрос о том, какие группы могут действовать флаг-транзитивно на $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графе.

Один из подходов к решению данной задачи предполагает определение простого спектра группы автоморфизмов графа, т.е. множества простых делителей ее порядка. В диссертации установлено, что простой спектр группы автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графа в большой степени ограничивается строением его локальных подграфов. Как известно, локальные подграфы $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графа являются сильно регулярными графами с параметрами $\big((p+2)(p^2+4p+2),p(p+3),p-2,p\big)$ [86]. В диссертации исследована группа автоморфизмов сильно регулярного графа с такими параметрами, в частности, найдена верхняя граница для ее простого спектра. На основе этого результата получены существенные ограничения на простой спектр и строение группы автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графа в случае, когда p — степень простого числа. А именно, при данном условии: 1) показано, что простой спектр стабилизатора дуги в полной группе автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графа ограничен множеством $\{2,3,\dots,p\}$; 2) получена верхняя оценка для простого спектра полной группы автоморфизмов реберно симметричного AT4$(p, p+2, r)$-графа; 3) показано, что если степень вершины — произведение двух простых чисел, то стабилизатор вершины в полной группе автоморфизмов реберно симметричного AT4$(p, p+2, r)$-графа является почти простой группой. С применением этих результатов решен отрицательно вопрос существования реберно симметричных AT4$(p, p+2, r)$-графов с небольшим допустимым параметром $p \in \{5, 7, 11, 17, 27\}$. Кроме того, установлено, что сильно регулярные графы с параметрами $\big((p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), p-2, p\big)$ и $p = 5, 7$, вопрос существования которых открыт (см. [46, гл. 12] и [44]), не являются вершинно-транзитивными.

Цель и основные результаты диссертации. Цель диссертации состоит в изучении групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов при заданных ограничениях на строение графа или на действие группы на графе. Основные результаты диссертации таковы.

1. Классифицированы антиподальные дистанционно регулярные графы смежных классов диаметра 3 с $r > 2$ квазипростых групп $U_3(q)$, $SU_3(q)$, $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Найдены новые бесконечные семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, связанные с сериями простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Результат опубликован в статьях [146, 142].

2. Для каждой группы $G \in \{U_3(q), Sz(q)\}$, где $q = 2^n \geq 4$, доказано, что граф на множестве ее инволюций, в котором две вершины смежны, если порядок произведения соответствующих инволюций равен ассоциированному простому числу группы G в смысле Судзуки, дистанционно регулярен. Как следствие, для групп $U_3(2^n)$ решена задача описания графов S_3-инволюций, предложенная в [55]. Кроме того, для каждого $n \geq 2$ доказано, что граф S_3-инволюций группы $L_2(2^n)$ изоморфен дистанционно регулярному графу Мэтона степени 2^n с $\mu = 1$. Установлено, что несколько бесконечных семейств фактор-графов графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ принадлежат классу локально сильно регулярных графов. Результат опубликован в статьях [146, 142, 144]

3. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда G индуцирует почти простую 2-транзитивную группу подстановок на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Классифицированы графы Γ в почти простом случае. Результат опубликован в статьях [149, 141, 143].

4. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда G индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Показано, что за исключением одномерного случая $G^{\Sigma} \leq \mathrm{A\Gamma L}_1(|\Sigma|)$ и случая $\mu = 1$, при нечетном $|\Sigma|$ граф Γ является графом Таса-Соммы или графом Годсила-Хензеля. Результат опубликован в статьях [137, 145, 148].

5. Доказано, что антиподальное дистанционно регулярное накрытие диаметра 4 графа эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, группа автоморфизмов которого действует транзитивно на дугах и индуцирует группу ранга 3 на множестве его антиподальных классов, изоморфно

графу Уэлса или графу смежных классов укороченного тернарного кода Голея. Результат опубликован в статье [147].

6. Получены ограничения на простой спектр и строение группы автоморфизмов AT4(p, $p+2, r$)-графа в случае, когда p — степень простого числа. Доказано, что AT4($p, p+2, r$)-графы с $p = 5, 7, 11, 17, 27$ не являются реберно симметричными. Результат опубликован в статьях [139, 140, 136].

7. Исследован класс абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 со свойством $(*)$: Γ обладает транзитивной группой автоморфизмов G, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ антиподальных классов графа. Классифицированы графы со свойством $(*)$ при условии, что цоколь группы G^{Σ} — спорадическая простая группа ранга 3. Результат опубликован в статье [135].

Результаты диссертации опубликованы в статьях [135]–[149] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результаты в пунктах 1, 2, 6 и 7 получены автором лично. Результаты в пунктах 3 и 4 получены в соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих, при этом вклад автора диссертации является решающим. Результат из пункта 5 получен в неразделимом соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих.

Новизна и научная значимость работы. В диссертации изучаются (в основном, транзитивные и флаг-транзитивные) группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов при заданных ограничениях на строение группы или графа. Наиболее значительный результат диссертации — классификация флаг-транзитивных групп автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в аффинном и почти простом случаях, а также открытие бесконечных семейств реберно-симметричных дистанционно регулярных графов, связанных с сериями простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Важным инструментом этой работы стали разработанные автором методы локального анализа графов смежных классов простых групп с (B, N)-парой ранга 1, использующие каноническую форму элементов и классические результаты Судзуки о структурных уравнениях в таких группах, а также способ определения допустимых групп автоморфизмов в аффинном случае, основанный на редукции к графам, у которых порядок накрывающей группы имеет одно из экстремальных значений.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры и алгебраической комбинаторики.

Методы исследования. При исследовании дистанционно регулярных графов и их автоморфизмов в работе применяются методы теории конечных групп, теории представлений групп, методы локального анализа и спектральной теории графов, а также оригинальные методы, разработанные автором. Кроме того, в работе в ряде специальных случаев привлекались компьютерные вычисления в GAP [59] и Magma [38] для перебора орбитальных графов групп подстановок.

Апробация результатов. Основные результаты работы были представлены на Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2013, 2014, 2016–2021), в том числе в 2017 году в виде пленарного доклада по теме диссертации, Международной конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.Д. Мазурова (Новосибирск, 2013), Международной конференции по алгебре и комбинаторике, посвященной 60-летию А.А. Махнева (Екатеринбург, 2013), 37-й и 43-й Австралазиатских комбинаторных конференциях (Австралия, 2013, 2021), 44–49 Всероссийских молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2013–2021), Международной школе-конференции «Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей» (Новосибирск, 2014), Международной конференции «Алгебра и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения Л.А. Калужнина (Нальчик, 2014), Международной школе-конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.В. Кабанова (Нальчик, 2014), Международной конференции «Graph Theory, Matrix Theory and Interactions» (Кингстон, Канада, 2014), Международных конференциях серии G2 (Екатеринбург, 2015, 2017, Новосибирск, 2016), Международной конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 2019), Восьмой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, 2020), Конференции молодых ученых «Ломоносов–2021» (Москва, 2021), Канадской конференции по дискретной и алгоритмической математике «CanaDAM 2021» (Канада, 2021), 8-м Европейском математическом конгрессе (Порторож, Словения, 2021), 28-й Британской комбинаторной конференции «BCC 2021» (Дарем, Великобритания, 2021), Международной конференции по комбинаторным дизайнам и кодам «CDC 2021» (Риека, Хорватия, 2021), Конференции международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021).

Результаты работы докладывались и обсуждались на алгебраическом семинаре ИММ УрО РАН, на заседании Уральского математического общества, на семинарах ИМ СО РАН и НГУ «Теория групп» и «Алгебра и логика», на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры МГУ, на семинаре лаборатории математической логики ПОМИ РАН, на семинаре «Incidence Geometry» математического факультета Гентского университета, а также отмечены премией Уральского математического общества молодым математикам за 2013 год и премией Губернатора Свердловской области для молодых ученых за 2016 год в номинации «За лучшую работу в области математики».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 217 страницах, библиография содержит 150 наименований. Перейдем к более подробному изложению работы.

Обзор содержания диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разделена на главы, которые разбиваются на параграфы, а параграфы, в свою очередь, разделены на подпараграфы. Формулировки основных теорем продублированы во введении. Все утверждения в нумерованных главах имеют имеют двойную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер утверждения в текущей главе. Все таблицы имеют одинарную сквозную нумерацию.

Глава 1 диссертации имеет вспомогательный характер. В ней приведены основные используемые определения и обозначения, изложены необходимые базовые результаты из теории групп подстановок, теории представлений, теории чисел и алгебраической теории графов (в том числе, конструкции реберно симметричных графов и дистанционно регулярных графов).

В **главе 2** получена классификация реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда транзитивная на дугах группа автоморфизмов G графа Γ индуцирует аффинную группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ его антиподальных классов.

В § 2.1 с применением т.н. метода Хигмена исследования групп автоморфизмов дистанционно регулярного графа найдены общие формулы для характеров мономиального матричного представления группы автоморфизмов антиподального д.р.г. диаметра 3 с $\lambda \neq \mu$. С помощью этих формул далее в § 2.1 определены (см. леммы 2.8, 2.9) собственные значения и допустимые массивы пересечений антиподального д.р.г. диаметра 3 на v вершинах, который обладает автоморфизмом g одного из двух специальных типов: (i) $\alpha_2(g) = v$ или (ii) $\alpha_3(g) = v$.[2]

Как известно, если $\widetilde{G}$ — конечная 2-транзитивная группа подстановок на множестве степени n и цоколь N группы $\widetilde{G}$ — абелева группа, то $\widetilde{G}$ подстановочно изоморфна подгруппе из $\mathrm{A\Gamma L}_d(q)$ для некоторых d и $q = p^c$, где p — простое, и $n = q^d = |N|$. В свою очередь, каждая подгруппа $\widetilde{G} \leq \mathrm{A\Gamma L}_d(q)$ 2-транзитивна на векторах соответствующего векторного пространства тогда и только тогда, когда стабилизатор нулевого вектора $\widetilde{G}_0 \leq \mathrm{\Gamma L}_d(q)$ действует транзитивно на ненулевых векторах. Аффинные 2-транзитивные группы подстановок с неразрешимым стабилизатором точки были классифицированы в работе К. Геринга [74]. Они включают три бесконечных семейства групп *линейного, симплектического* или G_2- типа (при этом $(\widetilde{G}_0)^{\infty}$ является транзитивной линейной группой), а также спорадические примеры для $d = 2, 4, 6$ *исключительного* или *экстраспециального* типов. Разрешимые конечные 2-транзитивные группы подстановок были описаны Б. Хуппертом (см. [76]) и включают бесконечное семейство групп *одномерного* типа и небольшое число других примеров экстраспециального типа. Более подробное описание можно найти в [79, гл. XII, § 7.3, § 7.5].

На основе классификации конечных 2-транзитивных групп подстановок в § 2.2 установлены базовые свойства группы G, в том числе, исследована ситуация, когда G содержит нормальную подгруппу порядка $|\Sigma|$ (в этом случае оказывается, что граф Γ обладает автоморфизмом типа (ii)). В § 2.2 также доказано, что либо K действует регулярно на антиподальном классе (в этом случае граф Γ обладает автоморфизмом типа (i)) и для вершины a графа Γ и подгруппы $T = O_p(G)$, где p — простой делитель числа $|\Sigma|$, группа

[2]Здесь и далее для автоморфизма h графа Γ через $\alpha_s(h)$ обозначается число $|\{x \in V(\Gamma) \mid d(x, x^h) = s\}|$.

G_a изоморфна стабилизатору точки в G^Σ и $G = T : G_a$, либо $K = 1$ и граф Γ изоморфен одному из двух различных графов, которые могут быть получены путем удаления спреда из геометрического или псевдогеометрического графа для обобщенного четырехугольника $\mathrm{GQ}(5, 3)$ (второй (негеометрический) граф построен в [43]).

В § 2.3 и § 2.4 исследуются графы с $K > 1$ соответственно для $p = 2$ и для $p > 2$. В этих параграфах развит метод исключения допустимых вариантов строения группы $T : G_a$, основанный на результатах § 2.2 и классификации конечных 2-транзитивных групп подстановок. С его помощью для неразрешимой группы G_a изучено ее (как правило, модулярное) представление на $T/\Phi(T)$, индуцированное действием на T, найдены достаточно сильные ограничения на G и массив пересечений графа Γ, в частности, для $p = 2$ исключен случай $\Phi(T) > 1$, а для $p > 2$ доказано, что T — специальная группа с центром K. Для разрешимой группы G_a, которая, в большинстве случаев, изоморфно вкладывается в $\Gamma\mathrm{L}_1(|\Sigma|)$, также найдены дополнительные ограничения на строение группы G и массив пересечений графа Γ.

В § 2.5 доказано, что при $p > 2$ в каждом случае для G_a, указанном в качестве допустимого в § 2.4, кроме одномерного, граф Γ известен и может быть построен с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля.

Основные результаты **главы 2** представлены в теоремах 2.1, 2.2, 2.3 и следствии 2.4.

Теорема 2.1. *Предположим, что группа G действует транзитивно на дугах антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, где $r \notin \{2, k, (k-1)/\mu\}$, и индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок G^Σ на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Пусть K — ядро действия G на Σ, $F \in \Sigma$, $a \in F$, $H = G_{\{F\}}$, $C = C_{G_a}(K)$, $|\Sigma| = p^e$, где p — простое число, и T — полный прообраз цоколя группы G^Σ в G. Если $p = 2$, то либо $K = 1$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, либо $|K| = r$, $r\mu = k + 1 = 2^e$, $\mu > 1$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$R = \mathrm{GL}_1(2^e) \cap G_a \trianglelefteq G_a \le \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, G_a содержит подгруппу B нечетного порядка, которая содержит R и действует транзитивно на $[a]$, и выполняются следующие утверждения:*

(*i*) *если T содержит нормальную в G подгруппу порядка 2^e, то $K = E_r, r = \mu = 2^{e/2}$, H действует 2-транзитивно на F, T — элементарная абелева или специальная группа порядка $2^{e+e/2}$, $C_K(R) = 1$, $C_R(K) = \langle \tilde{h} \rangle > 1$, $\alpha_1(\tilde{h}) = |R|2^{e/2+1}w$ и $0 \le w \le (e, 2^e - 1)/2$, в частности, если $|R| = 2^e - 1$, то $\alpha_1(\tilde{h}) = 0$ и группа $R/C_R(K)$ действует регулярно на $F - \{a\}$;*

(*ii*) *если $C_R(K) = 1$, то $\Phi(K) = 1, e = 6$ и $r = 32$;*

(*iii*) *если $C_R(K) > 1$, то $|C_R(K)| > 2^{e/2}/(e, 2^e - 1)$, $r \le 2^{e/2} \le \mu$ и $C_T(R) \le K \le Z(T)$, а если к тому же $\Phi(T) < K$ и $B \le C_G(K)$, то $\Phi(T) = 1$, группа T содержит нормальную в TB подгруппу порядка 2^e и Γ — граф из п. (*i*) выше;*

(2) *$e = 2dc$, $d \ge 1$, r делит 2^c, T — элементарная абелева группа порядка $2^e r$, не*

содержащая нормальных в G подгрупп порядка 2^e, $Sp_{2d}(2^c) \trianglelefteq G_a$ или $d = 3$ и $G_2(2^c) \trianglelefteq G_a$.

Теорема 2.2. *В предположениях и обозначениях из теоремы 2.1, а также при условии, что $p > 2$ и $\mu > 1$, имеем $|K| = r$, $r\mu = k + 1 = p^e$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *реализуется экстраспециальный случай, $r = p$, T — экстраспециальная группа порядка rp^e и экспоненты p и либо*

(*i*) $p^e = 3^4$, $Q_8 \circ D_8 \simeq R_0 \trianglelefteq C$, $G_a/R_0 \leq S_5$ *и* 5 *делит* $|G_a|$, *либо*

(*ii*) $p^e = 5^2$, $\mathrm{SL}_2(3) \leq C, G_a \leq \mathrm{SL}_2(3).Z_4$, *либо*

(*iii*) $p^e = 7^2$, $\mathrm{SL}_2(3) \leq C, \mathrm{SL}_2(3).Z_2 \leq G_a \leq \mathrm{SL}_2(3).Z_6$, *либо*

(*iv*) $p^e = 11^2$, $C \simeq \mathrm{SL}_2(3)$, $G_a \simeq Z_5 \times \mathrm{SL}_2(3)$ *или* $Z_5 \times \mathrm{GL}_2(3)$, *либо*

(*v*) $p^e = 23^2$, $G_a \simeq Z_{11} \times (\mathrm{SL}_2(3).Z_2)$, $C \simeq \mathrm{SL}_2(3)$ *или* $\mathrm{SL}_2(3).Z_2$;

(2) *реализуется исключительный случай и* $G_a \trianglerighteq S \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ *при* $k \neq 728$ *и* $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(13)$ *при* $k = 728$, T — *специальная группа порядка* rp^e *и экспоненты* p *и либо*

(*i*) $p^e = 3^6$, $r = 3$, $C = G_a \simeq \mathrm{SL}_2(13)$, *либо*

(*ii*) $p^e = 9^2$, $r \in \{3, 9\}$, $G_a/S \leq D_8$, $S \leq C$, *либо*

(*iii*) $p^e = 11^2$, $r = 11$, $S = C$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ *или* $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{10}$, *либо*

(*iv*) $p^e = 19^2$, $r = 19$, $S \leq C$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{18}$, *либо*

(*v*) $p^e = 29^2$, $r = 29$, $S \leq C$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{14}$ *или* $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{28}$, *либо*

(*vi*) $p^e = 59^2$, $r = 59$, $S = C$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{58}$;

(3) *реализуется одномерный случай,* $R = G_a \cap \mathrm{GL}_1(p^e) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *и либо*

(*i*) $e > 4$, $r \geq p^{e/2}$, T — *специальная группа порядка* rp^e *и экспоненты* p, *и* R *не нормализует подгрупп индекса* p *в* K, *либо*

(*ii*) $e = 4$, $r = p^2 = \mu$, T — *специальная группа порядка* p^6, *группа* R *действует полурегулярно на* $[a]$ *и группа* $R/C_R(K)$ *действует полурегулярно на* $F - \{a\}$, *либо*

(*iii*) $e = 4, p = 3$, T — *специальная группа порядка* rp^4 *и* $R \leq N_G(K_1)$, *где* K_1 — *подгруппа индекса* p *в* K, $|R| = 20$, $G_a \simeq Z_5 : Z_{16}$ *и* $|R/C_R(K)| \leq 2$, *либо*

(*iv*) $e = 2$, $r = p$, T — *экстраспециальная группа экспоненты* p *и* $G_a \leq \mathrm{GL}_2(p)$, *либо*

(*v*) $e = 2$, $3 < r = p$ — *простое число Мерсенна,* T — *абелева группа и* $C_T(G_a) = 1$;

(4) *реализуется симплектический случай,* $e = 2dc$, $d \geq 1$, r *делит* p^c, $Sp_{2d}(p^c) \trianglelefteq G_a$, T — *специальная группа порядка* rp^{2dc} *и экспоненты* p.

Теорема 2.3. *Пусть* Γ — *это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 3, *удовлетворяющий условиям из пп. 1, 2, 4 или условию* $\mathrm{GL}_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *при* $e = 2$ *из п. 3(iv) заключения теоремы 2.2. Тогда граф* Γ *изоморфен дистанционно регулярному графу, получаемому с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля.*

Следствие 2.4. *Если в теореме 2.2 вместо условия* $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *предполагать, что* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *то графы из пп. 1 и 2, а также граф со свойством* $\mathrm{GL}_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *для* $e = 2$ *из п. 3(iv) заключения теоремы 2.2 не существуют.*

Результаты **главы 2** опубликованы в статьях [148, 145, 137]. Статья [148] написана в неразделимом соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих. Отметим, что в [148] были получены необходимые условия существования реберно симметричного антиподального д.р.г. диаметра 3 при том условии, что его полная группа автоморфизмов индуцирует аффинную группу подстановок на множестве его антиподальных классов. Но в доказательствах ряда локальных утверждений из [148] были допущены некоторые неточности. В работе [137] они были устранены и приведен исправленный вариант основной теоремы из [148]. Подчеркнем, что в отличие от работы [148], где проводилось описание пар (Γ, G) при условии $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, в [137] была исследована также возможность $G < \mathrm{Aut}(\Gamma)$, при этом применялась схема доказательства и часть вспомогательных утверждений из [148]. Этот результат представлен в теоремах 2.1 и 2.2. В работах [137] и [145] получены теорема 2.3 и следствие 2.4.

В **главе 3** классифицируются антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 с квазипростой флаг-транзитивной группой автоморфизмов, изоморфной группе $L_2(q)$, $U_3(q)$, $SU_3(q)$, $Sz(q)$ или ${}^2G_2(q)$. В [19] были приведены необходимые условия существования трех бесконечных семейств реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, отвечающих бесконечным сериям простых групп $U_3(q)$, $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Несмотря на то, что существование подходящих реберно симметричных претендентов обеспечивалось конструкцией графов смежных классов, вопрос, являются ли эти графы дистанционно регулярными или нет (за исключением некоторых примеров для малых значений q, которые были построены авторами [19] с помощью компьютерной системы GAP [59]), оставался открытым.

В § 3.1 доказано, что в некоторых случаях эти реберно симметричные графы в самом деле являются дистанционно регулярными. А именно, доказана теорема 3.1, в которой представлены два бесконечных семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, связанных с группами Судзуки $Sz(q)$ и группами Ри ${}^2G_2(q)$, где $q = 2^{2n+1} > 2$ или $q = 3^{2n+1} > 3$ соответственно. Эти семейства дистанционно регулярных графов были впервые открыты автором диссертации в [146]. Предложенный в [146] метод доказательства дистанционной регулярности графов смежных классов групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$ также оказался новым. Он основан на изучении канонической формы элементов в данных группах, которая в свою очередь, определяет локальное строение этих графов.

Теорема 3.1. *Пусть $G \in \{Sz(q), {}^2G_2(q)\}$, где q — степень простого числа p, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $q > 3$. Пусть g — это инволюция из $G - N_G(S)$, $\langle h\rangle$ — это подгруппа нечетного индекса $r > 1$ из $N_G(S) \cap N_G(S)^g$ и $H = S\langle h\rangle$. Тогда $\Gamma(G, H, HgH)$ — это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

(1) $\{q^2, (q^2-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^2-1)/r, q^2\}$ *при $G = Sz(q)$, или*

(2) $\{q^3, (q^3-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$ *при $G = {}^2G_2(q)$,*

и $\Gamma(G, H, HgH)$ не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции $g \in G - N_G(S)$.

Далее в § 3.1 для группы G и ее подгруппы H, определенных как в теореме 3.1 для $r = (q-1)_{2'}$, исследована шурова схема отношений группы G на множестве ее правых смежных классов по H. Оказывается, что граф некоторого базисного отношения этой схемы эквивалентен графу смежных классов из заключения теоремы 3.1 для данных G и r. Там же определены ее числа пересечений и получено доказательство дистанционной регулярности такого графа как следствие найденных свойств схемы (см. теорему 3.2). Эти результаты опубликованы в [138].

В § 3.2 доказана теорема 3.3, в которой классифицируются антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 с $r > 2$, которые допускают флаг-транзитивное действие группы $SU_3(q)$. Этот результат получен в работе автора диссертации [142] с применением модификации метода анализа графов смежных классов, разработанного для доказательства теоремы 3.1 в [146].

Теорема 3.3. *Предположим, что группа $G \in \{U_3(q), SU_3(q)\}$, где q — степень простого числа p, действует флаг-транзитивно на антиподальном дистанционно регулярном графе Γ диаметра 3 с индексом антиподальности $r > 2$. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и H — это подгруппа из $N_G(S)$ индекса r. Пусть g — это 2-элемент из $G - N_G(S)$ такой, что $g^2 \in H$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей.*

(1) *r делит $q+1$, $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, Γ имеет массив пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$ и g — инволюция при четном q или элемент порядка 4 при нечетном q.*

(2) *r — нечетный делитель числа $q-1$, $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, Γ имеет массив пересечений $\{q^3, (q^3-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$ и g — инволюция.*

Также в § 3.2 были найдены все допустимые q и r, при которых дистанционно регулярный граф смежных классов из заключения теоремы 3.3 существует для данной группы G.

Одним из следствий теорем 3.1 и 3.3 является предложение 3.4, доказываемое в § 3.3. В нем классифицированы графы $D_{2\cdot\chi(G)}$-инволюций группы $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$, где $q = 2^n > 2$ и

$$\chi(G) = \begin{cases} 5, & \text{если } G = Sz(q) \\ 3, & \text{если } G \in \{L_2(q), U_3(q)\} \end{cases}.$$

В статье М. Джудичи и Э. Девиллерс [55] была предложена задача описания графов S_3-инволюций конечных простых групп и исследованы графы S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ (см. [55, теоремы 3.11, 3.12]). Предложение 3.4 существенно уточняет эти результаты и решает указанную задачу в случае $G = U_3(2^n)$.

Предложение 3.4. *Пусть $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$, $q = 2^n > 2$ и Δ — это орбитал группы G на множестве Ω ее инволюций, содержащий точку (x_1, x_2) такую, что $[x_1, x_2] \neq 1$. Тогда граф Γ на Ω, в котором вершины y_1 и y_2 смежны тогда и только тогда, когда $(y_1, y_2) \in \Delta$, является реберно симметричным антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений*

(1) $\{q^3, q^3-q^2-q-2, 1; 1, q^2+q+1, q^3\}$ *при* $G = U_3(q)$,

(2) $\{q^2, q^2-q-2, 1; 1, q+1, q^2\}$ *при* $G = Sz(q)$, *или*

(3) $\{q, q-2, 1; 1, 1, q\}$ *при* $G = L_2(q)$ (*в этом случае* Γ *изоморфен графу Мэтона* $\mathrm{M}(q, q-1)$ (*с таким же массивом пересечений*)),

и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора точки (x_1, x_2). *В частности, граф* Γ *изоморфен графу на* Ω, *в котором вершины* y_1 *и* y_2 *смежны тогда и только тогда, когда* $|y_1y_2| = \chi(G)$ (*что эквивалентно тому, что* $\langle y_1, y_2\rangle \in \mathcal{S}$, *где* $\mathcal{S}$ — (*единственный*) *класс сопряженных диэдральных подгрупп порядка* $2\cdot\chi(G)$ *группы* G).

Отметим, что результат предложения 3.4 для групп $G = L_2(q)$ был ранее частично доказан в [22], но изоморфизм $\Gamma \simeq \mathrm{M}(q, q-1)$ показан именно в работе [142] автора диссертации. Таким образом, как видно из предложения 3.4, внутренняя геометрия (на классе инволюций) каждой простой группы G из бесконечных серий групп $L_2(2^n)$, $U_3(2^n)$, $Sz(q)$ выразима с помощью антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3. Предложение 3.4 также может быть полезным при исследовании других графов на классе инволюций группы G, например, ее графов π-локального слияния (см. [31]).

Далее в § 3.3 представлены некоторые похожие конструкции графов на множестве Ω неединичных элементов из центров силовских p-подгрупп группы $G \in \{{}^2G_2(q), U_3(q)\}$, где $q > 3$ — это степень простого нечетного числа p и $q \equiv 3 \pmod 4$, эквивалентные конструкциям дистанционно регулярных графов из теорем 3.1 и 3.3. Для каждого элемента $x \in \Omega$ пару элементов $\{x, x^{-1}\}$ будем называть *инверсной* и обозначать через $\omega(x)$. Пусть $S, Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $S \neq Q$, $x \in S\cap\Omega$ и $y \in Q\cap\Omega$. Упорядоченную пару элементов (x, y) будем называть *s-отличимой*, если y — это единственный элемент из $\Omega\cap Q$ со свойством $|xy| = s$.

Предложение 3.5. *Пусть* $G \in \{U_3(q), {}^2G_2(q)\}$, $q > 3$, $q \equiv 3 \pmod 4$ *и* Δ — *орбитал группы* G *на* Ω, *содержащий точку* (x_1, x_2) *такую, что* $[x_1, x_2] \neq 1$. *Тогда граф* Γ *на множестве инверсных пар группы* G, *в котором вершины* $\omega(y_1)$ *и* $\omega(y_2)$ *смежны тогда и только тогда, когда* Δ *содержит* (y_1, y_2) *или* (y_1, y_2^{-1}), *является реберно симметричным антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений*

$$\{q^3, q^3-2q^2-2q-3, 1; 1, 2(q^2+q+1), q^3\}$$

и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора точки (x_1, x_2). *Кроме того, если* (x_1, x_2) — *это s-отличимая пара, то вершины* $\omega(y_1)$ *и* $\omega(y_2)$ *смежны в* Γ *тогда и только тогда, когда* $|y_1y_2| = s$ *или* $|y_1y_2^{-1}| = s$.

Там же показано, что для минимальных значений q группа G из предложения 3.5 обладает s-отличимой парой в случаях, если $G = {}^2G_2(27)$ и $s = 9$, или $G = U_3(7)$ и $s \in \{3, 4, 6, 14\}$. Эти результаты **главы 3** опубликованы в статьях [146, 142].

В § 3.4 исследовано локальное строение графов Мэтона четной степени (которые ввиду предложения 3.4 являются фактор-графами графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$) и выделены несколько бесконечных серий локально Δ-графов из этого семейства графов, где Δ — это сильно регулярный граф, являющийся объединением аффинно полярных графов типа “-” (изоморфных графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$), псевдогеометрический граф для $pG_l(s, l)$ или граф ранга 3, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта–Шрайвера.

Теорема 3.6. *Пусть $q = 2^{2t} > 2$, $t \in \mathbb{N}$ и r — это нееденичный делитель числа $q-1$. Пусть $\mathrm{M}(q, r)$ — это граф Мэтона с массивом пересечений $\{q, (r-1)(q-1)/r, 1; 1, (q-1)/r, q\}$ и Δ — это локальный подграф графа $\mathrm{M}(q, r)$. Тогда Δ — это реберно симметричный граф и справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если r делит $2^t + 1$, то либо*

   (*i*) *$r = 2^t + 1$ и Δ — объединение 2^t изолированных 2^t-клик, либо*

   (*ii*) *$r < 2^t + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^t+1)(2^t-1)/r, ((2^t+1)/r-1)((2^t+1)/r-2)+2^t-2, (2^t+1)/r((2^t+1)/r-1)\big).$$

(2) *Если t четно и r делит $2^{t/2} + 1$, то либо*

   (*i*) *$r = 2^{t/2} + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^{t/2}-1)(2^t+1), 2^{t/2}-2, 2^{t/2}(2^{t/2}-1)\big),$$

   изоморфный аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$, либо

   (*ii*) *$r < 2^{t/2} + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, z(2^{t/2}-1)(2^t+1), z(2^{t/2}-1)(3+z(2^{t/2}-1))-2^t, z(2^{t/2}-1)(1+z(2^{t/2}-1))\big),$$

   являющийся объединением $z = (2^{t/2}+1)/r$ графов, изоморфных аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$.

(3) *Если r — простой делитель числа $q-1$, 2 — примитивный элемент по модулю r и $(r-1)$ делит $2t$, то Δ — сильно регулярный граф (ранга 3) с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^{2t}-1)/r, (2^{2t}-3r+1+\epsilon(r-1)(r-2)2^t)/r^2, (2^{2t}-r+1-\epsilon(r-2)2^t)/r^2\big),$$

где $\epsilon = (-1)^{2t/(r-1)+1}$, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта–Шрайвера.

В § 3.4 также доказана характеризуемость некоторых графов Мэтона своими массивами пересечений в классе вершинно-транзитивных графов.

Теорема 3.7. *Пусть Γ — вершинно-транзитивный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{n-1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, n-1\}$ и $n = rc_2+2$ — простое число Ферма. Если число r — простое, то граф Γ изоморфен графу Мэтона (с тем же массивом пересечений).* Эти результаты опубликованы в статье [144].

В § 3.5 исследуется вопрос о единственности реберно симметричного антиподального д.р.г. диаметра 3 с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ (существование такого графа следует из результатов § 3.2). Этот вопрос представляет отдельный интерес для последующей классификации реберно симметричных антиподальных д.р.г. диаметра 3, проводимой в **главе 4**. Так, в § 3.5 доказано предложение 3.8, характеризующее автоморфизмы простых порядков гипотетического д.р.г. с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, и с его помощью — теорема 3.9, которая дает положительное решение указанного вопроса.

Теорема 3.9. *Пусть* Γ *— реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Пусть* $U = U_3(3)$, $S, Q \in \mathrm{Syl}_3(U), S \neq Q$, $L = N_U(S) \cap N_U(Q)$ *и* g *— это элемент порядка 4 из* $N_U(L) - L$. *Положим* $H = S\langle g^2\rangle$. *Тогда* $\Gamma \simeq \Gamma(U, H, HgH)$ *и* $G'' \simeq U$.

Этот результат опубликован в статье [149]. Все результаты **главы 3** получены автором лично.

В **главе 4** завершена классификация реберно симметричных антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3 в почти простом случае для $\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma$. Для этого, с учетом результатов **главы 3** и работ [19, 124] оставалось классифицировать графы Γ с $r \notin \{2, k\}$, $\lambda \neq \mu$ и $\mu > 1$. Соответствующий результат представлен в теореме 4.1.

Теорема 4.1. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, *где* $r \notin \{2, k\}$ *и* $\lambda \neq \mu$. *Пусть* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, Σ *— это множество антиподальных классов графа* Γ *и* G^Σ *— это группа подстановок, индуцируемая группой* G *на* Σ. *Предположим, что цоколь* $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ *группы* G^Σ *является простой неабелевой группой. Тогда* $\mathrm{Soc}(G^\Sigma) \simeq U_3(q)$ *и* G *содержит нормальную подгруппу, изоморфную группе* $U_3(q)$ *или* $SU_3(q)$, *которая действует транзитивно на дугах графа* Γ, $k = q^3$, $\mu = (q+1)(q^2-1)/r$ *и* r *делит* $q+1$.

В § 4.1 – § 4.3 теорема 4.1 доказывается при условии, что пара $(\mathrm{Soc}(G^\Sigma), |\Sigma|)$ отлична от $(L_d(q), \dfrac{q^d-1}{q-1})$, где $d \geq 3$. В § 4.1 и § 4.2 с применением теоремы 3.3 и методов ее доказательства для $K := \mathcal{CG}(\Gamma)$ рассмотрены случаи $K = 1$ и $1 < |K| < r$ соответственно. В § 4.3 исследован случай $|K| = r$. Для доказательства теоремы 4.1 в этом случае строение группы G удается восстановить по $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ в наиболее частой ситуации, когда $|K|$ не превосходит степени минимального подстановочного представления группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ и мультипликатор Шура группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ является циклическим. При этом оказывается, что полный прообраз группы $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ в G является произведением подгруппы K и нормальной компоненты L группы G, являющейся накрывающей группой для $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$. С учетом результатов классификации минимальных подстановочных представлений конечных простых 2-транзитивных групп (см. [14, 13]) и классификации их мультипликаторов Шура (см. [10]), дальнейшие рассуждения удается свести к рассмотрению случая $\mathrm{Soc}(G^\Sigma) \simeq U_3(q)$, в котором $L \simeq U_3(q)$ или $SU_3(q)$.

Этот результат получен совместно с Махневым А.А. и Падучих Д.В. и опубликован в статье [141], при этом вклад автора диссертации решающий.

Случай $(\mathrm{Soc}(G^\Sigma), |\Sigma|) = (L_d(q), \dfrac{q^d-1}{q-1})$, где $d \geq 3$, потребовал отдельного рассмотрения и был исключен в § 4.4. Этот результат получен совместно с Махневым А.А. с превалирующим вкладом автора диссертации и опубликован в статье [143].

В итоге, комбинация результатов **глав 3**, **4**, [124, теорема 2], [19, теорема] и [40, предложение 12.5.3] дает теорему 4.2, представленную в [150, теорема 2.4.1].

Теорема 4.2. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$*, где* $r\notin\{2,k\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* Σ *— это множество антиподальных классов графа* Γ*. Предположим, что цоколь* $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$ *группы подстановок* G^Σ*, индуцируемой группой* G *на* Σ*, является простой неабелевой группой. Тогда* G *содержит нормальную подгруппу, накрывающую для* $\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$*, которая действует транзитивно на дугах графа* Γ*, и четверка* $(\mathrm{Soc}(G^\Sigma),k,r,\mu)$ *одна из следующих:*

(1) $(L_2(q),q,r,\frac{q-1}{r})$*, где* $q\geq 4$*, число* r *делит* $\frac{q-1}{(2,q-1)}$ (Γ *— граф из конструкции Мэтона* [40, предложение 12.5.3])*;*

(2) $(U_3(q),q^3,r,\frac{q^3-1}{r})$*, где* $q\geq 4$*, число* r *нечетно и делит* $q-1$ (Γ *— граф из конструкции Броувера [41, предложение 12.5.4], см. также теорему 3.3*)*;*

(3) $(Sz(q),q^2,r,\frac{q^2-1}{r})$*, где* $q\geq 8$*, число* r *делит* $q-1$ (*см. теорему 3.1*)*;*

(4) $({}^2G_2(q),q^3,r,\frac{q^3-1}{r})$*, где* $q\geq 27$*, число* r *делит* $\frac{q-1}{2}$ (*см. теорему 3.1*)*;*

(5) $(U_3(q),q^3,r,\frac{(q+1)(q^2-1)}{r})$*, где* $q\geq 3$*, число* r *делит* $\frac{q+1}{(2,q+1)}$ (Γ *— граф из конструкции Камерона [47, предложение 5.1], см. также теорему 3.3*)*;*

(6) $(U_3(q),q^3,r,\frac{(q+1)(q^2-1)}{r})$*, где* $q\geq 3$*, число* r *делит* $q+1$*, а числа* q *и* $(q+1)/r$ *нечетны* (*см. теорему 3.3*)*;*

Для каждой фиксированной допустимой четверки $(\mathrm{Soc}(G^\Sigma),k,r,\mu)$ *граф* Γ *существует и является единственным* (*с точностью до изоморфизма*)*.*

Глава 5 посвящена исследованию групп автоморфизмов графов Γ со свойством $(*)$. Мы будем говорить, что абелев недвудольный антиподальный д.р.г. Γ диаметра 3 является *минимальным* и имеет *тип* (Tx), а также обозначать его через $\Gamma(\widetilde{G},X,K)$, где $K:=\mathcal{CG}(\Gamma)\leq X\leq\widetilde{G}\leq\mathrm{Aut}(\Gamma)$, если группа K элементарная абелева, группа $\widetilde{G}$ транзитивна на вершинах и индуцирует примитивную почти простую группу подстановок на множестве антиподальных классов с цоколем T такую, что $T\simeq X/K$ и тройка $(\widetilde{G},X,K)$ удовлетворяют условию (Tx) из следущего списка:

(T1) либо (i) $X=K\times X'$ и $X'\simeq T$, либо (ii) X — квазипростая группа с центром K;

(T2) T действует точно на K.

В § 5.1 доказывается предложение 5.1, которое позволяет свести классификацию абелевых графов Γ со свойством (∗) к рассмотрению соответствующих им минимальных графов. В § 5.2 устанавливаются некоторые общие свойства абелевых графов Γ со свойством (∗) при условии $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 3$ и доказывается теорема 5.3, которая дает ограничения на спектр и параметры графа Γ, множество вершин или ребер которого допускает некоторые равномерные разбиения на орбиты подгрупп из G. § 5.3 посвящен описанию минимальных абелевых графов Γ со свойством (∗) при условии, что $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 3$ (предложения 5.4 и 5.6). Сначала в § 5.3 доказывается, что если полный прообраз группы $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ в G не является квазипростой группой, то выполнено хотя бы одно из следующих утверждений: (i) Γ имеет вершинно-транзитивную группу автоморфизмов, изоморфную группе $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$, (ii) Γ является графом Тейлора (и его параметры k, r и μ могут быть выражены при помощи параметров графов ранга 3, ассоциированных с G^{Σ}), (iii) $\mathrm{rk}(\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})) > 3$, ($iv$) степень $\mathrm{d_{min}}(\mathrm{Soc}(G^{\Sigma}))$ минимального подстановочного представления группы $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ не превосходит числа r. Вместе с тем приводится ряд примеров минимальных графов $\Gamma(G, X, K)$ типа (T1). Затем уточняется строение группы $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$, а также параметры и спектр графа Γ при условии, что группа G квазипроста. Поскольку перечисленные результаты слишком многочисленны и требуют введения объемных технических определений, мы ограничимся лишь изложением основных следствий из них, полученных в диссертации. Так, с применением методов исследования абелевых антиподальных д.р.г. диаметра 3, предложенных в § 5.1 – § 5.3, в заключительном § 5.4 классифицированы абелевы графы Γ со свойством (∗) при условии, что $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 3$ и $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ является спорадической простой группой (теорема 5.7 и следствие 5.9). Сформулируем основные утверждения из § 5.4.

Теорема 5.7. *Предположим, что* $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, X, K)$ *является абелевым минимальным антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ *и* $\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^{\Sigma})$ *— спорадическая простая группа. Тогда* $K = Z(X)$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

($S1$) X' *действует интранзитивно на вершинах графа* Γ, $\widetilde{G} = X$, $X' \simeq M_{22}$, $k = 175$, $r = 2$, Γ *— дистанционно-транзитивный граф Тейлора с* $\mu \in \{72, 102\}$ *и* $\mathrm{Aut}(\Gamma) = HiS \times K$;

($S2$) X *— квазипростая группа,* $r = 2$ *и либо* $X = Z_2.M_{22}$, $k = 175$ *и* $\{\lambda, \mu\} = \{72, 102\}$, *либо* $X = Z_2.Fi_{22}$, $k = 3509$ *и* $\{\lambda, \mu\} = \{1600, 1908\}$.

Граф Тейлора из п. ($S1$) заключения теоремы 5.7 существует, известен и для каждого фиксированного набора параметров k, r и μ является единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным графом с таким массивом пересечений (см., например, [66]). Существование графов Тейлора из п. ($S2$) заключения теоремы 5.7, равно как и накрытий, описываемых далее в следствии 5.9, неизвестно.

Следствие 5.9. *Предположим, что* Γ *является абелевым недвудольным антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$

со свойством $(*)$ *и* $T := \mathrm{Soc}(\mathrm{Aut}(\Gamma)^{\Sigma})$ *— спорадическая простая группа ранга* 3*. Тогда* Γ *является* $(r/2)$*-накрытием графа Тейлора из п.* $(S2)$ *заключения теоремы 5.7 и либо* $T \simeq M_{22}$*,* $k = 175$ *и* $r\mu/2 \in \{72, 102\}$*, либо* $T \simeq Fi_{22}$*,* $k = 3509$ *и* $r\mu/2 \in \{1600, 1908\}$*.*

Результаты **главы 5** получены автором лично и опубликованы в статье [135].

Глава 6 посвящена классификации реберно симметричных дистанционно регулярных антиподальных накрытий графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, а также исследованию групп автоморфизмов антиподальных плотных графов диаметра 4 и их локальных подграфов.

В § 6.1 исследуются реберно симметричные антиподальные дистанционно регулярные накрытия графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, группа автоморфизмов которых индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном, и доказывается

Теорема 6.1. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 4*, антиподальное частное* $\bar{\Gamma}$ *которого изоморфно графу эрмитовых форм* $\mathrm{Herm}(2, q^2)$*. Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *индуцирует группу ранга* 3 *на* $\bar{\Gamma}$*, то* Γ *— один из следующих графов:*

(1) *граф Уэлса (*2*-накрытие графа* $\bar{\Gamma} \simeq \mathrm{Herm}(2, 2^2)$ *с параметрами* $(16, 5, 0, 2)$*);*

(2) *граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея (*3*-накрытие графа* $\bar{\Gamma} \simeq \mathrm{Herm}(2, 3^2)$ *с параметрами* $(81, 20, 1, 6)$*).*

Теорема 6.1 получена в неразделимом соавторстве с Махневым А.А. и Падучих Д.В. и опубликована в статье [147].

Последующие § 6.2, § 6.3 и § 6.4 посвящены исследованию групп автоморфизмов $AT4(p, p+2, r)$-графов. В § 6.2 исследована группа автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $\big((p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), p-2, p\big)$, получены ограничения на простой спектр группы автоморфизмов $AT4(p, p+2, r)$-графа, и доказаны теорема 6.2 и следствие 6.3. Далее для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество его простых делителей. Простой спектр $\pi(|G|)$ конечной группы G кратко обозначается через $\pi(G)$.

Теорема 6.2. *Пусть* Γ *—* $AT4(p, p+2, r)$*-граф,* $\{a, b\}$ *— его ребро и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*. Тогда* G_a *действует точно как на* $\Gamma_1(a)$*, так и на* $\Gamma_2(a)$*, и если* p *— степень простого числа,* $p > 2$*, то* $\pi(G_{a,b}) \subseteq \{2, 3, ..., p\}$*.*

Следствие 6.3. *Предположим, что* Γ *— это реберно симметричный* $AT4(p, p+2, r)$*-граф, где* p *— степень простого числа,* $p > 2$*, и пусть* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*. Тогда*

$$\pi\big((p+2)(p^2+4p+2)(p+1)(p+4)\big) \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, ..., p\} \cup \pi\big((p+2)(p^2+4p+2)(p+1)(p+4)\big).$$

Если к тому же числа $p+2$ *и* p^2+4p+2 *— простые, то для любой вершины* a *графа* Γ *группа* G_a *почти проста.*

Следствие 6.3 позволяет определить строение допустимых групп автоморфизмов реберно симметричных $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графов для простых чисел $p+2$ и p^2+4p+2, не превосходящих 1000, в случае, если p — степень простого числа. С его помощью и на основе классификации [133] конечных простых групп, максимальный элемент простого спектра которых не превосходит 1000, в § 6.2 установлено, что справедлива

Теорема 6.4. *$\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графы с $p \in \{11,17,27\}$ не являются реберно симметричными.*

Эти результаты получены автором лично и опубликованы в статье [136].

В [20] получено описание наборов допустимых параметров $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графов небольшой степени. В частности, в [20, теорема 3] показано, что $r \in \{3,6\}$ в случае $p=5$ и $r \in \{4,8\}$ в случае $p=7$. В § 6.3 – § 6.4 исследуются группы автоморфизмов гипотетических $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графов и их локальных подграфов для $p \in \{5,7\}$.

Теорема 6.5. *Пусть Γ — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\},$$

$r \in \{3,6\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,47\}$ и группа G интранзитивна на дугах графа Γ.

Теорема 6.6. *Пусть Γ — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\},$$

$r \in \{4,8\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11,79\}$ и группа G интранзитивна на дугах графа Γ.

Каждый локальный подграф $\mathrm{AT4}(p,p+2,r)$-графа сильно регулярен с параметрами $(329,40,3,5)$ при $p=5$ или с параметрами $(711,70,5,7)$ при $p=7$. Оба этих набора параметров входят в список Броувера [44] параметров небольших сильно регулярных графов, вопрос существования которых до сих пор остается нерешенным. В **главе 6** доказаны следующие две теоремы.

Теорема 6.7. *Пусть Θ — сильно регулярный граф с параметрами $(329,40,3,5)$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(\Theta)$ интранзитивна на вершинах графа Θ и $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2,3,5,7,47\}$.*

Теорема 6.8. *Пусть Θ — это сильно регулярный граф с параметрами $(711,70,5,7)$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(\Theta)$ интранзитивна на вершинах графа Θ и $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2,3,5,7,79\}$.*

Эти результаты получены автором лично и опубликованы в статьях [139, 140].

Глава 1. Основные определения и предварительные результаты

§ 1.1. Определения и обозначения

Пусть G — конечная группа подстановок на множестве Ω и $\Lambda \subseteq \Omega$. Множества $G_{\{\Lambda\}} = \{g \in G | \Lambda^g = \Lambda\}$ и $G_\Lambda = \{g \in G | x^g = x$ для всех $x \in \Lambda\}$ образуют две подгруппы в G, которые называются соответственно *глобальным стабилизатором* и *поточечным стабилизатором* множества Λ в G. Говорят, что g *фиксирует* Λ *как множество* или *фиксирует* Λ *поточечно*, если $g \in G_{\{\Lambda\}}$ или $g \in G_\Lambda$ соответственно. Если Λ — G-инвариантное множество, т.е. $G = G_{\{\Lambda\}}$, то через G^Λ обозначается группа подстановок, индуцируемая группой G на Λ, таким образом, $G^\Lambda \simeq G/G_\Lambda$. *Орбиталом* группы G называется орбита группы G на декартовом квадрате Ω^2 множества Ω (относительно действия, индуцируемого G на Ω^2). Через $\mathrm{O}rb_2(G)$ обозначается множество всех орбиталов группы G на Ω, а мощность этого множества называется (*подстановочным*) *рангом* группы G и обозначается через $\mathrm{rk}(G)$. Если $Q \in \mathrm{O}rb_2(G)$, то через Q^* обозначается орбитал $\{(y,x) | (x,y) \in Q\}$, называемый *спаренным* с Q; при этом если $Q^* = Q$ и $a \in \Omega$, то через $Q(a)$ обозначается множество всех точек $b \in \Omega$ таких, что $(a,b) \in Q$. Орбитал $Q \in \mathrm{O}rb_2(G)$ *диагонален*, если $Q = \{(x,x) | x \in \Omega\}$. С каждым орбиталом $Q \in \mathrm{O}rb_2(G)$ можно связать ориентированный и возможно содержащий петли граф $\Gamma(Q)$ на Ω, ребрами которого являются элементы орбитала Q, называемый *орбитальным*. Если орбитал $Q \in \mathrm{O}rb_2(G)$ самоспарен и не содержит точек вида (x,x), то его орбитальный граф можно рассматривать как неориентированный граф на Ω, ребрами которого являются пары $\{x,y\}$ такие, что $(x,y) \in Q$; в диссертации будет идти речь об орбитальных графах только такого частного вида.

Пусть G — это конечная группа. Для ее элементов g и x через g^x и g^{-x} обозначаются элементы $x^{-1}gx$ и $(g^{-1})^x$ соответственно. Если A и B — это некоторые непустые подмножества из G, то мы полагаем $A^B = \{g^x | g \in A, x \in B\}$. Через $\mathrm{Soc}(G)$, $Z(G)$ и G' (или $G^{(1)}$) обозначаются соответственно цоколь, центр и коммутант группы G, а через G^∞ и $S(G)$ — соответственно последний член ее ряда коммутантов и ее разрешимый радикал. Если G совпадает со своим коммутантом, то через $\mathrm{M}(G)$ обозначается ее мультипликатор Шура. Множество неединичных элементов группы G мы будем записывать как $G^\#$. Если $G \neq 1$, то мы также полагаем $\mathrm{d}_{\min}(G) = |G : H|$, где H — это собственная подгруппа в G наименьшего индекса. Если H и G — две группы и H изоморфно вкладывается в G, то в случае, когда это ясно из контекста, мы будем использовать запись $H \leq G$; в частности, если H является нормальной подгруппой в G, то этот факт будет обозначаться как $H \trianglelefteq G$. Для групп A и B, имеющих единственную центральную инволюцию, через $A \circ B$ обозначается центральное произведение групп A и B, в котором $|A \cap B| = 2$. Определение конструкции центрального произведения групп в общем случае можно найти, например, в [29, с. 32].

Группа G называется *почти простой*, если $\mathrm{Inn}(T) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(T)$ для некоторой простой неабелевой группы T. Группа G называется *квазипростой*, если $G = G'$ и $G/Z(G) \simeq T$ для некоторой простой неабелевой группы T.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Через $\pi(n)$ обозначается множество простых делителей числа n и через $(n)_\alpha$ — максимальная степень простого числа α, делящая n. Для $n, m \in \mathbb{N}$ через (n, m) (или иногда также через $\gcd(n, m)$) будет обозначаться наибольший общий делитель чисел n и m.

Простым спектром группы G называется множество $\pi(|G|)$, обозначаемое кратко через $\pi(G)$. Для конечной p-группы X через $\mho^s(X)$ обозначается *p^s-я степень* группы X, то есть подгруппа в X, порожденная множеством элементов $\{x^{p^s} | x \in X\}$, и через $\Omega_s(X)$ — *p^s-слой* группы X, то есть подгруппа в X, порожденная множеством элементов $\{x \in X | x^{p^s} = 1\}$ (см. [29, с. 5]). Ясно, что группы $\mho^s(X)$ и $\Omega_s(X)$ характеристичны в X.

Всюду в диссертации, если не оговорено иное, под термином «граф» подразумевается неориентированный граф без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначается его подграф, индуцированный множеством всех вершин, находящихся на расстоянии i от a, называемый *i-окрестностью вершины a*. *Окрестностью вершины a* называется ее 1-окрестность. *Локальным подграфом* графа называется окрестность некоторой его вершины. Если граф Γ фиксирован, то удобно использовать следующее обозначение: $[a] = \Gamma_1(a)$. Пусть $\mathcal{F}$ — это некоторый класс графов. Если каждый локальный подграф графа Γ изоморфен некоторому графу из $\mathcal{F}$, то говорят, что Γ является *локально* $\mathcal{F}$ графом, и, в частности, если $\mathcal{F} = \{\Delta\}$, то Γ называется *локально Δ-графом.*

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой его вершины равна k. Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит ровно в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит ровно μ вершин для любых двух вершин a и b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Если один из параметров k, λ или μ определен в произвольном графе Φ, то этот параметр графа Φ будем также записывать как k_Φ, λ_Φ и μ_Φ соответственно. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если он содержит ровно v вершин, регулярен степени k и для любых двух вершин a и b графа Γ число вершин в $[a] \cap [b]$ равно λ в случае, если вершины a, b смежны, и равно μ в случае, если вершины a и b несмежны.

Для удобства мы также напомним определение дистанционно регулярного графа (в немного модифицированной форме). Связный граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным*, если для любого $i \in \{0, \ldots, d\}$ существуют константы b_i, a_i и c_i такие, что для любой пары его вершин u и w, находящихся на расстоянии i, выполнены равенства:

$$b_i = |\Gamma_{i+1}(u) \cap \Gamma_1(w)|, \quad a_i = |\Gamma_i(u) \cap \Gamma_1(w)|, \quad c_i = |\Gamma_{i-1}(u) \cap \Gamma_1(w)|.$$

Ясно, что дистанционно регулярный граф диаметра d регулярен степени b_0, $c_1 = 1$, $b_d = c_0 = 0$, а для каждого $i \in \{0, ..., d\}$ константы b_i, a_i и c_i — это в точности числа пересечений $p^i_{i+1,1}$, $p^i_{i,1}$ и $p^i_{i-1,1}$ графа соответственно. Более того, для всех $i \in \{0, ..., d\}$ имеем $a_i = b_0 - b_i - c_i$ и при помощи последовательности параметров $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, называемой его *массивом пересечений*, можно определить все остальные числа пересечений $p^{i'}_{j',l'}$ (см., например, [40, лемма 4.1.7]). Очевидно, что дистанционно регулярный граф диаметра 2 на v вершинах является сильно регулярным и имеет параметры (v, b_0, a_1, c_2).

Связный граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве вершин «совпадать или находиться на расстоянии d» является отношением эквивалентности, а классы этого отношения называются *антиподальными классами* графа Γ.

Пусть Γ — это антиподальный граф и $\mathcal{F}(\Gamma)$ — это множество его антиподальных классов. *Антиподальным частным* графа Γ называется граф, обозначаемый через $\bar{\Gamma}$, на $\mathcal{F}(\Gamma)$, в котором вершины F_1 и F_2 смежны тогда и только тогда, когда $\Gamma_1(a) \cap F_2 \neq \emptyset$ для некоторой вершины $a \in F_1$. Говорят, что Γ является *антиподальным r-накрытием* графа $\bar{\Gamma}$, если для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\Gamma)$ имеем $r = |F_1| = |F_2|$, F_1 индуцирует коклику в Γ, а $F_1 \cup F_2$ индуцирует совершенное паросочетание или коклику в Γ; при этом параметр r называется *индексом антиподальности* графа Γ.

Антиподальные r-накрытия содержатся в более широком классе накрытий, определяемых следующим образом. Граф Γ называется *накрытием* графа Δ, если существует сюръекция $h : V(\Gamma) \to V(\Delta)$ такая, что $h(e) \in E(\Delta)$ для любого ребра $e \in E(\Gamma)$ и ограничение $h|_U$ отображения h на множество U соседей произвольной вершины $v \in V(\Gamma)$ является инъективным, т. е. $h|_U : U \to h(U)$ — биекция. Функция h называется *накрывающей функцией* графа Δ, а прообразы вершин из Δ относительно h называются *фибрами* накрытия Γ. Таким образом, разбиение Σ множества вершин графа Γ на фибры удовлетворяет следующим условиям (см., например, [68, § 6.8]):

(1) каждая фибра является кокликой;

(2) между любыми двумя фибрами либо нет ребер, либо имеется совершенное паросочетание.

Если все фибры имеют размер r, то Γ называется *r-накрытием* графа Δ; порядок фибры в таком случае называется *индексом накрытия*. Отметим, что r-накрытие может быть антиподальным графом, но его фибры могут не совпадать с антиподальными классами. Но мы будем придерживаться устоявшейся терминологии (см. [93] и [40, приложение A.5]), применяя термин «антиподальное r-накрытие» исключительно для обозначения связного антиподального графа, являющегося r-накрытием, множество фибр которого совпадает со множеством антиподальных классов.

Через $V(\Gamma)$ и $A(\Gamma)$ обозначается множество вершин графа Γ и множество упорядоченных пар его смежных вершин соответственно. Если группа автоморфизмов G графа Γ транзитивна на множестве $V(\Gamma)$, то мы будем говорить, что Γ является *вершинно-транзитивным* (или *G-вершинно-транзитивным* в случае, когда необходимо указать группу G). Граф Γ называется *реберно симметричным*, если группа автоморфизмов графа Γ действует транзитивно на $\mathrm{A}(\Gamma)$; если, к тому же, граф Γ связен диаметра d и обладает группой автоморфизмов, которая для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ действует транзитивно на $\mathrm{A}(\Gamma_i)$, то Γ называется *дистанционно-транзитивным*. Очевидно, что каждый дистанционно-транзитивный граф является дистанционно регулярным. Дистанционно-транзитивный граф диаметра 2 называется *графом ранга* 3.

Для графа Γ и множества $X \subseteq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X, которое мы также будем отождествлять с подграфом, индуцированным множеством $\mathrm{Fix}(X)$ в Γ. Если H — это некоторая группа автоморфизмов графа Γ, то на множестве H-орбит можно определить *частное* графа Γ, обозначаемое через Γ^H, полагая две H-орбиты O_1 и O_2 смежными, если $O_1 \neq O_2$ и $O_1 \cap \Gamma_1(a) \neq \varnothing$ для вершины $a \in O_2$.

Другие определения и обозначения, используемые в диссертации, в основном стандартны и могут быть найдены в [29] и [40].

§ 1.2. Свойства и конструкции антиподальных дистанционно регулярных графов небольшого диаметра и реберно симметричных графов

Как известно (см. [40]), антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 является антиподальным r-накрытием полного графа на $k+1$ вершинах, имеет массив пересечений вида $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ и спектр $k^1, \theta^f, (-1)^k, (-\tau)^g$, где θ и $-\tau$ — это корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ (напомним, через λ обозначается параметр a_1 графа Γ). При этом справедливо тождество $k - r\mu - 1 = \lambda - \mu = \theta - \tau$. В [67] был исследован вопрос о том, при каких условиях произвольное r-накрытие полного графа является антиподальным д.р.г. диаметра 3.

Лемма 1.1 ([67, лемма 3.1]). *Пусть Γ — это r-накрытие полного графа на n вершинах и μ — это некоторое положительное целое число. Тогда Γ — это (антиподальный) дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{n-1, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, n-1\}$ тогда и только тогда, когда любые две несмежные вершины из разных фибр имеют ровно μ общих соседей.*

Лемма 1.1 позволяет дать альтернативное определение антиподального д.р.г. диаметра 3 как связного графа, множество вершин которого допускает разбиение на множество из n блоков одинакового размера $r \geq 2$ такое, что каждый блок индуцирует r-коклику, объединение любых двух различных блоков индуцирует совершенное паросочетание и любые две несмежные вершины, лежащие в разных блоках, имеют ровно $\mu \geq 1$ общих соседей. Следуя [67], такой граф мы будем кратко называть *(n, r, μ)-накрытием.*

Напомним, что (n, r, μ)-накрытия с $r = 2$ эквивалентны неполным регулярным дваграфам (см. [40, предложение 1.5.1]) и называются *графами Тейлора.* При этом (n, r, μ)-накрытия с $r = 2$ и $\mu = n-2$ — это в точности двудольные (n, r, μ)-накрытия (для каждого фиксированного n такой граф является единственным с точностью до изоморфизма и может быть построен как дополнительный граф к $2 \times n$-решетке).

В следующем предложении мы приводим некоторые базовые свойства недвудольных $(k+1, r, \mu)$-накрытий, которые будут часто применяться в дальнейших рассуждениях.

Предложение 1.2. *Пусть* Γ *— это недвудольное* $(k+1, r, \mu)$*-накрытие с собственными значениями* $k > \theta > -1 > -\tau$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(*i*) $1 \leq (r-1)\mu \leq k-1 \leq \mu(2r-1)-2$ *(см. [40, 67]);*

(*ii*) *кратности собственных значений* θ *и* $-\tau$ *равны* $f = \tau(r-1)(k+1)/(\theta+\tau)$ *и* $g = \theta(r-1)(k+1)/(\theta+\tau)$ *соответственно (см. [40, 67]);*

(*iii*) *если* $\lambda \neq \mu$, *то числа* θ *и* τ *— целые,* $k = \theta\tau$, $r\mu = (\tau-1)(\theta+1)$ *и* $\lambda = \mu + \theta - \tau$ *(см. [40, 67]);*

(*iv*) *если* $r > 2$, *то* $\tau \leq \theta^2$, *причем при* $\tau = \theta^2$ *окрестность любой вершины в* Γ *— сильно регулярный граф с собственными значениями* $\lambda = (\theta-1)((\theta+1)^2/r - \theta)$, $\theta - (\theta+1)/r$ *и* $\theta - (\theta+1)^2/r$ *(см. [40, 64]);*

(*v*) *если* k *— нечетно, то* μ *— четно [67];*

(*vi*) *если* $\lambda = 0$, *то* $r - 2 > \sqrt{\mu}$ *[61];*

(*vii*) *если* $\mathcal{CG}(\Gamma) \neq 1$, *а числа* θ *и* τ *— целые, то* $\theta+\tau$ *делит* $(k+1)\gcd(\theta,\tau)$ *(см., например, [137, лемма 3] и [19, лемма 5]);*

(*viii*) *если* $\mu = 1$, *то* $k-r+1$ *делит* k, $(k-r+1)(k-r+2)$ *делит* $rk(k+1)$ *и* $(k-r+1)^2 \leq k$ *[67];*

(*ix*) *если* $r = 2$, *то* $k+1$ *четно и окрестность каждой вершины в* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(k, \lambda, \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1)), \frac{1}{2}\lambda)$ *(см., например, [40, теорема 1.5.3]).*

Пусть Γ — это дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{b_0, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4\}$ и собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \theta_4$. Ввиду [40, предложение 4.2.2] граф Γ антиподален тогда и только тогда, когда $b_i = c_{4-i}$ для всех $i \in \{0, 1, 3, 4\}$. В этом случае Γ — это антиподальное r-накрытие графа $\bar{\Gamma}$, $r = 1 + b_2/c_2$ и граф $\bar{\Gamma}$ сильно регулярен с параметрами $(v/r, b_0, a_1, rc_2)$, где $v = r(b_0+1) + b_0b_1/c_2$ — число вершин графа Γ.

Лемма 1.3 (Биггс–Гардинер, см., например, [40, гл. 4.2 B] или [87, лемма 2.1])**.** *Пусть* Γ *— это антиподальный д.р.г. диаметра 4 на* v *вершинах с массивом пересечений* $\{k, b_1, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, b_1, k\}$, $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_4$ *— это собственные значения* Γ *и* m_i *— это кратность собственного значения* θ_i. *Тогда*

(1) *антиподальное частное* $\bar{\Gamma}$ *— это связный сильно регулярный граф с параметрами* $(v/r, k, a_1, rc_2)$ *и собственными значениями* $\theta_0 = k$ *и* θ_2, θ_4, *которые являются корнями уравнения* $x^2 - (a_1 - rc_2)x - (k - rc_2) = 0$. *Остальные собственные значения* θ_1 *и* θ_3 *являются корнями уравнения* $x^2 - a_1x - k = 0$;

(2) *$k = -\theta_1\theta_3$ и $(\theta_2+1)(\theta_4+1) = (\theta_1+1)(\theta_3+1)$;*

(3) *$k = \theta_0$, $a_1 = \theta_1+\theta_3$, $b_1 = -(\theta_2+1)(\theta_4+1)$, $c_2 = (\theta_0+\theta_2\theta_4)/r$;*

(4) *кратности собственных значений равны $m_0 = 1$,*

$$m_2 = \frac{(\theta_4+1)k(k-\theta_4)}{rc_2(\theta_4-\theta_2)}, m_4 = \frac{v}{r} - m_2 - 1, m_i = \frac{(r-1)v}{r(2+a_1\theta_i/k)},$$

для $i = 1$, 3;

(5) *собственные значения θ_2 и θ_4 — целые, $\theta_4 \le -2$, $\theta_2 \ge 0$, причем $\theta_2 = 0$ тогда и только тогда, когда Γ — двудольный граф; кроме того, $\theta_3 < -1$ и если $a_1 \neq 0$, то θ_1, θ_3 — целые.*

Пусть Γ — это недвудольный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > ... > \theta_4$. Напомним, что параметры графа Γ удовлетворяют *фундаментальной границе* (см. [84])

$$(\theta_1 + \frac{b_0}{a_1+1})(\theta_4 + \frac{b_0}{a_1+1}) \ge -\frac{b_0a_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Если в фундаментальной границе для графа Γ достигается равенство, то граф Γ локально сильно регулярен и его массив пересечений зависит от трех параметров: неглавных собственных значений $p = -1 - b_1/(1+\theta_4)$ и $-q = -1 - b_1/(1+\theta_1)$ локальных подграфов и размера r антиподального класса. В этом случае граф Γ называется *антиподальным плотным графом* диаметра 4 с параметрами (p,q,r) или просто AT4(p,q,r)*-графом.*

Все известные 14 примеров недвудольных антиподальных д.р.г. диаметра 4 являются реберно симметричными и большинство из них принадлежат классу AT4-графов (см. таблицу 1).

Лемма 1.4 (см. [150, лемма 2.3.1])**.** *Пусть Γ — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$ и Σ — это множество его антиподальных классов. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппа $X \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$ флаг-транзитивна, то X индуцирует 2-транзитивную группу подстановок на Σ.*

(2) *Если $(r,k) = 1$ и существует транзитивная подгруппа $X \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$ такая, что группа X^Σ 2-транзитивна, то группа X флаг-транзитивна.*

(3) *Группа $\mathcal{CG}(\Gamma)$ полурегулярна на вершинах графа Γ, в частности, число $|\mathcal{CG}(\Gamma)|$ делит r.*

(4) *Если $K \le \mathcal{CG}(\Gamma)$ и $1 < |K| < r$, то Γ^K — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, (r'-1)\mu', 1; 1, \mu', k\}$, где $\mu' = \mu|K|$ и $r' = r/|K|$. Если, к тому же, группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ транзивна и группа K нормальна в $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, то $\mathrm{Aut}(\Gamma)/K$*

Таблица 1: Параметры известных (реберно-симметричных) недвудольных антиподальных д.р.г. диаметра 4

Граф Γ и его массив пересечений	AT4	$\bar{\Gamma}$
граф Уэлса $\{5,4,1,1;1,1,4,5\}$	-	Herm$(2,2^2)$ $(16,5,0,2)$
граф Фостера $3.Sym(6)$ $\{6,4,2,1;1,1,4,6\}$	-	$(15,6,1,3)$
граф Джонсона $J(8,4)$ $\{16,9,4,1;1,4,9,16\}$	AT4$(2,2,2)$	$(35,16,6,8)$
$\frac{1}{2}H(8,2)$ $\{28,15,6,1;1,6,15,28\}$	AT4$(4,2,2)$	$\overline{\mathrm{VO}_6^+(2)}$ $(64,28,12,12)$
3.Herm$(2,3^2)$ $\{20,18,4,1;1,2,18,20\}$	-	Herm$(2,3^2)$ $(81,20,1,6)$
$3.Sym(7)$ $\{10,6,4,1;1,2,6,10\}$	AT4$(1,2,3)$	$(21,10,3,6)$
$Soicher1$ $\{416,315,64,1;1,32,315,416\}$	AT4$(20,4,3)$	$(1782,416,100,96)$
$Soicher2$ $\{56,45,16,1;1,8,45,56\}$	AT4$(2,4,3)$	$(162,56,10,24)$
$Soicher3$ $\{32,27,8,1;1,4,27,32\}$	-	$(105,32,4,12)$
$Meixner2$ $\{176,135,36,1;1,12,135,176\}$	AT4$(8,4,4)$	$\overline{\mathrm{NU}(6,2)}$ $(672,176,40,48)$
$Meixner1$ $\{176,135,24,1;1,24,135,176\}$	AT4$(8,4,2)$	$\overline{\mathrm{NU}(6,2)}$ $(672,176,40,48)$
$3.O_6^-(3)$ $\{45,32,12,1;1,6,32,45\}$	AT4$(3,3,3)$	NO$^-(6,3)$ $(126,45,12,18)$
$3.O_7(3)$ $\{117,80,24,1;1,12,80,117\}$	AT4$(9,3,3)$	граф Уоллиса $(378,117,36,36)$
$3.Fi_{24}^-$ $\{31671,28160,2160,1;1,1080,28160,31671\}$	AT4$(351,9,3)$	граф 3-трансп. группы Fi_{24} $(306936,31671,3510,3240)$

— транзитивная группа автоморфизмов графа Γ^K и, в частности, если (XK/K) — флаг-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ^K для некоторой подгруппы $X \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$, то XK — флаг-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ.

Доказательство. Утверждение (1) следует из условия и того факта, что антиподальное частное графа Γ является полным графом.

Для доказательства утверждения (2) достаточно заметить, что $k|X_{\{F\},\{E\}} : X_{a,b}| = |X_{\{F\}} : X_{\{F\},\{E\}}||X_{\{F\},\{E\}} : X_{a,b}| = |X_{\{F\}} : X_a||X_a : X_{a,b}| = r|X_a : X_{a,b}|$.

Утверждение (3) следует из [67, следствие 6.3].

Докажем (4). Допустим, что $1 < |K| < r$. Рассмотрим частное Γ' графа Γ на множестве K-орбит и положим $r' = r/|K|$. Ввиду [67, теорема 6.2, следствие 6.3] Γ' — дистанционно регулярный граф с указанным массивом пересечений. Положим $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Ввиду (3) группа G/K действует точно и транзитивно на вершинах графа Γ' и можно считать, что $G/K \le \mathrm{Aut}(\Gamma')$. При этом G/K индуцирует точное действие на множестве антиподальных классов графа Γ'. Теперь если группа XK/K флаг-транзитивна на Γ' для некоторой подгруппы $X \le G$, то, очевидно, группа XK флаг-транзитивна на Γ. Лемма доказана.

Предложение 1.5 (см. [146]). *Пусть H — это неинваринтная подгруппа группы G и g — это элемент из $G-H$. Обозначим через $\Gamma(G,H,HgH)$ граф (возможно, ориентированный) со множеством вершин $R(G,H) = \{Hx \mid x \in G\}$, в котором вершина Hx смежна с вершиной Hy тогда и только тогда, когда $xy^{-1} \in HgH$.*

(1) *Если G действует точно на $R(G,H)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$, то $\Gamma(G,H,HgH)$ — это связный (простой и неориентированный) граф и G действует (правым умножением) как группа автоморфизмов графа $\Gamma(G,H,HgH)$ точно и транзитивно как на множестве вершин, так и на множестве дуг.*

(2) *Предположим, что* G *действует флаг-транзитивно на связном графе* X, H *— это стабилизатор вершины* x *в* G *и* $g \in G$ *— это* 2*-элемент, переставляющий вершину* x *с некоторой вершиной, смежной с* x *в* X. *Тогда* $X \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, $g^2 \in H$ *и* $G = \langle H, g\rangle$.

(3) *Пусть* $X_1 = \Gamma(G, H, Hg_1H)$ *и* $X_2 = \Gamma(G, H, Hg_2H)$ *— это два связных графа для некоторых элементов* $g_1, g_2 \in G - H$, *причем* G *действует точно на* $R(G, H)$. *Если существует элемент* $\varphi \in N_{\mathrm{Aut}(G)}(H)$ *такой, что* $g_1^{\varphi} \in Hg_2H$, *то* $X_1 \simeq X_2$. *Более того, обратное также справедливо при условии, что* $G = \mathrm{Aut}(X_1)$.

(4) *Пусть* H *и* S *— это неинвариантные подгруппы группы* G, $M = N_G(S)$ *и* g *— это элемент из* G *такой, что* $S \leq H < M < G$, $g^2 \in H$, $G = \langle H, g\rangle$, $G = M \cup MgS$, $H^g \cap M \leq H$, $M^g \cap S = 1$ *и* $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$. *Предположим к тому же, что* $|G : M| = k + 1$, $|M : H| = r$, $\gcd(r, k) = 1$ *и* $|S| = k = |H : H^g \cap H|$. *Тогда* Γ *— это реберно симметричное* r*-накрытие графа* $\Gamma/_{\Sigma} \simeq K_{k+1}$, *где* $\Sigma = \big\{\{Hm(gs)^e|\ m \in M\}|s \in S, e \in \{0, 1\}\big\}$.

Доказательство. Первые три утверждения — это в точности утверждения (1), (2) и (3) из [66, лемма 2.7]. Доказательства первых двух можно найти в [98]. Четвертое утверждение является модификацией утверждения (4) из [66, лемма 2.7] и доказано в [146]. Для полноты изложения приведем его доказательство. Рассмотрим следующие H-инвариантные множества $\Gamma_0 = \{H\}, \Gamma_1 = \{Hgh|h \in H\}, \Gamma_2 = \{Hx|x \notin gH \cup M\}, \Gamma_3 = \{Hm|m \in M - H\}$. Ясно, что только Γ_2 или Γ_3 могут не быть H-орбитами. Поскольку $g^2 \in H$, то $HH^g = Hg^2g^{-1}Hg = HgHg$. Имеем $H \leq M$ и поэтому включение $H^g \cap M \leq H$ можно умножить слева и справа на H. Таким образом,

$$H(H^g \cap M) = (H(g^{-1}Hg)) \cap M = HgHg \cap M \subseteq H, \tag{1}$$

и

$$((H(g^{-1}Hg)) \cap M)H = HgHgH \cap M \subseteq H. \tag{2}$$

Далее, правые смежные классы по H, находящиеся на расстоянии не более 2 от H в Γ, — это в точности те классы, которые содержатся в $HgHgH \cup HgH$. Предположим, что $m \in M - H$ и вершины Hm и H находятся на расстоянии не более 2. Тогда $m \in HgHgH \cup HgH$. Если $m \in HgHgH$, то ввиду соотношения (2) $m \in H$, противоречие. Если $m \in HgH$, то $g \in M$, но $G = \langle H, g\rangle$, противоречие. Следовательно, множество $\Gamma_3 = \{Hm \mid m \in M - H\}$ состоит из вершин, находящихся на расстоянии по крайней мере 3 от H в Γ.

Поскольку включение (1) можно умножить справа на g, мы получим, что $(HgHg \cap M)g = HgH \cap Mg \subseteq Hg$. Следовательно, имеется только одно ребро в Γ между H и $\{Hmg|\ m \in M\}$, то есть ребро $\{H, Hg\}$. Пусть $m_1, m_2 \in M - H$. Если $Hm_1 \in [Hm_2]$, то $m_1m_2^{-1} \in HgH$ и $g \in M$, но $G = \langle H, g\rangle$, противоречие. Предположим, что вершины Hm_1, Hm_2 находятся на расстоянии 2 в Γ. Тогда $m_1m_2^{-1} \in HgHgH$. По соотношению (2) имеем $m_1m_2^{-1} \in H$, что влечет $Hm_1 = Hm_2$, противоречие.

Степень вершины в Γ равна числу правых смежных классов по H в двойном смежном классе HgH, то есть $|H : H^g \cap H| = |S| = k$. Таким образом, каждая вершина из Γ_3 смежна в точности с k вершинами из Γ_2. Так как $H^g \cap S = 1$, то S действует регулярно на $[H]$ и G действует транзитивно на дугах графа Γ. Следовательно, существует константа λ такая, что любые две смежные вершины имеют в точности λ общих соседей. Отметим, что стабилизатор дуги (H, Hg) в G — это в точности группа $H^g \cap H$.

По условию группа M действует транзитивно на $\{Mx|\ x \in G - M\}$, $|G : M| = k + 1$, $|M : H| = r$ и $\gcd(r, k) = 1$. Имеем $|M : M^g \cap M| = k$ и $r = |M^g \cap M : H^g \cap H|$.

Значит, $M^g \cap M$-орбита на множестве дуг графа Γ, содержащая дугу (H, Hg), имеет длину r. Таким образом, между множествами $\{Hm|\ m \in M\}$ и $\{Hmg|\ m \in M\}$ имеется совершенное паросочетание в Γ, которое является $M^g \cap M$-инвариантным и $M^g \cap M$ действует транзитивно на $\{Hm|\ m \in M\}$.

Так как $M = N_G(S)$, то любой элемент из S фиксирует $\Gamma_0 \cup \Gamma_3$ поточечно.

Пусть Σ — это разбиение множества вершин графа Γ на $k+1$ ячеек типа $\{Hm(gs)^e|\ m \in M\}$, где $s \in S$ и $e \in \{0, 1\}$. Тогда Σ образует систему импримитивности группы G на множестве вершин графа Γ, такую, что каждый ее блок соответствует некоторому правому смежному классу по M группы G с подходящим представителем $(gs)^e$.

Поскольку $\Gamma_0 \cup \Gamma_3$ состоит из вершин, находящихся попарно на расстоянии 3 в Γ, то для каждого элемента $s \in S$ множество $(\Gamma_0 \cup \Gamma_3)gs$ также состоит из вершин, находящихся попарно на расстоянии по крайней мере 3 в Γ и между множествами $\{Hm|\ m \in M\}$ и $\{Hmgs|\ m \in M\}$ имеется совершенное паросочетание в Γ. Таким образом, каждый блок системы Σ является кокликой порядка r. Заметим также, что S действует регулярно на окрестности каждой вершины из $\Gamma_0 \cup \Gamma_3$. Поэтому G действует 2-транзитивно на Σ и любые два блока системы Σ индуцируют совершенное паросочетание в Γ. Иными словами, Γ является r-накрытием графа K_{k+1}. Предложение доказано.

Лемма 1.6 ([66, теорема 2.5], [67, теорема 9.2]). *Пусть Γ — это недвудольный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$. Если группа $\mathcal{CG}(\Gamma)$ абелева и действует транзитивно на каждом антиподальном классе графа Γ, то каждый простой делитель p числа r делит и число $k+1$. В частности, если $\mathcal{CG}(\Gamma) \simeq Z_r$ и $r > 2$, то r делит $k+1$.*

Конструкция 1.7 (Мэтон). Пусть V — это векторное пространство размерности 2 над конечным полем $\mathbb{F}$ из q элементов с невырожденной симплектической формой f. Пусть K — подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{F}^*$ поля $\mathbb{F}$ неединичного индекса r, делящего число $(q-1)/(q-1, 2)$, и $b \in \mathbb{F}^*$. *Графом Мэтона* называется граф, множеством вершин которого являются K-орбиты на множестве векторов пространства V, две вершины Ku и Kv которого смежны тогда и только тогда, когда $f(u, v) \in bK$. Граф Мэтона является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{q, (r-1)(q-1)/r, 1; 1, (q-1)/r, q\}$ и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора элемента b (см. [40, предложение 12.5.3]). Для заданных параметров q и r этот граф мы будем обозначать через $\mathrm{M}(q,r)$. Нетрудно понять, что $\mathrm{M}(q,r)$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, изоморфную группе $L_2(q)$.

Дистанционно регулярные графы из следующих двух конструкций допускают флаг-транзитивное действие группы $SU_3(q)$.

Конструкция 1.8 (Камерон)**.** Пусть $\mathbb{E}$ — это квадратичное расширение конечного поля $\mathbb{F}$ из q элементов, V — это 3-мерное векторное пространство над $\mathbb{E}$ с невырожденной эрмитовой формой B и U — это подгруппа из $\mathbb{E}^*$ неединичного индекса r. Пусть $\Psi_{q,r}$ — это граф на множестве U-орбит на изотропных векторах пространства V, ребрами которого являются пары $\{vU, wU\}$ такие, что $B(v,w)=1$. По [47, предложение 5.1] граф $\Psi_{q,r}$ дистанционно регулярен (с массивом пересечений $\{q^3,(r-1)(q^2-1)(q+1)/r,1;1,(q^2-1)(q+1)/r,q^3\}$) тогда и только тогда, когда r делит $(q+1)/(q+1,2)$. *Графами Камерона* в данной работе называются дистанционно регулярные графы $\Psi_{q,r}$.

Конструкция 1.9 (Броувер)**.** Пусть b — это элемент из $\mathbb{E}^*$ такой, что $bU=b^*U$. Обозначим через $\widetilde{\Psi}_{q,r}$ граф с $V(\widetilde{\Psi}_{q,r})=V(\Psi_{q,r})$, ребрами которого являются пары $\{vU,wU\}$ такие, что $B(v,w)\in Ub$. В неопубликованной работе А. Броувера показано, что если $r>1$ — нечетный делитель числа $q-1$, то граф $\widetilde{\Psi}_{q,r}$ (называемый в диссертации *графом Броувера*) дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{q^3,(r-1)(q^3-1)/r,1;1,(q^3-1)/r,q^3\}$. Это утверждение приводится без доказательства в заметке [41], в которой дается критерий дистанционной регулярности графа $\widetilde{\Psi}_{q,r}$ (см. [41, предложение 12.5.4]). К сожалению, этот критерий неверен. Корректный вариант следует из результатов настоящей работы.

Конструкция 1.10 (Тас–Сомма)**.** В [40, предложение 12.5.1] приводится следующая конструкция (в терминах векторных пространств) (q^{2n},q,q^{2n-1})-накрытий, найденных в работах С. Соммы и Дж.Таса.

Пусть V — это векторное пространство размерности $2n$ над полем $\mathbb{F}$ из q элементов характеристики p, где $q=p^i$ и $n\geq 1$, с невырожденной симплектической формой B. Рассмотрим граф на множестве вершин $\{(\alpha,u)|\alpha\in\mathbb{F},u\in V\}$, в котором вершина (α,u) смежна с вершиной (β,v) тогда и только тогда, когда $B(u,v)=\alpha-\beta$ и $u\neq v$. Этот граф является q-накрытием полного графа на q^{2n} вершинах, фибрами которого являются множества $F_u=\{(\alpha,u)|\alpha\in\mathbb{F}\}$, и любые две несмежные вершины из разных фибр имеют ровно q^{2n-1} общих соседей, т.е. построенный граф является (q^{2n},q,q^{2n-1})-накрытием. Более того, нетрудно проверить, что он не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора симплектической формы B.

Конструкция 1.11 (Годсил–Хензель)**.** Рассмотрим конструкцию (p^{2i},p^{i-k},p^{i+k})-накрытий из [67]. Пусть V — это векторное пространство размерности 2 над конечным полем $\mathbb{F}$ из q элементов характеристики p, где $q=p^i$, с невырожденной симплектической формой B. Пусть A — это аддитивная подгруппа индекса p^{i-k} в $\mathbb{F}$, где $0\leq k<i$. Тогда граф $\Gamma(V,A,B)$ на множестве вершин $\{(\alpha+A,u)|\alpha\in\mathbb{F},u\in V\}$, в котором вершина $(\alpha+A,u)$ смежна с вершиной $(\beta+A,v)$ тогда и только тогда, когда $B(u,v)\in\alpha-\beta+A$ и $u\neq v$, является (p^{2i},p^{i-k},p^{i+k})-накрытием.

Как показывает следующая лемма, данная конструкция является обобщением конструкции Таса—Соммы.

Лемма 1.12 ([67, лемма 6.5]). *Предположим, что* $(i-k)$ *делит* i*, где* $0 \leq k < i$*. Тогда существует аддитивная подгруппа* A *порядка* p^k *поля* $\mathbb{F}$ *такая, что граф* $\Gamma(V, A, B)$ *с параметрами* $(p^{2i}, p^{i-k}, p^{i+k})$ *изоморфен графу с теми же параметрами из конструции Таса—Соммы.*

Теорема 1.13 ([19, теорема 1]). *Пусть* Γ *— реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Γ *— двудольный граф, то* Γ *получается удалением из* $K_{k+1,k+1}$ *максимального паросочетания,* $G = 2 \times S_{k+1}$*;*

(2) *если* $r = k$*, то* $\mu = 1$ *и либо* $k = 2$ *и* Γ *— шестиугольник, либо* $k = 6$*,* Γ *— вторая окрестность вершины в графе Хофмана-Синглтона и* $G \leq S_7$*;*

(3) *если* $r = 2 < k$ *и* Γ *— недвудольный граф, то либо*

  (*i*) $k+1 = 2^{2m-1} \pm 2^{m-1}$, $G = 2 \times Sp_{2m}(2)$*, где* $m \geq 3$*, и* $\mu \in \{2^{2m-2}, 2^{2m-2} \pm 2^{m-1} - 2\}$*, либо*

  (*ii*) $k = q^3$, $G \leq 2 \times \mathrm{P\Gamma U}_3(q)$, $q > 3$ *или* $G \leq 2 \times \mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$, $q = 3^{2e+1}$, $e \geq 1$*, и* $\mu = (q \pm 1)(q^2 \mp 1)/2$*, либо*

  (*iii*) $k = q$, $G \leq 2 \times \mathrm{P\Sigma L}_2(q)$*, где* $q \equiv 1 \pmod 4$*, и* $\mu = (q-1)/2$*, либо*

  (*iv*) $k = 175$, $G = 2 \times HiS$ *и* $\mu \in \{72, 102\}$ *или* $k = 275$, $G = 2 \times Co_3$ *и* $\mu \in \{112, 162\}$*, либо*

  (*v*) $k = 2^{2t} - 1$, $G = 2 \cdot ASp_{2t}(2)$ *и* $\mu \in \{2^{2t-1}, 2^{2t-1} - 2\}$.

Теорема 1.14 ([124, теорема 1]). *Пусть* Γ *— это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k, r-1, 1; 1, 1, k\}$*, где* $s = k - r + 1 > 1$*,* Σ *— это множество его антиподальных классов и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*. Обозначим через* K *и* G^Σ *соответственно ядро и образ действия группы* G *на* Σ*. Тогда* $k = cs$*,* $r = cs - s + 1$ *для некоторого* $c \in \mathbb{Z}$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если группа* G^Σ *2-однородна, но не 2-транзитивна, то* $G^\Sigma \leq \mathrm{A\Gamma L}_1(q)$, $k+1 = q \equiv 3 \pmod 4$, $\sqrt{cs + (s/2-1)^2} \notin \mathbb{Z}$*, и либо* $K = 1$*,* $s = 2$ *и* $c = (q-1)/2$*, либо* s *нечетно;*

(2) *если* G^Σ *— почти простая 2-транзитивная группа, то либо* $K = 1$*,* $s = 2$*,* $c = 2^{e-1}$*,* $\mathrm{Soc}(G) \simeq \mathrm{L}_2(2^e)$ *и* Δ *— граф Мэтона, либо* G *действует интранзитивно на вершинах графа* Δ*;*

(3) *если* G^Σ *— аффинная 2-транзитивная группа, то* G *интранзитивна на дугах графа* Γ.

Теорема 1.15 ([124, теорема 2]). *Пусть Γ — это реберно-транзитивный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, r-1, 1; 1, 1, k\}$, Σ — это множество его антиподальных классов и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Обозначим через K ядро действия G на Σ. Тогда либо $r = k \in \{2, 6\}$ и Γ — это вторая окрестность вершины в графе Мура степени $k+1$, либо $r < k$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *G^{Σ} — почти простая 2-транзитивная группа, $K = 1$, $Soc(G) \simeq L_2(2^n)$ и $\Gamma \simeq \mathrm{M}(2^n, 2^n - 1)$;*

(2) *G^{Σ} — аффинная 2-однородная группа и Γ — полутранзитивный граф.*

В статье [19] были найдены некоторые необходимые условия существования реберно симметричных антиподальных д.р.г. диаметра 3 с $2 < r < k$ и $\lambda = \mu$ (см. теорему 1.16 ниже), при этом были выделены следующие три гипотетические семейства д.р.г., отвечающие группам Судзуки $Sz(q)$, Ри ${}^2G_2(q)$ и 3-мерным проективным специальным унитарным группам $U_3(q)$.

1. *Серия Судзуки.* Граф $\mathcal{S}uz(q)$ имеет массив пересечений

$$\{q^2, q^2 - q - 2, 1; 1, q+1, q^2\},$$

$q = 2^{2e+1} \geq 8$, $r = q - 1$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{S}uz(q)) = \mathrm{Aut}(Sz(q))$ и G_a — расширение группы $S \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Soc}(G))$ порядка q^2 с помощью циклической группы порядка $2e+1$.

В предположении существования графа $\mathcal{S}uz(q)$ для любого неединичного делителя s числа $q-1$ существует граф $\mathcal{S}uz(q, s)$ с массивом пересечений

$$\{q^2, (s-1)(q^2-1)/s, 1; 1, (q^2-1)/s, q^2\},$$

$q = 2^{2e+1} \geq 8$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{S}uz(q, s)) = \mathrm{Aut}(Sz(q))$ и G_a — расширение группы $S \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Soc}(G))$ порядка q^2 с помощью группы $X = A.B$, где $A = Z_{(q-1)/s}$ и $B = Z_{2e+1}$.

2. *Серия Ри.* Граф $\mathcal{R}ee(q)$ имеет массив пересечений

$$\{q^3, q^3 - 2q^2 - 2q - 3, 1; 1, 2(q^2 + q + 1), q^3\},$$

$q = 3^{2e+1} > 3$, $r = (q-1)/2$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{R}ee(q)) = \mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$ и G_a — расширение группы $S \in \mathrm{Syl}_3(\mathrm{Soc}(G))$ порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $2e+1$.

В предположении существования графа $\mathcal{R}ee(q)$ для любого неединичного делителя s числа $(q-1)/2$ существует граф $\mathcal{R}ee(q, s)$ с массивом пересечений

$$\{q^2, (s-1)(q^3-1)/s, 1; 1, (q^3-1)/s, q^2\},$$

$q = 3^{2e+1} > 3$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{R}ee(q, s)) = \mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$ и G_a — расширение группы $S \in \mathrm{Syl}_3(\mathrm{Soc}(G))$ порядка q^3 с помощью группы группы $X = A.B$, где $A = Z_{(q-1)/(2s)}$ и $B = Z_{2e+1}$.

3. *Унитарная серия.* Граф $\mathcal{U}_3(q)$ имеет массив пересечений

$$\{q^3, q^3-q^2-q-2, 1; 1, q^2+q+1, q^3\},$$

$q = p^e > 3$, $s = (q-1)_{2'}$, $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{U}_3(q)) = \mathrm{Aut}(U_3(q))$ и G_a — расширение группы $S \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Soc}(G))$ порядка q^3 с помощью группы $X = A.B$, где $A = Z_{(q^2-1)/s}$ и $B = Z_e$.

В предположении существования графа $\mathcal{U}_3(q)$ для любого неединичного делителя s числа $(q-1)_{2'}$ существует граф $\mathcal{U}_3(q,s)$ с массивом пересечений

$$\{q^3, (s-1)(q^3-1)/s, 1; 1, (q^3-1)/s, q^3\},$$

$q = p^e > 3, G = \mathrm{Aut}(\mathcal{U}_3(q,s)) = \mathrm{Aut}(U_3(q))$ и G_a — расширение группы $S \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Soc}(G))$ порядка q^3 с помощью группы $X = A.B$, где $A = Z_{(q^2-1)/s}$ и $B = Z_e$ (здесь мы исправляем небольшую неточность из [19], а именно, указанное в [19] условие абелевости групп X из пп. 1 и 3 в общем случае не является необходимым).

Теорема 1.16 ([19, теорема 2]). *Пусть Γ — это реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{r\mu+1, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, r\mu+1\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $r > 2$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$k = q$ — степень простого числа, r делит $q-1$, $L_2(q) \trianglelefteq G$ и Γ имеет массив пересечений*
$$\{q, (r-1)(q-1)/r, 1; 1, (q-1)/r, q\};$$

(2) *$\Gamma \in \{\mathcal{S}uz(q,r), \mathcal{R}ee(q,r), \mathcal{U}_3(q,r)\}$.*

§ 1.3. Дистанционно регулярный граф как метрическая схема и метод Хигмена

Когерентной конфигурацией называется пара $(\Omega, \mathcal{P})$, состоящая из конечного множества Ω и множества $\mathcal{P} = \{R_0, R_1 \ldots, R_s\}$ бинарных отношений на Ω, удовлетворяющего следующим четырем условиям:

(1) $\mathcal{R}$ — разбиение множества Ω^2;

(2) в $\mathcal{R}$ существует подмножество $\mathcal{R}_0$, являющееся разбиением *диагонали* $\{(x,x) \mid x \in \Omega\}$;

(3) ${R_t}^* := \{(y,x) \mid (x,y) \in R_t\} \in \mathcal{R}$ для каждого отношения $R_t \in \mathcal{R}$;

(4) для всех $0 \le i,j,t \le s$ существуют константы p_{ij}^t (называемые *числами пересечений* когерентной конфигурации) такие, что для любой пары $(x,y) \in R_t$ число точек $z \in \Omega$ таких, что $(x,z) \in R_i$ и $(z,y) \in R_j$ равно p_{ij}^t.

Пусть $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$ — когерентная конфигурация. Ее *базисными отношениями* называются элементы множества $\mathcal{R}$. Если диагональ $\{(x,x) \mid x \in \Omega\}$ содержится в $\mathcal{R}$, то когерентная конфигурация $\mathcal{X}$ называется *однородной.* Однородные когерентные конфигурации мы будем называть *схемами отношений* или просто *схемами.* Если G — транзитивная группа подстановок на конечном множестве Ω, то, как легко понять, пара $(\Omega, \mathrm{Orb}_2(G))$ образует ассоциированную с G схему отношений (*схему орбиталов* группы G); всякая схема подобного вида называется *шуровой.* Схема отношений $(\Omega, \mathcal{R})$ с $d+1$ базисными отношениями называется *метрической*, если для некоторого упорядоченного набора $(R_1, \dots, R_d)$ ее недиагональных базисных отношений выполнены следующие условия:

(5) $R_i = {R_i}^*$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$;

(6) $p_{ij}^{i+j} \neq 0$ и условие $p_{ij}^k \neq 0$ влечет $k \leq i+j$ для всех $0 \leq i, j, k \leq d$.

Предложение 1.17 ([54], см. также [40, предложение 2.7.1])**.** (1) *Если схема отношений $(X, \mathcal{R})$ является метрической относительно набора $(R_1, \dots, R_d)$ всех ее недиагональных базисных отношений, то граф $\Gamma = (X, R_1)$ является дистанционно регулярным графом диаметра d.*

(2) *Если Γ — это дистанционно регулярный граф диаметра d, $X = V(\Gamma)$ и $R_i = \{(x, y) \in X^2 | d(x, y) = i\}$ для всех $0 \leq i \leq d$, то $(X, \{R_0, R_1, \dots, R_d\})$ — это метрическая схема отношений.*

В доказательствах основных результатов диссертации применяется метод изучения автоморфизмов дистанционно регулярного графа, представленный в [49, § 3], который согласно П. Камерону был предложен Г. Хигменом.

Пусть Γ — дистанционно-регулярный граф диаметра d, $X = V(\Gamma)$ и $v = |X|$. Положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Представим граф Γ как метрическую схему отношений $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1, ..., R_d\})$, где $R_i = \{(x, y) \in X^2 \mid d(x, y) = i\}$. Пусть A_i — это матрица смежности графа Γ_i для $i \geq 1$ и A_0 — единичная матрица порядка v. Тогда $A_iA_j = \sum\limits_{l=0}^{d} p_{ij}^l A_l$, где $p_{ij}^l = |\Gamma_i(a) \cap \Gamma_j(b)|$ для произвольной пары вершин $(a, b) \in R_l$. Для каждого $0 \leq i \leq d$ через P_i обозначим *матрицу i-пересечений*, т. е. матрицу такую, что $(P_i)_{jl} = p_{ij}^l$. Тогда набор матриц $\{P_0, P_1, ..., P_d\}$ порождает матричную алгебру, изоморфную алгебре Боуза—Мейснера схемы $\mathcal{X}$ (отображение $A_i \mapsto P_i$ продолжается до искомого изоморфизма). При этом собственные значения матрицы A_i совпадают с собственными значениями $p_i(j)$ матрицы P_i, в частности, собственные значения $b_0 = p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ с кратностями $m_0 = 1, ..., m_d$ соответственно. Обозначим через W_0,W_1,...,W_d отвечающие им собственные подпространства матрицы A_1.

Теорема 1.18 ([50, теорема 17.12])**.** *Пусть u_j и w_j — это левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие единичную первую координату. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j\rangle$.*

Матрицы P и Q такие, что $(P)_{ij} = p_j(i)$ и $(Q)_{ij} = m_jp_i(j)/k_i$ называются соответственно *первой и второй матрицами собственных значений* графа Γ. Из доказательства этой теоремы, приведенного в [50, с. 202–203] также следует, что

(1) $PQ = QP = vI$, где I — единичная матрица порядка $d+1$,

(2) векторы w_j являются столбцами матрицы P и векторы $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на X дает мономиальное матричное представление ψ группы G в $\mathrm{GL}_v(\mathbb{C})$, определенное следующим образом:

$$\psi(g)_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{если } a^g = b, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

для всех $a, b \in X$ и $g \in G$ (далее подобное представление ψ мы будем называть *стандартным*). Нетрудно понять, что для каждого $g \in G$ алгебра Боуза—Меснера схемы $\mathcal{X}$ централизует $\psi(g)$. Поэтому каждое пространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. При этом оказывается, что значения характера χ_i проекции представления ψ на W_i можно выразить следующим образом (см. [49, § 3.7]).

Предложение 1.19. *Для каждого $g \in G$ имеем*

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g), \tag{3}$$

где $\alpha_j(g)$ — число вершин $x \in X$ таких, что $d(x, x^g) = j$.

Отметим, что поскольку значение характера является целым алгебраическим числом, то $\chi_i(g)$ — целое число всякий раз, когда значения Q_{ij} матрицы Q, входящие в выражение для $\chi_i(g)$ из формулы (3), являются рациональными числами.

§ 1.4. Вспомогательные результаты из теории чисел и теории групп подстановок

Лемма 1.20. *Пусть q — это степень простого числа, $e \in \{1, -1\}$ и $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) $(q^k - 1, q^m - 1) = q^{(k,m)} - 1$ (см. [11, лемма 3])*;*

(2) $(q^k + 1, q^m + 1) = q^{(k,m)} + 1$, *если* $(k)_2 = (m)_2$, *и* $(q^k + 1, q^m + 1) = (2, q+1)$ *в противном случае* (см. [132, лемма 6(iii)])*;*

(3) $(q^k - 1, q^m + 1) = q^{(k,m)} + 1$, *если* $(k)_2 > (m)_2$, *и* $(q^k - 1, q^m + 1) = (2, q+1)$ *в противном случае* (см. [132, лемма 6(iii)])*;*

(4) *если нечетное простое число r делит $q - e$, то* $(q^m - e^m)_r = (m)_r (q-e)_r$ (см. [132, лемма 6(ii)])*;*

(5) *если 4 делит $q - e$ или m нечетно, то* $(q^m - e^m)_2 = (m)_2 (q-e)_2$ (см. [78, гл. IX, лемма 8.1]).

Теорема 1.21 (Теорема Жигмонди [134], см. также [99]). *Если p — это простое число и $2 \leq n \in \mathbb{N}$, то существует простое число z такое, что z делит $p^n - 1$ и не делит $p^m - 1$ для всех $1 \leq m < n$, кроме случаев*

(1) *$p = 2$ и $n = 6$;*

(2) *$p = 2^q - 1$ — простое число Мерсенна (в частности, число q — простое) и $n = 2$.*

Лемма 1.22 (Следствие теоремы Жигмонди). *Если p и q — простые числа, $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$ и*

$$p^m = q^n + 1,$$

то выполняется одно из следующих условий:

(1) *$q = 2, p = 3, n = 3, m = 2$;*

(2) *$q = 2, m = 1$, n — степень 2 и $p = q^n + 1$ — простое число Ферма;*

(3) *$p = 2, n = 1$ и $q = p^m - 1$ — простое число Мерсенна, в частности, число m — простое.*

Как известно, на основе классификации конечных простых групп были классифицированы все конечные 2-транзитивные группы подстановок. Приведем ниже список таких групп в соответствии с [66, теорема 2.9] (см. также [46, теорема 11.2.1]).

Предложение 1.23 (Классификация конечных 2-транзитивных групп подстановок). *Пусть G — это конечная 2-транзитивная группа подстановок на множестве X, $|X| = n$, $a \in X$, $H = G_a$ и T — это цоколь группы G. Тогда либо*

(1) *G — почти простая группа и для (T, n) выполняется одна из следующих возможностей:*

   (i) *знакопеременные (A_n, n), $n \geq 5$;*

   (ii) *линейные $(L_m(q), (q^m - 1)/(q - 1))$, $m \geq 2$ и $(m, q) \notin \{(2, 2), (2, 3)\}$;*

   (iii) *симплектические $(Sp_{2m}(2), 2^{2m-1} \pm 2^{m-1})$, $m \geq 3$;*

   (iv) *унитарные $(U_3(q), q^3 + 1)$, $q \geq 3$;*

   (v) *Ри $({}^2G_2(q), q^3 + 1)$, $q = 3^{2a+1} \geq 27$;*

   (vi) *Судзуки $(Sz(q), q^2 + 1)$, $q = 2^{2a+1} \geq 8$;*

   (vii) *Матье (M_n, n), $n \in \{11, 12, 22, 23, 24\}$;*

   (viii) *спорадические $(L_2(11), 11)$, $(M_{11}, 12)$, $(A_7, 15)$, $(L_2(8), 28)$, $(HiS, 176)$, $(Co_3, 276)$,*

либо

(2) *$G = TH$, T — элементарная абелева группа порядка $n = p^m$ и выполняется одна из следующих возможностей:*

(i) *линейные* $m = cd$, $d \geq 2$ *и* $SL_d(p^c) \lhd H \leq \Gamma L_d(p^c)$;

(ii) *симплектические* $m = ct$, t *четно,* $t \geq 4$ *и* $Sp_t(p^c) \lhd H \leq Z_{p^c-1} \circ \Gamma Sp_d(p^c)$;

(iii) G_2*-типа* $m = 6c$, $p = 2$ *и* $G_2(2^c)' \lhd H \leq Z_{2^c-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(2^c))$;

(iv) *одномерные* $H \leq \Gamma L_1(p^m)$;

(v) *исключительные* $p^m \in \{9^2, 11^2, 19^2, 29^2, 59^2\}$ *и* $SL_2(5) \lhd H$, *либо* $p^m = 2^4$ *и* A_6 *или* $A_7 \lhd H$, *либо* $p^m = 3^6$ *и* $SL_2(13) \lhd H$;

(vi) *экстраспециальные* $p^m \in \{5^2, 7^2, 11^2, 23^2\}$ *и* $SL_2(3) \lhd H$ *или* $p^m = 3^4$, $R = D_8 \circ Q_8 \lhd H$, $H/R \leq S_5$ *и* 5 *делит* $|H|$.

Предложение 1.24. *Пусть* G *— почти простая дважды транзитивная группа подстановок на множестве* X *и* T *— цоколь группы* G. *Пусть* $\mathrm{d}_{\min}$ *— степень минимального подстановочного представления группы* T. *Тогда для* $(T, \mathrm{d}_{\min})$ *выполняется одна из следующих возможностей:*

(1) *знакопеременные* (A_s, s), $s \geq 5$;

(2) *линейные* $(L_d(q), \dfrac{q^d-1}{q-1})$ *(за исключением случаев* $(d; q) = (2; 5)$, $(2; 7)$, $(2; 9)$, $(2; 11)$, $(4; 2)$, *в которых* $\mathrm{d}_{\min} = 5$, 7, 6, 11 *или* 8 *соответственно)* (см. [14, теорема 1]);

(3) *симплектические* $(Sp_{2s}(2), 2^{2s-1} - 2^{s-1})$, $s \geq 3$ (см. [14, теорема 2]);

(4) *унитарные* $(U_3(5), 50)$ *или* $(U_3(q), q^3 + 1)$ *при* $q \neq 5$ (см. [14, теорема 3]);

(5) *Ри* $({}^2G_2(q), q^3 + 1)$, $q = 3^{2a+1} \geq 27$ (см.[106]);

(6) *Судзуки* $(Sz(q), q^2 + 1)$, $q = 2^{2a+1} \geq 8$ (см. [117]);

(7) *спорадические* $(HiS, 100)$, $(Co_3, 276)$, (M_s, s), *где* $s \in \{11, 12, 22, 23, 24\}$ (см., например, [13, таблица 4]).

Глава 2. Транзитивные на дугах группы автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа диаметра 3: аффинный случай

В данной главе проводится классификация реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в случае, когда полная группа автоморфизмов графа индуцирует аффинную группу подстановок на множестве его антиподальных классов.

Теорема 2.1. *Предположим, что группа G действует транзитивно на дугах антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$, где $r\notin\{2,k,(k-1)/\mu\}$, и индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Пусть K — ядро действия G на Σ, $F\in\Sigma$, $a\in F$, $H=G_{\{F\}}$, $C=C_{G_a}(K)$, $|\Sigma|=p^e$, где p — простое число, и T — полный прообраз цоколя группы G^{Σ} в G. Если $p=2$, то либо $K=1$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{15,10,1;1,2,15\}$, либо $|K|=r$, $r\mu=k+1=2^e$, $\mu>1$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$R=\mathrm{GL}_1(2^e)\cap G_a\trianglelefteq G_a\le\Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, G_a содержит подгруппу B нечетного порядка, которая содержит R и действует транзитивно на $[a]$, и выполняются следующие утверждения:*

(*i*) *если T содержит нормальную в G подгруппу порядка 2^e, то $K=E_r, r=\mu=2^{e/2}$, H действует 2-транзитивно на F, T — элементарная абелева или специальная группа порядка $2^{e+e/2}$, $C_K(R)=1$, $C_R(K)=\langle\tilde{h}\rangle>1$, $\alpha_1(\tilde{h})=|R|2^{e/2+1}w$ и $0\le w\le(e,2^e-1)/2$, в частности, если $|R|=2^e-1$, то $\alpha_1(\tilde{h})=0$ и группа $R/C_R(K)$ действует регулярно на $F-\{a\}$;*

(*ii*) *если $C_R(K)=1$, то $\Phi(K)=1, e=6$ и $r=32$;*

(*iii*) *если $C_R(K)>1$, то $|C_R(K)|>2^{e/2}/(e,2^e-1)$, $r\le 2^{e/2}\le\mu$ и $C_T(R)\le K\le Z(T)$, а если к тому же $\Phi(T)<K$ и $B\le C_G(K)$, то $\Phi(T)=1$, группа T содержит нормальную в TB подгруппу порядка 2^e и Γ — граф из п. (*i*) выше;*

(2) *$e=2dc$, $d\ge1$, r делит 2^c, T — элементарная абелева группа порядка 2^er, не содержащая нормальных в G подгрупп порядка 2^e, $Sp_{2d}(2^c)\trianglelefteq G_a$ или $d=3$ и $G_2(2^c)\trianglelefteq G_a$.*

Теорема 2.2. *В предположениях и обозначениях из теоремы 2.1, а также при условии, что $p>2$ и $\mu>1$, имеем $|K|=r$, $r\mu=k+1=p^e$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *реализуется экстраспециальный случай, $r=p$, T — экстраспециальная группа порядка rp^e и экспоненты p и либо*

(*i*) *$p^e=3^4$, $Q_8\circ D_8\simeq R_0\trianglelefteq C$, $G_a/R_0\le S_5$ и 5 делит $|G_a|$, либо*

(*ii*) *$p^e=5^2$, $\mathrm{SL}_2(3)\le C, G_a\le\mathrm{SL}_2(3).Z_4$, либо*

(*iii*) *$p^e=7^2$, $\mathrm{SL}_2(3)\le C,\mathrm{SL}_2(3).Z_2\le G_a\le\mathrm{SL}_2(3).Z_6$, либо*

(*iv*) *$p^e=11^2$, $C\simeq\mathrm{SL}_2(3)$, $G_a\simeq Z_5\times\mathrm{SL}_2(3)$ или $Z_5\times\mathrm{GL}_2(3)$, либо* *(v)* $p^e = 23^2$, $G_a \simeq Z_{11} \times (\mathrm{SL}_2(3).Z_2)$, $C \simeq \mathrm{SL}_2(3)$ *или* $\mathrm{SL}_2(3).Z_2$*;*

(2) *реализуется исключительный случай и* $G_a \trianglerighteq S \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ *при* $k \neq 728$ *и* $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(13)$ *при* $k = 728$, T *— специальная группа порядка* rp^e *и экспоненты* p *и либо*

(i) $p^e = 3^6$, $r = 3$, $C = G_a \simeq \mathrm{SL}_2(13)$, *либо*

(ii) $p^e = 9^2$, $r \in \{3, 9\}$, $G_a/S \leq D_8$, $S \leq C$, *либо*

(iii) $p^e = 11^2$, $r = 11$, $S = C$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ *или* $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{10}$, *либо*

(iv) $p^e = 19^2$, $r = 19$, $S \leq C$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{18}$, *либо*

(v) $p^e = 29^2$, $r = 29$, $S \leq C$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{14}$ *или* $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{28}$, *либо*

(vi) $p^e = 59^2$, $r = 59$, $S = C$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{58}$*;*

(3) *реализуется одномерный случай,* $R = G_a \cap GL_1(p^e) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *и либо*

(i) $e > 4$, $r \geq p^{e/2}$, T *— специальная группа порядка* rp^e *и экспоненты* p, *и* R *не нормализует подгрупп индекса* p *в* K, *либо*

(ii) $e = 4$, $r = p^2 = \mu$, T *— специальная группа порядка* p^6, *группа* R *действует полурегулярно на* $[a]$ *и группа* $R/C_R(K)$ *действует полурегулярно на* $F - \{a\}$, *либо*

(iii) $e = 4, p = 3$, T *— специальная группа порядка* rp^4 *и* $R \leq N_G(K_1)$, *где* K_1 *— подгруппа индекса* p *в* K, $|R| = 20$, $G_a \simeq Z_5 : Z_{16}$ *и* $|R/C_R(K)| \leq 2$, *либо*

(iv) $e = 2$, $r = p$, T *— экстраспециальная группа экспоненты* p *и* $G_a \leq \mathrm{GL}_2(p)$, *либо*

(v) $e = 2$, $3 < r = p$ *— простое число Мерсенна,* T *— абелева группа и* $C_T(G_a) = 1$*;*

(4) *реализуется симплектический случай,* $e = 2dc$, $d \geq 1$, r *делит* p^c, $Sp_{2d}(p^c) \trianglelefteq G_a$, T *— специальная группа порядка* rp^{2dc} *и экспоненты* p.

Теорема 2.3. *Пусть* Γ *— реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 3, *удовлетворяющий условиям из пп. 1, 2, 4 или условию* $\mathrm{GL}_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *при* $e = 2$ *из п. 3(iv) заключения теоремы 2.2. Тогда граф* Γ *изоморфен дистанционно регулярному графу, получаемому с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля.*

Следствие 2.4. *Если в теореме 2.2 вместо условия* $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *предполагать, что* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *то графы из пп. 1 и 2, а также граф со свойством* $\mathrm{GL}_1(p^e) \leq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$ *для* $e = 2$ *из п. 3(iv) заключения теоремы 2.2 не существуют.*

Замечание 2.5. 1) Случаи $r \in \{2, k, (k-1)/\mu\}$ были рассмотрены в [19]. Кроме того, в [124] и [19] было установлено, что при $\mu = 1$ или $\mu = (k-1)/r$ группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma$ реберно симметричного недвудольного антиподального д.р.г. Γ диаметра 3 не может быть аффинной (см. теоремы 1.15 и 1.16).

2) При $K = 1$ возникает всего два различных (с точностью до изоморфизма) графа. Один из них строится как геометрический граф для обобщенного четырехугольника $\mathrm{GQ}(5, 3)$ с удаленным спредом (этот обобщенный четырехугольник допускает 24 спреда и его группа автоморфизмов действует транзитивно на них (см. [104])). Полная группа автоморфизмов данного антиподального д.р.г. имеет абстрактное строение вида $2^4.\mathrm{GL}_2(4).Z_2$. Другой граф может быть получен путем удаления спреда из псевдогеометрического графа

для GQ(5, 3) (см. [43]). Полная группа автоморфизмов этого антиподального д.р.г. имеет абстрактное строение вида $2^4.S_6$ и окрестность вершины в нем изоморфна графу прямых графа Петерсена (то есть графу M(4, 3)).

3) Для каждой допустимой тройки параметров (k, r, μ) граф из пп. 1, 2 и 4 заключения теоремы 2.2 существует (для тройки параметров (k, r, μ) из пп. 1 или 2 теоремы 2.2 такой граф является дистанционно-транзитивным и изоморфен графу из п. 4 (с теми же параметрами)). Для тройки параметров $(k, r, \mu) = (8, 3, 3)$ графы из пп. 3 и 4 заключения теоремы 2.2 существуют, изоморфны между собой и ввиду результата А. Броувера и Х. Вилбринка могут быть построены как геометрический граф для обобщенного четырехугольника GQ(2, 4) с удаленным спредом (см. [40, с. 386]).

4) По следствию 2.4 в списке необходимых условий существования графа из основной теоремы в [148] пропущенными оказались условия в одномерном случае (п. 1 теоремы 2.1 и п. 3 теоремы 2.2).

Результаты главы опубликованы в статьях [148, 146, 137].

Обозначения и предположения главы 2. Всюду далее в этой главе (за исключением параграфа 2.1 и специально оговоренных случаев) Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$, G — подгруппа из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, действующая транзитивно на дугах графа Γ, Σ — множество антиподальных классов графа Γ (так что по лемме 1.4(1) группа G^Σ 2-транзитивна), $K = G \cap \mathcal{CG}(\Gamma)$, $a \in F \in \Sigma$, $H = G_{\{F\}}$ и $C = G_F$, при этом предполагается, что G^Σ — аффинная группа, $2 < r < k$, $\mu > 1$ и $\lambda \neq \mu$.

До конца главы также используются следующие обозначения: $\bar{G} = G/K = \bar{T}\bar{H} (\simeq G^\Sigma)$, где $\bar{T}$ — минимальная нормальная в $\bar{G}$ элементарная абелева группа порядка $p^e = k+1 = |\Sigma|$, действующая регулярно на Σ, $\bar{H} = H/K$ и T — полный прообраз группы $\bar{T}$ в G.

§ 2.1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены вспомогательные результаты, используемые в доказательстве теоремы 2.1.

§§ 2.1.1. Характеры стандартного представления группы автоморфизмов

Лемма 2.6. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $k \neq r\mu+1$ *и спектром* $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^h$, *где* $n > 0$, $f = m(r-1)(k+1)/(m+n)$ *и* $h = n(r-1)(k+1)/(m+n)$. *Если* $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, χ_i *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* d_i, *отвечающее собственному значению* θ_i, $(i, d_i, \theta_i) \in \{(1, f, n), (2, k, -1), (3, h, -m)\}$, *то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно* *простого с* $|g|$,

$$\begin{aligned}\chi_1(g) &= \frac{(m(r-1)+1)\alpha_0(g)+(1-m)\alpha_3(g)}{r(m+n)}+\frac{\alpha_1(g)-(k+1)}{m+n},\\ \chi_2(g) &= \frac{\alpha_0(g)+\alpha_3(g)}{r}-1=k-\frac{\alpha_1(g)+\alpha_2(g)}{r},\\ \chi_3(g) &= \frac{(n(r-1)-1)\alpha_0(g)-(1+n)\alpha_3(g)}{r(m+n)}+\frac{-\alpha_1(g)+(k+1)}{m+n}.\end{aligned}$$

Если $|g|=p$ *— простое число, то числа* $\chi_1(g)-f$ *и* $\chi_2(g)-k$ *делятся на* p.

Доказательство. Имеем

$$P_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ k & k-\mu(r-1)-1 & \mu & 0\\ 0 & \mu(r-1) & k-\mu-1 & k\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Рассмотрим, например, $p_1(1)=n$. Тогда

$$P_1-nI=\begin{bmatrix}-n & 1 & 0 & 0\\ k & k-\mu(r-1)-1-n & \mu & 0\\ 0 & \mu(r-1) & k-\mu-1-n & k\\ 0 & 0 & 1 & -n\end{bmatrix}.$$

Если $(1,x_2,x_3,x_4)$ — вектор-строка из ядра матрицы P_1-nI, то $x_2=n/k$, $x_3=-1/(m(r-1))$ и $x_4=-1/(r-1)$. Отсюда

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ k & n & -1 & -m\\ k(r-1) & -n & -(r-1) & m\\ r-1 & -1 & r-1 & -1\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ f & f/m & -(k+1)/(m+n) & -f/(r-1)\\ k & -1 & -1 & k\\ h & -h/n & (k+1)/(m+n) & -h/(r-1)\end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\chi_1(g)=(m(r-1)\alpha_0(g)+(r-1)\alpha_1(g)-\alpha_2(g)-m\alpha_3(g))/(r(m+n)).$$

Так как

$$\alpha_2(g)=r(k+1)-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_3(g),$$

то

$$\chi_1(g)=((m(r-1)+1)\alpha_0(g)+(1-m)\alpha_3(g))/(r(m+n))+(\alpha_1(g)-(k+1))/(m+n).$$

Аналогично,

$$\chi_2(g)=(k\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_2(g)+k\alpha_3(g))/r(k+1).$$

Подставляя

$$\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = r(k+1) - \alpha_0(g) - \alpha_3(g),$$

получим

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/r - 1 = k - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/r.$$

Остальные утверждения леммы следуют из [6, лемма 1].

Лемма 2.7. *В обозначениях леммы 2.6 для $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф и $|g| = p$ — простое число, то либо*

 (*i*) *p не делит r, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g) = r(k+1)$, и $\chi_1(g) = (\alpha_1(g)-(k+1))/(m+n)$, либо*

 (*ii*) *p делит r, $\alpha_3(g) = tr$ и $\chi_1(g) = ((1-m)t+\alpha_1(g)-(k+1))/(m+n)$; в частности, если $\alpha_3(g) = r(k+1)$, то $\chi_1(g) = -m(k+1)/(m+n)$ и $\chi_3(g) = -n(k+1)/(m+n)$;*

(2) *если Ω содержит $t > 0$ антиподальных классов, то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g)+\alpha_2(g) = r(k+1-t)$, $\chi_2(g) = \alpha_0(g)/r-1$ и $\chi_1(g) = (m(r-1)+1)\alpha_0(g)/(r(m+n))+(\alpha_1(g)-(k+1))/(m+n)$;*

(3) *если $\alpha_2(g) = r(k+1)$, то $\chi_1(g) = -(k+1)/(m+n)$.*

Доказательство. Положим $v = r(k+1)$. По лемме 2.6 имеем

$$\chi_1(g) = ((m(r-1)+1)\alpha_0(g) + (1-m)\alpha_3(g))/(r(m+n)) + (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n),$$

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/r - 1 = k - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/r.$$

Пусть Ω — пустой граф. Если $|g|$ не делит r, то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = v$,

$$\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n).$$

Пусть $|g|$ делит r. Тогда $\alpha_3(g) = tr$, $\chi_2(g) = t - 1$ и

$$\chi_1(g) = ((1-m)t + \alpha_1(g) - (k+1))/(m+n).$$

Если $\alpha_3(g) = v$, то $\chi_1(g) = -m(k+1)/(m+n)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω содержит $t > 0$ антиподальных классов. Тогда $\alpha_3(g) = 0$, $|g|$ делит $k+1-t$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = r(k+1-t)$, $\chi_2(g) = \alpha_0(g)/r - 1$ и

$$\chi_1(g) = (m(r-1)+1)\alpha_0(g)/(r(m+n)) + (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n).$$

Утверждение (2) доказано.

Если $\alpha_2(g) = v$, то ввиду равенства

$$\chi_1(g) = ((m(r-1)+1)\alpha_0(g) + (1-m)\alpha_3(g))/(r(m+n)) + (\alpha_1(g) - (k+1))/(m+n)$$

имеем $\chi_1(g) = -(k+1)/(m+n)$. Лемма доказана.

§§ 2.1.2. Допустимые параметры графов, обладающих автоморфизмом g с ограничениями на $\alpha_i(g)$

Следующие две вспомогательные леммы в совокупности с леммой 2.7 позволяют определить массив пересечений графа Γ, удовлетворяющего условиям леммы 2.6, в случае, когда $k+1$ — степень простого числа, $\mu > 1$ и существует элемент $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ со свойством $\alpha_2(g) = r(k+1)$ или $\alpha_3(g) = r(k+1)$.

Лемма 2.8. *В обозначениях леммы 2.6 если $k+1$ — степень простого числа p, $\mu > 1$ и $m+n = p^s$, где $s < e$, то $p = 2$, $\{m, n\} = \{2^{e/2}-1, 2^{e/2}+1\}$, $\lambda - \mu = \pm 2$ и $r\mu \in \{2^e, 2^e-4\}$.*

Доказательство. Пусть $m+n = p^s$ и $s < e$. Имеем $k = nm = p^e - 1, r\mu = (m-1)(n+1)$ и $n - m + 2 = p^e - r\mu$, $e < 2s$.

Вычислим разность $(m+n)^2 - r\mu(r\mu+4)$. Имеем

$$r\mu(r\mu+4) = (nm+m-n-1)(nm+m-n+3) =$$

$$= (k+1+m-n-2)(k+1+m-n+2) = (k+1)^2 + 2(k+1)(m-n) + m^2 + n^2 - 2mn - 4.$$

Поэтому

$$(m+n)^2 - r\mu(r\mu+4) = -(k+1)^2 + 2(k+1)(n-m+2) = p^{2e} - 2p^e r\mu,$$

следовательно, $p^{2s} - p^{2e} = r\mu(r\mu + 4 - 2p^e)$ и $r\mu + 4 < 2p^e$.

Далее, $(r\mu + 4 - 2p^e, r\mu)$ делит $2(2-p^e)$.

Допустим, что p нечетно. Тогда p-часть числа $r\mu$ или $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}. Если p-часть числа $r\mu$ равна p^{2s}, то

$$r\mu + 4 - 2p^e = p^{2s}h + 4 - 2p^e = p^e(p^{2s-e}h - 2) + 4 > 0,$$

где $(h,p) = 1, h > 0$, противоречие. Если p-часть числа $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}, то $(r\mu, p) = 1, r\mu + 4 - 2p^e = p^{2s}h$, $(h,p) = 1$, $h < 0$ и $r\mu + 4 = p^e(2 + p^{2s-e}h)$, откуда p-часть числа $r\mu + 4$ равна p^e. Но $r\mu + 4 = p^e f < 2p^e$, $(f,p) = 1$, $f > 0$, поэтому $f = 1$ и $1 = 2 + p^{2s-e}h$, откуда $h = -1$ и $2s = e$, противоречие.

Пусть теперь $p = 2$. Если $r\mu = p^e$, то $m - n = 2$, $p^{2s} + p^{2e} = r\mu(r\mu+4) = 4p^e + p^{2e}$ и $p^{2s} = 4p^e$, откуда $p^{2s-e} = 4$ и $2(s-1) = e$. Поэтому в этом случае $m = p^{e/2}+1$ и $n = p^{e/2}-1$.

Пусть $r\mu \neq p^e$. Число $(r\mu + 4 - 2p^e, r\mu)$ делит $2(2-p^e) = 4(1-2^{e-1})$ и p-часть числа $r\mu$ или $r\mu + 4 - 2p^e$ не меньше, чем p^{2s-2}. Если $r\mu = p^{2s-2}x$, то

$$r\mu + 4 - 2p^e = 2^{2s-2}x + 4 - 2^{e+1} = 2^{e+1}(2^{2s-2-e-1}x - 1) + 4 < 0,$$

что возможно лишь при $s = e/2+1$ и поэтому $(m;n) = (2^{e/2}-1; 2^{e/2}+1)$, $r\mu = 2^e - 4, e \geq 4$.

Если $r\mu + 4 - 2p^e = p^{2s-2}y$, то $r\mu + 4 = 2^{e+1} + 2^{2s-2}y = 2^{e+1}(1 + 2^{2s-e-3}y), y \leq -1$, поэтому $2s - e - 3 < 0$ и $2s < e+3$. Случай $2s = e+1$ невозможен, поэтому снова $2s = e+2$, $(m;n) = (2^{e/2}-1; 2^{e/2}+1)$ и $r\mu = 2^e - 4$.

Так как $\lambda - \mu = n - m$, то $\lambda - \mu = \pm 2$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *В обозначениях леммы 2.6 если $k+1$ — степень простого числа p, $\mu > 1$ и $m+n = p^s x$, где $x > 1, (x,p) = 1$ и $s > 0$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *p нечетно и либо*

(i) *$(m;n) = (p^{e/2}+1; p^{e/2}-1)$ и $r\mu = p^e$, либо*

(ii) *p не делит $r\mu$ и p-часть числа $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}, $e \geq 2s$, и, в частности, если $e = 2s$, то $r\mu = p^e - 4$, $(m;n) = (p^{e/2}-1; p^{e/2}+1)$;*

(2) *$p = 2$ и либо*

(i) *$(r\mu, 8) = 4$ и 2-часть числа $r\mu + 4 - 2^{e+1}$ равна 2^{2s-2}, либо*

(ii) *$(m;n) = (2^{e/2}+1; 2^{e/2}-1)$ и $r\mu = 2^e$.*

Доказательство. Пусть $m+n = p^s x, x > 1, (x,p) = 1$ и $s > 0$. Имеем $k = nm = p^e - 1, r\mu = (m-1)(n+1), n-m+2 = p^e - r\mu$. Так как по условию $r > 2$, то $m+n = p^s x < p^e$.

Как и в лемме 2.8 получим, что

$$(m+n)^2 - r\mu(r\mu+4) = p^{2e} - 2p^e r\mu,$$

следовательно, $p^{2s}x^2 - p^{2e} = r\mu(r\mu + 4 - 2p^e)$ и $r\mu + 4 < 2p^e$.

Далее, $(r\mu + 4 - 2p^e, r\mu)$ делит $2(2-p^e)$.

Пусть p нечетно. Тогда p-часть числа $r\mu$ или $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2s}.

Во втором случае $-p^{2s}z = r\mu + 4 - 2p^e, (z,p) = 1, z > 0$ и $e \geq 2s$, причем равенство $e = 2s$ возможно лишь при $z = 1, r\mu = p^e - 4$ (в частности, при $e = 2$) и $(m;n) = (p^{e/2}-1; p^{e/2}+1)$.

Пусть $r\mu = p^{2s}y, (y,p) = 1$. Из условия $r\mu < 2p^e - 4$ получим, что $2s \leq e$, причем равенство $2s = e$ возможно лишь при $y = 1$.

Положим $\tilde{a} = n+1, \tilde{b} = m-1$. Тогда $\tilde{a}\tilde{b} = p^{2s}y, \tilde{a} - \tilde{b} = p^e - p^{2s}y = p^{2s}(p^{e-2s} - y)$, откуда $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}^2 + \tilde{b}p^{2s}(p^{e-2s} - y) = p^{2s}y$ и p^s делит $(\tilde{b}, \tilde{a})$, поэтому $\tilde{a} = \tilde{b}, e = 2s$, $y = 1$ и $(m;n) = (p^{e/2}+1; p^{e/2}-1)$.

Пусть $p = 2$. Так как число μ в этом случае четно, то число $(n+1, m-1)$ четно и поэтому 4 делит $r\mu$. Далее, $(r\mu + 4 - 2^{e+1}, r\mu)$ делит $4(1 - 2^{e-1})$, откуда 2-часть числа $r\mu$ или $r\mu + 4 - 2^{e+1}$ равна $2^{2s-2}, s \geq 2$.

Если $r\mu = 2^{2s-2}y$, то из условия $r\mu < 2^{e+1} - 4$ получим, что $2s - 2 < e+1$. Положим $\tilde{a} = n+1, \tilde{b} = m-1$. Тогда $\tilde{a}\tilde{b} = 2^{2s-2}y, \tilde{a} - \tilde{b} = 2^{2s-2}(2^{e-2s+2} - y)$, откуда $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}^2 + \tilde{b}2^{2s-2}(2^{e-2s+2} - y) = 2^{2s-2}y$ и 2^{s-1} делит $(\tilde{b}, \tilde{a})$, поэтому $\tilde{a} = \tilde{b}, e = 2s-2$, $y = 1$, $(m;n) = (2^{e/2}+1; 2^{e/2}-1)$ и $r\mu = 2^e$. Лемма доказана.

§ 2.2. Доказательство предложения 2.10 и графы с тривиальной накрывающей группой

До параграфа 2.5 через n и $-m$ обозначаются соответственно положительное и отрицательное собственные значения графа Γ, отличные от -1 и k.

Предложение 2.10. *Если T содержит нормальную в G подгруппу порядка p^e, то $p = 2$, $G_{\{F\}}$ действует дважды транзитивно на F и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $K = 1$, Γ *имеет массив пересечений* $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ *и либо* $H \simeq A_6$ *или* S_6 *и окрестность вершины — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{4, 2, 1; 1, 1, 4\}$, *либо* $H \simeq \mathrm{GL}_2(4)$ *или* $\mathrm{GL}_2(4).Z_2$ *и окрестность вершины — объединение трех изолированных клик;*

(2) $K = E_r, r = \mu = 2^{e/2}$, Γ *имеет массив пересечений*

$$\{2^e - 1, (2^{e/2} - 1)2^{e/2}, 1; 1, 2^{e/2}, 2^e - 1\}$$

и $G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, T *— элементарная абелева или специальная группа порядка* $2^{e+e/2}$, $C_K(R) = 1$, *где* $R = G_a \cap \mathrm{GL}_1(2^e)$, $C_R(K) = \langle\tilde{h}\rangle > 1$, $\alpha_1(\tilde{h}) = |R|2^{e/2+1}w$ *и* $0 \leq w \leq (e, 2^e - 1)/2$, *в частности, если* $|R| = 2^e - 1$, *то* $\alpha_1(\tilde{h}) = 0$ *и группа* $R/C_R(K)$ *действует регулярно на* $F - \{a\}$.

Доказательство. Пусть T содержит нормальную в G подгруппу N порядка $k+1$. Тогда любая N-орбита содержит единственную вершину из каждого антиподального класса. Для вершины a графа Γ группа G_a действует транзитивно на $[a]$, поэтому каждая N-орбита состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 2, и имеется всего t $(t < r)$ N-орбит, в каждой из которых a смежна точно с α вершинами, в частности, $k = t\alpha$. Для неединичного элемента $g \in N$ получим $\alpha_2(g) = v$ и по лемме 2.7 $\chi_1(g) = -(k+1)/(m+n)$. Теперь ввиду леммы 2.8 получим $p = 2$, $\{m, n\} = \{2^{e/2} - 1, 2^{e/2} + 1\}$ и $r\mu \in \{2^e, 2^e - 4\}$.

Далее, G_a действует транзитивно на множестве неединичных элементов из N и группа NG_a индуцирует дважды транзитивную группу подстановок степени 2^e на a^N.

Вершина из $[a]$ смежна с $\alpha - 1$ вершинами из $a^N - \{a\}$, между $[a]$ и $a^N - \{a\}$ имеется точно $k(\alpha-1)$ ребер, поэтому вершина из $a^N - \{a\}$ смежна "в среднем" с $\alpha - 1$ вершинами из $[a]$. Отсюда $\alpha - 1 = \mu$ и $k = t(\mu+1)$. Так как $b_1 = (r-1)\mu$, то $\lambda = k - b_1 - 1 = t + \mu - (r-t)\mu - 1$, $t(\mu + 1) = r\mu - \mu + 1 + \lambda$ и $t = r - (r - 1 + \mu - \lambda)/(\mu + 1)$.

1. Пусть $t = r - 1$. Тогда G_a действует транзитивно на $\Gamma_3(a)$ и $H = G_{\{F\}}$ действует дважды транзитивно на F. Пусть $\tilde{H} = H^F$ и $\tilde{S}$ — цоколь группы $\tilde{H}(\simeq H/C)$. Если $K \neq 1$, то K изоморфна регулярной нормальной подгруппе из $\tilde{H}$. Поэтому $K = 1$, если $\tilde{H}$ — почти простая группа, и K — элементарная абелева 2-группа порядка r, если $\tilde{H}$ — аффинная группа.

Имеем $k = (r - 1)(\mu + 1)$, $\lambda = r - 2$ и $\lambda - \mu = (r - 1) - (\mu + 1)$, поэтому $n = r - 1$, $m = \mu + 1$ и $m + n = r + \mu$ делит 2^e. Ввиду неравенства $m \leq n^2$ получим $\mu \leq r^2 - 2r$. Теперь $m = \mu+1 = 2^{e/2}-1, n = r-1 = 2^{e/2}+1$ и $r\mu = 2^e-4$ или $m = \mu+1 = 2^{e/2}+1, n = r-1 = 2^{e/2}-1$ и $r\mu = 2^e$.

1.1. Предположим, что $\tilde{S}$ — простая неабелева группа и обозначим через S полный прообраз группы $\tilde{S}$ в H. Тогда $K = 1$ и по предложению 1.23 для G^Σ допустимы только знакопеременный, линейный, симплектический и G_2-типа случаи.

`1.1.` Предположим, что $\tilde S$ — простая неабелева группа и обозначим через S полный прообраз группы $\tilde S$ в H. Тогда $K=1$ и по предложению 1.23 для G^Σ допустимы только знакопеременный, линейный, симплектический и G_2-типа случаи.

`1.1.1.` Пусть $\tilde S = A_r$ ($\tilde S$ как в п. (1)(i) предложения 1.23).

`1.1.1.1.` Предположим, что $H^\infty \not\simeq A_6, A_7$. Тогда $H^\infty \simeq \mathrm{SL}_d(2^c), Sp_d(2^c)$ (($d;c) \neq (4;1)$ поскольку $Sp_4(2)' \simeq A_6$) или $G_2(2^c)'$, поэтому $H^\infty C/C \simeq \tilde S \simeq L_d(2^c), Sp_d(2^c)$ или $G_2(2^c)'$. Имеем

$$|L_d(2^c)| = 2^{c(d-1)d/2}(2^{cd}-1)(2^{c(d-1)}-1)\cdots(2^{2c}-1)/(d,2^c-1),$$

$$|Sp_{2t}(2^c)| = 2^{ct^2}(2^{2ct}-1)(2^{2c(t-1)}-1)\cdots(2^{2c}-1),$$

$$|G_2(2^c)| = 2^{6c}(2^{6c}-1)(2^{2c}-1).$$

Заметим, что 2-часть числа $r!/2$ равна $2^{2^{e/2}-1}$ при $r=2^{e/2}+2$ и равна $2^{2^{e/2}-2}$ при $r=2^{e/2}$.

Если $(d-1)e/2 = 2^{e/2}-1$, то $e/2 \le 4$, поэтому $c=1, d=2$ и $r=4$, противоречие.

Если $(d-1)e/2 = 2^{e/2}-2$, то $e/2 \le 4$, поэтому $c=2, d=3$ и $r=8$, противоречие с тем, что $A_8 \not\simeq L_3(4)$.

Если $ct^2 = 2^{e/2}-1 = 2^{ct}-1$, то $(ct)^2 \ge ct^2 = 2^{ct}-1$, поэтому $ct=3$ и $c=1$, противоречие.

Если $ct^2 = 2^{e/2}-2 = 2^{ct}-2$, то $(ct)^2 \ge ct^2 = 2^{ct}-2$, поэтому $ct \le 4$, противоречие.

Если $6c = 2^{e/2}-1 = 2^{3c}-1$, то $c=0$, противоречие.

Если $6c = 2^{e/2}-2 = 2^{3c}-2$ и $c>1$, то $3c+1 = 2^{3c-1}$, что возможно лишь при $c=1$, противоречие.

Если $3 = 2^{e/2}-1$, то $e \neq 6c$.

`1.1.1.2.` Предположим, что $H^\infty \simeq A_6$ или A_7. Тогда $S = H^\infty$, $|H:S| \le 2$, $p^e = 2^4$ и $r \in \{4,6\}$. Отсюда $S \simeq A_6$, $r=6$ и $\mu=2$. Кроме того, $S_a = A_5$. Компьютерные вычисления в GAP [59] и Magma [38] показывают, что этим условиям удовлетворяет единственный с точностью до изоморфизма дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{15,10,1;1,2,15\}$, причем окрестность вершины в нем — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{4,2,1;1,1,4\}$, и $H \simeq A_6$ или S_6.

`1.1.2.` Если $\tilde H = Sp_{2l}(2)$ и $l \ge 3$ ($\tilde S$ как в п. (1)(iii) предложения 1.23), то $r = 2^{2l-1} \pm 2^{l-1}$. Но $r = 2^{l-1}(2^l \pm 1) \in \{2^{e/2}, 2(2^{e/2-1}+1)\}$, поэтому $l=2$, противоречие.

`1.1.3.` Если $r = q^3+1$ и $\tilde S \simeq U_3(q)$ или ${}^2G_2(q)$ ($\tilde S$ как в пп. (1)($iv-v$) предложения 1.23), то ввиду леммы 1.22 число r не может быть степенью 2, поэтому $r = 2^{e/2}+2$ и по лемме 1.22 $q^3 = 2^{e/2}+1$ — простое число Ферма, противоречие.

`1.1.4.` В случаях, когда $\tilde S$ — группа из пп. (1)($vi-viii$) предложения 1.23 получим противоречие с тем, что число r равно $2^{e/2}$ или $2^{e/2}+2$.

`1.1.5.` Пусть $\tilde S = L_t(q)$ и $r = (q^t-1)/(q-1) = q(q^{t-1}-1)/(q-1)+1$ ($\tilde S$ как в п. (1)(ii) предложения 1.23). Так как r четно, то q — нечетно и t — четно. Значит, $r = (q+1)(q^t-1)/(q^2-1)$.

`1.1.5.1.` Пусть $r = 2^{e/2}$. Тогда $t=2, r=\mu=q+1$ и по лемме 1.22 $q = 2^{e/2}-1$ — простое число Мерсенна, в частности, $e/2 = dc/2$ — простое число. Заметим, что по [77, теорема II.7.3] порядок цикла Зингера в группе $L_2(q)$ равен $(q+1)/2$ и число q является максимальным из порядков ее элементов (см., например, [91]).

`1.1.5.1(а)`. Предположим, что $\mathrm{SL}_d(2^c) \trianglelefteq H$ (для G^Σ реализуется п. (2)(i) предложения 1.23). Тогда $Z(S) \leq C$ и $L_d(2^c) \simeq \tilde{S} \simeq L_t(q)$.

Ввиду [77, теорема II.7.3] порядок цикла Зингера в группе $L_d(2^c)$ равен $(2^e-1)/((2^c-1)(d,2^c-1))$. Если $d=2$, то $c \geq 2$, $(2^e-1)/(2^c-1) = (2^c+1) \leq q$ и $2^{2c} < (2^c+1)(2^c+1) \leq q^2 < r^2 = 2^e$, противоречие. Если $d > 2$, то $c=2$, $r = 2^d = q+1$, $(4^d-1)/(3(d,3)) \leq q = 2^d-1$ и $2^d < 3(d,3)+2^{-d}$, противоречие.

`1.1.5.1(б)`. Предположим, что $Sp_d(2^c) \trianglelefteq H$ (для G^Σ реализуется п. (2)(ii) предложения 1.23). Тогда $Sp_d(2^c)' \simeq \tilde{S} \simeq L_t(q)$. Если $c=1, d=4$, то $q=9, t=2$, противоречие. Если $c>1$ или $d=2l>4$, то

$$|Sp_{2l}(2^c)| = 2^{cl^2}(2^{2cl}-1)(2^{2c(l-1)}-1)\cdots(2^{2c}-1) = \\ (2^{e/2}-1)((2^{e/2}-1)^2-1)/2 = (2^{e/2}-1)2^{e/2}(2^{e/2-1}-1) = |L_2(q)|,$$

и $cl^2 = e/2 = lc$, снова противоречие.

`1.1.5.1(в)`. Предположим, что $G_2(2^c)' \trianglelefteq H$ (для G^Σ реализуется п. (2)(iii) предложения 1.23). Тогда $G_2(2^c)' \simeq \tilde{S} \simeq L_t(q)$. Если $c>1$, то

$$|G_2(2^c)'| = 2^{6c}(2^{6c}-1)(2^{2c}-1) = (2^{e/2}-1)2^{e/2}(2^{e/2-1}-1) = |L_2(q)|,$$

поэтому $6c = e/2 = 3c$, противоречие. Если же $c=1$, то $L_2(7) \not\simeq G_2(2)' \simeq U_3(3)$, снова противоречие.

`1.1.5.2`. Пусть $r = 2^{e/2}+2$. Тогда $4|(q-1)$ и поэтому $(q^t-1)_2 = (t)_2(q-1)_2$. Значит, число $t' = t/2$ — нечетно. Заметим, что порядок цикла Зингера в группе $L_t(q)$ равен $(q^t-1)/((q-1)(t,q-1))$ и является максимальным из порядков ее элементов при $t>2$ (см., например, [91]).

`1.1.5.2(а)`. Пусть $\mathrm{SL}_d(2^c) \trianglelefteq H$ (для G^Σ реализуется п. (2)(i) предложения 1.23). Тогда $Z(S) \leq C$ и $L_d(2^c) \simeq \tilde{S} \simeq L_t(q)$.

Предположим, что $t' > 1$. Тогда $r = q(q^{t-1}-1)/(q-1)+1 = 2^{e/2}+2$ и $q(q^{t-1}-1)/(q-1) = 2^{e/2}+1$. Таким образом,

$$\frac{(2^e-1)}{(2^c-1)(d,2^c-1)} = \frac{(q^t-1)}{(q-1)(t,q-1)} = \frac{r}{(t,q-1)} = \frac{(2^{e/2}+2)}{(t,q-1)}.$$

Ввиду леммы 1.20 $(2^e-1, 2^{e/2-1}+1)$ делит $2^{(e,e/2-1)}+1$. Ясно, что $(e,e/2-1) \leq 2$. Если $(e,e/2-1)=2$, то $e/2$ — нечетно и по лемме 1.20 $(2^e-1, 2^{e/2-1}+1) = 1$. Поэтому $(2^e-1, 2^{e/2-1}+1)$ делит 3. Таким образом,

$$\frac{(2^e-1)(t,q-1)}{2(2^{e/2-1}+1)} = (2^c-1)(d,2^c-1), (2^e-1) \leq 3(2^c-1)(d,2^c-1),$$

$$\frac{(2^e-1)}{(2^c-1)} = 2^c\frac{2^{c(d-1)}-1}{2^c-1}+1 \leq 3(d,2^c-1),$$

противоречие.

Значит, $t' = 1$, $r = q + 1$ и $q = 2^{e/2} + 1$. По лемме 1.22 либо $q = 9$ и $e = 6$, либо q — простое число Ферма и $e/2$ — степень 2. Если $q = 9$, то $cd = 6$, $5 = (q + 1)/2 \geq (2^e - 1)/((2^c - 1)(d, 2^c - 1)) = 63/((2^c - 1)(d, 2^c - 1))$, противоречие. Имеем

$$|L_d(2^c)| = 2^{c(d-1)d/2}(2^{cd} - 1)(2^{c(d-1)} - 1)\cdots(2^{2c} - 1)/(d, 2^c - 1) =$$
$$= q(q^2 - 1)/2 = (2^{e/2} + 1)((2^{e/2} + 1)^2 - 1)/2 = (2^{e/2} + 1)2^{e/2}(2^{e/2-1} + 1) = |L_2(q)|,$$

то есть $d = 2$. Таким образом, $L_2(2^c + 1) \simeq L_2(2^c)$. Но

$$(2^c + 1)((2^c + 1)^2 - 1) = 2^{c+1}(2^{2c} - 1) \Leftrightarrow c = 2,$$

поэтому $q = 5$ и $r = 6$. Компьютерные вычисления в GAP [59] и Magma [38] показывают, что этим условиям удовлетворяет единственный с точностью до изоморфизма дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, причем окрестность вершины в нем — объединение трех изолированных 5-клик, и $H \simeq \mathrm{GL}_2(4)$ или $\mathrm{GL}_2(4).Z_2$.

`1.1.5.2(б)`. Предположим, что $Sp_d(2^c) \trianglelefteq H$ (для G^Σ реализуется п. (2)(ii) предложения 1.23). Тогда $Sp_d(2^c)' \simeq \tilde{S} \simeq L_t(q)$. Если $c = 1, d = 4$, то $q = 9, t = 2, e = 6 \neq cd$ противоречие. Пусть далее $c > 1$ или $d = 2l > 4$.

Учитывая, что
$$\frac{q(q^{t-1} - 1)}{(q - 1)} = 2^{cl} + 1 = r - 1$$
и

$$|Sp_{2l}(2^c)| = 2^{cl^2}(2^{2cl} - 1)(2^{2c(l-1)} - 1)\cdots(2^{2c} - 1) =$$
$$= q^{(t-1)t/2}(q^t - 1)(q^{(t-1)} - 1)\cdots(q^2 - 1)/(t, q - 1) = |L_t(q)|,$$

получим

$$2^{l^2}(2^{cl} - 1)\frac{q(q^{t-1} - 1)}{(q - 1)}(2^{2c(l-1)} - 1)\cdots(2^{2c} - 1) =$$
$$= q^{(t-1)t/2}(q^t - 1)(q^{(t-1)} - 1)\cdots(q^2 - 1)/(t, q - 1).$$

Поэтому $q^{(t-1)t/2-1}|(2^{2c(l-1)} - 1)\cdots(2^{2c} - 1)$. Предположим, что $t > 2$. Пусть j — наибольшее число такое, что $0 < j < l$ и $y = (q, 2^{2c(l-j)} - 1) > 1$. Так как $q|(2^{cl} + 1)$, то

$$qb(qb - 2) + 1 = 2^{2cl} = 2^{2c(l-j)}2^{2cj} = (1 + yl)(2^{2cj})$$

и $y|(2^{2cj} - 1)$, то есть $2j \geq l$. Но тогда $y|(2^{2cj} - 1, 2^{2c(l-j)} - 1) = 2^{2c(j,l-j)} - 1$ и по выбору j получим $(l - j)|j$ и $l = 2j$. Значит, $y = (q, 2^{cl} - 1) > 1$, противоречие.

Пусть $t = 2$. Тогда $r = q + 1$, $q = 2^{cl} + 1$ и

$$|Sp_{2l}(2^c)| = 2^{cl^2}(2^{2cl} - 1)(2^{2c(l-1)} - 1)\cdots(2^{2c} - 1) =$$
$$= q(q^2 - 1)/2 = (2^{cl} + 1)2^{cl}(2^{cl-1} + 1) = |L_2(q)|,$$

противоречие.

`1.1.5.2(в)`. Предположим, что $G_2(2^c)' \trianglelefteq H$ (для G^Σ реализуется п. (2)(iii) предложения 1.23). Тогда $G_2(2^c)' \simeq \tilde{S} \simeq L_t(q)$. Пусть $c > 1$. Как и выше, получим $6c \geq 2(t-1)+t/2-1$. Учитывая, что

$$\frac{q(q^{t-1}-1)}{(q-1)} = 2^{3c}+1 = r-1$$

и

$$|G_2(2^c)'| = 2^{6c}(2^{6c}-1)(2^{2c}-1) = q^{(t-1)t/2}(q^t-1)(q^{(t-1)}-1)\cdots(q^2-1)/(t,q-1) = |L_t(q)|,$$

получим

$$2^{6c}(2^{3c}-1)(2^{2c}-1) = 2^{6c}\big(\frac{q(q^{t-1}-1)}{(q-1)}-2\big)(2^{2c}-1) = \\ q^{(t-1)t/2-1}(q^t-1)(q-1)(q^{(t-2)}-1)\cdots(q^2-1)/(t,q-1),$$

поэтому $q^{(t-1)t/2-1}|(2^{2c}-1), q|2^c+1$ и следовательно, $q^{(t-1)t/2-1}|2^c+1$. Если $t > 2$ и $c > 2$, то по [14, 5]

$$(2^{6c}-1)/(2^c-1) \leq (q^t-1)/(q-1) \leq 2^c+1,$$

противоречие. Значит, $t = 2$ и

$$2^{6c}(2^{3c}-1)(2^{2c}-1) = q(q^2-1)/(t,q-1) = (2^{3c}+1)((2^{3c}+1)^2-1)/2 = (2^{3c}+1)2^{3c}(2^{3c-1}+1),$$

противоречие.

Если $c = 1$, то $r = 10$, $q = 9, t = 2$ и $L_2(q) \not\simeq G_2(2)' \simeq U_3(3)$, снова противоречие.

`1.1.5.2(г)`. Предположим, что $A_r \trianglelefteq H, r \in \{6,7\}$ (для G^Σ реализуется п. (2)(v) предложения 1.23). Тогда по [51] $A_r \simeq \tilde{S} \simeq L_t(q)$, $t = 2$ и $q = 5$, противоречие с тем, что $A_6 \not\simeq L_2(5)$.

Таким образом, полным перебором соответствующих комбинаций для $\tilde{S}$ и H^∞ с учетом классификации почти простых 2-транзитивных групп подстановок (см., например, предложение 1.23) показано, что либо $S = H^\infty = A_r$, $r = 6, \mu = 2$ и $S_a = A_5$, либо $\tilde{S} = L_2(5)$ и снова $r = 6, \mu = 2$. При этом в первом случае указанным условиям удовлетворяет единственный с точностью до изоморфизма д.р.г., причем окрестность вершины в нем — д.р.г. с массивом пересечений $\{4,2,1;1,1,4\}$ и группа H изоморфна группе A_6 или группе S_6, а во втором случае — также единственный с точностью до изоморфизма д.р.г., причем окрестность вершины в нем — объединение трех изолированных 5-клик и группа H изоморфна группе $\mathrm{GL}_2(4)$ или группе $\mathrm{GL}_2(4).Z_2$.

`1.2`. Теперь предположим, что $\tilde{H}$ — аффинная группа. Тогда $K \simeq K^F = \tilde{S}$ — регулярная элементарная абелева группа порядка $r = 2^{e/2}$ и $\tilde{H} = \tilde{S}\tilde{G}_a$. Положим $f = e/2$.

Ввиду предложения 1.23 для $\tilde{H}$ реализуется одна из следующих возможностей:

(i) линейные $f = cd$, $d \geq 2$ и $\mathrm{SL}_d(2^c) \trianglelefteq \tilde{G}_a \leq \Gamma\mathrm{L}_d(2^c)$;

(ii) симплектические $f = cd$, d четно, $d \geq 4$ и $Sp_d(2^c) \trianglelefteq \tilde{G}_a \leq Z_{2^c-1} \circ \Gamma Sp_d(2^c)$;

(iii) G_2-типа $f=6c$ и $G_2(2^c)' \trianglelefteq \tilde{G}_a$;

(iv) одномерные $\tilde{G}_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^f)$;

(v) исключительные $\tilde{G}_a \in \{A_6, S_6, A_7\}$.

Поскольку K индуцирует регулярную группу подстановок на множестве N-орбит на вершинах графа, то $N \leq C_G(K)$.

Ясно, что $T = KN, C_H(K) = C \times K$ и $C_G(K) = (K \times N)C$. Далее, группа $K \times N$ регулярна на вершинах графа Γ, поэтому $G = (K \times N) : G_a$ и $G/C_G(K) \simeq G_a/C \simeq \tilde{G}_a \leq \mathrm{GL}_f(2)$. При этом $C \trianglelefteq G_a \simeq \bar{H}$ и $(G_a)^\infty \cap C \trianglelefteq G_a$.

Проведем полный перебор соответствующих комбинаций для H и $\tilde{H}$ и покажем, что допустим лишь случай (iv).

1.2.1. Предположим, что $\mathrm{SL}_d(2^c) \trianglelefteq \tilde{G}_a$. Тогда $(\tilde{G}_a)^\infty = \mathrm{SL}_d(2^c)$ — квазипростая группа. Пусть X — ее полный прообраз в H. Имеем $C.\mathrm{SL}_d(2^c) = X \trianglelefteq G_a$. Так как группа $G_a/(G_a)^\infty$ разрешима, то $(G_a)^\infty \leq X$.

Значит, $(G_a)^\infty \cap C \leq Z((G_a)^\infty)$ и $(G_a)^\infty/(C \cap (G_a)^\infty) \simeq (\tilde{G}_a)^\infty$. В частности, если $Z((G_a)^\infty) = 1$, то $(G_a)^\infty \cap C = 1$ и $(G_a)^\infty \simeq (\tilde{G}_a)^\infty$.

1.2.1.1. Пусть $(G_a)^\infty \simeq Sp_{2l}(2^s)'$, где $e = 2sl$. Если $(l;s) \neq (2;1)$, то

$$|\mathrm{SL}_d(2^c)| = 2^{c(d-1)d/2}(2^{cd}-1)(2^{c(d-1)}-1)\cdots(2^{2c}-1),$$
$$2^{sl^2}(2^{2sl}-1)(2^{2s(l-1)}-1)\cdots(2^{2s}-1) = |Sp_{2l}(2^s)|,$$

поэтому $2^{cd(d-1)/2} = 2^{sl^2}, e = 2sl = 2cd$ и $d = 2l+1$. По теореме 1.21 $2cd = 6$, противоречие.

1.2.1.2. Если $(G_a)^\infty \simeq G_2(2^s)'$, где $e = 6s$, то $2^{cd(d-1)/2} = 2^{6s}, e = 6s = 2cd$, $d = 5$ и по теореме 1.21 $s = 1$, противоречие.

1.2.1.3. Если $(G_a)^\infty \simeq A_6$ или A_7, $e = 4$, то $2^{cd(d-1)/2} = 2^3, e = 4 = 2cd$ и $d = 2$, то есть $c = 1$ и $\mathrm{SL}_2(2) \simeq A_6$ или A_7, противоречие.

1.2.1.4. Пусть $(G_a)^\infty \simeq \mathrm{SL}_l(2^s)$, где $e = sl$. Учитывая, что

$$|\mathrm{SL}_d(2^c)| = 2^{c(d-1)d/2}(2^{cd}-1)(2^{c(d-1)}-1)\cdots(2^{2c}-1),$$
$$2^{s(l-1)l/2}(2^{sl}-1)(2^{s(l-1)}-1)\cdots(2^{2s}-1) = |\mathrm{SL}_l(2^s)|,$$

получим $cd(d-1)/2 = s(l-1)l/2, e = 2cd = sl$ и по теореме 1.21 $sl = 6$, противоречие.

В случаях (ii, iii, v) группа $(\tilde{G}_a)^\infty$ — простая.

Пусть $(\tilde{G}_a)^\infty$ — простая группа и X — ее полный прообраз в H. Имеем $C.(\tilde{G}_a)^\infty = X \trianglelefteq G_a$. Тогда $(G_a)^\infty \leq X$ и $X/(G_a)^\infty \leq G_a/(G_a)^\infty$ — разрешимая группа.

Значит, $(G_a)^\infty \cap C \leq Z((G_a)^\infty)$ и $(G_a)^\infty/(C \cap (G_a)^\infty) \simeq (\tilde{G}_a)^\infty$, то есть $(G_a)^\infty \cap C = Z((G_a)^\infty)$. В частности, если $Z((G_a)^\infty) = 1$, то $(G_a)^\infty \simeq (\tilde{G}_a)^\infty$.

1.2.2. Предположим, что $Sp_d(2^c) \trianglelefteq \tilde{G}_a$. Если $(d;c) = (4;1)$, то $f = 2$, противоречие. Пусть далее $(d;c) \neq (4;1)$.

1.2.2.1. Если $(G_a)^\infty \simeq Sp_{2l}(2^s)$, где $e = 2sl$, то $2^{c(d/2)^2} = 2^{sl^2}, e = 2sl = 2cd$ и $d = 4l$, то есть $s = 4c$ и $Sp_{4l}(2^c) \simeq Sp_{2l}(2^{4c})$, противоречие с теоремой 1.21.

1.2.2.2. Если $(G_a)^\infty \simeq G_2(2^s)'$, где $e = 6s$, то $2^{c(d/2)^2} = 2^{6s}, e = 6s = 2cd$ и $d = 8$, то есть $3s = 8$ и $Sp_8(2^c) \simeq G_2(2^s)'$. По теореме 1.21 $s = 1$, противоречие.

1.2.2.3. Если $(G_a)^\infty \simeq A_6$ или A_7, $e = 4$, то $2^{c(d/2)^2} = 2^{6s}, e = 4 = 2cd$ и $d = 2$, то есть $c = 1$ и $Sp_2(2) \simeq A_6$ или A_7, противоречие.

1.2.2.4. Пусть $(G_a)^\infty \simeq \mathrm{SL}_l(2^s)$, где $e = sl$. Учитывая, что $2^{sl/2} = r$ и

$$|Sp_{2m}(2^c)| = 2^{cm^2}(2^{2cm}-1)(2^{2c(m-1)}-1)\cdots(2^{2c}-1) = \\ = 2^{s(l-1)l/2}(2^{sl}-1)(2^{s(l-1)}-1)\cdots(2^{2s}-1)/(l,2^s-1) = |L_l(2^s)|,$$

получим $cm^2 = s(l-1)l/2, e = 2cd = 4cm = sl$ и $m = 2(l-1)$, противоречие с теоремой 1.21.

1.2.3. Предположим, что $G_2(2^c)' \trianglelefteq \tilde{G}_a$ и $f = 6c$.

1.2.3.1. Пусть $(G_a)^\infty \simeq Sp_{2l}(2^s)'$, где $e = 2sl$. Если $(l;s) \neq (2;1)$, то $2^{6c} = 2^{sl^2}, e = 2sl = 12c$ и $sl = 6c = sl^2$, противоречие с тем, что $l \geq 2$. Если $(l;s) = (2;1)$, то $2^{6c} = 2^{sl^2-1} = 2^3$, противоречие.

1.2.3.2. Если $(G_a)^\infty \simeq G_2(2^s)'$, где $e = 6s$, то $2^{6c} = 2^{6s}, e = 6s = 12c$, противоречие.

1.2.3.3. Если $(G_a)^\infty \simeq A_6$ или A_7, $e = 4$, то $2^{6c}|8 = |A_7|_2$, противоречие.

1.2.3.4. Пусть $(G_a)^\infty \simeq \mathrm{SL}_l(2^s)$, где $e = sl$. Учитывая, что

$$|G_2(2^c)'| = 2^{6c}(2^{6c}-1)(2^{2c}-1) = \\ = 2^{s(l-1)l/2}(2^{sl}-1)(2^{s(l-1)}-1)\cdots(2^{2s}-1)/(l,2^s-1) = |L_l(2^s)|,$$

получим $6c = s(l-1)l/2, e = 12c = sl$ и $l = 2$, противоречие.

1.2.4. Предположим, что $A_l \trianglelefteq \tilde{G}_a, l \in \{6,7\}$ и $f = 4$.

1.2.4.1. Если $(G_a)^\infty \simeq Sp_{2l}(2^s)'$, где $e = 2sl$, то $2^3 = 2^{sl^2}, e = 2sl = 4$, противоречие с тем, что $l \geq 2$.

1.2.4.2. Если $(G_a)^\infty \simeq G_2(2^s)'$, где $e = 6s$, то $2^3 = 2^{6s}$, противоречие.

1.2.4.3. Если $(G_a)^\infty \simeq A_6$ или A_7, $e = 4$, то $f = e$, противоречие.

1.2.4.4. Пусть $(G_a)^\infty \simeq \mathrm{SL}_l(2^s)$, где $e = sl$. Учитывая, что

$$|A_l| = 2^3(|A_l|)_{2'} = 2^{s(l-1)l/2}(2^{sl}-1)(2^{s(l-1)}-1)\cdots(2^{2s}-1)/(l,2^s-1) = |L_l(2^s)|,$$

получим $3 = s(l-1)l/2$, противоречие.

1.2.5.

Итак, предположим, что $\tilde{G}_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^f)(\simeq Z_{2^f-1}.Z_f)$. Тогда $G_a = C.(\tilde{G}_a)$ и $(G_a)^\infty \leq C$. Если C действует транзитивно на $[a]$, то NC действует 2-транзитивно на a^N и, следовательно, Γ — двудольный граф, противоречие с тем, что $r > 2$.

Поэтому $G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$ и $|G_a|$ делит $((2^e-1)e, (2^f-1)f|C|) = (2^f-1)f((2^f+1)2, |C|)$. Значит, $(2^f+1)/(f, 2^f+1)$ делит $|C|$.

Далее, множество $\mathrm{Fix}(G_a)$ является блоком импримитивности группы G и $|\mathrm{Fix}(G_a)| = |N_G(G_a) : G_a| = 1$.

Имеем либо $T' = K = \Phi(T) = Z(T)$ и T — специальная группа, либо $\Phi(T) = 1$ и T — элементарная абелева группа порядка $2^{e+e/2}$. Действительно, если $T' = 1$ и $\Phi(T) = K$, то $K = \mho^1(T) = \Omega_1(T)$ и T — прямое произведение l_1 подгрупп, изоморфных Z_4, и l_2 подгрупп, изоморфных Z_2, при этом $2^{l_1+l_2}$ делит $2^{e/2}$ и $2^{2l_1+l_2} = 2^{e+e/2}$, противоречие.

Так как $G_a \simeq A \le \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, то $G_a \trianglerighteq R \simeq A \cap \mathrm{GL}_1(2^e)$ и $G_a/R \le Z_e$, в частности, G_a содержит циклическую подгруппу R_0 порядка $(2^e-1)/(e, 2^e-1)$. При этом R действует без неподвижных точек на $\Sigma - \{F\}$, на $\Sigma - \{F\}$ имеется ровно $\alpha = (2^e-1)/|R|$ R-орбит и α делит $(e, 2^e-1)$.

Далее, множество $\mathrm{Fix}(R)$ является блоком импримитивности группы TR и $|\mathrm{Fix}(R)| = |N_{TR}(R) : R| = |N_T(R)|$. Но $[N_T(R), R] \le T \cap R = 1$, поэтому $|\mathrm{Fix}(R)| = |C_K(R)|$ и так как $R \trianglelefteq G_a$, то все R-орбиты на $F - \{a\}$ имеют одинаковую длину.

Если $C_K(R) > 1$, то $|\mathrm{Fix}(R)| \ge 2$, откуда $R \le C$ и $(2^e-1)/(e, 2^e-1) \le |R| \le \mu + 1 = 2^{e/2}+1$, противоречие.

Таким образом, $C_K(R) = 1$. Положим $R = \langle h \rangle$. Тогда $\alpha_0(h) = 1$, $\alpha_3(h) = r - 1$ и поскольку R действует полурегулярно на множестве вершин, не лежащих в F, и централизует h, то $\alpha_1(h)$ делится на $|R|$ и по лемме 2.6

$$\chi_1(h) = \frac{1 + \alpha_1(h) - (k+1)}{m+n} \in \mathbb{Z},$$

поэтому

$$1 + \alpha_1(h) = 1 + w|R| \equiv 0 \pmod{2^{f+1}},$$

где $\alpha_1(h) = w|R|$ и $w \le r(e, 2^e-1)$.

Предположим, что $C_R(K) = 1$. Тогда по [29, 24.1]

$$R_0 \le R \le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_f(2)$$

и поэтому $(2^e-1)/(e, 2^e-1)$ делит $|\mathrm{GL}_f(2)|$. Но по малой теореме Ферма каждый простой делитель p_0 числа $(e, 2^e-1)$ делит и число $2^{p_0-1}-1$, меньшее чем 2^e-1. Отсюда по теореме Жигмонди $f = 3$. Но группа $\mathrm{GL}_3(2)$ не содержит элементов порядка 21, противоречие.

Значит, $C_R(K) > 1$. Положим $C_R(K) = \langle \tilde{h} \rangle$. Тогда $\alpha_0(\tilde{h}) = r$ и поскольку $C_R(K)$ действует полурегулярно на множестве вершин, не лежащих в F, и централизует KR, то $\alpha_1(\tilde{h})$ делится на $|KR|$ и по лемме 2.6

$$\chi_1(\tilde{h}) = \frac{m(r-1) + \alpha_1(\tilde{h}) - k}{m+n} = \alpha_1(\tilde{h})2^{-(e/2+1)} \in \mathbb{Z},$$

поэтому $\alpha_1(\tilde{h}) = |R|2^{e/2+1}w$ и $0 \le w \le (e, 2^e-1)/2$.

В частности, если $|R| = 2^e - 1$, то группа $R^* = R/C_R(K)$ изоморфна циклической подгруппе из $\mathrm{GL}_f(2)$ порядка $2^f - 1$ и $R \simeq (R \cap C) \times R^*$ действует транзитивно на $F - \{a\}$.

2. Пусть $t < r - 1$. Тогда $t > 1$, Γ содержит $2(k+1)$-коклику и ввиду границы Хофмана для коклик (см. [40, предложение 3.7.2]) имеем $2(k+1) \le m(k+1)r/(k+m)$, поэтому $n + 1 \le r/2$ и $m - 1 \ge 2\mu$. Так как G_a действует транзитивно на множестве Δ, состоящем из N-орбит, пересекающих $[a]$, то для каждой вершины из $[a]$ множество ее

соседей пересекает ровно s различных N-орбит из Δ для некоторого $s < t-1$ (в случае $s = t-1$ множество вершин, лежащих в a^N, вместе с вершинами орбит из Δ, индуцирует связный подграф степени k из Γ, что невозможно).

Число ребер между объединением N-орбит, в которых нет вершины a и смежных с ней вершин, и $[a]$ равно $(r-t-1)k\mu$. Поэтому вершина из $[a]$ смежна точно с $(r-t-1)\mu$ вершинами в этом объединении, $r-t-1$ делится на $\mu+1$ и $(r-t-1)\mu/(\mu+1) = t-s-1$. Отсюда

$$z\mu = (r-2t+s)\mu = t-s-1 \text{ и } r-t-1 = z(\mu+1),$$

следовательно,

$$t = s+1+z\mu \text{ и } r = s+2+z(2\mu+1).$$

Так как $s(\mu+1) = \lambda + (t-1)\mu$, то

$$s = z\mu^2 + \lambda \text{ и } t \geq z\mu^2 + z\mu + 1.$$

Имеем $t(\mu+1) = k = mn$, $m \geq 2\mu+1$, поэтому $n \leq \min\{r/2-1, t(\mu+1)/(2\mu+1)\}$.

Напомним, что $\lambda = t+\mu-(r-t)\mu-1$.

Ввиду леммы 2.8 допустимы только следующие две возможности (I) и (II).

(I) Пусть $(m;n) = (2^{e/2}-1; 2^{e/2}+1)$. Тогда $r\mu = 2^e-4$, $\lambda-\mu = n-m = 2$, $t(\mu+1) = r\mu+3$, $t = r-(r-3)/(\mu+1)$, $r > \mu+4$. Поэтому

$$r-t = (r-3)/(\mu+1) \text{ и } r-t-1 = (r-\mu-4)/(\mu+1).$$

Далее, $r-t = (\mu+1)(t-s-1)/\mu+1 = (r-3)/(\mu+1)$. Отсюда

$$t-s-1 = \mu(r-\mu-4)/(\mu+1)^2.$$

Кроме того,

$$s = (t\mu+\lambda-\mu)/(\mu+1) = (t\mu+2)/(\mu+1).$$

Тогда

$$t-s-1 = (t-2)/(\mu+1)-1$$

и μ делит $t-3$ и $s-2$. К тому же, $(r-\mu-4)$ делится на $(\mu+1)^2$.

(II) Пусть $(m;n) = (2^{e/2}+1; 2^{e/2}-1)$. Тогда $r\mu = 2^e$, $\lambda-\mu = n-m = -2$, $t(\mu+1) = r\mu-1$, $t = r-(r+1)/(\mu+1)$, $r > \mu$. Поэтому

$$r-t = (r+1)/(\mu+1) \text{ и } r-t-1 = (r-\mu)/(\mu+1).$$

Далее, $r-t = (\mu+1)(t-s-1)/\mu+1 = (r+1)/(\mu+1)$. Отсюда

$$t-s-1 = \mu(r-\mu)/(\mu+1)^2.$$

Кроме того,

$$s = (t\mu+\lambda-\mu)/(\mu+1) = (t\mu-2)/(\mu+1).$$

Тогда

$$t-s-1 = (t+2)/(\mu+1)-1$$

и μ делит $t+1$ и $s+2$. К тому же, $(r-\mu)$ делится на $(\mu+1)^2$.

Граф $\Omega = \tilde{\Gamma}$ на множестве N-орбит реберно регулярен с параметрами (r, t, λ_Ω), где $\lambda_\Omega = s$, и очевидно, $d(\Omega) = 2$. Каждая вершина из $\Omega - \tilde{a}^\perp$ смежна "в среднем" с $t\mu/(\mu+1)$ вершинами из $\Omega_1(\tilde{a})$. Если $(t, \mu+1) > 1$, то

$$t = (t, \mu+1)y \text{ и } s(\mu+1)/(t, \mu+1) = y\mu + (\lambda - \mu)/(t, \mu+1),$$

противоречие с тем, что $\lambda - \mu = \pm 2$. Значит, граф Ω не является сильно регулярным и, как следствие, G_a имеет не менее двух орбит на вершинах из $F - \{a\}$, несмежных с вершинами из a^N.

Допустим, что вершина $\tilde{b}$ из $\Omega - \tilde{a}^\perp$ смежна с $z\mu + z - 1$ вершинами из $\Omega - \tilde{a}^\perp$. Тогда $\tilde{b}$ смежна с $s - z + 2$ вершинами из $\Omega_1(\tilde{a})$. Поэтому

$$s - z + 2 < t\mu/(\mu+1) \text{ и } z\mu^2 \le s < z\mu^2 + z\mu + z - \mu - 2,$$

в частности, $z > 1$ и $\lambda < z\mu + z - \mu - 2$.

Заметим, что для вершины a действие G_a на $a^N - \{a\}$ импримитивное с блоками вида $[b] \cap a^N$ для t вершин b из F, смежных с вершинами из a^N.

Покажем сначала, что $e \ge 6$ и случай (v) из предложения 1.23 невозможен. Пусть $e = 4$. Ввиду леммы 2.8 $(m; n) = (3; 5)$ или $(5; 3)$. В первом случае получим $r\mu = 12$, $t(\mu+1) = r\mu + 3 = 15$ и поэтому $\mu = 2, 4$, $r = 6, 3$, но $r > \mu + 4$, противоречие. Во втором случае $r\mu = 16$, $t(\mu+1) = r\mu - 1 = 15$, $t = r - (r+1)/(\mu+1)$, $r > \mu$, поэтому $\mu = 2$, $r = 8$, но $(r - \mu)$ делится на $(\mu+1)^2$, снова противоречие.

Пусть $\tilde{H} = H^F (\simeq H/C)$ и $\tilde{S}$ — цоколь группы $\tilde{H}$. В случае $|K| < r$ граф Γ^K допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов G/K, которая индуцирует точное действие на Σ.

Рассмотрим далее два экстремальных случая: $|K| = r$ и $K = 1$.

`2.1.` Пусть $|K| = r$. Тогда $G_a \simeq H^\Sigma$ и по предложению 1.23 для G_a допустима одна из следующих возможностей:

(i) (линейные) $e = cd$, $d \ge 3$ и $\mathrm{SL}_d(2^c) \trianglelefteq G_a \le \Gamma\mathrm{L}_d(2^c)$;

(ii) (симплектические) $e = cd$, d четно, $d \ge 2$, $q = 2^c$ и $Sp_d(q) \trianglelefteq G_a \le Z_{q-1} \circ \Gamma Sp_d(q)$;

(iii) (G_2-типа) $e = 6c$, $q = 2^c$ и $G_2(q)' \trianglelefteq G_a \le Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$;

(iv) (одномерные) $G_a \le \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$.

`2.1.1.` Пусть $G_a \le \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$.

Покажем сначала, что возможность (I) не реализуется. Предположим обратное. Тогда число μ четно, $(r)_2 \le 2$ и поэтому либо группа K содержит (характеристическую) подгруппу K_1 индекса 2, нормальную в G (см., например, [129, теорема 4.6]), либо K имеет нечетный порядок. В первом случае получим, что G/K_1 — дистанционно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ^{K_1} и Γ^{K_1} — двудольный антиподальный д.р.г. диаметра 3, противоречие. Во втором случае получим, что $\Gamma^{K'}$ — антиподальный д.р.г. диаметра 3 и $\mathcal{CG}(\Gamma^{K'}) \simeq K/K'$ — абелева группа нечетного порядка, противоречие с леммой 1.6.

Таким образом, $\mu = 2^l \ge 2$ и $\Gamma^{\Phi(K)}$ — антиподальный д.р.г. диаметра 3, допускающий транзитивную на дугах группу автоморфизмов $G/\Phi(K)$. Так как $\mu + 1 = 2^l + 1$, то l делит e

и $(e)_2 > (l)_2$. Кроме того, $r - \mu = z(\mu+1)^2$, откуда $\mu+1$ делит $e/l-2$. Как и выше получим, что $|K/\Phi(K)| > 2$.

Так как $G_a \simeq A \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, то $G_a \trianglerighteq R \simeq A \cap \mathrm{GL}_1(2^e)$ и $G_a/R \leq Z_e$, в частности, G_a содержит циклическую подгруппу R_0 порядка $(2^e-1)/(e, 2^e-1)$. При этом R действует без неподвижных точек на $\Sigma - \{F\}$, на $\Sigma - \{F\}$ имеется ровно $\alpha = (2^e-1)/|R|$ R-орбит, α делит $(e, 2^e-1)$.

Пусть $R = \langle g \rangle$, $X = TR$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = r$ и по лемме 2.6

$$\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m+n).$$

Пусть $C_R(K) = \langle \tilde{g} \rangle$.

Если $C_R(K) > 1$, то $KC_R(K) \leq C_G(\tilde{g})$, $\alpha_0(\tilde{g}) = r$ и поскольку $\mathrm{Fix}(C_R(K)) = F$, то $|KC_R(K)|$ делит $\alpha_1(\tilde{g})$ и по лемме 2.7

$$\chi_1(\tilde{g}) = (m(r-1) + \alpha_1(\tilde{g}) - k)/2^{e/2+1} = (2^{e/2}r + r - 2^{e/2} + \alpha_1(\tilde{g}) - 2^e)/2^{e/2+1} \in \mathbb{Z},$$

что влечет $r \leq 2^{e/2} \leq \mu$, противоречие с тем, что $t < r-1$.

Значит, $C_R(K) = 1$ и по [29, 24.1]

$$R_0 \leq R \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$$

и поэтому $(2^e-1)/(e, 2^e-1)$ делит $|\mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)|$. Но по малой теореме Ферма каждый простой делитель p_0 числа $(e, 2^e-1)$ делит и число $2^{p_0-1}-1$, меньшее чем 2^e-1. Отсюда по теореме Жигмонди $e = 6$ и поэтому $l \leq 2$, противоречие с тем, что $\mu+1$ делит $e/l-2$.

2.1.2. Пусть $e = cd$, $d \geq 3$, $q = 2^c$ и $\mathrm{SL}_d(q) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_d(q)$. По [14] степень минимального подстановочного представления группы $L_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случая $(d;q) = (4;2)$. При $(d;q) = (4;2)$ имеем $e = 4$, противоречие с доказанным выше. Группа $X = (G_a)^\infty \simeq \mathrm{SL}_d(q)$ имеет орбиту на F нечетной длины t. Ввиду [95] стабилизатор вершины a^* в X из этой орбиты изоморфно вкладывается в параболическую максимальную подгруппу из $\mathrm{SL}_d(q)$. Такая подгруппа имеет вид $q^{l(d-l)} : ((\mathrm{SL}_l(q) \times \mathrm{SL}_{d-l}(q)) : q-1)$, где $0 < l < d$ (см. также [130]). Так как $t = (q^d-1)/(\mu+1)$ и t делится на

$$\frac{|\mathrm{SL}_d(q)|}{q^{l(d-l)}|\mathrm{SL}_l(q)||\mathrm{SL}_{d-l}(q))|(q-1)} = \frac{(q^{(d-l+1)}-1)(q^{(d-l+2)}-1)\cdots(q^d-1)}{(q^l-1)(q^{(l-1)}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)},$$

то $l \in \{1, d-1\}$ (иначе $\mu+1 < 1$, что невозможно) и $X_{a^*} \leq M \simeq S = q^{d-1} : (\mathrm{SL}_{d-1}(q)) : q-1)$, где S — стабилизатор l-мерного подпространства в группе $\mathrm{SL}_d(q)$ из ее естественного модуля. Таким образом, t делится на $(q^d-1)/(q-1)$ и $\mu+1$ делит $q-1$. Не ограничивая общности, можно полагать $l = 1$.

Обозначим $y = |(a^*)^M|$. Тогда $y = (q-1)/(\mu+1)$. Предположим, что M' сдвигает вершину в $(a^*)^M$. Тогда степень минимального подстановочного представления группы $\mathrm{SL}_{d-1}(q)$ не превосходит числа $q-1$ и по [14] $d = 3$ и $q \in \{5, 7, 9, 11\}$, противоречие.

Итак, $M' \leq X_{a^*} \trianglelefteq M \simeq q^{d-1} : (\mathrm{SL}_{d-1}(q)) : q-1)$. Так как X действует 2-транзитивно на множестве блоков системы импримитивности σ на $\Omega_1(\widetilde{a})$, содержащей блок $(a^*)^M$, то длина неодноточечной M-орбиты на σ равна $q(q^{d-1}-1)/(q-1)$. Более того, группа M' транзитивна на множестве вершин из $(a^*)^X-(a^*)^M$.

Предположим, что X фиксирует поточечно множество вершин из $F-\{a\}$, несмежных с вершинами из a^N. Тогда $\Omega_1(\tilde{b})=\Omega_1(\tilde{a})$ для любой вершины $\tilde{b}\in\Omega-\tilde{a}^\perp$ и по транзитивности действия G на Ω заключаем, что $\Omega_2(\tilde{c})$ — коклика для любой вершины $\tilde{c}\in\Omega$. Но тогда Ω — сильно регулярный граф, противоречие.

Значит, X сдвигает некоторую вершину из $\Omega-\widetilde{a}^\perp$ и поэтому $s>r-t-1\geq(q^d-1)/(q-1)$. Таким образом, $s=x_0+yq(q^{d-1}-1)/(q-1)$ для некоторого $0\leq x_0\leq y-1$. Но тогда

$$s(\mu+1)\,=\,x_0(\mu+1)+y(\mu+1)q(q^{d-1}-1)/(q-1)\,=\,y\mu(q^d-1)/(q-1)\pm 2\,=\,t\mu\pm 2,$$

при этом в правой и левой частях данного тождества каждый из коэффициентов при q^i, где $0\leq i\leq d-1$, неотрицателен и не превосходит $q-1$. Поэтому $q-1=y\mu$, противоречие.

2.1.3. Пусть $e=cd$, d четно, $d\geq 2$, $q=2^c$ и $Sp_d(q)\trianglelefteq G_a\leq Z_{q-1}\circ\Gamma Sp_d(q)'$.

Рассмотрим группу $Y=(G_a)^\infty K$. Так как Y действует транзитивно на F, то множество $\mathrm{Fix}(Y_a)$ является блоком импримитивности Y на F, $|\mathrm{Fix}(Y_a)|=|N_Y(Y_a):Y_a|$ и следовательно, $|N_Y(Y_a):Y_a|$ делит r. Имеем $Y_a=(G_a)^\infty$. Если $\mathrm{Fix}(Y_a)=F$, то из транзитивности Y_a на $[a]$ получим $t=1$, противоречие. Значит, $\mathrm{Fix}(Y_a)\subset F$, то есть $|N_Y(Y_a):Y_a|<r$.

Заметим, что $C_{Y_a}(K)=1$. Действительно, если $1\neq h\in C_{Y_a}(K)$, то $a^{hg}=a^{gh}=a^g$ для всех $g\in K$, то есть $h\in C\cap Y_a$ и $Y_a\leq C$, противоречие.

Как было доказано выше, $e>4$, поэтому далее будем считать, что $(d;q)\neq(4;2)$. По [14] степень минимального подстановочного представления группы $Sp_d(q)$ при $q\geq 3$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случаев $d=2$, $q\in\{5,7,9,11\}$, случая $d\geq 4$ и $q=2$ и случая $(d;q)=(4;3)$.

2.1.3.1. Пусть $d\geq 4$. Тогда группа $X=(G_a)^\infty\simeq Sp_d(q)$ имеет орбиту на F нечетной длины t. Ввиду [95] стабилизатор вершины a^* из этой орбиты в X изоморфно вкладывается в параболическую максимальную подгруппу из $Sp_d(q)$. Такая подгруппа имеет вид $q^{\tilde{k}(\tilde{k}+1)/2}.q^{2\tilde{k}\tilde{m}}:(\mathrm{GL}_{\tilde{k}}(q)\times Sp_{2\tilde{m}}(q))$, где $0<\tilde{k}\leq\tilde{k}+\tilde{m}=d/2$ (см. также [130, теорема 3.7]). Так как $t=(q^d-1)/(\mu+1)$ и t делится на

$$\frac{|Sp_d(q)|}{q^{\tilde{k}(\tilde{k}+1)/2+2\tilde{k}\tilde{m}}|\,\mathrm{GL}_{\tilde{k}}(q)||Sp_{2\tilde{m}}(q))|}=\frac{(q^{2(d/2)}-1)(q^{2(d/2-1)}-1)\cdots(q^{2(\tilde{m}+1)}-1)}{(q^{\tilde{k}}-1)(q^{\tilde{k}-1}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)},$$

то $\tilde{m}\leq 1$ и $d=4$, (иначе $\mu+1<1$, что невозможно), то есть $(\tilde{m};\tilde{k})=(0;2)$ или $(1;1)$, t делится на $(q^d-1)/(q-1)$ и $\mu+1$ делит $q-1$. При этом максимальная подгруппа M группы X, содержащая стабилизатор X_{a^*} точки a^* в X, изоморфна группе вида $q^3:(L_2(q)\times q-1)$ из $Sp_4(q)$ (см., например, [14]). Пусть σ — система импримитивности группы X на $(a^*)^X$, содержащая блок $(a^*)^M$. Если $(\tilde{m};\tilde{k})=(0;2)$, то X_{a^*} фиксирует 2-мерное изотропное подпространство в соответствующем симплектическом модуле V и действие X на блоках системы σ эквивалентно действию X на 2-мерных изотропных подпространствах. Если

$(\tilde{m};\tilde{k}) = (1;1)$, то X_{a^*} фиксирует 1-мерное подпространство в соответствующем симплектическом модуле и действие X на блоках системы σ эквивалентно действию X на 1-мерных подпространствах. Представители этих двух классов максимальных подгрупп в $Sp_4(q)$ сопряжены в $\mathrm{Aut}(Sp_4(q))$ (см. [39, таблица 8.14]), поэтому для последующего определения длин орбит некоторых подгрупп из X_{a^*} на V достаточно рассмотреть случай $(\tilde{m};\tilde{k}) = (1;1)$.

Пусть $y = (q-1)/(\mu+1)$. Тогда $y = |(a^*)^M|$, $t = y(q^2+1)(q+1)$ и $(y, \mu+1) = 1$. Как и выше доказывается, что X сдвигает некоторую вершину $\widetilde{a^{**}} \in \Omega - \tilde{a}^{\perp}$ и следовательно, $s > r - t - 1 \geq (q^2+1)(q+1)$. Более того, по [39, таблица 8.14] порядок каждой неединичной X-орбиты на $\Omega - \tilde{a}^{\perp}$ делится на $(q^2+1)(q+1)$.

Заметим, что $(X_{a^*})' \simeq q^3.\mathrm{SL}_2(q)$, при этом на соответствующем модуле V нормальная подгруппа порядка q^3 из $(X_{a^*})'$ имеет ровно $q-1$ одноточечных орбит, ровно $q-1$ орбит длины q^3 и ровно q^2-1 орбит длины q. При этом подгруппа из $(X_{a^*})'$, изоморфная $\mathrm{SL}_2(q)$, действует тривиально на одной из гиперболических прямых, содержащей 1-мерное подпространство, отвечающее вершине a^*, и транзитивно на ненулевых векторах ортогональной ей гиперболической прямой. Поэтому группа $(X_{a^*})'$ имеет орбиту длины $q(q^2-1)$ на V. Таким образом, на $(a^*)^X$ имеется ровно y $(X_{a^*})'$-орбит длины 1, ровно y $(X_{a^*})'$-орбит длины q^3 и ровно одна $(X_{a^*})'$-орбита длины $q(q^2-1)/(\mu+1) = yq(q+1)$. Поэтому

$$s = x_1 + x_2 q^3 + x_3 yq(q+1)$$

для некоторых $0 \leq x_1 \leq y-1, 0 < x_2 \leq y, 0 \leq x_3 \leq 1$. Тогда

$$s(\mu+1) = x_1(\mu+1) + x_2(\mu+1)q^3 + x_3(\mu+1)yq(q+1) = \\ y\mu q^3 + y\mu q^2 + y\mu q + y\mu \pm 2 = t\mu \pm 2,$$

при этом в правой и левой частях данного тождества каждый из коэффициентов при q^i, где $0 \leq i \leq 3$, неотрицателен и не превосходит $q-1$. Отсюда $x_2(\mu+1) = y\mu$ и $\mu+1$ делит y, противоречие.

2.1.3.2. Пусть $d = 2$, т. е. $2^e = q^2$. Тогда группа $X = (G_a)^{\infty} \simeq Sp_2(q) = \mathrm{SL}_2(q)$ имеет орбиту на F нечетной длины t. Ввиду [95] стабилизатор вершины a^* из этой орбиты в X изоморфно вкладывается в параболическую максимальную подгруппу из $Sp_2(q)$. Такая подгруппа имеет вид $q.\mathrm{GL}_1(q)$, поэтому $\mu+1$ делит 2^c-1, t делится на 2^c+1 и $z(\mu+1) \geq 2^c+1$. По [130, теорема 3.7] следующая за минимальной степень примитивного подстановочного представления группы $Sp_2(2^c)$ равна $2^{c-1}(2^c-1)$ или $2^{c/2}(2^c+1)$ (при четном c).

Предположим, что X не имеет одноточечных орбит на $\Omega - \tilde{a}^{\perp}$. Тогда либо $z\mu + z$ делится на 2^c+1, либо

$$z\mu + z \geq 2^{c-1}(2^c-1) + (2^c+1) = 2^{c-1}(2^c+1) + 1.$$

В случае (I) имеем $r\mu + 4 = 2^{2c}$. Тогда $r = z\mu^2 + 2z\mu + \mu + z + 4$ и $t = z\mu^2 + z\mu + \mu + 3$. Если $z\mu + z$ делится на 2^c+1, то t взаимно просто с $\mu+1$, $(t, 2^c+1) = (\mu+3, 2^c+1)$ и 2^c+1 делит $\mu+3$. Таким образом, $\mu = 2^c-2$ и $r = 2^c+2$, противоречие. Значит,

$$r = \mu(z\mu+z) + (z\mu+z) + \mu + 4 \geq (\mu+1)(2^{c-1}(2^c+1)+1) + \mu + 4 > 2^{2c},$$

противоречие.

В случае (II) имеем $r\mu = 2^{2c}$, $\mu = 2^l$ и $r = z(\mu+1)^2 + \mu = 2^{2c-l}$. Но $2^c + 1$ не делит $2^l(2^{2c-2l} - 1)$, поэтому $r \leq z\mu + z$, противоречие.

Пусть $a^* \in F$ и $|(a^*)^X| = t$. Так как $(X_{a^*})' \simeq E_q$ имеет на $(a^*)^X$ ровно $y = (2^c - 1)/(\mu+1)$ орбит длины q и ровно y одноточечных орбит, то $s = x_1 + x_2 q$ для некоторых $0 \leq x_1 \leq y-1, 0 < x_2 \leq y$. Тогда

$$s(\mu+1) = x_1(\mu+1) + x_2(\mu+1)q = y\mu q + y\mu \pm 2 = t\mu \pm 2,$$

при этом в правой и левой частях данного тождества каждый из коэффициентов при q^i, где $0 \leq i \leq 1$, неотрицателен и не превосходит $q-1$. Поэтому $x_2(\mu+1) = y\mu$ и $\mu+1$ делит y, противоречие.

2.1.4. Пусть $e = 6c$, $q = 2^c$ и $G_2(q)' \simeq (G_a)^\infty \trianglelefteq G_a \leq Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$. Тогда группа $X = (G_a)^\infty$ имеет орбиту на F нечетной длины t. Ввиду [95] (см. также [130, таблица 4.1]) стабилизатор вершины a^* из этой орбиты в X изоморфно вкладывается в параболическую максимальную подгруппу из $G_2(2^c)'$. Такая подгруппа имеет вид $q^{2+3}.\mathrm{GL}_2(q)$ или $q^{1+4}.\mathrm{GL}_2(q)$, поэтому $\mu+1$ делит $q-1$ и t делится на $(q^6-1)/(q-1)$. Если X поточечно фиксирует $r-t-1 = z\mu + z$ вершин из $\Omega - \tilde{a}^\perp$, то получим противоречие как и выше.

По [5] степень минимального подстановочного представления группы X равна 28 в случае $c = 1$ (напомним, что $G_2(2)' \simeq U_3(3)$), 416 в случае $c = 2$ и $(q^6-1)/(q-1)$ в случае $c > 2$.

Если $c = 1$, то $2^e = 2^6$ и $64/3 \geq t \geq z\mu + z \geq 28$, противоречие.

Если $c = 2$, то $2^e = 2^{12} = 4096$ и $z\mu + z \geq 416$, что влечет $\mu = 2$ и $t = 1365$, противоречие с тем, что $\mu+1$ не делит t.

Поэтому $z(\mu+1) \geq (q^6-1)/(q-1)$ и $c > 2$. Обозначим через M (максимальную) подгруппу в X индекса t/y, содержащую X_{a^*}.

Заметим, что имеется всего четыре M-орбиты на множестве блоков системы импримитивности σ на $\Omega_1(\widetilde{a})$, содержащей блок $(a^*)^M$. Эти орбиты имеют длины 1, $q(q+1)$, $q^3(q+1)$ и q^5 (см. [5, теорема 1]). Если $M \simeq q^{2+3}.\mathrm{GL}_2(q)$, то действие X на σ эквивалентно (примитивному) действию X на 1-мерных изотропных подпространствах соответствующего 8-мерного пространства и стабилизатор ненулевого изотропного вектора в X, отвечающего вершине a^*, действует транзитивно на ненулевых векторах представителя M-орбиты в случаях, когда ее длина равна $q(q+1)$ или $q^3(q+1)$ (см. [130, § 4.3]). Если $M \simeq q^{1+4}.\mathrm{GL}_2(q)$, то действие X на σ эквивалентно (примитивному) действию X на правых смежных классах X/M и аналогично, группа M' в этом представлении действует транзитивно на $q-1$ правых смежных классах группы X по M', содержащихся в классе Mx из орбиты длины $q(q+1)$ или $q^3(q+1)$. Так как группа X_{a^*} нормальна в M, то каждая M-орбита на $(a^*)^X$ является объединением некоторого числа X_{a^*}-орбит на $(a^*)^X$, причем это число делит y. Учитывая, что $t/y \leq z(\mu+1) < t$ и $(y, q(q+1)) = 1$, получим $y \neq 1$ и поэтому каждая M-орбита на σ совпадает с некоторой X_{a^*}-орбитой на σ. Поэтому $s = x_1 + x_2 q + x_3 q^2 + x_4 q^4 + x_5 q^5$

для некоторых $0 \leq x_1 \leq y-1, 0 \leq x_2, x_3, x_4, x_5 \leq y$. Тогда

$$s(\mu+1) = (x_1 + x_2 q + x_3 q^2 + x_4 q^4 + x_5 q^5)(\mu+1) = y\mu(q^5+q^4+q^3+q^2+q+1) \pm 2 = t\mu \pm 2,$$

противоречие, как и выше.

2.2. Пусть теперь $K = 1$. Тогда $H \simeq H^\Sigma$ и, как и в случае 2.1, по предложению 1.23 для H^Σ выполняется одна из следующих возможностей:

(i) линейные $e = cd$, $d \geq 3$ и $\mathrm{SL}_d(2^c) \trianglelefteq H^\Sigma \leq \Gamma\mathrm{L}_d(2^c)$;

(ii) симплектические $e = cd$, d четно, $d \geq 1$, $q = 2^c$ и $Sp_d(q) \trianglelefteq H^\Sigma \leq Z_{q-1} \circ \Gamma Sp_d(q)$;

(iii) G_2-типа $e = 6c$, $q = 2^c$ и $G_2(q)' \trianglelefteq H^\Sigma \leq Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$;

(iv) одномерные $H^\Sigma \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$.

2.2.1. Пусть $H^\Sigma \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$. Тогда $\Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$ содержит подгруппу индекса r, поэтому r делит $(2^e-1, r)e$. В случае $(2^e-1, r) = 1$ получим $2^e - 1 < e^2$ и $e \leq 4$, противоречие. В случае $(2^e-1, r) = 3$ получим $2^e - 1 < 9e^2$ и $e \leq 9$, при этом $r \leq e$ в случаях $e = 5, 6, 7, 9$ и $r = 12, 24$ в случае $e = 8$, противоречие.

Теперь если группа H^∞ фиксирует хотя бы одну точку из F, то группа $H^\infty \leq C$ действует транзитивно на $[a]$ и таким образом, Γ — двудольный граф, противоречие.

Поэтому можно считать, что H^∞ действует без неподвижных точек на F. Пусть $Y = H^\infty \cap G_a$ и $l = |H^\infty : Y|$. Тогда l делит r и G_a действует транзитивно на $\Omega_1(\widetilde{a})$. При этом G_a фиксирует H^∞-орбиту, содержащую вершину $\widetilde{a}$, и действует транзитивно на H^∞-орбитах на Ω, пересекающих $\Omega_1(\widetilde{a})$.

Заметим, что для подгруппы $(H^\infty)_{\{E\}}$, где $E \in \Sigma - \{F\}$, имеем $|H^\infty : (H^\infty)_{\{E\}}| = 2^e - 1$ и для вершины $b \in [a] \cap E$ имеем $(H^\infty)_b = Y_b$ и

$$|H^\infty : Y_b| = |H^\infty : (H^\infty)_{\{E\}}||(H^\infty)_{\{E\}} : Y_b| = |H^\infty : Y||Y : Y_b|,$$

поэтому $2^e - 1$ делит $(2^e-1, r)|Y : Y_b|$.

Если $|Y : Y_b| = 2^e - 1$, то есть группа Y транзитивна на $[a]$, то в силу связности графа Ω получим, что H^∞ имеет не более двух орбит на F.

Если же $|Y : Y_b| = (2^e-1)/3$, то $(r)_2 = 2$.

Предположим, что H^∞ имеет более двух орбит на F. Тогда любая H^∞-орбита на Ω является кокликой в Ω, $(r)_2 = 2$ и для любой вершины c из H^∞-орбиты, содержащей вершину a, группа $(H^\infty)_c$ имеет ровно три орбиты на $[c]$ (очевидно, каждая из них — длины $(2^e-1)/3$). Рассмотрим граф Φ, множеством вершин которого являются H^∞-орбиты на Ω, а множеством ребер — пары различных H^∞-орбит на Ω, некоторые представители которых смежны в Ω. Тогда граф Φ регулярен степени 3 и $d(\Phi) = 2$. Значит, $|\Phi| \leq 10$ и так как степень вершины в Φ нечетна, то $|\Phi| = 6$ или 10, то есть все H^∞-орбиты на F имеют нечетную длину.

Пусть далее M — это максимальная подгруппа в H^∞, содержащая Y. Тогда, рассмотрев допустимые возможности (I) и (II) для $r\mu$, получим, что $|H^\infty : M|$ не делится на 4 или является степенью 2.

2.2.2. Пусть $e = cd$, $d \geq 3$, $q = 2^c$ и $\mathrm{SL}_d(q) \trianglelefteq H^\Sigma \leq \Gamma\mathrm{L}_d(q)$. Имеем $M \geq Z(H^\infty)$. Поэтому $\widetilde{M} = M/Z(H^\infty)$ — это максимальная подгруппа в $\widetilde{H^\infty} = H^\infty/Z(H^\infty) \simeq L_d(q)$.

Пусть l_0 — длина $Z(H^\infty)$-орбиты на F. Заметим, что если $l_0 > 1$, то $l_0 = (l_0, 2^c - 1) = (r, 2^e - 1) = 3$ и следовательно, $|H^\infty : Y|_3 = 3$.

Если длина H^∞-орбиты на F нечетна, то по [95] группа $\widetilde{M}$ изоморфна параболической максимальной подгруппе из $\mathrm{SL}_d(q)$ и $|H^\infty : Y|$ делится на

$$\frac{|\mathrm{SL}_d(q)|}{q^{l(d-l)}|\mathrm{SL}_l(q)||\mathrm{SL}_{d-l}(q))|(q-1)} = \frac{(q^{(d-l+1)}-1)(q^{(d-l+2)}-1)\cdots(q^d-1)}{(q^l-1)(q^{(l-1)}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)},$$

где $0 < l < d$ (см. также [130]). Но $(r, 2^e - 1)$ делит 3, поэтому ввиду теоремы Жигмонди получим $e = 6$, $d = 3$, противоречие.

Значит, H^∞ имеет не более двух орбит на Ω. Если этих орбит — две, то, в силу связности графа Ω, каждая из них является $(r/2)$-кокликой в Ω. В свою очередь, каждой из этих коклик соответствует $(2^e r/2)$-коклика в Γ, противоречие с границей Хофмана для коклик (см. [40, предложение 3.7.2]).

Таким образом, группа H^∞ транзитивна на F.

Так как

$$2^e - 1 > |H^\infty : Y| = \frac{|\mathrm{SL}_d(q)|}{|Y|} = \frac{q^{d(d-1)/2}(q^d-1)(q^{d-1}-1)\cdots(q^2-1)}{|Y|},$$

то

$$|M|^2 > q^{d(d-1)}(q^{d-1}-1)^2\cdots(q^2-1)^2 \geq |H^\infty|$$

и

$$|\widetilde{M}|^2 > q^{d(d-1)}(q^{d-1}-1)^2\cdots(q^2-1)^2/(d,q-1)^2 \geq |\widetilde{H^\infty}|.$$

Предположим, что подгруппа $\widetilde{M}$ имеет негеометрический тип (см. [23, § 4.2–4.3] или [39, § 2.1–2.2]). Тогда по теореме Ашбахера (см., например, [39, теорема 2.1.5]) $\widetilde{M}$ — почти простая группа. Если $\mathrm{Soc}(\widetilde{M}) \simeq A_{\tilde{d}}$, где $\tilde{d} = d+1, d+2$, то

$$2(\tilde{d}!) \geq \frac{|M|}{(d,q-1)} > \frac{|H^\infty|}{(d,q-1)(q^d-1)},$$

противоречие. Следовательно, $\mathrm{Soc}(\widetilde{M}) \not\simeq A_{\tilde{d}}$. Но по [23, теорема 4.30] $|\widetilde{M}|^2 < q^{6ud}$, где $u = 2$ при $H^\infty = U_d(q)$ и $u = 1$ в остальных случаях, то есть

$$|H^\infty| < |M|^2 < q^{6ud}(d,q-1)^2.$$

Отсюда $u = 1$ и $d \leq 6$ или $u = 2$ и $d \leq 12$. Так как $|\widetilde{H^\infty} : \widetilde{M}|$ делится на 4 и не является степенью 2, то из [23, предложение 4.28] следует, что $d \leq 6$ и $\widetilde{H^\infty} \simeq L_4(2)$ и $\widetilde{M} \simeq A_7$. Тогда $|H^\infty : M| = 8$ и так как A_7 не содержит собственных подгрупп индекса, делящего r, то $M = Y$, $r = 8$ и $e = 4$, противоречие.

Если подгруппа $\widetilde{M}$ имеет геометрический тип, то по [23, предложение 4.7] и теореме Ашбахера допустимый индекс максимальной подгруппы в H^∞, содержащей Y, делится на 4 и не является степенью 2, противоречие.

2.2.3. Пусть $e = cd$, d четно, $d \geq 2$, $q = 2^c$ и $Sp_d(q) \trianglelefteq H^\Sigma \leq Z_{q-1} \circ \Gamma Sp_d(q)$. По [14] степень минимального подстановочного представления группы $Sp_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случаев $d = 2, q \in \{5, 7, 9, 11\}$, $d \geq 4$ и $q = 2$, $d = 4, q = 3$. Как и выше, $(d; q) \neq (4; 2)$.

2.2.3.1. Пусть $d \geq 4$. В этом случае ввиду [130, теорема 3.7] группа $Sp_d(q)$ не содержит максимальных подгрупп допустимого индекса, не делящегося на 4 или равного степени 2, за исключением параболических максимальных подгрупп или максимальных подгрупп негеометрического типа.

Если M изоморфна параболической максимальной подгруппе из $Sp_d(q)$, то $M \simeq q^{k(k+1)/2}.q^{2km} : (\mathrm{GL}_k(q) \times Sp_{2m}(q))$, где $0 < k \leq k + m = d/2$, и r делится на

$$\frac{|Sp_d(q)|}{q^{k(k+1)/2+2km}|\,\mathrm{GL}_k(q)||Sp_{2m}(q))|} = \frac{(2^{2c(d/2)}-1)(2^{2c(d/2-1)}-1)\cdots(2^{2c(m+1)}-1)}{(2^{ck}-1)(2^{c(k-1)}-1)\cdots(2^{2c}-1)(2^c-1)}.$$

Но $(r, 2^e - 1)$ делит 3, поэтому ввиду теоремы Жигмонди получим $e = 6$, противоречие.

Отсюда, как и в случае 2.2.2, получим, что группа H^∞ транзитивна на F.

По [130, теорема 3.7] если M изоморфна максимальной подгруппе негеометрического типа из $Sp_d(q)$, то M — почти простая группа и простая группа $\mathrm{Soc}(M)$ действует абсолютно неприводимо на естественном $Sp_d(q)$-модуле. Так как

$$2^e - 1 > |H^\infty : Y| = \frac{|Sp_d(q)|}{|Y|} = \frac{q^{d^2/4}(q^{2(d/2)}-1)(q^{2(d/2-1)}-1)\cdots(q^2-1)}{|Y|},$$

то при $d \geq 4$ имеем

$$|M|^2 > q^{d^2/2}(q^{d-2}-1)^2\cdots(q^2-1)^2 > |H^\infty|.$$

Если $\mathrm{Soc}(M) \simeq A_{\tilde{d}}$, где $\tilde{d} = d+1, d+2$, то $2(\tilde{d}!) \geq |M| > |H^\infty|/(q^d-1)$, что влечет $q = 2$ и $d = 4, 6$, противоречие. Отсюда по [23, предложение 4.28, теорема 4.30] $|M|^2 < q^{6d}$ и $d \leq 6$. Учитывая [39, таблицы 8.14, 8.29], при $d = 4, 6$ индекс допустимой максимальной подгруппы в H^∞, содержащей Y, делится на 4 и не является степенью 2, противоречие.

2.2.3.2. Пусть $d = 2$, то есть $2^e = q^2$. По [39, таблицы 8.1, 8.2] (см. также [130, теорема 3.7]) группа $L_2(q)$ не содержит максимальных подгрупп индекса, равного степени 2. Так как $(q(q^2-1), r) = 2(q^2-1, r/2)$ делит 6, то длина H^∞-орбиты на F равна 6 и по [14] $q = e = 4$, противоречие.

2.2.4. Пусть $e = 6c$, $q = 2^c$ и $G_2(q)' \trianglelefteq H \leq Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$. Как и в случае 2.1.4, получим $c > 2$. По [130, таблица 4.1] группа $G_2(q)$ не содержит максимальных подгрупп четного индекса, не делящегося на 4 или равного степени 2. Значит, длина H^∞-орбиты на F нечетна. Теперь ввиду [95] (см. также [130, таблица 4.1]), $(q^6-1)/(q-1)$ делит r. Но $(2^e - 1, r)$ делит 3, противоречие.

2.3. Наконец, пусть $1 < |K| < r$. Тогда $\bar{H} \simeq H^\Sigma$, группа $\bar{G}$ действует транзитивно на дугах графа Γ^K и, кроме того, индуцирует точное действие на множестве его антиподальных классов. По предложению 1.23 для H^Σ выполняется одна из следующих возможностей:

(i) (линейные) $e = cd$, $d \geq 3$ и $\mathrm{SL}_d(2^c) \trianglelefteq H^\Sigma \leq \Gamma\mathrm{L}_d(2^c)$;

(ii) (симплектические) $e = cd$, d четно, $d \geq 1$, $q = 2^c$ и $Sp_d(q) \trianglelefteq H^\Sigma \leq Z_{q-1} \circ \Gamma Sp_d(q)$;

(iii) (G_2-типа) $e = 6c$, $q = 2^c$ и $G_2(q)' \trianglelefteq H^\Sigma \leq Z_{q-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(q))$;

(iv) (одномерные) $H^\Sigma \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$.

Если $r/|K| > 2$, то G_a фиксирует K-орбиту на F, содержащую точку a, и либо $\bar{H}$ индуцирует почти простую 2-транзитивную группу подстановок на антиподальном классе графа Γ^K и реализуется ситуация из случая 1.1, либо $\bar{H}$ имеет как минимимум три подорбиты на антиподальном классе графа Γ^K и реализуется ситуация из случая 2.2. Поэтому Γ^K — граф с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, противоречие с тем, что $\mu|K| = 2$.

Значит, $r/|K| = 2$ и граф Γ^K является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, группа автоморфизмов которого содержит подгруппу NG_aK/K, действующую 2-транзитивно на любой из NK-орбит на Γ^K. Но тогда граф Γ^K является двудольным, что, в свою очередь, влечет двудольность графа Γ, противоречие. Предложение доказано.

§§ 2.2.1. Редукция к случаям $|K| \in \{1, r\}$

Предложение 2.10 позволяет доказать справедливость следующей леммы, в которой определяется массив пересечений графа Γ и уточняется строение группы G в случае $K > 1$.

Лемма 2.11. *Если Γ не является графом с массивом пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, то $|K| = r$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *$m + n$ делит $(m, n)p^e$;*

(2) *если T содержит нормальную в G подгруппу N порядка, кратного p^e, то $|N|$ делится на r;*

(3) *K/K' является p-группой, $(m; n) = (p^{e/2} + 1; p^{e/2} - 1)$ и $r\mu = p^e$.*

Доказательство. Покажем, что $|K| = r$. Действительно, если $|K| < r$, то граф $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^K$ является реберно симметричным антиподальным д.р.г. диаметра 3, допускающим транзитивную на дугах группу автоморфизмов $\widetilde{G} = G/K$, которая действует точно на антиподальных классах, и группа $\widetilde{G}$ содержит нормальную подгруппу порядка p^e, противоречие с предложением 2.10.

Теперь для неединичного элемента $g \in K$ имеем $\alpha_3(g) = v$ и по лемме 2.8 $\chi_1(g) = -m(k+1)/(m+n) \in \mathbb{Z}$ и $\chi_3(g) = -n(k+1)/(m+n) \in \mathbb{Z}$ (см. также [67, лемма 12.1]). Утверждение (1) доказано.

Пусть T содержит нормальную в G подгруппу N порядка, кратного p^e. Тогда N действует транзитивно на Σ и $|N/(K \cap N)| = p^e$. Если $|N|$ не делится на r, то $|K \cap N| < r$ и граф $\widetilde{\Gamma} = \Gamma^{K \cap N}$ (т.е. частное графа Γ на множестве $K \cap N$-орбит) является реберно симметричным антиподальным д.р.г. диаметра 3, допускающим транзитивную на дугах группу автоморфизмов $\widetilde{G} = G/(K \cap N)$, и группа $\widetilde{G}$ содержит нормальную подгруппу порядка p^e. Но тогда по предложению 2.10 граф $\widetilde{\Gamma}$ имеет массив пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ и $\mu|K| = 2$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Докажем утверждение (3).

1. Из леммы 1.6 следует, что K/K' является p-группой.

2. Покажем, что $r\mu = p^e$. Доказательство проведем от противного, рассматривая действие силовской p-подгруппы группы T на силовских подгруппах в K.

Итак, допустим $r\mu \neq p^e$.

2.1. Предположим, что r не делится на p. Тогда $K = K'$ и T содержит элементарную абелеву силовскую подгруппу T_0 порядка p^e. Так как группа K неразрешима, то r четно, p нечетно и по лемме 2.9 p не делит $r\mu$ и p-часть числа $r\mu + 4 - 2p^e$ равна p^{2t}, где p^t — это p-часть числа $m + n$ и $e \geq 2t$, и, в частности, если $e = 2t$, то $r\mu = p^e - 4$ и $(m; n) = (p^{e/2} - 1; p^{e/2} + 1)$.

Имеем $T = K : T_0$. По лемме Фраттини $G = TN_G(T_0) = KN_G(T_0)$, то есть группа K действует транзитивно на множестве $\mathrm{Syl}_p(T)$ силовских p-подгрупп в T.

Заметим, что если группа T_0 нормальна в T, то, более того, группа T_0 характеристична в T, что противоречит утверждению (2). Поэтому $T_0 \not\leq C_G(K)$.

Далее, группа $KC_G(K)$ нормальна в G, поэтому либо $T \leq C_G(K)K$, либо $C_G(K) \leq K$. Но в первом случае $T_0 \leq KC_G(K)$ и для любого неединичного элемента $g \in T_0$ имеем $g = zf$, где $z \in C_G(K)$ и $f \in K$, при этом $(|f|, p) = 1$ и, следовательно, $1 \neq g^{|f|} = z^{|f|}$ и $\langle g \rangle \leq C_G(K)$, то есть $T_0 \leq C_G(K)$, противоречие. Значит, $C_{T_0}(K) = 1$ и T_0 действует точно на K. По [29, 37.7] имеем $[T_0, N_T(T_0)] = T_0 \cap K = 1$, то есть $N_T(T_0) = C_T(T_0) = T_0 \times C_K(T_0)$.

Так как p не делит r, то для любого $s \in \pi(K)$ найдется T_0-инвариантная подгруппа $S \in \mathrm{Syl}_s(K)$.

Зафиксируем произвольные $s \in \pi(K)$ и T_0-инвариантную группу $S \in \mathrm{Syl}_s(K)$. Тогда $T_0 \leq N_G(S)$ и по лемме Фраттини $G = KN_G(S)$. Далее, $N_G(S)/N_K(S) \simeq G/K \simeq \bar{T}G_a$ и $N_G(S) = (N_K(S) : T_0).G_a$. Очевидно, $C_G(S)N_K(S) \trianglelefteq N_G(S)$.

Имеем $\mathrm{Syl}_p(N_T(S)) \subseteq \mathrm{Syl}_p(T)$. Группа $N_T(S)$ транзитивна на множестве $\{{T_0}^g | g \in T, {T_0}^g \leq N_T(S)\} = \mathrm{Syl}_p(N_T(S))$ и по лемме Фраттини $T = KN_T(S)$. По [29, 5.21] $N_T(T_0)$ транзитивна на множестве T_0-инвариантных силовских s-подгрупп группы K. Таким образом, по [29, 5.20] $C_K(T_0)$ действует транзитивно на множестве T_0-инвариантных силовских s-подгрупп группы K. Отсюда $|C_K(T_0) : N_T(S) \cap C_K(T_0)| \equiv |\mathrm{Syl}_s(K)| \pmod p$.

2.1.1. Предположим, что K не содержит собственных подгрупп, нормальных в G. Тогда K — характеристически простая группа и по лемме 1.6 K — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп, то есть $K = P_1 \times \ldots \times P_l$, где $P_1 \simeq P_i$ для $1 \leq i \leq l$, $\langle {P_1}^G \rangle = K$ и G действует транзитивно на множестве ${P_1}^G$ всех минимальных нормальных подгрупп группы K. Значит, $|G : N_G(P_1)| = l$.

Утверждение: Если $C_G(S) \not\leq K$, то $T_0 \leq C_T(S)$.

Доказательство утверждения. Допустим $C_G(S) \not\leq K$, и следовательно, $N_T(S) \leq C_G(S)N_K(S)$. В частности, $T_0 \leq (C_G(S)N_K(S)) \cap T = C_T(S)N_K(S)$ и $C_T(S)/C_K(S) \simeq C_T(S)N_K(S)/N_K(S)$. Поэтому $C_T(S)$ содержит силовскую p-подгруппу группы T. Так как $N_T(S)$ транзитивна на множестве своих силовских p-подгрупп и $C_T(S) \trianglelefteq N_T(S)$, то $T_0 \leq C_T(S)$. $\square$

Утверждение: Если $C_G(S) \leq K$, то $G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$, $(e, p^e - 1) > 1$, G_a не содержит элементов порядка $p^e - 1$ и $|S/\Phi(S)| > (p^e - 1)/(e, p^e - 1)$, в частности, $|S|^2 > r$.

Доказательство утверждения. Допустим, что $C_G(S) \leq K$ и, в частности, T_0 действует точно на S. Тогда $N_G(S)/C_G(S) = (N_K(S) : T_0).G_a/C_K(S) \leq \mathrm{Aut}(S)$ и по [29, 24.1] T_0 действует точно на $S/\Phi(S)$. Положим $f = \log_s(|S/\Phi(S)|)$. Таким образом,

$$T_0 \leq \mathrm{Aut}(S/\Phi(S)) \simeq \mathrm{GL}_f(s).$$

Обозначим через $\widetilde{L}$ ядро действия группы $N_G(S)/C_K(S)$ на $S/\Phi(S)$ и пусть L — его полный прообраз в $N_G(S)$. Если $\widetilde{L} \not\leq N_K(S)/C_K(S)$, то $T_0 \leq (LN_K(S)) \cap T = (L \cap T)N_K(S)$, $L \cap T$ содержит силовскую p-подгруппу группы $N_T(S)$ и так как $L \cap T \trianglelefteq N_T(S)$, то $T_0 \leq L$, что противоречит доказанному выше. Имеем

$$N_G(S)/L = (N_K(S) : T_0).G_a/L \leq \mathrm{Aut}(S/\Phi(S)) \simeq \mathrm{GL}_f(s).$$

По предложению 1.23 для G_a допустима одна из следующих возможностей.

(i) Линейные: $e = cd$, $d \geq 2$ и $\mathrm{SL}_d(p^c) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_d(p^c)$, при этом $(e; p) \neq (2; 3)$ (иначе $r\mu = 5$, что невозможно).

(ii) Симплектические: $e = cd$, d четно, $d \geq 4$ и $Sp_d(p^c) \trianglelefteq G_a \leq Z_{p^c-1} \circ \Gamma Sp_d(p^c)$.

(iii) Одномерные: $G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$.

(iv) Исключительные: $p^e \in \{9^2, 11^2, 19^2, 29^2, 59^2\}$ и $\mathrm{SL}_2(5) \trianglelefteq G_a$, либо $p^e = 3^6$ и $\mathrm{SL}_2(13) \trianglelefteq G_a$. Так как K — произведение простых неабелевых групп и p не делит $|K|$, то $p^e \neq 9^2, 3^6$ (см., например, [51, с. 239]). По условию $120p^e$ делит $|\mathrm{GL}_f(3)|$. Если $p = 11$, то $f \geq 5$ и $3^5 \leq 11^2$, противоречие. Значит, $f \geq 11$ и $3^{11} \leq 59^2$, снова противоречие.

(v) Экстраспециальные: $p^e \in \{5^2, 7^2, 11^2, 23^2\}$ и $\mathrm{SL}_2(3) \trianglelefteq G_a$ или $p^e = 3^4$, $D_8 \circ Q_8 \simeq R \trianglelefteq G_a$, $G_a/R \leq S_5$ и 5 делит $|G_a|$. Так как K — произведение простых неабелевых групп и p не делит $|K|$, то $p^e \in \{11^2, 23^2\}$, противоречие как и выше.

Осталось рассмотреть действие группы G_a на ${P_1}^G$ в случаях $(i - iii)$.

(a) Допустим, что для G_a выполняется случай (i). По [14] при нечетном $q \geq 3$ степень минимального подстановочного представления группы $L_d(q)$ равна $(q^d - 1)/(q - 1)$, за исключением случаев $d = 2$, $q \in \{5, 7, 9, 11\}$.

Если $d = 2$ и $q \in \{5, 7, 9, 11\}$, то $K \simeq A_5$, противоречие.

Если ${G_a}^\infty \not\leq N_G(P_1)$, то $l \geq (q^d - 1)/(q - 1)$ и

$$|P_1|^{q^{d-1}} \cdot |P_1|^{(q^{d-2} + \ldots + 1)} \leq |P_1|^l \leq q \cdot q^{d-1} - 1,$$

откуда $d = 2$. Но тогда $(|P_1|^{(q+1)/2})^2 \leq q^2 - 1$ и 4 делит $|P_1|$, снова противоречие.

Теперь предположим, что для G_a выполняется случай (ii). По [14] при нечетном $q \geq 3$ степень минимального подстановочного представления группы $PSp_d(q)$ равна $(q^d - 1)/(q - 1)$, за исключением случаев $d = 2$, $q \in \{5, 7, 9, 11\}$ и случая $(d; q) = (4; 3)$.

Если $(d;q)=(4;3)$, то $K\simeq A_5$, противоречие.

Если ${G_a}^{\infty}\nleq N_G(P_1)$, то $l\geq (q^d-1)/(q-1)$ и

$$|P_1|^{q^{d-1}}\cdot|P_1|^{(q^{d-2}+\ldots+1)}\leq|P_1|^l\leq q\cdot q^{d-1}-1,$$

противоречие.

В обоих случаях (i) и (ii) получим ${G_a}^{\infty}\leqslant N_G(P_i)$ для каждого $1\leq i\leq l$. Ввиду гипотезы Шрейера группа $\mathrm{Out}(P_i)$ — разрешима, поэтому ${G_a}^{\infty}$ централизует P_i. Но тогда $[{G_a}^{\infty},K]\leq C_K(P_i)$ (см., например, [29, упражнение 3.6]). Таким образом, $[{G_a}^{\infty},K]=1$, противоречие с тем, что $C_G(S)\leq K$.

(б) Пусть выполняется случай (iii) и $G_a\leq\Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$. Тогда $|G_a|$ делит $(p^e-1)e$. По условию $N_G(S)$ содержит подгруппу T_0, которая действует регулярно на Σ. Значит, $N_G(S)=N_T(S)\cdot(N_G(S))_{\{F\}}$ и $G_a\simeq(N_G(S))_{\{F\}}/(N_T(S))_{\{F\}}$ содержит элемент порядка $(p^e-1)/(e,p^e-1)$. Так как наибольший из порядков элементов группы $\mathrm{GL}_f(s)$ равен порядку ее цикла Зингера, то $(p^e-1)/(e,p^e-1)\leq s^f-1$. Отсюда $(e,p^e-1)>1$, G_a не содержит элементов порядка p^e-1 и $s^f>p^{e/2}+1$, то есть $s^f>\sqrt{r}$. $\square$

Таким образом, если для каждого $s_1\in\pi(K)$ существует T_0-инвариантная группа $S_1\in\mathrm{Syl}_{s_1}(K)$ такая, что $C_G(S_1)\nleq K$, то $[K,T_0]=1$, противоречие.

Пусть, как и ранее, S — произвольная T_0-инвариантная силовская s-подгруппа группы K. По доказанному выше, можно считать, что $C_G(S)\leq K$ и $C_G(S_1)\nleq K$ для каждой T_0-инвариантной группы $S_1\in\mathrm{Syl}_{s_1}(K)$, где $s_1\in\pi(K)-\{s\}$.

Тогда для каждой T_0-инвариантной группы $S_1\in\mathrm{Syl}_{s_1}(K)$, где $s_1\in\pi(K)-\{s\}$, получим $S_1\leq C_K(T_0)$. Поэтому $|K:C_K(T_0)|$ делит $|S|$. Следовательно, число силовских p-подгрупп группы T делит $|S|$.

Так как $(|K:S|,|K:C_K(T_0)|)=1$, то $K=SC_K(T_0)=N_K(S)C_K(T_0)$, откуда по [29, 5.20] $C_K(T_0)$ действует транзитивно на множестве всех силовских s-подгрупп группы K. Поэтому T_0 нормализует каждую силовскую s-подгруппу группы K и $|C_K(T_0):N_T(S)\cap C_K(T_0)|=|\mathrm{Syl}_s(K)|$.

Таким образом, T_0 содержится в ядре R действия G на $\mathrm{Syl}_s(K)$. По предположению, K не содержит собственных подгрупп, нормальных в G, поэтому $R\cap K=1$. Но тогда группа $T\cap R=T_0$ нормальна в G, противоречие.

2.1.2. Пусть K содержит собственную подгруппу H_1, нормальную в G, $K_1=K/H_1$ и Γ_1 — частное графа Γ на множестве K_1-орбит. Тогда $G_1=G/H_1$ действует транзитивно на множестве дуг графа Γ_1, $T_1=T/H_1$ — нормальная в G_1 подгруппа, регулярная на вершинах графа Γ_1, и $K_1=\mathcal{CG}(\Gamma_1)$.

Если $\tilde{K}_1$ содержит собственную подгруппу H_2, нормальную в G_1, $K_2=\tilde{K}_1/H_2$ и Γ_2 — частное графа Γ_1 на множестве H_2-орбит, то $G_2=G_1/H_2$ действует транзитивно на дугах графа Γ_2 и $T_1=T/H_1$ — нормальная в G_2 подгруппа, регулярная на вершинах графа Γ_2, и $K_2=\mathcal{CG}(\Gamma_2)$. Повторив этот процесс достаточное число раз, получим, что K_i — характеристически простая группа, поэтому K_i — прямое произведение изоморфных (неабелевых, ввиду леммы 1.6 и того, что по условию p не делит r) простых групп, то есть $K_i = P_1 \times \ldots \times P_l$, где $P_1 \simeq P_j$ для $1 \leq j \leq l$. При этом можно считать, что K_i не содержит собственных подгрупп, нормальных в $G_i = G_{i-1}/H_i$, то есть $\langle P_1^{G_i} \rangle = K$ и G_i действует транзитивно на множестве всех минимальных нормальных подгрупп в K_i. Группа G_i действует транзитивно на дугах графа Γ_i и $T_i = T_{i-1}/H_i$ — нормальная в G_i подгруппа, регулярная на вершинах графа Γ_i, $K_i = \mathcal{CG}(\Gamma_i)$ и T_i/K_i — элементарная абелева группа порядка p^e.

Переобозначим $\widetilde{G} = G_i, \widetilde{T} = T_i, \widetilde{K} = K_i$, $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_i$ и пусть $\widetilde{T}_0 \in \mathrm{Syl}_p(\widetilde{T})$. Как и выше получим, что $\widetilde{T} = \widetilde{K} : \widetilde{T}_0$. Применив те же рассуждения, что и в случае 2.1.1 для графа $\widetilde{\Gamma}$, получим, что $[\widetilde{K}, \widetilde{T}_0] = 1$, откуда группа $\widetilde{T}_0$ нормальна в $\widetilde{G}$, противоречие с утверждением (2).

2.2. Теперь предположим, что r делится на p. Из предложения 1.2 и лемм 2.8, 2.9 следует, что $p = 2$, $(r\mu, 8) = 4$ и число $r/2$ нечетно. Поэтому K содержит характеристическую подгруппу K_0 индекса 2 (см., например, [129, теорема 4.6]) и $T = K_0T_0$ для $T_0 \in \mathrm{Syl}_2(T)$. Граф Γ^{K_0} является недвудольным дистанционно-транзитивным графом Тейлора с $\mu' = \mu|K_0| = 2^{e-1} - 2$ (см., например, теорему 1.13 или [40, с. 228]) и $\mathrm{Aut}(\Gamma^{K_0}) \simeq K/K_0 \times 2^e.Sp_e(2)$, то есть $G_a \leq Sp_e(2)$ и $T_0 \simeq T/K_0$ — элементарная абелева группа порядка 2^{e+1}.

По [29, 37.7] имеем $[T_0, N_T(T_0)] = T_0 \cap K_0 = 1$, то есть $N_T(T_0) = C_T(T_0) = T_0C_{K_0}(T_0)$.

Так как $r/2$ нечетно, то для любого $s \in \pi(K_0)$ найдется T_0-инвариантная подгруппа $S \in \mathrm{Syl}_s(K_0)$. Таким образом, $T_0 \leq N_G(S)$ и по лемме Фраттини $G = K_0N_G(S) = KN_G(S)$. По следствию из леммы Фраттини $\mathrm{Syl}_s(K_0) = \mathrm{Syl}_s(K)$. Покажем, как и в случае 2.1, что $N_G(S) = (N_K(S)T_0).G_a$.

Имеем $G/K = KN_G(S)/K \simeq N_G(S)/N_K(S) \simeq \bar{T}G_a$ и группа $N_G(S)/N_K(S)$ действует 2-транзитивно на множестве элементов группы $\mathrm{Soc}(N_G(S)/N_K(S)) = N_T(S)/N_K(S) \simeq \bar{T}$.

Поэтому $N_G(S) = (N_K(S)T_0).G_a = (N_{K_0}(S) : T_0).G_a$.

Очевидно, $C_G(S)N_K(S) \trianglelefteq N_G(S)$.

2.2.1. Предположим, что K_0 не содержит собственных подгрупп, нормальных в G. Тогда K_0 — характеристически простая группа и $K_0 = P_1 \times \ldots \times P_l$, где $P_i \simeq Z_s$ для $1 \leq i \leq l$, то есть $\langle {P_1}^G \rangle = K_0$. Обозначим K_0 через S.

Заметим, что s^l делит $2^{e-2} - 1$ и если s делит $2^e - 1$, то $s = 3$.

Утверждение: Случай $C_G(S) \leq K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $C_G(S) \leq K$. Тогда по лемме 1.6 $C_G(S) = S$, T_0 действует точно на S и

$$G/S = TG_a/S \leq \mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{GL}_l(s).$$

Запишем $K = S : \langle h \rangle$, где h — инволюция из $T_0 \cap K$. Так как $Z(K) = 1$, то, очевидно, $C_S(h) = 1 = C_S(T_0) = N_S(T_0)$ и поэтому $T_0 = N_T(T_0)$ и $|\mathrm{Syl}_2(T)| = s^l$. Отсюда по [29, 40.5] $f^h = f^{-1}$ для всех $f \in S$, то есть h инвертирует S. Но тогда h фиксирует каждую минимальную подгруппу в S и поэтому K содержится в ядре действия G на ${P_1}^G$.

По предложению 1.23 для G_a допустима одна из следующих возможностей.

(i) Линейные: $e = cd$, $d \geq 2$ и $\mathrm{SL}_d(2^c) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_d(2^c)$: Так как максимальный из порядков элементов группы $Sp_e(2)$ не превосходит $2^{e/2+1}$ при $e > 2$ или 10 при $e = 4$, то $(2^e-1)/(2^c-1) < 2^{e/2+1}$ или $15/(2^c-1) \leq 10$, что влечет $c \geq e/2$, то есть $d = 2, c = e/2$ и ${G_a}^\infty \simeq L_2(2^c)$, при этом $(e;p) \neq (2;2)$ (иначе $r = 2$, что противоречит условию).

(ii) Симплектические: $e = 2ct$, $t \geq 2$ и $Sp_{2t}(2^c) \trianglelefteq G_a \leq Z_{2^c-1} \circ \Gamma Sp_{2t}(2^c)$.

(iii) G_2-типа: $e = 6c$ и $G_2(2^c)' \trianglelefteq G_a \leq Z_{2^c-1} \circ \mathrm{Aut}(G_2(2^c))$.

(iv) Одномерные: $G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$.

(v) Исключительные: $p^e = 2^4$ и A_6 или $A_7 \trianglelefteq G_a$. Но тогда $2s^l < 16$ и $s^l = 3, 5, 7$, противоречие с тем, что $G_a \not\leq Z_{s-1}$.

(а) Допустим, что ${G_a}^\infty \neq 1$ и s не делит $|{G_a}^\infty|$. Тогда ${G_a}^\infty$ фиксирует силовскую 2-подгруппу группы T. Можно считать, что это группа T_0, то есть ${G_a}^\infty \leq N_G(T_0)$. Отсюда ${G_a}^\infty$ централизует $\langle h \rangle$ и переставляет T_0-орбиты на $V(\Gamma)$, фиксируя при этом орбиту a^{T_0}. Тогда Γ содержит $2(k+1)$-коклику, индуцированную множеством a^{T_0}, и ввиду границы Хофмана для коклик (см. [40, предложение 3.7.2]) имеем $2 \leq r/(n+1)$, поэтому $2^{e/2} + 2 = n + 1 \leq r/2 = s^l$ и $m - 1 \geq 2\mu$. Но $r\mu = 2^e - 4 = 4(2^{e/2-1} - 1)(2^{e/2-1} + 1)$ и поэтому s делит $(2^{e/2-1} - 1, 2^{e/2-1} + 1)$, противоречие.

(б) Если ${G_a}^\infty = 1$ (то есть $G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$) и s не делит $|G_a|$, противоречие получается как и в п. (а).

(в) Пусть ${G_a}^\infty \neq 1$ и s делит $|{G_a}^\infty|$.

В случае (i) $c = e/2$ и по [14] степень минимального подстановочного представления группы $L_2(2^c)$ равна $2^c + 1$, поэтому $2^{e/2} + 1 \leq s^l$, противоречие с тем, что $r\mu = 2^e - 4$.

В случае (ii) $e = 2ct$ и по [14] степень минимального подстановочного представления группы $Sp_{2t}(2^c)'$ равна $(2^e - 1)/(2^c - 1)$ при $c > 1$, равна 6 при $t = 2, c = 1$ ($Sp_4(2) \simeq S_6$), и равна $2^{t-1}(2^t - 1)$ при $c = 1$ и $t \geq 3$, поэтому $2^{e/2} + 1 \leq s^l$, противоречие с тем, что $r\mu = 2^e - 4$.

В случае (iii) $e = 6c$ и по [5] степень минимального подстановочного представления группы $G_2(2^c)'$ равна 28 в случае $c = 1$ (напомним, что $G_2(2)' \simeq U_3(3)$), 416 в случае $c = 2$, и равна $(2^e - 1)/(2^c - 1)$ в случае $c > 2$. Поэтому $2^{e/2} + 1 \leq s^l$, противоречие с тем, что $r\mu = 2^e - 4$.

(г) Пусть ${G_a}^\infty = 1$ и s делит $|G_a|$. Так как порядок максимальной неприводимой циклической подгруппы в $Sp_e(2)$ равен $2^{e/2} + 1$ (см. например [34]), то G_a не содержит элементов из $\mathrm{GL}_1(2^e)$ порядка кратного, но не равного $2^{e/2} + 1$, и $e \geq 2^{e/2} - 1$. Поэтому $e = 4$, $s^l = 3$ и элемент порядка 5 из G_a централизует S, противоречие с условием. $\square$

Утверждение: Случай $C_G(S) \not\leq K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $C_G(S) \not\leq K$. Так как группа T разрешима, то по [29, 31.10] $C_T(F(T)) \leq F(T)$. Поэтому $F(T) \neq S$ и по [29, 31.8] $O_2(T) \neq 1$. Если $O_2(T) \cap K = 1$, то $T = K \times O_2(T)$ и $O_2(T)$ — нормальная в G подгруппа из T порядка

2^e, что ввиду предложения 2.10 влечет $r\mu = 2^e$, противоречие. Если $O_2(T) \cap K \neq 1$, то $K = S \times O_2(K)$ и по лемме 1.6 s делит $k+1$, противоречие. $\square$

2.2.2. Если K_0 содержит собственную подгруппу H_1, нормальную в G, то рассмотрев, как и в случае 2.1.2, частные графа Γ, получим противоречие как и в случае 2.2.1.

3. Наконец, из лемм 2.8 и 2.9 следует, что $r\mu = p^e$, $(m; n) = (p^{e/2}+1; p^{e/2}-1)$ и поэтому $K' < K$.

Утверждение (3) и лемма доказаны.

Замечание 2.12. 1) Заключение леммы 2.11 также справедливо в том случае, если вместо ограничения на массив пересечений графа предполагать, что $K > 1$. Таким образом, по предложению 2.10 граф Γ имеет массив пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$ тогда и только тогда, когда $K = 1$.

2) С помощью компьютерных вычислений, проведенных в ходе доказательства предложения 2.10, было установлено, что в случае $K = 1$ существует всего два неизоморфных графа (они могут быть получены путем удаления спреда из геометрического или псевдогеометрического графа для $\mathrm{GQ}(5, 3)$, см. [104] и [43]).

3) Как отмечается в [40, с. 386], существуют ровно два неизоморфных дистанционно-регулярных графа с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 3, 8\}$ (каждый из них может быть получен путем удаления одного из двух неизоморфных спредов из геометрического графа для (единственного) обобщенного четырехугольника $\mathrm{GQ}(2, 4)$). Один из этих графов дистанционно транзитивен и его группа автоморфизмов является полупрямым произведением экстраспециальной группы порядка 27 и экспоненты 3 и группы $\mathrm{GL}_2(3)$. Другой граф вершинно транзитивен, но не реберно симметричен, и его группа автоморфизмов является полупрямым произведением экстраспециальной группы порядка 27 и экспоненты 3 и группы D_{12}. В обоих случаях экстраспециальная группа регулярна на вершинах. Таким образом, далее можно считать, что $(e; p) \neq (2; 3)$.

§ 2.3. Случай четного числа антиподальных классов

До конца параграфа 2.3 будем предполагать, что $p = 2$ и $K > 1$. Ввиду леммы 2.11 $|K| = r$ и $H = K : G_a$.

Докажем сначала вспомогательный результат.

Лемма 2.13. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $r\mu = 2^e$, *e четно,* $m = 2^{e/2}+1$, $n = 2^{e/2}-1$, $\mu = 2^l$, Γ *имеет массив пересечений*

$$\{2^e - 1, (2^{e-l} - 1)2^l, 1; 1, 2^l, 2^e - 1\},$$

(2) *если H содержит элемент g порядка $2^e - 1$ и $\langle g \rangle$ действует регулярно на $\Sigma - \{F\}$, то* $2^l + 1 \leq |C_{\langle g \rangle}(K)|$, $\alpha_0(g) = 2^s \geq 1$, $\alpha_1(g) = (2^e - 1)w$ *для некоторых* $s, w2^{-s} \in \mathbb{Z}, w \leq r$ *и либо*

(*i*) $s = 0$ *и* $w \equiv 1 \pmod{2^{e/2+1}}$, *либо*

(*ii*) $s \geq 1$, $(2^s - w)_2 = 2^{e/2}$ *и* $e/2 \geq s$; *в частности, если* $\alpha_0(g) = r$, *то* $w = 0$ *и* $l = e/2$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из леммы 2.11.

Докажем утверждение (2). Допустим, что H содержит элемент g порядка $2^e - 1$ и положим $R = \langle g \rangle$. Тогда $[N_T(R), R] \leq R \cap T = 1$, поэтому $N_T(R) = C_T(g)$.

Предположим к тому же, что R действует регулярно на $\Sigma - \{F\}$. По теореме Шура-Цассенхауза (см., например, [29, 18.1]) группа $X = TR$ транзитивна на множестве дополнений к T в X и, следовательно, по [29, 5.20] можно считать, что $R = X_a$. Поэтому $|C_K(g)| = |\mathrm{Fix}(g)| = \alpha_0(g) = 2^s$, где $0 \leq s \leq e - l$, и множество $\mathrm{Fix}(g)$ является блоком импримитивности группы X. Отсюда следует, что для всех $1 \leq i \leq 3$ числа $\alpha_i(g)$ делятся на $\alpha_0(g)$. Тогда $r = \alpha_0(g) + \alpha_3(g) = \alpha_0(g)(1 + \alpha_3(g)/\alpha_0(g))$ и поэтому $\alpha_3(g) = 2^s(2^{e-l-s} - 1)$.

Таким образом, $R/C_R(K) \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$ и поэтому

$$(r-1)\mu + 1 \leq 2^e - 1 = |g| \leq (r/|\Phi(K)| - 1) \cdot |C_R(K)| \leq (r-1)|C_R(K)|.$$

Значит, $\mu + 1 \leq |C_R(K)|$.

Далее, $|RC_K(g)|$ делит $\alpha_1(g)$ и $\alpha_2(g)$, то есть $\alpha_1(g) = (2^e - 1)w$ для некоторого $w \in \mathbb{Z}, w \leq r$ и w кратно $\alpha_0(g)$. По лемме 2.6 $\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + 1 + \alpha_1(g))/(m+n) - 2^{e/2-1}$ и из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что

$$(m\alpha_0(g) - m + 1 + \alpha_1(g)) = 2^{e/2+s} + 2^s - 2^{e/2} + 2^e w - w \equiv 0 \pmod{2^{e/2+1}}.$$

Если $s \geq 1$, то

$$2^s - 2^{e/2} - w \equiv 0 \pmod{2^{e/2+1}},$$

что влечет $(2^s - w)_2 = 2^{e/2}$ и $e/2 \geq s$. В частности, если $\alpha_0(g) = r$, то $w = 0$ и $l = e/2$.

Если $s = 0$, то

$$w \equiv 1 \pmod{2^{e/2+1}}.$$

Лемма доказана.

§§ 2.3.1. Линейный, симплектический и G_2-типа случаи

Лемма 2.14. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *в линейном случае с* $d = 2$ *число* r *делит* 2^c *и* $L_2(2^c) \trianglelefteq G_a$, *линейный случай с* $d \geq 3$ *не реализуется;*

(2) *в симплектическом случае при* $Sp_4(2)' \ntrianglelefteq G_a$ *имеем* $e = 2dc$, $d \geq 1$, r *делит* 2^c *и* $Sp_{2d}(2^c) \trianglelefteq G_a$;

(3) *в* G_2*-типа случае имеем* $e = 6c$, r *делит* 2^c *и* $G_2(2^c)' \trianglelefteq G_a$.

В любом из этих случаев T *— элементарная абелева группа.*

Доказательство.

1. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (i) предложения 1.23, $q = 2^c$ и $Y = (G_a)^\infty = \mathrm{SL}_d(q)$.

Пусть далее g — элемент порядка $(2^e-1)/(2^c-1)$ из Y (g — цикл Зингера из Y) и $R = \langle g\rangle$. Тогда R действует полурегулярно на $\Sigma - \{F\}$ и $[N_K(R), R] \le R\cap K = 1$, то есть $N_K(R) = C_K(g)$. Поэтому $|C_K(g)| = |\mathrm{Fix}(g)| = \alpha_0(g) = 2^s$ и множество $\mathrm{Fix}(g)$ является блоком импримитивности группы TR, откуда следует, что числа $\alpha_i(g)$ делятся на $\alpha_0(g)$. Тогда $r = \alpha_0(g)+\alpha_3(g) = \alpha_0(g)(1+\alpha_3(g)/\alpha_0(g))$ и поэтому $\alpha_3(g) = 2^s(2^{e-l-s}-1)$. По лемме 2.6 $\chi_1(g) = (m\alpha_0(g)-m+\alpha_1(g)-k)/(m+n)$. В частности, если $\alpha_1(g)=0$, то из целочисленности $\chi_1(g)$ следует $\alpha_0(g) = 2^{e/2}$.

Далее, $|g|$ делит $\alpha_1(g)$ и $\alpha_2(g)$, то есть $\alpha_1(g) = (2^e-1)w/(2^c-1)$ для некоторого $w\in\mathbb{Z}$, кратного $\alpha_0(g)$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что

$$(m\alpha_0(g)-m+1+\alpha_1(g)) = \alpha_0(g)(2^{e/2}+1+\alpha_1(g)/\alpha_0(g)) - 2^{e/2} \equiv 0 \pmod{2^{e/2+1}}.$$

Если $s\ge 1$, то $(1+\alpha_1(g)/\alpha_0(g))_2 = 2^{e/2-s}$ и либо $s = e/2$ и $w2^{-s}$ четно, либо $s<e/2$ и $(w)_2 = 2^s$.

Если $s=0$, то

$$(2^e-1)w/(2^c-1) \equiv -1 \pmod{2^{e/2+1}}.$$

Допустим, что $C_Y(K)\le Z(Y)$, то есть $Y/Z(Y)$ действует точно на K.

По [14] степень минимального подстановочного представления группы $L_d(q)$ равна $(q^d-1)/(q-1)$, за исключением случая $(d;q) = (4;2)$, в котором соответствующая степень равна 8. При $(d;q) = (4;2)$ имеем $k = 15 > r = 2^{4-l} \ge 8+1$, противоречие. Поэтому $2^e-2 = k-1 \ge (r-1)\mu \ge (2^e-1)\mu/(2^c-1)$ и $\mu < 2^c$.

Имеем $C_R(K)\le Z(Y)$ и по [29, 24.1] $R/C_R(K) \le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$ и поэтому $(2^e-1)/(2^c-1) = |g|$ делит $|\mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)|(d, 2^c-1)$. Отсюда по теореме 1.21 получим $e=6$ и $d\le 3$. Так как множество $\mathrm{Fix}(Y)$ является блоком импримитивности группы TY и лежит в F, то число $|F-\mathrm{Fix}(Y)|$ четно или $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$.

Предположим, что $\mathrm{Fix}(Y)\ne\{a\}$ и возьмем некоторую вершину $a^*\in F-\mathrm{Fix}(Y)$. Тогда либо Y имеет орбиту четной длины на F, либо число всех Y-орбит на F четно и каждая из них — нечетной длины. В первом случае ввиду [51] получим $d=2, c=3, r=32, \mu=2$, $|(a^*)^Y| = 28$ и $|\mathrm{Fix}(g)| \ge |\mathrm{Fix}(Y)| = 4$, при этом силовская 3-подгруппа в Y является циклической, имеет порядок 9 и фиксирует ровно одну точку из $(a^*)^Y$. В последнем случае снова получим $d=2, c=3, r=32$, $\mu=2$, $|Y(a^*)| = 9$, при этом силовская 3-подгруппа в Y действует регулярно на $(a^*)^Y$, что влечет $|\mathrm{Fix}(g)| = 14$. Тогда $\alpha_0(g) = 5, 14$, противоречие в обоих случаях.

Поэтому $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$ и число всех Y-орбит нечетной длины на F нечетно. Тогда ввиду [51] получим $r-1 = 21z_1$ при $d=3$ или $r-1 = 9z_1+28z_2$ при $d=2$, где $z_1, z_2\in\mathbb{N}$, снова противоречие.

Значит, $Y\le C_G(K)$ и поэтому $G_1 = C_G(K)$ действует дважды транзитивно на Σ. Имеем $\bar{T}\simeq \mathrm{Soc}(C_G(K)/Z(K))$.

Допустим $Z(K) < K$ и рассмотрим граф $\Gamma^{Z(K)}$. Ясно, что $C_G(K)/Z(K) \trianglelefteq G/Z(K) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma^{Z(K)})$ и группа $G/Z(K)$ транзитивна на дугах графа $\Gamma^{Z(K)}$. Поэтому $G/Z(K)$ содержит нормальную подгруппу порядка 2^e, транзитивную на антиподальных классах графа $\Gamma^{Z(K)}$. Так как $Y \not\leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, то из предложения 2.10 следует, что либо $\Gamma^{Z(K)}$ является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, либо $\Gamma^{Z(K)}$ имеет массив пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$. В первом случае $|K : Z(K)| = 2$, что невозможно. Во втором случае $r/|Z(K)| = 6$, снова противоречие.

Отсюда K — абелева группа и группа $C_G(K)$ транзитивна на дугах графа Γ. Для подгруппы K_0 индекса 2 из K получим, что $C_G(K)/K_0$ — дистанционно-транзитивная группа автоморфизмов графа Тейлора Γ^{K_0}. Поэтому $Y \leq Sp_e(2)$. Так как максимальный из порядков элементов группы $Sp_e(2)$ не превосходит $2^{e/2+1}$ при $e > 2$ или 10 при $e = 4$, то $(2^e - 1)/(2^c - 1) < 2^{e/2+1}$ или $15/(2^c - 1) \leq 10$, что влечет $c \geq e/2$, то есть $d = 2$, $c = e/2$ и $Y \simeq Sp_2(2^c)$.

Далее, $\alpha_0(g) = r = 2^s \leq 2^{e/2}$ и по доказанному выше, r делит 2^c, в частности, $\alpha_1(g) = 0$ если $r = 2^c = 2^{e/2}$.

2. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (ii) предложения 1.23, $Y = {G_a}^\infty$, $q = 2^c$ и $e = 2dc$, где $d \geq 1$.

Допустим, что $d \geq 2$ и Y действует точно на K. Ввиду [14] степень минимального подстановочного представления группы $Y \simeq Sp_{2d}(2^c)'$ равна $2^{d-1}(2^d - 1)$ в случае $c = 1$ и $d \geq 3$, равна 6 в случае $c = 1$ и $d = 2$ ($Y \simeq A_6$), и равна $(q^6-1)/(q-1)$ в случае $c > 1$ и $d \geq 2$. В любом случае получим $Y \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$ и число $|\mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)|$ делится на $2^e - 1$. Отсюда по теореме 1.21 получим $e = 6$ и $c = 1$, то есть $Y \simeq Sp_6(2)$. Так как множество $\mathrm{Fix}(Y)$ является блоком импримитивности группы TY и лежит в F, то число $|F - \mathrm{Fix}(Y)|$ четно или $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$. По [51] длина неединичной Y-орбиты на F делится на 28, 36 или 63, что исключает случай $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$. То есть $|\mathrm{Fix}(Y)| = 4$ и группа Y 2-транзитивна на 28 точках множества $F - \mathrm{Fix}(Y)$. Отсюда $\Phi(K) = 1$ и $Y \leq \mathrm{GL}_5(2)$, противоречие.

Поэтому Y централизует K и $G_1 = C_G(K)$ действует дважды транзитивно на Σ. Имеем $T/K = \mathrm{Soc}(KC_G(K)/K)$ и $KC_G(K)/K \simeq C_G(K)/Z(K) \trianglelefteq G/Z(K)$.

Если $Z(K) < K$, то группа $G/Z(K)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{Z(K)}$ и содержит нормальную подгруппу порядка 2^e, противоречие с предложением 2.10.

Значит, $TY \leq C_G(K)$ и для любой подгруппы K_0 индекса 2 из K граф Γ^{K_0} является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, при этом $Y \leq Sp_e(2)$ и полная группа автоморфизмов этого графа содержит нормальную элементарную абелеву 2-группу T_1 (см. [40, с. 228]). Обозначим $\widetilde{G} = G/K_0, \widetilde{T} = T/K_0$ и отождествим группу $\widetilde{G}$ с изоморфной ей подгруппой из $\mathrm{Aut}(\Gamma^{K_0})$. Покажем, что $T_1 = \widetilde{T}$. Положим $X = T_1\widetilde{T}$ и $A = T_1\widetilde{G}$. Тогда $A = T_1\widetilde{G} = X(G_aK/K)$ и $X \trianglelefteq A$. Так как стабилизатор $A_{\widetilde{a}}$ вершины $\widetilde{a}$ графа Γ^{K_0} в A транзитивен на ее окрестности (порядка $2^e - 1$) и $X_{\widetilde{a}} \trianglelefteq A_{\widetilde{a}}$, то $X_{\widetilde{a}} = 1$. Значит, $X = T_1 = \widetilde{T}$ и $\Phi(T/K_0) = 1$.

Пусть далее $d \geq 1$. Покажем, что $K > T'$. Предположим обратное. Тогда $K = \Phi(T) \geq$

$\mho^1(T)$ и T — специальная группа. Так как группа экспоненты 2 является элементарной абелевой, то T содержит элемент h порядка 4, что влечет $h \notin K$ и $h^2 \in K$, в частности, $K = K_0 \times \langle h^2 \rangle$. Но $\Phi(T/K_0) = 1$, противоречие с тем, что $hK_0 \in T/K_0$.

2.1. Допустим, что $\Phi(T) < K$ и рассмотрим граф $\Gamma^{\Phi(T)}$.

Группа $\widetilde{TY} = TY/\Phi(T)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{\Phi(T)}$ и централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$. В частности, $\widetilde{T} = T/\Phi(T)$ — ее регулярная элементарная абелева подгруппа.

Положим $s = \log_2 |K/\Phi(T)|$. Если пространство $\widetilde{T}$ разложимо как $\mathbb{GF}(2)Y$-модуль, то нетривиальная подгруппа из $\widetilde{K}$ имеет Y-инвариантное дополнение T_0 в $\widetilde{T}$ и T_0 — нормальная подгруппа порядка, кратного 2^e, в транзитивной на дугах группе автоморфизмов $\widetilde{TY}$ графа $\Gamma^{\Phi(T)}$, противоречие с предложением 2.10.

Значит, $\widetilde{T}$ является неразложимым $\mathbb{GF}(2)Y$-модулем. Ввиду [105, теорема 3.3](см. также [82, с. 324]) при $d \geq 2$, а также при $d \geq 1, q > 2$ первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, T/K)$ группы Y в T/K одномерна как $\mathbb{GF}(2^c)$-пространство, а при $(d; q) = (1; 2)$ она тривиальна. Поэтому ввиду [29, 17.12] получим, что порядок наибольшего расширения W $\mathbb{GF}(2)Y$-модуля $K/\Phi(T)$ с помощью $\bar{T}$, которое бы удовлетворяло условиям $W = [W, Y]$ и $K/\Phi(T) \leq C_W(Y)$, не превосходит числа 2^{e+c}, и $s \leq c$. То есть, $|K/\Phi(T)|$ делит 2^c. Если $s = c$, то расширение $W = T/\Phi(T)$ с указанным свойством определено однозначно (с точностью до изоморфизма).

2.2. Покажем теперь, что $\Phi(T) = 1$.

Для этого заметим сначала, что $(TY)' = TY$. Действительно, $\langle Y', T' \rangle = T'Y \leq (TY)'$ и поэтому $YK/K \leq (TY)'K/K \trianglelefteq G/K$. Тогда $\mathrm{Soc}(G/K) = T/K \leq (TY)'K/K$. Если при этом $K \not\leq (TY)'$, то $N = T \cap (TY)'$ — нормальная в TY подгруппа порядка, кратного 2^e, транзитивная на Σ. Но тогда граф $\Gamma^{K \cap N}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/(K \cap N)$, содержащую нормальную подгруппу порядка 2^e, противоречие с предложением 2.10. То есть $K \leq (TY)'$ и полный прообраз группы $(TY)'/K$ в G содержит TY.

Далее, $Z(TY) = K$, то есть TY — центральное расширение 2-транзитивной группы $(TY)^{\Sigma}$. По [29, 33.8] $K \simeq \mathrm{M}((TY)^{\Sigma})/\mathrm{M}(TY)$. Но при $e > 6$ группа $\mathrm{M}((TY)^{\Sigma})$ — элементарная абелева порядка 2^c, $\mathrm{M}((TY)^{\Sigma}) \simeq Z_2 \times Z_2$ при $e = 6$ и $\mathrm{M}((TY)^{\Sigma}) \simeq Z_2 \times Z_4$ при $e = 2c = 4$.

Таким образом, во всех случаях, кроме последнего, получим, что K — элементарная абелева группа. Допустим, что T содержит элемент h порядка 4. Тогда $h \notin K$ и $h^2 \in \Phi(T) \leq K$, в частности, $K = K_0 \times \langle h^2 \rangle$. Но $\Phi(T/K_0) = 1$, противоречие с тем, что $hK_0 \in T/K_0$. (Случай $e = 2c = 4$ будет исключен в лемме 2.16.)

Значит, $\Phi(T) = 1$.

Таким образом, r делит 2^c.

3. Пусть H^{Σ} удовлетворяет условиям из п. (iii) предложения 1.23, $q = 2^c$ и $Y = (G_a)^{\infty}$.

Допустим, что Y действует точно на K. Ввиду [5] степень минимального подстановочного представления группы $Y \simeq G_2(2^c)'$ равна 28 в случае $c = 1$ (напомним, что $G_2(2)' \simeq U_3(3)$), 416 в случае $c = 2$ и $(q^6 - 1)/(q - 1)$ в случае $c > 2$.

В любом случае $Y \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{e-l-\log_2(|\Phi(K)|)}(2)$ и поэтому $(2^e - 1)/(2^c - 1)$

делит $|\,\mathrm{GL}_{e-l-\log_2(|\Phi(K)|)}(2)|$. Отсюда по теореме 1.21 получим $e = 6$ и $c = 1$, то есть $Y \simeq U_3(3)$. Так как множество $\mathrm{Fix}(Y)$ является блоком импримитивности группы TY и лежит в F, то число $|F - \mathrm{Fix}(Y)|$ четно или $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$. По [51] длина неединичной Y-орбиты на F делится на 28, 36 или 63, что исключает случай $\mathrm{Fix}(Y) = \{a\}$. То есть $|\mathrm{Fix}(Y)| = 4$ и Y — 2-транзитивна на 28 точках множества $F - \mathrm{Fix}(Y)$. Кроме того, Y нормализует $\Phi(K)$. Если $|\Phi(K)| = 4$ и $Y \le C_G(\Phi(K))$, то $Y \le \mathrm{GL}_3(2)$, противоречие. Значит, $Y \le \mathrm{GL}_5(2)$, снова противоречие.

Поэтому Y централизует K и $G_1 = C_G(K)$ действует дважды транзитивно на Σ. Имеем $T/K = \mathrm{Soc}(KC_G(K)/K)$ и $KC_G(K)/K \simeq C_G(K)/Z(K) \trianglelefteq G/Z(K)$. Пусть $Z(K) < K$. Тогда группа $G/Z(K)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{Z(K)}$ и содержит нормальную подгруппу порядка 2^e, противоречие с предложением 2.10. Значит, $TY \le C_G(K)$ и для подгруппы K_0 индекса 2 из K граф Γ^{K_0} является дистанционно транзитивным графом Тейлора, при этом, как и выше, устанавливается, что $Y \le Sp_e(2)$.

3.1. Допустим, что $\Phi(T) < K$ и рассмотрим граф $\Gamma^{\Phi(T)}$.

Группа $\widetilde{TY} = TY/\Phi(T)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{\Phi(T)}$ и централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$. В частности, $\widetilde{T} = T/\Phi(T)$ — ее регулярная элементарная абелева подгруппа.

Как и в случае 2.1, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, T/K)$ группы Y в T/K нетривиальна и по [82, с. 324] одномерна как $\mathbb{GF}(2^c)$-пространство. Поэтому $|K/\Phi(T)|$ делит 2^c. Если $|K/\Phi(T)| = 2^c$, то такое расширение $T/\Phi(T)$ определено однозначно (с точностью до изоморфизма).

3.2. Имеем $(TY)' = TY$ и $Z(TY) = K$, таким образом, TY — центральное расширение 2-транзитивной группы $(TY)^\Sigma$. По [29, 33.8] $K \simeq \mathrm{M}((TY)^\Sigma)/\mathrm{M}(TY)$. Но группа $\mathrm{M}((TY)^\Sigma)$ — элементарная абелева, поэтому как и в случае 2.2 получим $\Phi(T) = 1$.

Таким образом, r делит 2^c.

Лемма доказана.

§§ 2.3.2. Одномерный случай

Лемма 2.15 (Одномерный случай)**.** *Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (iv) предложения 1.23 и $R = G_a \cap \mathrm{GL}_1(2^e)$. Тогда G_a содержит подгруппу B нечетного порядка, которая содержит R и действует транзитивно на $[a]$, и справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $C_R(K) = 1$, то $\Phi(K) = 1, e = 6$ и $r = 32$.*

(2) *Если $C_R(K) > 1$, то $|C_R(K)| > 2^{e/2}/(e, 2^e - 1)$, $r \le 2^{e/2} \le \mu$ и $C_T(R) \le K \le Z(T)$, а если к тому же $\Phi(T) < K$ и $B \le C_G(K)$, то $\Phi(T) = 1$, группа T содержит нормальную в TB подгруппу порядка 2^e и Γ — граф из предложения 2.10(2).*

Доказательство. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (iv) предложения 1.23. Тогда $G_a \simeq A \le \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, $G_a \trianglerighteq R \simeq A \cap \mathrm{GL}_1(2^e)$ и $G_a/R \le Z_e$, в частности, G_a содержит циклическую подгруппу R_0 порядка $(2^e - 1)/(e, 2^e - 1)$. При этом R действует без неподвижных точек на $\Sigma - \{F\}$, на $\Sigma - \{F\}$ имеется ровно $\alpha = (2^e - 1)/|R|$ R-орбит и α делит $(e, 2^e - 1)$. Так как группа G_a разрешима и ее силовская 2-подгруппа фиксирует вершину в $[a]$, то по [29, утверждения 18.5, 5.20] G_a содержит холлову $2'$-подгруппу B, которая содержит R и действует транзитивно на $[a]$.

Пусть $R = \langle g \rangle$, $X = TR$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = r$ и по лемме 2.7

$$\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m+n).$$

Имеем $[N_T(R), R] \le R \cap T = 1$ и, следовательно, $N_X(R) = C_T(R) \times R$, а поскольку Ω является блоком импримитивности группы X, то $\alpha_0(g) = |N_X(R) : R| = |C_T(R)|$.

Пусть $x \in C_T(R)$. Тогда $a^x \in \Omega$, то есть 2-элемент x содержится в $X_{\{F\}} = KR$, но K — нормальная силовская 2-подгруппа в KR, следовательно $x \in K$. Значит, $C_T(R) \le K$.

По [29, 24.1]

$$R^* = R/C_R(K) \le B^* = B/C_B(K) \le \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$$

и поэтому $|R/C_R(K)| \le r/|\Phi(K)| - 1$, то есть

$$|C_R(K)| \ge |R|/(r/|\Phi(K)| - 1) \ge (2^e - 1)/((e, 2^e - 1)(r/|\Phi(K)| - 1)) \ge \mu/(e, 2^e - 1).$$

Положим $C_R(K) = \langle \tilde{g} \rangle$.

1. Допустим $C_R(K) = 1$. Тогда $R_0 \le \mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)$ и поэтому $(2^e-1)/(e, 2^e-1)$ делит $|\mathrm{GL}_{\log_2(r/|\Phi(K)|)}(2)|$. Но по малой теореме Ферма каждый простой делитель p_0 числа $(e, 2^e-1)$ делит и число $2^{p_0-1}-1$, меньшее чем 2^e-1. Отсюда по теореме 1.21 $e = 6$. Поскольку группа $\mathrm{GL}_t(2)$ не содержит элементов порядка 21 при $t \le 4$, получим $r/|\Phi(K)| = 2^5 = r$.

2. Теперь пусть $C_R(K) > 1$. Тогда $T = KC_T(K)$, $|KC_R(K)|$ делит $\alpha_1(\tilde{g})$, $\alpha_0(\tilde{g}) = r$ и по лемме 2.7

$$\chi_1(\tilde{g}) = (m(r-1) + \alpha_1(g) - k)/2^{e/2+1} = (2^{e/2}r + r - 2^{e/2} + \alpha_1(\tilde{g}) - 2^e)/2^{e/2+1} \in \mathbb{Z},$$

что влечет $r \le 2^{e/2} \le \mu$. При этом число $\alpha_1(\tilde{g})/r$ четно если $r = 2^{e/2}$, и нечетно в противном случае. Отсюда $|C_R(K)| > 2^{e/2}/(e, 2^e - 1)$.

Так как $C_T(R) \le K$, то по [29, 24.4] $T = [T, R]C_T(R) = [T, R]K$. С другой стороны, $T = KC_T(K)$ и

$$Y = C_G(K) \cap [T, G_a] = C_T(K) \cap [T, G_a] \trianglelefteq G.$$

При этом если $Y \le K$, то $|C_T(K)[T, G_a]| = |C_T(K)||[T, G_a] : Y| \ge 2^{2e}$, противоречие. Отсюда следует, что Y действует транзитивно на Σ.

Если $K \not\le Y$, то граф $\Gamma^{Y \cap K}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, которая содержит нормальную подгруппу порядка 2^e. Но тогда граф $\Gamma^{Y \cap K}$ не может быть графом Тейлора и поэтому удовлетворяет условиям предложения 2.10 и $r/|Y \cap K| = 2^{e/2} \ge r$, что влечет $K \cap Y = 1$ и Γ — граф из предложения 2.10.

Пусть далее $K \le Y$. Тогда $Y = T$, K — абелева группа и $C_T(R) \le K \le Z(T)$.

Утверждение: Если $\Phi(T) < K$ и $B \le C_G(K)$, то $\Phi(T) = 1$, T является разложимым $\mathbb{GF}(2)B$-модулем и Γ — граф из предложения 2.10(2).

Доказательство утверждения. Пусть $\Phi(T) < K$. Рассмотрим граф $\Gamma^{\Phi(T)}$.

Группа $\widetilde{G} = G/\Phi(T)$ действует транзитивно на дугах графа $\Gamma^{\Phi(T)}$ и централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$. В частности, $\widetilde{T} = T/\Phi(T)$ — ее регулярная элементарная абелева подгруппа.

Положим $s = \log_2 |K/\Phi(T)|$. Покажем сначала, что $\widetilde{T}$ является разложимым $\mathbb{GF}(2)B$-модулем. Предположим обратное. Тогда существуют $\mathbb{GF}(2)$-базис в $\widetilde{T}$ и гомоморфизм φ из B в $\mathrm{GL}_e(2)$, относительно которых элементы группы B, рассматриваемой в качестве подгруппы в $\mathrm{GL}_{e+s}(2) \simeq \mathrm{Aut}(\widetilde{T})$, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \varphi(y) & \psi(y) \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

где $y \in B$ и через I_s обозначается единичная матрица порядка $s \times s$. Запишем $\widetilde{T} = \widetilde{K} \oplus U$ и зафиксируем ненулевой вектор $w \in \widetilde{K}$. Определим отображение $d : B \to \widetilde{T}/\widetilde{K} (\simeq T/K)$ по правилу $d(y) = \psi(y)(w)$ для всех $y \in B - \{1\}$ и $d(1) = 0_{\widetilde{T}}$. Тогда для всех $x, y \in B$ имеем $\psi(xy) = \varphi(x)\psi(y) + \psi(x)$ и

$$d(xy) = xd(y) + d(x),$$

то есть d является дифференциалом (скрещенным гомоморфизмом) (см., например, [3]). Более того, d является неглавным дифференциалом, так как иначе нашелся бы базис в $\widetilde{T}$, в котором матрица образа каждого элемента $y \in B$ в $\mathrm{GL}_{e+s}(2)$ имела бы блочно-диагональный вид, что невозможно ввиду неразложимости $\widetilde{T}$ как $\mathbb{GF}(2)B$-модуля.

Следовательно, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(B, T/K)$ группы B в T/K нетривиальна, противоречие с [29, 17.10].

Таким образом, при $\Phi(T) < K$ нетривиальная подгруппа в $\widetilde{K}$ имеет B-инвариантное дополнение T_0 в $\mathbb{GF}(2)B$-модуле $\widetilde{T}$ и T_0 — нормальная подгруппа порядка, кратного 2^e, в транзитивной на дугах группе автоморфизмов $\widetilde{TB}$ графа $\Gamma^{\Phi(T)}$. Обозначим $\Gamma_1 = \Gamma^{\Phi(T)}$ и $\Gamma_2 = \Gamma_1^{T_0 \cap \widetilde{K}}$. Так как граф Γ_2 допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, содержащую нормальную подгруппу порядка 2^e, и удовлетворяет условиям предложения 2.10, то $r/(|\Phi(T)||T_0 \cap \widetilde{K}|) = 2^{e/2} \geq r$, что влечет $\Phi(T) = 1 = T_0 \cap \widetilde{K}$. $\square$

Лемма доказана.

§§ 2.3.3. Исключительный случай

Лемма 2.16 (Исключительный случай)**.** *Если H^Σ удовлетворяет условиям из п. (v) предложения 1.23, то граф Γ не существует, в частности, симплектический случай из п. (ii) с $Sp_4(2)' \trianglelefteq G_a$ не реализуется.*

Доказательство. Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (v) предложения 1.23 и $Y = {G_a}^\infty$. Допустим $C_Y(K) = 1$, то есть Y действует точно на K. Тогда $r = 8, \mu = 2$. Но $K \simeq Z_8, Z_4 \times Z_2, D_8, Q_8$ или E_8 и $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_2 \times Z_2, D_8, D_8, S_4$ или $L_3(2)$ соответственно, противоречие.

Значит, $Y \leq C_G(K)$. Далее, $C_G(K)/Z(K)$ действует 2-транзитивно на Σ и $\bar{T} \simeq \mathrm{Soc}(C_G(K)/Z($

Предположим, что $Z(K) < K$. Так как $r \leq 8$, то $|K : Z(K)| = 4 = r/2$. Ясно, что $C_G(K)/Z(K) \trianglelefteq G/Z(K) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma^{Z(K)})$ и группа $G/Z(K)$ транзитивна на дугах графа

$\Gamma^{Z(K)}$. Поэтому $G/Z(K)$ содержит нормальную подгруппу порядка 2^e, транзитивную на антиподальных классах графа $\Gamma^{Z(K)}$. Так как $Y \not\leq \Gamma\mathrm{L}_1(2^e)$, то из предложения 2.10 следует, что либо $\Gamma^{Z(K)}$ является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, либо $\Gamma^{Z(K)}$ имеет массив пересечений $\{15, 10, 1; 1, 2, 15\}$, противоречие в обоих случаях.

Значит, $K \leq Z(TY)$.

Предположим, что $K = T'$. Тогда $T' = \Phi(T) = Z(T)$, то есть T — специальная группа и K — элементарная абелева группа. Так как группа экспоненты 2 является элементарной абелевой, то T содержит элемент h порядка 4, что влечет $h \notin K$ и $h^2 \in K$, в частности, $K = K_0 \times \langle h^2 \rangle$. Отсюда $1 < \Phi(T/K_0) = K/K_0$ и группа T/K_0 является экстраспециальной, следовательно, Y вкладывается в группу изометрий квадратичной формы на $\bar{T}$, отвечающей коммутаторному отображению из T в K/K_0. Противоречие с тем, что $A_6 \not\leq O_4^{\pm}(2)$.

Таким образом, для подгруппы K_0 индекса 2 в K граф Γ^{K_0} является дистанционно-транзитивным графом Тейлора, полная группа автоморфизмов которого изоморфна группе $Z_2 \times E_{2^e}.Sp_4(2)$ (см. [40, с. 228]). Поэтому группа G_a изоморфна A_6 или S_6.

Предположим, что $r = 4$. Допустимы следующие три случая.

1. $T' = 1, |K : \Phi(T)| = 2$ и $T = E_{2^4} \cdot Z_4$ — группа экспоненты 4. При этом $\mathrm{Aut}(T) \simeq E_{2^5}.E_{2^4}.A_8$.

2. $T' = \Phi(T), K = Z(T), |K : \Phi(T)| = 2$ и $T = D_4.E_{2^3}$ — группа экспоненты 4. При этом $\mathrm{Aut}(T) \simeq E_{2^5}.A_6.Z_2$.

Компьютерные вычисления в Magma [38] показывают, что случаи 1 и 2 не реализуются.

3. $\Phi(T) = 1$, то есть T — элементарная абелева группа. Как и в лемме 2.14, T является неразложимым $\mathbb{GF}(2)Y$-модулем. По [82, с. 324] группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, \bar{T})$ одномерна как $\mathbb{GF}(2)$-пространство и ввиду [29, 17.12] получим, что порядок наибольшего расширения W $\mathbb{GF}(2)Y$-модуля K с помощью $\bar{T}$, которое бы удовлетворяло условиям $W = [W, Y]$ и $K \leq C_W(Y)$, не превосходит числа 2^{e+1}. То есть, $|K| \leq 2$, противоречие.

Наконец, если $r = 8$, то по доказанному выше для подгруппы K_0 индекса 4 из K граф Γ^{K_0} не существует, противоречие. Лемма доказана.

§ 2.4. Случай нечетного числа антиподальных классов

До конца главы предполагается, что p нечетно. Напомним, что ввиду леммы 2.11 $m = p^{e/2} + 1 = n + 2$ и $r\mu = p^e$.

§§ 2.4.1. Экстраспециальный и исключительный случаи

Лемма 2.17 (Экстраспециальный случай). *Пусть H^{Σ} удовлетворяет условиям из п. (vi) предложения 1.23 и $R = C_{G_a}(K)$. Тогда T — группа экспоненты p, $G_a \trianglerighteq R_0 \simeq Q_8 \circ D_8$ при $k = 80$ и $G_a \trianglerighteq R_0 \simeq Q_8$ при $k \neq 80$, и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p^e = 3^4$, $R_0 \trianglelefteq R$, $G_a/R_0 \leq S_5$ и 5 делит $|G_a|$, $n = 8, m = 10$, $r = 3$, T — экстраспециальная группа порядка 3^5, Γ имеет массив пересечений $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$;*

(2) $p^e = 5^2$, $\mathrm{SL}_2(3) \le R, G_a \le \mathrm{SL}_2(3).Z_4$, $r = \mu = 5$, $n = 4, m = 6$, T *— экстраспециальная группа порядка* 5^3 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{24, 20, 1; 1, 5, 24\}$*;*

(3) $p^e = 7^2$, $\mathrm{SL}_2(3) \le R, \mathrm{SL}_2(3).Z_2 \le G_a \le \mathrm{SL}_2(3).Z_6$, $n = 6, m = 8$, $r = \mu = 7$, T *— экстраспециальная группа порядка* 7^3 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{48, 42, 1; 1, 7, 48\}$*;*

(4) $p^e = 11^2$, $G_a \simeq Z_5 \times \mathrm{SL}_2(3)$ *или* $Z_5 \times \mathrm{GL}_2(3)$, $\mathrm{SL}_2(3) \simeq R$, $n = 10, m = 12$, $r = \mu = 11$, T *— экстраспециальная группа порядка* 11^3 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$*;*

(5) $p^e = 23^2$, $G_a \simeq Z_{11} \times (\mathrm{SL}_2(3).Z_2)$, $R \simeq \mathrm{SL}_2(3)$ *или* $\mathrm{SL}_2(3).Z_2$, $n = 22, m = 24$, $r = \mu = 23$, T *— экстраспециальная группа порядка* 23^3 *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{528, 506, 1; 1, 23, 528\}$.

Доказательство. Пусть группа H^Σ удовлетворяет условиям из п. (vi) предложения 1.23.

1. Пусть $p^e = 3^4$. Тогда $k = 80$, $R_0 = D_8 \circ Q_8 \trianglelefteq G_a$, $G_a/R_0 \le S_5$, 5 делит $|G_a|$, $r\mu = 81$, $n = 8, m = 10$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{80, (3^{4-l} - 1)3^l, 1; 1, 3^l, 80\}$$

и спектр

$$80^1, 8^{45(3^{4-l}-1)}, -1^{80}, -10^{36(3^{4-l}-1)},$$

где $l \in \{1, 2, 3\}$.

Покажем, что $R_0 \le C_H(K)$. Так как $r \in \{3, 9, 27\}$, то $\mathrm{Aut}(K)$ — $5'$-группа. Поэтому $|H/C_H(K)|$ не делится на 5 и все элементы порядка 5 из H содержатся в $C_H(K)$ и имеют r неподвижных точек на F. В частности, все элементы порядка 5 из G_a содержатся в R. Но $H^\Sigma \simeq G_a$ и поэтому подгруппа $X \le G_a$, порожденная всеми элементами порядка 5 из G_a, содержится в R. При этом $G_a{}' \le X$ и $G_a/X \simeq Z_2, Z_4$ или $G_a = R$. В любом случае X транзитивна на $[a]$ и $R_0 \le X \le R$ (H^Σ содержит единственную экстраспециальную нормальную подгруппу порядка 32). В частности, каждый элемент порядка 5 переставляет 5 R_0-орбит на $[a]$ (длины 16).

Таким образом, подгруппа H является расширением прямого произведения $K \times R_0$ с помощью G_a/R_0.

Утверждение: T — неабелева группа.

Доказательство утверждения. От противного, предположим, что $T = Z(T)$. Тогда K — абелева группа и поскольку $G = TG_a$ и $R_0 \trianglelefteq G_a$, то $[T, R_0] \trianglelefteq R_0T \trianglelefteq G$ и $[R_0, T] \cap R_0 = 1$. По доказанному выше $K \le C_T(R_0)$. Если $C_{R_0}(T) \ne 1$, то R_0 действует неточно на $\bar{T}$, противоречие с условием.

Значит, $C_{R_0}(T) = 1$ и $R_0 \le \mathrm{Aut}(T)$. По [29, 24.1] R_0 действует точно на $T/\Phi(T)$ и по [29, 24.4] $T = [T, R_0]C_T(R_0)$. Так как $K \le C_T(R_0)$, то $C_T(R_0)/K$ — элементарная абелева группа порядка, не превосходящего p^{e-1} (иначе $C_T(R_0) = T$ и $C_{R_0}(T) \ne 1$, что невозможно). Более того, по [29, 24.6] $T = [T, R_0] \times C_T(R_0)$ и $[T, R_0] \ne 1$.

Далее, R_0T — транзитивная подгруппа из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $(R_0T)_a = R_0T_a = R_0$, поэтому $|\mathrm{Fix}(R_0)| = |N_{R_0T}(R_0) : R_0| = r$. Значит, $K \leq C_T(R_0) \leq N_{R_0T}(R_0) = KR_0$ и $C_T(R_0) = K$. Поэтому $|[T, R_0]| = 81$. Положим $Y = [T, R_0]$. Заметим, что $Y \trianglelefteq G$. Действительно, $Y \trianglelefteq TR_0 \trianglelefteq G$ и для всех $g \in G$, $x \in T$ и $y \in R_0$ имеем ${R_0}^g \leq TR_0$ и

$$[x, y]^g = [x^g, y^g] = [x^g, zf] = [x^g, f][x^g, z]^f = [x^g, f] \in Y,$$

где $y^g = zf, z \in T, f \in R_0$, то есть $Y^g = \langle [x, y]^g | x \in T, y \in R_0 \rangle \leq Y$.

Поэтому Y — подгруппа из T порядка 81, нормальная в G, противоречие с предложением 2.10.$\square$

Таким образом, $Z(T) \leq K$ и R_0 действует точно на T. По [29, 24.4] $T = [T, R_0]C_T(R_0)$. Заметим, что либо K — абелева группа, либо K — экстраспециальная группа порядка 27, либо $K \simeq Z_9 : Z_3$.

Утверждение: Если группа K абелева, то $r = 3$ и T — экстраспециальная группа экспоненты 3.

Доказательство утверждения. Пусть группа K абелева. Так как $R_0 \leq C_G(K)$, то $1 \neq C_G(K)/K \trianglelefteq G/K$ и поэтому $T \leq C_G(K)$, то есть $K = Z(T)$.

Если $T' < K$, то граф $\Gamma_1 = \Gamma^{T'}$ удовлетворяет условию теоремы, группа $G/T' \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_1)$ действует транзитивно на дугах графа Γ_1 и содержит нормальную абелеву подгруппу, регулярную на вершинах графа Γ_1, противоречие с доказанным выше.

Таким образом, по предложению 2.10 $T' = K$ и следовательно, $\Phi(T) = T' = Z(T)$, то есть группа T специальна и группа K элементарна.

Компьютерными вычислениями в Magma [38] проверено, что существует единственная специальная группа порядка 3^6, которая имеет автоморфизм порядка 5, и ее группа автоморфизмов не содержит подгрупп S таких, что $\mathrm{Inn}(T) \leq S$, $|S/\mathrm{Inn}(T)|$ делит $32 \cdot 120$, $Q_8 \circ D_8 \simeq Q \trianglelefteq S/\mathrm{Inn}(T)$ и 5 делит $|S|$.

Теперь если $r > 3$, K_1 — подгруппа индекса 9 из K и $\Gamma_1 = \Gamma^{K_1}$, то $\widetilde{T} = T/K_1$ — специальная группа порядка 3^6 и $\widetilde{TX}$ действует транзитивно на дугах графа Γ_1, противоречие.

Следовательно, $r = 3$ и T — экстраспециальная группа экспоненты 3. Коммутаторное отображение группы T задает знакопеременную билинейную форму φ из $\bar{T} \times \bar{T}$ на K/K_1, где K/K_1 отождествляется с полем $\mathbb{GF}(3)$ и $\bar{T}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{GF}(3)$ размерности e. При этом R вкладывается в группу изометрий симплектического пространства $(\bar{T}, \varphi)$, то есть $R \leq Sp_4(3)$. Стабилизатор Y точки в 2-транзитивной аффинной группе подстановок $ASp_4(3)$ содержит экстраспециальную подгруппу $U \simeq D_8 \circ Q_8$ и $N_Y(U)/U \simeq A_5$, поэтому $R/R_0 \leq A_5$. Кроме того, если $N_Y(U) \geq W \geq U$ и W содержит элемент порядка 5, то $W/U \simeq Z_5, D_{10}$ или A_5. $\square$

Пусть K — экстраспециальная группа порядка 27. Пусть $\widetilde{K} = K/Z(K)$ и $\Gamma_1 = \Gamma^{Z(K)}$. Тогда группа $\widetilde{G} = G/Z(K) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_1)$ действует транзитивно на дугах графа Γ_1 и содержит нормальную подгруппу $\widetilde{T} = T/Z(K)$, регулярную на вершинах графа Γ_1. В этом случае $G_a/R \leq \mathrm{Aut}(\widetilde{K}) \simeq \mathrm{AGL}_2(3)$, противоречие с доказанным выше.

Наконец, пусть $K \simeq Z_9 : Z_3$. Рассмотрев граф $\Gamma_1 = \Gamma^{K'}$, получим противоречие как и выше.

2. Пусть $p^e = 5^2$. Тогда $\mathrm{SL}_2(3) \simeq S \trianglelefteq G_a$, $k = 24$, $r = \mu = 5$, $n = 4, m = 6$, Γ имеет массив пересечений

$$\{24, 20, 1; 1, 5, 24\}$$

и спектр

$$24^1, 4^{60}, -1^{24}, -6^{40}.$$

Так как $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_4$ и $\mathrm{SL}_2(3)$ порождается своими элементами порядка 3, то $S \leq R$. При этом $G_a/S \leq Z_4$, $S' \simeq Q_8$ и $K \leq C_T(S)$.

В этом случае подгруппа H является расширением прямого произведения $K \times R$ с помощью G_a/R.

Если T — абелева группа, то по [29, 24.6] $T = [T, S'] \times C_T(S')$ и поэтому $[T, S']$ — подгруппа порядка 25, нормальная в G, противоречие с предложением 2.10.

Таким образом, по [131, теорема 1 и следствие 2] T — экстраспециальная группа экспоненты 5 и $\mathrm{Aut}(T) \simeq \bar{T} : \mathrm{GL}_2(5)$.

3. Пусть $p^e = 7^2$ и $Q_8 \simeq R_1 \trianglelefteq G_a$. Тогда $k = 48$, $r = \mu = 7$, $n = 6, m = 8$, Γ имеет массив пересечений

$$\{48, 42, 1; 1, 7, 48\}$$

и спектр

$$48^1, 6^{168}, -1^{48}, -8^{126}.$$

При этом $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(3).Z_2$ или $Z_3 \times (\mathrm{SL}_2(3).Z_2)$. Так как $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_6$ и $(G_a)' = S \simeq \mathrm{SL}_2(3)$, то $S \leq R$.

В этом случае подгруппа H является расширением прямого произведения $K \times R$ с помощью G_a/R и $G_a/R \leq Z_6$.

Если T — абелева группа, то по [29, 24.6] $T = [T, S'] \times C_T(S')$ и поэтому $[T, S']$ — подгруппа порядка 49, нормальная в G, противоречие с предложением 2.10.

Поэтому T — экстраспециальная группа экспоненты 7 и $\mathrm{Aut}(T) \simeq \bar{T} : \mathrm{GL}_2(7)$.

Таким образом, $\mathrm{SL}_2(3).Z_2 \leq G_a \leq \mathrm{SL}_2(3).Z_6$.

4. Пусть $p^e = 11^2$. Тогда $k = 120$, $r = \mu = 11$, $n = 10, m = 12$, Γ имеет массив пересечений

$$\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$$

и спектр

$$120^1, 10^{660}, -1^{120}, -12^{550}.$$

Имеем $G_a \simeq Z_5 \times \mathrm{SL}_2(3)$ или $Z_5 \times \mathrm{GL}_2(3)$.

Если T — абелева группа, то по [29, 24.6] $T = [T, S'] \times C_T(S')$ и поэтому $[T, S']$ — подгруппа порядка 121, нормальная в G, противоречие с предложением 2.10.

Поэтому T — экстраспециальная группа экспоненты 11 и $\mathrm{Aut}(T) \simeq \bar{T} : \mathrm{GL}_2(11)$. Таким образом, $R \leq \mathrm{SL}_2(11)$ и так как $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{10}$, то $\mathrm{SL}_2(3) \simeq R$.

5. Пусть $p^e = 23^2$. Тогда $k = 528$, $r\mu = 529$, $n = 22, m = 24, r = \mu = 23$, Γ имеет массив пересечений

$$\{528, 506, 1; 1, 23, 528\}$$

и спектр

$$528^1, 22^{6072}, -1^{528}, -24^{5566}.$$

Так как $\mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{22}$, то $\mathrm{SL}_2(3) \simeq S \leq R$ и $G_a = Z_{11} \times (\mathrm{SL}_2(3).Z_2)$.

Если T — абелева группа, то по [29, 24.6] $T = [T, R_0] \times C_T(R_0)$ и поэтому $[T, R_0]$ — подгруппа порядка 23^2, нормальная в G, противоречие с предложением 2.10.

Поэтому T — экстраспециальная группа экспоненты 23, $\mathrm{Aut}(T) \simeq \bar{T} : \mathrm{GL}_2(23)$ и $\mathrm{SL}_2(3) \simeq S \leq R \leq \mathrm{SL}_2(23)$. Отсюда $R \simeq \mathrm{SL}_2(3)$ или $R \simeq \mathrm{SL}_2(3).Z_2$.

Лемма доказана.

Замечание 2.18. Для каждой фиксированной тройки параметров (k, r, μ) граф Γ из пп. 1–5 леммы 2.17 существует и является известным единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным графом с такими параметрами.

Доказательство. Полный перебор орбитальных графов допустимой группы G с помощью вычислений в Magma [38].

Лемма 2.19 (Исключительный случай)**.** *Пусть H^{Σ} удовлетворяет условиям из п. (v) предложения 1.23 и $R = C_{G_a}(K)$. Тогда T — группа экспоненты p, $G_a \trianglerighteq S \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ при $k \neq 728$ и $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(13)$ при $k = 728$, и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p^e = 3^6$, $R = G_a \simeq \mathrm{SL}_2(13)$, $k = 728$, $n = 26, m = 28$, $r = 3$, T — экстраспециальная группа порядка 3^7 и Γ имеет массив пересечений $\{728, 486, 1; 1, 243, 728\}$;*

(2) *$p^e = 9^2$, $k = 80$, $G_a/S \leq D_8$, $S \leq R$, $n = 8, m = 10$, $r = 3, 9$, T — экстраспециальная группа порядка 3^5 или специальная группа порядка 3^6, и Γ имеет массив пересечений $\{80, 54, 1; 1, 27, 80\}$ или $\{80, 72, 1; 1, 9, 80\}$ соответственно;*

(3) *$p^e = 11^2$, $k = 120$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ или $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{10}$, $n = 10, m = 12$, $r = \mu = 11$, T — экстраспециальная группа порядка 11^3 и Γ имеет массив пересечений $\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$ и $S = R$;*

(4) *$p^e = 19^2$, $k = 360$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{18}$, $n = 18, m = 20$, $r = \mu = 19$, Γ имеет массив пересечений $\{360, 342, 1; 1, 19, 360\}$ и $S \leq R$;*

(5) *$p^e = 29^2$, $k = 840$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{14}$ или $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{28}$, $n = 28, m = 30$, $r = \mu = 29$, Γ имеет массив пересечений $\{840, 812, 1; 1, 29, 840\}$ и $S \leq R$;*

(6) *$p^m = 59^2$, $k = 3480$, $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{58}$, $n = 58, m = 60$, $r = \mu = 59$, Γ имеет массив пересечений $\{3480, 3422, 1; 1, 59, 3480\}$ и $S = R$.*

Доказательство. Пусть группа H^{Σ} удовлетворяет условиям из п. (v) предложения 1.23. По лемме 2.11 $G_a \simeq H^{\Sigma}$.

I. Рассмотрим сначала случай $e \geq 4$.

1. Пусть $p^e = 3^6$. Тогда $\mathrm{SL}_2(13) \simeq G_a$ и либо $R = Z(G_a) \simeq Z_2$ и $L_2(13) \leq \mathrm{Aut}(K)$, либо G_a действует точно на K, либо $G_a = R = C$.

Имеем $k = 728$, $r\mu = 729$, $n = 26, m = 28$, Γ имеет массив пересечений

$$\{728, (3^{6-l}-1)3^l, 1; 1, 3^l, 728\},$$

где $1 \leq l \leq 5$, и спектр

$$728^1, 26^{378(3^{6-l}-1)}, -1^{728}, -28^{351(3^{6-l}-1)}.$$

Так как $r \leq 3^5$, то $\mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_3(|K/\Phi(K)|)}(3)$ является $7'$-группой. Имеем $|\,\mathrm{SL}_2(13)| = 8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ и поэтому G_a индуцирует тривиальную группу автоморфизмов группы $K/\Phi(K)$.

Отсюда по [29, 24.1] R содержит элемент порядка 7, то есть $R = G_a$ и $H = K \times G_a$. Поэтому $[R,T] \trianglelefteq G$. Если $[R,T] \leq K$, то G_a централизует T/K, противоречие. Значит, $T = [R,T]K$ и ввиду предложения 2.10 $[R,T] \cap K \neq 1$.

Более того, $K \leq [R,T]$. В противном случае граф $\Gamma^{[R,T]\cap K}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, содержащую нормальную подгруппу порядка 3^6, что по предложению 2.10 невозможно.

Утверждение: $\Phi(T) = K$.

Доказательство утверждения. От противного, предположим, что $\Phi(T) < K$. Тогда для подгруппы K_0 индекса 3 в K, содержащей $\Phi(T)$, получим что $\widetilde{T} = T/K_0$ — элементарная абелева группа порядка 3^7 и R действует точно на $\widetilde{T}$. Поэтому $R \leq \mathrm{GL}_7(3)$ и R централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$.

Положим $s = \log_p |K/\Phi(T)|$. Если пространство $T/\Phi(T)$ разложимо как $\mathbb{GF}(p)R$-модуль, то $K/\Phi(T)$ имеет R-инвариантное дополнение T_0 в $T/\Phi(T)$ и T_0 — нормальная подгруппа порядка p^e в транзитивной на дугах группе автоморфизмов $TR/\Phi(T)$ графа $\Gamma^{\Phi(T)}$, противоречие с предложением 2.10.

Значит, $T/\Phi(T)$ является неразложимым $\mathbb{GF}(p)R$-модулем. Кроме того, существуют $\mathbb{GF}(p)$-базис в $T/\Phi(T)$ и гомоморфизм φ из R в $\mathrm{GL}_e(p)$, относительно которых элементы группы R, рассматриваемой в качестве подгруппы в $\mathrm{GL}_{e+s}(p) \simeq \mathrm{Aut}(T/\Phi(T))$, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \varphi(y) & \psi(y) \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

где $y \in R$ и через I_s обозначается единичная матрица порядка $s \times s$. Отсюда, как и в лемме 2.15, получим, что первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(R, T/K)$ группы R в T/K нетривиальна, противоречие (см. [49, с. 194–195]). $\square$

Утверждение: Если $T' = K = Z(T)$, то $r = 3$, G — универсальная накрывающая группа для G^{Σ}, T — экстраспециальная группа порядка 3^7 и $R \leq Sp_6(3)$.

Доказательство утверждения. Предположим, что $T' = K = Z(T)$. Тогда T — специальная группа и K — элементарная абелева группа. В этом случае $G = TR$ является центральным расширением группы G^Σ, $G' = G$ и по [29, 33.8] $K \simeq \mathrm{M}(G^\Sigma)/\mathrm{M}(G)$. Так как силовские 7 и 13-подгруппы в G — циклические, то $\pi(\mathrm{M}(G^\Sigma)) \subseteq \{2, 3\}$. Как показывают компьютерные вычисления в Magma [38] $|\mathrm{M}(G^\Sigma)| = 3$ и поэтому группа G — универсальная накрывающая для G^Σ. Таким образом, T — экстраспециальная группа порядка 3^7, группа R действует точно на T и централизует K, поэтому $R \leq Sp_6(3)$ (см. [131, теорема 1 и следствие 2]). $\square$

Наконец, рассмотрим случай, когда $T' < K$ или $Z(T) \neq K$. Из предложения 2.10 следует, что $[T, R] = T$ и тем самым, что $G' = G$.

Если $r = 3$, то $T' = 1$, $T \simeq E_{3^5} \times Z_9$ и $\mathrm{Aut}(T)$ не содержит элементов порядка 7, противоречие.

Пусть $r = 9$. Тогда группа K — абелева, $T/C_T(K) \leq \mathrm{Aut}(K)$ и поэтому $K \leq Z(T)$ и по доказанному выше $|T'| \leq 3$. В этом случае G является центральным расширением группы G^Σ, $G' = G$ и по [29, 33.8] $K \simeq \mathrm{M}(G^\Sigma)/\mathrm{M}(G)$, противоречие с тем, что $|\mathrm{M}(G^\Sigma)| = 3 < r$.

Пусть $r = 27$. Тогда $|\mathrm{Aut}(K)|_3 \leq 27$. Если группа K абелева, то $K \leq Z(T)$. Если K — экстраспециальная группа, то $C_T(K') = C_G(K') \cap T \trianglelefteq G$ и $C_T(K') = T$, так как иначе группа $\mathrm{Aut}(K')$ содержала бы подгруппу порядка 3^6, что невозможно. В любом случае в K найдется подгруппа K_0 индекса 9, нормальная в G, и, рассмотрев граф Γ^{K_0}, получим противоречие как и выше.

Если $r = 3^{6-l} \geq 81$, то в K найдется подгруппа K_0 индекса $r' = 3^j$, где $2 \leq j \leq 5 - l$, нормальная в TR, и, рассмотрев граф Γ^{K_0}, снова получим противоречие как и выше.

2. Пусть $p^e = 9^2$. Тогда $\mathrm{SL}_2(5) \simeq S = (G_a)''$, $G_a/S \simeq Z_2, Z_2 \times Z_2, Z_4$ или D_8, $k = 80$, $r = 3^{4-l}$, $l = 1, 2, 3$, $n = 8, m = 10$, Γ имеет массив пересечений

$$\{80, (3^{4-l} - 1)3^l, 1; 1, 3^l, 80\}$$

и спектр

$$80^1, 8^{45(3^{4-l}-1)}, -1^{80}, -10^{36(3^{4-l}-1)}.$$

Так как $r \leq 3^4$, то $\mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_3(|K/\Phi(K)|)}(3)$ является $5'$-группой. Имеем $|\mathrm{SL}_2(5)| = 8 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому S индуцирует тривиальную группу автоморфизмов группы $K/\Phi(K)$.

Отсюда по [29, 24.1] R содержит элемент порядка 5, то есть $S \leq R$.

Утверждение: $\Phi(T) = K$.

Доказательство утверждения. Допустим, что $\Phi(T) < K$. Тогда для подгруппы K_0 индекса 3 в K, содержащей $\Phi(T)$, получим что $\widetilde{T} = T/K_0$ — элементарная абелева группа порядка 3^5 и R действует точно на $\widetilde{T}$. Поэтому $R \leq \mathrm{GL}_5(3)$ и R централизует $\widetilde{K} = K/\Phi(T)$. Вычисления в Magma [38] показывают, что группа $\mathrm{GL}_5(3)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп, изоморфных группе $\mathrm{SL}_2(5)$, но каждый орбитальный граф степени 80 допустимой группы G не является антиподальным д.р.г. диаметра 3, противоречие. $\square$

Утверждение: Если $T' = K = Z(T)$, то TS — накрывающая группа для $(TS)^{\Sigma}$, $r = 9$ и T — единственная специальная группа порядка 3^6, допускающая автоморфизм порядка 5, или $r = 3$ и T — экстраспециальная группа порядка 3^5.

Доказательство утверждения. Допустим, что $K = T' = Z(T)$. Тогда T — специальная группа и $\Phi(T) = K = Z(TS)$ — элементарная абелева группа. В этом случае группа TS является центральным расширением группы $(TS)^{\Sigma}$. Ввиду предложения 2.10 получим $(TS)' = TS$ и по [29, 33.8] $K \simeq \mathrm{M}((TS)^{\Sigma})/\mathrm{M}(TS)$. Заметим, что $|\mathrm{M}((TS)^{\Sigma})|_3 = 9$ $(Z_3 \times Z_3 \leq \mathrm{M}((TS)^{\Sigma}))$.

Поэтому r делит 9.

Пусть $r = 9$. Тогда T — единственная специальная группа порядка 3^6, допускающая автоморфизм порядка 5. Ее группа автоморфизмов содержит подгруппу A такую, что $\mathrm{Inn}(T) \leq A$ и $A/\mathrm{Inn}(T) \simeq \mathrm{SL}_2(5)$.

Пусть $r = 3$. Тогда T — экстраспециальная группа порядка 3^5, группа R действует точно на T и централизует K и $R \leq Sp_4(3)$ (см. [131, теорема 1 и следствие 2]). $\square$

Наконец, рассмотрим случай, когда $T' < K$ или $Z(T) \neq K$.

Если $r = 3$, то $S \not\leq \mathrm{Aut}(T)$, противоречие.

Пусть $r = 9$. Тогда группа K — абелева, $S \leq \mathrm{Aut}(T)$ и $|T/\Phi(T)| = 3^4$, поэтому T является специальной группой, противоречие.

Пусть $r = 27$. Тогда T снова является специальной группой, противоречие.

`II.` Пусть далее $e = 2$, $R = C_{G_a}(K)$ и $\mathrm{SL}_2(5) \simeq S \trianglelefteq G_a$. Так как $G_a/R \leq \mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{p-1}$, то $S \trianglelefteq {G_a}' \leq R$ и $G_a = C_{G_a}(R)R$.

Покажем сначала, что T — экстраспециальная группа порядка p^3.

Предположим обратное. Тогда T — абелева группа порядка p^3 и поскольку R является p'-группой, по [29, предложение 24.6] $T = [T, R] \times C_T(R)$ и кроме того, $[T, R] \trianglelefteq G$. С другой стороны, $K \leq C_T(R)$ и ввиду предложения 2.10 T не содержит нормальных в G подгрупп порядка p^2, то есть $[T, R] = 1$, противоречие.

Таким образом, далее в случаях 3 – 6 получим, что T — экстраспециальная группа порядка p^3. Отсюда по [131, теорема 1 и следствие 2] экспонента группы T равна p и $R \leq C_{\mathrm{Aut}(T)}(K)/\mathrm{Inn}(T) \simeq Sp_e(p)$. Очевидно, $C_K(G_a) = 1$ или $G_a \leq R = C$.

`3.` Если $p^e = 11^2$, то $k = 120, r = \mu = 11, n = 10, m = 12$, Γ имеет массив пересечений

$$\{120, 110, 1; 1, 11, 120\}$$

и спектр

$$120^1, 10^{110}, -1^{120}, -12^{132}.$$

Тогда $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ или $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{10}$. Так как T — экстраспециальная группа порядка 11^3 и $G_a/R \leq Z_{10}$, то $R \leq Sp_2(11)$ и $S = {G_a}' = R$ (иначе $Sp_2(11)$ содержит $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{10}$, что невозможно). Таким образом, группа R транзитивна на $[a]$.

В частности, если $R < G_a$, то $G_a/R \simeq Z_5$ имеет две орбиты на $F - \{a\}$ длины 5 и подгруппа G_a имеет 6 орбит на T (их длины равны $1, 120, 600, 600, 5, 5$).

4. Если $p^e = 19^2$, то $k = 360$, $r\mu = 361$, $n = 18, m = 20$, $\mu = r = 19$, Γ имеет массив пересечений

$$\{360, 342, 1; 1, 19, 360\}$$

и спектр

$$360^1, 18^{3420}, -1^{360}, -20^{3078}.$$

Тогда $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{18}$. Так как T — экстраспециальная группа порядка 19^3 и $G_a/R \leq Z_{18}$, то $R \leq Sp_2(19)$ и $R < G_a$ (иначе $Sp_2(19)$ содержит G_a, что невозможно). Поэтому $R \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ или $\mathrm{SL}_2(5) \times Z_3$.

5. Если $p^e = 29^2$, то $k = 840$, и либо $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{14}$, либо $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{28}$. Далее, $r\mu = 841$, $r = \mu = 29$, $n = 28, m = 30$, Γ имеет массив пересечений

$$\{840, 812, 1; 1, 29, 840\}$$

и спектр

$$840^1, 28^{12180}, -1^{840}, -30^{11368}.$$

Так как T — экстраспециальная группа порядка 29^3 и $G_a/R \leq Z_{28}$, то $R \leq Sp_2(29)$ и $R < G_a$ (иначе $Sp_2(29)$ содержит G_a, что невозможно). Поэтому $R \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ или $\mathrm{SL}_2(5) \circ Z_4$.

6. Если $p^e = 59^2$, то $k = 3480$ и $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \circ Z_{58}$. Далее, $r\mu = 3481$, $r = \mu = 59, n = 58, m = 60$, Γ имеет массив пересечений

$$\{3480, 3422, 1; 1, 59, 3480\}$$

и спектр

$$3480^1, 58^{102660}, -1^{3480}, -60^{99238}.$$

Так как T — экстраспециальная группа порядка 59^3 и $G_a/R \leq Z_{58}$, то $R \leq Sp_2(59)$ и $R < G_a$ (иначе $Sp_2(59)$ содержит G_a, что невозможно). Поэтому $S = R \simeq \mathrm{SL}_2(5)$ и G_a имеет две орбиты на F длины 29.

Лемма доказана.

Замечание 2.20. Для каждой фиксированной тройки параметров (k, r, μ) граф Γ из пп. 1–5 леммы 2.19 существует и является известным единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным графом с такими параметрами. В частности, для $r = 3$ граф Γ степени 80 изоморфен графу из п. 1 леммы 2.17. В предположении $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ случаи из пп. 1–5 леммы 2.19 не реализуются. В п. 6 леммы 2.19 группа $\mathrm{Aut}(T)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп, изоморфных группе G_a.

Доказательство. Полный перебор орбитальных графов допустимой группы TR с помощью компьютерных вычислений в Magma [38].

§§ 2.4.2. Одномерный случай

Лемма 2.21. *Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (iv) предложения 1.23. Тогда $G_a \leq \Gamma L_1(p^e)$, $R = G_a \cap GL_1(p^e) \trianglelefteq G_a, G_a/R \leq Z_e$, и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$e > 4$, $r \geq p^{e/2}$, T — специальная группа порядка rp^e и R не нормализует подгрупп индекса p в K;*

(2) *$e = 4$, $r = p^2 = \mu$, T — специальная группа порядка p^6, группа R действует полурегулярно на $[a]$ и группа $R/C_R(K)$ действует полурегулярно на $F - \{a\}$;*

(3) *$e = 4, p = 3$, T — специальная группа порядка rp^4 и $R \leq N_G(K_1)$, где K_1 — подгруппа индекса p в K, $|R| = 20$, $G_a \simeq Z_5 : Z_{16}$ и $|R/C_R(K)| \leq 2$;*

(4) *$e = 2$, $r = p$, T — экстраспециальная группа экспоненты p и $G_a \leq \mathrm{GL}_2(p)$;*

(5) *$e = 2$, $3 < r = p$ — простое число Мерсенна, T — абелева группа и $C_T(G_a) = 1$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.11 $G_a \simeq A \leq \Gamma\mathrm{L}_1(p^e)$, $G_a \trianglerighteq R \simeq A \cap \mathrm{GL}_1(p^e)$ и $G_a/R \leq Z_e$, в частности, G_a содержит циклическую подгруппу R_0 порядка $(p^e-1)/(e,p^e-1)$. При этом R действует без неподвижных точек на $\Sigma - \{F\}$, на $\Sigma - \{F\}$ имеется ровно $\alpha = (p^e-1)/|R|$ R-орбит и α делит (e, p^e-1).

Пусть $X = TR$, $R = \langle g \rangle$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = r$ и по лемме 2.7

$$\chi_1(g) = \frac{m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k}{m+n}.$$

Имеем $[N_T(R), R] \leq R \cap T = 1$ и, следовательно, $N_X(R) = C_T(R) \times R$. Поскольку Ω является блоком импримитивности группы X, $\alpha_0(g) = |N_X(R) : R| = |C_T(R)|$. Ясно, что $C_T(R) \leq K$.

По [29, 24.1]

$$R^* = R/C_R(K) \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p)$$

и поэтому $|R/C_R(K)| \leq r/|\Phi(K)| - 1$, то есть

$$|C_R(K)| \geq \frac{p^e-1}{(e,p^e-1)(r/|\Phi(K)|-1)} \geq \mu/(e,p^e-1) = p^l/(e,p^e-1).$$

Допустим, что $C_R(K) = 1$. Тогда $(p^e-1)/(e,p^e-1)$ делит $|\mathrm{GL}_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p)|$. По малой теореме Ферма каждый простой делитель p_0 числа (e,p^e-1) делит и число $p^{p_0-1}-1$, меньшее чем p^e-1. Отсюда по теореме 1.21 $e = 2$ и $r = p$. Но тогда p^2-1 делит $2(p-1)$, противоречие с тем, что $p > 2$.

Отсюда $C_R(K) > 1$ и следовательно, $T = KC_T(K)$. Положим $C_R(K) = \langle \tilde{g} \rangle$. Поскольку $KR \leq C_G(\tilde{g})$ и $\mathrm{Fix}(R) \subseteq F$, то $|KR|$ делит $\alpha_1(\tilde{g})$, $\alpha_0(\tilde{g}) = r$ и по лемме 2.7

$$\chi_1(\tilde{g}) = \frac{p^{e/2}r + r - p^{e/2} + \alpha_1(\tilde{g}) - p^e}{2p^{e/2}} \in \mathbb{Z},$$

поэтому $\alpha_1(\tilde{g})/r \equiv -1 \pmod p$ или $r \geq p^{e/2} \geq \mu$ и число $\alpha_1(\tilde{g})$ четно.

Далее, по [29, 24.4] $T = [T,R]C_T(R) = [T,R]K$.

Кроме того,

$$Y = C_G(K) \cap [T, G_a] = C_T(K) \cap [T, G_a] \trianglelefteq G.$$

Если $Y \leq K$, то $\bar{T} \simeq C_T(K)/Z(K) \simeq [T,G_a]K/K$ и $|T| \geq p^{2e}$, противоречие с тем, что $r < p^e$.

Следовательно, Y действует транзитивно на Σ.

Если $K \not\leq Y$, то граф $\Gamma^{Y \cap K}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, которая содержит нормальную подгруппу порядка p^e, противоречие с предложением 2.10.

Таким образом, $Y = T$ и $K \leq Z(T)$.

1. Допустим, что существует примитивный простой делитель s числа $p^e - 1$. Пусть S — силовская s-подгруппа в R и обозначим через f ее порождающий элемент. Тогда S нормальна в G_a и поскольку $(|S|, |\operatorname{GL}_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p)|) = 1$, то S централизует $K/\Phi(K)$ и по [29, 24.1] S централизует K.

Далее, $\operatorname{Fix}(f) = F$, $\alpha_0(f) = r$ и по лемме 2.7 $\chi_1(f) = (m\alpha_0(f) - m + \alpha_1(f) - k)/(m+n)$. Так как $KR \leq C_T(f)$ и $\operatorname{Fix}(R) \subseteq F$, то $\alpha_1(f) = r(p^e-1)w/(e,p^e-1)$, где $0 \leq w \leq (e, p^e-1)$.

Если $w = 0$, то ввиду целочисленности $\chi_1(f)$ получим

$$mr - m - k = (p^{e/2}+1)r - p^{e/2} - p^e \equiv 0 \pmod{2p^{e/2}},$$

в частности, $r \geq p^{e/2}$.

Утверждение: $K = T'$.

Доказательство утверждения. Предположим, что $K \neq T'$. Тогда $T' < K$ и $\widetilde{T} = T/T'$ — абелева p-группа, а граф $\Gamma_1 = \Gamma^{T'}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $\widetilde{G} = G/T'$. Так как $[S,K] = 1$, то $C_{\widetilde{T}}(S) \geq \widetilde{K}$ и ввиду [29, 24.6] $\widetilde{T} = C_{\widetilde{T}}(S) \times [\widetilde{T}, S]$ и $[\widetilde{T}, S] \trianglelefteq \widetilde{G}$. Поэтому $\widetilde{T}$ содержит подгруппу порядка p^e, нормальную в $\widetilde{G}$, противоречие с предложением 2.10. $\square$

Таким образом, $T = [T,S]K$, группа T специальна и группа K элементарна. Далее, группа $\operatorname{Aut}(T)$ содержит элемент порядка $(p^e-1)/(e,p^e-1)$.

Утверждение: Для любой подгруппы K_1 индекса p из K факторгруппа T/K_1 является экстраспециальной группой экспоненты p.

Доказательство утверждения. Обозначим через Z полный прообраз группы $Z(T/K_1)$ в T. Очевидно $K \leq Z$. Так как $Z' \leq K_1$, то $Z < T$. Если $Z > K$, то поскольку $Z/K_1 \trianglelefteq TC_{G_a}(K)/K_1$, то группа Z/K является $C_{G_a}(K)$-инвариантной и, следовательно, множество $Z/K - \{1\}$ является объединением некоторого числа S-орбит, откуда число $|Z/K| - 1$ делится на s, противоречие. Значит, $Z(T/K_1) = K/K_1 = (T/K_1)'$.

Обозначим через Q полный прообраз группы $\Omega_1(T/K_1)$ в T. Очевидно $K \leq Q$. По [29, 23.12] $|T/K_1 : \Omega_1(T/K_1)| \leq p$ и поскольку $Q/K_1 \trianglelefteq TC_{G_a}(K)/K_1$, то группа Q/K является $C_{G_a}(K)$-инвариантной. Отсюда множество $Q/K - \{1\}$ является объединением некоторого числа S-орбит и тем самым число $|Q/K| - 1$ делится на s, что влечет $Q = T$. $\square$

Значит, $\mho^1(T) = 1$ и поэтому T — специальная группа экспоненты p. Таким образом, по [131, теорема 1] $S \le C_R(K) \le C_{\mathrm{Aut}(T/K_1)}(K/K_1)/\mathrm{Inn}(T/K_1) \simeq Sp_e(p)$ и $\mathrm{Out}(T/K_1) \simeq GSp_e(p)$. При этом группа $C_R(K)$ изоморфно вкладывается в подгруппу Зингера группы $Sp_e(p)$, следовательно, ее порядок делит число $p^{e/2}+1$ (см., например, [34, таблица 1]).

Значит, число $|R^*|$ делится на $(p^{e/2}-1)/(e,p^e-1)$ и делит $|\,\mathrm{GL}_{e-l}(p)|$.

1.1. Допустим, что $e > 2$. Заметим, что по теореме 1.21 если $r < p^{e/2}$, то $e = 4$ и $p = 2^q - 1$ — простое число Мерсенна. Действительно, если существует примитивный простой делитель t числа $p^{e/2}-1$, то по малой теореме Ферма t делит и $|\,\mathrm{GL}_{e-l}(p)|$, что влечет $e - l \ge e/2$, то есть $r \ge p^{e/2}$.

Если $R \le N_G(K_1)$ для подгруппы K_1 индекса p из K, то, поскольку группа T/K_1 экстраспециальна, получим, что $R \le \mathrm{Out}(T/K_1), C_R(K/K_1) \le Sp_e(p)$ и $|R/C_R(K/K_1)|$ делит $p-1$, откуда $p = 3, e = 4$. Учитывая, что $GSp_4(3)$ не содержит элементов порядка 40, заключаем $|R| = 20$ и $G_a \simeq Z_5 : Z_{16}$.

Поэтому при $(e;p) \ne (4;3)$ группа R не нормализует ни одной подгруппы индекса p в K и, в частности, $r > p$.

Предположим, что $e = 4$ и $p > 3$. Найдем допустимые значения r в этом случае.

Если $r = p^3$, то $|K : [K,R^*]| \ne p$ и $|K : C_K(R^*)| \ne p$, поэтому ввиду [29, 24.6] $C_K(R^*) = 1$, циклическая группа R^* действует неприводимо на K и содержится в подгруппе, порожденной циклом Зингера группы $\mathrm{GL}_3(p)$. Но в этом случае $(p^2-1)/4$ делит $(p^3-1, p^2-1) = p-1$, откуда $p = 3$, противоречие.

Значит, $r = p^2 = \mu$. Отсюда $C_K(R^*) = 1$ и циклическая группа R^* действует неприводимо на K, поэтому она содержится в подгруппе, порожденной циклом Зингера группы $\mathrm{GL}_2(p)$. Имеем $\alpha_0(g) = 1, \alpha_3(g) = r - 1$ и $|R|$ делит $\alpha_1(g)$. Тогда $\alpha_1(g) = \gamma(p^2-1)/4$, где $\gamma \le 4p^2$, и

$$\chi_1(g) = \frac{m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k}{m+n} = \frac{\gamma(p^2-1)/4 - p^4 + 1}{2p^2} \in \mathbb{Z},$$

что влечет $\gamma = 4 + zp^2, 0 \le z \le 3$.

1.2. Пусть $e = 2$. Тогда $r = p$ и по теореме 1.21 p не является числом Мерсенна. Тогда T — экстраспециальная группа экспоненты p и $G_a \le \mathrm{Out}(T) \simeq \mathrm{GL}_2(p)$.

2. Теперь пусть $e = 2$, $p = 2^q - 1$ является простым числом Мерсенна, число q — простое и $r = p$. Тогда либо T — экстраспециальная группа экспоненты p и $G_a \le \mathrm{Out}(T) \simeq \mathrm{GL}_2(p)$, либо T — абелева группа и ввиду предложения 2.10 и замечания 2.12 $C_T(G_a) = 1$ и $p > 3$.

Лемма доказана.

§§ 2.4.3. Симплектический случай

Лемма 2.22. *Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (ii) предложения 1.23. Тогда T — специальная p-группа порядка rp^e, $Sp_{2d}(p^c) \le C$, $k = p^{2dc}-1$, $m = p^{dc}+1$, $n = p^{dc}-1$, r делит p^c, $r\mu = p^{2dc}$, $\mu = p^l$ и Γ имеет массив пересечений*

$$\{p^{2dc}-1, (p^{2dc-l}-1)p^l, 1; 1, p^l, p^{2dc}-1\}.$$

Доказательство. Пусть $Sp_{2d}(p^c) \trianglelefteq G_a$ и $Y = {G_a}^{\infty}$. Ввиду замечания 2.12 можно полагать, что $(e;p) \neq (2;3)$. Тогда $Y \neq 1$ и G_a содержит циклическую подгруппу R порядка $p^{e/2}+1$, порожденную циклом Зингера g группы Y. Обозначим $X = TR$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = r$ и по лемме 2.7

$$\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m+n).$$

Имеем $[N_T(R), R] \leq R \cap T = 1$ и, следовательно, $N_X(R) = C_T(R) \times R$. Поскольку Ω является блоком импримитивности группы X, $\alpha_0(g) = |N_X(R) : R| = |C_T(R)|$.

Значит, $C_T(R) \leq K$.

Допустим, что $Y \nleq C_G(K)$. Тогда

$$Y/C_Y(K/\Phi(K)) \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p).$$

Следовательно, либо $e = 2$ и группа $K/\Phi(K)$ — циклическая, либо $e \geq 3$ и по теореме 1.21 существует примитивный простой делитель s числа $p^e - 1$, поэтому в любом случае получим, что Y централизует $K/\Phi(K)$. По [29, 24.1] R не может действовать точно на K и поэтому $C_R(K) \leq Z(Y)$. Если $e \geq 3$, то подгруппа из R порядка s содержится в $Z(Y)$, противоречие. Значит, $e = 2$ и $r = p$, снова противоречие.

Таким образом, $T = KC_T(K)$ и $Y \leq C_G(K)$. Значит, $C_T(R) = K$. Ввиду [29, упражнение 3.6] $[T, R] \leq C_T(K)$ и по [29, 24.4] $T = [T, R]K$.

Если $Z(K) < K$, то граф $\Gamma^{Z(K)}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/Z(K)$, которая содержит нормальную подгруппу $C_T(K)/Z(K)$ порядка p^e, противоречие с предложением 2.10.

Поэтому $K \leq Z(T)$.

Утверждение: Случай $\Phi(T) < K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $\Phi(T) < K$. Тогда граф $\Gamma^{\Phi(T)}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/\Phi(T)$, которая содержит нормальную регулярную элементарную абелеву p-подгруппу $T/\Phi(T)$. По [29, 24.6] $T/\Phi(T) = [T/\Phi(T), R] \times C_{T/\Phi(T)}(R)$.

По предложению 2.10 $T/\Phi(T)$ является неразложимым $\mathbb{GF}(p)Y$-модулем и следовательно, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, T/K)$ группы Y в T/K нетривиальна, что противоречит [105, теорема 2.3] (см. также [82]). $\square$

Утверждение: Случай $T' < K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $T' < K$. Положим $\widetilde{T} = T/T'$ и $\widetilde{K} = K/T'$. Если $\Phi(\widetilde{T}) < \widetilde{K}$, то получим противоречие как и в случае $\Phi(T) < K$. Поэтому $\widetilde{K} = \Phi(\widetilde{T}) = (\widetilde{T})' \cdot \mho^1(\widetilde{T}) = \mho^1(\widetilde{T})$. Тогда $\widetilde{T}$ — группа экспоненты p^j для некоторого $j > 1$. Поскольку группа $\Omega_{j-1}(\widetilde{T})$ характеристична в $\widetilde{T}$, то по предложению 2.10 она содержится в $\widetilde{K}$, то есть $\mho^1(\widetilde{T}) = \Omega_{j-1}(\widetilde{T})$ и экспонента группы $\widetilde{K}$ равна p^{j-1}. Поэтому $\widetilde{T} = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_l \times A_s$, где $C_i \simeq Z_{p^j}$ для некоторых $l \geq i \geq 1$ и A_s — некоторая подгруппа из $\widetilde{K}$ порядка $p^s \geq 1$, поэтому $|\widetilde{T}| = p^e|\widetilde{K}| = p^{jl} \cdot p^s$ и $p^{(j-1)l+s}$ делит $|\widetilde{K}|$, противоречие с тем, что $p^e > |K|$. $\square$

Утверждение: T — специальная группа экспоненты p и r делит p^c.

Доказательство утверждения. Так как $K = T' = Z(T) = \Phi(T)$, то K — элементарная абелева p-группа и T — специальная группа, действующая регулярно на множестве вершин графа Г. При этом группа TY является центральным расширением группы $(TY)^\Sigma$, и по предложению 2.10 обе эти группы совпадают со своими коммутантами. Отсюда по [29, 33.8] $K \simeq \mathrm{M}((TY)^\Sigma)/\mathrm{M}(TY)$.

Заметим, что мультипликатор Шура группы $X = ASp_{2d}(p^c) = P : X_0$, где $d \geq 1, X_0 = Sp_{2d}(p^c)$ и P — естественный X_0-модуль, является элементарной абелевой группой порядка $q = p^c$ и универсальная накрывающая группа для X имеет вид $\widehat{P} : X_0$, где $\widehat{P}$ — это специальная группа порядка q^{2d+1} и экспоненты p. При этом коммутаторное отображение в $\widehat{P}$ индуцирует невырожденную знакопеременную форму на P, инвариантную относительно X_0.

Поэтому $|K|$ делит p^c. $\square$

Из приведенных выше рассуждений следует, что при $r = p^c$ группа TY определена однозначно (с точностью до изоморфизма), а при $r < p^c$ универсальная накрывающая группа $\widehat{TY}$ для $(TY)^\Sigma$ в то же время является универсальной накрывающей и для группы TY. Таким образом, группа TY изоморфна факторгруппе своей универсальной накрывающей группы $\widehat{TY}$ по некоторой подгруппе из $Z(\widehat{TY})$ порядка p^c/r (см., например, [29, 33.1]).

Лемма доказана.

§§ 2.4.4. Линейный случай

Лемма 2.23. *Пусть H^Σ удовлетворяет условиям из п. (i) предложения 1.23. Тогда $d = 2$ и выполнено заключение леммы 2.22 (для случая $Sp_2(p^c) \trianglelefteq G_a$).*

Доказательство. Пусть $e = cd$, $d \geq 3$, $\mathrm{SL}_d(p^c) \trianglelefteq G_a \leq \Gamma\mathrm{L}_d(p^c)$ и $Y = {G_a}^\infty$. Тогда G_a содержит циклическую подгруппу R порядка $(p^e - 1)/(p^c - 1)$, порожденную циклом Зингера g группы Y. Обозначим $X = TR$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Omega \subseteq F$, $\alpha_0(g) + \alpha_3(g) = r$ и по лемме 2.7

$$\chi_1(g) = (m\alpha_0(g) - m + \alpha_1(g) - k)/(m + n).$$

Имеем $[N_T(R), R] \leq R \cap T = 1$ и, следовательно, $N_X(R) = C_T(R) \times R$. Поскольку Ω является блоком импримитивности группы X, $\alpha_0(g) = |N_X(R) : R| = |C_T(R)|$.

Значит, $C_T(R) \leq K$.

Допустим, что $Y \not\leq C_G(K)$. Тогда

$$Y/C_Y(K/\Phi(K)) \leq \mathrm{Aut}(K/\Phi(K)) \simeq \mathrm{GL}_{\log_p(r/|\Phi(K)|)}(p).$$

Но $e \geq 4$ и по теореме 1.21 существует примитивный простой делитель s числа $p^e - 1$, поэтому подгруппа R_0 из R порядка s централизует $K/\Phi(K)$. Отсюда по [29, 24.1] R_0 не может действовать точно на K и поэтому $R_0 \leq C_R(K) \leq Z(Y)$, противоречие.

Таким образом, $T = KC_T(K)$ и $Y \leq C_G(K)$. Значит, $C_T(R) = K$. Ввиду [29, упражнение 3.6] $[T, R] \leq C_T(K)$ и по [29, 24.4] $T = [T, R]K$.

Если $Z(K) < K$, то граф $\Gamma^{Z(K)}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/Z(K)$, которая содержит нормальную подгруппу $C_T(K)/Z(K)$ порядка p^e, противоречие с предложением 2.10.

Поэтому $K \leq Z(T)$.

Утверждение: Случай $\Phi(T) < K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Допустим, что $\Phi(T) < K$. Тогда граф $\Gamma^{\Phi(T)}$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов $TY/\Phi(T)$, которая содержит нормальную регулярную элементарную абелеву p-подгруппу $T/\Phi(T)$. По [29, 24.6] $T/\Phi(T) = [T/\Phi(T), R] \times C_{T/\Phi(T)}(R)$.

По предложению 2.10 $T/\Phi(T)$ является неразложимым $\mathbb{GF}(p)Y$-модулем.

Следовательно, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(Y, T/K)$ группы Y в T/K нетривиальна, но $e \geq 4$, что противоречит [71, лемма 4] (см. также [82]). $\square$

Утверждение: Случай $T' = K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Пусть $T' = K$. Тогда $\Phi(T) = K = Z(T)$ — элементарная абелева p-группа и T — специальная группа, действующая регулярно на множестве вершин графа Γ. Пусть K_1 — подгруппа индекса p из K. Тогда TY/K_1 действует транзитивно на дугах графа Γ^{K_1} и по доказанному выше можно считать, что $\Phi(T/K_1) = K/K_1$.

Допустим, что $(T/K_1)' = K/K_1$. Тогда T/K_1 — экстраспециальная группа и коммутаторное отображение группы T задает знакопеременную билинейную форму φ из $\bar{T} \times \bar{T}$ на K/K_1, где K/K_1 отождествляется с полем $\mathbb{GF}(p)$ и $\bar{T}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{GF}(p)$ размерности e (см., например, [29, 23.10]). При этом Y вкладывается в группу изометрий симплектического пространства $(\bar{T}, \varphi)$, то есть $Y \leq Sp_e(p)$. Но тогда $(p^e-1)/(p^c-1) < p^{e/2+1}/(p-1)$ и $d = 2$, противоречие с условием.

Значит, T/K_1 — абелева группа экспоненты p^2, $K/K_1 = \mho^1(T/K_1) = \Omega_1(T/K_1)$ и $T/K_1 = C_1 \times \ldots C_l \times A_s$, где $C_i \simeq Z_{p^2}$ для $l \leq i \leq 1$ и A_s — подгруппа из K/K_1 порядка $p^s \leq p$. Отсюда $|T/K_1| = p^e|K/K_1| = p^{2l}p^s$ и p^{l+s} делит p, противоречие с тем, что $|K| < p^e$.

Утверждение: Случай $T' < K$ невозможен.

Доказательство утверждения. Пусть $T' < K$ и K_1 — подгруппа индекса p в K, содержащая T'. По доказанному выше можно считать, что $\Phi(T/K_1) = K/K_1$. Но тогда T/K_1 — абелева группа экспоненты p^2 и $K/K_1 = \mho^1(T/K_1) = \Omega_1(T/K_1)$, противоречие как и выше. $\square$

Лемма доказана.

§ 2.5. Случай нечетного числа антиподальных классов: дальнейшая редукция

В этом параграфе мы докажем, что в каждом допустимом случае, кроме одномерного, граф из заключения теоремы 2.2 известен и может быть построен с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля (см. теорему 2.3).

Для того чтобы установить упомянутый выше изоморфизм, сначала мы приведем предварительный базовый результат. Напомним, что $G_{\{F\}} = H$, $H = KG_a$, T действует регулярно на $V(\Gamma)$ и $G = TG_a$. Группа подстановок X на Ω называется *точно 2-транзитивной*, если X действует 2-транзитивно на Ω и стабилизатор любых двух различных точек из Ω в X тривиален.

Лемма 2.24. *Предположим, что G — транзитивная на дугах группа автоморфизмов графа Γ. Пусть g — это 2-элемент группы G, переставляющий две смежные вершины a и $b = a^g$ графа Γ. Если стабилизатор дуги в G имеет нечетный порядок, то g — это инволюция и, в частности, если G индуцирует точно 2-транзитивную группу подстановок на Σ, то каждый элемент из $G - H$ единственным образом представим в виде fh_1gh_2, где $f \in K$ и $h_1, h_2 \in G_a$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.11 группа K действует регулярно на F.

Ввиду 2-транзитивности G на Σ получим, что $G = H \cup HgH = KG_a \cup KG_agG_a$ для некоторого элемента $g \in G - H$ (см., например, [58, упражнение 3.2.27]). Можно считать, что g — это 2-элемент, переставляющий две смежные вершины a и a^g. Тогда $g^2 \in G_a$.

Ввиду того, что p — нечетно, элемент g фиксирует некоторую вершину $b \in E$, где $E \in \Sigma - \{F\}$. Имеем $G_b = (G_a)^x$ для некоторого элемента $x \in T - K$ и $g = h^x$ для некоторого элемента $h \in G_a - C_G(x)$. Поэтому $g^2 = x^{-1}h^2x \in G_a \cap (G_a)^x$. Отсюда $g^2 = h^2 = 1$, так как по условию стабилизатор дуги в G имеет нечетный порядок.

Далее, пусть $g_1 \in G - H$ и G индуцирует точно 2-транзитивную группу на Σ. Предположим, что $g_1 = fh_1gh_2 = \widetilde{f}\widetilde{h}_1g\widetilde{h}_2$ для некоторых элементов $f, \widetilde{f} \in K$ и $h_i, \widetilde{h}_i \in G_a$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда

$$(\widetilde{f}\widetilde{h}_1)^{-1}fh_1 = g\widetilde{h}_2h_2^{-1}g^{-1} \in (G_a)^g = (G_a)^{(x^{-1})^hx}.$$

Так как $(x^{-1})^hx \notin K$, то элемент $(\widetilde{f}\widetilde{h}_1)^{-1}fh_1$ фиксирует вершину $a^g \notin F$. Но тогда

$$\widetilde{h}_1^{-1}\widetilde{f}^{-1}fh_1 = (\widetilde{f}^{-1}f)^{\widetilde{h}_1}\widetilde{h}_1^{-1}h_1 \in KG_a \cap H_{a^g} = 1,$$

$f = \widetilde{f}$ и $h_i = \widetilde{h}_i$, $i \in \{1, 2\}$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь совокупность случаев, выделенных в леммах 2.17, 2.19 и 2.21.

Лемма 2.25. *Пусть T — экстраспециальная группа порядка p^3, Γ имеет массив пересечений*

$$\{p^2 - 1, p(p-1), 1; 1, p, p^2 - 1\}$$

и G_a — циклическая группа порядка $p^2 - 1$, или $p \in \{5, 7, 11, 23\}$ и $\mathrm{SL}_2(3) \trianglelefteq G_a$, или $p \in \{11, 19, 29, 59\}$ и $\mathrm{SL}_2(5) \trianglelefteq G_a$. Тогда Γ — дистанционно-транзитивный граф.

Доказательство. Напомним, что T — группа экспоненты p. Пусть $C = C_{G_a}(K)$, $T = \langle x_1, x_2 \rangle$, $f = [x_1, x_2]$ и $V = \{x_1^{i_1}x_2^{i_2} | i_1, i_2 \in \{1, ..., p\}\}$ — трансверсаль группы K в T.

Так как T — регулярная группа автоморфизмов графа Γ, то $\Gamma \simeq \mathrm{Cay}(T, \mathcal{S})$, где $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$ — это некоторый класс (размера $p^2 - 1$) элементов группы T, сопряженных в G_a.

Имеем $K = Z(TC)$. Отождествим K с полем порядка p и рассмотрим $\bar{T} = T/K$ как векторное пространство над K. Коммутаторное отображение $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto [x, y]$ из $\bar{T} \times \bar{T}$ в

K, где $\bar{x} = xK$ и $\bar{y} = yK$, задает невырожденную знакопеременную форму на $\bar{T}$. Таким образом, $C \leq Sp_2(p)$.

Покажем, что граф Γ изоморфен дистанционно регулярному накрытию с массивом пересечений

$$\{p^2-1, p(p-1), 1; 1, p, p^2-1\},$$

получаемому с помощью конструкции Таса-Соммы (см., например, [40, с. 385]). Для удобства мы будем использовать эквивалентную ей конструкцию, приведенную в [40, предложение 12.5.1].

Пусть Γ_T — граф, множеством вершин которого являются элементы множества $K\times\bar{T}$, в котором две вершины $(f^m, \bar{r}_i)$ и $(f^n, \bar{r}_j)$, где $r_i, r_j \in V$ и $m, n \in \mathbb{Z}$, смежны тогда и только тогда, когда $[r_i, r_j] = f^{m-n}$ и $r_i \neq r_j$. Известно, что Γ_T — дистанционно-транзитивный граф и стабилизатор его вершины в полной группе автоморфизмов содержит подгруппу, изоморфную группе $Sp_2(p)$, которая фиксирует поточечно антиподальный класс, содержащий данную вершину, и действует транзитивно на остальных антиподальных классах (см. [66, пример 3.6]).

Отображение φ из T в $\mathrm{Aut}(\Gamma_T)$, определенное по правилу

$$((f^m, \bar{r}_i))\varphi(f^l r_s) = (f^{-2l} f^{m+\delta(r_i, r_s)}, \bar{r}_i\bar{r}_s),$$

где через r_z обозначается элемент $x_1^{z_1}x_2^{z_2}$ для $z_1, z_2 \in \{1, ..., p\}$ (символ z заменяет i или s) и

$$\delta(r_i, r_s) = s_2 i_1 - s_1 i_2 - s_1 s_2,$$

для всех $l \in \{1, ..., p\}$ и $r_s \in V$, задает регулярную группу $\varphi(T)$ автоморфизмов графа Γ_T.

Действительно, пусть $r_i, r_j \in V$, $r_i \neq r_j$ и $m, n \in \mathbb{Z}$. Вершины $(f^m, \bar{r}_i)$ и $(f^n, \bar{r}_j)$ смежны тогда и только тогда, когда

$$[r_i, r_j] = [x_1^{i_1}x_2^{i_2}, x_1^{j_1}x_2^{j_2}] = [x_1, x_2]^{i_1j_2 - i_2j_1} = [x_1, x_2]^{m-n}$$

тогда и только тогда, когда

$$[r_i r_s, r_j r_s] = [x_1, x_2]^{(i_1+s_1)(j_2+s_2)-(i_2+s_2)(j_1+s_1)} = [x_1, x_2]^{(m+s_2i_1-s_1i_2)-(n+s_2j_1-s_1j_2)}$$

тогда и только тогда, когда смежны вершины $((f^m, \bar{r}_i))\varphi(r_s)$ и $((f^n, \bar{r}_j))\varphi(r_s)$.

Непосредственно проверяется, что φ — мономорфизм и $\varphi(T)$ действует регулярно на $V(\Gamma_T)$.

Рассмотрим теперь отображение ψ из G_a в $\mathrm{Aut}(\Gamma_T)$, определенное по правилу $\psi(h) : (u, \bar{x}) \mapsto (u^h, \overline{x^h})$ для всех $h \in G_a$, $x \in V$ и $u \in K$. Ясно, что $G_a \simeq \psi(G_a) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_T)$.

Пусть $sc : T \to K$ и $tr : T \to V$ — две функции, определяемые соотношением $g = sc(g)tr(g)$ для каждого $g \in T$.

Возьмем произвольно $h \in G_a$ и $g \in T$. Тогда $g = (f^l r_s)^h$ для некоторых $f^l \in K$ и

$r_s \in V$. Ввиду тождества $f^{\delta(r_i,r_s)} = [r_i, r_s]f^{-s_1s_2}$ имеем

$$\begin{gathered}((f^m, \bar{r}_i))\psi(h)\varphi(g) = \\ (((f^m)^h, \overline{{r_i}^h}))\varphi((f^l r_s)^h) = (((f^m)^h, \overline{{r_i}^h}))\varphi((f^l)^h sc({r_s}^h)tr({r_s}^h)) = \\ (((f^l)^h)^{-2} sc({r_s}^h)^{(-2)}(f^m)^h f^{\delta(tr({r_i}^h),tr({r_s}^h))}, \overline{(r_i r_s)^h}) = \\ ((f^{-2l} f^m (sc({r_s}^h)^{(-2)} f^{\delta(tr({r_i}^h),tr({r_s}^h))})^{h^{-1}}, \overline{r_i r_s})\psi(h) = \\ ((f^{-2l} f^m (sc({r_s}^h)^{(-2)} f^{\delta(tr({r_i}^h),tr({r_s}^h))})^{h^{-1}} f^{-\delta(r_i,r_s)}, \overline{r_i})\varphi(r_s)\psi(h) = \\ ((f^{-2l} f^m (sc({r_s}^h)^{(-2)} f^{-j_1j_2})^{h^{-1}} f^{s_1s_2}, \overline{r_i})\varphi(r_s)\psi(h) = ((f^m, \bar{r}_i))\varphi(f^t r_s)\psi(h),\end{gathered}$$

где $tr({r_s}^h) = r_j = {x_1}^{j_1}{x_2}^{j_2}$ и $f^{2t} = (f^{-2l}(sc({r_s}^h)^{(-2)} f^{-j_1j_2})^{h^{-1}} f^{s_1s_2}$. Такое число t существует (поскольку $\langle f^2 \rangle = K$) и не зависит от выбора вершины $(f^m, \bar{r}_i) \in V(\Gamma_T)$. Отсюда $\psi(G_a)$ нормализует $\varphi(T)$ и $\psi(G_a) \leq \mathrm{Aut}(\varphi(T))$. Пусть $\tilde{\psi}(G_a)$ — это подгруппа из $\mathrm{Aut}(\varphi(T))$, индуцируемая действием группы $\psi(G_a)$ на $\varphi(T)$.

Нетрудно видеть, что для каждой вершины $\tilde{c} = (f^m, \bar{r}_i)$ графа Γ_T центральная инволюция подгруппы из $(\mathrm{Aut}(\Gamma_T))_{\tilde{c}}$, изоморфной $Sp_2(p)$, инвертирует $(p^2 - 1)/2$ ребер из окрестности вершины $\tilde{c}$.

Если группа ${G_{\{F\}}}^F (\simeq G_{\{F\}}/C)$ неразрешима, то по теореме Бернсайда (см. [129, теорема 11.7]) группа ${G_{\{F\}}}^F$ действует 2-транзитивно на F. Но в этом случае по предложению 1.23 $G_a/C \simeq \mathrm{GL}_1(p)$, противоречие.

Таким образом, группа $G_{\{F\}}/C$ разрешима и G_a/C действует точно на K, то есть $G_a/C \leq \mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{p-1}$.

1. Экстраспециальный случай для G_a был рассмотрен в замечании 2.18.

2. Пусть для G_a выполняется исключительный случай. Тогда $\mathrm{SL}_2(5) \leq G_a$ и $p \in \{11, 19, 29, 59\}$.

Возможность $p < 59$ была рассмотрена в замечании 2.20.

Пусть $p = 59$. В этом случае (см. замечание 2.20) группа $\mathrm{Aut}(T)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп, изоморфных группе G_a. Если η — гомоморфизм из $\mathrm{Aut}(T)$ в $\mathrm{Aut}(\varphi(T))$, определенный посредством тождества $\varphi(g)^{\eta(\sigma)} = \varphi(g^\sigma)$ для всех $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$ и $g \in T$, то $\eta(G_a)^\pi = \tilde{\psi}(G_a)$ для некоторого $\pi \in \mathrm{Aut}(\varphi(T))$ и, в частности, $TG_a \simeq (\varphi(T)\eta(G_a))^\pi = \varphi(T)\tilde{\psi}(G_a) \simeq \varphi(T)\psi(G_a) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_T)$.

Пусть $\epsilon : TG_a \to \varphi(T)\psi(G_a)$ — указанный выше изоморфизм.

Таким образом, $\epsilon(TG_a) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_T)$ и $TG_a \leq \mathrm{Hol}(T)$, то есть граф Γ_T допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов TG_a, которая вкладывается в подгруппу из $\mathrm{Hol}(T)$. При этом $TC \leq T : Sp_2(p)$.

Имеем $G_a \simeq \mathrm{SL}_2(5) \times Z_{29}$ и G_a регулярна на $[a]$. Из леммы 2.24 следует, что вершина a смежна с вершиной a^g, где g — это некоторая инволюция из $G - G_a$. По [29, 40.5] G_a содержит всего одну (центральную) инволюцию и эта инволюция инвертирует каждый элемент из $\bar{T}$. Поэтому $g \in Z(H_b)$ для некоторой вершины b графа Γ и каждая $\langle g \rangle$-орбита на $V(\Gamma) - F(b)$ индуцирует ребро в Γ. Таким образом, G содержит ровно один класс сопряженных инволюций (размера $k+1$) и две вершины x и y графа Γ смежны тогда и только тогда, когда $x^h = y$ для некоторой инволюции $h \in G - H_x$.

С другой стороны, так как G_a транзитивна на $\bar{T}^{\#}$, то для инволюции h из G_a любые две вершины вида $(1, \overline{r_i})$ и $(1, \overline{r_i}^h)$ смежны в графе Γ_T. Поэтому инволюция g переставляет между собой две смежных вершины $(1, \overline{1})$ и $((1, \overline{1}))\epsilon(g)$ графа Γ_T.

Таким образом, $\Gamma \simeq \Gamma(G, G_a, G_a g G_a) \simeq \Gamma_T$.

3. Пусть для G_a выполняется одномерный случай и допустим, что G_a — циклическая группа порядка p^2-1. Тогда $G_a/C \leq \mathrm{Aut}(K) \simeq Z_{p-1}$ и поэтому $|G_a : C|$ делит $p-1$. Отсюда C содержит элемент порядка $p+1$ и, в частности, единственную инволюцию из G_a. Кроме того, длина каждой G_a-орбиты на $K^{\#}$ равна $|G_a : C|$.

Так как $C \leq C_{\mathrm{Aut}(T)}(K)$ и $C_{\mathrm{Aut}(T)}(K)/\mathrm{Inn(T)} \simeq \mathrm{SL}_2(p)$ (см. [131, теорема 1]), то $|C| = p+1$. Поскольку группа $\mathrm{Out}(T) \simeq \mathrm{GL}_2(p)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп порядка p^2-1, для любых двух подгрупп X_1 и X_2 данного порядка из $\mathrm{Aut}(T)$ найдется элемент $\gamma \in \mathrm{Aut}(T)$ такой, что ${X_1}^{\gamma}\mathrm{Inn}(T) = X_2\mathrm{Inn}(T) = A$ и по теореме Шура-Цассенхауса (см. [29, 18.1]) группы ${X_1}^{\gamma}$ и X_2 сопряжены в A. Отсюда $\mathrm{Aut}(T)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп порядка p^2-1. Поэтому как и выше получим, что $TG_a \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_T)$.

Пусть g — это инволюция, переставляющая две смежные вершины a и a^g графа Γ. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Gamma = \Gamma(G, G_a, G_a g G_a)$ (см. предложение 1.5).

Так как g фиксирует ровно один антиподальный класс графа Γ, то $G_a gyg = G_a f^i gy$ для некоторых элементов $y \in G_a$ и $f^i \in K$. Тогда $gyg = h_0 f^i gy$ для некоторого элемента $h_0 \in G_a$ и $gy = h_0 f^i gyg = (h_0 f^i)^2 gy$.

Ввиду леммы 2.24 получим, что ${h_0}^2 (f^i)^{h_0} f^i = 1$, h_0 — инволюция и либо $K\langle h_0\rangle$ (а значит, и $K\langle g\rangle$) — диэдральная группа порядка $2p$, либо $G_a gyg = G_a gy$. Но по доказанному выше, инволюция из G_a централизует K, поэтому первый случай невозможен.

Далее, инволюция h_0 инвертирует ребро $\{G_a g h_0, G_a g\}$, а значит, каждая $\langle h_0\rangle$-орбита на окрестности вершины $G_a f^i$, где $f^i \in K$, индуцирует ребро. Кроме того, g инвертирует ребро $\{G_a, G_a g\}$ из окрестности вершины $G_a gy$, и поэтому также каждая $\langle g\rangle$-орбита на окрестности вершины $G_a gy f^i$ индуцирует ребро. Ясно, что TC содержит класс инволюций группы G.

Таким образом, две вершины $G_a x$ и $G_a z$ смежны в Γ тогда и только тогда $G_a x = G_a z g_1$ для некоторой инволюции g_1 из TC и $z \notin G_a x$.

Наконец, поскольку группа TC действует точно и транзитивно как на $V(\Gamma)$, так и на $V(\Gamma_T)$, то граф Γ изоморфен объединению графов $\Gamma(TC, C, C g_1 C)$, где $g_1 \in g^{TC} - \{h_0\}$, и поэтому $\Gamma \simeq \Gamma_T$.

Лемма доказана.

В следующих двух леммах мы рассмотрим остальные случаи из лемм 2.17 и 2.19.

Лемма 2.26. *Пусть* $\mathrm{SL}_2(13) \simeq G_a$, T *— экстраспециальная группа порядка* 3^7 *и* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{728, 486, 1; 1, 243, 728\}.$$

Тогда Γ *— дистанционно-транзитивный граф.*

Доказательство. Имеем $G_a = C \simeq \mathrm{SL}_2(13)$ и $K = Z(G)$. Тогда $G_a \simeq G_{\{F\}}/K \leq Sp_6(3) \simeq C_{\mathrm{Aut}(T)}(K)/\mathrm{Inn(T)}$. Заметим, что группа $Sp_6(3)$ содержит три класса инволюций: одноэлементный класс и два класса, каждый из которых имеет порядок 7371. При этом в группе $Sp_6(3)$ имеется ровно два класса сопряженных подгрупп, изоморфных группе $\mathrm{SL}_2(13)$, а центр каждой такой подгруппы совпадает с $Z(Sp_6(3))$. Представители этих классов сопряжены в группе $\mathrm{Aut}(Sp_6(3))$ (см. [51]).

Экспонента группы T равна p и поэтому T — центральное произведение трех своих экстраспециальных подгрупп порядка 27 с центром K. Пусть Γ_T — это дистанционно регулярное накрытие с массивом пересечений

$$\{p^e - 1, p^{e-1}(p-1), 1; 1, p^{e-1}, p^e - 1\},$$

определенное как и в доказательстве леммы 2.25. Тогда Γ_T — дистанционно-транзитивный граф и стабилизатор его вершины в полной группе автоморфизмов содержит подгруппу, изоморфную группе $Sp_6(3)$, которая фиксирует поточечно антиподальный класс, содержащий данную вершину, и действует транзитивно на остальных антиподальных классах (см. [66, пример 3.6]).

Так как $\mathrm{Out}(T) \simeq GSp_6(3)$, то для любых двух подгрупп X_1 и X_2 из $\mathrm{Aut}(T)$, изоморфных группе G_a, найдется элемент $\gamma \in \mathrm{Aut}(T)$ такой, что ${X_1}^{\gamma}\mathrm{Inn}(T) = X_2\mathrm{Inn}(T) = A$. Напомним, как отмечено в доказательстве леммы 2.19, первая группа когомологий $\mathrm{H}^1(G_a, T/K)$ тривиальна, откуда по [29, 17.7] следует, что группы ${X_1}^{\gamma}$ и X_2 сопряжены в A. Поэтому группа $\mathrm{Aut}(T)$ содержит единственный класс сопряженных подгрупп, изоморфных группе $\mathrm{SL}_2(13)$.

Так как G_a централизует K, то как и в лемме 2.25 получим, что граф Γ_T допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов TG_a, которая вкладывается в полупрямое произведение групп T и $Sp_6(3)$. Теперь ввиду того, что порядок стабилизатора дуги в G равен 3, по лемме 2.24 получим, что g — инволюция и $\Gamma \simeq \Gamma(G, G_a, G_agG_a) \simeq \Gamma_T$.

Лемма доказана.

Лемма 2.27. *Пусть T — специальная группа порядка 3^4r, $r = 3, 9$, Γ имеет массив пересечений*

$$\{80, (r-1)81/r, 1; 1, 81/r, 80\}$$

и либо $D_8 \circ Q_8 \simeq R \trianglelefteq G_a$ и $G_a/R \leq S_5$, либо $\mathrm{SL}_2(5) \simeq S \trianglelefteq G_a$. Тогда Γ — дистанционно-транзитивный граф.

Доказательство.

1. Пусть r делит 9 и $\mathrm{SL}_2(5) \simeq S \trianglelefteq G_a$. Тогда S имеет две орбиты на $[a]$ длины 40 и $Z_2 \leq G_a/S \leq D_8$.

Пусть Γ_T — это дистанционно регулярное накрытие с массивом пересечений

$$\{p^e - 1, p^{e-1}(p-1), 1; 1, p^{e-1}, p^e - 1\},$$

определенное как и в доказательстве леммы 2.25. Тогда граф Γ_T дистанционно-транзитивен и стабилизатор его вершины в полной группе автоморфизмов содержит подгруппу, изоморфную группе $Sp_4(3)$, которая фиксирует поточечно антиподальный класс, содержащий данную вершину, и действует транзитивно на остальных антиподальных классах (см. [66, пример 3.6]).

Пусть $r = 3$ и G_a централизует K. Так как $G_a \le Sp_4(3)$, то $|G_a : S| = 2$ и стабилизатор дуги в G имеет порядок 3. Заметим, что группа G_a содержит ровно одну (центральную) инволюцию. Кроме того, в группе $Sp_4(3)$ имеется ровно один класс сопряженных подгрупп, изоморфных G_a, а центр каждой такой подгруппы совпадает с $Z(Sp_4(3))$. В этом случае $\mathrm{H}^1(G_a, T/K) = 0$ и как и в доказательстве леммы 2.26 получим $\Gamma \simeq \Gamma_T$.

Если $r = 3$ и некоторый 2-элемент из G_a инвертирует K, то $H/C \simeq S_3$ и $S \le C \le C_H(K)$.

Если $r = 9$, то $G_a/C \le \mathrm{GL}_2(3)$ и $|G_a/C|$ делит 8.

В последних двух случаях группа TC действует точно и транзитивно на вершинах графа Γ_T.

2. Пусть теперь $r = 3$, $D_8 \circ Q_8 \simeq R \trianglelefteq G_a$ и $G_a/R \le S_5$. Тогда длины R-орбит на $[a]$ равны 16.

Допустим $K = Z(G)$. Тогда $G_a \le Sp_4(3)$, $H/R \simeq X \in \{Z_5, Z_5 : Z_2, A_5\}$, TG_a действует транзитивно на дугах графа Γ_T и снова получим, что $\Gamma \simeq \Gamma_T$.

Предположим теперь, что некоторый элемент из G_a инвертирует K. Тогда $G_{\{F\}}/C \simeq S_3$ и G_a содержит подгруппу индекса 2, централизующую K. Если $G_a/R \simeq X \in \{Z_5, A_5\}$, то G_a не содержит подгрупп индекса 2, противоречие. Если $G_a/R \simeq X \in \{Z_5 : Z_2, Z_5 : Z_4, S_5\}$, то G_a содержит ровно одну подгруппу индекса 2 (транзитивную на $[a]$), поэтому TC действует транзитивно на дугах графа Γ_T.

В обоих случаях 1 и 2 заключение леммы следует из замечаний 2.18 и 2.20. При этом граф Γ_T — единственный (с точностью до изоморфизма) дистанционно регулярный граф с указанным массивом пересечений, допускающий вершинно-транзитивную группу автоморфизмов TC. Лемма доказана.

Лемма 2.28. *Пусть группы T и G_a удовлетворяют условиям леммы 2.22 и Γ — это граф из заключения леммы 2.22. Тогда граф Γ изоморфен дистанционно регулярному графу, получаемому с помощью конструкции Таса–Соммы или конструкции Годсила–Хензеля.*

Доказательство. Пусть T — это специальная группа порядка rp^e, удовлетворяющая условиям леммы 2.22, $e = 2dc$, $d \ge 1$, r делит p^c, $r = p^{\bar{a}}$ и $Sp_{2d}(p^c) \simeq Y \trianglelefteq G_a$. Тогда $K = Z(T)$, $Y = (G_a)^\infty$, Y централизует K и T — это группа экспоненты p. Имеем

$$
\begin{aligned}
T = \big\langle & x_1, x_2, \ldots, x_e, z_1, z_2, \ldots, z_{\bar{a}} | {x_i}^p = {z_l}^p = 1, \\
& \qquad [x_i, z_l] = [z_m, z_l] = 1, \quad [x_i, x_j] = z_1^{\alpha_{ij1}} z_2^{\alpha_{ij2}} \cdot \ldots \cdot z_{\bar{a}}^{\alpha_{ij\bar{a}}}, \\
& \qquad\qquad i, j \in \{1, ..., e\}, \quad m, l \in \{1, ..., \bar{a}\} \big\rangle
\end{aligned}
$$

для некоторых чисел $\alpha_{ijl} \in \{1, \ldots, p\}$.

Так как $\bar{T}$ и K — это элементарные абелевы группы, то их можно отождествить с $\mathbb{GF}(p)$-векторными пространствами размерностей e и $\bar{a}$ соответственно. Отображение θ из

$\bar{T}\times\bar{T}$ в K, определенное по правилу $\theta(\bar{x},\bar{y})=[x,y]$, где $\bar{x}=xK$ и $\bar{y}=yK$, является знакопеременным $\mathbb{GF}(p)$-билинейным отображением пространства $\bar{T}$ в пространство K.

Положим $n=p^e$ и $\bar{T}=\{g_1,\ldots,g_n\}$. Обозначим через $\mathbb{Z}[K]$ групповое кольцо группы K над $\mathbb{Z}$. Для $M\subseteq K$ через $\underline{M}$ будем обозначать элемент из $\mathbb{Z}[K]$, равный $\sum\limits_{m\in M}1{\cdot}m$. Рассмотрим матрицу $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ над кольцом $\mathbb{Z}[K]$, которая определена по правилу $a_{i,j}=\underline{\theta(g_i,g_j)}$. Из равенства $\theta(\bar{y},\bar{x})=-\theta(\bar{x},\bar{y})$ следует, что матрица A — самосопряженная (см. [93, подраздел 4.1]). Кроме того, для матрицы $A^2=(\tilde{a}_{i,j})_{i,j=1}^n$ выполнено равенство

$$\tilde{a}_{i,j}=\sum_{l=1}^n 1\cdot\theta(g_ig_j^{-1},g_l).$$

Применим конструкцию из [93, подраздел 4.2] и рассмотрим граф Γ_T со множеством вершин $V(\Gamma_T)=K\times\bar{T}$, вершины (k_α,g_i) и (k_β,g_j) которого смежны тогда и только тогда, когда $\theta(g_i,g_j)=k_\alpha k_\beta^{-1}$ и $g_i\neq g_j$.

Поскольку $K=\langle\theta(g_i,g_j)|i,j\in\{1,\ldots,n\}\rangle$, получим, что $A-I$ — это накрывающая матрица (см. [93, подраздел 4.2]), и следовательно, граф Γ_T — это связное накрытие полного графа на n вершинах.

Для каждого $i\in\{1,\ldots,n\}$ зафиксируем элемент $w_i=x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_e^{i_e}$ из T такой, что $w_iK=g_i$ ($i_s\in\{1,\ldots,p\}$). Таким образом, $W=\{w_i\}_{i=1}^n$ — трансверсаль группы K в T. Будем также полагать $k_\alpha=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_{\bar{a}}^{\alpha_{\bar{a}}}$ ($\alpha_s\in\{1,\ldots,p\}$).

Отображение φ из T в $\mathrm{Aut}(\Gamma_T)$, определенное по правилу

$$((k_\alpha,g_i))\varphi(k_\sigma w_s)=(k_\sigma^{-2}z_1^{\delta_1}\cdots z_{\bar{a}}^{\delta_{\bar{a}}},g_ig_s),$$

где $\delta_m=\alpha_m+\delta_m(w_i,w_s)=\alpha_m+\sum\limits_{t<l}\alpha_{tl_m}(i_ts_l-s_ti_l-s_ts_l)$ ($m\in\{1,\ldots,\bar{a}\}$), задает регулярную группу $\varphi(T)$ автоморфизмов графа Γ_T.

Действительно, учитывая равенство

$$[v_i,v_j]=[v_ix_l^{-i_l},v_jx_l^{-j_l}]\prod_{t=1}^{l-1}[x_t,x_l]^{i_tj_l-j_ti_l},$$

где $v_i=x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_l^{i_l}$ и $v_j=x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_l^{j_l}$, $l\in\{2,\ldots,e\}$, получим, что вершины (k_α,g_i) и (k_β,g_j) смежны тогда и только тогда, когда $g_i\neq g_j$ и

$$[w_i,w_j]=\prod_{t<l}[x_t,x_l]^{i_tj_l-j_ti_l}=z_1^{\sum_{t<l}\alpha_{tl_1}(i_tj_l-j_ti_l)}\cdots z_{\bar{a}}^{\sum_{t<l}\alpha_{tl_{\bar{a}}}(i_tj_l-j_ti_l)}=z_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdots z_{\bar{a}}^{\alpha_{\bar{a}}-\beta_{\bar{a}}}$$

тогда и только тогда, когда $g_i\neq g_j$ и

$$[w_iw_s,w_jw_s]=\prod_{t<l}[x_t,x_l]^{(i_t+s_t)(j_l+s_l)-(j_t+s_t)(i_l+s_l)}=z_1^{\gamma_1}\cdots z_{\bar{a}}^{\gamma_{\bar{a}}},$$

где

$$\gamma_m=(\alpha_m+\sum_{t<l}\alpha_{tl_m}(i_ts_l-s_ti_l))-(\beta_m+\sum_{t<l}\alpha_{tl_m}(j_ts_l-s_tj_l))\quad(m\in\{1,\ldots,\bar{a}\}),$$

тогда и только тогда, когда смежны вершины $((k_\alpha, g_i))\varphi(w_s)$ и $((k_\beta, g_j))\varphi(w_s)$. Нетрудно проверить, что φ — мономорфизм и $\varphi(T)$ — регулярная группа.

Рассмотрим отображение ψ из Y в $\mathrm{Aut}(\Gamma_T)$, определенное по правилу $\psi(h) : (u, g_i) \mapsto (u, {g_i}^h)$ для всех $h \in Y$, $g_i \in \bar{T}$ и $u \in K$. Ясно, что $Y \simeq \psi(Y) \leq \mathrm{Aut}(\Gamma_T)$.

Пусть $sc : T \to K$ и $tr : T \to W$ — две функции, определяемые соотношением $g = sc(g)tr(g)$ для каждого $g \in T$.

Возьмем произвольно $h \in Y$ и $g \in T$. Тогда $g = k_\beta(w_s)^h$ для некоторых $k_\beta \in K$ и $w_s \in W$. Пусть $w_j = tr((w_s)^h)$. Ввиду тождества

$$[w_i, w_s] = z_1^{\delta_1(w_i,w_s)+\sum_{t<l}\alpha_{tl_1}s_ts_l} \cdots z_{\bar{a}}^{\delta_{\bar{a}}(w_i,w_s)+\sum_{t<l}\alpha_{tl_{\bar{a}}}s_ts_l} = \\ z_1^{\delta_1(tr({w_i}^h),w_j)+\sum_{t<l}\alpha_{tl_1}j_tj_l} \cdots z_{\bar{a}}^{\delta_{\bar{a}}(tr({w_i}^h),w_j)+\sum_{t<l}\alpha_{tl_{\bar{a}}}j_tj_l} = [{w_i}^h, {w_s}^h]$$

имеем

$$((k_\alpha, g_i))\psi(h)\varphi(g) = ((k_\alpha, {g_i}^h))\varphi(k_\beta(w_s)^h) = \\ ((k_\alpha, {g_i}^h))\varphi(k_\beta sc((w_s)^h)tr((w_s)^h)) = (((k_\beta sc((w_s)^h))^{-2}k_\alpha, {g_i}^h))\varphi(tr((w_s)^h)) = \\ (((k_\beta sc((w_s)^h))^{-2}k_\alpha z_1^{\delta_1(tr(w_i^h),tr(w_s)^h)} \cdots z_{\bar{a}}^{\delta_{\bar{a}}(tr(w_i^h),tr(w_s)^h)}, (g_ig_s)^h)) = \\ (((k_\beta sc((w_s)^h))^{-2}k_\alpha z_1^{\delta_1(tr(w_i^h),tr(w_s)^h)} \cdots z_{\bar{a}}^{\delta_{\bar{a}}(tr(w_i^h),tr(w_s)^h)}, g_ig_s))\psi(h) = \\ ((k_\alpha z_1^{\delta_1(tr(w_i^h),tr(w_s)^h)-\delta_1(w_i,w_s)} \cdots z_{\bar{a}}^{\delta_{\bar{a}}(tr(w_i^h),tr(w_s)^h)-\delta_{\bar{a}}(w_i,w_s)}, g_i))\varphi(k_\beta sc((w_s)^h)w_s)\psi(h) = \\ ((k_\alpha, g_i))\varphi(k_\gamma k_\beta sc((w_s)^h)w_s)\psi(h),$$

где ${k_\gamma}^{-2} = z_1^{\sum_{t<l}\alpha_{tl_1}(s_ts_l-j_tj_l)} \cdots z_{\bar{a}}^{\sum_{t<l}\alpha_{tl_{\bar{a}}}(s_ts_l-j_tj_l)}$. Такой элемент $k_\gamma \in K$ существует (поскольку $\langle {z_{\tilde{j}}}^2\rangle = \langle z_{\tilde{j}}\rangle$) и не зависит от выбора вершины $(k_\alpha, g_i) \in V(\Gamma_T)$. Отсюда $\psi(Y)$ нормализует $\varphi(T)$ и $\psi(Y) \leq \mathrm{Aut}(\varphi(T))$.

Ввиду [93, следствие 5.4] граф Γ_T дистанционно регулярен с массивом пересечений

$$\{p^e - 1, p^{e-\bar{a}}(p^{\bar{a}} - 1), 1; 1, p^{e-\bar{a}}, p^e - 1\}$$

тогда и только тогда, когда

$$\tilde{a}_{i,j} = \begin{cases} n\underline{e}, & \text{если } i = j, \\ p^{e-\bar{a}}\underline{K}, & \text{если } i \neq j \end{cases}.$$

Последнее условие равносильно тому, что для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$, справедливо равенство

$$\sum_{l=1}^{n} 1 \cdot \theta(g_ig_j^{-1}, g_l) = p^{e-\bar{a}}\underline{K},$$

эквивалентное тому, что для каждого элемента $x \in K$ и каждого элемента $g' \in \bar{T}^{\#}$ найдется ровно $p^{e-\bar{a}}$ элементов $g'' \in \bar{T}$ таких, что $\theta(g', g'') = x$.

Далее, действие группы Y на $\bar{T}$ сопряжениями эквивалентно действию ρ группы Y изометриями на векторном пространстве V размерности $2d$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{GF}(p^c)$ с невырожденной знакопеременной формой $\bar{\varphi}$. Пусть δ — биекция множества $\{g_1, ..., g_n\}$ на множество векторов пространства V такая, что $\delta({g_i}^x) = \delta(g_i)^{\rho(x)}$, где $i \in \{1, ..., n\}$ (при этом δ — изоморфизм групп $\bar{T}$ и $(V, +)$).

Так как группа Y транзитивна на множестве гиперболических пар пространства V и для заданных скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$ и ненулевого вектора $u \in V$ число векторов $v \in V$ таких, что $\bar{\varphi}(u, v) = \alpha$ равно p^{e-c}, то, по доказанному выше, множество $\bar{T}^2 = \bar{T} \times \bar{T}$ допускает разбиение, блоками которого являются множества вида $B_f = \{(g_i, g_j) \in \bar{T}^2 | \theta(g_i, g_j) = f\}$, где $f \in K$, причем в случае $\bar{a} = c$ получим, что $p^c - 1$ блоков B_f, отличных от B_1, являются несамоспаренными орбиталами группы Y на $\bar{T}^\#$.

Пусть $\bar{\psi}$ — это отображение $\mathbb{F}$ на K, заданное по правилу $\bar{\psi}(\bar{\varphi}(\delta(g_i), \delta(g_j))) = \theta(g_i, g_j)$, где $i, j \in \{1, ..., n\}$. Тогда $\psi(0_{\mathbb{F}}) = 1_T$ и

$$\tilde{B}_\alpha = \{(g_i, g_j) \in \bar{T}^2 | \bar{\varphi}(\delta(g_i), \delta(g_j)) = \alpha\} \subseteq B_{\bar{\psi}(\alpha)} = \{(g_i', g_j'') \in \bar{T}^2 | \theta(g_i', g_j'') = \bar{\psi}(\alpha))\},$$

а поскольку δ — изоморфизм $\bar{T}$ и $(V, +)$, то $\bar{\psi}$ — гомоморфизм $(\mathbb{F}, +)$ на K. Ясно, что $|\ker \bar{\psi}| = p^{c-\bar{a}}$ и поэтому для каждого элемента $f \in K$ и каждого элемента $g_i \in \bar{T}^\#$ имеем $|\{g_j \in \bar{T} | \theta(g_i, g_j) = f\}| = p^{e-\bar{a}}$. Поэтому граф Γ_T дистанционно регулярен и имеет вышеуказанный массив пересечений.

Предположим, что g_1 — это 2-элемент из $\widetilde{G} - \widetilde{G}_{\{F\}}$, переставляющий две смежные вершины графа Γ. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, Y, Yg_1Y)$. Тогда $g_1 = hgf$ для некоторых элементов $f \in K$ и $h \in Y$, где g — центральная инволюция стабилизатора некоторой вершины в $\widetilde{G}$, отличной от вершины Y. Но ${g_1}^2 = (hg)^2 f^2 \in Y$, а элемент $h^g f^2$ из Y фиксирует некоторый антиподальный класс, не содержащий вершину Y, что влечет $f = 1$ и $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, Y, YgY)$.

Пусть число $\bar{a}$ — максимальное из допустимых, то есть $r = p^c$. Тогда по доказательству леммы 2.22 группа $\widetilde{G}$ определена однозначно (с точностью до изоморфизма). Отсюда $\widetilde{G} \simeq \varphi(T)\psi(Y)$ — это универсальная накрывающая группа для $(TY)^\Sigma$ и как и выше устанавливается, что $\Gamma_T \simeq \Gamma(\widetilde{G}, Y, YgY)$. При этом граф Γ_T (а значит, и граф Γ) изоморфен дистанционно регулярному накрытию, получаемому с помощью конструкции Таса–Соммы (см. [40, предложение 12.5.1] или [67, конструкция 4.3]).

Далее, для любого собственного делителя $\tilde{r}$ числа p^c частное $\widetilde{\Gamma_T}$ графа Γ_T на множестве $\tilde{K}$-орбит, где $\widetilde{K}$ — это произвольная подгруппа индекса $\tilde{r}$ из K, является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений

$$\{p^e - 1, (\tilde{r} - 1)p^e/\tilde{r}, 1; 1, p^e/\tilde{r}, p^e - 1\}$$

из конструкции Годсила-Хензеля (см. [67, конструкция 6.4] или также [40, с.385, замечание (iv)]), и группа $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ действует транзитивно на дугах графа $\widetilde{\Gamma_T}$. При этом $T/\widetilde{K}$ — специальная группа порядка $\tilde{r}p^e$, регулярная на вершинах графа $\widetilde{\Gamma_T}$. По доказанному выше, специальная группа $\tilde{T}$ порядка $\tilde{r}p^e$ с $|Z(\tilde{T})| = \tilde{r}$, удовлетворяющая условию леммы, изоморфна группе T/N для некоторой нормальной в $\widetilde{G}$ подгруппы N из K.

Поэтому в случае $\bar{a} < c$ получим, что граф Γ может быть построен с помощью конструкции Годсила-Хензеля и изоморфен некоторому частному дистанционно регулярного накрытия Таса–Соммы, определенного для пространства V.

Лемма доказана.

Глава 3. Транзитивные на дугах квазипростые группы автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа диаметра 3

Данная глава посвящена описанию антиподальных д.р.г. диаметра 3, допускающих флаг-транзитивное действие группы $L_2(q)$, $Sz(q)$, ${}^2G_2(q)$, $U_3(q)$ или $SU_3(q)$.

В параграфе 3.1 доказываются теоремы 3.1 и 3.2.

Теорема 3.1. *Пусть $G \in \{Sz(q), {}^2G_2(q)\}$, где q — степень простого числа p, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $q > 3$. Пусть g — это инволюция из $G - N_G(S)$, $\langle h \rangle$ — это подгруппа нечетного индекса $r > 1$ из $N_G(S) \cap N_G(S)^g$ и $H = S\langle h \rangle$. Тогда $\Gamma(G, H, HgH)$ — это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

(1) $\{q^2, (q^2-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^2-1)/r, q^2\}$ *при* $G = Sz(q)$, *или*

(2) $\{q^3, (q^3-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$ *при* $G = {}^2G_2(q)$,

и $\Gamma(G, H, HgH)$ не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции $g \in G - N_G(S)$.

Теорема 3.2. *Пусть $G = Sz(q)$ и $q = 2^{2e+1} \geq 8$ или $G = {}^2G_2(q)$ и $q = 3^{2e+1} \geq 27$. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, где p — простой делитель числа q, g — это инволюция из $G - N_G(S)$, $\langle h \rangle$ — это подгруппа индекса $r = (q-1)_{2'}$ из $N_G(S) \cap N_G(S)^g$ и $H = S\langle h \rangle$. Пусть Ω — множество правых смежных классов группы G по H, $h_i = f^i$ и $h_{r+i} = gf^i$, где $i \in \{0, ..., r-1\}$. Для каждого $t \in \{0, ..., 2r-1\}$ зададим бинарное отношение R_t на Ω, полагая $(Hx, Hy) \in R_t$ в том и только том случае, если $xy^{-1} \in Hh_tH$. Тогда $\mathcal{X} = (\Omega, \{R_0, R_1, \ldots, R_{2r-1}\})$ — шурова схема, множество базисных отношений которой совпадает с набором орбиталов G на Ω и числа пересечений c_{ij}^t, где $0 \leq i, j, t \leq 2r-1$, схемы $\mathcal{X}$ таковы:*

$$c_{ij}^t = \begin{cases} |S|, & \text{если } t \leq r-1 < i, j, \ \text{и } j - i = t \pmod r, \\ (|S|-1)/r, & \text{если } i, j, t \geq r, \\ 1, & \text{если } i, j, t \leq r-1, \ \text{и } i + j = t \pmod r, \\ 1, & \text{если } i \leq r-1 < t, j, \ \text{и } j - i = t \pmod r, \\ 1, & \text{если } j \leq r-1 < t, i, \ \text{и } i + j = t \pmod r, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, для каждого $t \geq r$ граф $\Gamma(R_t)$ схемы $\mathcal{X}$ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений

$$\{|S|, (|S|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|S|-1)/r, |S|\},$$

где $|S| = q^2$ при $G = Sz(q)$ и $|S| = q^3$ при $G = {}^2G_2(q)$, при этом $\Gamma(R_r) \simeq \Gamma(R_t)$ и $\mathrm{Aut}(\Gamma(R_t)) = \mathrm{Aut}(G)$.

В параграфе 3.2 доказывается теорема 3.3.

Теорема 3.3. *Предположим, что группа $G \in \{U_3(q), SU_3(q)\}$, где q — степень простого числа p, действует флаг-транзитивно на антиподальном дистанционно регулярном графе Γ диаметра 3 с индексом антиподальности $r > 2$. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и H — это подгруппа из $N_G(S)$ индекса r. Пусть g — это 2-элемент из $G - N_G(S)$ такой, что $g^2 \in H$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей.*

(1) *r делит $q+1$, $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, Γ имеет массив пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$ и g — инволюция при четном q или элемент порядка 4 при нечетном q.*

(2) *r — нечетный делитель числа $q-1$, $\Gamma \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, Γ имеет массив пересечений $\{q^3, (q^3-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$ и g — инволюция.*

Различные конструкции графов из теорем 3.1 и 3.3 приводятся в параграфе 3.3 (см. предложения 3.4 и 3.5 ниже).

Пусть $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$, где $q = 2^n > 2$, Ω — класс сопряженных инволюций группы G и

$$\chi(G) = \begin{cases} 5, & \text{если } G = Sz(q) \\ 3, & \text{если } G \in \{L_2(q), U_3(q)\} \end{cases}.$$

Пара инволюций (x, y) группы G называется *отличимой*, если $|xy| = \chi(G)$. В работах М. Судзуки (см. [118] или [119]) показано, что G действует транзитивно на множестве всех отличимых пар инволюций.

Предложение 3.4. *Пусть $G \in \{L_2(q), Sz(q), U_3(q)\}$, $q = 2^n > 2$ и Δ — это орбитал группы G на множестве Ω ее инволюций, содержащий точку (x_1, x_2) такую, что $[x_1, x_2] \neq 1$. Тогда граф Γ на Ω, в котором вершины y_1 и y_2 смежны тогда и только тогда, когда $(y_1, y_2) \in \Delta$, является реберно симметричным антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений*

(1) *$\{q^3, q^3 - q^2 - q - 2, 1; 1, q^2 + q + 1, q^3\}$ при $G = U_3(q)$,*

(2) *$\{q^2, q^2 - q - 2, 1; 1, q + 1, q^2\}$ при $G = Sz(q)$, или*

(3) *$\{q, q-2, 1; 1, 1, q\}$ при $G = L_2(q)$ (в этом случае Γ изоморфен графу Мэтона $\mathrm{M}(q, q-1)$ (с таким же массивом пересечений)),*

и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора точки (x_1, x_2). В частности, граф Γ изоморфен графу на Ω, в котором вершины y_1 и y_2 смежны тогда и только тогда, когда $|y_1 y_2| = \chi(G)$ (что эквивалентно тому, что $\langle y_1, y_2\rangle \in \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ — (единственный) класс сопряженных диэдральных подгрупп порядка $2 \cdot \chi(G)$ группы G).

Пусть $G \in \{U_3(q), {}^2G_2(q)\}$, где $q > 3$ — некоторая степень простого нечетного числа p и $q \equiv 3 \pmod 4$. Пусть Ω — множество всех неединичных элементов из центров силовских p-подгрупп группы G. Пару элементов $\{x, x^{-1}\}$ для $x \in \Omega$ будем называть *инверсной* и обозначать через $\omega(x)$. Пусть $S, Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $S \neq Q$, $x \in S \cap \Omega$ и $y \in Q \cap \Omega$. Пара элементов

(x, y) — s*-отличимая*, если для некоторого числа s элемент y — единственный элемент из $\Omega \cap Q$ со свойством $|xy| = s$. Заметим, что для минимальных значений q группа G обладает s-отличимой парой в случаях, если $G = {}^2G_2(27)$ и $s = 9$, или $G = U_3(7)$ и $s \in \{3, 4, 6, 14\}$.

Предложение 3.5. *Пусть $G \in \{U_3(q), {}^2G_2(q)\}$, $q > 3$, $q \equiv 3 \pmod 4$ и Δ — это орбитал группы G на Ω, содержащий точку (x_1, x_2) такую, что $[x_1, x_2] \neq 1$. Тогда граф Γ на множестве инверсных пар группы G, в котором вершины $\omega(y_1)$ и $\omega(y_2)$ смежны $\Leftrightarrow$ Δ содержит (y_1, y_2) или (y_1, y_2^{-1}), является реберно симметричным антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений*

$$\{q^3, q^3 - 2q^2 - 2q - 3, 1; 1, 2(q^2 + q + 1), q^3\}$$

и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора точки (x_1, x_2). Кроме того, если (x_1, x_2) — это s-отличимая пара, то вершины $\omega(y_1)$ и $\omega(y_2)$ смежны в $\Gamma \Leftrightarrow |y_1 y_2| = s$ или $|y_1 y_2^{-1}| = s$.

В параграфе 3.4 описывается локальное строение некоторых графов Мэтона четной степени (которые, в свою очередь являются фактор-графами графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$) и доказывается теорема 3.6.

Теорема 3.6. *Пусть $q = 2^{2t} > 2$, $t \in \mathbb{N}$ и r — это неединичный делитель числа $q - 1$. Пусть $\mathrm{M}(q, r)$ — это граф Мэтона с массивом пересечений $\{q, (r-1)(q-1)/r, 1; 1, (q-1)/r, q\}$ и Δ — это локальный подграф графа $\mathrm{M}(q, r)$. Тогда Δ — это реберно симметричный граф и справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если r делит $2^t + 1$, то либо*

  (*i*) *$r = 2^t + 1$ и Δ — объединение 2^t изолированных 2^t-клик, либо*

  (*ii*) *$r < 2^t + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^t+1)(2^t-1)/r, ((2^t+1)/r-1)((2^t+1)/r-2)+2^t-2, (2^t+1)/r((2^t+1)/r-1)\big).$$

(2) *Если t четно и r делит $2^{t/2} + 1$, то либо*

  (*i*) *$r = 2^{t/2} + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^{t/2} - 1)(2^t + 1), 2^{t/2} - 2, 2^{t/2}(2^{t/2} - 1)\big),$$

  изоморфный аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$, либо

  (*ii*) *$r < 2^{t/2} + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$\big(2^{2t}, z(2^{t/2} - 1)(2^t + 1), z(2^{t/2} - 1)(3 + z(2^{t/2} - 1)) - 2^t, z(2^{t/2} - 1)(1 + z(2^{t/2} - 1))\big),$$

  являющийся объединением $z = (2^{t/2} + 1)/r$ графов, изоморфных аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$.

(3) *Если r — простой делитель числа $q-1$, 2 — примитивный элемент по модулю r и $(r-1)$ делит $2t$, то Δ — сильно регулярный граф (ранга 3) с параметрами*

$$\big(2^{2t}, (2^{2t}-1)/r, (2^{2t}-3r+1+\epsilon(r-1)(r-2)2^t)/r^2, (2^{2t}-r+1-\epsilon(r-2)2^t)/r^2\big),$$

где $\epsilon = (-1)^{2t/(r-1)+1}$, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта–Шрайвера.

Кроме того, в параграфе 3.4 устанавливается характеризуемость некоторых графов Мэтона своими массивами пересечений в классе вершинно-транзитивных д.р.г.

Теорема 3.7. *Пусть Γ — вершинно-транзитивный дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений $\{n-1,(r-1)c_2,1;1,c_2,n-1\}$ и $n = rc_2+2$ — простое число Ферма. Если число r — простое, то $\Gamma \simeq \mathrm{M}(n-1,r)$.*

Глава 3 завершается исследованием вопроса единственности реберно симметричного дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$ (его существование следует из результатов § 3.2). В параграфе 3.5 доказывается предложение 3.8 и теорема 3.9.

Предложение 3.8. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2,3,7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф и либо*

  (i) *$p = 7$, $\alpha_1(g) = 84s+28$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$, $\alpha_3(g) = 0$, либо*

  (ii) *$p = 2$, $\alpha_3(g) = 8s$ и $\alpha_1(g) = 24l+16s-8$ для некоторых $s,l \in \mathbb{Z}$;*

(2) *$p = 3$ и либо Ω является 4-кликой, $\alpha_3(g) = 12$, $\alpha_1(g) = 24+36l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$, либо Ω лежит в антиподальном классе и $|\Omega| \in \{1,4\}$;*

(3) *$p = 2$, Γ содержит $t \geq 2$ антиподальных классов пересекающих Ω по s вершинам, t четно и либо $s = 4$ и $t \leq 8$, либо $s = 2$ и $t \leq 16$.*

Теорема 3.9. *Пусть Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Пусть $U = U_3(3)$, $S,Q \in \mathrm{Syl}_3(U), S \neq Q$, $L = N_U(S) \cap N_U(Q)$ и g — это элемент порядка 4 из $N_U(L) - L$. Положим $H = S\langle g^2\rangle$. Тогда $\Gamma \simeq \Gamma(U,H,HgH)$ и $G'' \simeq U$.*

Результаты главы опубликованы в статьях [149, 146, 142, 144].

§ 3.1. Дистанционно регулярные графы смежных классов групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$

Сначала мы приведем некоторые вспомогательные результаты и затем докажем основные результаты параграфа.

Предложение 3.10 ([117, 119]). *Пусть $G = Sz(q)$, где $q > 2$, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $M = N_G(S)$ и g — это инволюция группы G, не лежащая в S. Тогда $G = \langle S, g\rangle$ и справедливы следующие утверждения.*

(1) *$M = S : K$, где $K = M \cap M^g$, $1 = S \cap M^g$, $K \simeq Z_{q-1}$ и $|S| = q^2$.*

(2) *$G = M \cup MgS$ и каждый элемент из $G - M$ может быть единственным образом представлен в виде xgy, где $x \in M$ и $y \in S$.*

(3) *$K\langle g\rangle \simeq D_{2(q-1)}$.*

(4) *S содержит точно $q-1$ инволюций. Все инволюции из S порождают $Z(S)$ и $|Z(S)| = q$.*

(5) *G имеет единственный класс сопряженных инволюций и $C_G(s) = S$ для любой инволюции $s \in S$.*

Предложение 3.11 ([12, 128]). *Пусть $G = {}^2G_2(q)$, где $q > 3$, $S \in \mathrm{Syl}_3(G)$, $M = N_G(S)$ и g — это инволюция группы G, не лежащая в M. Тогда $G = \langle S, g\rangle$ и справедливы следующие утверждения.*

(1) *$M = S : K$, где $K = M \cap M^g$, $1 = S \cap M^g$, $K \simeq Z_{q-1}$ и $|S| = q^3$.*

(2) *$G = M \cup MgS$ и каждый элемент из $G - M$ может быть единственным образом представлен в виде xgy, где $x \in M$ и $y \in S$.*

(3) *$K = A_0 \times \langle h\rangle$, где h это единственная инволюция из K, $(q-1)/2$ нечетно, и $N_G(A_0) \simeq D_{2(q-1)}$.*

(4) *G имеет единственный класс сопряженных инволюций.*

(5) *$C_S(h) = C_{S_1}(h)$ это элементарная абелева группа порядка q и $C_S(h) \cap Z(S) = 1$, причем $S_1 = S^{(1)}$.*

(6) *$C_S(x) = 1$ для каждого $x \in A_0$.*

§§ 3.1.1. Доказательство теоремы 3.1

Приступим к доказательству теоремы 3.1. Положим $M = N_G(S)$. Пусть r — это максимальный нечетный делитель числа $|M \cap M^g|$. Имеем $M \cap M^g = \langle h\rangle \times A$, где $|A| = r$ и $|h| = (q-1)/r$. Пусть $H = S\langle h\rangle$, $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$, $A = \langle f\rangle$ и $L = \langle f\rangle\langle g\rangle$. Тогда $L \simeq D_{2r}$.

Далее, пусть $\Sigma = \{\{Hm(gs)^e|\, m \in M\}|\, s \in S, e \in \{0, 1\}\}$. Ввиду предложений 3.10,3.11 и 1.5 получим, что Γ — это реберно симметричное r-накрытие полного графа $\Gamma/_\Sigma \simeq K_{|S|+1}$. Теперь, покажем, что существует постоянная μ такая, что любые две вершины из разных фибр графа Γ имеют в точности μ общих соседей. Чтобы это показать, мы рассмотрим действие L на множестве вершин графа Γ.

Через $F(Hx)$ далее будем обозначать фибру графа Γ, содержащую вершину Hx. Имеем $F(H) = \{Hf^i\}_{i=1}^r$ и $F(Hg) = \{Hgf^i\}_{i=1}^r$.

Для удобства, мы будем использовать также следующие обозначения для вершин из фибр $F(H)$ и $F(Hg)$:

$$\bar{a}_1 = H, \bar{a}_2 = Hf, ..., \bar{a}_r = Hf^{r-1} \text{ и } \bar{b}_1 = Hg, \bar{b}_2 = Hgf, ..., \bar{b}_r = Hgf^{r-1}.$$

Ясно, что $\bar{a}_i \in [\bar{b}_i]$ для всех $i \in \{1, .., r\}$. Для произвольных фибры $F \in \Sigma$, элемента $y \in G$ и вершины $Hx = \bar{a} \in F$ мы полагаем $\bar{a}y = Hxy$ и $Fy = F(\bar{a}y)$. Если Δ — это подмножество вершин графа Γ, тогда через Δg мы будем обозначать множество образов вершин из Δ относительно действия элементом g.

Напомним, что стабилизатор любых трех точек в G в ее дважды транзитивном представлении тривиален при $G = Sz(q)$, см. [117] или [119], или имеет единственный нетривиальный элемент, фиксирующий более двух точек (а именно, он фиксирует ровно $q+1$ точек) при $G = {}^2G_2(q)$, см. [128] или [12]. Поскольку G имеет единственный класс сопряженных инволюций, получим, что элемент g фиксирует (поточечно) ровно w фибр из Σ, где $w = 1$ при $G = Sz(q)$ или $w = q+1$ при $G = {}^2G_2(q)$.

Лемма 3.12. *Число $\langle f \rangle$-орбит на $\Sigma - \{F(H), F(Hg)\}$ равно $(|S|-1)/r$. Имеется ровно одна L-орбита длины 2 на Σ (а именно, орбита $\{F(H), F(Hg)\}$), ровно w L-орбит длины r на Σ и длина любой другой L-орбиты на Σ равна $2r$.*

Доказательство. Это следует из предложений 3.10 и 3.11.

Лемма 3.13. *Предположим, что L_r — это L-орбита на Σ длины r и определим Δ как множество всех вершин, которые лежат в объединении фибр из орбиты L_r. Тогда для всех $i, j \in \{1, .., r\}$ каждая вершина $\bar{b}_j$ смежна с единственной вершиной из $[\bar{a}_i] \cap \Delta$.*

Доказательство. Рассмотрим действие L на Δ. Элемент g фиксирует только одну фибру из L_r, которая далее обозначается посредством F_1. Каждая $\langle f \rangle$-орбита на Δ содержит только одну вершину из каждой фибры из Δ и окрестность каждой вершины из $F(H)$ содержит только одну вершину из каждой $\langle f \rangle$-орбиты на Δ. Элемент g фиксирует каждую $\langle f \rangle$-орбиту на Δ поточечно, фиксируя в ней ровно одну вершину (которая лежит в F_1).

Пусть $F_1 = F(Hgs) = \{Hgf^js\}_{j=1}^r$ для некоторого $s \in S$. Тогда $Hgf^jsg = Hgf^js$ для всех $j \in \{1, .., r\}$. Имеем

$$(\bar{a}_{j+1}g, \bar{b}_{j+1}g) = (Hf^jg, Hgf^jg) = (Hgf^{-j}, Hf^{-j}) = (\bar{b}_{r-j+1}, \bar{a}_{r-j+1})$$

для всех $1 \le j < r$ и $(\bar{a}_1g, \bar{b}_1g) = (\bar{b}_1, \bar{a}_1)$. Поэтому

$$Hgf^js = Hgf^jsg \in [Hf^j] \cap [Hf^jg] = [\bar{a}_{j+1}] \cap [\bar{b}_{r-j+1}]$$

для всех $1 \le j < r$. Так как $\bar{a}_{j+1} = \bar{a}_1f^j$ и $\bar{b}_{r-j+1} = \bar{b}_1f^{-j}$, то

$$Hgf^jsf^{-j} \in [\bar{a}_{j+1}f^{-j}] \cap [\bar{b}_{r-j+1}f^{-j}] = [\bar{a}_1] \cap [\bar{b}_1f^{-2j}]$$

для всех $1 \le j < r$. Предположим, что $\bar{b}_1 f^{-2j_1} = \bar{b}_1 f^{-2j_2}$ для некоторых $j_1, j_2 \in \{1,..,r\}$ таких, что $j_1 < j_2$. Тогда $2(j_2 - j_1) = lr$ для некоторого целого l, поэтому $l = 0$, противоречие.

Следовательно, для всех $j \in \{1,..,r\}$ каждая вершина $\bar{b}_j$ смежна ровно с одной вершиной в $[\bar{a}_1] \cap \Delta$. Аналогичными рассуждениями, получим, что для всех $i, j \in \{1,..,r\}$ каждая вершина $\bar{b}_j$ смежна ровно с одной вершиной из $[\bar{a}_i] \cap \Delta$.

Лемма 3.14. *Предположим, что L_{2r} — это L-орбита на Σ длины $2r$ и определим Δ как множество вершин, которые лежат в объединении фибр из одной и той же произвольной $\langle f \rangle$-орбиты на L_{2r}. Тогда для всех $i, j \in \{1,..,r\}$ каждая вершина $\bar{b}_j$ смежна ровно с одной вершиной из $[\bar{a}_i] \cap \Delta$ и ровно с одной вершиной из $[\bar{a}_i] \cap \Delta g$.*

Доказательство. Пусть $D = \Delta \cup \Delta g$. Рассмотрим теперь действие L на D. Выберем две вершины $Hgs, Hgs_1 \in D$, где элементы $s, s_1 \in S$ такие, что фибры $F(Hgs)$ и $F(Hgs_1)$ принадлежат различным $\langle f \rangle$-орбитам на Σ. В L найдется инволюция gf^α, где $\alpha \in \{1,..,r\}$, такая, что $F(Hgsgf^\alpha) = F(Hgs_1)$. Очевидно, $F(Hgf^\alpha) = F(Hg)$.

Рассмотрим структуру паросочетания между фибрами $F(Hg)$ и $F(Hgs_1)$. Имеем $Hgf^isgf^\alpha \in [Hf^igf^\alpha]$ для всех $i \in \{1,..,r\}$, и $\{Hgf^js_1\}_{j=1}^r = \{Hgf^jsgf^\alpha\}_{j=1}^r$. Более того, $Hgs_1 = Hgf^\beta sgf^\alpha$ для некоторого $\beta \in \{1,..,r\}$. Элемент $gsg \in G - M$ может быть представлен единственным образом в виде mgs_0, где $m \in M, s_0 \in S$. Пусть $m = s_2 f^\delta h^\gamma$, где $s_2 \in S, \delta \in \{1,..,r\}, \gamma \in \{1,..,(q-1)/r\}$. Тогда

$$Hgf^\beta sgf^\alpha = Hf^{-\beta}gsgf^\alpha = Hf^{-\beta}mgs_0f^\alpha = Hf^{-\beta}s_2f^\delta h^\gamma gs_0f^\alpha$$

$$= Hf^{-\beta}f^\delta gf^\alpha \tilde{s}_0 = Hf^{\delta-\beta-\alpha}g\tilde{s}_0 = Hgs_1$$

для некоторого $\tilde{s}_0 \in S$. Следовательно, $\tilde{s}_0 = s_1$ и $f^{\delta-\beta-\alpha} \in H$. Поэтому $f^\alpha s_1 = s_0 f^\alpha$ и r делит $\delta - \beta - \alpha$.

Далее,

$$Hgf^tsgf^\alpha = Hf^{-t}gsgf^\alpha = Hf^{-t}mgs_0f^\alpha = Hf^{-t}s_2f^\delta h^\gamma gf^\alpha s_1 = Hf^{\delta-\alpha-t}gs_1$$

для любого $t \in \{1,..,r\}$. Тогда

$$Hgf^is_1 = Hgf^jsgf^\alpha$$

для некоторых $i, j \in \{1,..,r\}$ тогда и только тогда, когда

$$Hf^{\delta-\alpha-j}gs_1 = Hf^{-i}gs_1$$

тогда и только тогда, когда r делит $\delta - \alpha - j + i - (\delta - \beta - \alpha) = \beta + i - j$. Поэтому

$$Hgf^is_1(= Hgf^{\beta+i}sgf^\alpha) \in [Hf^{\beta+i}gf^\alpha] \cap [Hf^i] = [\bar{b}_1 f^{\alpha-\beta-i}] \cap [\bar{a}_1 f^i]$$

и

$$Hgf^{\beta+i}s \in [Hf^{\beta+i}] \cap [Hf^igf^\alpha] = [\bar{a}_1 f^{\beta+i}] \cap [\bar{b}_1 f^{\alpha-i}]$$

для всех $i \in \{1,..,r\}$. Тогда для всех $i \in \{1,..,r\}$ выполняются следующие включения

$$Hgf^is_1f^{-i} \in [\bar{b}_1 f^{\alpha-\beta-2i}] \cap [\bar{a}_1]$$

и

$$Hgf^{\beta+i}sf^{-(\beta+i)} \in [\bar{a}_1] \cap [\bar{b}_1 f^{\alpha-\beta-2i}].$$

Предположим, что $\bar{b}_1 f^{\alpha-\beta-2i_1} = \bar{b}_1 f^{\alpha-\beta-2i_2}$ для некоторых $i_1, i_2 \in \{1,..,r\}$ таких, что $i_1 < i_2$. Тогда $\alpha-\beta-2i_1 = \alpha-\beta-2i_2+lr$ для некоторого целого l, поэтому $2(i_2-i_1) = lr$ и $l=0$, противоречие. Следовательно, для всех $j \in \{1,..,r\}$ каждая вершина $\bar{b}_j$ смежна ровно с одной вершиной $[\bar{a}_1] \cap \Delta$ и ровно с одной вершиной из $[\bar{a}_1] \cap \Delta g$. Как и выше, получим, что для всех $i, j \in \{1,..,r\}$ каждая вершина $\bar{b}_j$ смежна ровно с одной вершиной из $[\bar{a}_i] \cap \Delta$ и ровно с одной вершиной из $[\bar{a}_i] \cap \Delta g$.

Ввиду лемм 3.12-3.14 для всех $i, j \in \{1,..,r\}$ имеем $|[\bar{a}_i] \cap [\bar{b}_j]| = (|S|-1)/r$. Из 2-транзитивности G на Σ заключаем, что любые две вершины графа Γ из разных фибр имеют ровно $\mu = (|S|-1)/r$ общих соседей. Таким образом, Γ — это реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{|S|, (|S|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|S|-1)/r, |S|\}$. Покажем теперь, что Γ допускает дистанционно регулярные частные.

Лемма 3.15. *Для каждого собственного делителя t числа r и группы $H_0 = H\langle f^t \rangle$ граф $\Gamma(G, H_0, H_0gH_0)$ является реберно симметричным д.р.г. с массивом пересечений $\{|S|, (|S|-1)(t-1)/t, 1; 1, (|S|-1)/t, |S|\}$.*

Доказательство. Ясно, что $\langle f^t \rangle$-орбита на $F(H)$, содержащая вершину H, является блоком импримитивности группы G на множестве вершин графа Γ. Поэтому множество $\pi = \{\{Hxm(gs)^e | \ x \in H_0\} | \ m \in M, s \in S, e \in \{0,1\}\}$ образует систему импримитивности группы G на вершинах графа Γ. Более того, разбиение π является равномерным. По [67, теорема 6.2] имеем, что $\Gamma' = \Gamma/\pi$ — это антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{r\mu+1, (t-1)r\mu/t, 1; 1, r\mu/t, r\mu+1\}$. Поскольку H действует транзитивно на тех блоках системы π, которые содержат соседей вершины H в Γ, получим, что G действует транзитивно на дугах графа Γ' и по предложению 1.5, $\Gamma' \simeq \Gamma(G, H_0, H_0gH_0)$.

Так как $\langle f \rangle = \langle f^2 \rangle$ и отображение $Hy \mapsto Hy^{f^t}$ индуцирует изоморфизм графов $\Gamma(G, H, HgH)$ и $\Gamma(G, H, Hgf^{2t}H)$ для любого $t \in \{1, ..., r\}$, то Γ не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции $g \in G - M$. Аналогичное утверждение справедливо и для графа $\Gamma(G, H_0, H_0gH_0)$. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.16. Заметим, что полевые автоморфизмы группы G индуцируют автоморфизмы графа $\Gamma := \Gamma(G, H, HgH)$ из заключения теоремы 3.1, так что $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Действительно, пусть φ — автоморфизм Фробениуса поля $K := \mathbb{F}_q$. Рассмотрев матричное представление G над K размерности 4 для $G = Sz(q)$ или 7 для $G = {}^2G_2(q)$, легко проверить, что в обоих случаях инволюцию g можно выбрать так, что $g^\varphi = g$ и $\varphi \in N_{\mathrm{Aut}(G)}(H)$. При таком выборе g очевидно, что отображение $Hy \mapsto Hy^\varphi$ индуцирует нетривиальный автоморфизм графа Γ и так как $\mathrm{Aut}(G)$ действует точно на G/H, то, учитывая теорему 1.16 и что $\mathcal{CG}(\Gamma) = 1$ ввиду [19], получаем $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

§§ 3.1.2. Доказательство теоремы 3.2

Приступим к доказательству теоремы 3.2. Пусть G, M, S, r определены как в теореме 3.2. Тогда G действует 2-транзитивно на $\mathrm{Syl}_p(G)$ и S имеет дополнение K в M, которое является циклической подгруппой порядка $q-1$, при этом можно считать, что $K = M \cap M^g$ для некоторой инволюции g из $G-M$, так что $K\langle g\rangle \simeq D_{2(q-1)}$. Зафиксируем элемент f порядка r из K и подгруппу H в M индекса r. Тогда $K = \langle h\rangle \times \langle f\rangle$, где $h = 1$ при $G = Sz(q)$ (то есть f порождает K) и h — (единственная) инволюция из K при $G = {}^2G_2(q)$.

Положим $S^\# = S - \{1\}$. Пусть $\tau, \sigma : S^\# \to S$ и $\eta : S^\# \to K$ — это три функции, определенные с помощью канонической формы элементов в G по правилу $gsg = \tau(s)\eta(s)g\sigma(s)$ для всех $s \in S^\#$. Для удобства мы будем отождествлять группу G с подгруппой из $\mathrm{Sym}(\Omega)$, индуцируемой действием G (правым умножением) на Ω.

Для того чтобы определить числа пересечений рассматриваемых далее схем, нам потребуется исследовать поведение функции η. Рассмотрим разбиение $\mathcal{P}$ множества S^2 на классы $C_0, C_1, \dots C_r$, определенные следующим образом:

$$C_0 = \{(x,x)|x \in S\} \text{ и } C_i = \{(x,y) \in S^2|x \neq y \text{ и } \eta(xy^{-1}) \in f^i\langle h\rangle\} \text{ для всех } 1 \leq i \leq r.$$

Очевидно, что $\eta(xy^{-1}) = \eta(xs(ys)^{-1})$ для всех элементов x, y и s из S таких, что $x \neq y$, и поэтому для каждого $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ класс C_i замкнут относительно действия группы S правыми сдвигами на самой себе. Таким образом, S действует регулярно на C_0 и полурегулярно на C_i при $i > 0$. Так как $\eta(s^{-1}) = \eta(s)$ для всех $s \in S^\#$, то каждый класс C_i совпадает с $C_i{}^* = \{(y,x) \in S^2|(x,y) \in C_i\}$. Кроме того, действие сопряжениями группы K на S индуцирует транзитивную группу подстановок на $\mathcal{P} - \{C_0\}$, поскольку $\langle h, f^2\rangle = K$ и $\eta(s^f) = f^2\eta(s)$ для всех $s \in S^\#$ ввиду равенства

$$gs^fg = fgsgf^{-1} = \tau(s)^{f^{-1}} f^2\eta(s)g\sigma(s)^{f^{-1}}.$$

Отсюда классы $C_1, \dots C_r$ имеют одинаковый размер, равный $|S^2 - C_0|/r = |S|(|S|-1)/r$, в частности, для каждого $j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ существует ровно $(|S|-1)/r$ элементов $s \in S^\#$ таких, что $\eta(s) \in f^j\langle h\rangle$.

Положим $h_i = f^i$ и $h_{r+i} = gf^i$ для всех $i \in \{0, ..., r-1\}$. Для каждого $t \in \{0, ..., 2r-1\}$ зададим бинарное отношение R_t на Ω, полагая

$$(Hx, Hy) \in R_t \Leftrightarrow xy^{-1} \in Hh_tH.$$

Учитывая разложение $G = \bigcup\limits_{t=0}^{2r-1} Hh_tH$, получим, что $\mathcal{R} = \{R_0, ..., R_{2r-1}\}$ является разбиением множества Ω^2.

По определению, $R_t = \{(Hf^ty, Hy)|y \in G\}$ при $0 \leq t \leq r-1$, и $R_t = \{(Hgf^ty, Hy)|y \in G\}$ при $r \leq t \leq 2r-1$. Таким образом, $\mathcal{R}$ совпадает со множеством орбиталов G на Ω. Значит, $\mathcal{X} = (\Omega, \mathcal{R})$ — шурова схема.

Теперь найдем числа пересечений c_{ij}^t схемы $\mathcal{X}$.

Пусть $t \le r-1$. Тогда неравенство $Hh_i^{-1}Hf^t \cap Hh_jH \ne \varnothing$ может иметь место только в случаях, когда либо $i, j \le r-1$, либо $i, j \ge r$.

Если $i, j \le r-1$, то $Hf^{-i+t} = Hf^j \Leftrightarrow i+j \equiv t \pmod r$ и поэтому число Hx таких, что $Hx \subseteq Hh_i^{-1}Hf^t \cap Hh_jH$ очевидно равно 1.

Если $i, j \ge r$, то для $i' = i-r$ и $j' = j-r$ имеем $Hf^{i'+t} = Hf^{j'} \Leftrightarrow i+t \equiv j \pmod r$ и поэтому число Hx таких, что $Hx \subseteq Hh_i^{-1}Hf^t \cap Hh_jH = Hgf^iHf^t \cap Hgf^jH$ равно $|S| = |Hgf^jH : Hx|$.

Поэтому для всех $t \le r-1$ имеем

$$c_{ij}^t = \begin{cases} |S|, & \text{если } j-i \equiv t \pmod r \text{ и } i, j \ge r, \\ 1, & \text{если } i+j \equiv t \pmod r \text{ и } i, j \le r-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь пусть $t \ge r$. Тогда неравенство $Hh_i^{-1}Hf^t \cap Hh_jH \ne \varnothing$ может иметь место только в случаях, когда либо $i \le r-1$ и $j \ge r$, либо $j \le r-1$ и $i \ge r$, либо $i, j \ge t$.

Если $i \le r-1$ и $j \ge r$, то

$$Hgf^{t+i} \subseteq Hgf^jH \Leftrightarrow t+i \equiv j \pmod r$$

и поэтому число Hx таких, что $Hx \subseteq Hh_i^{-1}Hgf^t \cap Hh_jH = Hf^{i-t}g \cap Hgf^jH$ равно 1.

Если $i \ge r$ и $j \le r-1$, то

$$\varnothing \ne Hgf^iHgf^t \cap Hf^j \Leftrightarrow Hgf^igf^t = Hf^j \Leftrightarrow i+j \equiv t \pmod r$$

и поэтому число Hx таких, что $Hx \subseteq Hh_i^{-1}Hgf^t \cap Hh_jH = Hgf^iHgf^t \cap Hf^j$ снова равно 1.

Наконец, если $i, j \ge r$, то

$$\varnothing \ne Hgf^iHgf^t \cap Hgf^jH \Leftrightarrow gf^ih^lsgf^t = \tau(s)^{f^ih^l}f^{-i}h^l\eta(s)f^{-t}g\sigma(s)^{f^t} = uh^mf^{-j}gv$$

для некоторых $l, m \in \{0, 1\}$ и элементов s, u, v из S. Последнее равенство влечет $\eta(s) = f^{i-j+t}h^{m-l}$ и по доказанному выше число Hx таких, что

$$Hx \subseteq Hh_i^{-1}Hgf^t \cap Hh_jH = Hgf^iHgf^t \cap Hgf^jH$$

равно $(|S|-1)/r$.

Поэтому для всех $t \ge r$ имеем

$$c_{ij}^t = \begin{cases} (|S|-1)/r, & \text{если } i, j \ge r, \\ 1, & \text{если } j-i \equiv t \pmod r \text{ и } i \le r-1, j \ge r, \\ 1, & \text{если } i+j \equiv t \pmod r \text{ и } i \ge r, j \le r-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\Gamma(R_t) = (\Omega, R_t)$ — граф базисного отношения R_t и $t \ge r$. В этом случае ${R_t}^* = R_t$ и, отождествив графы $\Gamma(R_t)$ и $\Gamma(G, H, Hgf^tH)$, можно полагать, что $\Gamma(R_t)$ — неориентированный граф с транзитивной на дугах группой автоморфизмов G. Согласно теореме 3.1

для каждого $t \geq r$ граф $\Gamma(R_t)$ схемы $\mathcal{X}$ является антиподальным дистанционно-регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений $\{|S|, (|S|-1)(r-1)/r, 1; 1, (|S|-1)/r, |S|\}$. Кроме того, как следует из теоремы 3.1, графы $\Gamma(R_t)$ попарно изоморфны для всех $t \geq r$, при этом $\mathrm{Aut}(\Gamma(R_t)) = \mathrm{Aut}(G)$.

Ясно, что $G \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ (по определению, $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}) = \{\varphi \in \mathrm{Sym}(\Omega) | R^\varphi = R$ для всех $R \in \mathcal{R}\})$.

Заметим также, что дистанционная регулярность графа $\Gamma(R_t)$ следует из найденных выше свойств чисел пересечений схемы $\mathcal{X}$. Действительно, отношение $\mathcal{A} = R_0 \cup R_1 \cup \ldots \cup R_{r-1}$ на Ω является отношением эквивалентности, классы которого отвечают максимальным блокам импримитивности группы G на Ω, на которых G действует 2-транзитивно. Теперь, рассмотрев числа пересечений схемы $\mathcal{X}$, получим, что граф $\Gamma(R_t)$ является r-накрытием полного графа на $|S|+1$ вершинах (поскольку вершины графа $\Gamma(R_t)$ из одного и того же произвольного класса отношения $\mathcal{A}$ индуцируют r-коклику в $\Gamma(R_t)$, а объединение любых двух различных классов отношения $\mathcal{A}$ индуцирует совершенное паросочетание в $\Gamma(R_t)$) и к тому же, что любые две вершины из различных классов отношения $\mathcal{A}$ имеют ровно $(|S|-1)/r$ общих соседей в $\Gamma(R_t)$.

Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.17. Результат теоремы 3.2 позволяет найти произведение векторов алгебры смежности схемы $\mathcal{X}$, а также структурные константы изоморфной ей алгебры Гекке $\mathbb{C}(H\backslash G/H)$ группы G относительно H (см., например, [1]). Так, структурная константа $m_{h_t}(h_i, h_j) = |\{Hx \in \Omega | \ Hx \subseteq Hh_i^{-1}Hh_t \cap Hh_jH\}|$ последней — это в точности число пересечений c_{ij}^t схемы $\mathcal{X}$ для всех $0 \leq i, j, t \leq 2r-1$.

§ 3.2. Дистанционно регулярные графы смежных классов групп $U_3(q)$ и $SU_3(q)$

В этом параграфе мы полностью опишем антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3, которые допускают флаг-транзитивное действие группы $U_3(q)$ или $SU_3(q)$.

Приведем сначала некоторые определения и вспомогательные результаты.

В двух предложениях ниже приводятся некоторые общие свойства 3-мерных проективных унитарных групп, а также 2-мерных проективных линейных групп четной характеристики, которые нам понадобятся в этом и следующем параграфах.

Предложение 3.18 (см., например, [117, 118]). *Пусть $G \in \{\mathrm{PGU}_3(q), \mathrm{PSL}_2(q)\}$, где $q > 2$ — это степень 2, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $M = N_G(S)$ и g — это инволюция из $G - S$. Тогда $G^{(1)} = \langle S, g\rangle$ и справедливы следующие утверждения.*

(1) *$M = S{:}K$, где $K = M \cap M^g$, $1 = S \cap M^g$ и $(G, |S|) \in \{(\mathrm{PSL}_2(q), q), (\mathrm{PGU}_3(q), q^3)\}$ [118, леммы 3–5]. Если $G = \mathrm{PGU}_3(q)$, то $K \simeq Z_{q^2-1}$. Если $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, то $K \simeq Z_{q-1}$.*

(2) *$G = M \cup MgS$ и каждый элемент из $G - M$ может быть единственным образом представлен в виде xgy, где $x \in M$ и $y \in S$ [118, лемма 6].*

(3) *$K = UV$, где $U = \{x \in K\colon\ gxg = x^{-1}\}$, $|U| = q-1$ и $V = \{x \in K\colon\ xg = gx\} = C_G(g) \cap K$, см. [118, с. 517, 528].*

(4) *S содержит ровно $q-1$ инволюций. Все инволюции из S порождают $Z(S)$ и $|Z(S)| = q$ [118, лемма 22].*

(5) *G имеет единственный класс сопряженных инволюций [118, лемма 19]. Если $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, то $V = 1$ и $C_G(a) = S$ для любой инволюции $a \in S$. Если $G = \mathrm{PGU}_3(q)$, то $|V| = q+1$ и $C_G(a) = SV$ для любой инволюции $a \in S$.*

Предложение 3.19 (см., например,[120])**.** *Пусть $G = \mathrm{PGU}_3(q)$, где q — это степень простого нечетного числа p, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $M = N_G(S)$ и g — инволюция из $G - M$. Тогда $G^{(1)} = \langle S, g\rangle$ и справедливы следующие утверждения.*

(1) *$M = S{:}K$, где $K = M \cap M^g \simeq Z_{q^2-1}$, $1 = S \cap M^g$, и $|S| = q^3$ [120, с. 1–2].*

(2) *$G = M \cup MgS$ и каждый элемент из $G - M$ может быть единственным образом представлен в виде xgy, где $x \in M$ и $y \in S$ [120, лемма 1].*

(3) *Если h — это элемент из K такой, что $h^g \neq h$, то $C_G(h) \leq K$ [120, лемма 2].*

(4) *$|C_K(g)| = q+1$ и для каждого $x \in K$ выполнено равенство $gxg = x^{-q}$[120, леммы 6–7].*

(5) *G имеет единственный класс сопряженных инволюций, см. [120, с. 4, 5].*

(6) *$|Z(S)| = q$ и если x — это инволюция из K, то $C_S(x) = Z(S)$ [120, лемма 9].*

(7) *Пусть W — это подгруппа максимального порядка в K такая, что $C_G(W) \cap S \neq 1$. Тогда $|W| = q+1$ и $C_S(W) = Z(S)$ [120, лемма 9].*

Перейдем к доказательству теоремы 3.3.

Далее в этом параграфе мы используем следующие обозначения. Положим $G_1 = \mathrm{PGU}_3(q)$, где $q = p^n > 2$ — это степень простого числа p, $G = {G_1}^{(1)}$, S — это силовская p-подгруппа из G_1 и $M_1 = N_{G_1}(S)$.

Пусть E — это квадратичное расширение поля F из q элементов. Обозначим через V 3-мерное векторное пространство над E, снабженное невырожденной эрмитовой формой B. Зафиксируем упорядоченный базис $\{e_1 = (1,0,0),\quad e_2 = (0,1,0),\quad e_3 = (0,0,1)\}$ пространства V и определим B посредством $B(u,v) = u_1v_3^q + u_3v_1^q + u_2v_2^q$ для всех векторов $u = (u_1,u_2,u_3)$ и $v = (v_1,v_2,v_3)$ из V. Пусть $\tilde{G} = \mathrm{SU}_3(q)$ — это специальная унитарная группа пространства V и положим $\tilde{K} = \tilde{G}_{\langle e_1\rangle,\langle e_3\rangle}$. Пусть $\tilde{P}$ — это подгруппа из $\tilde{K}$ порядка $q-1$ и пусть $\tilde{S}$ — это подгруппа из $\tilde{G}_{\langle e_1\rangle}$ порядка q^3. Информацию о строении групп $\tilde{S}$ и $\tilde{K}$ можно найти, например, в [58, с. 248–250].

Ввиду предложения 1.5 мы будем рассматривать только графы $\Gamma(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{H}\tilde{g}_1\tilde{H})$ для $\tilde{H} = \tilde{S}\tilde{P}_1$, где $\tilde{P}_1$ — это подгруппа из $\tilde{K}$ индекса $r > 1$ и $\tilde{g}_1 \in N_{\tilde{G}}(\tilde{K}) - \tilde{K}$ — это 2-элемент такой, что $\tilde{g}_1^2 \in \tilde{H}$. Обозначим граф $\Gamma(\tilde{G},\tilde{H},\tilde{H}\tilde{g}_1\tilde{H})$ через $\tilde{\Gamma}$.

Пусть E^* обозначает мультипликативную группу ненулевых элементов поля E и пусть U — это подгруппа из E^* индекса r.

§§ 3.2.1. Случай $r|(q+1)$

Рассмотрим сначала случай $r|(q+1)$.

Предложение 3.20. *Пусть $p>2$ и $r>2$ — это делитель числа $(q+1)$. Тогда граф $\tilde{\Gamma}$ дистанционно регулярен тогда и только тогда, когда $\tilde{H}\tilde{g}_1\tilde{H}=\tilde{H}\tilde{z}\tilde{H}$ для некоторого элемента $\tilde{z}$ из $\tilde{G}$ порядка 4. Получающийся дистанционно регулярный граф имеет массив пересечений $\{q^3,(r-1)(q+1)(q^2-1)/r,1;1,(q+1)(q^2-1)/r,q^3\}$ и не зависит от выбора элемента $\tilde{z}$ (удовлетворяющего заданному условию).*

Доказательство. Пусть $p>2$. Пусть g — это инволюция в G_1-M_1. Отметим, что если g_1 — это 2-элемент из G_1-M_1 такой, что $g_1^2\in M_1$, то ввиду утверждений (2) и (4) предложения 3.18, $|g_1|$ делит $2(q+1)_2$.

Положим $K=M_1\cap M_1^g=\langle k\rangle$. Обозначим через P и W две подгруппы из K порядков $q-1$ и $(q+1)/(q+1,3)$ соответственно. Пусть $H=SP_1$, где P_1 — это подгруппа из K индекса r, содержащая P, и пусть g_1 — это 2-элемент из G_1-M_1 такой, что $g_1^2\in H$. Положим $\Gamma=\Gamma(G,H,Hg_1H)$. Ввиду предложения 3.19(2) мы можем выбрать инволюцию g так, что $S^{g_1}=S^g$. Поэтому мы будем полагать, что $g_1=g$ или $g_1=gx$, где x — это 2-элемент из K порядка $2(|P_1|)_2$. Ввиду предложений 1.5 и 3.19 Γ — это реберно симметричное $(r/(q+1,3))$-накрытие полного графа $\Gamma/_\Sigma$, где $\Sigma=\{\{Hm(gs)^e:\ m\in N_G(S)\}:\ s\in S,\quad e\in\{0,1\}\}$, на q^3+1 вершинах.

Пусть $r=q+1$, $|g_1|=|\tilde{g}_1|=4$ и пусть $g_1=gx$. Сначала мы покажем дистанционную регулярность графа Γ и затем, в случае $(q+1,3)>1$, мы установим, что Γ допускает единственное (с точностью до изоморфизма) дистанционно регулярное 3-накрытие Φ с транзитивной на дугах группой автоморфизмов, изоморфной группе $SU_3(q)$, и $\Phi\simeq\tilde{\Gamma}$. Чтобы доказать, что граф Γ в самом деле дистанционно регулярен, достаточно проверить, что любые две вершины из разных фибр из Σ имеют ровно $\mu=(q^2-1)(q+1,3)$ общих соседей.

Известно (см. [120, секция VI]), что имеется изоморфизм ψ группы S на группу S_1 всех пар (α,β) таких, что $\alpha,\beta\in E$ и $\alpha^{q+1}=\beta+\beta^q$, умножение в которой задается формулой

$$(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2+\alpha_1^q\alpha_2). \tag{4}$$

Действие φ группы K на S сопряжениями индуцирует действие φ^* группы K на S_1, заданное правилом $\varphi^*(k)((\alpha,\beta))=(\alpha\zeta,\beta\zeta^{q+1})$ для всех $(\alpha,\beta)\in S_1$, где ζ — это фиксированный порождающий элемент группы E^*, и $\varphi^*(K)\le \mathrm{Aut}(S_1)$.

К тому же, имеются три функции $e:S^\#\mapsto S, f:S^\#\mapsto S$ и $h:S^\#\mapsto K$ (см. [120, секция V]), определенные (однозначно) с помощью равенства

$$gsg=e(s)h(s)gf(s). \tag{5}$$

Если для некоторого элемента $s \in S$ мы имеем $\psi(s) = (\alpha, \beta)$, тогда мы будем использовать запись $h(s) = h(\alpha, \beta)$. Для каждого $(\alpha, \beta) \in S_1$, отождествляя K с E^*, имеем (см. [120, с. 14])

$$h(\alpha, \beta) = -\beta^{2-q}. \tag{6}$$

Последнее утверждение будет применяться далее.

Пусть K_0 — это силовская 2-подгруппа из K. Так как K действует регулярно на $Z(S)$ (см. [120, лемма 10]), то в случае $q \equiv 1 \pmod 4$ мы получим, что каждый элемент порядка 4 из K_0 инвертирует каждый элемент группы $Z(S)$, в то время как если $q \equiv -1 \pmod 4$, то каждый элемент из $Z(S)$ инвертируется каждым порождающим группы K_0.

Имеем $P = U_0 \times \langle x^2 \rangle$, где U_0 — это подгруппа из K порядка $(q-1)/(q-1)_2$. Поскольку группа K — циклическая, то, очевидно, группа WK_0 — тоже циклическая. Обозначим через $\tilde{f}$ некоторый порождающий элемент группы WK_0.

Возьмем элемент $s \in S^{\#}$ и пусть $e(s) = a$, $f(s) = \bar{s}$ и $h(s) = b$. Пусть i_1 и i_2 — это некоторые целые числа. По предложению 3.19 (4),

$$\tilde{f}^{i_2} xgs\tilde{f}^{-i_1} = \tilde{f}^{i_2} xg\tilde{f}^{-i_1} s^{\tilde{f}^{-i_1}} = \tilde{f}^{i_1(q+1)+i_2-i_1} xgs^{\tilde{f}^{-i_1}}, \tag{7}$$

и

$$\tilde{f}^{i_2} xgsgx^{-1}\tilde{f}^{-i_1} = \tilde{f}^{i_2} xabg\bar{s}x^{-1}\tilde{f}^{-i_1} = a^{\tilde{f}^{-i_2}x^{-1}} b\tilde{f}^{i_2+qi_1} x^{q+1} g\bar{s}^{x^{-1}\tilde{f}^{-i_1}}. \tag{8}$$

Поэтому ввиду соотношения (7) и предложения 3.19 (2), мы имеем $H\tilde{f}^{i_2}gxs \in [H\tilde{f}^{i_1}]$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}^{i_2-i_1} \in P$ тогда и только тогда, когда $H\tilde{f}^{i_2}gxs = H\tilde{f}^{i_1}gxs$.

Ввиду (8) и предложения 3.19 (2) мы также имеем $H\tilde{f}^{i_2}gxs \in [H\tilde{f}^{i_1}gx]$ тогда и только тогда, когда $b\tilde{f}^{i_2-i_1} \in Px$. Возьмем произвольный элемент $\tilde{k} \in K$. Поскольку $h(s^{\tilde{k}}) = \tilde{k}^{q+1}b$, то аналогичным образом получаем, что $H\tilde{f}^{i_2}gxs^{\tilde{k}} \in [H\tilde{f}^{i_1}gx]$ тогда и только тогда, когда $h(s^{\tilde{k}})\tilde{f}^{i_2-i_1} \in Px$ тогда и только тогда, когда $H\tilde{f}^{i_2}gxs \in [H\tilde{f}^{i_1}gx]$.

Утверждение: Для каждого $x_1 \in WK_0 - Px$ имеется в точности $(q^2-1)(q+1, 3)$ элементов s_1 в S таких, что $h(s_1) \in Px_1$.

Доказательство утверждения. Пусть инволюция gx^2 фиксирует (поточечно) фибру $F(Hgxs)$. Тогда $W\langle g\rangle$-инвариантное множество $\{F(Hgxs^z) \colon\ z \in \langle k^{q-1}\rangle\}$ образует подмножество фибр из Σ, фиксируемых (поточечно) инволюцией gx^2.

Ввиду утверждений (2) и (4) предложения 3.19 $Hgxsgx^2 = Hgxs$ тогда и только тогда, когда $xgsgx^2 = xabg\bar{s}x^2 = hxgs$ для некоторого $h \in H$. Умножая последнее равенство на x^{-1} слева и применяя те же самые утверждения, получаем $gsgx^2 = abg\bar{s}x^2 = abx^{-2q}g\bar{s}^{x^2} = h^x gs$, $b \in P$ и $\bar{s}^{x^2} = s$. Поэтому для всех $\tilde{k} \in K$ имеем $h(s^{\tilde{k}}) \in P$.

Пусть $\psi(s) = (\alpha, \beta)$ и γ — это элемент из E^* порядка $2(q-1)$. Отметим, что если $c \in Z(S)^{\#}$, то $e(c) = f(c) \in Z(S)^{\#}$ и $h(c) \in Px$ (см., например, [120, с. 13]). Поэтому каждый нетривиальный элемент из $Z(S_1)$ имеет вид $(0, \beta_0\gamma)$ для некоторого $\beta_0 \in F^*$. Возьмем два элемента из $Z(S)^{\#}$, скажем c_1 и c_2, и пусть $\psi(c_1) = (0, \beta_1\gamma)$, $\psi(c_2) = (0, \beta_2\gamma)$ для некоторых $\beta_1, \beta_2 \in F^*$. Тогда по (4) и (6) $\psi(sc_i) = (\alpha, \beta + \beta_i\gamma)$, $h(sc_i) = (-1)\beta^{2-q}(1 + \beta^{-1}\beta_i\gamma)^{2-q}$ и $h((sc_i)^k) = \zeta^{(q+1)(2-q)}h(sc_i)$, где $i \in \{1, 2\}$. Предположим, что $h(sc_1) \in h(sc_2)P$. Тогда

$(1+\beta^{-1}\beta_1\gamma)^{2-q} = (1+\beta^{-1}\beta_2\gamma)^{2-q}\delta$ для некоторого $\delta \in F^*$ и, поскольку $(q^2-1, q-2) = (q+1, 3)$, $(1+\beta^{-1}\beta_1\gamma)(1+\beta^{-1}\beta_2\gamma)^{-1} \in F^*\langle\omega\rangle$, где ω — это элемент порядка $(q+1,3)$ из E^*. Но $E^* = F^* \cup F^*\gamma \cup_{\alpha_1 \in F^*} F^*(1+\alpha_1\gamma)$. □

Таким образом, каждая вершина из $F(H)$ имеет ровно $(q^2-1)(q+1,3)$ общих соседей с любой несмежной с ней вершиной из $F(Hgx)$. Наконец, ввиду предложения 3.19 G действует 2-транзитивно на q^3+1 блоках системы Σ, которые отвечают правым смежным классам группы G по $N_G(S)$. Следовательно, $\mu = (q^2-1)(q+1,3)$. Отметим, что $\lambda = (q-1)((q+1)(q+1,3)-q)$ и каждый локальный подграф графа Γ имеет разбиение на множество клик размера q. Поэтому Γ — это антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q^3, ((q+1)-(q+1,3))(q^2-1), 1; 1, (q^2-1)(3,q+1), q^3\}$ и Γ не зависит от выбора элемента g_1.

Теперь пусть $(q+1,3) = 3$. Пусть π — это (равномерное) разбиение $V(\tilde{\Gamma})$ на $Z(\tilde{G})$-орбиты и пусть $\tilde{\Gamma}/\pi$ — это частное графа $\tilde{\Gamma}$, то есть граф на множестве π, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда имеется ребро, соединяющее вершины из соответствующих орбит в $\tilde{\Gamma}$. Ясно, что $\tilde{\Gamma}/\pi \simeq \Gamma$. Проверим, что каждая вершина из $F(\tilde{H}\tilde{g}_1) - \{\tilde{H}\tilde{g}_1\}$ имеет точно q^2-1 общих соседей с $\tilde{H}$. Не теряя общности, можно считать, что $\tilde{S}$ лежит в прообразе S, $\tilde{g}_1$ лежит в прообразе элемента g_1, а $\tilde{g}_1$ переставляет между собой $\langle e_1\rangle$ и $\langle e_3\rangle$. Поскольку $\tilde{g}_1$ — это 2-элемент, то $\tilde{g}_1 = \tilde{g}\tilde{x}$, где $\tilde{g}$ и $\tilde{x}$ — это некоторые элементы из прообразов элементов g и x в $\tilde{G}$ соответственно такие, что $\tilde{g}$ — это инволюция из $\tilde{G}$, переставляющая $\langle e_1\rangle$ с $\langle e_3\rangle$, и $\tilde{x}$ — это элемент порядка $2(q-1)_2$ из $\tilde{K}$. Поэтому $\tilde{S}^{\tilde{g}} = \tilde{S}^{\tilde{g}_1}$ и мы можем полагать, что $\tilde{g}$ переставляет e_1 с e_3. Тогда рутинные вычисления показывают, что для каждого $\tilde{y} \in \tilde{K} - \tilde{P}$ имеется в точности q^2-1 элементов $\tilde{s}$ в $\tilde{S}$ таких, что $\tilde{g}\tilde{s}\tilde{g} = \tilde{s}_1\tilde{h}\tilde{g}\tilde{s}_2$ для некоторых $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \in \tilde{S}$ и $\tilde{h} \in \tilde{P}\tilde{x}\tilde{y}$.

Поэтому $\tilde{\Gamma}$ — это антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q^3, q(q^2-1), 1; 1, (q^2-1), q^3\}$ и $\tilde{\Gamma}$ не зависит от выбора элемента $\tilde{g}_1$.

Теперь пусть $r > 2$ — это произвольный делитель числа $(q+1)$ и $\tilde{g}_2$ — это 2-элемент в $\tilde{G} - \tilde{H}$ такой, что $\tilde{g}_2^2 \in \tilde{H}$. Остается показать, что граф $\Gamma(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{H}\tilde{g}_2\tilde{H})$ дистанционно регулярен тогда и только тогда, когда $\tilde{H}\tilde{g}_2\tilde{H} = \tilde{H}\tilde{g}_1\tilde{H}$.

Во-первых, ввиду [67, теорема 6.2] $\tilde{\Gamma}$ — это антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$. Пусть $\tilde{g}_2$ — это элемент из прообраза 2-элемента $g_2 \in G$ такого, что $g_2 \notin Hg_1H$, где H рассматривается как образ $\tilde{H}Z(\tilde{G})$. Тогда число r четно и достаточно рассмотреть случаи, когда $g_2 = gy$, где y — это элемент из K порядка $2(|P_1|)_2$, или $g_2 = g$.

Пусть $(q+1)_3 > (r)_3$ или $(r,3) = 1$. По предложению 1.5, граф $\Gamma(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{H}\tilde{g}_2\tilde{H})$ изоморфен графу $\Gamma(G, H, Hg_2H)$. Пусть $g_2 = g$. Возьмем произвольно $s_1 \in S$ и $y_1 \in WK_0$. По предложению 3.19,

$$gs_1y_1^{-1}g = gs_1gy_1^q = e(s_1)h(s_1)gf(s_1)y_1^q = e(s_1)h(s_1)y_1^{-1}gf(s_1)^{y_1^q}, \tag{9}$$

и

$$gxs_1y_1^{-1}g = x^{-q}gs_1gy_1^q = e(s_1)^{x^q}x^{-q}h(s_1)y_1^{-1}gf(s_1)^{y_1^q}. \tag{10}$$

Поэтому, принимая во внимание соотношения (9), (10) и предложение 3.19(2), заключаем, что Hgy_1 и Hgs_1 смежны в $\Gamma(G, H, Hg_2H)$ тогда и только тогда, когда $h(s_1) \in P_1y_1$ тогда и только тогда, когда $Hgxs_1$ и Hgy_1 смежны в $\Gamma(G, H, Hg_1H)$. Поскольку $r > 2$, мы можем выбрать y_1 так, что $y_1 \notin P_1 \cup P_1x$. Но тогда $q^3-(r-1)(q+1)(q^2-1)/r-1 = (q+1)(q^2-1)/r$, противоречие. В случае $g_2 = gy$ мы получим аналогичное противоречие.

Пусть $(q + 1)_3 = (r)_3 \geq 3$. Если граф $\Gamma(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{H}\tilde{g}_2\tilde{H})$ дистанционно регулярен, то его частное на множестве $Z(\tilde{G})$-орбит также дистанционно регулярно. Поэтому $q + 1 = 6$ и тогда $\tilde{g} = \tilde{g}_2$. Рассуждая как и выше, получим противоречие. Предложение доказано.

Замечание 3.21. Для нечетных q и $(q+1)/r$ дистанционная регулярность графов смежных классов, описанных в предложении 3.20, была впервые показана в [142]. При таких q и $(q + 1)/r$ графы из предложения 3.20 являются 2-накрытиями некоторых дистанционно регулярных графов, обнаруженных П. Камероном в [47] (см. конструкцию 1.8).

Пусть r больше 2 и делит $(q + 1)/(q + 1, 2)$. Покажем, что в этом случае граф $\tilde{\Gamma}$ изоморфен графу $\Psi_{q,r}$ из конструкции 1.8.

Пусть $p > 2$ и элемент $\tilde{g}_1$ имеет порядок 4. Тогда, как и в доказательстве предложения 3.20, мы можем полагать, что $\tilde{g}_1 = \tilde{g}\tilde{x}$, где $\tilde{g}$ и $\tilde{x}$ — это некоторые элементы из $\tilde{G}$ такие, что $e_1\tilde{g} = e_3$ и $\tilde{x}$ — это элемент порядка $2(q - 1)_2$ из $\tilde{K}$. Так как граф $\Psi_{q,r}$ связен и $\tilde{H}$ — это стабилизатор вершины Ue_1 в $\tilde{G}$, то ввиду предложения 1.5 остается заметить, что $Ue_1\tilde{g}\tilde{x} = Ue_3$ и $B(e_1, e_3) = 1$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\tilde{g}_1$ — это инволюция и $\tilde{\Gamma}$ не зависит от выбора $\tilde{g}_1$. Ввиду предложения 3.18 мы можем считать, что $\tilde{g}_1$ переставляет e_1 с e_3. В этом случае $B(e_1, e_3) = 1$, граф $\Psi_{q,r}$ связен и стабилизатор вершины Ue_1 в $\tilde{G}$ равен $\tilde{H}$. Теперь требуемый изоморфизм следует из предложения 1.5.

§§ 3.2.2. Случай $(r, q - 1) > 2$

Далее мы рассмотрим случай $(r, q - 1) > 2$.

Предложение 3.22. *Пусть $r > 2$ — это делитель числа $q-1$. Тогда граф $\tilde{\Gamma}$ дистанционно регулярен тогда и только тогда, когда число r нечетно. Получающийся дистанционно регулярныей граф имеет массив пересечений $\{q^3, (q^3 - 1)(r - 1)/r, 1; 1, (q^3 - 1)/r, q^3\}$ и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции $\tilde{g}_1$.*

Доказательство. Пусть $M = N_G(S)$ и g — это инволюция из $G - M$. Положим $K = M \cap M^g$. Предположим сначала, что $r = (q - 1)/(q - 1)_2 > 1$. Обозначим через P и W две подгруппы из K порядков $(q^2 - 1)_2$ и $(q + 1)/(q + 1, 3)$ соответственно, и пусть $H = SPW$. Положим $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$. Ввиду предложений 1.5–3.19 $\tilde{\Gamma} \simeq \Gamma$ — это r-накрытие полного графа $\Gamma/_\Sigma$ на $q^3 + 1$ вершинах, где $\Sigma = \{\{Hm(gs)^e\colon\ m \in M\}\colon\ s \in S, \quad e \in \{0, 1\}\}$, и G действует 2-транзитивно на фибрах Σ.

Пусть f — это элемент из K порядка r и пусть $K = U_0 \times P$, где U_0 — это максимальная подгруппа из K нечетного порядка, так что $|U_0 : \langle f\rangle| = (q+1)/((q+1)_2(q+1, 3))$. Положим $L = \langle f, g\rangle$. Тогда по предложению 3.18(3) и предложению 3.19(4) $L \simeq D_{2r}$.

Возьмем элемент $x \in \langle f\rangle^{\#}$. Предположим, что $gsx = mgs$ для некоторого $m \in M$ и $s \in S^{\#}$. Тогда по предложениям 3.18 и 3.19 $m = x^g$, $s = s^x$ и $x \in C_K(s)$. Но $\langle f\rangle$ действует полурегулярно на S (см. [118]), поэтому $s = 1$, противоречие. Следовательно, длина каждой $\langle f\rangle$-орбиты на $\Sigma - \{F(H), F(Hg)\}$ равна r и число $\langle f\rangle$-орбит на $\Sigma - \{F(H), F(Hg)\}$ равно $(q^3-1)/r$.

Так как любые две инволюции из G сопряжены в G, то элемент g фиксирует (поточечно) точно $q+1$ фибр в Σ. Каждая из этих фибр имеет вид $F(Hx)$ для некоторого элемента $x \in G$ такого, что $g^{x^{-1}} \in M$, и каждая $\langle f\rangle$-орбита на $\Sigma - \{F(H), F(Hg)\}$ может содержать только одну из них. Поэтому имеется в точности $q+1$ L-орбит на Σ длины r и длина любой другой L-орбиты на $\Sigma - \{F(H), F(Hg)\}$ равна $2r$.

Пусть O — это L-орбита на Σ. Обозначим через V множество всех вершин, лежащих в фибрах из $O \cap \Sigma$.

Утверждение: Если O имеет длину lr, $l \in \{1,2\}$, то для всех $i,j \in \{1,..,r\}$ каждая вершина Hgf^j смежна в точности с l вершинами из $[Hf^i] \cap V$.

Доказательство утверждения. Пусть $l = 1$. Будем полагать, что g фиксирует фибру $F(Hgs) \in O$ для некоторого $s \in S$. Имеем $Hf^jgsf^i \in [Hf^{j+i}] \cap [Hgf^{-j+i}]$ для всех $i,j \in \{1,..,r\}$. Поэтому $Hf^{2j}gs^{f^{-j}}f^i \in [Hf^i] \cap [Hgf^{-2j+i}]$ для всех $i,j \in \{1,..,r\}$.

Пусть теперь $l = 2$. Будем считать, что для некоторых элементов s и s_1 из S фибры $F(Hgs), F(Hgs_1) \in O$ принадлежат различным $\langle f\rangle$-орбитам на Σ. В L имеется инволюция gf^α, где $\alpha \in \{1,..,r\}$, такая, что $F(Hgsgf^\alpha) = F(Hgs_1)$.

Имеем $Hgf^isgf^\alpha \in [Hf^igf^\alpha]$ для всех $i \in \{1,..,r\}$ и $Hgs_1 = Hgf^\beta sgf^\alpha$ для некоторого $\beta \in \{1,..,r\}$. Поскольку $gsg = xzf^\delta gy$ для некоторого (единственным образом определяемого) $z \in H, \delta \in \{1,..,r\}$ и $y \in S$, то $Hgf^\beta sgf^\alpha = Hf^{\delta-\beta-\alpha}gy^{f^\alpha} = Hgs_1$. Следовательно, $y^{f^\alpha} = s_1$ и $f^{\delta-\beta-\alpha} \in H$.

Для всех $t \in \{1,..,r\}$ имеем $Hgf^tsgf^\alpha = Hf^{\delta-\alpha-t}gs_1$. Возьмем $i,j \in \{1,..,r\}$. Тогда $Hgf^is_1 = Hgf^jsgf^\alpha$ тогда и только тогда, когда $Hf^{\delta-\alpha-j}gs_1 = Hf^{-i}gs_1$ тогда и только тогда, когда $f^{\delta-\alpha-j+i} \in H$ и r делит $\beta+i-j$.

Поэтому $Hgf^is_1(= Hgf^{\beta+i}sgf^\alpha) \in [Hf^{\beta+i}gf^\alpha] \cap [Hf^i]$ и $Hgf^{\beta+i}s \in [Hf^{\beta+i}] \cap [Hf^igf^\alpha]$ для всех $i \in \{1,..,r\}$. $\square$

Из 2-транзитивности G на Σ заключаем, что Γ — это антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q^3, (q^3-1)(r-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$. Отметим, что Γ не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции $g \in G - M$.

Пусть $H_1 = H\langle f^i\rangle$ для некоторого целого i такого, что $i > 1$, i делит r. По [67, теорема 6.2], получим, что $\Gamma(G, H_1, H_1gH_1)$ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q^3, (i-1)(q^3-1)/i, 1; 1, (q^3-1)/i, q^3\}$.

Теперь пусть r — это четный делитель числа $q-1$, P_0 — это подгруппа из K индекса r и g_1 — это 2-элемент из $G-M$ такой, что $g_1^2 \in H = SP_0$. От противного, предположим, что граф $\Gamma(G, H, Hg_1H)$ дистанционно регулярен. Положим $H_1 = SP_1$, где P_1 — это подгруппа из K индекса i. Если $i \in \{2,4\}$, то по [67, теорема 6.2] получим, что граф $\Gamma(G, H_1, H_1g_1H_1)$ также дистанционно регулярен, поэтому $r\mu = (q+1)(q^2-1)$ или $r\mu = (q-1)(q^2+1)$. Но то же самое справедливо и в случае $i = r/(r)_2 > 1$. Отсюда $q^3-1 = r\mu$, противоречие. Поэтому r — степень 2 и, ввиду утверждений (2) и (4) предложения 3.19, $|g_1|$ делит 4. Достаточно рассмотреть случай $r = 4$. Если g_1 имеет порядок 4, то можно полагать $g_1 = gx$, где x — это 2-элемент из K порядка $2(|P_0|)_2 = 2(q-1)_2$. Снова ввиду утверждений (2) и (4) предложения 3.19, для элемента h определенного как в доказательстве предложения 3.20 с помощью равенства (5), получаем, что $Hgxs$ и Hgx смежны в Γ для некоторого $s \in S$ тогда и только тогда, когда $h(s) \in P_0x^{-1}$ тогда и только тогда, когда $h(s^x) = x^{q+1}h(s) \in P_0x$ тогда и только тогда, когда Hgx^3 и $Hgxs^x$ смежны в Γ. Поэтому $q^3-1 = r\mu$, противоречие. Случай $g_1 = g$ рассматривается аналогично.

Замечание 3.23. Если r — это нечетный делитель числа $q-1$, то ввиду предложений 1.5–3.19 для каждого элемента $\gamma \in E^*$ такого, что $\gamma^{q-1} \in U$, граф $\tilde{\Gamma}$ изоморфен дистанционно регулярному графу $\Psi^{\gamma}_{q,r}$, описанному Броувером в заметке [41, предложение 12.5.4 (i)] (см. конструкцию 1.9), с $V(\Psi^{\gamma}_{q,r}) = V(\Psi_{q,r})$, чьи вершины Uv и Uw смежны тогда и только тогда, когда $B(v,w) \in \gamma U$, однако доказательство дистанционной регулярности графа $\tilde{\Gamma}$, приведенное здесь, в [142] было получено независимо.

Замечание 3.24. По [66] граф $\tilde{\Gamma}$ из предложения 3.22 дистанционно-транзитивен тогда и только тогда, когда r нечетное простое число, p — примитивный корень по модулю r (в случае $r = 3$, r делит $p+1$) и $r-1$ делит $2n$.

Лемма 3.25. *Если граф $\tilde{\Gamma}$ дистанционно регулярен, то r делит $q+1$ или $(q-1)/(q-1)_2$.*

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, применим [67, теорема 6.2] несколько раз. Пусть r — произвольный делитель числа q^2-1 такой, что $(q+1,r) > 1$ и $(q-1,r) > 1$. Пусть $\tilde{H}_1$ — это подгруппа из $\tilde{G}_{\langle e_1\rangle}$ индекса $i \in \{(q-1,r),(q+1,r)\}$. Предположим, что граф $\tilde{\Gamma}$ дистанционно регулярен. Тогда граф $\Gamma(\tilde{G}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_1\tilde{g}_1\tilde{H}_1)$ также дистанционно регулярен. Если $(q-1,r)$ — не степень 2, то $r\mu = q^3-1$, но $(q+1,q^2) = 1$, противоречие. Если $(q+1,r) > 2$, то $r\mu = (q+1)(q^2-1)$, противоречие. Поэтому если q — нечетно, то $r = 2$ и $\tilde{\Gamma}$ — дистанционно-транзитивный граф.

Теорема 3.3 доказана.

Замечание 3.26. 1) Как было показано выше, для любых допустимых q и делителя r числа $(q+1)|Z(G)|/(3,q+1)$ дистанционно регулярный граф $\Gamma(G,H,HgH)$ из п. (1) теоремы 3.3 существует и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора элемента g, удовлетворяющего указанным свойствам. Кроме того, для любых допустимых q и r дистанционно регулярный граф $\Gamma(G,H,HgH)$ из п. (2) теоремы 3.3 существует и также не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора элемента g, удовлетворяющего указанным свойствам.

2) Для графа $\Gamma := \Gamma(G,H,HgH)$ с $\lambda = \mu$ из заключения теоремы 3.3 согласно [19] имеем $\mathcal{CG}(\Gamma) = 1$, более того, учитывая теорему 1.16 и рассмотрев 3-мерное матричное представление группы $\mathrm{GU}_3(q)$ над $\mathbb{F}_{q^2}$, нетрудно проверить, что $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

§ 3.3. Графы на классах сопряженных элементов групп $L_2(q)$, $U_3(q)$, $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$

Здесь приводятся различные конструкции графов из теорем 3.1 и 3.3 и доказываются предложения 3.4 и 3.5.

§§ 3.3.1. Доказательство предложения 3.4

Пусть $\mathcal{C}$ — это класс инволюций группы G и $\Delta = \{(x^h, x^{gh})|\ h \in G\}$ — это орбитал G на $\mathcal{C}$ такой, что x и g — это инволюции из G, которые не коммутируют. Очевидно, орбитал $\Delta = \{(x^h, x^{gh}):\ h \in G\}$ самоспарен. Тогда ассоциированный орбитальный граф Γ_Δ на $\mathcal{C}$, ребрами которого являются пары вершин $\{y_1, y_2\}$ такие, что $(y_1, y_2) \in \Delta$, можно рассматривать как (неориентированный) реберно симметричный граф. Пусть $H = C_G(x)$. Тогда граф Γ_Δ связен и ввиду предложения 1.5 получаем $\Gamma_\Delta \simeq \Gamma(G, H, HgH)$.

Пусть к тому же упорядоченная пара инволюций (x, g) является отличимой, то есть $|xg| = \chi(G)$ (см., например, [118]). Поскольку G действует транзитивно (сопряжениями) на отличимых упорядоченных парах инволюций и ввиду того, что пара (x, g) является отличимой тогда и только тогда, когда для некоторого $y \in S$ пара (x, y) является решением структурного уравнения в G (по отношению к g) $gxg = y^{-1}gy$ (см [118, с. 70–72] или [119, разделы 10–12, 15]), имеем $(x, g) \in \Delta$ и $\Delta = \{(u, v):\ u, v \in \mathcal{C},\quad |uv| = 3\}$.

Отметим, что если $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, то дистанционная регулярность $\Gamma(G, H, HgH)$ может быть показана в сущности так же, как и в доказательстве предложения 3.22, более того, ввиду предложений 1.5 и 3.18, $\Gamma(G, H, HgH)$ изоморфен графу Мэтона $\mathrm{M}(q, q-1)$. Если $G = \mathrm{PSU}_3(q)$, то требуемый результат следует из предложений 3.19,1.5 и 3.22. Предложение 3.4 доказано.

Замечание 3.27. Пусть $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, где $q > 2$ — четно и $\mathcal{C}$ обозначает то же, что и в доказательстве предложения 3.4. Первый член семейства графов из предложения 3.4 для G (т.е. для $G = \mathrm{PSL}_2(4)$) хорошо известен (см., например, [66, пример 3.3]) и изоморфен графу прямых графа Петерсена. Пусть $\mathcal{C}_i$ — это класс сопряженных элементов нечетного порядка группы G. Так как каждый элемент нечетного порядка из G является *сильно вещественным* (strongly real, см. [117, раздел 10]), то есть равен произведению двух инволюций, то имеется в точности $q-1$ таких классов $\mathcal{C}_i$ (таким образом, можно полагать, что i принимает значения из $\{1, ..., q-1\}$). В [22] рассмотрен подграф Ψ_i графа Кэли группы G по системе образующих $\mathcal{C}_i$, индуцированный множеством $\mathcal{C}$, и показана дистанционная регулярность графа Ψ_i для каждого $i \in \{1, .., q-1\}$. Однако в [22] осталось незамеченным, что каждый граф Ψ_i, где $i \in \{1, ..., q-1\}$, изоморфен некоторому графу из семейства дистанционно регулярных графов Мэтона. В самом деле, чтобы доказать это, достаточно убедиться, что Ψ_i изоморфен графу Γ_Δ с $\Delta = \{(x^h, y^h):\ h \in G\}$, где $x, y \in \mathcal{C}$ такие, что $xy \in \mathcal{C}_i$.

Для того, чтобы представить еще одно замечание, нам понадобится следующее определение. Пусть G — это группа с непустым множеством $\mathcal{X}$ инволюций таким, что $\mathcal{X}^G = \mathcal{X}$ и предположим, что G содержит непустое множество $\mathcal{Y}$ диэдральных подгрупп, которое также замкнуто относительно сопряжения элементами из G. Положим $I = \{|Y|/2\colon\ Y \in \mathcal{Y}\}$. Граф на $\mathcal{X}$, ребрами которого являются пары $\{u, v\}$ такие, что $\langle u, v\rangle \in \mathcal{Y}$, будет называться *графом D_I-инволюций* группы G и обозначаться через $\Gamma(G, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Ясно, что при $I = \{3\}$ это определение эквивалентно определению графа S_3-инволюций [55, определение 1.1].

Замечание 3.28. Пусть $G \in \{\mathrm{PSL}_2(q), \mathrm{PSU}_3(q), Sz(q)\}$, где $q = 2^n > 2$. Поскольку каждая диэдральная подгруппа порядка $2\chi(G)$ из G порождается парой отличимых инволюций и сопряжена с $\langle x, x^g\rangle$, то граф, определенный в предложении 3.4 для G совпадает с $\Gamma(G, \mathcal{C}, \mathcal{Y})$, где $\mathcal{Y} = \langle x, x^g\rangle^G$. Таким образом, предложение 3.4 обобщает некоторые результаты из [55], где исследуются графы S_3-инволюций группы $\mathrm{PSL}_2(q)$ (см. [55, теоремы 3.11, 3.12]), и отвечает на вопрос [55, задача 1.2] в случае $G = \mathrm{PSU}_3(q)$.

§§ 3.3.2. Доказательство предложения 3.5

Положим $M = N_G(S)$ и $K = M \cap M^g$. Имеем $K = \langle f\rangle \times P$, где $|f| = (q-1)/(q-1)_2$ и $P = WK_0$, где $W = C_G(x) \cap K$ и K_0 — это силовская 2-подгруппа из K. Заметим, что если $G = {}^2G_2(q)$, то $G = \langle S, g\rangle = M \cup MgS$ и $W = 1$, см. [128, теорема]. Кроме того, в K найдется элемент h, который инвертирует каждый элемент из $Z(S)$. В самом деле, если $G = U_3(q)$, то, как показано выше, h — это элемент порядка $2(q+1)_2$ при $q \equiv -1 \pmod 4$ или порядка 4 при $q \equiv 1 \pmod 4$, а если $G = {}^2G_2(q)$, то (см. [128, с. 63, 79]) h — это инволюция из K. Поэтому G действует транзитивно (сопряжениями) как на $\mathcal{C}$, так и на π.

Далее, группа G имеет точно $q-1$ орбиталов на $\mathcal{C}$, которые содержат точку типа (u, v) для некоторых $u \in Z(S_1)$ и $v \in Z(S_2)$, где $S_1, S_2 \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $S_1 \neq S_2$. Рассмотрим два орбитала $\Delta_1 = \{(x^z, x^{gz})\colon\ z \in G\}$ и $\Delta_2 = \{(x^z, x^{-gz})\colon\ z \in G\}$. Для каждого $i \in \{1, 2\}$ орбитал Δ_i самоспарен и поэтому ассоциированный орбитальный граф Γ_{Δ_i} можно рассматривать как (неориентированный) реберно симметричный граф. Положим $Q = SW$. Тогда, учитывая, что $(gh)^2 \in W$, получаем $\Gamma_{\Delta_i} \simeq \Gamma(G, Q, Qgh^{i-1}Q)$.

Пусть $q \equiv -1 \pmod 4$. Так как для всех $\gamma \in \{1, 2, .., (q-1)/2 - 1\}$ отображение $Qy \mapsto Qy^{f^\gamma}$ является изоморфизмом графов $\Gamma(G, Q, Qgh^{i-1}Q)$ и $\Gamma(G, Q, Qgh^{i-1}f^{2\gamma}Q)$ для $i \in \{1, 2\}$, то каждый граф Γ_{Δ_i} не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции g. Определим граф $\tilde{\Gamma}_{\Delta_i}$ для $i \in \{1, 2\}$, как граф на множестве π, ребрами которого являются пары $\{\{y, y^{-1}\}, \{z, z^{-1}\}\}$ такие, что $(y, z) \in \Delta_i$. Стабилизатор пары $\{x, x^{-1}\}$ в G — это в точности $H = N_G(\{x, x^{-1}\}) = SP$. Тогда по предложению 1.5 $\tilde{\Gamma}_{\Delta_1} = \tilde{\Gamma}_{\Delta_2} \simeq \Gamma(G, H, HgH)$. Отсюда ввиду теорем 3.1 и 3.3 граф $\tilde{\Gamma}_{\Delta_1}$ дистанционно регулярен и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции g.

Теперь пусть $q \equiv 1 \pmod 4$ и $(q-1)/(q-1)_2 > 1$. Тогда $G = \mathrm{PSU}_3(q)$. Как и выше, определим граф $\tilde{\Gamma}_{\Delta_i}$ для $i \in \{1, 2\}$, как граф на множестве σ, вершины $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ которого смежны тогда и только тогда, когда существуют $\{z, z^{-1}\} \in \bar{v}_1$ и $\{y, y^{-1}\} \in \bar{v}_2$ такие, что $(z, y) \in \Delta_i$. Стабилизатор верршины $\bar{v} = \{x, x^{-1}\}^P$ в G — это снова $H = SP$, поэтому из предложений 1.5 и 3.22 следует, что $\tilde{\Gamma}_{\Delta_1} = \tilde{\Gamma}_{\Delta_2} \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, граф $\tilde{\Gamma}_{\Delta_1}$ дистанционно регулярен и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции g. Предложение

3.5 доказано.

Замечание 3.29. Отношение смежности для некоторых графов, определенных в предложении 3.5, может быть задано при помощи арифметических свойств рассматриваемых групп подобно тому, как это сделано в предложении 3.4. Для группы G через $\omega(G)$ будем обозначать множество порядков ее элементов. Сохраняя обозначения из предложения 3.5, назовем орбитал Δ группы G на $\mathcal{C}$ *отличимым*, если для некоторых числа $e \in \omega(G) - \{1\}$ и точки $(x, z) \in \Delta$, в S имеется единственный элемент z такой, что $|xz| = e$, то есть $\Delta = \{(u, v)\colon\ u, v \in \mathcal{C}, \quad |uv| = e\}$. С помощью вычислений в GAP [59] устанавливается, что отличимые орбиталы группы G на $\mathcal{C}$ для минимальных значений q в точности следующие. Если $G = \mathrm{PSU}_3(7)$, то имеется ровно четыре таких орбитала, а именно: $\{\{(u, v)\colon\ u, v \in \mathcal{C}, |uv| = e\}\colon\ e \in \{3, 4, 6, 14\}\}$. Если $G = {}^2G_2(27)$, то $\{(u, v)\colon\ u, v \in \mathcal{C}, \quad |uv| = 9\}$ — единственный отличимый орбитал G на $\mathcal{C}$.

§ 3.4. Локальное строение частных графов S_3-инволюций группы $L_2(2^n)$

В настоящем параграфе мы докажем теоремы 3.6 и 3.7.

Приведем ниже некоторые известные сведения о реберно симметричных графах и свойствах группы $L_2(q)$ четной характеристики, которые далее нам понадобятся для доказательства теоремы.

Предложение 3.30 (см., например, [117] и [57]). *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^e > 2$, S — силовская 2-подгруппа группы G, $M = N_G(S)$ и g — некоторая инволюция из $G - S$. Выполняются следующие утверждения.*

(1) *$G = \langle S, g\rangle$ и $M = S : K$, причем $K = M \cap M^g \simeq Z_{q-1}$ и $K\langle g\rangle \simeq D_{2(q-1)}$.*

(2) *$S \cap M^g = 1$ и $|S| = |Z(S)| = q$.*

(3) *$G = M \cup MgS$ и каждый элемент из $G - M$ представим единственным образом в виде xgy, где $x \in M$ и $y \in S$.*

(4) *G содержит единственный класс инволюций и $C_G(a) = S$ для любой инволюции $a \in S$.*

(5) *Для всех $t \in \{1, 2, ..., e\}$ и для всех делителей m числа $2^{(e,t)} - 1$ группа G содержит подгруппу $E_{2^t} : Z_m$.*

§§ 3.4.1. Доказательство теоремы 3.6

Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^{2t} > 2$, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $M = N_G(S)$, H – подгруппа из M нечетного индекса $r > 1$ и g — это инволюция из $G - S$. Положим $M \cap M^g = \langle h\rangle$. Тогда $H = S\langle h^r\rangle$. Положим $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$. Ввиду предложений 1.5 и 3.30 ясно, что $\Gamma \simeq \mathrm{M}(q, r)$. Пусть далее Δ — локальный подграф графа Γ и x — инволюция из S такая, что $x^g = g^x$. Через $\mathrm{Cay}(S, C)$ будем обозначать граф Кэли группы S по системе образующих $C \subseteq S - \{1\}$, то есть граф на множестве элементов группы S, в котором две вершины x, y смежны, если и только если $xy^{-1} \in C$.

Лемма 3.31. *Δ — реберно симметричный граф степени $(q-1)/r$. В частности, если граф Δ связен, то $\Delta \simeq \Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x \langle h^r\rangle) \simeq \mathrm{Cay}(S, x^{\langle h^r\rangle})$.*

Доказательство. Пусть Δ — окрестность вершины H в Γ. Тогда $V(\Delta) = \{Hgs | s \in S\} = \{Hg\} \cup \{Hgx^{h^j} | j \in \{1, .., q-1\}\}$. Стабилизатор вершины Hg в H совпадает с $\langle h^r\rangle$ и на $V(\Delta) - \{Hg\}$ имеется в точности r $\langle h^r\rangle$-орбит. Кроме того, степень вершины в Δ равна $(q-1)/r = |h^r|$. Отсюда Δ — реберно симметричный граф. В частности, если граф Δ связен, то по предложению 1.5 имеем $\Delta \simeq \Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x \langle h^r\rangle)$, а поскольку вершины $\langle h^r\rangle x^{h^i}$ и $\langle h^r\rangle x^{h^j}$ смежны в графе $\Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x \langle h^r\rangle)$ для некоторых $i, j \in \{1, .., q-1\}$ тогда и только тогда $x^{h^i} x^{h^j} \in x^{\langle h^r\rangle}$, то $\Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x \langle h^r\rangle) \simeq \mathrm{Cay}(S, x^{\langle h^r\rangle})$.

Напомним, что $(m, k; \lambda)$-*сетью* называется система инцидентности, состоящая из точек и блоков, множество блоков которой можно разбить на k параллельных классов размера m таким образом, что выполнены следующие условия:

$(N1)$ каждая точка инцидентна ровно k блокам, причем в точности одному из каждого параллельного класса,

$(N2)$ любые два блока из разных параллельных классов инцидентны в точности λ общим точкам.

Дуальная система инцидентности к $(m, k; \lambda)$-сети называется *трансверсальной схемой с параметрами* k, m, λ (обозначение $TD_\lambda[k; m]$). Хорошо известно (см., например, обзор [15]), что $(m, k; 1)$-сеть является α-частичной геометрией порядка (s, l), где $\alpha = l = k-1$ и $s = m-1$, а точечный граф (или граф коллинеарности) частичной геометрии $pG_\alpha(s, l)$, то есть граф, множеством вершин которого являются точки геометрии $pG_\alpha(s, l)$ и две вершины x, y которого смежны тогда и только тогда, когда точки x, y лежат на одной и той же прямой, сильно регулярен с параметрами $((s+1)(1+sl/\alpha), s(l+1), (s-1)+(\alpha-1)l, \alpha(l+1))$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, l называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, l)$.

Лемма 3.32. *Если r делит 2^t+1, то либо (i) $r = 2^t+1$ и Δ — объединение 2^t изолированных 2^t-клик, либо (ii) $r < 2^t+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, k(2^t-1), (k-1)(k-2)+2^t-2, k(k-1))$, где $k = (2^t+1)/r$.*

Доказательство. Пусть r делит 2^t+1. Положим $f = h^{2^t+1}$ и $w = h^{(2^t-1)r}$. Тогда $\langle h^r\rangle = \langle w\rangle \times \langle f\rangle$. Ввиду предложения 3.30(5) в S имеется подгруппа X порядка 2^t такая, что $X^f = X$. Кроме того, $X^{hf} = X^h$ и $\langle f\rangle$ имеет ровно 2^t+1 орбит на $S - \{1\}$, поэтому $\langle f\rangle$ нормализует ровно 2^t+1 подгрупп порядка 2^t из S. Заметим, что если $r = 2^t+1$, то Δ является объединением 2^t изолированных 2^t-клик. Поэтому далее будем считать, что r строго делит 2^t+1. Тогда $V(\Delta)$ допускает разбиение на 2^t X-орбит, каждая из которых является 2^t-кликой, а ввиду того, что $\langle f\rangle$ фиксирует X-орбиту на $V(\Delta)$, содержащую вершину Hg, и переставляет циклически остальные X-орбиты, получим, что Δ — связный граф.

Докажем, что Δ является псевдогеометрическим графом для $pG_{k-1}(2^t, k-1)$. Для этого рассмотрим следующую систему инцидентности D на S. Точки системы D — это элементы группы S. Далее, определим множество блоков системы D как множество X^{w^i}-орбит на S для всех $i \in \{1,..,(2^t+1)/r\}$. Для $i \in \{1,..,(2^t+1)/r\}$ через $\mathcal{B}_i$ обозначим множество X^{w^i}-орбит на S. Тогда множество $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^{(2^t+1)/r}$ формирует разбиение множества всех блоков системы D на $(2^t+1)/r$ параллельных классов, $|\mathcal{B}_i| = 2^t$ и $S\langle f \rangle$ действует 2-транзитивно на $\mathcal{B}_i$. Покажем, что D является $(2^t, (2^t+1)/r; 1)$-сетью.

По построению, точка $\{1\}$ инцидентна $(2^t+1)/r$ блокам, причем ровно одному блоку из каждого параллельного класса. Ввиду транзитивности действия H на S получим, что каждая точка из D инцидентна ровно $(2^t+1)/r$ блокам.

Покажем теперь, что любые два блока из разных параллельных классов инцидентны ровно одной общей точке. Предположим, что это не так и найдутся такие элементы $y_1, y_2 \in S, y_1 \neq y_2$, что $y_1, y_2 \in B_i \cap B_j$ для некоторых блоков $B_i \in \mathcal{B}_i, B_j \in \mathcal{B}_j$. Тогда $1, y_2y_1^{-1} \in (B_i \cap B_j)y_1^{-1} = B_iy_1^{-1} \cap B_jy_1^{-1}$ и $y_2y_1^{-1} \in X^{w^i} \cap X^{w^j}$. Но тогда $y_1 = y_2$, противоречие. Отсюда D — это $(2^t, (2^t+1)/r; 1)$-сеть. Ясно, что граф коллинеарности построенной сети D изоморфен графу $\mathrm{Cay}(S, x^{\langle h^r \rangle})$. Значит, ввиду леммы 3.31, Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(m^2, k(m-1), (k-1)(k-2)+m-2, k(k-1))$, где $m = 2^t$ и $k = (2^t+1)/r$. Утверждение (1) теоремы доказано.

Пусть V — это векторное пространство размерности n над конечным полем порядка q с невырожденной квадратичной формой Q. Напомним, что *аффинно полярным графом* называется граф на множестве векторов пространства V, две вершины x и y которого смежны тогда и только тогда, когда $Q(x-y) = 0$ и $x \neq y$. Этот граф обозначается через $\mathrm{VO}^+(n,q), \mathrm{VO}^-(n,q)$ или $\mathrm{VO}(n,q)$ в случаях, если форма Q гиперболическая, эллиптическая или параболическая соответственно. Известно, что если число n четно, то граф $\mathrm{VO}^{\pm}(n,q)$ сильно регулярен с параметрами $(q^n, (q^{n/2-1} \pm 1)(q^{n/2} \mp 1), q(q^{n/2-2} \pm 1)(q^{n/2-1} \mp 1) + q - 2, q^{n/2-1}(q^{n/2-1} \pm 1))$ (см. например, [46, гл. 3]).

Лемма 3.33. *Если t четно и r делит $2^{t/2}+1$, то либо (i) $r = 2^{t/2}+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, (2^{t/2}-1)(2^t+1), 2^{t/2}-2, 2^{t/2}(2^{t/2}-1))$, либо (ii) $r < 2^{t/2}+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, z(2^{t/2}-1)(2^t+1), z(2^{t/2}-1)(3+z(2^{t/2}-1)) - 2^t, z(2^{t/2}-1)(1+z(2^{t/2}-1)))$, где $z = (2^{t/2}+1)/r$.*

Доказательство. Пусть t четно и $r = 2^{t/2}+1$. Положим $u = h^{2^t-1}$ и $y = h^{(2^t+1)(2^{t/2}+1)}$. Тогда $\langle h^r \rangle = \langle u \rangle \times \langle y \rangle$. Покажем, что граф Δ изоморфен аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$. Для этого введем на S структуру векторного пространства размерности 4 над полем из $2^{t/2}$ элементов. Определим бинарные операции $+$ на S и $\cdot$ на $S - \{1\}$ по правилам: $s_1 + s_2 = s_1s_2$ для всех $s_1, s_2 \in S$, и $s_1 \cdot s_2 = x^{h_1h_2}$ для всех $s_1, s_2 \in S - \{1\}$, где элементы $h_1, h_2 \in \langle h \rangle$ такие, что $s_i = x^{h_i}$, $i = 1, 2$. Тогда $F = (S, +, \cdot)$ образует поле порядка 2^{2t}. Пусть X подгруппа из S порядка $2^{t/2}$, нормализуемая элементом y. Можно считать, что $x \in X$. Тогда $\tilde{X} = (X, +, \cdot)$ образует подполе порядка $2^{t/2}$ поля $\tilde{S}$ и $\tilde{S}$ можно рассматривать как векторное пространство размерности 4 над $\tilde{X}$, сопоставляя элементам $\alpha \in \tilde{X}$ и $v \in \tilde{S}$ вектор $\alpha v = \alpha \cdot v$.

Положим $w = h^{2^t+1}$ и $z = h^{(2^t+1)(2^{t/2}-1)}$. Тогда $\langle w\rangle$ нормализует ровно 2^t+1 подгрупп порядка 2^t из S. Пусть A_1, A_2 — две такие подгруппы, причем $A_1^u = A_2$ и $x \in A_1$. Тогда $A_i = \{1\} \cup v_i^{\langle w\rangle}$, где $i = 1, 2$, для $v_1 = x$ и некоторого $v_2 \in S$, $A_1 \cap A_2 = 1$, $A_1 \times A_2 = S$, и $v_2 \in x^{\langle u\rangle}$. Поэтому $\tilde{S} = \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2$ — прямая сумма двух подпространств $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ размерности 2, соответствующих группам A_1, A_2. Пусть u_1, u_2 — два линейно независимых вектора из $\tilde{S}$, $u_i \in \tilde{A}_i, u_i \neq v_i$. Пусть $P = \langle v_1, v_2\rangle$ — это пространство, порожденное векторами v_1, v_2, и $W = \langle u_1, u_2\rangle$ — пространство, порожденное векторами u_1, u_2. Тогда $\tilde{S} = P \oplus W$.

Пусть $b^2 + b + \alpha$ — некоторый неприводимый многочлен над $\tilde{X}$. Зададим на $\tilde{S}$ невырожденную квадратичную форму Q, полагая $Q(v_i) = 0$, $Q(u_1) = 1$, $Q(u_2) = \alpha$, $f_Q(v_1, v_2) = f_Q(u_1, u_2) = 1$, $f_Q(v_i, u_j) = 0$ для всех $i, j \in \{1, 2\}$, где f_Q — поляризация для Q. Тогда для произвольного вектора $v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 \in \tilde{S}$ имеем $Q(v) = \gamma_1\gamma_2 + \delta_1^2 + \delta_1\delta_2 + \alpha\delta_2^2$. Через Φ обозначим аффинно полярный граф на $\tilde{S}$ относительно квадратичной формы Q. По определению, вершины y_1, y_2 графа Φ смежны, если и только если $Q(y_1 + y_2) = 0$ и $y_1 \neq y_2$. Очевидно, что действие ρ группы S на $\tilde{S}$ трансляциями определяет регулярную на $V(\Phi)$ группу автоморфизмов $\rho(S)$ графа Φ, а действие φ группы $\langle y\rangle$ на $\tilde{S}$ по правилу $\varphi(y) : s \mapsto s^y$ задает группу автоморфизмов $\varphi(\langle y\rangle)$ графа Φ, фиксирующую нулевой вектор и полурегулярную на его окрестности.

Группа $O^-(\tilde{S}, Q)$ изометрий пространства $(\tilde{S}, Q)$ действует транзитивно на множестве ненулевых сингулярных векторов и содержит простую подгруппу $(O^-(\tilde{S}, Q))^{(1)} = \Omega^-(\tilde{S}, Q)$ индекса 2. Ясно, что любая изометрия пространства $(\tilde{S}, Q)$ централизует $\varphi(\langle y\rangle)$ и нормализует $\rho(S)$. Ввиду изоморфизма $\Omega_4^-(2^{t/2}) \simeq L_2(2^t)$ (см., например, [92, предложение 2.9.1 (v)]), получим, что $\langle u\rangle$ изоморфно вкладывается в группу $\Omega^-(\tilde{S}, Q)$. Пусть ψ — это данное вложение. Тогда группа $\psi(\langle u\rangle)$ действует регулярно на множестве одномерных сингулярных подпространств пространства $(\tilde{S}, Q)$. Таким образом, $\psi(\langle u\rangle)$ действует транзитивно на $2^t + 1$ изолированных $(2^{t/2} - 1)$-кликах из окрестности нулевого вектора в Φ. Теперь по предложению 1.5, получим, что $\Phi \simeq \Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle) \simeq \Delta$.

Пусть теперь r — это собственный делитель числа $m = 2^{t/2} + 1$. Применим рассуждения из [109, с.67], отождествляя, как и выше, группу S с полем порядка 2^{2t}. Для каждого $j \in \{1, 2, .., m\}$ положим $\Gamma_j = \mathrm{Cay}(S, (x^{h^j})^{\langle h^m\rangle})$. Пусть $J \subset \{1, 2, .., m\}$ и Γ_J — это граф на множестве элементов группы S, в котором вершины s_1 и s_2 смежны тогда и только тогда, когда s_1 и s_2 смежны в графе Γ_j для некоторого $j \in J$. Тогда матрица смежности графа Γ_J имеет три различных собственных значения: $z(q-1)/m$, $z(2^{t/2} - 1)$, $z(2^{t/2} - 1) - 2^t$, где $z = |J|$. Значит, Γ_J — сильно регулярный граф с параметрами из пункта (ii) заключения. Заметим, что если J состоит в точности из чисел, кратных r и не превосходящих m, то $\Gamma_J = \mathrm{Cay}(S, x^{\langle h^z\rangle}) \simeq \Delta$, где $z = m/r$. Утверждение (2) теоремы доказано.

Лемма 3.34. *Если r — простой делитель числа $q-1$, 2 — примитивный элемент по модулю r и $(r-1)$ делит $2t$, то Δ — сильно регулярный граф (ранга 3) с параметрами $(2^{2t}, (2^{2t}-1)/r, (2^{2t}-3r+1+\epsilon(r-1)(r-2)2^t)/r^2, (2^{2t}-r+1-\epsilon(r-2)2^t)/r^2)$, где $\epsilon = (-1)^{2t/(r-1)+1}$, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта–Шрайвера.*

Доказательство. Эта лемма является следствием теоремы 4 из [109]. Лемма, а вместе с ней и теорема 3.6, доказаны.

§§ 3.4.2. Доказательство теоремы 3.7

Пусть выполнены условия теоремы 3.7 и G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ. Обозначим через φ действие, индуцированное группой G на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Так как $(r, n) = 1$, то ввиду леммы 1.6 действие φ точное и $\varphi(G) \simeq G$.

Пусть группа G неразрешима. Тогда по теореме Бернсайда (см., например, [129, теорема 11.7]) $\varphi(G)$ — это 2-транзитивная группа подстановок на Σ. По условию $(r, n-1) = 1$, поэтому Γ — реберно симметричный граф. Теперь ввиду теоремы 1.16 $\Gamma \simeq \mathrm{M}(n-1, r)$.

Если же группа G разрешима, то по теореме Галуа (см., например, [129, теорема 11.6]) стабилизатор любых двух антиподальных классов в G тривиален, противоречие с тем, что для $F \in \Sigma$ группа $G_{\{F\}}$ содержит элемент порядка r. Теорема 3.7 доказана.

Пример 3.35. Пусть $\Gamma = \mathrm{M}(n-1, r)$ и число r — простое.

При $n = 5$ граф Γ изоморфен графу прямых графа Петерсена.

При $n = 17$ имеем $r = 3$ и Γ — локально свернутый 5-куб, или $r = 5$ и Γ — локально $4 \times K_4$-граф (через $m \times \Phi$ здесь и ниже обозначается объединение m изолированных копий графа Φ).

Если $n = 257$, то либо $r = 3$ и Γ — локально граф Ван-Линта–Шрайвера с параметрами $(256, 85, 24, 30)$, либо $r = 5$ и Γ — локально $VO^-(4, 4)$-граф, либо $r = 17$ и Γ — локально $16 \times K_{16}$-граф.

Если $n = 65537$, то либо r равно 3 или 5 и Γ — локально граф Ван-Линта–Шрайвера с параметрами $(2^{16}, 21845, 7224, 7310)$ или $(2^{16}, 13107, 2498, 2652)$, соответственно, либо $r = 17$ и Γ — локально $VO^-(4, 16)$-граф, либо $r = 257$ и Γ — локально $2^8 \times K_{2^8}$-граф.

Во всех этих случаях согласно теореме 3.7 граф Γ характеризуется своим массивом пересечений в классе вершинно-транзитивных дистанционно регулярных графов.

§ 3.5. Доказательство теоремы 3.9

В этом параграфе доказывается теорема 3.9. Сначала мы докажем вспомогательные результаты.

Заметим, что д.р.г. Γ с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ имеет $v = 1+27+81+3 = 112$ вершин и спектр $27^1, 3^{63}, -1^{27}, -9^{21}$. Так как $r > 2$ и $m = n^2$, то по предложению 1.2 окрестность любой вершины в Γ — сильно регулярный граф с собственными значениями $a_1 = 2$, 2, -1. Поэтому окрестность вершины в Γ является объединением изолированных треугольников.

Лемма 3.36. *Пусть Γ — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, χ_1 — характер проекции стандартного* *представления ψ группы G на подпространство размерности 63, χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 27, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,*

$$\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) - 2\alpha_3(g) + \alpha_1(g))/12 - 7/3,$$

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1 = 27 - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/4.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 63$ и $\chi_2(g) - 27$ делятся на p.

Доказательство. См. лемму 2.6.

Далее в этом параграфе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ и $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$.

Лемма 3.37. *Если Ω — пустой граф, то либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 84s + 28$ и $\alpha_3(g) = 0$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 8s$ и $\alpha_1(g) = 24l + 16s - 8$.*

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $112 = 2^4 7$, то $p = 7$ или 2.

Пусть $p = 7$. Тогда $\alpha_3(g) = \alpha_0(g) = 0$, $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/12 - 7/3$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 112$. По лемме 1 число $\chi_1(g) - 63 = \alpha_1(g)/12 - 7/3 - 63$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 84s + 28$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_1(g) = (-2\alpha_3(g) + \alpha_1(g))/12 - 7/3$ нечетно. Далее, число $\chi_2(g) - 27 = \alpha_3(g)/4 - 28$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 8s$ и $\alpha_1(g) = 24l + 16s - 8$.

Лемма доказана.

В леммах 3.38–3.40 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $p > 2$, то $\lambda_\Omega = 2$. Далее, каждый μ-подграф в Γ является 8-кокликой и если $p > 7$, то $\mu_\Omega = 8$.

Лемма 3.38. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $p \neq 3$, то Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$;*

(2) *если $p > 3$, то $\Gamma_3(a) \subset \Omega$;*

(3) *любая вершина из Ω смежна с некоторой вершиной из $\Gamma - \Omega$.*

Доказательство. Если $p \neq 3$, то p не делит $|\Gamma_i(a)|$, поэтому Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$.

Для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ является g-допустимым и в случае $p > 3$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Допустим, что Ω содержит $[a]$. Пусть $p > 7$. Тогда любая вершина $u \in \Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i] \cap [a_j]$ для некоторых вершин a_i, a_j из $[a]$. Отсюда $u \in \Omega$, поскольку иначе $|[a_i] \cap [a_j]| \geq p + 1 > 8$. Тогда $\Gamma \subset \Omega$, противоречие.

Пусть $p = 2, 5$ или 7. Тогда в $\Gamma_3(a)$ есть вершина b из Ω и $[b] \subset \Omega$. Иначе, если $[b]$ содержит вершину x из $\Gamma - \Omega$, то $[b]$ содержит вершину x^g, и $[x] \cap [x^g] = \{a_1, ..., a_8, b\}$ для вершин $\{a_1, ..., a_8\} \in [a]$, противоречие. Теперь для вершины $y \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$ получим $|[y] \cap [y^g] \cap \Omega| \geq 16$, противоречие.

Пусть $p = 3$. Тогда $\Omega = a^{\perp}$ и для двух несмежных вершин $b, c \in [a]$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит вершину a и 7 вершин из $\Gamma_2(a) - \Omega$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.39. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *число p не больше 3;*

(2) *если $p = 3$, то либо Ω является 4-кликой, $\alpha_3(g) = 12$, $\alpha_1(g) = 24 + 36l$, либо Ω лежит в антиподальном классе и $|\Omega| \in \{1, 4\}$.*

Доказательство. Пусть $p > 7$. Тогда каждая вершина $u \in \Gamma - \Omega$ смежна не более, чем с одной вершиной из Ω, $|\Omega| \geq 1 + 8 + 1 + 3 = 13$ и $|\Gamma - \Omega| \geq 11|\Omega| \geq 143$, противоречие. Пусть $p > 3$. Тогда $|\Omega| = 4t$, где t — число антиподальных классов, попадающих в Ω, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $28 - t$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $4t(28 - t)$, но не больше $8(112 - 4t)$, поэтому $t^2 - 36t + 224 \geq 0$. Отсюда $t \leq 8$ или равно 28, причем в последнем случае получим $\Gamma \subset \Omega$, противоречие.

Если $p = 7$, то $t = 7$, $|\Omega| = 28$, окрестность вершины в Ω является объединением двух изолированных треугольников, $\mu_\Omega = 1$ и $|\Omega_2(a)| = 18$. Поэтому граф Ω связен. Пусть $\{c_1, c_2, c_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ — два треугольника из $\Omega(a)$ и $[c_1] \cap \Omega_2(a) = \{e_1, e_2, e_3\}$ — треугольник из $\Omega_2(a)$, содержащий вершину e_1, смежную с некоторой вершиной $a_2 \in \Omega_3(a)$. Тогда $[c_1] \cap \Omega(a_2) = \{e_1\}$. В свою очередь, вершина e_1 содержится в некотором треугольнике $\{e_1, x, y\}$ из $\Omega(a_2)$. Так как $\mu_\Omega = 1$, то подграф $[c_1] \cup [c_2] \cup [c_3]$ не содержит ребер $\{e_1, x\}$ и $\{e_1, y\}$. Но тогда $x, y \in [b_1] \cup [b_2] \cup [b_3]$, противоречие.

Если $p = 5$, то $t = 3, 8$, но окрестность вершины в Ω является объединением некоторого числа изолированных треугольников, противоречие с тем, что $t - 1$ не делится на 3.

Пусть $p = 3$ и Γ содержит t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, 3 делит $t - 1$, $|\Omega| = st$, $\alpha_3(g) = (4 - s)t$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 112 - 4t$ и $\chi_1(g) = (9st + \alpha_1(g) - 8t)/12 - 7/3$. По лемме 1 число $\chi_1(g) - 63$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 8t - 9st + 28 + 36l$.

Рассмотрим множество вершин U, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω. Каждая вершина из U смежна в среднем с $st(28 - t)/(112 - 4t) = st/4$ вершинами из Ω, поэтому $st = |\Omega| \leq 32$, $s \in \{1, 4\}$.

Пусть $s = 4$. Тогда $t = 7, 4$ или 1. Если $t = 7$, то окрестность вершины в Ω является объединением двух изолированных треугольников и Ω — связный вполне регулярный граф с параметрами $(28, 6, 2, 2)$. Противоречие с тем, что $|\Omega_2(a)| \neq 9$. Если $t = 4$, то $\mu_\Omega = 2$, но Ω это локально треугольный граф, противоречие. Если $t = 1$, то Ω — это антиподальный класс, содержащий вершину a и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 1 вершиной из Ω, $\alpha_1(g) = 36l$.

Пусть $s = 1$. Тогда либо Ω является 4-кликой, $\alpha_3(g) = 12$, $\alpha_1(g) = 24 + 36l$, либо $|\Omega| = 1$, $\alpha_1(g) = 27 + 36l$. Лемма доказана.

Лемма 3.40. *Если $p = 2$, то Γ содержит $t \geq 2$ антиподальных классов пересекающих Ω по s вершинам, t четно и либо $s = 4$ и $t \leq 8$, либо $s = 2$ и $t \leq 16$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда $s \in \{2,4\}$, Ω — регулярный граф степени $t-1$, число $|\Omega|$ четно, $\lambda_\Omega \in \{0,2\}$, $\mu_\Omega \in \{2,4,6,8\}$ и t четно.

Как и выше доказывается, что $|\Omega| = st \le 32$, кроме того, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (s-1)(t-1)$ и связная компонента графа $\Omega(a)$ является либо треугольником, либо состоит из одной вершины.

Если $t = 2$, то Ω — объединение s изолированных ребер и ровно для одного треугольника Δ из $[a]$ имеем $\Delta = \Delta^g$ и g переставляет вершины $x_1, x_2 \in \Delta$.

Далее, $\chi_1(g) - 63 = (7st - 2\alpha_3(g) + \alpha_1(g))/12 - 7/3 - 63$ делится на 2. Если $s = 4$, то число $(28(t-1) + \alpha_1(g))/12$ нечетно. Если $s = 2$, то число $(14(t-2) - 2\alpha_3(g) + \alpha_1(g))/12$ нечетно.

Лемма, а вместе с ней и предложение 3.8 доказаны.

До конца параграфа Γ — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$, Σ — это множество его антиподальных классов графа Γ, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг графа Γ, $K = \mathcal{CG}(\Gamma)$, $\bar{G} = G/K$ и $\bar{T} = \mathrm{Soc}(\bar{G})$. Зафиксируем произвольно $F \in \Sigma$ и $a \in F$ и обозначим через $G_F(G_{\{F\}})$ поточечный (глобальный) стабилизатор класса F в G. Пусть $\{a,b\}$ — ребро графа Γ. Тогда $|G : G_a| = 112$ и $|G_a : G_{a,b}| = 27$. Так как $[a]$ — объединение изолированных треугольников, то $G_a^{[a]} \le D_6 \wr \mathrm{Sym}_9$ и по лемме 3.38 $G_a^{[a]} \simeq G_a$. Из предложения 3.8 следует, что $G_{a,b}$ является $\{2,3\}$-подгруппой в G.

Легко видеть, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3.41. *Выполняются следующие утверждения.*

(1) *Если $|K| = 4$, то $G_F = G_a \cap C_G(K)$ и $G_{\{F\}} = KG_a$. В частности, если $G_a \le C_G(K)$, то $G_F = G_a$ и $G_{\{F\}} = K \times G_a$.*

(2) *Если $|K| = 2$, то $G_F \le G_a \cap C_G(K)$ и каждый элемент из $G_a \cap C_G(K)$ фиксирует поточечно орбиту $K(a)$ или весь антиподальный класс F.*

Лемма 3.42. $\bar{T} \in \{U_3(3), L_2(8)\}$.

Доказательство. Заметим, что G действует дважды транзитивно на Σ. Так как 28 — не степень простого числа, то аффинный случай невозможен. В почти простом случае из предложения 1.23 следует, что $\bar{T} \in \{A_{28}, L_2(27), U_3(3), Sp_6(2), L_2(8)\}$. Так как $\pi(G) = \{2,3,7\}$, то либо $\bar{T} = U_3(3)$, либо $\bar{T} = L_2(8)$. Лемма доказана.

Лемма 3.43. *Если G содержит нормальную подгруппу T, изоморфную $L_2(8)$, то $K \simeq Z_2 \times Z_2$, каждая T-орбита на Γ содержит ровно по одной вершине из каждого антиподального класса и состоит из вершин, находящихся попарно на расстоянии 2 в Γ.*

Доказательство. Пусть G содержит нормальную подгруппу T и пусть $T \simeq L_2(8)$. Тогда $|\bar{G}| = 2^3 3^3 7$, $\bar{G} \simeq \mathrm{Aut}(L_2(8))$ и 2 делит $|K|$.

Порядок T-орбиты на Γ делится на 28 и не превосходит 56. Если $|T(a)| = 56$, то на множестве вершин графа Γ имеется точно две орбиты O_1 и O_2 группы T, причем каждая из них содержит по две точки из каждого антиподального класса. Через Γ_i, где $i \in \{1,2\}$, обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве вершин из орбиты O_i. Ввиду действия группы K на Γ получим, что $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$. Если Γ_1 является кокликой, то $|T(a)| \leq r(k+1)/(n+1) = 28$, противоречие. Поэтому Γ_1 содержит ребро из Γ. Так как G_a фиксирует орбиту $T(a)$, то Γ_1 является реберно симметричным графом. Значит, для любой вершины $a' \in T(a)$ имеем $a' \cup [a'] \subset T(a)$, противоречие с тем, что граф Γ связен.

Если $|T(a)| = 28$, то $|T_a| = 2 \cdot 3^2$ и, как и выше, получим, что $T(a)$ является кокликой и, поэтому, состоит из вершин, находящихся попарно на расстоянии 2 в Γ. Так как каждая вершина $a_i \in F - \{a\}$ смежна не более, чем с 9 вершинами из $T(a) - \{a\}$, то G_a действует транзитивно на $\Gamma_3(a)$. Поэтому $K \simeq Z_2 \times Z_2$ и, ввиду леммы 3.41, $G_F = G_a \cap C_G(K) = T_a \simeq Z_9 : Z_2$. Лемма доказана.

Лемма 3.44. *Пусть $U = U_3(3)$ и $S, Q \in \mathrm{Syl}_3(U), S \neq Q$. Пусть $L = N_U(S) \cap N_U(Q)$ и g — это элемент порядка 4 из $N_U(L) - L$. Положим $H = S\langle g^2 \rangle$. Тогда $\Gamma(U, H, HgH)$ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления в GAP [59].

Всюду далее в этом параграфе через X будем обозначать граф $\Gamma(U, H, HgH)$ из леммы 3.44.

Лемма 3.45. *Если G содержит нормальную подгруппу T, изоморфную группе $U_3(3)$, транзитивную на вершинах графа Γ, то $\Gamma \simeq X$, $T = G''$ и $C_G(T) = K \simeq Z_4$.*

Доказательство. Пусть G содержит нормальную подгруппу T, изоморфную группе $U_3(3)$, транзитивную на вершинах графа Γ. Тогда $|T : T_a| = 112, |T_a| = 2 \cdot 3^3$ и $|G| = 2^5 3^3 7 s|K|$, где $s = |\bar{G} : \bar{T}|$ делит 2. Поэтому T действует транзитивно на дугах графа Γ.

Пусть ψ — это действие группы $U = U_3(3)$ на множестве вершин графа Γ, такое, что $\psi(U) = T$ и $R_{U/H}$ — это действие группы U правым умножением на множестве U/H правых смежных классов группы U по подгруппе $H = \psi^{-1}(T_x)$, где $x \in V(\Gamma)$.

Зададим биекцию φ множества вершин графа Γ на множество U/H по правилу $\varphi(y) = \{z \in U | \psi(z)(x) = y\}$ для $y \in V(\Gamma)$. Тогда для любого $z \in U$ выполнено равенство $\psi(z) = \varphi^{-1} R_{U/H}(z) \varphi$.

Пусть g — это элемент из U такой, что вершины $y = \psi(g)(x)$ и x смежны, а $\psi(g^2)(x) = x$. Тогда $\varphi(y) = Hg$, $\varphi(x) = H$, $Hg^2 = H$ и $\langle H, g \rangle = U$. Ввиду предложения 1.5 граф $\Gamma(U, H, HgH)$ связен и U действует (правым умножением) точно и транзитивно на вершинах и на дугах графа $\Gamma(U, H, HgH)$.

Пусть $S \in \mathrm{Syl}_3(U)$ и $S \leq H$. Положим $L = N_U(S) \cap N_U(S^g)$. Имеем $g^2 \in L \cap H = \langle h \rangle$, где h — инволюция из L, и $g \in N_U(L) - L$.

Ясно, что отображение φ задает изоморфизм графов Γ и $\Gamma(U, H, HgH)$. Если g — это инволюция из $N_U(L) - L$, то, как показывают компьютерные вычисления в GAP [59], $\Gamma(U, H, HgH)$ не является дистанционно регулярным графом, противоречие. Следовательно, g — это элемент порядка 4 из $N_U(L) - L$. Так как в $N_U(L) - L$ содержится всего два элемента порядка 4, то $X \simeq \Gamma$.

Компьютерными вычислениями в GAP [59] устанавливается, что $G = (Z_4 \times U_3(3)) : Z_2$, $G'' \simeq U_3(3)$, $C_G(G'') = K$, при этом каждый элемент порядка 3 из G фиксирует поточечно ровно один антиподальный класс графа Γ, G_a имеет две орбиты на $\Gamma_3(a)$, ранг группы G равен 6 и $1 < Z(G) < K \simeq Z_4$. Лемма доказана.

Лемма 3.46. *Если z — это неединичный элемент порядка 2 из $K \cap Z(G)$, то частное $\tilde{\Gamma}$ графа Γ на множестве $\langle z \rangle$-орбит является дистанционно транзитивным графом с массивом пересечений $\{27, 16, 1; 1, 16, 27\}$ и группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\tilde{\Gamma}) \simeq Z_2 \times Sp_6(2)$.*

Доказательство. Если $K_0 \leq K \cap Z(G)$ и $|K_0| = 2$, то по лемме 1.4 частное $\tilde{\Gamma}$ графа Γ на множестве K_0-орбит является дистанционно транзитивным графом с массивом пересечений $\{27, 16, 1; 1, 16, 27\}$. Известно (см. [121] или теорему 1.13), что существует единственная (с точностью до изоморфизма) пара Φ и Φ' дополнительных дистанционно-транзитивных графов Тейлора с массивами пересечений $\{27, 16, 1; 1, 16, 27\}$ и $\{27, 10, 1; 1, 10, 27\}$, причем $\mathrm{Aut}(\Phi) = \mathrm{Aut}(\Phi') = Z_2 \times Sp_6(2)$. Лемма доказана.

Так как $K \neq 1$, то, очевидно, выполняется одна из следующих трех возможностей.

(i) Если $K \simeq Z_2$, то $K = Z(G)$ и $G_a \times K \trianglelefteq G_{\{F\}}$.

(ii) Если $K \simeq Z_2 \times Z_2$, то $G/C_G(K) \simeq B \leq S_3$.

(iii) Если $K \simeq Z_4$, то $G/C_G(K) \simeq B \leq Z_2$, откуда $|K \cap Z(G)| \geq 2$.

Лемма 3.47. $\Gamma \simeq X$.

Доказательство. Пусть N — это нормальная подгруппа в G, содержащая K такая, что $N/K = \mathrm{Soc}(G/K)$. Тогда $N/K \leq C_G(K)/K$ и $N \leq C_G(K)$.

В случае, если $N = N'$, то $K \leq Z(N) \cap N'$ и поэтому $K \leq \mathrm{M}(N/K)$. Противоречие с тем, что $(N/K, \mathrm{M}(N/K)) \in \{(U_3(3), 1), (L_2(8), 1)\}$ и $K \neq 1$.

Значит, коммутант N' группы N — собственная подгруппа в N. Так как N/K — это неабелева простая группа и N/N' — абелева группа, то $K \not\leq N'$ и $N = KN'$. Если K — минимальная нормальная подгруппа в G (например, в случае $K \simeq Z_2$ или, быть может, в случае $K \simeq Z_2 \times Z_2$), то $K \cap N' = 1$, откуда $N = K \times N'$ и $N' \simeq N/K$.

Если $K \simeq Z_2$, то G содержит нормальную подгруппу N' изоморфную $L_2(8)$ или $U_3(3)$, противоречие с леммами 3.43, 3.45.

Осталось рассмотреть следующие две возможности:

(1) $K \cap N' = 1$;

(2) $K \cap N' \neq 1$ и либо $K = \langle j \rangle \simeq Z_4$, $j \in N - N'$ и $K \cap N' = \langle j^2 \rangle$, либо $K = \langle t \rangle \langle j \rangle \simeq Z_2 \times Z_2$, $j \in N - N'$ и $K \cap N' = \langle t \rangle$.

Рассмотрим сначала случай (2). Предположим, что $N' = N''$. Тогда $K \cap N' \leq Z(N')$ и $N/K = N'K/K \simeq N'/(K \cap N')$ — простая неабелева группа, поэтому $K \cap N' \leq \mathrm{M}(N'/(K \cap N'))$. Противоречие с тем, что $(N'/(K \cap N'), \mathrm{M}(N'/(K \cap N'))) \in \{(U_3(3), 1), (L_2(8), 1)\}$ и $K \cap N' \neq 1$.

Поэтому $N'' < N'$. Так как $N'/(K \cap N')$ — это неабелева простая группа и N'/N'' — абелева группа, то $K \cap N' \not\leq N''$ и $N' = (K \cap N')N''$. Так как $K \cap N'$ — минимальная нормальная подгруппа в N', то $K \cap N'' = 1$, откуда $N' = (K \cap N') \times N''$ и $N'' \simeq N'/(K \cap N')$. Отсюда G содержит нормальную подгруппу N'' изоморфную $L_2(8)$ или $U_3(3)$. Предположим, что $N'' \simeq L_2(8)$. Тогда ввиду леммы 3.43 N'-орбита на множестве вершин графа Γ состоит из объединения ровно двух N''-орбит. Поскольку порядок коклики в Γ не больше 28, то $N'(a)$ содержит ребро. Но тогда G_a фиксирует орбиту $N''(a)$ и $a' \cup [a'] \subset N'(a')$ для любой вершины $a' \in N'(a)$, противоречие со связностью графа Γ. Аналогичными рассуждениями получим, что в случае $N'' \simeq U_3(3)$ группа N'' транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда $|N'' \cap G_a| = |N''|/112 = 2 \cdot 3^3$ и N'' действует транзитивно на дугах графа Γ. Тогда $\Gamma \simeq X$, $N \simeq Z_4 \times U_3(3)$ и $N' \simeq U_3(3)$, противоречие.

В случае (1) имеем $N = K \times N' \trianglelefteq G$. Если $N' \simeq U_3(3)$, то группа N' транзитивна на вершинах и на дугах графа Γ, и $\Gamma \simeq X$.

Пусть $N' \simeq L_2(8)$. Согласно лемме 3.43 $|N'(a)| = 28$ и $K \simeq Z_2 \times Z_2$. Отсюда N транзитивна на вершинах графа Γ и $K \leq Z(N)$. Кроме того, группа $N'G_a$ действует 2-транзитивно на вершинах из орбиты $N'(a)$, поэтому $N'G_a \simeq \mathrm{Aut}(L_2(8))$ и в G_a есть 3-элемент h такой, что $G = (N' \times K)\langle h \rangle$. Пусть $h \in N_G(K) - C_G(K)$. Тогда $hg_1h^{-1}(a) = hg_1(a) = g_2(a)$ для любых двух инволюций $g_1, g_2 \in K$, поэтому h индуцирует 3-цикл на $F - \{a\}$. Значит, группа $K\langle h \rangle$ действует 2-транзитивно на F. Но тогда $SL(2,2) \leq (K\langle h \rangle)_a^F \simeq \langle h \rangle^F$, противоречие.

Отсюда $h \in C_G(K)$ и $G = (N'\langle h \rangle) \times K$. Но тогда группа $N'G_a$ фиксирует каждую N'-орбиту на Γ и действует 2-транзитивно на $N'(a)$, противоречие с тем, что $\mu = 8$. Лемма и теорема 3.9 доказаны.

Глава 4. Транзитивные на дугах группы автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа диаметра 3: почти простой случай

Цель настоящей главы — завершить классификацию реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в случае, когда полная группа автоморфизмов графа индуцирует почти простую группу подстановок на множестве его антиподальных классов.

Одним из основных результатов данной главы являются следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$*, где* $r\notin\{2,k\}$ *и* $\lambda\neq\mu$*. Пусть* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* Σ *— это множество антиподальных классов графа* Γ *и* G^{Σ} *— это группа подстановок, индуцируемая группой* G *на* Σ*. Предположим, что цоколь* $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ *группы* G^{Σ} *является простой неабелевой группой. Тогда* $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})\simeq U_3(q)$ *и* G *содержит нормальную подгруппу, изоморфную группе* $U_3(q)$ *или* $SU_3(q)$*, которая действует транзитивно на дугах графа* Γ*,* $k=q^3$*,* $\mu=(q+1)(q^2-1)/r$ *и* r *делит* $q+1$*.*

Следствием теорем 1.16, 1.15, 4.1, 3.1, 3.3 и [40, предложение 12.5.3] является следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть* Γ *— это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с массивом пересечений* $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$*, где* $r\notin\{2,k\}$*,* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* Σ *— это множество антиподальных классов графа* Γ*. Предположим, что цоколь* $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ *группы подстановок* G^{Σ}*, индуцируемой группой* G *на* Σ*, является простой неабелевой группой. Тогда* G *содержит нормальную подгруппу, накрывающую для* $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$*, которая действует транзитивно на дугах графа* Γ*, и четверка* $(\mathrm{Soc}(G^{\Sigma}),k,r,\mu)$ *описывается таблицей 2, при этом для каждой фиксированной допустимой четверки* $(\mathrm{Soc}(G^{\Sigma}),k,r,\mu)$ *граф* Γ *является единственным (с точностью до изоморфизма).*

Основные результаты главы опубликованы в статьях [141, 143], формулировка итоговой теоремы 4.2 для почти простого случая представлена в [150, теорема 2.4.1]).

Обозначения и предположения главы 4. Всюду далее в этой главе Γ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, Σ — множество антиподальных классов графа Γ (так что по лемме 1.4(1) группа G^{Σ} 2-транзитивна), $K=\mathcal{CG}(\Gamma)$, $a\in F\in\Sigma$, $E\in\Sigma-\{F\}$, $b\in E\cap[a]$, $H=G_{\{F\}}$ и $C=G_F$, при этом предполагается, что $\mathrm{Soc}(G^{\Sigma})$ — простая неабелева группа, $2<r<k$ и $\lambda\neq\mu$. Кроме того, мы полагаем $\mu>1$ и обозначаем через n и $-m$ соответственно положительное и отрицательное собственные значения графа Γ, отличные от -1 и k.

До конца главы также используются следующие обозначения: $\bar{G}=G/K(\simeq G^{\Sigma})$, $\bar{T}=\mathrm{Soc}(G/K)$ и T — полный прообраз группы $\bar{T}$ в G.

Таблица 2: Параметры и конструкции реберно симметричных антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3 с $2 < r < k$ и почти простой группой $\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma$

#	$\mathrm{Soc}(G^\Sigma)$	Параметры (k, r, μ)	Условия	Конструкция	Тип
1	$L_2(q)$	$(q, r, \frac{q-1}{r})$	$q \geq 4$, r делит $\frac{q-1}{(2,q-1)}$	1.7	$\lambda = \mu$
2	$U_3(q)$	$(q^3, r, \frac{q^3-1}{r})$	$q \geq 4$, r нечетно, r делит $q-1$	1.9/теорема 3.3	$\lambda = \mu$
3	$Sz(q)$	$(q^2, r, \frac{q^2-1}{r})$	$q \geq 8$, r делит $q-1$	теорема 3.1	$\lambda = \mu$,
4	${}^2G_2(q)$	$(q^3, r, \frac{q^3-1}{r})$	$q \geq 27$, r делит $\frac{q-1}{2}$	теорема 3.1	$\lambda = \mu$
5	$U_3(q)$	$(q^3, r, \frac{(q+1)(q^2-1)}{r})$	$q \geq 3$, r делит $\frac{q+1}{(2,q+1)}$	1.8/теорема 3.3	$\lambda \neq \mu$
6	$U_3(q)$	$(q^3, r, \frac{(q+1)(q^2-1)}{r})$	$q \geq 3$, r делит $q+1$, q и $(q+1)/r$ нечетны	теорема 3.3	$\lambda \neq \mu$

Сведения о мультипликаторах Шура конечных простых групп, применяемые в доказательстве, можно найти, например, в [10, с. 316–317, таблица 4.1].

В последующих рассуждениях мы будем применять классификацию почти простых дважды транзитивных групп подстановок (см. предложение 1.23), а также описание степеней их минимальных подстановочных представлений (см. предложение 1.24).

§ 4.1. Случай тривиальной накрывающей группы

Здесь мы докажем предложение 4.3 и рассмотрим случай $K = 1$.

Предложение 4.3. *T не содержит нормальных в G подгрупп N со свойством $|N : N \cap G_a| = k+1$.*

Доказательство. Пусть T содержит нормальную в G подгруппу N со свойством $|N : N \cap G_a| = k+1$. Тогда любая N-орбита содержит единственный элемент из каждого антиподального класса. Группа G_a действует транзитивно на $[a]$, поэтому каждая N-орбита состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 2, и имеется t ($t < r$) орбит, в каждой из которых a смежна точно с α вершинами, в частности, $k = t\alpha$.

Вершина из $[a]$ смежна с $\alpha - 1$ вершинами из $a^N - \{a\}$, между $[a]$ и $a^N - \{a\}$ имеется точно $k(\alpha-1)$ ребер, поэтому вершина из $a^N - \{a\}$ смежна в среднем с $\alpha - 1$ вершинами из $[a]$. Отсюда $\alpha - 1 = \mu$ и $k = t(\mu+1)$. Так как $b_1 = (r-1)\mu$, то $\lambda = k - b_1 - 1 = t + \mu - (r-t)\mu - 1$ и $\lambda - \mu = t - 1 - (r-t)\mu$, в частности, $t - 1 \geq (r-t-1)\mu$.

Если $t < r-1$, то Γ содержит $2(k+1)$-коклику и ввиду границы Хофмана для коклик (см, например, [40, предложение 1.3.2]) имеем $2(k+1) \leq m(k+1)r/(k+m)$, поэтому $n + 1 \leq r/2$ и $m - 1 \geq 2\mu$. Так как G_a действует транзитивно на множестве Δ, состоящем из N-орбит, пересекающих $[a]$, то каждая вершина из $[a]$ смежна с вершинами s орбит из

Δ для некоторого $s < t-1$ (в случае $s = t-1$ множество вершин, лежащих в a^N, вместе с вершинами орбит из Δ, индуцирует связный подграф степени k из Γ, противоречие).

Число ребер между объединением N-орбит, в которых нет a и смежных с a вершин, и $[a]$ равно $(r-t-1)k\mu$. Поэтому вершина из $[a]$ смежна точно с $(r-t-1)\mu$ вершинами в этом объединении, $r-t-1$ делится на $\mu+1$ и $(r-t-1)\mu/(\mu+1) = t-s-1$. Отсюда $(r-2t+s)\mu = t-s-1$, $t-s-1 = z\mu$ и $r-t-1 = z(\mu+1)$, следовательно, $t = s+1+z\mu$ и $r = s+2+z(2\mu+1)$. Так как $s(\mu+1) = \lambda+(t-1)\mu$, то $s = z\mu^2+\lambda$ и $t \geq z\mu^2+z\mu+1$.

Множество N_a-орбит на $[a]$ образует систему импримитивности группы G_a на $[a]$. Для вершины $c \in F-\{a\}$ такой, что $|c^N \cap [a]| > 0$, множество $[a]\cap c^N$ является объединением некоторого числа N_a-орбит, поэтому порядок N_a-орбиты на $[a]$ делит число $\mu+1$.

Далее, N_a поточечно фиксирует F и $N_a = N_F \leq C$. Группа G содержит группу NG_a, дважды транзитивную на a^N (действие NG_a на a^N точное, так как элемент из NG_a, фиксирующий поточечно a^N, фиксирует поточечно каждый антиподальный класс). Через S обозначим цоколь группы NG_a. Пусть $(S,k+1) \neq (L_2(8),28)$. Тогда S — дважды транзитивная группа подстановок на a^N, $S_a \leq N_a$ и поэтому группа N_a транзитивна на $a^N-\{a\}$. Так как N_a поточечно фиксирует F, то N_a транзитивна на $c^N-\{c\}$, где $c \in F\cap b^N$, поэтому вершина a смежна с $\mu+1 = k$ вершинами из $c^N-\{c\}$. Отсюда $r = 2$, противоречие. Пусть теперь $(S,k+1) = (L_2(8),28)$. В случае $t < r-1$ получим $t(\mu+1) = 27$, поэтому $\mu = 2$, $t = 9$, противоречие с тем, что $t \geq z\mu^2+z\mu+1$. В случае $t = r-1$ получим, что либо $r = 4$ и Γ имеет массив пересечений $\{27,24,1;1,8,27\}$, либо $r = 9$ и Γ имеет массив пересечений $\{27,18,1;1,2,27\}$. Противоречие с [8]. Предложение доказано.

Лемма 4.4. *Если $K = 1$, то группа T транзитивна на $V(\Gamma)$*

Доказательство. Предположим, что группа T интранзитивна на $V(\Gamma)$. Порядок T-орбиты на Γ делит $r(k+1)$ и делится на $k+1$, поэтому $|T_{\{F\}} : T_a| = s$ делит r. Ввиду предложения 4.3 $|T : T_a| > k+1$ и $|T_{\{F\}} : T_a| > 1$.

Пусть $|T_{\{F\}} : T_a| < r$. Тогда a^T является кокликой и ввиду границы Хофмана для коклик имеем $|a^T| \leq r(k+1)/(n+1)$ и $|T_{\{F\}} : T_a| \leq r/(n+1) = (m-1)/\mu$. Значит, $|G/T| = r|G_a : T_a|/|T_{\{F\}} : T_a| \geq r|G_a : T_a|/(r/(n+1)) = (n+1)|G_a : T_a|$.

При $T \notin \{L_d(q), Sz(q), {}^2G_2(q), U_3(q)\}$ имеем $|G/T| \leq 2$. С другой стороны, $|G/T| \geq 3$, противоречие.

Пусть $T \in \{L_2(q), Sz(q), {}^2G_2(q), U_3(q)\}$. Так как k — степень простого числа, то $(r,k) = 1$ и $\lambda > 0$. Ввиду равенства $s|T_a : T_{a,b}| = k|T_{\{F\},\{E\}} : T_{a,b}|$ получим, что T_a транзитивна на $[a]$ и T транзитивна на множестве вершин графа Γ, противоречие.

Пусть $T = L_d(q)$, $q = p^e$ и $d \geq 3$. Тогда $G \leq \mathrm{P\Gamma L}_d(q)$, $k = q(q^{d-1}-1)/(q-1)$, $|G/T|$ делит $e(d,q-1)$ и $T_{\{F\}} = R\cdot S\cdot Z_{(q-1)/(q-1,d)}$, где R — это элементарная абелева группа порядка q^{d-1} и $S \simeq SL_{d-1}(q)$. Ввиду неравенства $k \leq n^3$ получим, что $n \geq (q^{d-1}+q^{d-2}+\ldots+q)^{1/3}$. По доказанному выше, имеем $|G/T| \geq (n+1)|G_a : T_a|$, что влечет $G_a = T_a$. Поэтому на $V(\Gamma)$ имеется всего две T-орбиты и $|G : T| = 2$, в частности, $\lambda = 0$, $|G_{\{F\},\{E\}} : T_{\{F\},\{E\}}| = 2$ и $|T_{\{F\},\{E\}} : T_{a,b}| = s$. Далее, орбита $a^{T_{\{F\}}}$ образует блок импримитивности группы G на $V(\Gamma)$. Пусть π — соответствующая система импритивности. Ввиду того, что $T_{\{F\},\{E\}}$ транзитивна на $a^{T_{\{F\}}}$ для блока $B = b^{T_{\{F\},\{E\}}} \in \pi$, получим, что подграф, индуцированный Γ на множестве $a^{T_{\{F\}}} \cup B$ является совершенным паросочетанием. Поэтому система импритивности π задает равномерное разбиение множества вершин графа Γ и частное $\Gamma' = \Gamma/\pi$ — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, s\mu, 1; 1, s\mu, k\}$. Заметим, что $k - 1 - s\mu = \lambda' = 0$. Поэтому Γ — двудольный граф и $r = 2$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть $(\bar{T}, k+1) \neq (L_d(q), (q^d-1)/(q-1))$. Если T содержит нормальную в G подгруппу N, изоморфную группе $\bar{T}$ и транзитивную на вершинах графа Γ, то $N = U_3(q)$ транзитивна на дугах графа Γ, r делит $q+1$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$.*

Доказательство. Если $N = A_{k+1}$, то $N_{\{F\}} \in \{A_k, S_k\}$ и $|N_{\{F\}} : N_a| = r$, противоречие с тем, что $k > (r-1)\mu$.

Если $N = Sp_{2s}(2)$, $k+1 = 2^{2s-1} \pm 2^{s-1}$, $s \geq 3$, то $N_{\{F\}} = GO^{\pm}_{2s}(2)$. Если $s = 3$, то степени минимальных подстановочных представлений групп $O^{+}_{2s}(2) \simeq A_8$ и $O^{-}_{2s}(2) \simeq U_4(2)$ равны 8 и 27 соответственно. При $s \geq 4$ минимальные подстановочные представления групп $O^{+}_{2s}(2)$ и $O^{-}_{2s}(2)$ имеют степени, равные $2^{s-1}(2^s-1)$ и $(2^s+1)(2^{s-1}-1)$ соответственно (см., например, [4]). Случай $k = 35$ исключается с помощью вычислений в GAP [59]. Если $N'_{\{F\}}$ действует точно на F, то получим противоречие с тем, что $(r-1)2 < k$. Значит, $N'_{\{F\}} \leq C$ и $r = 2$, противоречие.

Заметим, что если N действует интранзитивно на множестве дуг графа Γ, то k не является степенью простого числа и $(r, k) > 1$. Положим $\alpha = |G : N| (= |G_{\{F\},\{E\}} : N_{\{F\},\{E\}}|)$. Тогда $\tilde{\alpha} = r/|N_{\{F\},\{E\}} : N_{a,b}|$ делит α. Из равенства

$$|N_{\{F\}}| = r|N_a| = r|N_a : N_{a,b}||N_{a,b}| = |N_{\{F\}} : N_{\{F\},\{E\}}||N_{\{F\},\{E\}} : N_{a,b}||N_{a,b}|$$

следует, что $r|N_a : N_{a,b}| = \tilde{\alpha}|N_{\{F\},\{E\}} : N_{a,b}||N_a : N_{a,b}| = k|N_{\{F\},\{E\}} : N_{a,b}|$ и $|N_a : N_{a,b}| = k/\tilde{\alpha}$.

Если $N = U_3(q)$, $k = q^3$, $q \geq 3$, то $N_{\{F\}}$ — расширение группы P порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $(q^2-1)/(3, q+1)$, $N_{\{F\}}$ содержит подгруппу N_a индекса r и r делит $(q^2-1)/(3, q+1)$. При $r = 2$ возникает известный дистанционно транзитивный граф с $\mu \in \{(q \pm 1)(q^2 \mp 1)/2\}$, где q нечетно. По теореме 3.3 в случае, когда r делит $q+1$ возникает граф с массивом пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$ (причем в случае, когда r делит $(q+1)/(2, q+1)$ — это граф из конструции Камерона 1.8). В случае, когда r нечетно и делит $q-1$ возникает граф с массивом пересечений $\{q^3, (r-1)(q^3-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$ и $\lambda = \mu$. Ввиду теоремы 3.3 других графов, допускающих транзитивную на дугах группу автоморфизмов, изоморфную группе N, не имеется.

В случаях $N \in \{L_2(q), {}^2G_2(q), Sz(q)\}$, как и в доказательстве теоремы 3.3, устанавливается, что дистанционно регулярные графы с $r > 2$ возникают только в случае $\lambda = \mu$. Если $N = L_2(q)$ и $k = q$, то r делит $(q-1)/(2, q-1)$. Если $N = {}^2G_2(q), q = 3^{2e+1} > 3, k = q^3$, то $N_{\{F\}}$ — расширение группы порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $(q-1)$, N_a действует транзитивно на $[a]$ и r делит $(q-1)/2$. В этом случае Γ имеет массив пересечений $\{q^3, (r-1)(q^3-1)/r, 1; 1, (q^3-1)/r, q^3\}$. Если $N = Sz(q)$, $q = 2^{2e+1} \geq 8$, то

$N_{\{F\}}$ — расширение группы порядка q^2 с помощью циклической группы порядка $(q-1)$, $N_{\{F\}}$ содержит подгруппу N_a индекса r, r делит $q-1$ и Γ имеет массив пересечений $\{q^2,(r-1)(q^2-1)/r,1;1,(q^2-1)/r,q^2\}$.

Пусть пара $(N,k+1)$ одна из: Матье (M_l,l), $l\in\{11,12,22,23,24\}$ или спорадические $(L_2(11),11)$, $(M_{11},12)$, $(A_7,15)$, $(L_2(8),28)$, $(HiS,176)$, $(Co_3,276)$.

В случаях (M_l,l) и $l=\{12,24\}$ число $k=l-1$ простое, противоречие. Если $l=11$, то $mn=10$ и с учетом неравенства $m\le n^2$ имеем $m=2,n=5$ и $r\mu=6$. Поэтому $r=3,\mu=2$, противоречие с тем, что $n+m=7$ не делит $(r-1)m(m^2-1)$. Случай $(L_2(11),11)$ рассматривается аналогично.

Если $l=22$, то $mn=21$ и либо $m=3,n=7$, либо $m=7,n=3$. В первом случае $r\mu=16$. Поэтому $r=4,8$, противоречие с тем, что $n+m=10$ не делит $(r-1)m(m^2-1)$. Во втором случае $r\mu=24$. Поэтому $r=6,\mu=4$ и Γ имеет массив пересечений $\{21,20,1;1,4,21\}$. Компьютерные вычисления в GAP [59] показывают, что реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{21,20,1;1,4,21\}$ и группой автоморфизмов, имеющей цоколь M_{22}, не существует.

Если $l=23$, то $mn=22$, $m=2,n=11$. Поэтому $r\mu=12$, $r=3,4,6$, противоречие с тем, что $n+m=13$ не делит $(r-1)m(m^2-1)$.

В случае $(M_{11},12)$ число $k=11$ простое, противоречие.

В случае $(A_7,15)$ имеем $mn=14$ и с учетом неравенства $m\le n^2$ имеем $m=2,n=7$ и $r\mu=8$. Поэтому $r=4,\mu=2$ и Γ имеет массив пересечений $\{14,6,1;1,2,14\}$. Противоречие с тем, что $N_{\{F\}}=L_3(2)$ не содержит подгрупп индекса 4.

В случае $(L_2(8),28)$ имеем $mn=27$ и либо $m=3,n=9$, либо $m=9,n=3$. В первом случае $r\mu=20$. Поэтому $r=4,5,10$, противоречие с тем, что $N_{\{F\}}$ не содержит подгрупп индекса r. Во втором случае $r\mu=32$. Поэтому $r=4,8,16$ и снова $N_{\{F\}}$ не содержит подгрупп индекса r.

В случае $(HiS,176)$ имеем $mn=175$ и либо $m=5,n=35$, либо $m=7,n=25$, либо $m=25,n=7$. В первом случае $r\mu=144$. Противоречие с тем, что $N_{\{F\}}=U_3(5).Z_2$ не содержит подгрупп индекса, отличного от 2 и делящего 72. Во втором случае $r\mu=156$. Так как $n+m=32$ делит $(r-1)m(m^2-1)$, то $r=3,13,39$. В третьем случае $r\mu=192$. Так как $n+m=32$ делит $(r-1)m(m^2-1)$, то $r=3$. В любом случае $N_{\{F\}}=U_3(5).Z_2$ не содержит подгрупп индекса r.

В случае $(Co_3,276)$ имеем $mn=275$ и либо $m=5,n=55$, либо $m=11,n=25$, либо $m=25,n=11$. В первом случае $r\mu=224$. Противоречие с тем, что $N_{\{F\}}=McL.Z_2$ не содержит подгрупп индекса, отличного от 2 и делящего 112. Во втором случае $r\mu=260$. Так как $n+m=36$ делит $(r-1)m(m^2-1)$, то $r-1$ делится на 3. В третьем случае $r\mu=288$. Так как $n+m=36$ делит $(r-1)m(m^2-1)$, то $r-1$ делится на 3. В любом случае $N_{\{F\}}=McL.Z_2$ не содержит подгрупп индекса r. Лемма доказана.

§ 4.2. Случай неточного действия и $|K|\neq r$

В этом параграфе предполагается, что $K\neq 1$.

Лемма 4.6. *Число $m+n$ делит $m(k+1)$ и если $(\bar{T}, k+1) \neq (L_d(q), (q^d-1)/(q-1))$ и $|K| < r$, то для графа Γ' на множестве K-орбит и числа $r' = r/|K|$ выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $r' = 2$;

(2) $\bar{T} = U_3(q)$ и Γ' — граф с массивом пересечений $\{q^3, (r'-1)(q+1)(q^2-1)/r', 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r', q^3\}$

Доказательство. Пусть g — неединичный элемент из K. Тогда $\alpha_3(g) = v$ и по лемме 2.7 имеем $\chi_1(g) = -m(k+1)/(m+n)$.

Допустим, что $|K| < r$. Рассмотрим частное Γ' графа Γ на множестве K-орбит и положим $r' = r/|K|$. Заметим, что $\bar{G}$ действует транзитивно на дугах графа Γ' и индуцирует точное действие на множестве антиподальных классов графа Γ'. Пусть $r' > 2$. Ввиду доказательства леммы 4.4 получим, что $\bar{T}$ транзитивна на $V(\Gamma')$. Если $(\bar{T}, k+1) \neq (L_d(q), (q^d-1)/(q-1))$, то ввиду леммы 4.5 $\bar{T} = U_3(q)$ и Γ' — граф с массивом пересечений $\{q^3, (r'-1)(q+1)(q^2-1)/r', 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r', q^3\}$. Если $(\bar{T}, k+1) = (L_d(q), (q^d-1)/(q-1))$, то $\bar{G} \leq \mathrm{P\Gamma L}_d(q)$. Лемма доказана.

В леммах 4.7-4.8 предполагается, что $|K| < r$, Γ' — граф на множестве K-орбит, $r' = r/|K|$ и $\mu' = \mu|K|$.

Лемма 4.7. *Если $r' = 2$, то $\bar{T} = U_3(q)$, r делит $q+1$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$.*

Доказательство. Пусть $r' = 2$. Тогда Γ' — дистанционно транзитивный граф Тейлора и (см. теорему 1.13) верно одно из утверждений:

(i) $k+1 = 2^{2s-1} \pm 2^{s-1}$, $G/K \leq Sp_{2s}(2)$, $s \geq 3$, $\mu' \in \{2^{2s-2}, 2^{2s-2} \pm 2^{s-1} - 2\}$;

(ii) $k = q^3$, q — нечетно, $G/K \leq \mathrm{P\Gamma U}_3(q)$, $q > 3$ или $G/K \leq \mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$, $q = 3^{2e+1}$, $e \geq 1$, $\mu' \in \{(q+1)(q^2-1)/2, (q-1)(q^2+1)/2\}$;

(iii) $k = q$, $G/K \leq \mathrm{P\Sigma L}_2(q)$, $q \equiv 1 \pmod 4$, $\mu' = (q-1)/2$;

(iv) $k = 175$, $\mu' \in \{72, 102\}$, $G/K = HiS$ или $k = 275$, $\mu' \in \{112, 162\}$, $G/K = Co_3$;

(v) Γ' получается удалением из $K_{k+1,k+1}$ максимального паросочетания.

В случае (v) граф Γ является двудольным (обьединение вершин, лежащих в K-орбитах доли графа Γ', является кокликой), противоречие.

Пусть $\bar{G} = HiS$. Тогда μ четно и ввиду леммы 4.6 получим, что $m = 5$, $n = 35$ и $r\mu/2 = 72$. Значит, $|K|$ делит 36 и группа $G_{\{F\}}$ содержит подгруппу $H = G_aK$ индекса 2, являющуюся расширением K с помощью $U_3(5)$. Кроме того, действие G_a на $[a]$ подстановочно изоморфно действию H/K на $\Sigma - \{F\}$. Так как $G_{\{F\}}$ содержит подгруппу индекса r, то $H = K \times U_3(5)$. Далее, компьютерными вычислениями в GAP устанавливается, что в группе $U_3(5)$ имеется ровно три класса сопряженных подгрупп индекса 175 и подстепени подстановочного представления группы $U_3(5)$ на 175 точках равны 1, 12, 72, 90. Отсюда $\mu = \lambda - 30 \in \{42, 60, 72, 54\}$, но $\mu' \in \{72, 102\}$, противоречие.

Аналогичное противоречие получается в случае группы Co_3.

В случае (iii) имеем $k = r'\mu' + 1$, поэтому $k = r\mu + 1$, противоречие с тем, что $\lambda \neq \mu$.

В случае (i) имеем $k+1 = 2^{2s-1} \pm 2^{s-1}$, $G/K \leq Sp_{2s}(2)$, $s \geq 2$ и группа $G_{\{F\}}$ содержит подгруппу $H = G_a K$ индекса 2. Пусть $\bar{G} = Sp_{2s}(2)$. Тогда ввиду [4] при $s > 2$ группа $G_a = O^{\epsilon}_{2s}(2)$ действует на $[a]$ как группа ранга 3 с подстепенями $\{1, \lambda, k-\lambda-1\} = \{1, 2^{2s-2}, (2^s - \epsilon 2)(2^{s-2}+\epsilon)\}$, и $\lambda = \lambda'$. Противоречие с тем, что $\mu' = \mu|K|$.

Пусть теперь $\bar{G} < Sp_{2s}(2)$. Тогда k — степень простого числа и по лемме 1.22 пара $(k; s)$ равна $(9; 2)$ или $(27; 3)$. Пусть $s = 3$. Тогда $\{\lambda', \mu'\} = \{10, 16\}$ и $r \in \{10, 32/\mu\}$. Если $\mu' = 16$, то $m = n^2, r = 4, \mu = 8$ и $|K| = 2$. Если $\mu' = 10$, то Γ — граф с массивом пересечений $\{27, 18, 1; 1, 2, 27\}$ и $|K| = 5$. При этом цоколь группы G равен $U_3(3) \times K$ или $L_2(8) \times K$. Если $\bar{T} = U_3(3)$, то по лемме 4.5 получим, что Γ — граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$. Но в этом случае $|K| = 4$ (см. теорему 3.9), противоречие. Если $\bar{G} = \mathrm{Aut}(L_2(8))$, то получим, что либо $G = C_G(K)$ и Γ — двудольный граф, либо $T = C_G(K)$ и $|G/T| = 3$ делит $|K|-1$, противоречие.

В случае $Sp_4(2)$ имеется граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$ и $\lambda = \mu$.

Наконец, в случае (ii) имеем $k = q^3$, $\mu' \in \{(q+1)(q^2-1)/2, (q-1)(q^2+1)/2\}$, $\bar{G} \leq P\Gamma U_3(q)$, $q > 3$ или $\bar{G} \leq \mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$, $q = 3^{2e+1}$, $e \geq 1$. Тогда $\{m, n\} = \{q, q^2\}$. Если $n = q$, то $m = n^2$ и поэтому r делит $q+1$. Если $n = q^2$, то $r\mu = q^3 - q^2 + q - 1 < q^3$. Ввиду 1.24 получим, что в любом случае $|K|$ меньше, чем степень минимального подстановочного представления группы $\bar{T}$. Положим $X = C_T(K)$.

В случае $\mathrm{Aut}({}^2G_2(q))$ имеем $\bar{T} = {}^2G_2(q)$. Так как мультипликатор Шура группы $\bar{T}$ тривиален, то $X' \simeq \bar{T}$ и $T = K \times X'$. Но тогда $T_{\{F\}}/K$ — расширение группы порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $q-1$ и $|T_a| = q^3(q-1)/2$. Если X'-орбита является кокликой, то Γ — двудольный граф, противоречие. Значит, X'-орбита содержит ребро. Тогда граф, индуцированный Γ на множестве вершин из одной X'-орбиты является графом степени k и поэтому совпадает с Γ, противоречие с леммой 4.5.

В случае $\mathrm{P\Gamma U}_3(q)$ имеем $\bar{T} = U_3(q)$. Так как мультипликатор Шура группы $\bar{T}$ равен $Z_{(3,q+1)}$, то X' — квазипростая группа, накрывающая для $\bar{T}$, и $T/Z(X') \simeq K/Z(X') \times \bar{T}$. Но тогда $T_{\{F\}}/K$ — расширение группы порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $(q^2-1)/(3, q+1)$ и $|T_a| = q^3(q^2-1)/(6, q+1)$. Если X'-орбита является кокликой, то Γ — двудольный граф, противоречие. Значит, X'-орбита на $V(\Gamma)$ содержит ребро. Тогда граф, индуцированный Γ на множестве вершин из одной X'-орбиты является графом степени k и поэтому совпадает с Γ. Рассмотрев граф $\Gamma^{Z(X')}$, по лемме 4.5 получим, что r делит $q+1$.

Лемма 4.8. *Если* $\bar{T} = U_3(q)$ *и* r' *делит* $q+1$, *то* r *делит* $q+1$ *и* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$

Доказательство. Пусть $\bar{T} = U_3(q)$. Ввиду теоремы 3.3 имеем $r\mu = r'\mu' = (q+1)(q^2-1)$. Пусть $X = C_T(K)$. Как и в доказательстве предыдущей леммы, получим, что X' — квазипростая группа, накрывающая для $U_3(q)$, которая действует транзитивно на дугах графа Γ, $n = q$, r делит $q+1$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$.

§ 4.3. Случай неточного действия и $|K| = r$

В этом параграфе предполагается, что $|K| = r$.

Лемма 4.9. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) T действует транзитивно на множестве дуг графа Γ и группа $G_{\{F\}}$ является полупрямым произведением групп K и G_a;

(2) $T = KL$, где L — накрывающая группа для $\bar{T}$ и $K = C_T(L)$;

(3) либо (i) $T \neq L$, $L \simeq \bar{T}$, $T = K \times L$ и $C_T(K) = L \times Z(K)$, либо (ii) $T \neq L$ и $Z(L) > 1$, либо (iii) $T = L$ и каждый простой делитель числа r делит $k+1$

Доказательство. Пусть $|K| = r$. Тогда T действует транзитивно на множестве дуг графа Γ, $G_{\{F\}} = KG_a$ и группа $G_{\{F\}}$ является полупрямым произведением групп K и G_a, при этом $T_a \simeq T_{\{F\}}/K \trianglelefteq G_{\{F\}}/K \simeq G_a$.

Предположим, что $\bar{T}$ имеет нетривиальное подстановочное представление степени, не превосходящей $r-1$. Тогда ввиду предложения 1.24 $\bar{T} = A_7$, $U_3(5)$, HiS, $L_d(q)$, где $(d;q) \in \{(2;5), (2;7), (2;8), (2;9), (2;11), (4;2)\}$. Пусть $\bar{T} = A_7$. Тогда $k = 14$, $m = 2, n = 7$ и $m+n$ делит $2 \cdot 15$, противоречие. Пусть $\bar{T} = U_3(5)$. Тогда $k = 124$, $m = 4, n = 31$ или $m = 2, n = 62$, но $m+n$ делит $125m$, противоречие. Пусть $\bar{T} = HiS$. Тогда $k = 175$, $m = 5, n = 35, r\mu = 144$ и $r - 1 \geq 100$, противоречие. Пусть $\bar{T} = L_d(q)$. Учитывая, что $m \leq n^2$ и $m+n$ делит $(k+1)m$, получим $q = 9$, $m = n = 3$ и $r\mu = 8$, но $r - 1 \geq 6$, противоречие. Кроме того, $\bar{T} \neq L_3(4)$.

Положим $X = C_T(K)$. В случае $\bar{T} = Sz(8)$ получим $r \in \{3, 5, 17\}$ и $K \leqslant X$, поэтому $T = K \times T'$ и $T' \simeq Sz(8)$ — транзитивна на дугах графа Γ, противоречие с леммой 1.6.

Поэтому $X \nleq K$, $T = KX'$ и X' — квазипростая группа. Отсюда либо $X' \simeq \bar{T}$, $X = Z(K) \times X'$ и $T = K \times X'$, либо $Z(X') = K \cap X' > 1$. Положим $L = X'$. Тогда $K = C_T(L)$. Если $T = L$, то утверждение леммы следует из леммы 1.6. Лемма доказана.

Лемма 4.10. *Если $T = L$, то $T = SU_3(q)$, $q \equiv -1 \pmod 3$, $r = 3$, $T_{\{F\}}$ — расширение группы P порядка q^3 с помощью циклической группы порядка $q^2 - 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$*

Доказательство. Пусть $T = L$. Тогда $K = Z(T) \simeq \mathrm{M}(\bar{T})/\mathrm{M}(T)$.

Если $\bar{T} = A_{k+1}$, то $T_a = A_k$. Напомним, что мультипликатор Шура группы A_s равен Z_2 для $s \neq 6, 7$ и равен Z_6 в исключительных случаях. Отсюда $r \in \{3, 6\}$. Значит, $k+1 = 6$ и $r = 3$. В этом случае Γ имеет массив пересечений $\{5, 4, 1; 1, 2, 5\}$. Компьютерные вычисления в GAP показывают, что таких графов не существует.

Пусть $\bar{T} = L_d(q)$, $k+1 = (q^d - 1)/(q-1)$, $q = p^e$, $d \geq 2$. В случае $d = 2$ имеем $k = q$. Напомним, что мультипликатор Шура группы $L_2(q)$ равен $(2, q-1)$ для $q \neq 4, 9$ и равен Z_2, Z_6 в исключительных случаях. Противоречие с тем, что 3 не делит $q+1$.

В случае $d \geq 3$ мультипликатор Шура группы $L_d(q)$ равен $Z_2, Z_3 \times Z_4 \times Z_4, Z_2$ для $(d,q) = (3,2), (3,4), (4,2)$, соответственно, и равен $(d, q-1)$ в остальных случаях. В любом случае получим, что $T = SL_d(q)$ и стабилизатор ненулевого вектора e_1 действует транзитивно на множестве векторов, не попадающих в $\langle e_1 \rangle$, поэтому диаметр графа Γ равен 2, противоречие.

Если $\bar{T} = Sp_{2s}(2)$, $k+1 = 2^{2s-1} \pm 2^{s-1}$, $s \geq 3$, то $T_{\{F\}} = O^{\pm}_{2s}(2)$. Напомним, что мультипликатор Шура группы $Sp_{2s}(2)$ тривиален для $s \neq 3$ и равен Z_2 в исключительном случае, противоречие.

Пусть $\bar{T} = U_3(q)$, $k = q^3$, $q \geq 3$. Напомним, что мультипликатор Шура группы $U_3(q)$ равен $Z_{(3,q+1)}$. Поэтому $r = 3$, q сравнимо с -1 по модулю 3, $T_{\{F\}}$ — расширение группы P порядка q^3 с помощью циклической группы порядка q^2-1, $|G_{\{F\}}|$ делит $|T_{\{F\}}|2e$, где $q = p^e$, и $T_{\{F\}}$ содержит подгруппу T_a индекса 3.

Если $\bar{T} = {}^2G_2(q)$, $k = q^3$, $q \geq 27$, то мультипликатор Шура группы $T = {}^2G_2(q)$ тривиален, противоречие.

Пусть $\bar{T} = Sz(q)$, $q = 2^{2e+1} \geq 8$. Напомним, что мультипликатор Шура группы $Sz(q)$ тривиален для $q \neq 8$ и является четверной группой в исключительном случае. Поэтому $r = 4$, противоречие с тем, что число q^2+1 нечетно.

Пусть пара $(\bar{T}, k+1)$ одна из: Матье (M_l, l), $l \in \{11, 12, 22, 23, 24\}$ или спорадические $(L_2(11), 11)$, $(M_{11}, 12)$, $(A_7, 15)$, $(L_2(8), 28)$, $(HiS, 176)$, $(Co_3, 276)$. Во всех случаях, кроме M_{22} и A_7 мультипликатор Шура группы $\bar{T}$ является подгруппой из Z_2, противоречие с тем, что $r > 2$.

В случае M_{22} мультипликатор Шура равен Z_{12}. Так как 3 не делит 22, то K — циклическая группа порядка 4. Далее, $mn = 21$ и либо $m = 3, n = 7$, либо $m = 7, n = 3$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $n + m = 10$ не делит $(r-1)m(m^2-1)$.

В случае $(A_7, 15)$ имеем $mn = 14$ и с учетом неравенства $m \leq n^2$ имеем $m = 2, n = 7$ и $r\mu = 8$. Поэтому $r = 4, \mu = 2$, противоречие с тем, что мультипликатор Шура группы A_7 равен Z_6. Лемма доказана.

Лемма 4.11. *Пусть $T \neq L$. Если $(\bar{T}, k) \neq (L_d(q), q(q^{d-1}-1)/(q-1))$, где $d \geq 3$, то L транзитивна на вершинах графа Γ и, в частности, если $Z(K) = K$ или $(|a^{L_{\{F\}}}|/|a^{Z(L)}|, k) = 1$, то L действует транзитивно на дугах графа Γ*

Доказательство. Если $Z(L) \neq 1$, то $Z(L)$ изоморфна факторгруппе мультипликатора Шура группы $\bar{T}$ по мультипликатору Шура группы L. Кроме того, действие T_a на $[a]$ подстановочно изоморфно действию $\bar{T}_{\{F\}} (= T_{\{F\}}K/K)$ на $\Sigma - \{F\}$.

Имеем

$$k|T_{a,b}| = |T_a| = |\bar{T}_F| = |L_{\{F\}} : Z(L)| = k|L_{\{F\},\{E\}} : Z(L)|,$$

$$|L_{\{F\},\{E\}} : Z(L)| = |L_{\{F\},\{E\}} : L_{a,b}||L_{a,b}|/|Z(L)|,$$

поэтому

$$|L_{\{F\},\{E\}} : L_{a,b}| = |L_{\{F\},\{E\}} : Z(L)||Z(L)|/|L_{a,b}| = |T_{a,b}||Z(L)|/|L_{a,b}|,$$

$$|L_{\{F\}} : L_a| = k|L_{\{F\},\{E\}} : L_{a,b}|/|L_a : L_{a,b}| = k|T_{a,b}||Z(L)|/|L_a| = |T_a||Z(L)|/|L_a|.$$

Положим $\beta = |a^{L_{\{F\}}}|/|a^{Z(L)}|$. Если $(\beta, k) = 1$ (что, в частности, выполняется в силу леммы 1.6 при $K = Z(K)$), то $L_a \leq C$ транзитивна на $[a]$, и получим, что L транзитивна на множестве вершин графа, и следовательно, L транзитивна и на множестве дуг графа Γ.

Действительно, пусть L_a транзитивна на $[a]$ и предположим, что L интранзитивна на множестве вершин графа Γ. Тогда каждая L-орбита является кокликой, L_a фиксирует F поточечно и, в частности, фиксирует каждую L-орбиту на $V(\Gamma)$. В этом случае можно считать, что $a^L \neq b^L$. Заметим, что подграф, индуцированный на множестве вершин из орбит $a^{Z(L)}$ и $b^{Z(L)}$, является совершенным паросочетанием. Тогда для любого $E_2 \in \Sigma - \{F, E\}$ подграф, индуцированный на множестве вершин из орбит $a^{Z(L)}$ и $c^{Z(L)}$, где $c \in E_2 \cap b^L$, также является совершенным паросочетанием. Таким образом, $[a_i] \subset b^L$ для всех $a_i \in a^{Z(L)}$. Аналогично, $[b_i] \subset a^L$ для всех $b_i \in b^{Z(L)}$. Значит, Γ — двудольный граф, противоречие.

Пусть теперь $(\beta, k) \neq 1$ и $Z(K) < K$. Пусть L интранзитивна на множестве вершин графа Γ. Покажем, что тогда $\bar{T} = L_d(q)$ и $d \geq 3$.

Заметим сперва, что ввиду равенства $r\mu = k+m-n+1$, число k не является степенью простого числа. Поэтому случаи $\bar{T} = L_2(q), U_3(q)$, $Sz(q)$ или ${}^2G_2(q)$ исключаются.

Пусть пара $(\bar{T}, k+1)$ одна из: Матье (M_l, l), $l \in \{11, 12, 22, 23, 24\}$ или спорадические $(L_2(11), 11)$, $(M_{11}, 12)$, $(A_7, 15)$, $(L_2(8), 28)$, $(HiS, 176)$, $(Co_3, 276)$. С учетом неравенства $m \leq n^2$ и леммы 4.6, получим, что $m = 5, n = 35, k = 175$ или $m = 5, n = 55, k = 275$. В обоих случаях $(r, k) = 1$, противоречие.

Через C_1 обозначим ядро действия $T_{\{F\}}$ на F. Имеем $C_1 = C_{T_a}(K)$. Если $T_a \leq C_T(K)$, то T_a фиксирует F поточечно и, в частности, фиксирует каждую L-орбиту на $V(\Gamma)$. В этом случае, как и выше, получим, что Γ — двудольный граф, противоречие. Поэтому $\bar{T}_{\{F\}} \simeq T_a \not\leq C_T(K)$ и $T_a/C_1 \simeq Y \leq \mathrm{Aut}(K)$.

Пусть $\bar{T} = A_{k+1}$. Тогда $k \geq 5$, $T_a = A_k$ действует точно на $K - \{1\}$, поэтому $r - 1 \geq k$, противоречие.

Пусть $\bar{T} = Sp_{2s}(2)$, $k+1 = 2^{2s-1} \pm 2^{s-1}$, $s \geq 3$. Тогда $T_a' \simeq O^{\pm}_{2s}(2)$ действует нетривиально на $K - \{1\}$. Так как $k > (r-1)2$, то $s = 3$, $T_a' \simeq O^+_6(2)$ и ввиду леммы 4.6 $r\mu \in \{32, 36\}$. Но тогда $(r, k) = 1$, противоречие.

Пусть $\bar{T} = L_d(q)$, $k+1 = (q^d - 1)/(q-1)$, $q = p^e$ и $d \geq 3$. В случаях $(d; q) = (3; 2)$, $(3; 3)$, $(3; 4)$, $(4, 2)$, получим противоречие с леммой 4.6. Значит, $|Z(L)|$ делит $(d, q-1)$.

Пусть K содержит собственную подгруппу K_1, нормальную в T, $\tilde{K}_1 = K/K_1$ и Γ_1 — граф на множестве K_1-орбит. Пусть к тому же $Z(L) \leq K_1$. Тогда $T_1 = T/K_1$ действует транзитивно на множестве дуг графа Γ_1 и $T_1 \simeq \bar{L} \times \tilde{K}_1$, где $\bar{L} = L/(L \cap K_1) \simeq \bar{T}$. Если $\tilde{K}_1$ содержит собственную подгруппу K_2, нормальную в T_1, $\tilde{K}_2 = \tilde{K}_1/K_2$ и Γ_2 — граф на множестве K_2-орбит, то $T_2 = T_1/K_2$ действует транзитивно на дугах графа Γ_2 и $T_2 \simeq \bar{L} \times \tilde{K}_2$. Повторяя этот процесс достаточное число раз, получим, что $\tilde{K}_i$ — характеристически простая группа, поэтому $\tilde{K}_i$ — прямое произведение изоморфных простых групп. Каждая из этих групп нормальна в $T_i \simeq \bar{L} \times \tilde{K}_i$ и можно рассмотреть частное $\bar{\Gamma}$ графа Γ_i на множестве K_{i+1}-орбит, где K_{i+1} — подгруппа из $\tilde{K}_i$ такая, что $1 < \bar{K} = \tilde{K}_i/K_{i+1}$ — простая группа. Тогда группа $\mathrm{Out}(\bar{K})$ разрешима и группа $Q = T_i/K_{i+1} = \bar{L} \times \bar{K}$ транзитивна на дугах графа $\bar{\Gamma}$.

Для $\bar{a} \in V(\bar{\Gamma})$ имеем $Q_{\bar{a}} = R \cdot S \cdot D$, где R — это элементарная абелева группа порядка q^{d-1}, нормальная в $Q_{\bar{a}}$, $S \simeq SL_{d-1}(q)$ и $D \simeq Z_{q-1}$. При этом S фиксирует поточечно антиподальный класс $\bar{F}$, содержащий вершину $\bar{a}$. Так как действие $Q_{\bar{a}}$ на $[\bar{a}]$ подстановочно изоморфно действию группы $Q_{\{\bar{F}\}}/\bar{K}$ на $\bar{\Sigma} - \{\bar{F}\}$, где $\bar{\Sigma}$ — множество антиподальных классов графа $\bar{\Gamma}$, то S имеет ровно две орбиты на $[\bar{a}]$. Пусть $\bar{b}, \bar{c} \in [\bar{a}]$ — представители этих орбит. Предположим, что $\bar{L}$ интранзитивна на вершинах графа $\bar{\Gamma}$. Пусть $\bar{c} \notin \bar{b}^{\bar{L}}$. Тогда $(\bar{b}^{\bar{L}})^S = \bar{c}^{\bar{L}}$ и $[\bar{a}] \subset \bar{b}^{\bar{L}} \cup \bar{c}^{\bar{L}}$. Так как $R_{\bar{a},\bar{b}}$ фиксирует одну R-орбиту (порядка q) на $[\bar{a}]$, и на $[\bar{a}] - \bar{b}^R$ имеется $R_{\bar{a},\bar{b}}$-орбита порядка q, то $R_{\bar{a},\bar{b}}$ фиксирует $\bar{b}^R$ поточечно, фиксируя при этом обе орбиты $\bar{b}^{\bar{L}}$ и $\bar{c}^{\bar{L}}$, и с другой стороны, $\bar{c}^{R_{\bar{a},\bar{b}}} \cap \bar{b}^S \neq \emptyset$, то есть $(\bar{b}^{\bar{L}})^{R_{\bar{a},\bar{b}}} = \bar{c}^{\bar{L}}$, противоречие. Таким образом, $\bar{c} \in \bar{b}^{\bar{L}}$ и получим, что $\bar{\Gamma}$ — двудольный граф. Так как Γ — накрытие графа $\bar{\Gamma}$, то Γ — также двудольный граф, противоречие.

Имеем $X = \bar{L}_{\bar{a}} \trianglelefteq Q_{\bar{a}}$. Заметим, что $R \cap X \neq 1$. Поэтому $R \leq (R \cap X)^S \leq X$ и R фиксирует $\bar{F}$ поточечно. Пусть $\bar{b} \in [\bar{a}]$. Если $\bar{b}_1 \in \bar{b}^X - \bar{b}^R$, то $\bar{b}_1^R \subset \bar{b}^X$ и $\bar{b}^R \subset \bar{b}^X$, откуда $[\bar{a}] = \bar{b}^X$ и $\bar{L}$ транзитивна на дугах графа $\bar{\Gamma}$. Пусть $\bar{b}^X \subseteq \bar{b}^R$ и $\bar{b}_1 \in \bar{b}^X - \{\bar{b}\}$. Можно считать, что $S_{\{R(\bar{b})\}}$ фиксирует вершину $\bar{b}$. Тогда $\bar{b}^R \subseteq \bar{b}^X$ и порядок каждой X-орбиты на $[\bar{a}]$ равен q. Пусть две вершины $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ лежат в одном с вершиной $\bar{b}$ антиподальном классе. Если $[\bar{y}_1] \cap [\bar{a}] - \bar{b}^R \neq \emptyset$, то $[a] - \bar{b}^R \subset [\bar{y}_1]$ и $\bar{b}^R - \{\bar{b}\} \subset [\bar{y}_2]$. Если $\bar{b} \notin \{\bar{y}_1, \bar{y}_2\}$, то $\mu = k - q = q - 1$, противоречие. Поэтому $\bar{r} = 2 = |\bar{K}|$. В этом случае получим, что $\bar{b}^X = [\bar{a}]$, $\bar{L}$ транзитивна на дугах графа $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}$ — дистанционно-транзитивный граф Тейлора степени $k = q(q^{d-1} - 1)/(q - 1)$.

Таким образом, если $(\bar{T}, k) \neq (L_d(q), q(q^{d-1} - 1)/(q - 1))$, где $d \geq 3$, то L транзитивна на множестве вершин графа Γ. Лемма доказана.

Лемма 4.12. *Если $T \neq L$ и $(\bar{T}, k) \neq (L_d(q), q(q^{d-1} - 1)/(q - 1))$, где $d \geq 3$, то $\bar{T} = U_3(q)$, $L \in \{U_3(q), SU_3(q)\}$ действует транзитивно на дугах графа Γ, r делит $q + 1$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{q^3, (r-1)(q+1)(q^2-1)/r, 1; 1, (q+1)(q^2-1)/r, q^3\}$*

Доказательство. В случае $Z(L) > 1$ получим, что по лемме 4.11 $L/Z(L)$ действует транзитивно на вершинах частного графа Γ на множестве $Z(L)$-орбит и $T/Z(L) = K/Z(L) \times L/Z(L)$. По лемме 4.5 $L' \simeq U_3(q)$, $q \equiv -1 \pmod 3$ и 3 делит r. Значит, $L = SU_3(q)$, $(q+1)_3$ делит r и L действует транзитивно на дугах графа Γ. Теперь утверждение леммы следует из теоремы 3.3. Случай $Z(L) = 1$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

§ 4.4. Случай $(\mathrm{Soc}(G^{\Sigma}), |\Sigma|) = (\mathrm{PSL}_d(q), \dfrac{q^d - 1}{q - 1})$, $d \geq 3$

В этом параграфе предполагается, что $\bar{T} = \mathrm{Soc}(\bar{G}) \simeq \mathrm{PSL}_d(q), d \geq 3$ и $k+1 = (q^d-1)/(q-1)$.

В леммах 4.4,4.6 и 4.11 было показано, что если Γ недвудольный граф, то в указанных выше предположениях справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $K = 1$, $G \leq \mathrm{P\Gamma L}_d(q)$ и T действует транзитивно на $V(\Gamma)$;

(2) $|K| < r$, $\bar{G} \leq \mathrm{P\Gamma L}_d(q)$, $\bar{G}$ действует транзитивно на $A(\Gamma^K)$, $\bar{T}$ действует транзитивно на $V(\Gamma^K)$ и $(m+n)$ делит $m(k+1)$;

(3) $|K| = r$ и для некоторой подгруппы X из K группа $\bar{T}$ действует транзитивно на $A(\Gamma^X)$, $(m+n)$ делит $m(k+1)$ и в частности, если K — абелева, то каждый простой делитель числа r делит $k+1$.

Далее мы покажем, что если Γ недвудольный граф, то ни одна из возможностей $(1)-(3)$ не реализуется. Поскольку частные графы, возникающие в (2) и (3), снова являются антиподальными д.р.г. диаметра 3, достаточно рассмотреть случай, когда Γ обладает следующим свойством:

($\star$) G содержит подгруппу $\widehat{G}$, которая действует транзитивно на $A(\Gamma)$, такую, что $\mathrm{PSL}_d(q) \simeq N \trianglelefteq \widehat{G}$, где $d \geq 3$, и выполнено одно из условий:

(*i*) $\widehat{G} \leq \mathrm{P\Gamma L}_d(q)$ и N действует транзитивно на $V(\Gamma)$;

(*ii*) N действует транзитивно на $A(\Gamma)$.

Заметим, что ввиду теоремы 1.14 можно полагать, что $\mu > 1$.

Пусть $\mathbb{F}$ — это конечное поле характеристики p, состоящее из $q = p^e$ элементов, V — векторное пространство размерности d над $\mathbb{F}$ и $d \geq 3$. Положим $\widetilde{N} = \mathrm{SL}(V) = \mathrm{SL}_d(q)$. Пусть $V = U \oplus W$, где $U = \langle u \rangle$ и W — это соответственно одномерное подпространство и гиперплоскость пространства V. Пусть ν и ρ обозначают соответственно действие $\widetilde{N}$ на одномерных подпространствах в V и действие $\widetilde{N}$ на гиперплоскостях V, которые индуцированы естественным действием $\widetilde{N}$ на V. Предположим, что ψ — это гомоморфизм из $\widetilde{N}$ в G такой, что $N = \psi(\widetilde{N})$, и $\tilde{\psi}$ — это гомоморфизм из $\widetilde{N}$ в $\bar{G}$, индуцированный ψ.

Напомним, что ν и ρ — это единственные два неэквивалентных 2-транзитивных подстановочных представления группы $\widetilde{N}$ степени $k+1$, и стабилизатор точки в ν сопряжен в $\mathrm{Aut}(\widetilde{N})$ со стабилизатором точки в ρ. Таким образом, группы $\nu(\widetilde{N})$ и $\rho(\widetilde{N})$ подстановочно изоморфны. Кроме того, если ν эквивалентно $\tilde{\psi}$, то тогда этот подстановочный изоморфизм обеспечивает изоморфизм между графом Γ и некоторым графом Γ' с вершинно-транзитивной группой автоморфизмов, которая изоморфна N и индуцирует точное 2-транзитивное действие на антиподальных классах графа Γ', эквивалентное ρ. Поэтому мы можем полагать, что $\tilde{\psi}$ эквивалентно ν.

Пусть $W = \langle w_1 \rangle \oplus W_1$, где $W_1 = \langle w_2, w_3 \ldots, w_{d-1} \rangle$. Положим $U_1 = \langle u, w_1 \rangle$. Не умаляя общности, мы можем полагать, что U и $\langle w_1 \rangle$ отвечают антиподальным классам F и E соответственно. Следующую информацию о строении групп $\widetilde{N}_{\{F\}}$ можно найти в [14]. Имеем $\widetilde{N}_{\{F\}} = R \cdot S \cdot D$, где

$$R = \{\tau \in \widetilde{N} | \tau(u) = u, \quad \tau(x) - x \in U \text{ для всех } x \in V\}$$

— это элементарная абелева группа порядка q^{d-1},

$$S = \{\sigma \in \widetilde{N} | \sigma(u) = u, \quad \sigma(W) = W\} \simeq \mathrm{SL}_{d-1}(q)$$

и $D \simeq Z_{q-1}$. При этом R и RS нормальны в $\widetilde{N}_{\{F\}}$ и $R \cap S = RS \cap D = 1$. Кроме того, $\widetilde{N}_{\{F\},\{E\}} = R_1 \cdot S_1 \cdot D$, где

$$R_1 = \{\tau \in \widetilde{N} | \tau(u) = u, \quad \tau(w_1) = w_1, \quad \tau(x) - x \in U_1 \text{ для всех } x \in V\}$$

— это элементарная абелева группа порядка $q^{2(d-2)}$,

$$S_1 = \{\sigma \in \widetilde{N} | \sigma(u) = u, \quad \sigma(W_1) = W_1, \quad \sigma(w_1) = \det(\sigma_{|W_1}) w_1\} \simeq \mathrm{GL}_{d-2}(q),$$

$R_1 \lhd \widetilde{N}_{\{F\},\{E\}}$, $R_1 S_1 \lhd \widetilde{N}_{\{F\},\{E\}}$ и $R_1 \cap S_1 = R_1 S_1 \cap D = 1$.

Далее, каждая трансвекция τ из R может быть единственным образом представлена в виде $\{\varphi, u\}$, где φ — ненулевой линейный функционал на V такой, что $u \in \ker \varphi$ и $\tau(v) = v + \varphi(v) u$. Таким образом, группа R изоморфна аддитивной группе пространства W^* всех линейных функционалов на W. Действие SD на R сопряжениями определяется правилом $\tau^x = \{\varphi, u\}^x = x^{-1}\{\varphi, u\}x = \{\varphi x, x^{-1}(u)\} = \{\varphi x, \alpha^{-1} u\} = \{\alpha^{-1}\varphi x, u\}$ для всех x из SD, где α — элемент из $\mathbb{F}^*$ такой, что $\alpha u = x(u)$.

Заметим, что если $(r, k) = 1$, то N_a транзитивна на $[a]$ и $|N_{\{F\},\{E\}} : N_{a,b}| = r$.

Лемма 4.13. $S_{\{R(E)\}} = S_{\{E\}}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что S имеет ровно две орбиты на $\Sigma - \{F\}$ (с длинами, равными $q^{d-1} - 1$ и $(q^{d-1} - 1)/(q - 1)$), длина каждой R-орбиты на $\Sigma - \{F\}$ равна q и S действует 2-транзитивно на R-орбитах на $\Sigma - \{F\}$.

Лемма 4.14. *$R_{\{E\}}$ имеет ровно $q(q^{d-2} - 1)/(q - 1)$ орбит длины q на $\Sigma - \{F\}$ и фиксирует ровно q точек на $\Sigma - \{F\}$.*

Доказательство. Имеем $R_{\{E\}} = \{\{\varphi, u\} \in R | w_1 \in \ker \varphi\}$. Каждый ненулевой линейный функционал φ на V с $u \in \ker \varphi \neq W$ однозначно определяется своим значением на базисных векторах пространства W. Пусть $v = \alpha_0 u + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 ... + \alpha_{d-1} w_{d-1}$ — произвольный вектор из $V - \langle u, w_1 \rangle$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha_2 \neq 0$. Заметим, что в R найдется ровно $q - 1$ элементов $\{\varphi_i, u\}$, где $i \in \{1, ..., q - 1\}$, со свойством $\ker \varphi_i \cap W = \langle w_1, w_3, ..., w_{d-1} \rangle$. Предположим, что $\{\varphi_i, u\}(v) = v + \alpha_2 \varphi_i(w_2) u \in \langle v + \alpha_2 \varphi_j(w_2) u \rangle$ для некоторых $i, j \in \{1, ..., q - 1\}, i \neq j$. Тогда для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}^*$ имеем

$$v + \alpha_2 \varphi_i(w_2) u = \alpha(v + \alpha_2 \varphi_j(w_2) u),$$

что влечет $(1 - \alpha) v = (\alpha \alpha_2 \varphi_j(w_2) - \alpha_2 \varphi_i(w_2)) u$. Но тогда $\alpha = 1$ и $\varphi_j(w_2) = \varphi_i(w_2)$, противоречие. Так как $R_{\{E\}} \lhd (RS)_{\{E\}}$, то длина каждой нетривиальной $R_{\{E\}}$-орбиты на $\Sigma - \{F\}$ равна q, в то время как тривиальные орбиты суть в точности те, которые отвечают одномерным подпространствам вида $\langle v' \rangle$ с $v' \in \langle u, w_1 \rangle - U$.

Лемма 4.15. *Если $r = 2$, то Γ — двудольный граф.*

Доказательство. Пусть $r = 2$. Тогда $\widehat{G}$ — дистанционно-транзитивная группа. Так как $d \geq 3$, то $k = q(q^{d-1} - 1)/(q - 1)$ не является степенью простого числа. Простой перебор показывает, что $k \notin \{175, 275\}$. Предположим, что Γ — недвудольный граф. Из классификации дистанционно-транзитивных графов Тейлора (см., например, [121] или [66]) следует, что $k = 2^{2s-1} \pm 2^{s-1} - 1$, $N \leq Sp_{2s}(2)$, где $s \geq 3$, и $\mu \in \{2^{2s-2}, 2^{2s-2} \pm 2^{s-1} - 2\}$. Поэтому q — нечетно и d — четно. Тогда $R = R_a$. Так как S не содержит подгрупп индекса 2, то $S = S_a$ и N — также дистанционно-транзитивная группа.

Ввиду леммы 4.13 если $b^* \in E - \{b\}$ смежна с некоторой вершиной из $R(b) - \{b\}$, то b^* смежна с каждой вершиной из $R(b) - \{b\}$. Поскольку μ четно, мы получим $\mu = q - 1$ или $\mu > q$. Предположим $\mu > q$. Тогда по леммам 4.13 и 4.14, $\mu = k - q = q^{d-1} + q^{d-2} + ... + q^2$. Если $\mu = 2^{2s-2}$, то $k = 2^{2s-1} \pm 2^{s-1} - 1 = 2\mu \pm \sqrt{\mu} - 1 = k - q + q = \mu + q$ и $\mu \pm \sqrt{\mu} = q + 1$, противоречие. Если $\mu = 2^{2s-2} \pm 2^{s-1} - 2$, то $k = 2\mu \mp 2^{s-1} + 3 = \mu + q$ и $\mu \mp 2^{s-1} = 2^{2s-2} - 2 = q - 3$, противоречие.

Предположим $\mu = q - 1$. Тогда $\lambda = k - q$. Если $\mu = 2^{2s-2}$, то $k - \mu - 1 = \mu \pm \sqrt{\mu} - 2 = \lambda = k - q$ и $q - 1 \pm \sqrt{q-1} - 2 = k - q$, противоречие. Если $\mu = 2^{2s-2} \pm 2^{s-1} - 2$, то $k - \mu - 1 = \mu \mp 2^{s-1} + 2 = \lambda = k - q$ и $q - 1 \mp 2^{s-1} = 2^{2s-2} - 2 = k - q - 2$, противоречие.

До конца этого подпараграфа будем считать, что $r > 2$.

Заметим, что
$$|\widehat{G}_a : N_a| = |\widehat{G}_{\{F\},\{E\}} : N_{\{F\},\{E\}}| = |\widehat{G} : N|$$
и по условию ($\star$) число $|\widehat{G} : N|$ делит $e(d, q-1)$ или группа N_a транзитивна на $[a]$.

Лемма 4.16. *Если r делится на q^{d-l} для некоторого $l \in \mathbb{N}$, то $l > 1$ и, в частности, если $l = 2$, то $r/q^{d-2} + 1/(q^{d-2}\mu) < q/\mu + 3$.*

Доказательство. Если r делится на $q^{d-l} > q$, то
$$q^{d-l}\mu - \mu \leq r\mu - \mu = (r-1)\mu = k - \lambda - 1 \leq q(q^{d-1} - 1)/(q-1) - 1,$$
$$q^{d-l} - 1 \leq (q/\mu)(q^{d-1} - 1)/(q-1) - 1/\mu,$$
поэтому $l > 1$ (по условию $\mu > 1$) и если $r = q^{d-2}t$, то
$$q^{d-2}t - 1 + 1/\mu \leq (q/\mu)(qq^{d-2} - q + q - 1)/(q-1) = (q/\mu)q(q^{d-2} - 1)/(q-1) + q/\mu,$$
$$t - 1/q^{d-2} + 1/(q^{d-2}\mu) \leq (q/\mu)q(q^{d-2} - 1)/(q^{d-2}(q-1)) + 1/(\mu q^{d-3}) < (q/\mu)q/(q-1) + 1/(\mu q^{d-3}),$$
$$t + 1/(q^{d-2}\mu) < (q/\mu)q/(q-1) + 1/(\mu q^{d-3}) + 1/q^{d-2} < (q/\mu)q/(q-1) + 2 < q/\mu + 3.$$

Лемма 4.17. *R интранзитивна на F.*

Доказательство. Предположим, что $R(a) = F$. Тогда R_a фиксирует F поточечно и, следовательно, $\cup_{x \in \widetilde{N}_{\{F\}}} (R_a)^x \leq \widetilde{N}_a$. Но S действует транзитивно сопряжениями на $R - \{1\}$, поэтому $R_a = 1$ и $r = q^{d-1}$, противоречие с леммой 4.16.

Положим $z = |R : R_a|$.

Лемма 4.18. *Если $r \geq zk/q$ и z делит q, то $z\mu/2 < q$, и, в частности, если $z = 1$, то $q/\mu > 1 - (q-1)/(q^{d-1}-1)$.*

Доказательство. Учитывая равенство $k = (r-1)\mu + \lambda + 1$, получим

$$k \geq (z(q^{d-1}-1)/(q-1)-1)\mu + \lambda + 1,$$

$$z(q^{d-1}-1)\mu(q/(z\mu) - 1 + 1/(z(q^{d-1}-1)/(q-1)))/(q-1) \geq \lambda + 1,$$
$$q/(z\mu) > 1 - 1/(z(q^{d-1}-1)/(q-1)).$$

Поэтому $z\mu/2 < q$, и если $z = 1$, то $q/\mu > 1 - (q-1)/(q^{d-1}-1)$.

Лемма 4.19. *Порядок каждой нетривиальной S-орбиты на F не меньше числа $(q^{d-1} - 1)/(q-1)$.*

Доказательство. Компьютерными вычислениями в GAP [59] устанавливается, что в случаях $d = 3, q \in \{5, 7, 9, 11\}$ и $d = 5, q = 2$ дистанционно регулярных накрытий полных графов с $r > 2$ не возникает. Остается применить тот факт, что ввиду предложения 1.24 в оставшихся случаях степень минимального подстановочного представления группы S равна $(q^{d-1}-1)/(q-1)$.

Лемма 4.20. *Если $RS(a) = F$, то R имеет не менее $(q^{d-1}-1)/(q-1)$ орбит на F и z делит q.*

Доказательство. Так как S действует транзитивно на R-орбитах на F, то по лемме 4.19 заключение леммы следует из неравенств $|R : R_a|(q^{d-1}-1)/(q-1) \leq r < q(q^{d-1}-1)/(q-1)$.

Лемма 4.21. *R фиксирует F поточечно.*

Доказательство. Заметим, сначала, что $\psi(R) \trianglelefteq \widehat{G}_{\{F\}}$. В самом деле, R содержится в цоколе $\mathrm{Soc}(\widetilde{N}_{\{F\}})$ группы $\widetilde{N}_{\{F\}}$, и более того, $\mathrm{Soc}(\widetilde{N}_{\{F\}}) \leq RZ(\widetilde{N})$, поэтому $R \cong \psi(R)$ — цоколь группы $N_{\{F\}}$. Таким образом, $\psi(R) \trianglelefteq \widehat{G}_{\{F\}}$ и $\psi(R)_a \trianglelefteq \widehat{G}_a$. В частности, все R_a-орбиты на $[a]$ имеют одну и ту же длину.

Теперь покажем, что если Y — нетривиальная подгруппа в R такая, что все Y-орбиты на $\Sigma - \{F\}$ одинаковой длины, скажем $t+1$, то $Y = R$. Действие $\widetilde{N}_{\{F\}}$ на $\Sigma - \{F\}$ подстановочно изоморфно действию $\widetilde{N}_{\{F\}}$ на одномерных подпространствах $\langle v' \rangle$ с $v' \in V - U$. Предположим $Y_{w_1} = 1$. Тогда $Y = \{1\} \cup \{\{\varphi_i, u\}\}_{i=1}^t$, где $\{\varphi_i\}_{i=1}^t$ — это множество ненулевых линейных функционалов на V таких, что для каждого $i \in \{1, ..., t\}$ имеем $u \in \ker \varphi_i, w_1 \notin \ker \varphi_i$ и $|\{\varphi_i(w_1)\}_{i=1}^t| = t$. Но тогда для всех $\delta \in \mathbb{F}^*$ и $i \in \{1, ..., t\}$ получим $w_2, w_1 + \delta w_2 \notin \ker \varphi_i$ и $|\{\varphi_i(w_2)\}_{i=1}^t| = |\{\varphi_i(w_1 + \delta w_2)\}_{i=1}^t| = t$, противоречие. Поэтому $Y_{w_1} \neq 1$. Положим $X_j = \{\{\varphi, u\} \in R | \ w_i \in \ker \varphi$ для всех $i \in \{1, 2, ..., d-1\} - \{j\}\}$, так, что $R = X_1 \times \ldots \times X_{d-1}$. Рассмотрим Y-орбиты на одномерных подпространствах в V с представителями $\langle w \rangle$, где $w \in \langle w_1, w_2 \rangle - \{0\}$. Для всех $w \in \langle w_1, w_2 \rangle - \{0\}$ имеем

$|Y:Y_w||Y_w:Y_{w_1,w_2}|=(t+1)l$ и $l=|Y_{w_i}(w_j)|>1$, где $\{i,j\}=\{1,2\}$. Далее, для всех $\delta\in\mathbb{F}^*$ и $\{\varphi,u\}\in Y$ имеем $\{\varphi,u\}(\delta w_1+w_2)=\delta w_1+w_2+(\delta\varphi_1(w_1)+\varphi_2(w_2))u$, где $\{\varphi_i,u\}$ — это элемент из X_i с $i\in\{1,2\}$, и в $Y/Y_{w_1,w_2}$ имеется ровно l элементов, которые фиксируют точку $\langle\delta w_1+w_2\rangle$. Отсюда следует, что $t+1=q=l$, и аналогичными рассуждениями получим $|Y|=q^{d-1}$, так что $Y=R$. Таким образом, $R=R_a$.

Лемма 4.22. *Случай $RS(a)=F$ невозможен.*

Доказательство. Ясно, что $R_{\{E\}}$ фиксирует оба класса F и E поточечно. Ввиду леммы 4.20 имеем $r-1\geq q$. Тогда по лемме 4.14, в $E-\{b\}$ найдется вершина, смежная с q вершинами из $[a]$, и по лемме 4.18, $q\leq\mu<2q$. Если $\mu>q$, то в $E-\{b\}$ найдется по крайней мере одна вершина, смежная с μ вершинами из $A=[a]-R(b)$, и $|A|\geq q^2$, поэтому по лемме 4.14, $\mu=2q$, противоречие. Таким образом, $\mu=q$ и $\lambda=q-1 \pmod q$.

Ввиду равенства $k-\lambda-1=(r-1)\mu$, получим

$$k/q-(\lambda+1)/q=r-1\geq(q^{d-1}-1)/(q-1)-1,$$

что влечет $k=r\mu$, $\lambda=q-1$, $m=n+1$, и S действует 2-транзитивно на F. Отсюда следует, что S_a является стабилизатором в S подпространства размерности 1 или $d-2$ из W.

Если S_a фиксирует одномерное подпространство $\langle h\rangle$ из W, то S_a действует транзитивно на остальных $(q^{d-1}-1)/(q-1)-1$ одномерных подпространствах из W, а значит, действует транзитивно на множестве $(q^{d-1}-1)/(q-1)-1$ R-орбит на $[a]$, соответствующих одномерным подпространствам из $W-\langle h\rangle$. Пусть S_a фиксирует гиперплоскость $\mathcal{H}$ из W. Тогда S_a транзитивна на множестве $(q^{d-2}-1)/(q-1)$ R-орбит на $[a]$, соответствующих одномерным подпространствам из $\mathcal{H}$, и S_a транзитивна на множестве q^{d-2} R-орбит на $[a]$, соответствующих одномерным подпространствам, не лежащим в $\mathcal{H}$.

В любом случае, получим, что N_a имеет не более двух орбит на $[a]$. Если таких орбит — две, то их порядки равны либо q и $k-q$, либо q^{d-1} и $k-q^{d-1}$. Но $N_a\trianglelefteq\widehat{G}_a$, поэтому $k/2\in\{q,q^{d-1}\}$, противоречие. Значит, N_a транзитивна на $[a]$. С другой стороны, $RS_a\trianglelefteq\widetilde{N}_a$ и RS_a-орбиты на $[a]$ имеют равные порядки, противоречие.

Лемма 4.23. *Случай $RS(a)\neq F$ невозможен.*

Доказательство. Имеем $RS(a)=S(a)$. Предположим, что $S(a)\neq F$. Тогда $B=S(a)$ является блоком импримитивности $\widetilde{N}$ на $V(\Gamma)$. Обозначим через π систему импримитивности $\widetilde{N}$ на $V(\Gamma)$, которая содержит блок B.

Пусть $P=\widetilde{N}_{\{B\}}(=RSD_{\{B\}}Z(\widetilde{N}))$. Обозначим черех π_1 систему импримитивности $\widetilde{N}$ на $V-\{0\}$, которая содержит P-орбиту на $U-\{0\}$ в качестве блока. Действие $\widetilde{N}$ на π эквивалентно действию $\widetilde{N}$ на π_1. Предположим, что подграф, индуцированный произвольными двумя блоками системы π является кокликой или совершенным паросочетанием (что выполняется, в частности, если $S=S_a$). Тогда $\widetilde{N}_{\{B\}}$ действует транзитивно на векторах из $V-U$. Но тогда B содержит вершину, смежную с двумя вершинами из E, противоречие.

Поэтому ввиду леммы 4.19, $|B| \geq k/q$. Из лемм 4.14 и 4.18 следует, что $q \leq \mu < 2q$. Но так как $(r/|B|, q-1) > 1$ и $k - \lambda - 1 = (r-1)\mu$, то

$$k/q - (\lambda+1)/q = (r-1)\mu/q \geq (2(q^{d-1}-1)/(q-1)-1)\mu/q \geq 2k/q - 1,$$

противоречие.

Теорема 4.1 доказана.

Глава 5. Некоторые вершинно-транзитивные группы автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3

Напомним, что антиподальный д.р.г. Γ диаметра 3 называется абелевым (в смысле Годсила и Хензеля, см. [67]) если его группа $\mathcal{CG}(\Gamma)$ является абелевой и действует регулярно на каждом антиподальном классе графа Γ. Настоящая глава посвящена исследованию задачи классификации абелевых антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3, обладающих следующим свойством:

($*$) Γ *имеет транзитивную группу автоморфизмов G, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ его антиподальных классов.*

При этом мы будем полагать, что G совпадает с полным прообразом группы G^{Σ} в $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

§ 5.1. Редукция к минимальным частным

Для удобства обозначений далее в этом разделе антиподальный д.р.г. диаметра 3 с массивом пересечений $\{k,(r-1)\mu,1;1,\mu,k\}$ называется просто $(k+1,r,\mu)$-накрытием.

В этом параграфе мы докажем предварительный результат, который позволяет свести классификацию графов со свойством ($*$) к рассмотрению $(k+1,r,\mu)$-накрытий некоторых специальных типов.

Предложение 5.1. *Пусть Γ — недвудольное $(k+1,r,\mu)$-накрытие и Σ — множество его антиподальных классов. Предположим, что Γ имеет транзитивную группу автоморфизмов G_1, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок ${G_1}^{\Sigma}$ на Σ и $T=\mathrm{Soc}({G_1}^{\Sigma})$. Пусть G — полный прообраз группы T в G_1 и K — ядро действия группы G на Σ. Тогда K содержит нормальную в G_1 подгруппу N, удовлетворяющую одному из следующих условий (ниже при помощи символа $^-$ обозначается факторизация по N):*

(T1) $\overline{K}\simeq E_{p^l}$ *— элементарная абелева группа экспоненты p и либо*

- (i) $\overline{G}=\overline{K}\times\overline{G}'$ *и* $\overline{G}'\simeq T$, *либо*
- (ii) $\overline{G}$ *— квазипростая группа с центром* $\overline{K}$;

(T2) $\overline{K}\simeq E_{p^l}$ *— элементарная абелева группа экспоненты p, T действует точно на $\overline{K}$, т.е. $T\leq GL_l(p)$, и содержит собственную подгруппу индекса, не превосходящего числа* $\dfrac{p^l-1}{p-1}$;

(T3) $\overline{K}\simeq S^l$, *где S — простая неабелева группа, и либо*

- (i) $\overline{G}=\overline{K}\times C_{\overline{G}}(\overline{K})$ *и* $C_{\overline{G}}(\overline{K})\simeq T$, *либо* *(ii)* $\overline{G} \leq \mathrm{Aut}(\overline{K})$ *и* T *содержит собственную подгруппу индекса, делящего* l.

Доказательство. Обозначим через K_1 ядро действия группы G_1 на Σ. По условию группа $G^\Sigma = T \simeq G/K$ — простая. Так как $GK_1 \trianglelefteq G_1$ и $GK_1/K_1 \simeq G/K$, то по выбору G мы имеем $K_1 = K \leq G$. Заметим, что для любой подгруппы $X \leq K$ такой, что $|X| < r$ и $X \trianglelefteq G_1$ частное Γ^X графа Γ является $(k+1, r/|X|, \mu|X|)$-накрытием, которое допускает транзитивную на вершинах группу автоморфизмов G_1/X.

Пусть N — максимальная нормальная в G_1 собственная подгруппа группы K. Далее для подгруппы $X \leq G_1$ через $\overline{X}$ мы будем обозначать образ X относительно естественного гомоморфизма из G_1 на G_1/N. Таким образом, $\overline{K}$ — характеристически простая группа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой в $\overline{G_1}$. Так как $C_{\overline{G}}(\overline{K}) = C_{\overline{G_1}}(\overline{K}) \cap \overline{G} \trianglelefteq \overline{G_1}$, то ввиду примитивности G_1 на Σ группа $C_{\overline{G}}(\overline{K})$ либо действует транзитивно на Σ, либо фиксирует Σ поточечно.

<u>Случай $\overline{K} \simeq E_{p^l} = (\mathbb{Z}_p)^l$.</u> В этом случае мы имеем либо $\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{K})$, либо $\overline{K} = C_{\overline{G}}(\overline{K})$.

Пусть $\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{K})$. Очевидно, это равносильно тому, что $Z(\overline{G}) = \overline{K}$. Предположим, что $\overline{G}' < \overline{G}$. Тогда $\overline{K} \not\leq \overline{G}'$, подгруппа $\overline{G}' \cap \overline{K} < \overline{K}$ нормальна в $\overline{G_1}$ и по выбору N мы получаем $\overline{G}' \cap \overline{K} = 1$, а поскольку $\overline{G}' \neq 1$, то $\overline{G}' \simeq G/K$.

Отсюда либо $\overline{G} = Z(\overline{G}) \times \overline{G}' = \overline{K} \times G/K$, либо $\overline{G}$ — квазипростая группа.

Пусть теперь $\overline{K} = C_{\overline{G}}(\overline{K})$. Отождествим $\overline{K}$ с пространством $(\mathbb{F}_p)^l$ и зададим его базис $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l$. Тогда $G/K \leq \mathrm{Aut}(\overline{K}) \simeq GL_l(p)$ и поэтому $l > 1$. В силу выбора N, G_1 действует без неподвижных точек на множестве 1-мерных подпространств в $\overline{K}$ (если бы это не выполнялось, то такое 1-мерное подпространство из $\overline{K}$ порождало бы собственную подгруппу в $\overline{K}$, которая была бы нормальна в G_1, что невозможно по выбору N). Поэтому число $s := |\overline{G_1} : N_{\overline{G_1}}(S)|$, где $S = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$, не меньше чем l и не превосходит числа $\dfrac{p^l-1}{p-1} < r$. С другой стороны, s делится на $|\overline{G} : N_{\overline{G}}(S)|$. Если $\overline{G}$ фиксирует (как множество) каждое 1-мерное подпространство из $\overline{K}$, то $\overline{G}/\overline{K} \leq Z(GL_l(p))$, противоречие. Поэтому можно считать, что $|\overline{G} : N_{\overline{G}}(S)| \neq 1$. Таким образом, для полного прообраза Y группы $N_{\overline{G}}(S)$ в G получаем, что $1 < |G/K : Y/K| \leq \dfrac{p^l-1}{p-1}$.

<u>Случай $\overline{K} \simeq S^l$ (S — простая неабелева группа).</u> Предположим, что $\overline{K} \simeq S^l$, где S — простая неабелева подгруппа в $\overline{K}$. В этом случае мы имеем $\overline{G_1}/C_{\overline{G_1}}(\overline{K}) \leq \mathrm{Aut}(\overline{K}) \simeq \mathrm{Aut}(S) \wr \mathrm{Sym}_l$ (см. [58, упражнение 4.3.9]). Ввиду гипотезы Шрейера (см. [29]) группа $\mathrm{Out}(S)$ разрешима и по выбору N группа G_1 действует транзитивно на множестве из всех l нормальных простых групп, входящих в указанное разложение для $\overline{K}$.

Так как G/K — неабелева группа, то, учитывая, что $C_{\overline{G}}(\overline{K}) \simeq C_{\overline{G}}(\overline{K})\overline{K}/\overline{K} \simeq X/K \trianglelefteq G/K$, где X обозначает полный прообраз группы $C_{\overline{G}}(\overline{K})\overline{K}$ в G, заключаем, что либо $C_{\overline{G}}(\overline{K}) \simeq G/K$ и $\overline{G} \simeq \overline{K} \times G/K$, либо $C_{\overline{G}}(\overline{K}) = 1$ и $\overline{G} \leq \mathrm{Aut}(\overline{K})$. Во втором случае $|\overline{G_1} : N_{\overline{G_1}}(S)| = l$ делится на $|\overline{G} : N_{\overline{G}}(S)|$ и поэтому для полного прообраза Y группы $N_{\overline{G}}(S)$ в G получаем, что $l_1 := |G/K : Y/K|$ делит l, а поскольку $G/K \not\leq \mathrm{Out}(S)$, то $l_1 > 1$.

Предложение доказано.

Граф Γ, определенный в предложении 5.1, будем называть *минимальным* $(k+1, r, \mu)$-*накрытием типа* (Tx), если $|K| = r$ и тройка (G_1, G, K) удовлетворяет условиям п. (Tx) заключения этого предложения (в частности, $N = 1$). В таком случае мы будем обозначать Γ через $\Gamma(G_1, G, K)$.

§ 5.2. Некоторые свойства $\widetilde{G}$-вершинно-транзитивных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$

Пусть далее Γ — недвудольное $(k+1, r, \mu)$-накрытие и Σ — множество его антиподальных классов. Всюду в этом разделе мы будем предполагать, что Γ имеет транзитивную группу автоморфизмов $\widetilde{G}$, которая индуцирует группу подстановок $\widetilde{G}^{\Sigma}$ ранга 3 на Σ четного порядка, и ядро K действия $\widetilde{G}$ на Σ имеет порядок, равный r. Через G мы будем обозначать полный прообраз группы $\mathrm{Soc}(\widetilde{G})$ в $\widetilde{G}$.

Обозначим через M стабилизатор антиподального класса F в $\widetilde{G}$, содержащего вершину a, и через H — подгруппу $\widetilde{G}_a$. Пусть $\mathcal{S} = \mathrm{O}rb_2(\widetilde{G}^{\Sigma})$. По условию $\widetilde{G}/K \simeq \widetilde{G}^{\Sigma}$ содержит инволюцию, поэтому (см., например, [29, 16.1]) каждый орбитал $\widetilde{G}$ на Σ является самоспаренным, то есть $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, S_2\}$ и $S_i^* = S_i$, $i = 0, 1, 2$ (через S_0 обозначается диагональный орбитал).

Пусть $(a, b_i) \in (F, F_i) \in S_i$ и $k_i := |M(F_i)|$ — длина подорбиты группы $\widetilde{G}^{\Sigma}$, отвечающей орбиталу S_i. Тогда $k_1 + k_2 = k$.

Положим $\Omega = \mathrm{V}(\Gamma)$, $\mathcal{Q} = \mathrm{O}rb_2(\widetilde{G})$ и выберем $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ такие, что $Q_1 \neq Q_2$ и $Q_1 \cup Q_2 \subset \mathrm{A}(\Gamma)$. Пусть $\Gamma(Q_1 \cup Q_2)^*$ — это граф на Ω, ребрами которого являются пары вершин $\{x, y\}$ такие, что $(x, y) \in Q_i$ для некоторого $i = 1, 2$. Поскольку $|K| = r$, мы получаем, что $M = K : H$ и поэтому $\mathrm{A}(\Gamma)$ является объединением двух $\widetilde{G}$-орбиталов, то есть $\mathrm{A}(\Gamma) = Q_1 \cup Q_2$, $Q_i^* = Q_i$, где $i = 1, 2$, и $\Gamma = \Gamma(Q_1 \cup Q_2)^*$. Можно считать, что $(a, b_i) \in (F \times F_i) \cap Q_i$.

Тогда $|Q_i| = rk_i(k+1)$ и так как группа $\widetilde{G}$ транзитивна на вершинах графа, то для дуги $(a, b_i) \in Q_i$ имеем

$$r(k+1)k_i = |Q_i| = |\widetilde{G} : \widetilde{G}_{a,b_i}| = |\widetilde{G} : H| \cdot |H : \widetilde{G}_{a,b_i}|,$$

поэтому $|H : \widetilde{G}_{a,b_i}| = k_i$, то есть H имеет ровно две орбиты на $\Gamma_1(a)$ с представителями b_1 и b_2, которым соответствуют M-орбиты $\Sigma_1 := M(F_1)$ и $\Sigma_2 := M(F_2)$ на Σ. При этом $M_{\{F_i\}} = K : \widetilde{G}_{a,b_i}$.

Заметим, что граф $\Omega_i := (\Omega, Q_i)$ является реберно симметричным r-накрытием (необязательно антиподальным) графа $\Phi_i := (\Sigma, S_i)$, который в свою очередь является графом ранга 3. Отсюда следует, что каждое ребро графа Ω_i лежит ровно в $\lambda(\Omega_i)$ 3-циклах и максимальные клики в Ω_i имеют один и тот же размер, не превосходящий $\lambda(\Omega_i) + 2$. При этом очевидно, что

$$\mathrm{Cl}(\Omega_i) \leq \mathrm{Cl}(\Phi_i), \quad \lambda(\Omega_i) \leq \lambda(\Phi_i) \text{ и } \mathrm{Co}(\Omega_i) \leq r \cdot \mathrm{Co}(\Phi_i),$$

где через $\mathrm{Cl}(\Delta)$ ($\mathrm{Co}(\Delta)$) — обозначается размер максимальной клики (коклики, соответственно) графа Δ.

Положим $X_i := H(b_i)$ и $\lambda_i := |\Gamma_1(b_i) \cap X_i|$. Пусть $\delta_{ij}(x,y) := |Q_i(x) \cap Q_j(y)|$, $i,j = 1,2$. Тогда для всех $(x,y) \in Q_i$ имеем $\lambda(\Omega_i) = \delta_{ii}(x,y)$, $\delta_{12}(x,y) = \delta_{21}(x,y)$ (поскольку $Q_i^* = Q_i$) и

$$2\delta_{12}(x,y) = \lambda - \delta_{11}(x,y) - \delta_{22}(x,y).$$

В частности,

$$\begin{aligned}
\delta_{11}(a,b_1) + \delta_{12}(a,b_1) &= \lambda_1, & (11)\\
\delta_{21}(a,b_2) + \delta_{22}(a,b_2) &= \lambda_2, & (12)\\
\delta_{21}(a,b_1) + \delta_{22}(a,b_1) &= \lambda - \lambda_1, & (13)\\
\delta_{11}(a,b_2) + \delta_{12}(a,b_2) &= \lambda - \lambda_2. & (14)
\end{aligned}$$

Подсчет числа ребер в Γ между X_1 и X_2 дает равенства

$$\delta_{21}(a,b_1)k_1 = \delta_{11}(a,b_2)k_2, \qquad (15)$$

$$\delta_{22}(a,b_1)k_1 = \delta_{12}(a,b_2)k_2 \qquad (16)$$

для ребер типов Q_1 и Q_2 соответственно. Отсюда

$$\begin{aligned}
(\lambda - \lambda_1)k_1 &= (\lambda - \lambda_2)k_2, & (17)\\
\delta_{11}(a,b_1) + \delta_{12}(a,b_1) &= \lambda(\Omega_1) + \frac{k_2}{k_1}\delta_{11}(a,b_2) = \lambda_1, & (18)\\
\delta_{21}(a,b_2) + \delta_{22}(a,b_2) &= \frac{k_1}{k_2}\delta_{22}(a,b_1) + \lambda(\Omega_2) = \lambda_2. & (19)
\end{aligned}$$

Поэтому k_1 делит $\gcd(k_1,k_2)\delta_{11}(a,b_2)$, и k_2 делит $\gcd(k_1,k_2)\delta_{22}(a,b_1)$.

Положим $Y_i := \bigcup_{X \in \Sigma_i} X$ и посчитаем число ребер типа Q_1 и Q_2 в Γ между Y_1 и Y_2. Поскольку K регулярна на каждом антиподальном классе, получаем, что

$$\begin{aligned}
|Q_1(b_1) \cap Y_1| &= \lambda(\Phi_1),\\
|Q_1(b_1) \cap Y_2| &= k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1 = |Q_2(b_1) \cap Y_1|,\\
|Q_2(b_1) \cap Y_2| &= k_2 - (k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1) = \mu(\Phi_2).
\end{aligned}$$

Симметрично,

$$\begin{aligned}
|Q_2(b_2) \cap Y_2| &= \lambda(\Phi_2),\\
|Q_2(b_2) \cap Y_1| &= k_2 - \lambda(\Phi_2) - 1 = |Q_1(b_2) \cap Y_2|,\\
|Q_1(b_2) \cap Y_1| &= k_1 - (k_2 - \lambda(\Phi_2) - 1) = \mu(\Phi_1).
\end{aligned}$$

Так как

$$|Q_i(b_1) \cap Y_j| = \sum_{b \in F_1} |Q_i(b) \cap X_j|$$

для всех $i,j = 1,2$, то число ребер типа Q_1 в Γ между F_1 и X_1 равно

$$\lambda(\Phi_1) = |Q_1(b_1) \cap Y_1| = \delta_{11}(a,b_1) + \sum_{b \in F_1 \setminus \{b_1\}} \delta_{11}(a,b), \qquad (20)$$

а число ребер типа Q_1 в Γ между F_1 и X_2 равно

$$k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1 = |Q_1(b_1) \cap Y_2| = \delta_{21}(a, b_1) + \sum_{b \in F_1 \setminus \{b_1\}} \delta_{21}(a, b). \tag{21}$$

Отсюда каждая вершина из $F_1 \setminus \{b_1\}$ «в среднем» имеет $\dfrac{\lambda(\Phi_1) - \lambda(\Omega_1)}{r-1}$ соседей типа Q_1 в X_1 и $\dfrac{k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1 - \delta_{21}(a, b_1)}{r-1}$ соседей типа Q_1 в X_2.

Кроме того, число ребер типа Q_2 в Γ между F_1 и X_1 равно

$$k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1 = |Q_2(b_1) \cap Y_1| = \delta_{12}(a, b_1) + \sum_{b \in F_1 \setminus \{b_1\}} \delta_{12}(a, b), \tag{22}$$

а число ребер типа Q_2 в Γ между F_1 и X_2 равно

$$\mu(\Phi_2) = |Q_2(b_1) \cap Y_2| = \delta_{22}(a, b_1) + \sum_{b \in F_1 \setminus \{b_1\}} \delta_{22}(a, b). \tag{23}$$

Отсюда каждая вершина из $F_1 \setminus \{b_1\}$ «в среднем» имеет $\dfrac{k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1 - \delta_{12}(a, b_1)}{r-1}$ соседей типа Q_2 в X_1 и $\dfrac{\mu(\Phi_2) - \delta_{22}(a, b_1)}{r-1}$ соседей типа Q_2 в X_2.

Мы будем говорить, что множество ребер графа Γ допускает *H-равномерное разбиение* (с параметрами (μ_1, μ_2)), если для каждого $j = 1, 2$ и любых двух различных вершин z_1, z_2 из F число ребер между $Q_j(z_1)$ и $Q_j(z_2)$ постоянно и равно $k_j\mu_j$ (μ_j — целое).

Лемма 5.2. *Предположим, что $|K| = r$, $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Если группа H действует транзитивно на $F \setminus \{a\}$ или $r \le 3$, то множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение.*

Доказательство. Так как $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, то $G_a(b_i) = Q_i(a)$ и $G_a = G_F$. При $r = 2$ имеем $F = \{a, a^*\}$ и число ребер между $Q_j(z_1)$ и $Q_j(z_2)$ равно $k_j\mu_j$, где $\mu_j = |\Gamma_1(b_j) \cap Q_j(a^*)|$. Остается заметить, что в любом из случаев, когда H действует транзитивно на $F \setminus \{a\}$ или $r = 3$, найдется автоморфизм g графа Γ, переводящий пару $\{z_1, z_2\}$ вершин из F в любую другую пару $\{z_1', z_2'\}$ вершин из F. При этом для каждого $j = 1, 2$ имеем $\{Q_j(z_1)^g, Q_j(z_2)^g\} = \{Q_j(z_1'), Q_j(z_2')\}$. Отсюда для любых двух различных вершин z_1, z_2 из F число ребер между $Q_j(z_1)$ и $Q_j(z_2)$ постоянно. Лемма доказана.

Теорема 5.3. *Предположим, что $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Тогда для каждого $x \in F \setminus \{a\}$ имеем*

$$\delta_{11}(a, x_1) = \delta_{11}(x, b_1), \quad \delta_{12}(a, x_1) = \delta_{12}(x, b_1), \tag{24}$$

$$\delta_{21}(a, x_2) = \delta_{21}(x, b_2), \quad \delta_{22}(a, x_2) = \delta_{22}(x, b_2), \tag{25}$$

$$\delta_{11}(a, x_2)k_2 = \delta_{21}(x, b_1)k_1, \quad \delta_{12}(a, x_2)k_2 = \delta_{22}(x, b_1)k_1, \tag{26}$$

для всех $x_i \in Q_i(x)$, в частности,

$$(\mu - \mu_1)k_1 \;\; = \;\; (\mu - \mu_2)k_2, \tag{27}$$

где $\mu_i = |\Gamma_1(b_i) \cap Q_i(x)|$, $i = 1, 2$. *Если, к тому же, множество ребер графа* Γ *допускает* H*-равномерное разбиение с параметрами* (μ_1', μ_2'), *то* $\mu_i' = \mu_i$ *для каждого* $i = 1, 2$ *и число* $\gamma = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (\mu - \mu_1 - \mu_2) = r(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$ *является собственным значением графа* Γ.

Доказательство. Пусть $x \in F \setminus \{a\}$. Положим

$$\mu_1 := \delta_{11}(b_1, x) + \delta_{21}(b_1, x) = |\Gamma_1(b_1) \cap Q_1(x)|,$$

и

$$\mu_2 := \delta_{12}(b_2, x) + \delta_{22}(b_2, x) = |\Gamma_1(b_2) \cap Q_2(x)|.$$

Для каждого $i = 1, 2$ положим $\mu_i(u, w) := |\Gamma_1(u) \cap Q_i(w)|$. Ясно, что для всех $z \in \Gamma_2(a)$ имеет место тождество

$$\mu_1(a, z) + \mu_2(a, z) = \mu = \mu_1(z, a) + \mu_2(z, a).$$

Так как $G_{\{F\}} = G_a \times K$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, то $G_a(b_i) = Q_i(a)$ и $G_a = G_F$. Отсюда подсчет числа ребер типов Q_1 и Q_2 в Γ между $Q_1(a)$ и $Q_1(x)$, между $Q_2(a)$ и $Q_2(x)$ и между $Q_1(a)$ и $Q_2(x)$ дает равенства (24), (25), (26), совокупность которых влечет равенство (27).

Предположим, что множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение с параметрами (μ_1', μ_2'). Поскольку число ребер между $Q_j(a)$ и $Q_j(x)$ равно $k_j\mu_j(b_j, x)$, для каждого $x \in F \setminus \{a\}$ получаем

$$\mu_1' = \mu_1 = \mu_1(b_1', x) = \mu_1(x_1, a),$$

для всех $b_1' \in Q_1(a)$, $x_1 \in Q_1(x)$, и

$$\mu_2' = \mu_2 = \mu_2(b_2', x) = \mu_2(x_2, a),$$

для всех $b_2' \in Q_2(a)$, $x_2 \in Q_2(x)$.

Ввиду транзитивности K на F получаем, что для всех $y \in F$ и $z \in \Gamma_2(y)$ значение параметра $\mu_i(z, y)$ равно μ_i (что влечет $\mu_j(z, y) = \mu - \mu_i$ для $j \neq i$), если $z \in Q_i(x')$ для некоторой вершины $x' \in F$.

Пусть $\sigma = \{C_1, \ldots, C_{3r}\}$ — это разбиение множества вершин графа Γ на множество G_a-орбит. При этом мы будем полагать, что элементы разбиения σ с индексами i, $i+1$, $i+2$, где $1 \leq i \leq 3r$ и $i \equiv 1 \pmod 3$, это соответственно G_a-орбиты $\{z\}$, $Q_1(z)$, $Q_2(z)$, где $z \in F$, и $C_1 = \{a\}$. Для всех $C_i, C_j \in \sigma$ положим $e_{ij} := |\Gamma_1(x) \cap C_j|$, где $x \in C_i$, и пусть $\mathbf{E}_\sigma := (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3r}$ — quotient-матрица разбиения σ.

Таким образом, $\mathbf{E}_\sigma$ может быть представлена в виде блочной $r \times r$-матрицы следующего вида

$$\mathbf{E}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} & \cdots & \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda - \lambda_1 \\ 1 & \lambda - \lambda_2 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu - \mu_1 \\ 0 & \mu - \mu_2 & \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому характеристический многочлен $\chi(\gamma)$ матрицы $\mathbf{E}_\sigma$ равен

$$\chi(\gamma) = \det(\mathbf{E}_\sigma - \gamma\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}(\gamma) + (r-1)\mathbf{B})\big(\det(\mathbf{A}(\gamma) - \mathbf{B})\big)^{r-1},$$

где

$$\mathbf{A}(\gamma) = \begin{bmatrix} -\gamma & k_1 & k_2 \\ 1 & \lambda_1 - \gamma & \lambda - \lambda_1 \\ 1 & \lambda - \lambda_2 & \lambda_2 - \gamma \end{bmatrix}.$$

Преобразовав данное выражение, получаем

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) \;\; = \;\; & \big(\gamma + (\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (r-1)(\mu - \mu_1 - \mu_2)\big)\big(k - \gamma^2 + \gamma(\lambda + (r-1)\mu)\big) \times \\ & \times\big(\gamma^2 - \gamma(\lambda - \mu) - k\big)^{r-1} \cdot \big(\gamma + (\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) - (\mu - \mu_1 - \mu_2)\big)^{r-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, числа

$$\gamma_1 = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) - (r-1)(\mu - \mu_1 - \mu_2),\ \gamma_2 = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (\mu - \mu_1 - \mu_2)$$

и

$$\gamma_{3,4} = \frac{\lambda + (r-1)\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{(\lambda + (r-1)\mu)^2 + 4k}}{2}$$

являются собственными значениями графа Γ (см., например, [40, с. 436, § A.4] или [45, гл. 2.3]). Теперь ввиду тождества $k - 1 = \lambda + (r-1)\mu$ получаем $\gamma_{3,4} \in \{k, -1\}$, а поскольку $\lambda_1 + (r-1)\mu_1 + \lambda_2 + (r-1)\mu_2 = k_1 - 1 + k_2 - 1 = k - 2$, то $\gamma_1 = -1$. Отсюда $\gamma_1, \gamma_{3,4}$ всегда являются собственными значениями графа Γ и поэтому дополнительные ограничения на параметры графа может дать только $\gamma_2 = r(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$. Теорема доказана.

§ 5.3. Абелевы минимальные антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3

Данный раздел посвящен исследованию минимальных $(k+1, r, \mu)$-накрытий $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ таких, что $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$ и K является абелевой группой. Классификация примитивных почти простых групп подстановок ранга 3 (см., например, [46, гл. 11]) влечет, что G^Σ является либо спорадической простой группой, либо знакопеременной группой, либо простой группой исключительного лиева типа, либо классической простой группой. При этом описаны все ассоциированные с $\widetilde{G}^\Sigma$ взаимодополнительные графы Φ_1 и Φ_2 ранга 3, и более того, во многих подслучаях ранг группы G^Σ также равен 3.

Заметим, что если граф Γ имеет тип (T2), то, с учетом того, что параметр $\mathrm{d}_{\min}(G^\Sigma)$ является известным для всех допустимых групп G^Σ, предложение 5.1 дает достаточно строгие ограничения на r, k и G, или вовсе позволяет исключить существование графа Γ в отдельных случаях для G^Σ. Но если граф Γ имеет тип (T1), то подобные ограничения отсутствуют. Здесь мы описываем свойства группы $\widetilde{G}$ и параметры графа Γ, предполагая, что последний имеет тип (T1). В следующем предложении 5.4 нами будет показано, что если G не является квазипростой группой, то либо $\mathrm{rk}(G^\Sigma) > 3$, либо Γ является графом Тейлора (и его параметры λ и μ могут быть выражены при помощи параметров графов Φ_1 и Φ_2), либо $G' \simeq G^\Sigma$ действует транзитивно на вершинах графа Γ. Затем, на основе теоремы 5.3, в предложении 5.6 мы получим ограничения на группу G, а также на параметры и спектр графа Γ при условии, что $\widetilde{G} = G$ — квазипростая группа.

Предложение 5.4. *Предположим, что Γ — минимальное $(k+1, r, \mu)$-накрытие типа (T1), $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$, Σ — множество его антиподальных классов и пусть $T = G'$. Предположим к тому же, что $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $T \simeq G^\Sigma$ и T действует транзитивно на вершинах графа Γ, то для любого $F \in \Sigma$ группа $T_{\{F\}}$ содержит подгруппу простого индекса p, делящего r, причем если $r = p$, то группа $T_{\{F\}}/T_F$ разрешима.*

2. *Если T действует интранзитивно на вершинах графа Γ, то $G = T \times K$ и либо*

   (i) $r = 2$, $Q_i(a) \subset T(a)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$, $Q_i(a) \cap Q_i(b_i)$ — коклика, Γ — недвудольный граф Тейлора с $\mu = 2\mu(\Phi_i) + k_j - k_i - 1$, где $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$, $2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) = k - 1$, число $\gamma = -2(\lambda(\Phi_j) + \dfrac{k_i}{k_j}\mu(\Phi_j) + 1) + k$ является собственным значением графа Γ, $\Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами

   $$(k, \lambda, \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1)), \frac{\lambda}{2}),$$

   где $\lambda = k - \mu - 1$ и k — нечетно, либо

   (ii) $r = 4$, $Q_i(a) \subset T(a)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$, k — нечетно, $\lambda \neq \mu$ и число $k_i - k_j/3 \in \{\pm \gcd(k_i, k_j/3)\}$ — является собственным значением графа Γ, где $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$, и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) \geq 4$, либо

   (iii) $r \leq 1 + 4 \cdot |\widetilde{G}^\Sigma : G^\Sigma|^2$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) \geq 6$, или $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 5$, $k = 35$, $r = 16$ и $\mu = 2$.

Доказательство. Обозначим $T = G'$ и $H = \widetilde{G}_a$. Ввиду предложения 5.1 имеем $G = T \times K$ и $K \leq Z(G)$. Положим $L = T_{\{F\}}$ и $M_1 = G_{\{F\}}$. Тогда $L \simeq G_a$, $M_1 = KL$, $|M_1 : G_a| = |M_1 : L| = |K|$ и $L \cap K = G_a \cap K = 1$. Также для $s = |L : L_a|$ мы имеем $|G_a L| = s|G_a|$ и s делит $|K|$. Для подгруппы K_0 простого индекса p в K граф $\Gamma_0 = \Gamma^{K_0}$ является G_0-вершинно-транзитивным $(k+1, p, \mu|K_0|)$-накрытием, где $G_0 \simeq G/K_0$. При этом $G_{\{F\}} = K \times L$, $L_a = L_F$ и LK/K_0 изоморфна стабилизатору антиподального класса X графа Γ_0 в G_0.

Допустим, что T транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда T действует транзитивно на вершинах графа Γ_0 и $r = s$. Если группа L/L_X неразрешима, то поскольку L централизует K, по [129, теорема 11.7] получаем, что L фиксирует X поточечно, что влечет $s \leq r/p$, противоречие. Отсюда следует утверждение 1.

Докажем утверждение 2. Далее мы будем предполагать, что T интранзитивна на вершинах графа Γ. Положим $\Omega = \mathrm{V}(\Gamma)$, $\mathcal{Q} = \mathrm{O}rb_2(\widetilde{G})$ и выберем $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ такие, что

$\mathrm{A}(\Gamma) = Q_1 \cup Q_2$, то есть $\Gamma = \Gamma(Q_1 \cup Q_2)^*$. Зафиксируем $(a, b_i) \in Q_i$ и пусть $|Q_i(a)| = k_i$, $i = 1, 2$. Пусть обозначения Φ_i, Ω_i, Y_i и $\delta(\cdot, \cdot)$ имеют тот же смысл, что и в разделе 5.2.

Покажем сначала, что $s = 1$.

Заметим, что каждая T-орбита на Ω пересекает каждый антиподальный класс ровно по s вершинам и множество T-орбит на Ω образует систему импримитивности τ группы $\widetilde{G}$ с блоками размера $r'(k+1)$, где $r' = r/s$. Обозначим через N ядро действия, индуцируемого группой $\widetilde{G}$ на τ. Ясно, что $L \leq T \leq N$ и K действует транзитивно на τ. Поэтому $|K : K_{\{A\}}| = |\tau| = r'$ для каждого $A \in \tau$ и $|K_{\{A\}}| = s$. По определению, K — минимальная нормальная подгруппа в $\widetilde{G}$, откуда заключаем, что $K \cap N = 1$ (иначе $K \leq N$ и $s = r$, то есть T транзитивна на вершинах графа Γ, что противоречит предположению) и $K^\tau \simeq K$. Но кроме того, по условию группа K является абелевой и поэтому $K_{\{A\}} \leq N$. Таким образом, $K_{\{A\}} = 1$ и, следовательно, $s = 1$.

Для $i = 1, 2$ определим на блоках системы τ граф Ψ_i, в котором два блока A и B смежны тогда и только тогда, когда $(A \times B) \cap Q_i \neq \varnothing$ (т.е. между A и B имеется ребро графа Ω_i).

Кроме того, определим на блоках системы τ граф Ψ, в котором два блока A и B смежны тогда и только тогда, когда $(A \times B) \cap \mathrm{A}(\Gamma) \neq \varnothing$ (т.е. между A и B имеется ребро графа Γ).

Мы имеем $T \leq N$, $\deg \Psi \leq \mathrm{rk}(N^\Sigma) - 1$ и поскольку в любых двух различных блоках системы τ найдутся вершины, находящиеся на расстоянии не больше 2 в Γ, заключаем $d(\Psi) \leq 2$ и поэтому

$$|\Psi| \leq 1 + \deg \Psi^{d(\Psi)} \leq 1 + (\mathrm{rk}(N^\Sigma) - 1)^{d(\Psi)} \leq 1 + (\mathrm{rk}(G^\Sigma) - 1)^{d(\Psi)}. \quad (28)$$

В силу того, что для каждого $i = 1, 2$ граф Ω_i является реберно симметричным, число $t_i := |Q_i(a) \cap T(x)|$ не зависит от выбора вершины $x \in Q_i(a)$. Более того, для всех $x \in Q_i(a)$, $z \in T(x)$ и $y \in T(a)$ верно равенство

$$|Q_i(y) \cap T(x)| = |Q_i(z) \cap T(a)|.$$

Таким образом, либо $\deg \Psi_i = 0$ (что равносильно условию $Q_i(a) \subset T(a)$) и $t_i = |Q_i(a)|$, либо $t_i \cdot \deg \Psi_i = k_i$ и в $F \setminus \{a\}$ содержится всего $\deg \Psi_i$ вершин x, имеющих в точности t_i соседей типа Q_i из $T(a) \setminus \{a\}$. При этом в $F \setminus \{a\}$ имеется всего $r - 1 - \deg \Psi$ вершин, несмежных с вершинами из $T(a)$.

Так как группа T_a нормальна в H и для каждого $i = 1, 2$ группа H действует транзитивно на множестве T_a-орбит на $Q_i(a)$, то для любой вершины $x \in Q_i(a)$ число t_i делится на $|T_a(x)|$, а число n_i T_a-орбит на $Q_i(a)$ равно $\dfrac{k_i}{|T_a(x)|}$ и делит число $|H : T_a| = |\widetilde{G} : G|$. Отсюда n_i делит $|\mathrm{Out}(T)|$. Таким образом, если $\deg \Psi_i > 0$, то $n_i = \dfrac{t_i}{|T_a(x)|} \deg \Psi_i$ и $\deg \Psi_i \leq |\mathrm{Out}(T)|$, что влечет $\deg \Psi \leq 2|\mathrm{Out}(T)|$.

Таким образом, из (28) следует, что $|K| \leq 1 + \deg \Psi^2 \leq 17$ всякий раз, когда $\mathrm{rk}(G^\Sigma) \leq 5$ или $|\mathrm{Out}(T)| \leq 2$.

Далее через n, $-m$ ($m > 0$) мы будем обозначать собственные значения графа Γ, отличные от -1 и k.

Так как для всех $A, B \in \tau$ число $e_{AB} := |\Gamma_1(x) \cap B|$ не зависит от выбора вершины $x \in A$, то есть разбиение τ является равномерным, то собственные значения матрицы $\mathbf{E}_\tau := (e_{AB})_{A,B\in\tau}$ являются собственными значениями графа Γ (см., например, [40, с. 436, § A.4] или [45, гл. 2.3]). Мы имеем

$$\mathbf{E}_\tau = e_{AA}\mathbf{I}_r + t_1\mathbf{A}(\Psi_1) + t_2\mathbf{A}(\Psi_2), \tag{29}$$

где $\mathbf{I}_r$ — единичная $r\times r$-матрица, $\mathbf{A}(\Psi_i)$ — матрица смежности графа Ψ_i (рассматриваемого в качестве подграфа в Ψ) и $A \neq B$. В частности, если e_{AB} постоянно для всех $A \neq B$, то

$$\mathbf{E}_\tau = e_{AA}\mathbf{I}_r + e_{AB}\mathbf{A}(\Psi), \tag{30}$$

где $\mathbf{A}(\Psi)$ — матрица смежности графа Ψ и $A \neq B$.

Эти наблюдения мы используем позднее для исключения большинства подслучаев при $\mathrm{rk}(G^\Sigma) \leq 5$ и $r > 2$.

I. Допустим, что хотя бы один блок системы τ не является кокликой. Не ограничивая общности, будем считать, что $b_1 \in T(a)$ и положим $t := t_2$. В этом случае число $n_2 = \dfrac{t}{|T_a(x)|}\deg\Psi = \dfrac{k_2}{|T_a(x)|}$ делит $|\mathrm{Out}(T)|$, $Q_1(x) \subset T(x)$ для всех $x \in F$, в частности, $Q_1(a) \subset T(a)$. Если при этом $b_2 \in T(a)$, то $Q_2(a) \subset T(a)$ и Ψ — коклика, противоречие. Поэтому $T(a)$, а значит, и любой другой блок системы τ не содержат ребер типа Q_2, то есть $e_{AA} = k_1$. Отсюда Ψ_1 является r-кокликой, $\Psi = \Psi_2$ и Γ не содержит 3-циклов $\{x, y, z\}$ таких, что $(x, y), (x, z) \in Q_1$ и $(y, z) \in Q_2$. В частности, $Q_1(a)$ не содержит ребер типа Q_2, что ввиду соотношений (15), (11), (13) влечет

$$\begin{aligned}
\delta_{12}(a, b_1) &= \delta_{21}(a, b_1) = \delta_{11}(a, b_2) = 0,\\
\delta_{11}(a, b_1) &= \lambda(\Omega_1) = \lambda_1,\\
\delta_{22}(a, b_1) &= \lambda - \lambda_1.
\end{aligned}$$

Отсюда ввиду соотношений (12), (14) получаем

$$\delta_{21}(a, b_2) + \delta_{22}(a, b_2) = \lambda_2, \quad \delta_{12}(a, b_2) = \lambda - \lambda_2.$$

Кроме того, в силу соотношения (20) имеем $\lambda_1 = \lambda(\Phi_1) = \lambda(\Omega_1)$ и вершина из $F_1 \setminus \{b_1\}$ «в среднем» имеет $\dfrac{k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1}{r-1}$ соседей типа Q_1 в $Q_2(a)$ и $\dfrac{k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1}{r-1}$ соседей типа Q_2 в $Q_1(a)$.

Поскольку TH индуцирует группу ранга 3 на $T(a)$, заключаем, что подграф в Γ, индуцированный множеством $T(a)$, изоморфен графу Φ_1. Следовательно, вершина b_1 имеет ровно $k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1$ соседей типа Q_1 в $\big(T(a) \setminus (Q_1(a) \cup \{a\})\big) \subset Y_2$.

Кроме того, в $F\setminus\{a\}$ содержится всего $\deg\Psi$ вершин x, имеющих в точности t соседей типа Q_2 из $T(a)\setminus(Q_1(a)\cup\{a\})$, и всего $r-1-\deg\Psi$ вершин, несмежных с вершинами $T(a)$. Значит,

$$t = \delta_{12}(a, b_2) + \big|\big(T(a) \setminus Q_1(a)\big) \cap Q_2(b_2)\big| = \delta_{21}(a, b_2) + \big|\big(T(b_2) \setminus Q_1(b_2)\big) \cap Q_2(a)\big|.$$

1. Предположим, что $\deg\Psi = 1$. Тогда $Q_2(a) \subset T(b_2)$, $|K| = 2 = |\Psi|$ и для $a^* \in F \setminus \{a\}$ имеем с одной стороны

$$\mu = |\Gamma_1(a^*) \cap \Gamma_1(b_1)| = |Q_1(b_1) \cap Y_2| + |Q_2(b_1) \cap Y_1| = 2(k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1) = 2\frac{k_2}{k_1}\mu(\Phi_1),$$

и с другой —

$$\mu = |\Gamma_1(a^*) \cap \Gamma_1(b_2)| = |Q_1(b_2) \cap Y_1| + |Q_2(b_2) \cap Y_2| = \mu(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2),$$

откуда

$$\mu = 2(k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1) = \mu(\Phi_1) + (1 + k - 2k_1 + \mu(\Phi_1) - 2) = 2\mu(\Phi_1) + k_2 - k_1 - 1,$$

то есть $3k_1 = 2(\mu(\Phi_1) + \lambda(\Phi_1)) + k_2 + 1$ и $\lambda = k - \mu - 1 = \mu(\Phi_2) + \lambda(\Phi_1)$.

По доказанному выше, получаем следующие соотношения

$$\mu - \mu_1 = k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1, \quad \mu_1 = \mu(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) - k_1 + \lambda(\Phi_1) + 1,$$

$$\mu - \mu_2 = \frac{k_1}{k_2}(\mu - \mu_1) = \frac{k_1}{k_2}(k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1), \quad \mu_2 = \mu(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) - \frac{k_1}{k_2}(k_1 - \lambda(\Phi_1) - 1),$$

а также

$$\lambda - \lambda_1 = \mu(\Phi_2), \quad \lambda_1 = \lambda(\Phi_1), \quad \lambda - \lambda_2 = \frac{k_1}{k_2}\mu(\Phi_2), \quad \lambda_2 = \mu(\Phi_2) + \lambda(\Phi_1) - \frac{k_1}{k_2}\mu(\Phi_2).$$

Отсюда по лемме 5.2 и теореме 5.3

$$2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) - k = -1,$$

и число

$$\gamma = -2(\lambda(\Phi_2) + k_1 + \frac{k_1}{k_2}(-k_1 + \lambda(\Phi_1) + 1) + 1) + k$$

является собственным значением матрицы смежности $\mathbf{A}(\Gamma)$ графа Γ.

Поскольку Γ — недвудольный граф Тейлора, по [40, теорема 1.5.3] получаем, что $\Delta := \Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, \lambda(\Delta), \frac{\lambda}{2})$ и, так как $k(\Delta) = \lambda > 0$, то $\lambda(\Delta) = \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1))$.

Покажем, что $Q_1(a) \cap Q_1(b_1)$ — коклика. Предположим обратное. Тогда найдется дуга $(x, y) \in Q_1 \cap (Q_1(a) \times Q_1(a))$. Посчитаем число вершин в $[x] \cap [y] \cap \Gamma_1(a)$. Имеем

$$\begin{array}{rcl} |[x] \cap [y] \cap Q_1(a)| & = & \delta_{11}(x, y) - 1 = \lambda(\Phi_1) - 1, \\ |[x] \cap [y] \cap Q_2(a)| & = & \delta_{22}(x, y) = \delta_{22}(a, b_1) = \dfrac{k_2}{k_1}\delta_{12}(a, b_2) = \dfrac{k_2}{k_1}|Q_2(b_2) \cap Y_1| = \\ & = & \dfrac{k_2}{k_1}(k_2 - \lambda(\Phi_2) - 1) = \mu(\Phi_2), \end{array}$$

поэтому

$$\lambda(\Delta) = \lambda(\Phi_1) - 1 + \mu(\Phi_2) = \lambda - 1.$$

Отсюда следует, что $k - 1 = \lambda$ и граф Γ несвязен, противоречие.

Далее мы докажем, что случай $\deg\Psi = 2, 3$ невозможен.

2. Предположим, что $\deg\Psi = 2$. Тогда Ψ — l-цикл, $l \leq 5$ и $t = k_2/2$. Заметим, что H не может фиксировать F поточечно, поскольку иначе для вершины $a^* \in F \setminus \{a\}$ H-орбита на $[a^*] \cap Q_2(a)$ содержит все вершины из $Q_2(a)$ и $t = k_2$, что невозможно.

Допустим, $l = 3$, то есть Ψ — 3-цикл. Тогда в H найдется 2-элемент, переставляющий между собой $T(a_1)$ и $T(a_2)$, где $a_1, a_2 \in F \setminus \{a\}$, и Y_2 содержит четыре попарно непересекающихся подмножеств размера t:

$$Q_2(a_i) \cap T(a) \cap Y_2, \quad Q_2(a) \cap T(a_i) \cap Y_2 \quad (i = 1, 2).$$

Так как $Q_1(a_1) \subset T(a_1) \setminus Y_2$ и $Q_2(a_1) \cap T(a_1) = \varnothing$, то $t = |Q_2(a_1) \cap T(a_2) \cap Y_2|$ и, следовательно, вершина a_1 смежна с двумя вершинами из одного и того же антиподального класса, противоречие.

Пусть $l = 4$. Ввиду (30) собственное значение $\gamma \in \{\pm 2, 0\}$ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} + e_{AA} = \gamma \cdot \dfrac{k_2}{2} + k_1 \in \{k_1 \pm k_2, k_1\}$ графа Γ, откуда k_1 делит $\gcd(k, k_2)$. Поскольку граф Γ недвудолен, $k_2 \neq k_1$. Поэтому $\lambda \neq \mu$, $n = k_1$, $m = k_2 - k_1$ и $k_1 + k_2 = nm$, что влечет $k_1 = 1$, противоречие.

Пусть $l = 5$. Ввиду (30) собственное значение $\gamma \in \{2, \dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})\}$ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} + e_{AA} = \gamma \cdot \dfrac{k_2}{2} + k_1 \in \{k_2 + k_1, \dfrac{k_2}{4}(-1 \pm \sqrt{5}) + k_1\}$ графа Γ, что влечет $\lambda = \mu$ и $\sqrt{k} = \dfrac{k_2}{4}(-1 + \sqrt{5}) + k_1$, противоречие.

3. Предположим, что $\deg\Psi = 3$. Тогда $t = k_2/3$, $r \leq 10$ и поскольку число вершин графа нечетной степени четно, то $r = 4, 8$.

Пусть $r = 4$. Тогда Ψ — 4-клика. Ввиду (30) собственное значение $\gamma \in \{3, -1\}$ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} + e_{AA} \in \{k, -k_2/3 + k_1\}$ графа Γ и $k_1 - k_2/3$ делит $k_1 + k_2$. Так как k — нечетно, то $k_1 - k_2/3 = \pm\gcd(k_1, k_2/3)$ и поэтому $\lambda \neq \mu$.

Пусть $r = 8$. Имеется всего три транзитивных графа степени 3 на 8 вершинах (это граф куба, граф Вагнера (обхвата 4, с полной группой автоморфизмов изоморфной Dih_8) и несвязный граф обхвата 3 (объединение двух тетраэдров), см. пп. $H5$,$H6$,$H7$ перечня из [102, с. 1111]), но ни один из них не удовлетворяет ограничениям на группу или диаметр графа Ψ. Противоречие.

II. Допустим, что хотя бы один блок системы τ является кокликой. Это равносильно тому, что любой ее блок состоит из вершин, находящихся попарно на расстоянии 2 в Γ. При этом группа T содержит хотя бы один элемент g, действующий без неподвижных точек на Σ (см., например, [58, упражнение 1.7.2]). Отсюда по [137, лемма 3] и [19, лемма 3] в случае, если собственные значения графа Γ целые, получаем, что $n + m$ делит $k + 1$.

Далее, $e_{AA} = 0$ для всех $A \in \tau$ и по (29) матрица $\mathbf{E}_\tau$ есть не что иное, как взвешенная матрица смежности графа Ψ (с весами t_1 и t_2). Пусть γ^+ и γ^- — соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы $\mathbf{E}_\tau$, а γ_i^+ и γ_i^- — соответственно максимальное и минимальное собственные значения матрицы $t_i\mathbf{A}(\Psi_i)$, $i = 1, 2$. Тогда (см., например, [45])

$$\gamma_1^- + \gamma_2^- \le \gamma^- \le \gamma^+ \le \gamma_1^+ + \gamma_2^+ \le t_1 \deg \Psi_1 + t_2 \deg \Psi_2 = k.$$

Покажем, что $r > 2$ и $\deg \Psi > 1$. Легко видеть, что $\deg \Psi = 1$ тогда и только тогда, когда $r = 2$. Но если $r = 2$, то $H = \widetilde{G}_F$ централизует K и фиксирует F поточечно, противоречие с тем, что граф Γ недвудолен.

Заметим, что если $\deg \Psi < r - 1$, то найдется вершина $a^+ \in F \setminus \{a\}$ такая, что $a^+ \notin \Gamma_1(x)$ для всех $x \in T(a)$, откуда граф Γ содержит $2(k+1)$-коклику $T(a) \cup T(a^+)$ и ввиду границы Хофмана для коклик (см., например, [40, предложение 1.3.2]) мы получаем неравенство

$$1 + \frac{k}{\theta} \le \frac{r}{2}, \tag{31}$$

где $-\theta = -m$ — наименьшее собственное значение графа Γ. Отсюда при $\deg \Psi < r - 1$ следует, что $r \ge 6$ (иначе $n = 1$ или $k \le 2$, что невозможно по условию).

Далее, при фиксированном $i = 1, 2$ число

$$t_{12}^i := |\Gamma_1(a) \cap T(x)|$$

постоянно для каждой вершины $x \in Q_i(a)$. Из этого следует, что имеются ровно две возможности:

(a) $t_{12}^1 = t_{12}^2 = t_1 + t_2$, $\widetilde{G}$ действует транзитивно на дугах графа Ψ и

$$\deg \Psi = \frac{k}{t_{12}^1} = \frac{k_1 + k_2}{t_1 + t_2} = \frac{k_i}{t_i} = \deg \Psi_i;$$

(b) $t_1 = t_{12}^1 \ne t_{12}^2 = t_2$, H имеет ровно две орбиты на окрестности вершины $T(a)$ в Ψ и

$$\deg \Psi = \frac{k_1}{t_1} + \frac{k_2}{t_2} = \deg \Psi_1 + \deg \Psi_2.$$

Напомним, что для любой вершины $x \in Q_i(a)$ число t_i делится на $|T_a(x)|$ и для каждого $i = 1, 2$ число T_a-орбит на $Q_i(a)$ равно $n_i := \dfrac{t_i}{|T_a(x)|} \deg \Psi_i = \dfrac{k_i}{|T_a(x)|}$ и делит $|\mathrm{Out}(T)|$.

Обозначим через W_i, где $i = 1, 2$, все вершины графа Ψ_i, находящиеся в Ψ_i на расстоянии не меньше 3 от $\tilde{a} := T(a)$ или содержащиеся в связной компоненте графа Ψ_i, не содержащей $\tilde{a}$. Тогда из условия $d(\Psi) \le 2$ следует, что для каждой вершины $\tilde{x}_1 \in W_1$ в Ψ_2 имеется 2-путь от $\tilde{x}_1$ к $\tilde{a}$ (очевидно, число таких путей не превосходит $\deg \Psi_2(\deg \Psi_2 - 1)$. Проведя аналогичное рассуждение для W_2, получаем

$$|W_i| \le \deg \Psi_j(\deg \Psi_j - 1) \ (\{i, j\} = \{1, 2\}). \tag{32}$$

Далее мы последовательно рассмотрим возможности (a) и (b) и докажем, что в большинстве возникающих подслучаев $\deg \Psi \ge 5$ (и, стало быть, $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) > 5$).

(a): $t^1_{12} = t^2_{12} = t_1 + t_2$. Пусть $\widetilde{G}$ действует транзитивно на дугах графа Ψ.

1. Предположим, что $\deg\Psi = r-1$ (по доказанному выше $r > 2$). Тогда $\widetilde{G}$ индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок $\widetilde{G}^\Psi$ на множестве вершин r-клики Ψ и $\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^\Psi) \simeq K$. Ввиду (30) собственное значение $\gamma \in \{r-1, -1\}$ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} = \gamma(t_1+t_2) \in \{k, -(t_1+t_2)\}$ графа Γ. Если $\lambda \neq \mu$, то $m = t_1+t_2 = \mu$, $n = r-1$ и k четно, что противоречит ограничению $(r-1)\mu \le k-1$ (см. предложение 1.2). Значит, $\lambda = \mu = r-2$ и $\sqrt{k} = t_1+t_2 = r-1$. Поскольку по лемме 1.6 каждый простой делитель p числа r делит и число $k+1 = r\mu+2$, то r — степень 2 и K — элементарная абелева 2-группа. Так как группа $U := H/\widetilde{G}_F$ вкладывается изоморфно в группу $\mathrm{Out}(T)$ и последняя разрешима, то и U разрешима. При этом $r-1$ делит число $|H : \widetilde{G}_F|$, которое в свою очередь, делит $|\mathrm{Out}(T)|$.

Если $r = 4$, то $k = 9$, $\mu = \lambda = 2$. Но по замечанию в начале части II доказательства число $k+1$ должно делиться на $2\sqrt{k}$, противоречие.

2. Теперь предположим, что $\deg\Psi < r-1$. По доказанному ранее имеем $r \ge 6$. Поэтому $\deg\Psi = \deg\Psi_i \ge 3$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) \ge 4$. Ввиду (30) собственное значение γ графа Ψ дает собственное значение $\gamma \cdot e_{AB} = \gamma(t_1+t_2)$ графа Γ.

2.1. Допустим, что $\deg\Psi = 3$. Тогда $r = 8$ и по [102] получаем противоречие тем же способом, что и в части I.

2.2. Допустим, что $\deg\Psi = 4$. Тогда $r = 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17$ и так как K — элементарная абелева группа, то по [63, теорема 1.2] имеем либо $r = 8$, $\Psi \simeq K_{4,4} \simeq C(2;4;1)$ (см. п. $H8$ из [102, с. 1111]) и $\gamma \in \{\pm 4, 0\}$, либо $r = 16$, $\Psi \simeq H_{4,2} \simeq C(2;4;2)$ (4-куб) и $\gamma \in \{\pm 4, \pm 2, 0\}$, либо $r = 9$, $\Psi \simeq G(3^2)$ и $\gamma \in \{-2, 1, 4\}$ (см. п. $I4$ из [102, с. 1112]), либо $r = 13$, 17 и $\Psi \simeq C(r; \pm 1; \pm\epsilon)$ — r-циркулянт, где $\epsilon^2 \equiv -1 \pmod r$ (при $r = 13$ граф имеет три различных нецелых собственных значения (см. п. $M3$ из [102, с. 1112]), при $r = 17$ граф имеет диаметр 3). Противоречие с тем, что $d(\Psi) \le 2$ и в любом из этих случаев набор собственных значений $\{\gamma \cdot (t_1+t_2)\}$ не является допустимым для Γ.

(b): $t_1 = t^1_{12} \neq t^2_{12} = t_2$. В этом случае $\deg\Psi \ge 2$. Заметим, что если для каждого $i = 1, 2$ обхват графа Ψ_i больше трех (то есть $\lambda(\Psi_i) = 0$), то

$$\delta_{11}(a, b_1) = \delta_{22}(a, b_2) = 0$$

и ввиду соотношений (11), (12), (13) и (14) получаем

$$\delta_{12}(a, b_i) = \lambda_i \quad (i = 1, 2), \quad \delta_{22}(a, b_1) = \lambda - 2\lambda_1, \quad \delta_{11}(a, b_2) = \lambda - 2\lambda_2,$$

что по (15) и (16) влечет

$$(\lambda - 2\lambda_1)k_1 = \lambda_2 k_2, \quad \lambda_1 k_1 = (\lambda - 2\lambda_2)k_2. \tag{33}$$

Таким образом, если $\lambda(\Psi_i) = 0$ $(i = 1, 2)$, то имеем либо $\lambda_i > 0$ и

$$(\lambda - 2\lambda_2)(\lambda - 2\lambda_1) = \lambda_1\lambda_2, \tag{34}$$

либо $\lambda_i = \lambda = 0$.

Заметим, что в случае $\deg \Psi = r - 1$ группа H имеет ровно две орбиты на $F \setminus \{a\}$ и тогда Ψ_1 и Ψ_2 — два взаимодополнительных графа ранга 3 на r вершинах.

1. Предположим, что $\deg \Psi = 2$. Тогда Ψ — r-цикл и $t_i = k_i$ $(i = 1, 2)$ и так как в этом случае $r \leq 5$, то $\deg \Psi = r-1$, то есть Ψ — 3-цикл. Но тогда H фиксирует $F = \{a, a_1, a_2\}$ поточечно и для вершин a_1 и a_2 имеем $Q_i(a_i) \subset T(a)$ и $Q_2(a_1) \subset T(a_2)$, что влечет $T(a_1) = T(a)$, противоречие.

2. Предположим, что $\deg \Psi = 3$. Тогда $r \leq 10$ четно, то есть $r = 4, 8$. Можно считать, что $t_1 = k_1$ и $t_2 = k_2/2$.

Пусть $r = 4$. Тогда Ψ — 4-клика, Ψ_1 — объединение двух изолированных ребер и Ψ_2 — 4-цикл. Поэтому

$$\delta_{11}(a, b_1) = \delta_{11}(a, b_2) = \delta_{12}(a, b_1) = 0, \quad \delta_{22}(a, b_2) = 0$$

и ввиду соотношений (11), (12), (13) и (14) получаем

$$\lambda_1 = 0, \quad \delta_{12}(a, b_2) = \lambda - \lambda_2 = \lambda_2, \quad \delta_{22}(a, b_1) = \lambda,$$

То есть $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}\lambda$ и по (17) $\lambda k_1 = \lambda_2 k_2$. Допустим, $\lambda > 0$. Тогда $t_2 = k_1 \dfrac{\lambda}{2\lambda_2} = k_1$ и $\mathbf{E}_\tau = k_1 \mathbf{A}(\Psi)$, следовательно $-k_1$ является собственным значением графа Γ и k_1 делит $\gcd(k, k_2)$, противоречие. Значит, $\lambda = 0$, $k - 1 = 3\mu$ и по п. (vi) предложения 1.2 получаем $2 \geq \sqrt{\mu}$. Так как $k+1$ четно, то μ четно (см. по п. (v) предложения 1.2), то есть $\mu = 2, 4$ и $k = 7, 13$. Но тогда $\{n, m\} = \{1, k\}$, противоречие.

Случай $r = 8$ исключается при помощи [102] тем же способом, что и в части I.

3. Предположим, что $\deg \Psi = 4$. Тогда $5 \leq r \leq 17$ и можно считать, что либо $t_i = k_i/2$, $i = 1, 2$, либо $t_1 = k_1$ и $t_2 = k_2/3$.

3.1. Рассмотрим случай $\deg \Psi_1 = \deg \Psi_2 = 2$. Тогда Ψ_i — объединение s_i изолированных l_i-циклов, $s_i \geq 1$ и l_i делит r. Ввиду границы (32) получаем $|W_i| \leq 2$ и $d(\Psi_i) \leq 3$ $(i = 1, 2)$, и поэтому $r = 5, 7$.

Пусть $r = 5$ и Ψ — это 5-клика. Допустим, $\lambda > 0$. Тогда по (33) имеем $k_2 = \dfrac{(\lambda - 2\lambda_1)}{\lambda_2} k_1 = x k_1$ и

$$\mathbf{E}_\tau = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_1 & k_2 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_2 & k_2 & k_1 \\ k_1 & k_2 & 0 & k_1 & k_2 \\ k_2 & k_2 & k_1 & 0 & k_1 \\ k_2 & k_1 & k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{k_1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & x & x \\ 1 & 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 & x \\ x & x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & x & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\dfrac{(1+x)(-1 \pm \sqrt{5})k_1}{4} = \dfrac{k(-1 \pm \sqrt{5})}{4}$ являются собственными значениями графа Γ. Но тогда $\lambda = \mu$ и эти собственные значения равны $\pm\sqrt{k}$, что, очевидно, невозможно.

Значит, $\lambda = 0$, $k + 1 = (r - 1)\mu + 2$ и по п. (vi) предложения 1.2 получаем $3 \geq \sqrt{\mu}$. Но ввиду по леммы 1.6 число 5 делит $k + 1$, поэтому и $(\mu, k) = (2, 9)$, $(7, 29)$. Второй случай невозможен, поскольку μ должно быть четно, см. п. (v) предложения 1.2. Тогда $k = 9$ и $n = m = 3$, но $\lambda - \mu = n - m$, противоречие.

Пусть $r = 7$. По [102] в этом случае Ψ — это граф обхвата 3 на семи вершинах (7-циркулянт, см. п. $G3$ перечня из [102, с. 1111]) и ввиду (31) $k \le \dfrac{5}{2}\theta$. Если $\lambda = \mu$, то $r \le k \le 6$, противоречие. Если $\lambda \ne \mu$, то по п. (iv) предложения 1.2 имеем $\theta = m \le n^2$, что влечет $n \le 2$ и $m \le 4$, то есть $k = 8$, противоречие с тем, что r делит $k + 1$ в силу леммы 1.6.

3.2. Теперь пусть $\deg \Psi_2 = 3$. Поскольку число вершин графа нечетной степени четно, то в этом случае $r = 8, 16$ и $d(\Psi) = 2$.

Пусть $r = 8$. В этом случае из неравенства (31) следует, что $k \le 3\theta$. Если $\lambda = \mu$, то $r \le k \le 9$. Если $\lambda \ne \mu$, то условие делимости числа $k + 1$ на $m + n$ (см. замечание в начале части II доказательства) дает $(n, m) = (3, 5)$ и $k = 15$. Противоречие с тем, что тогда $\mathrm{rk}(\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^{\Sigma})) = \mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma})$ [107].

Пусть $r = 16$. В этом случае из неравенства (31) следует, что $k \le 7\theta \le 7^3$, откуда по [107] $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 5$, $k = 35$, $k_1 = t_1 = 14$ и $k_2 = 21 = 3t_2$. Тогда $\lambda \ne \mu$, $(n, m) = (7, 5)$, $\lambda = 4$ и $\mu = 2$.

Предложение доказано.

Пример 5.5. Пусть $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ — минимальное $(k + 1, r, \mu)$-накрытие типа (T1) с $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^{\Sigma}) = 3$ и $k + 1 \le 2500$. По [107] и с помощью компьютерной проверки в GAP [59] устанавливается, что тогда $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 3$, за исключением случаев:

(a) $k + 1 = 36$, $k_1 = 14$, $k_2 = 21$, $G^{\Sigma} \simeq L_2(8)$, $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 5$ и $\widetilde{G}^{\Sigma} \simeq \mathrm{P\Gamma L}_2(8)$,

(b) $k + 1 = 36$, $k_1 = 14$, $k_2 = 21$, $G^{\Sigma} \simeq U_3(3)$, $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 4$ и $\widetilde{G}^{\Sigma} \simeq \mathrm{P\Gamma U}_3(3)$,

(c) $k + 1 = 2016$, $k_1 = 567$, $k_2 = 1512$, $G^{\Sigma} \simeq Sp_4(8)$, $\mathrm{rk}(G^{\Sigma}) = 5$ и $\widetilde{G}^{\Sigma} \simeq Sp_4(8).Z_3$.

Рассмотрим первые два. Перебор орбитальных графов для группы $L_2(8)$ в ее транзитивном представлении на 72 точках показывает, что граф Γ существует и имеет параметры $r = 2$ и $\mu \in \{16, 18\}$. При этом $\widetilde{G} = \mathrm{P\Gamma L}_2(8) \times K$, $G' \simeq L_2(8)$ транзитивна на вершинах графа Γ и стабилизатор вершины в G' изоморфен Z_7.

Перебор орбитальных графов для группы $\mathrm{P\Gamma U}_3(3)$ в ее транзитивном представлении на 72 точках показывает, что граф Γ существует и имеет тот же набор параметров. При этом $\widetilde{G} = \mathrm{P\Gamma U}_3(3) \times K$, $G' \simeq U_3(3)$ имеет две орбиты на вершинах графа Γ и стабилизатор вершины в G изоморфен $L_2(7)$. При $\mu = 18$ граф Γ имеет параметры $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$, допускает H-равномерное разбиение множества ребер с параметрами $\mu_1 = 9$, $\mu_2 = 12$. Кроме того, Γ удовлетворяет условиям теоремы 5.3 и имеет собственное значение $\gamma = -7$.

При фиксированном μ получающиеся графы изоморфны друг другу и являются дистанционно-транзитивными с $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq Z_2 \times Sp_6(2)$.

Пусть теперь $k + 1 = 2016$. Перебор орбитальных графов для группы $Sp_4(8).Z_3$ в ее транзитивном представлении на 4032 точках показывает, что граф Γ существует и имеет параметры $r = 2$ и $\mu \in \{1024, 990\}$. При этом $\widetilde{G} = (Sp_4(8).Z_3) \times K$, $G' \simeq Sp_4(8)$ транзитивна на вершинах графа Γ и стабилизатор вершины в G изоморфен $L_2(64)$. Полная группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Gamma) \simeq Z_2 \times Sp_{12}(2)$ графа Γ действует дистанционно-транзитивно.

В компьютерных вычислениях применялся пакет GRAPE [116]. Конструкции указанных примеров графов $\Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ можно найти в [40, с. 228].

Предложение 5.6. *Предположим, что Γ — минимальное $(k+1, r, \mu)$-накрытие типа* (T1), *$\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$, Σ — множество его антиподальных классов и H — стабилизатор вершины a в $\widetilde{G}$. Предположим к тому же, что $\widetilde{G} = G$ и G — квазипростая группа. Тогда число r — простое и справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $r > 3$, то либо $G^\Sigma \simeq \mathrm{PSU}_d(q)$ и r делит $\gcd(d, q+1)$, либо $G^\Sigma \simeq \mathrm{PSL}_d(q)$ и r делит $\gcd(d, q-1)$.*

2. *Если $r = 3$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, то $\gamma = 3(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$ является собственным значением графа Γ, где (μ_1, μ_2) — параметры H-равномерного разбиения множества ребер.*

3. *Если $r = 2$ и $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$, то $\gamma = 2(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$ является собственным значением графа Γ и $\Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1)), \frac{\lambda}{2})$, где (μ_1, μ_2) — параметры H-равномерного разбиения множества ребер.*

Доказательство. По условию имеем $K \leq Z(G)$ и $|K| = r$. Тогда $G_a \trianglelefteq G_{\{F\}}$ и поэтому $G_{\{F\}} = K \times G_a$. Отсюда G_a фиксирует F поточечно, то есть $G_a = G_F$ и поэтому $r \cdot \mathrm{rk}(G^\Sigma) = \mathrm{rk}(G)$.

Так как G — квазипростая группа и $K = Z(G)$, то $K \simeq \mathrm{M}(G^\Sigma)/\mathrm{M}(G)$ (см. [29, 33.8]). Ввиду того, что $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ — минимальное $(k+1, r, \mu)$-накрытие и $G = \widetilde{G}$ действует примитивно на Σ, получаем, что r — простое число. Действительно, если p — простой делитель числа r, то для подгруппы K_1 из K индекса p граф Γ^{K_1} является G/K_1-вершинно-транзитивным $(k+1, p, r\mu/p)$-накрытием. Поскольку действие группы G/K_1 на антиподальных классах графа Γ^{K_1} примитивно и ядро этого действия совпадает с K/K_1, то по выбору Γ заключаем $K_1 = 1$.

Как известно, мультипликатор Шура конечной неабелевой простой группы X либо тривиален, либо его порядок делится только на 2 или на 3, либо $\{2,3\}'$-часть от его порядка делит число $\gcd(d, q-1)$ при $X \simeq \mathrm{PSL}_d(q)$ или число $\gcd(d, q+1)$ при $X \simeq \mathrm{PSU}_d(q)$ (см., например, [10]). Применив по лемму 1.6, получаем, что справедливо утверждение 1.

Докажем утверждения 2 и 3. Пусть $\mathrm{rk}(G^\Sigma) = 3$. Положим $\Omega = \mathrm{V}(\Gamma)$, $\mathcal{Q} = \mathrm{O}rb_2(G)$ и выберем $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ такие, что $\mathrm{A}(\Gamma) = Q_1 \cup Q_2$, то есть $\Gamma = \Gamma(Q_1 \cup Q_2)^*$. Пусть $(a, b_i) \in Q_i$ и $|Q_i(a)| = k_i$, где $i = 1, 2$. По лемме 5.2 и теореме 5.3 множество ребер графа Γ допускает H-равномерное разбиение с параметрами (μ_1, μ_2), где $\mu_i = |\Gamma_1(b_i) \cap Q_i(x)|$ для $x \in F \setminus \{a\}$, $i = 1, 2$, и число

$$\gamma = -(\lambda - \lambda_1 - \lambda_2) + (\mu - \mu_1 - \mu_2) = r(\mu - \mu_1 - \mu_2) - 1$$

является собственным значением графа Γ.

Пусть $r = 2$. Тогда $k = 2\mu + \lambda + 1$, Γ — недвудольный граф Тейлора, $\lambda > 0$ и по [40, теорема 1.5.3] $\Delta := \Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, \lambda(\Delta), \frac{\lambda}{2})$, где $\lambda(\Delta) = \frac{1}{2}(3\lambda - (k+1))$.

Предложение доказано.

§ 5.4. Спорадический случай

Здесь мы опишем абелевы минимальные $(k+1, r, \mu)$-накрытия $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ такие, что $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$ и G^Σ является спорадической простой группой. Основной результат раздела представлен следующей теоремой.

Теорема 5.7. *Предположим, что* $\Gamma = \Gamma(\widetilde{G}, G, K)$ *является абелевым минимальным* $(k+1, r, \mu)$*-накрытием,* $\mathrm{rk}(\widetilde{G}^\Sigma) = 3$ *и* $\mathrm{Soc}(\widetilde{G}^\Sigma)$ *— спорадическая простая группа. Тогда* $K \leq Z(G)$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(S1) G' *действует интранзитивно на вершинах графа* Γ, $\widetilde{G} = G$, $G' \simeq M_{22}$, $k = 175$, $r = 2$, Γ *— дистанционно-транзитивный граф Тейлора с* $\mu \in \{72, 102\}$ *и* $\mathrm{Aut}(\Gamma) = HiS \times K$*;*

(S2) G *— квазипростая группа,* $r = 2$ *и либо* $G = Z_2.M_{22}$, $k = 175$ *и* $\{\lambda, \mu\} = \{72, 102\}$, *либо* $G = Z_2.Fi_{22}$, $k = 3509$ *и* $\{\lambda, \mu\} = \{1600, 1908\}$.

Доказательство. Пусть $r = p^l$, где p — простое. Напомним, что по по лемме 1.6 число p делит $k+1$. Предположим, что $T = G^\Sigma (= \mathrm{Soc}(\widetilde{G}^\Sigma))$ — спорадическая группа и K — абелева группа. В этом случае допустимые возможности для T описываются таблицей 1, в которой приводится необходимая для дальнейших рассуждений информация о группе T (эти сведения можно почерпнуть в [13, таблица 4], [46, гл. 11], [51], [10]).

Покажем сначала, что $K \leq Z(G)$. Предположим обратное. Тогда по предложению 5.1 имеем $\mathrm{d}_{\min}(T) < k+1$, то есть реализуется один из случаев # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 16. Но в любом из них ограничение $T \leq \mathrm{Aut}(K) \simeq GL_l(p)$ влечет $r = p^l \geq k+1$, противоречие.

Так как $\mathrm{rk}(T) = 3$, то по предложению 5.1 заключаем $K \leq Z(G)$ и можно считать, что $r = p$. Положим $N = G'$. Пусть L — стабилизатор антиподального класса F в N и $a \in F$.

<u>Случай $N \simeq T$.</u> Допустим, что N интранзитивна на вершинах графа Γ. В этом случае $r = 2$ и Γ — граф из п. 2(i) предложения 5.4, то есть Γ — недвудольный граф Тейлора, и $2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) = k - 1$ (Φ_1 и Φ_2 определяются так же, как и в разделе 5.2).

Ввиду леммы 1.6 получаем, что число $k+1$ четно. Этим сразу исключаются случаи # 1, 3, 7, 8, 17.

Полный перебор остальных случаев с учетом классификации графов Φ_1, Φ_2 (см. например, [46, таблица 11.7]) показывает, что тождество $2(\lambda(\Phi_1) + \lambda(\Phi_2) + 1) = k - 1$ выполняется только в случае #6. Отсюда $k + 1 = 176$, граф Φ_1 имеет параметры $(176, 70, 18, 34)$ и граф Φ_2 имеет параметры $(176, 105, 68, 54)$. Значит, $\{\lambda, \mu\} = \{72, 102\}$. В этом случае $\widetilde{G} = G$, $N \simeq M_{22} \leq HiS$ и Γ — дистанционно-транзитивный граф с $\mathrm{Aut}(\Gamma) = K \times HiS$ (последний факт проверен с помощью вычислений в GRAPE [116]).

Таблица 3

#	$k+1$	k_1, k_2	T	$T_{\{F\}}$	$\mathrm{M}(T)$	$\mathrm{Out}(T)$	$\mathrm{d}_{\min}(T)$
1	55	18, 36	M_{11}	$M_9.2$	1	1	11
2	66	20, 45	M_{12}	$M_{10}.2$ (2 кл.)	Z_2	Z_2	12
3	77	16, 60	M_{22}	$2^4.A_6$	Z_{12}	Z_2	22
4	100	22, 77	HiS	M_{22}	Z_2	Z_2	$k+1$
5	100	36, 63	HJ	$U_3(3)$	Z_2	Z_2	$k+1$
6	176	70, 105	M_{22}	A_7	Z_{12}	Z_2	22
7	253	42, 210	M_{23}	$M_{21}.2$	1	1	23
8	253	112, 140	M_{23}	$2^4.A_7$	1	1	23
9	275	112, 162	McL	$U_4(3)$	Z_3	Z_2	$k+1$
10	276	44, 231	M_{24}	$M_{22}.2$	1	1	24
11	1288	495, 792	M_{24}	$M_{12}.2$	1	1	24
12	1782	416, 1365	Suz	$G_2(4)$	Z_6	Z_2	$k+1$
13	2300	891, 1408	Co_2	$U_6(2).2$	1	1	$k+1$
14	3510	693, 2816	Fi_{22}	$2.U_6(2)$	Z_6	Z_2	$k+1$
15	4060	1755, 2304	Ru	${}^2F_4(2)$	Z_2	1	$k+1$
16	14080	3159, 10920	Fi_{22}	$\Omega_7(3)$ (2 кл.)	Z_6	Z_2	3510
17	31671	3510, 28160	Fi_{23}	$2.Fi_{22}$	1	1	$k+1$
18	137632	28431, 109200	Fi_{23}	$P\Omega_8^+(3).S_3$	1	1	$k+1$
19	306936	31671, 275264	Fi'_{24}	Fi_{23}	Z_3	Z_2	$k+1$

Теперь пусть N транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда L содержит нормальную подгруппу L_a индекса r, $r=2$ и реализуется один из случаев # 2, 10, 11, 13, 18. При этом $\lambda>0$ и $\Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k,\lambda,\frac{1}{2}(3\lambda-(k+1)),\frac{\lambda}{2})$. По лемме 5.2 и теореме 5.3 имеем $k_1-1=\lambda_1+\mu_1$, $k_2-1=\lambda_2+\mu_2$ и число $\gamma=2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1$ является собственным значением графа Γ. Отсюда $k=(2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1)z$ для некоторого целого z.

Пусть $k+1=276$. Тогда $\widetilde{G}=G$ и граф Φ_1 имеет параметры $(276,44,22,4)$ и граф Φ_2 имеет параметры $(276,231,190,210)$. Допустим, $\lambda=\mu=137$. Поскольку $\gamma=2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1=274-2(\mu_1+\mu_2)-1\neq\pm\sqrt{275}$, получаем $\mu=\mu_1+\mu_2$. Тогда из соотношения (27) следует, что $44(\mu-\mu_1)=44\mu_2=231(\mu-\mu_2)$, то есть $275\mu_2=231\mu$, противоречие. Значит, $\lambda\neq\mu$. Так как по п. (vii) предложения 1.2 число $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m)=276\gcd(n,m)$, то $\{n,m\}=\{55,5\}$ и, учитывая п. (iii) предложения 1.2, получаем $\lambda-\mu=\pm50$, то есть $\pm50\cdot274=\lambda^2-\mu^2$. Значит, $\{\lambda,\mu\}=\{112,162\}$. Но, как показывают компьютерные вычисления в GAP, в данном представлении на 552 точках подстановочный ранг группы M_{24} равен 7, причем длины подорбит равны 1^2, 22^4, 462^1, противоречие.

Пусть $k+1=2300$. Тогда $\widetilde{G}=G$ и граф Φ_1 имеет параметры $(2300,891,378,324)$ и граф Φ_2 имеет параметры $(2300,1408,840,896)$. Как и выше, $\lambda\neq\mu$ и ввиду пп. (vii), (iii) предложения 1.2 число $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m)=2300\gcd(n,m)$, что влечет $\{n,m\}=\{11,209\}$ и $\{\lambda,\mu\}=\{1050,1248\}$. Но, как показывают компьютерные вычисления в GAP, в данном представлении на 4600 точках подстановочный ранг группы Co_2 равен 5, причем длины подорбит равны 1^2, 891^2, 2816^1, противоречие.

Пусть $k+1 = 66, 1288, 137632$. Допустим, $\lambda = \mu = (k-1)/2$. Поскольку $\gamma = 2(\mu-(\mu_1+\mu_2)) - 1 = k-1-2(\mu_1+\mu_2)-1 \neq \pm\sqrt{k}$, получаем $\mu = \mu_1+\mu_2$. Тогда из соотношения (27) следует, что $k_1(\mu-\mu_1) = k_1\mu_2 = k_2(\mu-\mu_2)$, то есть $k\mu_2 = k_2\mu$, противоречие. Значит, $\lambda \neq \mu$. Но тогда по п. (vii) предложения 1.2 число $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m)$, противоречие во всех подслучаях.

Случай $Z(N) = K$. Пусть $r = 3$. Тогда $k-1 = \lambda+2\mu$ и так как $k+1$ должно делиться на 3 в силу леммы 1.6, то допустимы только случаи # 12, 14, 19. По лемме 5.2 и теореме 5.3 имеем $k_1 - 1 = \lambda_1 + 2\mu_1$, $k_2 - 1 = \lambda_2 + 2\mu_2$ и число $\gamma = 3(\mu-(\mu_1+\mu_2)) - 1$ является собственным значением графа Γ. Отсюда $k = (3(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1)z$ для некоторого целого z.

Так как $\gcd(k-1, k+1)$ не делится на 3, то $\lambda \neq \mu$. Но тогда ввиду пп. (iv), (vii) предложения 1.2 получаем $m \leq n^2$ и $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m)$, что влечет противоречие во всех подслучаях.

Пусть $r = 2$. Тогда $k-1 = \lambda+\mu$ и так как по лемме 1.6 число $k+1$ должно быть четно, то допустимы только случаи # 2, 4–6, 12, 14–16. По лемме 5.2 и теореме 5.3 имеем $k_1 - 1 = \lambda_1+\mu_1$, $k_2-1 = \lambda_2+\mu_2$ и число $\gamma = 2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1$ является собственным значением графа Γ. Отсюда $k = (2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1)z$ для некоторого целого z. При этом $\lambda > 0$ и $\Gamma_1(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(k, \lambda, \frac{1}{2}(3\lambda-(k+1)), \frac{\lambda}{2})$.

Допустим, $\lambda = \mu = (k-1)/2$. Поскольку $\gamma = 2(\mu-(\mu_1+\mu_2))-1 = k-1-2(\mu_1+\mu_2)-1 \neq \pm\sqrt{k}$, получаем $\mu = \mu_1+\mu_2$. Тогда из соотношения (27) следует, что $k_1(\mu-\mu_1) = k_1\mu_2 = k_2(\mu-\mu_2)$, то есть $k\mu_2 = k_2\mu = (k-1)\mu/2$, противоречие.

Значит, $\lambda \neq \mu$. Но тогда из п. (vii) предложения 1.2 следует, что $n+m$ делит $(k+1)\gcd(n,m)$. Отсюда следует, что имеет место одна из следующих возможностей: либо $k = 99$, $(n,m,\mu) = (9,11,50), (11,9,48)$, либо $k = 175$, $(n,m,\mu) = (5,35,102), (35,5,72)$, либо $k = 3509$, $(n,m,\mu) = (11,319,1908), (319,11,1600)$, либо $k = 4059$, $(n,m,\mu) = (41,99,2058), (99,41,2000)$, либо $k = 14079$, $(n,m,\mu) = (19,741,7400), (57,247,7134), (247,57,6944), (741, 19,6678)$. Сопоставив равенство

$$\mu_1 = -\mu_2 + \mu - \frac{1+\gamma}{2}$$

и соотношение (27), получаем

$$k\mu_2 = k_2\mu - k_1\frac{1+\gamma}{2}.$$

Учитывая, что $0 \leq \mu_1 \leq k_1$, этим исключаются все случаи, кроме случаев # 4–6,14, в которых либо $k = 99$, $k_1 = 22$ и $(\gamma,\mu_1,\mu_2) = (-11,15,40), (11,6,36)$, либо $k = 99$, $k_1 = 36$ и $(\gamma,\mu_1,\mu_2) = (-9,20,32), (9,15,30)$, либо $k = 175$ и $(\gamma,\mu_1,\mu_2) = (-35,51,68), (5,39,60), (-5,30,44), (35,18,36)$, либо $k = 3509$ и $(\gamma,\mu_1,\mu_2) = (11,372,1530), (-11,320,1285)$. Как показывают вычисления в GAP, если $G = Z_2.HiS$, то G не содержит подгрупп индекса 200, а если $G = Z_2.HJ$, то $\mathrm{rk}(G) = 5$. Поэтому $k \neq 99$.

Теорема доказана.

Замечание 5.8. Граф Тейлора из п. ($S1$) заключения теоремы 5.7 существует, известен и для каждого фиксированного набора параметров k, r и μ является единственным (с точностью до изоморфизма) дистанционно-транзитивным $(k+1, r, \mu)$-накрытием (см., например, [66]). Существование графов Тейлора из п. ($S2$) заключения теоремы 5.7, равно как и накрытий, описываемых далее в следствии 5.9, неизвестно.

Следствие 5.9. *Предположим, что* Γ *является абелевым недвудольным* $(k+1, r, \mu)$*-накрытием со свойством* $(*)$ *и* $T := \mathrm{Soc}(\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma)$ *— спорадическая простая группа ранга* 3*. Тогда* Γ *является* $(r/2)$*-накрытием графа Тейлора из п.* ($S2$) *заключения теоремы 5.7 и либо* $T \simeq M_{22}$*,* $k = 175$ *и* $r\mu/2 \in \{72, 102\}$*, либо* $T \simeq Fi_{22}$*,* $k = 3509$ *и* $r\mu/2 \in \{1600, 1908\}$*.*

Доказательство. Так как цоколь почти простой 2-транзитивной группы подстановок либо действует 2-транзитивно, либо изоморфен группе $L_2(8)$, то $\mathrm{rk}(\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma) = 3$. По условию $\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma$ примитивна, и, учитывая, что T — спорадическая простая группа, по теореме 5.7 получим, что $T \simeq M_{22}$, Fi_{22} и соответственно $k + 1 = 176$, 3510.

В случае $r = 2$ получим, что Γ — граф из п. ($S2$) теоремы 5.7.

Пусть $r > 2$. Предположим, что Γ является $r/2$-накрытием дистанционно-транзитивного графа Φ из п. ($S1$) теоремы 5.7. Обозначим через N полный прообраз группы $T \simeq M_{22}$ в $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и через L подгруппу в $K = \mathcal{CG}(\Gamma)$ индекса 2 такую, что $\Gamma^L = \Phi$. Тогда $\mathrm{Aut}(\Gamma)/L \leq N_{\mathrm{Aut}(\Phi)}(N/L)$ и $N/L \simeq M_{22} \times \mathcal{CG}(\Phi)$. Поскольку $\mathrm{Aut}(\Gamma)/L \leq N_{\mathrm{Aut}(\Phi)}((N/L)') = N/L$, то $N = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Но $N/Z(N) \simeq M_{22}$ и по [29, 31.1] $N = N'Z(N)$, N' — квазипростая группа и $Z(N') \leq Z_2$. Заметим, что N' интранзитивна на $\mathrm{V}(\Gamma)$ и $N_a \simeq N_{\{F\}}/Z(N) \simeq A_7$ для $a \in F \in \Sigma$. Кроме того, $N_{\{F\}} = (N')_{\{F\}}Z(N) = N_a \times Z(N)$. Поэтому $N_a = (N_{\{F\}})'$ фиксирует F поточечно и $(N')_{\{F\}} = N_a \times Z(N')$. Поскольку каждая N'-орбита содержит ребро, заключаем $r \leq 6$, то есть $r = 4$ или 6. Так как 3 не делит 176, то $r = 4$. Если $Z(N') > 1$ и $Z(N) = Z(N') \times X$, то Γ^X — граф из п. ($S2$) теоремы 5.7. Допустим $Z(N') = 1$. Тогда $(N')_{\{F\}}$ фиксирует F поточечно и граф на множестве N'-орбит регулярен степени 1, что влечет $r = 2$, противоречие.

Глава 6. Группы автоморфизмов AT4-графов и накрытий графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$

Основная цель настоящей главы — исследовать группы автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4, которые являются накрытиями графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ или AT4-графами.

В параграфе 6.1 исследуются реберно симметричные антиподальные дистанционно регулярные накрытия графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, группа автоморфизмов которых индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном и доказывается

Теорема 6.1. *Пусть* Γ *— реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра* 4, *антиподальное частное* $\bar{\Gamma}$ *которого изоморфно графу эрмитовых форм* $\mathrm{Herm}(2, q^2)$. *Если* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *индуцирует группу ранга* 3 *на* $\bar{\Gamma}$, *то* Γ *— один из следующих графов:*

(1) *граф Уэлса (антиподальное* 2*-накрытие графа* $\bar{\Gamma} \simeq \mathrm{Herm}(2, 2^2)$ *с параметрами* $(16, 5, 0, 2)$*);*

(2) *граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея (антиподальное* 3*-накрытие графа* $\bar{\Gamma} \simeq \mathrm{Herm}(2, 3^2)$ *с параметрами* $(81, 20, 1, 6)$*).*

Остальные параграфы настоящей главы посвящены исследованию групп автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов. Единственный известный пример $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графа — это граф Сойчера с массивом пересечений $\{56, 45, 16, 1; 1, 8, 45, 56\}$, который в свою очередь, является единственным $\mathrm{AT4}(2, 4, r)$-графом (см. [41, теорема 11.4.6]). Этот граф допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, изоморфную группе $3_2.U_4(3)$ (в обозначениях из [51]). Вопрос существования $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов с $p > 2$ открыт. В параграфе 6.2 мы докажем следующие результаты.

Теорема 6.2. *Пусть* Γ *—* $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$*-граф,* $\{a, b\}$ *— его ребро и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* G_a *действует точно как на* $\Gamma_1(a)$, *так и на* $\Gamma_2(a)$, *и если* p *— степень простого числа,* $p > 2$, *то* $\pi(G_{a,b}) \subseteq \{2, 3, ..., p\}$.

Следствие 6.3. *Предположим, что* Γ *— это реберно симметричный* $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$*-граф, где* p *— степень простого числа,* $p > 2$, *и пусть* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда*

$$\pi\big((p+2)(p^2+4p+2)(p+1)(p+4)\big) \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, ..., p\} \cup \pi\big((p+2)(p^2+4p+2)(p+1)(p+4)\big).$$

Если к тому же числа $p+2$ *и* p^2+4p+2 *— простые, то для любой вершины* a *графа* Γ *группа* G_a *почти проста.*

Следствие 6.3 позволяет определить строение допустимых групп автоморфизмов реберно симметричных $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов для простых чисел $p+2$ и p^2+4p+2, не превосходящих 1000, в случае, если p — степень простого числа. С его помощью мы установим, что справедлива

Теорема 6.4. AT4$(p, p+2, r)$-*графы с* $p \in \{11, 17, 27\}$ *не являются реберно симметричными.*

Параграфы 6.3 и 6.4 посвящены исследованию групп автоморфизмов AT4$(p, p+2, r)$-графов и их локальных подграфов для значений параметра $p \in \{5, 7\}$. В них мы докажем следующие теоремы.

Теорема 6.5. *Пусть* Γ *— это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\},$$

$r \in \{3, 6\}$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 47\}$ *и группа* G *интранзитивна на дугах графа* Γ.

Теорема 6.6. *Пусть* Γ *— это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\},$$

$r \in \{4, 8\}$ *и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 79\}$ *и группа* G *интранзитивна на дугах графа* Γ.

Теорема 6.7. *Пусть* Θ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(329, 40, 3, 5)$. *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(\Theta)$ *интранзитивна на вершинах графа* Θ *и* $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 47\}$.

Теорема 6.8. *Пусть* Θ *— это сильно регулярный граф с параметрами* $(711, 70, 5, 7)$. *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(\Theta)$ *интранзитивна на вершинах графа* Θ *и* $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 79\}$.

Результаты главы опубликованы в статьях [147, 140, 139, 136].

§ 6.1. Накрытия графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$

Напомним определение графов эрмитовых форм.

Конструкция 6.9 (Графы эрмитовых форм)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле из q^2 элементов, где q — степень простого числа, V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{F}$ и пусть H — n^2-мерное векторное пространство над $\mathbb{F}_q$ эрмитовых форм на V. Таким образом, $f \in H$ тогда и только тогда, когда форма $f(x, y)$ линейна по y и $\overline{f(x, y)} = f(y, x)$ для всех $x, y \in V$. Пусть $\mathrm{Herm}(n, q^2)$ — граф на множестве векторов H, ребрами которого являются пары $\{f_1, f_2\}$ такие, что $rk(f_1 - f_2) = 1$, где $rk(f)$ обозначает размерность фактор-пространства $V/\mathrm{Rad}(f)$.

По [40, теорема 9.5.7] граф эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(n, q^2)$ является дистанционно транзитивным графом диаметра n на $v = q^{n^2}$ вершинах с параметрами

$$b_j = \frac{q^{2n} - q^{2j}}{q+1} \text{ и } c_j = \frac{q^{j-1}(q^j - (-1)^j)}{q+1} \text{ для } 0 \leq j \leq n.$$

В частности, граф эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ сильно регулярен с параметрами

$$(q^4, (q-1)(q^2+1), q-2, (q-1)q)$$

и имеет спектр

$$(q-1)(q^2+1)^1, (q-1)^{(q^2-q)(q^2+1)}, -(q^2-q+1)^{(q-1)(q^2+1)}.$$

Этот граф допускает группу автоморфизмов вида ${\mathbb{F}_q}^4{\cdot}(\mathrm{GL}(2,q^2)/R)$, где $R=\{x\in\mathbb{F}_{q^2}\mid x^{q+1}=1\}$.

Далее в данном подпараграфе мы докажем теорему 6.9. Сначала приведем вспомогательные результаты.

Лемма 6.10. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с* $v=2k+1$ *и неглавными собственными значениями* $r,-m$. *Тогда выполняются утверждения:*

(1) $k=2rm+m-r-1$, $\lambda=rm-1$, $\mu=(m-1)(r+1)=rm+m-r-1$, *кратность* r *равна* $(2m-1)k/(r+m)$ *и кратность* $-m$ *равна* $(2r+1)k/(r+m)$;

(2) *если* Γ *имеет дистанционно регулярное накрытие* Δ, *то либо* Γ *— пятиугольник и* Δ *— десятиугольник, либо* Γ *— дополнительный граф к треугольному графу* $T(7)$ *и* Δ *— граф Конвея-Смита с массивом пересечений* $\{10,6,4,1;1,2,6,10\}$.

Доказательство. По условию имеем $\mu=k-\lambda-1$. Дополнительный граф $\bar\Gamma$ имеет параметры $\bar k=k$, $\bar\lambda=\mu-1$ и $\bar\mu=\lambda+1$ и неглавные собственные значения $m-1,-(r+1)$. Отсюда $(m-1)(r+1)=\bar k-\bar\mu=\mu$ и $rm=k-\mu=\lambda+1$, поэтому $k=2rm+m-r-1$.

Кратность r равна $(m-1)k(k+m)/(\mu(r+m))=(2m-1)k/(r+m)$. Симметрично, кратность $-m$ равна $rk(k+r+1)/(rm(r+m))=(2r+1)k/(r+m)$.

Пусть Γ имеет дистанционно регулярное накрытие Δ. Если $\lambda=0$, то Γ — пятиугольник и Δ — десятиугольник. Если $\lambda>0$, то $\lambda^2+4k=(rm+3)^2+4m-4r-12$ — квадрат натурального числа, поэтому $4m-4r-12=0$ и $m=r+3$. Значит, $k=2r^2+6r+2$, $\lambda=r^2+3r-1$, $\mu=r^2+3r+2$ и $2r+3$ делит $(2r^2+6r+2)(2r+5)$. Так как $(2r+3,2r^2+6r+2)=(2r+3,3r+2)$ делит 5, то $r=1$, Γ — дополнительный граф к треугольному графу $T(7)$ и Δ — граф Конвея-Смита с массивом пересечений $\{10,6,4,1;1,2,6,10\}$. Лемма доказана.

Из леммы 6.10 и [24, предложение 1.5] следует, что дистанционно регулярное накрытие диаметра 4 может существовать не более чем для одного из пары дополнительных сильно регулярных графов.

Найдем формулы для характеров стандартного представления группы автоморфизмов антиподального д.р.г. диаметра 4.

Лемма 6.11. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 4 *с массивом пересечений*

$$\{k,k-\lambda-1,\mu(r-1),1;1,\mu,k-\lambda-1,k\}$$

и спектром

$$k^1>n^e>t^f>(-m)^c>(-s)^h.$$

Пусть к тому же $v = r(1+k)+k(k-\lambda-1)/\mu$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* ψ *— стандартное матричное представление группы* G *в* $\mathrm{GL}_v(\mathbb{C})$. *Если* $g \in G$, χ_i *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* d_i, *отвечающее собственному значению* θ_i, $(i, d_i, \theta_i) \in \{(1, e, n), (2, f, t), (3, c, -m), (4, h, -s)\}$, *то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$,

$$\begin{aligned}
\chi_1(g) &= \frac{k(r-1)\alpha_0(g) + (r-1)n\alpha_1(g) - n\alpha_3(g) - k\alpha_4(g)}{r(2k+n\lambda}),\\
\chi_2(g) &= \frac{k\alpha_0(g) + t\alpha_1(g) - r\mu(t+1)\alpha_2(g)/(k-\lambda-1) + t\alpha_3(g) + k\alpha_4(g)}{r(t^2+k) + r^2(t+1)^2\mu/(k-\lambda-1)},\\
\chi_3(g) &= \frac{k(r-1)\alpha_0(g) - (r-1)m\alpha_1(g) + m\alpha_3(g) - k\alpha_4(g)}{r(2k-m\lambda)},\\
\chi_4(g) &= \frac{k\alpha_0(g) - s\alpha_1(g) + r\mu(s-1)\alpha_2(g)/(k-\lambda-1) - s\alpha_3(g) + k\alpha_4(g)}{r(s^2+k) + r^2(s-1)^2\mu/(k-\lambda-1)}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$e = \frac{vk(r-1)}{r(2k+n\lambda)}, f = \frac{vk}{r(t^2+k) + \frac{r^2(t+1)^2\mu}{(k-\lambda-1)}}, c = \frac{vk(r-1)}{r(2k-m\lambda)}, h = \frac{vk}{r(s^2+k) + \frac{r^2(s-1)^2\mu}{(k-\lambda-1)}}.$$

Остается заметить, что первая и вторая матрицы собственных значений графа имеют следующий вид:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ k & n & 1 & -m & -s \\ \dfrac{k(k-\lambda-1)}{\mu} & 0 & -r(t+1) & 0 & r(s-1) \\ k(r-1) & -n & t(r-1) & m & s(1-r) \\ r-1 & -1 & r-1 & -1 & r-1 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & \dfrac{en}{k} & 0 & -\dfrac{en}{k(r-1)} & -\dfrac{e}{r-1} \\ f & \dfrac{ft}{k} & -\dfrac{fr\mu(t+1)}{k(k-\lambda-1)} & \dfrac{ft}{k} & f \\ c & -\dfrac{cm}{k} & 0 & \dfrac{cm}{k(r-1)} & -\dfrac{c}{r-1} \\ h & -\dfrac{hs}{k} & \dfrac{hr\mu(s-1)}{k(k-\lambda-1)} & -\dfrac{hs}{k} & h \end{bmatrix}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.11 позволяет существенно ограничить допустимые параметры недвудольного антиподального д.р.г. диаметра 4 с нетривиальной накрывающей группой.

Следствие 6.12. *Если* Γ *— недвудольный антиподальный д.р.г. диаметра* 4 *и* $\alpha_4(g) = v$ *для некоторого элемента* $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *то числа* $2k + \lambda n$ *и* $2k - \lambda m$ *делят* $k(1+k) + k^2(k-\lambda-1)/(r\mu)$.

Пусть далее дистанционно регулярный граф Γ диаметра 4 является антиподальным r-накрытием графа $\mathrm{Herm}(2,q^2)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном $\bar{\Gamma}$ графа Γ и $K=\mathcal{CG}(\Gamma)$. Тогда $\alpha_4(g)=v$ для любого неединичного элемента $g\in K$.

В леммах 6.13, 6.14 и 6.15 предполагается, что $q>3$.

Следующая лемма является простым следствием свойств графов Γ и $\bar{\Gamma}$ (см. также [108, теорема 5.1]).

Лемма 6.13. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $q(q-1)$ *делится на* r, $4q-3=w^2$, $q=s^2+s+1$ *и* $w=2s+1$*;*

(2) Γ *имеет собственные значения*

$$(q-1)(q^2+1),(q-2+qw)/2,q-1,(q-2-qw)/2,q^2-q+1;$$

(3) *кратность собственного значения* $\theta_1=(q-2+qw)/2$ *равна*

$$m_1=\frac{(r-1)(s+1)q^3(s^2+1)}{2s+1}$$

и $2s+1$ *делит* $5(r-1)$.

Доказательство. Пусть дистанционно регулярный граф Γ диаметра 4 является антиподальным r-накрытием графа $\bar{\Gamma}\simeq\mathrm{Herm}(2,q^2)$ для $q>3$. Тогда r делит $(q-1)q$, $4q-3=w^2$, собственные значения θ_1,θ_3 графа Γ равны $(q-2\pm qw)/2$, и θ_1 имеет кратность

$$m_1=\frac{(r-1)q^4}{(2+(q-2)(q-2+qw)/(2k))}.$$

Отсюда

$$m_1=\frac{2(r-1)(q-1)q^3(q^2+1)}{4q^2-3q+qw-2w}.$$

Так как

$$4q^2-3q+qw-2w=qw^2+qw-2w,$$

то

$$w \text{ делит } 2(r-1)(q-1)q^3(q^2+1).$$

Далее, $(4q-3,q-1)=1$, $(4q-3,q)$ делит 3 и

$$(4q-3,q^2+1)=(4q^2-3q,4q^2+4)=(4q-3,3q+4) \text{ делит } 25,$$

поэтому w делит $15(r-1)$. Если q делится на 3, то $q=3$, противоречие. Значит, q не делится на 3 и w делит $5(r-1)$. Положим $w=2s+1$. Тогда

$$q=s^2+s+1,qw+q-2=(2s+2)(s^2+s+1)-2=2s(s^2+2s+2),$$

$$\frac{q^2+1}{s^2+2s+2}=\frac{(s^2+1)}{2s},$$

поэтому

$$m_1=\frac{(r-1)(s+1)q^3(s^2+1)}{2s+1}.$$

Лемма 6.14. *Если $\alpha_4(g) = v$ для некоторого $g \in G$, то $q = 7$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_4(g) = v$ для некоторого $g \in G$. Ввиду следствия 6.12 число $2k+\lambda\theta_1$ делит $q^4 \cdot k$, поэтому $w(wq+q-2)$ делит $2(q-1)(q^2+1)q^3$. Напомним, что $w = 2s+1$, $q = s^2+s+1$, поэтому $(q^2+1)/(wq+q-2) = s^2+1$, w взаимно просто с $2(q-1)q^3$ и (w, s^2+1) делит 5. Значит, w делит 5. Так как $w > 5$ для $q > 7$, то $q = 7$.

Лемма 6.15. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если G содержит нормальную подгруппу V порядка q^4, регулярную на множестве антиподальных классов, то граф Γ не является реберно симметричным;*

(2) *если граф Γ является реберно симметричным, то $q = 7$ и $|K| = r = 7$.*

Доказательство. Докажем (1). Пусть G содержит нормальную подгруппу V порядка q^4, регулярную на множестве антиподальных классов. Тогда антиподальный класс пересекает каждую V-орбиту по единственной вершине.

Предположим, что граф Γ является реберно симметричным. Тогда G_a действует транзитивно на множестве V-орбит, пересекающих $[a]$. Поэтому имеется ровно t ($t < r$) орбит, в каждой из которых данная вершина a смежна точно с α вершинами, в частности, $k = t\alpha$. В силу связности графа Γ любая V-орбита является кокликой и орбита a^V содержит ровно k вершин из $\Gamma_3(a)$ и ровно $(q-1)(q^3+q)$ вершин из $\Gamma_2(a)$.

Вершина из $[a]$ смежна с $\alpha - 1$ вершинами из $a^V - \{a\}$, между $[a]$ и $a^V - \{a\}$ имеется точно $k(\alpha - 1)$ ребер. Отсюда

$$(q-1)(q^3+q)\mu = k(\alpha-1),$$

поэтому

$$\alpha = q\mu + 1 \text{ и } t = (q-1)(q^2+1)/(q\mu+1).$$

Так как $(q\mu+1, q-1) = (\mu+1, q-1)$ и $(q\mu+1, q^2+1) = (q^2\mu+q, q^2\mu+\mu) = (q\mu+1, q-\mu)$, то $q\mu+1$ делит $(\mu+1)(q-\mu)$ и поэтому $q-\mu-\mu^2 = 1$.

Теперь

$$\begin{aligned} r &= (\mu+1)(\mu^2+\mu+1), \\ t &= \frac{(q-1)(q^2+1)}{(\mu+1)(\mu^2+1)} = \mu(\mu^2+2\mu+2) = r-1. \end{aligned}$$

Отсюда G_a действует транзитивно на $F - \{a\}$, где F — антиподальный класс, содержащий a, и $G_{\{F\}}$ индуцирует дважды транзитивную группу ${G_{\{F\}}}^F$ подстановок на F степени $(\mu+1)(\mu^2+\mu+1)$. Ввиду предложения 1.23 цоколь T группы подстановок ${G_{\{F\}}}^F$ изоморфен либо знакопеременной группе степени $(\mu+1)(\mu^2+\mu+1)$, либо группе $L_3(4)$ и имеет степень 21 (и $\mu = 2$). В первом случае группа $A_{(\mu+1)q}$ вкладывается в $L_4(q)$, поэтому $\mu \le 1$, что влечет $q = 3$, противоречие с условием. Во втором случае $L_3(4)$ не вкладывается в $L_4(7)$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Докажем (2). Пусть граф Γ является реберно симметричным. Если $|K| = 1$, то группа F_q^4 нормальна в G, противоречие с утверждением (1). Значит $|K| \neq 1$ и ввиду леммы 6.14 имеем $q = 7$.

Заметим, что $|K|$ делит 42. Допустим, что число $|K|$ не равно 7. Пусть K_0 — силовская 7-подгруппа из K, $\bar{G} = G/K_0$ и $\Gamma_1 := \Gamma^{K_0}$. Тогда $\bar{G}$ действует транзитивно на дугах графа Γ_1 и индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном графа Γ_1. Так как $\bar{K}$ централизует цоколь группы G/K, то получим противоречие с утверждением (1). Итак, $|K| = 7$.

Если число $|K|$ не равно r, то для $\bar{G} = G/K$ и частного $\Gamma_1 := \Gamma^K$ группа $\bar{G}$ действует транзитивно на дугах графа $\bar{\Gamma}$ и индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном графа Γ_1. Снова получим противоречие с утверждением (1). Утверждение (2) и лемма доказаны.

Завершим доказательство теоремы 6.1. Положим $K = \mathcal{CG}(\Gamma)$ и обозначим через V полный прообраз цоколя группы $\mathrm{Aut}(\bar{\Gamma})$ в G. Согласно леммам 6.13 и 6.15 $q = p \in \{2, 3, 7\}$, причем $\bar{\Gamma} \simeq \mathrm{Herm}(2, p) \simeq VO_4^-(p)$ и $\mathrm{Aut}(\bar{\Gamma}) \simeq E_{p^4} : \Gamma O_4^-(p)$.

Пусть $q = 2$. Тогда $r = 2$ и $\bar{\Gamma}$ — единственный сильно регулярный граф с параметрами $(16, 5, 0, 2)$. По [42, p. 156] граф Γ изоморфен графу Уэлса, т.е. единственному дистанционно регулярному антиподальному 2-накрытию графа $\bar{\Gamma}$, при этом V — экстраспециальная 2-группа с центром K.

Пусть далее $q > 2$.

Если $q = 3$, то $r \in \{2, 3, 6\}$, $\bar{\Gamma}$ — единственный граф ранга 3 с параметрами $(81, 20, 1, 6)$ и можно считать, что G/K содержит подгруппу вида $E_{3^4} : (L_2(9).Z_2)$ из $\mathrm{Aut}(\bar{\Gamma})$. Поскольку в этом случае по [9] при $r \neq 3$ группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ не может быть транзитивной, заключаем $r = 3$ и по [9, теорема 2] $\pi(\mathrm{Aut}(\Gamma)) \subseteq \{2, 3, 5\}$. При $q = r = 3$ $\bar{\Gamma}$ имеет антиподальное 3-накрытие, изоморфное графу смежных классов укороченного тернарного кода Голея (см. [42, p. 156]).

Рассмотрим случай, когда G содержит нормальную подгруппу T порядка p^4. Тогда по лемме 6.15 $p = 3$, что в совокупности с леммой 6.12 влечет $K = 1$ или $\theta_1 = 5, 14$. Отсюда $V = K \times T$ и G/K действует на каждой T-орбите как группа ранга 3 степени 81 с подстепенями $20, 60$. С помощью компьютерных вычислений в GAP [59] устанавливается, что граф Γ не существует.

Поэтому $K \neq 1$. Тогда V имеет порядок p^5 и содержит подгруппу K порядка p, нормальную в G. При этом V — неразложимый $\mathbb{GF}(p)L_2(p^2)$-модуль или экстраспециальная p-группа с центром K. С помощью компьютерных вычислений в GAP [59] устанавливается, что Γ — граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея, при этом $V \simeq E_{3^5}$.

Теорема 6.1 доказана.

Замечание 6.16. Отметим, что попытка классификации дистанционно регулярных антиподальных накрытий примитивных графов ранга 3 была предпринята в работе М. Альфурайдана [24]. Однако при рассмотрении накрытий Γ диаметра 4 в [24] был пропущен случай, когда антиподальное частное графа Γ изоморфно графу эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ (в [24, предложение 3.9] автор некорректно использует результат Броувера и Ван Бона [42, предложения 10.1-10.2]).

§ 6.2. Группы автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов

Для доказательства теоремы 6.2 нам потребуется следующее хорошо известное утверждение (см., например, [7]).

Предложение 6.17. *Пусть Γ — $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-граф и $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа Γ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *число $2p(p+1)(p+2)/r$ четно, $r < p+2$, r делит $2(p+1)$ и Γ — граф с массивом пересечений*

$$\{(p+2)(p+4p+2), (p+3)(p+1)^2, (r-1)2(p+1)(p+2)/r, 1;\\ 1, 2(p+1)(p+2)/r, (p+3)(p+1)^2, (p+2)(p+4p+2)\};$$

(2) *$\bar{\Gamma}$ является сильно регулярным графом с параметрами*

$$((p+1)^2(p+4)^2/2, (p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), 2(p+1)(p+2))$$

и собственными значениями $p, -(p^2+4p+4)$;

(3) *вторая окрестность вершины в графе $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$((p+1)(p+3)(p^2+4p+2), p(p+2)^2, p^2+p-2, 2p(p+1))$$

и собственными значениями $p, -(p^2+2p+2)$, имеющий дистанционно регулярное r-накрытие с массивом пересечений

$$\{p(p+2)^2, (p+1)^3, 2(r-1)p(p+1)/r, 1; 1, 2p(p+1)/r, (p+1)^3, p(p+2)^2\}.$$

В следующих двух подпараграфах исследована группа автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $\big((p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), p-2, p\big)$, получены ограничения на простой спектр группы автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графа, и доказаны теоремы 6.2, 6.4 и следствие 6.3.

§§ 6.2.1. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $\big((p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), p-2, p\big)$

В этом разделе Θ — сильно регулярный граф с параметрами

$$\big((p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), p-2, p\big),$$

$\widetilde{G} = \mathrm{Aut}(\Theta)$ и $v = (p+2)(p^2+4p+2) = (p+2)((p+2)^2-2)$. Заметим, что граф Θ имеет спектр

$$p(p+3)^1, \quad p^{(p+3)((p+2)^2-2)/2}, \quad (-p-2)^{(p+1)((p+2)^2-2)/2-1}$$

и ввиду [40, предложение 1.3.2] порядок коклики в Θ не превосходит $(p+2)^2$.

Обозначим через ψ стандартное матричное представление группы $\widetilde{G}$ в $\mathrm{GL}_v(\mathbb{C})$, индуцируемое подстановочным представлением группы $\widetilde{G}$ на вершинах графа, Θ. и вычислим формулы характеров проекций представления ψ на подпространства размерностей $(p+3)((p+2)^2-2)/2$ и $(p+1)((p+2)^2-2)/2-1$.

Лемма 6.18. *Если $g \in \widetilde{G}$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $(p+3)((p+2)^2-2)/2$ и χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности $(p+1)((p+2)^2-2)/2-1$, то*

$$\begin{aligned}\chi_1(g) &= \frac{(p+3)\alpha_0(g)/2+\alpha_1(g)/2-\alpha_2(g)/(2(p+1))}{p+2},\\ \chi_2(g) &= \frac{p(p+3)\alpha_0(g)/2-(p+2)\alpha_1(g)/2+p\alpha_2(g)/(2(p+1))}{(p+2)^2-2}.\end{aligned}$$

Если $|g|$ — простое число, то $\chi_1(g)-(p+3)((p+2)^2-2)/2$ и $\chi_2(g)-(p+1)((p+2)^2-2)/2+1$ делятся на $|g|$.

Доказательство. Ввиду результатов из [49, § 3.7] достаточно показать, что вторая матрица собственных значений Q графа Θ равна

$$Q = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ (p+3)((p+2)^2-2)/2 & (p+2)^2/2-1 & -((p+2)^2-2)/(2(p+1)) \\ (p+1)((p+2)^2-2)/2-1 & -(p+2)^2/2 & p(p+2)/(2(p+1)) \end{array}\right].$$

Лемма доказана.

Заметим, что так как значения характеров являются целыми алгебраическими числами и правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 6.19. *Если Θ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v',k',p-2,p)$, то $k'-p+1$ — квадрат, p делит $(k'-t')(k'-s')$ и $2p$ делит $k'(k'-s')$, где t' и s' — неглавные собственные значения графа Δ, $s'<0$, и если к тому же p — степень простого числа, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$p=t'+1=-(s'+1), k'=p^2+p-1, v'=p^2(p+2)$;*

(2) *$s'=-p$, $k'=p(p-1), v'=p((p-1)^2+1)$;*

(3) *$s'=-p/2$, $k'=p^2/4, v'=(p^2/8-p/4+1)(p/2+1)$ или $s'=-3, p=2$;*

(4) *$t'=p/2$, $k'=p(p/2+4)/2, v'=(3+p/2)(p^2/8+5p/4+1)$.*

Доказательство. Допустим, что Δ — сильно регулярный подграф из Θ с параметрами $(v',k',p-2,p)$ и $a\in\Delta$. Тогда по [40, теорема 1.3.1] $D^2=k'-p+1<(p+1)^2, t'=-1+\sqrt{1-p+k'}$ имеет кратность $k'(k'-s')/2p$, $s'=-(t'+2)$ и $v'=(k'-t')(k'-s')/p$.

Пусть далее p — степень простого числа. Так как $|\Delta_2(a)|=k'(k'-p+1)/p$ и число $(k',k'-p+1)$ делит $p-1$, то либо p делит k', либо p делит $k'+1$.

Если p делит $k'+1$, то p не делит $s'(s'+2)$ и следовательно, $p = t'+1 = -(s'+1), k' = p^2+p-1, v' = p^2(p+2)$.

Пусть p делит k'. Тогда p делит $s'(s'+2)$. Так как $t' < p$, то либо $s' = -p$, $k' = p(p-1), v' = p((p-1)^2+1)$, либо $s' = -p/2$, $k' = p^2/4, v' = (p^2/8 - p/4+1)(p/2+1)$, либо $s' = -3p/2, p = 2$, либо $t' = p/2$, $k' = p(p/2+4)/2, v' = (3+p/2)(p^2/8+5p/4+1)$. Лемма доказана.

Лемма 6.20. *Пусть $g \in \widetilde{G}$, $|g|$ — простое число и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда*

$$\alpha_1(g) = 2(p+1)(|g|z_1 + (p+3)((p+2)^2-2)/2) - (p+2)|\Omega| + ((p+2)^2-2) =$$
$$p|\Omega| - 2(p+1)((p+1)((p+2)^2-2)/2 - 1 + |g|z_2) + p(p+2)$$

для некоторых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ и выполняются следующие утверждения.

(1) *Если $\Omega \neq \varnothing$, p — степень простого числа и $p > 2$, то $|\Omega| \leq (p+2)^2 - 2$ и либо*

(i) *$|g| < p$, либо*

(ii) *$|g| = p$, $|\Omega| \equiv 4 \pmod p$, $\alpha_1(g) = p(|\Omega| - 2(p+1)z + p + 2)$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$, и каждая связная компонента Δ графа Ω является одновершинным графом или вполне регулярным графом диаметра не меньше 3 с параметрами $(|\Delta|, pl, p-2, p)$, где $\Delta \geq 4(p+1)$ и $l \in \{2, 4, ..., p+2\}$.*

(2) *Если $\Omega = \varnothing$, то либо*

(i) *$|g|$ — нечетно и делит $(p+2)^2 - 2$, $\alpha_1(g) = 2(p+1)|g|z_1 + (p+2)^2 - 2$ для некоторого $z_1 \in \mathbb{Z}$, в частности, $\alpha_1(g) = |g|$ при $|g| = (p+2)^2 - 2$, либо*

(ii) *$|g|$ — нечетно и делит $(p+2)$, $\alpha_1(g) = -2(p+1)|g|z_2 + p(p+2)$ для некоторого $z_2 \in \mathbb{Z}$, либо*

(iii) *$|g| = 2$ и p — четно, $\alpha_1(g) = -4(p+1)z_3 + p(p+2)$ для некоторого $z_3 \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $a \in \Omega \neq \varnothing$. Тогда по [32, теорема 3.2] $|\Omega| \leq p \cdot v/(k-p) = (p+2)^2 - 2$. Имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= |\Omega \cap \Theta_1(a)| \equiv p(p+3) \pmod{|g|}, \\ x_2 &= |\Omega \cap \Theta_2(a)| \equiv (p+3)(p+1)^2 \pmod{|g|}, \\ |\Theta - \Omega| &= v - 1 - x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{|g|}, \end{aligned}$$

в частности, если $|g|$ не делит $p(p+3)(p+1)$, то $x_1x_2 > 0$.

Пусть $|g| > p$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \subset \Omega$ и по [40, предложение 1.1.2], Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(|\Omega|, x_1, p-2, p)$ и $|\Omega| = 1 + x_1 + x_1(x_1 - p + 1)/p$. Положим $k' = x_1$ и $v' = |\Omega|$. Ввиду леммы 6.19 достаточно рассмотреть следующие четыре случая.

(1) Если $k' = p^2 + p - 1$ и $v' = p^2(p+2)$, то $v' > (p+2)^2 - 2$, противоречие.

(2) Если $k' = p(p-1)$ и $v' = p((p-1)^2+1)$, то $v' > (p+2)^2-2$, противоречие.

(3) Пусть $k' = p^2/4$ и $v' = (p^2/8 - p/4 + 1)(p/2+1)$. Так как $v' \le (p+2)^2-2$, то $p \in \{4, 8, 16\}$. Но $p^2/4 \equiv p(p+3) \pmod{|g|}$ и $|g| \le p(p+3)$, противоречие для всех допустимых наборов $(p, |g|)$.

(4) Если $k' = p(p/2+4)/2$ и $v' = (3+p/2)(p^2/8+5p/4+1)$, то $v' > (p+2)^2-2$, противоречие.

Пусть p — простое число и $|g| = p$. Тогда $\lambda_\Omega = p-2$ и для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{0, p-2, p\}$. Пусть Δ — связная компонента графа Ω и $|\Delta| > 1$.

Если $d(\Delta) = 1$, то $\Delta \simeq K_p$, но $|\Omega(a)| \equiv 0 \pmod p$ для $a \in \Delta$, противоречие.

Предположим, что $d(\Delta) > 1$. Тогда $\lambda_\Delta = p-2$ и $\mu_\Delta = p$ и по [40, предложение 1.1.2], Δ — вполне регулярный граф с параметрами $(|\Delta|, k_\Delta, p-2, p)$ и $|\Delta| \ge 1 + k_\Delta + k_\Delta(k_\Delta - p + 1)/p$. Если $d(\Delta) = 2$, то $|\Delta| = 1 + k_\Delta + k_\Delta(k_\Delta - p + 1)/p$ и $k_\Delta = pl$, где $l \ge 1$. Ввиду леммы 6.19 получим $k_\Delta = p(p-1)$ и $|\Delta| = p((p-1)^2+1)$, противоречие с тем, что $|\Delta| \le (p+2)^2 - 2$.

Таким образом, $d(\Delta) \ge 3$, и по [40, теорема 1.5.5], $k_\Delta(k_\Delta - p+1)/p \ge k_\Delta \ge 2p-1$. Как и выше, получим $k_\Delta = pl$, где $l \ge 2$, $|\Omega| \equiv 4 \pmod p$, поэтому $|\Delta| \ge 4(p+1)$ и $|\Omega - \Delta| \le p^2 - 2$.

Пусть теперь $|g|$ и Ω — произвольные. По лемме 6.18

$$\chi_1(g) - (p+3)((p+2)^2-2)/2 =$$
$$\frac{(p+3)\alpha_0(g)/2 + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/(2(p+1))}{p+2} - (p+3)((p+2)^2-2)/2 = |g|z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$(p+1)(p+3)|\Omega| + (p+1)\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 2(p+1)(p+2)(|g|z + (p+3)((p+2)^2-2)/2).$$

Учитывая, что $(p+2)((p+2)^2-2) - |\Omega| - \alpha_1(g) = \alpha_2(g)$, получим

$$2(p+1)(p+2)(|g|z + (p+3)((p+2)^2-2)/2) = (p+1)(p+3)|\Omega| + (p+1)\alpha_1(g) -$$
$$((p+2)((p+2)^2-2) - |\Omega| - \alpha_1(g)) =$$
$$(p^2+4p+4)|\Omega| + (p+2)\alpha_1(g) - (p+2)((p+2)^2-2)$$

и $\alpha_1(g) = 2(p+1)(|g|z + (p+3)((p+2)^2-2)/2) - (p+2)|\Omega| + ((p+2)^2-2)$.

Снова по лемме 6.18

$$\chi_2(g) - (p+1)((p+2)^2-2)/2 + 1 =$$
$$\frac{p(p+3)\alpha_0(g)/2 - (p+2)\alpha_1(g)/2 + p\alpha_2(g)/(2(p+1))}{(p+2)^2-2} - (p+1)((p+2)^2-2)/2 + 1 = |g|z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$(p+1)p(p+3)|\Omega| - (p+1)(p+2)\alpha_1(g) + p\alpha_2(g) =$$
$$2(p+1)((p+2)^2-2)((p+1)((p+2)^2-2)/2 - 1 + |g|z).$$

Как и выше, получим

$$2(p{+}1)((p+2)^2-2)((p+1)((p+2)^2-2)/2{-}1{+}|g|z) = (p{+}1)p(p{+}3)|\Omega|{-}(p{+}1)(p{+}2)\alpha_1(g){+}$$
$$p((p+2)((p+2)^2-2)-|\Omega|-\alpha_1(g)) =$$
$$p(p^2+4p+2)|\Omega|-(p^2+4p+2)\alpha_1(g)+p(p+2)((p+2)^2-2)$$

и $\alpha_1(g) = p|\Omega| - 2(p+1)((p+1)((p+2)^2-2)/2-1+|g|z)+p(p+2)$. Лемма доказана.

Лемма 6.21. *Если подгруппа $G \le \tilde{G}$ транзитивна на вершинах графа Θ, то для любой вершины $a \in \Theta$ множество $\mathrm{Fix}(G_a)$ является блоком импримитивности группы G, группа $N_G(G_a)$ действует транзитивно на $\mathrm{Fix}(G_a)$ и $|\mathrm{Fix}(G_a)| = |N_G(G_a) : G_a|$. Если, к тому же, $G_a \ne 1$, то $|\mathrm{Fix}(G_a)|$ не превосходит $(p+2)^2-2$ и делит $(p+2)((p+2)^2-2)$.*

Доказательство. Как отмечалось в доказательстве предыдущей леммы, по [32, теорема 3.2] порядок любого подграфа неподвижных точек нетривиального автоморфизма графа Θ не превосходит числа $(p+2)^2-2$. Остальные утверждения являются следствием хорошо известных фактов (см., например, [58, упражнение 1.6.3]).

В леммах 6.22 и 6.23 предполагается, что $p > 2$ — степень простого числа.

Лемма 6.22. *Пусть $(p+2)^2-2 \in \pi(\widetilde{G})$, g — элемент порядка $(p+2)^2-2$ из $\tilde{G}$ и f — элемент простого порядка из $C_{\tilde{G}}(g)$. Тогда либо $f \in \langle g\rangle$, либо $|f| < p, |f|$ делит $p+1$, $\mathrm{Fix}(f)$ — регулярный граф на $(p+2)^2-2$ вершинах, $\alpha_1(f) = (p+1)((p+2)^2-2)$ и каждая неодноточечная $\langle f\rangle$-орбита является кликой.*

Доказательство. Положим $s = (p{+}2)^2{-}2$. Так как $|\mathrm{Fix}(f)|$ делится на s, то по лемме 6.20 получим $|\mathrm{Fix}(f)| \in \{s, 0\}$ и

$$\alpha_1(f) = 2(p+1)(|f|z_1+(p+3)s/2)-(p+2)|\mathrm{Fix}(f)|+s$$

делится на s, откуда $|f|z_1$ делится на s.

Допустим, что $|\mathrm{Fix}(f)| = 0$. Если $|f| = s$ и $f \notin \langle g\rangle$, то лемме 6.20 группа $\langle f, g\rangle$ полурегулярна на Θ, противоречие с тем, что s^2 не делит $(p+2)s$. Предположим, что $f \notin \langle g\rangle$. По лемме 6.20 $|f|$ делит $p+2$, поэтому z_1 делится на s и

$$\alpha_1(f) = 2(p+1)s(|f|z_1/s+(p+3)/2)+s \le v.$$

В случае, если $\alpha_1(f) \le (p+1)s$ получим $\alpha_1(f) = s$ и $(p+3)/2 = -|f|z_1/s$, противоречие с тем, что $(|f|, p+3) = 1$. Поэтому $\alpha_1(f) = v$, каждая $\langle f\rangle$-орбита является кликой и $|f| \le p$. Но по лемме 6.20 $\alpha_1(g) = s$ делится на $|f|$, противоречие.

Пусть теперь $|\mathrm{Fix}(f)| = s$. По лемме 6.20 $|f| \le p$, поэтому z_1 делится на s и

$$\alpha_1(f) = (p+1)s(2|f|z_1/s+p+3)-(p+1)s = (p+1)s(2|f|z_1/s+p+2) \le v-s = (p+1)s.$$

Поэтому либо $\alpha_1(f) = 0$ и $2|f|z_1/s+p+2 = 0$, либо $p+1 = -2|f|z_1/s$. Если $|f|$ делит $p+2$, то число $p+2$ — четно, противоречие с тем, что по условию число s — простое. Поэтому $|f|$ делит $p+1$, $\alpha_1(f) = v-s = (p+1)s$ и каждая неодноточечная $\langle f\rangle$-орбита является кликой.

Лемма доказана.

Лемма 6.23. *Пусть $a \in \Theta$, G — подгруппа из $\tilde{G}$, транзитивная на вершинах графа Θ и $s = (p+2)^2 - 2 \in \pi(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Если $G_a \neq 1$, то либо $|\mathrm{Fix}(G_a)| = s$ и $\pi(G_a) \subseteq \pi(p+1)$, либо $|\mathrm{Fix}(G_a)|$ делит $p+2$.*

(2) *Если группа G разрешима, то либо*

  (*i*) *$O_s(G) \neq 1$, $p+2$ — степень 3, $s \equiv 1 \pmod 3$ и $\pi(G_a) \subseteq \pi((p+1)(p^2+4p+1))$, либо*

  (*ii*) *$O_s(G) = 1$, G содержит минимальную нормальную подгруппу порядка t^e, где $t \in \pi(p+2)$ и $e \geq 2$, $t^e \equiv 1 \pmod s$, s делит $|\mathrm{GL}_e(t)|$ и число $p+2$ — составное.*

Доказательство. Положим $s = (p+2)^2 - 2$ и $X = G_a$, где $a \in \Theta$. Пусть G — подгруппа из $\tilde{G}$, транзитивная на вершинах графа Θ и g — элемент порядка s из G.

Пусть $X \neq 1$. Тогда ввиду леммы 6.22 $\pi(C_X(g)) \subseteq \pi(p+1)$ и по лемме 6.21 число $|\mathrm{Fix}(X)|$ равно s или делит $p+2$. Если $|\mathrm{Fix}(X)| = s$, то $\mathrm{Fix}(X)$ является $\langle g \rangle$-инвариантным множеством, то есть группа $\langle g \rangle$ регулярна на вершинах графа $\mathrm{Fix}(X)$ и нормализует X. В этом случае для любого элемента f простого порядка из X имеем $\mathrm{Fix}(X) = \mathrm{Fix}(f)$ и поэтому $s \equiv s(p+2) \pmod{|f|}$, то есть $|f|$ делит $p+1$ и $\pi(X) \subseteq \pi(p+1)$. Утверждение (1) доказано.

Докажем утверждение (2). Допустим, что группа G разрешима. Тогда $O_n(G) \neq 1$ для некоторого $n \in \pi(G)$. Так как длина $O_n(G)$-орбиты на вершинах Θ делит $s(p+2)$, то либо $n = s$, либо n делит $p+2$.

Далее, группа G содержит холлову $\{s,t\}$-подгруппу H для каждого $t \in \pi(p+2)$. Пусть g и f — элементы порядков s и t из H, соответственно.

Допустим, что $O_s(G) \neq 1$. Можно считать, что $\langle g \rangle = O_s(G)$. Вввиду леммы 6.22 $f \notin C_G(g)$ и поэтому $|f|$ делит $s-1$. Так как $(p^2+4p+1, p+2)$ делит 3, то $|f| = 3$. Таким образом, $p+2$ — степень 3 и $s \equiv 1 \pmod 3$. Пусть $Y = O_s(G)X$. Снова ввиду леммы 6.22 $\pi(C_X(g)) \subseteq \pi(p+1)$ и так как $X/C_X(g) \leq Z_{s-1}$, то $\pi(X) \subseteq \pi((p+1)(p^2+4p+1))$.

Пусть теперь $O_s(G) = 1$. Тогда G содержит минимальную нормальную подгруппу N порядка t^e для некоторого $t \in \pi(p+2)$. Пусть $Y = N\langle g \rangle$. Ввиду леммы 6.22 $C_N(g) = 1$. Поэтому $t^e \equiv 1 \pmod s$, $\langle g \rangle \leq \mathrm{GL}_e(t)$ и $e \geq 2$. В частности, по лемме 6.20 число $p+2$ — составное.

Лемма доказана.

§§ 6.2.2. Автоморфизмы $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов

Всюду далее в этом разделе Γ — это $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-граф, $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа Γ, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $F \in \mathcal{F}(\Gamma), a \in F$, $\Phi = \Gamma_2(a)$, Θ^i — i-окрестность вершины F графа $\bar{\Gamma}$ и $\mathcal{F}_i$ — множество тех антиподальных классов графа Γ, которые пересекают $\Gamma_i(a)$, где $i \in \{1, 2\}$. Через G_X ($G_{\{X\}}$) будем обозначать поточечный (соответственно, глобальный) стабилизатор подмножества вершин X графа Γ в G.

Известно, что каждый AT4(p,q,r)-граф 1-однороден в смысле Номуры. Поэтому для любой тройки вершин $\{x,y,z\}$ графа Γ такой, что $d(x,y)=1$ и $d(x,z)=d(y,z)=2$, имеем

$$|\Gamma_1(x)\cap\Gamma_1(y)\cap\Gamma_1(z)|=c_2(a_1-p)/a_2=2(p+1)/r$$

(см. [84, 87]).

Далее, каждый μ-подграф AT4$(p,p+2,r)$-графа Γ регулярен степени p, так как его локальный подграф является μ-подграфом некоторого локального подграфа в Γ.

Лемма 6.24. *Пусть K_i — ядро действия $G_{\{F\}}$ на $\mathcal{F}_i$, где $i\in\{1,2\}$. Тогда $K=K_1\cap K_2$ — ядро действия G на $\mathcal{F}(\Gamma)$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *$G_a\cap K=1$ и $|K|$ делит r;*

(2) *$G_{\Gamma_i(a)}=1$, $G_a\leq \mathrm{Aut}(\Theta^i)$ для всех $i\in\{1,2\}$ и $G_a\leq\mathrm{Aut}(\Phi)$;*

(3) *$K_1=K_2=K$ и $G_{\{F\}}/K\leq\mathrm{Aut}(\bar\Phi)$.*

Доказательство. Предположим, что $1\neq g\in G_a\cap K$. Тогда $\Gamma_1(a)\subset\mathrm{Fix}(g)$. Если $b\in\Gamma_2(a)-\mathrm{Fix}(g)$, то $\Gamma_1(b)\cap\Gamma_1(b^g)\cap\mathrm{Fix}(g)\neq\varnothing$. Но это означает, что $d(b,b^g)\leq 2$, противоречие. Поэтому $\Gamma_2(a)\subset\mathrm{Fix}(g)$. Аналогично, $\Gamma_3(a)\subset\mathrm{Fix}(g)$ Но тогда $\Gamma=\mathrm{Fix}(g)$, противоречие.

Пусть $\tilde g\in\mathrm{Aut}(\bar\Gamma)$, $|\tilde g|$ — простое число и $\Omega=\mathrm{Fix}(\tilde g)$. Через $\bar x$ будем обозначать вершину графа $\bar\Gamma$, прообраз которой в Γ содержит x. Покажем, что если $\Omega\neq\varnothing$, то для каждой вершины $\bar b$ графа $\bar\Gamma$ и всех $i\in\{1,2\}$ имеем $\bar\Gamma_i(\bar b)\nsubseteq\Omega$.

По предложению 6.17 граф $\bar\Gamma$ сильно регулярен с параметрами

$$((p+1)^2(p+4)^2/2,(p+2)(p^2+4p+2),p(p+3),2(p+1)(p+2))$$

и собственными значениями $p,-(p^2+4p+4)$. Пусть $\bar a\in\Omega\neq\varnothing$. Тогда по [32, теорема 3.2]

$$|\Omega|\leq(p+1)(p+2)\frac{(p+1)^2(p+4)^2}{(p+2)(p^2+4p+2)-p}.$$

По предложению 6.17 граф $\bar\Gamma_2(\bar a)$ сильно регулярен с параметрами

$$((p+1)(p+3)(p^2+4p+2),p(p+2)^2,p^2+p-2,2p(p+1)).$$

Поэтому $\bar\Gamma_2(\bar a)\nsubseteq\Omega$. Предположим, что $\bar\Gamma_1(\bar a)\subseteq\Omega$. Тогда для вершины $\bar b\in\bar\Gamma_2(\bar a)-\Omega$ получим, что $|\bar\Gamma_1(\bar b)\cap\bar\Gamma_1(\bar b^g)\cap\Omega|=2(p+1)(p+2)$. Но вершины $\bar b$ и $\bar b^{\tilde g}$ находятся на расстоянии не более 2 в графе $\bar\Gamma_2(\bar a)$, противоречие.

Предположим теперь, что $\bar\Gamma_i(\bar b)\subseteq\Omega$ для произвольной вершины $\bar b$ графа $\bar\Gamma$ и некоторого $i\in\{1,2\}$. Так как $\bar b\notin\Omega$, то вершины $\bar b$ и $\bar b^{\tilde g}$ имеют $|\bar\Gamma_1(\bar b)|$ общих соседей в графе $\bar\Gamma$ или $|\bar\Gamma_2(\bar b)|$ общих соседей в графе $\bar\Gamma_2$, противоречие.

Таким образом, $K_i=K$, $G_{\Gamma_i(a)}\trianglelefteq G_a$ и $G_{\Gamma_i(a)}$ фиксирует каждый антиподальный класс графа Γ. Из утверждения (1) следует, что $G_{\Gamma_i(a)}=1$. Таким образом, $G_a\simeq G_aK/K\leqslant G_{\{F\}}/K\leq\mathrm{Aut}(\Theta^i)$ и, аналогично, $G_a\leq\mathrm{Aut}(\Phi)$. Лемма доказана.

Лемма 6.25. *Пусть $g \in G$, $|g|$ — простое число и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда*

$$|\Omega| \le r(p+1)(p+2)(p+4)$$

и выполняются следующие утверждения:

(1) *если $\Omega \ne \varnothing$, p — степень простого числа и $p > 2$, то либо*

  (*i*) *$|g| \le p$, либо*

  (*ii*) *$|g| = p+2$ и Ω — $2r$-коклика, являющаяся объединением двух антиподальных классов графа Γ, либо*

  (*iii*) *$|g| > p, |g|$ делит $(p+2)^2-2$ и, в частности, если $|g| = (p+2)^2-2$, то Ω — это некоторый антиподальный класс графа Γ;*

(2) *если $\Omega = \varnothing$, то $|g|$ делит $(p+1)(p+4)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \Omega \ne \varnothing$ и $\Theta = \Gamma_1(a)$. Если $g \notin K$ (что выполнено, в частности, если $|g|$ не делит r), то g индуцирует нетривиальный автоморфизм сильно регулярного графа $\bar{\Gamma}$ с параметрами

$$((p+1)^2(p+4)^2/2, (p+2)(p^2+4p+2), p(p+3), 2(p+1)(p+2))$$

и неглавными собственными значениями $p, -(p^2+4p+4)$, и ввиду [32, теорема 3.2]

$$|\Omega|/r \le \frac{2(p+1)(p+2)\cdot v}{k-p} = \frac{(p+1)^3(p+2)(p+4)^2}{(p+1)^2(p+4)} = (p+1)(p+2)(p+4).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
x_1 &= |\Omega \cap \Gamma_1(a)| \equiv (p+2)(p+4p+2) \pmod{|g|},\\
x_2 &= |\Omega \cap \Gamma_2(a)| \equiv \frac{(p+4p+2)(p+3)(p+1)r}{2} \pmod{|g|},\\
x_3 &= |\Omega \cap \Gamma_3(a)| \equiv (p+2)(p+4p+2)(r-1) \pmod{|g|},\\
x_4 &= |\Omega \cap \Gamma_4(a)| \equiv r-1 \pmod{|g|},\\
|\Gamma - \Omega| &= v-1-x_1-x_2-x_3-x_4 \equiv 0 \pmod{|g|},
\end{aligned}$$

в частности, если $|g|$ не делит $(p+1)(p+2)(p+3)(p^2+4p+2)r(r-1)$, то $x_1x_2x_3x_4 > 0$.

Ясно, что если $|g| > r$ и $b \in \Omega$, то и антиподальный класс, содержащий вершину b, лежит в Ω.

Если $|g| > \max\{\lambda, \mu\}$, то по предложению 6.17 $|g| > r$ и следовательно, Ω является r-накрытием некоторого графа $\bar{\Omega}$. Если к тому же граф Ω связен, то Ω — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений

$$\{x_1, (p+3)(p+1)^2, (r-1)2(p+1)(p+2)/r, 1; 1, 2(p+1)(p+2)/r, (p+3)(p+1)^2, x_1\}$$

и по [40, следствие 4.2.5] $p^2(p+3)^2+4x_1$ — квадрат. В этом случае граф $\bar{\Omega}$ сильно регулярен с параметрами $(v', x_1, p(p+3), 2(p+1)(p+2))$.

Далее будем предполагать, что $p > 2$ и p — степень простого числа.

Пусть $|g| = (p+2)^2 - 2$. Тогда $|g| > \max\{\lambda, \mu\}$. Поэтому $x_3 = (r-1)x_1$. Ввиду леммы 6.24 g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа Θ, что в совокупности с леммой 6.20 влечет $x_1 = x_3 = 0$. Учитывая, что $|g| > \max\{\lambda, \mu\}$, получим $x_2 = 0$, то есть Ω совпадает с антиподальным классом F.

Если $|g|$ не делит $(p+2)^2 - 2$, то ввиду лемм 6.20 и 6.24 получим, что либо $|g| = p+2$, либо $|g| \le p$.

Пусть $|g| = p + 2$. По предложению 6.17 $|g| > r$ и $|g|$ не делит $|\Phi|$. Поэтому $x_2 > 0$. Ввиду леммы 6.24 автоморфизм g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа Θ, что в совокупности с леммой 6.20 влечет $x_1 = 0$. Снова применяя лемму 6.24, получим, что g индуцирует нетривиальный автоморфизм сильно регулярного графа $\bar{\Phi}$ с параметрами

$$((p+1)(p+3)(p^2+4p+2), p(p+2)^2, p^2+p-2, 2p(p+1))$$

и неглавными собственными значениями $p, -(p^2+2p+2)$. Пусть $x \in \Omega \cap \Phi$. Имеем

$$\begin{aligned}
y_1 &= |\Omega \cap \Phi_1(x)| \equiv p(p+2)^2 \pmod{|g|},\\
y_2 &= |\Omega \cap \Phi_2(x)| \equiv \frac{(p+2)^2(p+1)^2 r}{2} \pmod{|g|},\\
y_3 &= |\Omega \cap \Phi_3(x)| \equiv p(p+2)^2(r-1) \pmod{|g|},\\
y_4 &= |\Omega \cap \Phi_4(x)| = r-1,\\
|\Phi - \Omega| &= |\Phi| - r - y_1 - y_2 - y_3 \equiv 0 \pmod{|g|}.
\end{aligned}$$

Если $y_1 > 0$ (то есть g фиксирует некоторое ребро $\{x, y\}$ графа Φ), то ввиду лемм 6.20 и 6.24 $x_1 = x_3/(r-1) = 0$ и подграф $\Gamma_1(x) \cap \Gamma_1(y) \cap \Gamma_1(a)$ $\langle g\rangle$-инвариантен, противоречие с тем, что $|g|$ не делит $2(p+1)/r$. Допустим, что $y_2 > 0$. Тогда для вершины $y \in \Phi_2(x) \cap \Omega$ подграф $\Phi_1(x) \cap \Phi_1(y)$ $\langle g\rangle$-инвариантен, противоречие с тем, что $|g|$ не делит $2p(p+1)$. Так как $y_3 = (r-1)y_1$, то $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то есть $\Omega \cap \Phi$ — антиподальный класс графа Φ. Таким образом, g фиксирует (поточечно) ровно два антиподальных класса графа Γ. Лемма доказана.

Докажем теорему 6.2 и следствие 6.3. Пусть p — степень простого числа, $p > 2$ и $\{a, b\}$ — произвольное ребро графа Γ. По лемме 6.25 имеем $\pi(G_{a,b}) \subseteq \{2, .., p\}$. Теперь если граф Γ реберно симметричен, то $|G : G_{a,b}| = (p+2)(p^2+4p+2)(p+1)^2(p+4)^2 r/2$. Завершим доказательство следствия 6.3.

Предложение 6.26. *Пусть p — степень простого числа, $p > 2$ и $a \in \Gamma$. Если Γ — реберно симметричный граф и числа $(p+2)$ и (p^2+4p+2) — простые, то G_a — почти простая группа.*

Доказательство. Положим $\Theta = \Gamma_1(a)$, $X = G_a$ и $\{s_1, s_2\} = \{p+2, p^2+4p+2\}$. Так как X транзитивна на Θ и число $p+2$ — простое, то по лемме 6.23 группа X неразрешима. Обозначим через $S(X)$ разрешимый радикал группы X. Аналогично получим, что группа $S(X)$ интранзитивна на Θ.

Допустим, что $S(X) \neq 1$. Из лемм 6.20 и 6.24 следует, что числа s_1^2 и $s_1 s_2$ не делят $|S(X)|$. Поэтому можно считать, что длины всех $S(X)$-орбит на Θ равны s_1 и $S(X)$ содержит элемент f порядка s_1. Ввиду [69, теорема 1.1] для каждого элемента g порядка s_2 из X группа $\langle f, g\rangle$ разрешима и поэтому содержит холлову $\{s_1, s_2\}$-подгруппу Y. Также ввиду лемм 6.20 и 6.24 получим, что s_i^2 не делит $|Y|$, то есть $|Y| = s_1 s_2$. Так как подгруппа порядка p^2+4p+2 нормальна в Y и $(p+2, p^2+4p+1) = 1$, то X содержит элемент порядка $s_1 s_2$, противоречие с леммой 6.22.

Таким образом, $S(X) = 1$ и цоколь $\mathrm{Soc}(X)$ группы X является прямым произведением некоторого числа простых неабелевых групп. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в X.

Предположим, что N транзитивна на Θ. Тогда число $s_1 s_2$ делит $|N|$ и так как X не содержит элементов порядка $s_1 s_2$, заключаем, что группа N проста.

Если же N интранзитивна на Θ, то по лемме 6.24 можно считать, что длины всех N-орбит на Θ равны s_1. В этом случае снова получим, что группа N проста, поскольку $|X|$ не делится на s_1^2.

Теперь если в X найдется минимальная нормальная подгруппа N_1, отличная от N, то N_1 централизует N и поэтому $|X|$ делится на s_i^2 или X содержит элемент порядка $s_1 s_2$, противоречие. Значит, $\mathrm{Soc}(X)$ — простая неабелева группа и X — почти простая группа.

Предложение доказано.

Приступим к доказательству теоремы 6.4. Пусть Γ — реберно симметричный $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-граф с $p \in \{3, 5, 11, 17, 27\}$, $a \in \Gamma$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда числа $p+2$ и p^2+4p+2 — простые, $p^2+4p+2 \in \{23, 47, 167, 359, 839\}$ и по предложению 6.26 G_a — почти простая группа. Случай $p = 3$ был рассмотрен в [21]. Здесь мы приведем независимое доказательство. Так, если $p = 3$, то $\pi(G_a) \subseteq \{2, 3, 5, 23\}$, противоречие с [133, таблица 1]. Случай $p = 5$ рассматривается в следующем параграфе 6.3. Пусть $p > 5$. Тогда $p^2+4p+2 \geq 100$.

Допустим, что $s = p^2+4p+2 \in \pi(\mathrm{Soc}(G_a))$. Тогда по лемме 6.25 и [133, таблица 2] $\mathrm{Soc}(G_a)$ изоморфна одной из групп: $L_2(s), A_s, A_{s+1}, \ldots, A_{s'-1}$, где s' — наименьшее простое число такое, что $s' > s$. Из лемм 6.20 и 6.24 следует, что знакопеременный случай невозможен. Пусть $\mathrm{Soc}(G_a) \simeq L_2(s)$. Так как $|L_2(s)| = s(s^2-1)/2$ и $(s^2-1, p+2)$ делит 3, то $p+2 \in \pi(\mathrm{Out}(L_2(s)))$, противоречие.

Пусть теперь $s = p+2 \in \pi(\mathrm{Soc}(G_a))$. Тогда $s \in \{13, 19, 29\}$, длина каждой $\mathrm{Soc}(G_a)$-орбиты на Θ равна s и $p^2+4p+2 \in \pi(\mathrm{Out}(\mathrm{Soc}(G_a)))$. Учитывая лемму 6.25, получим противоречие с [133, таблица 1] и [51]. Теорема 6.4 доказана.

§ 6.3. Группы автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов: случай $p = 5$

В этом параграфе доказываются теоремы 6.5 и 6.7.

Пусть Γ — это $\mathrm{AT4}(5, 7, r)$-граф. Тогда Γ имеет массив пересечений

$$\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\}$$

и спектр $329^1, 47^e, 5^{1316}, (-7)^c, (-49)^{141}$, где $(r, e, c) \in \{(6, 945, 6345), (3, 378, 2538)\}$ (см. [40, предложение 4.2.3]). Пусть a — это некоторая вершина графа Γ, $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $a \in F$, $\Phi = \Gamma_2(a)$ и Θ^i —это i-окрестность вершины F графа $\bar{\Gamma}$, где $i \in \{1,2\}$. Тогда Φ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений

$$\{245, 216, (r-1)60/r, 1; 1, 60/r, 216, 245\},$$

$\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(1458, 329, 40, 84)$, $\Gamma_1(a) \simeq \Theta^1$ — сильно регулярный граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$ и $\bar{\Phi} \simeq \Theta^2$ — сильно регулярный граф с параметрами $(1128, 245, 28, 60)$ (см. [20, теорема 3]).

Всюду далее через K_i будем обозначать ядро действия $G_{\{F\}}$ на $\mathcal{F}_i$, где $i \in \{1,2\}$. Тогда $K = K_1 \cap K_2$ — ядро действия G на $\mathcal{F}(\Gamma)$.

§§ 6.3.1. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(329, 40, 3, 5)$

В этом подпараграфе Θ — сильно регулярный граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$, $\widetilde{G} = \mathrm{Aut}(\Theta)$ и $v = 329$. Заметим, что граф Θ имеет спектр $40^1, 5^{188}, (-7)^{140}$ и ввиду [40, предложение 1.3.2] порядок коклики в Θ не превосходит 49. Обозначим через ψ стандартное матричное представление группы $\widetilde{G}$ в $\mathrm{GL}_v(\mathbb{C})$, индуцируемое подстановочным представлением группы $\widetilde{G}$ на вершинах графа Θ.

Лемма 6.27. *Если $g \in \widetilde{G}$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 188 и χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 140, то*

$$\chi_1(g) = \frac{4\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/12}{7} \text{ и } \chi_2(g) = \frac{20\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g)/2 + 5\alpha_2(g)/12}{47}.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 188$ и $\chi_2(g) - 140$ делятся на p.

Доказательство. Следует из леммы 6.18.

Лемма 6.28. *Пусть $g \in \widetilde{G}$, $|g| = p$ — простое число и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(\widetilde{G}) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 47\}$ и справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $\Omega = \emptyset$, то либо $p = 47$ и $\alpha_1(g) = 47$, либо $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 35 - 84z$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$;*

(2) *если $\Omega \neq \emptyset$, то $p \leq 5$ и либо*

   (*i*) *$p = 5$, $|\Omega| \equiv 4 \pmod 5$, $|\Omega| \leq 44$, $\alpha_1(g) = 5|\Omega| - 60z + 35$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$, Ω — коклика или Ω — объединение вполне регулярного графа с параметрами $(|\Omega| - n, 10, 3, 5)$ и n-коклики, либо*

   (*ii*) *$p = 3$, $|\Omega| \equiv 2 \pmod 3$, $|\Omega| \leq 47$ и $\alpha_1(g) = 5|\Omega| - 36z + 11$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$, либо* (*iii*) $p = 2$, $|\Omega| \equiv 1 \pmod 2), 9 \leq |\Omega| \leq 47$ *и* $\alpha_1(g) = 24z + 47 - 7|\Omega|$ *для некоторого* $z \in \mathbb{Z}$;

Доказательство. Пусть $\Omega = \emptyset$. Тогда $p \in \{7, 47\}$. Пусть $p = 47$. По лемме 6.27,

$$\chi_1(g) = \frac{4\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/12}{7} = 47z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $3948z = 6\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 6\alpha_1(g) - (329 - \alpha_1(g)) = 7\alpha_1(g) - 329$, $\alpha_1(g) = 564z + 47$ и $z = 0$.

Пусть $p = 7$. По лемме 6.27,

$$\chi_2(g) = \frac{20\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g)/2 + 5\alpha_2(g)/12}{47} = 7z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $3948z = -42\alpha_1(g) + 5\alpha_2(g) = -42\alpha_1(g) + 5(329 - \alpha_1(g)) = -47\alpha_1(g) + 1645$ и $\alpha_1(g) = 35 - 84z$.

Пусть теперь $a \in \Omega \neq \emptyset$. Тогда по [32, теорема 3.2] $|\Omega| \leq 5 \cdot 329/(40 - 5) = 47$. Имеем

$$x_1 = |\Omega \cap \Theta_1(a)| \equiv 40 \pmod p,$$

$$x_2 = |\Omega \cap \Theta_2(a)| \equiv 288 \pmod p,$$

$$|\Theta - \Omega| = v - 1 - x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod p,$$

в частности, если $p > 5$, то $x_1 x_2 > 0$.

Пусть $p > 5$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \subset \Omega$ и по [40, предложение 1.1.2], Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(|\Omega|, x_1, 3, 5)$ и $|\Omega| = 1 + x_1 + x_1(x_1 - 4)/5$. Тогда $(p, x_1, x_2) \in \{(7, 5, 1), (13, 14, 28), (31, 9, 9)\}$. Из [40, теорема 1.3.1] следует, что собственные значения графа Ω — целые и $4(k_\Omega - 4)$ — квадрат. Поэтому $(p, x_1, x_2) = (7, 5, 1)$ и Ω — полный многодольный граф с долями порядка 2, противоречие.

Пусть $p = 5$. Тогда $\lambda_\Omega = 3$ и для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{0, 3, 5\}$. Пусть Δ — связная компонента графа Ω. Если $d(\Delta) = 1$, то $\Delta \simeq K_5$, но $|\Omega(a)| \equiv 0 \pmod 5$ для $a \in \Delta$, противоречие. Предположим, что $d(\Delta) > 1$. Тогда $\lambda_\Delta = 3$ и $\mu_\Delta = 5$ и по [40, предложение 1.1.2], Δ — вполне регулярный граф с параметрами $(|\Delta|, k_\Delta, 3, 5)$ и $|\Delta| \geq 1 + k_\Delta + k_\Delta(k_\Delta - 4)/5$. Если $d(\Delta) = 2$, то $|\Delta| = 1 + k_\Delta + k_\Delta(k_\Delta - 4)/5$ и $k_\Delta = 5l$, где $l \geq 1$. Но тогда Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(7, 5, 3, 5)$ или $(23, 10, 3, 5)$. По [40, теорема 1.3.1] собственные значения графа Δ целые. Поэтому $k_\Delta = 5$ и Δ — полный многодольный граф с долями порядка 2, противоречие. Значит, $d(\Delta) \geq 3$, и по [40, теорема 1.5.5], $k_\Delta(k_\Delta - 4)/5 \geq k_\Delta \geq 9$. Как и выше, получим $k_\Delta = 10$ и $|\Delta| \geq 24$.

Поэтому либо Ω — n-коклика и $n \equiv 4 \pmod 5$, либо $|\Omega| \in \{24, 29, 34, 39, 44\}$ и Ω — дизъюнктное объединение вполне регулярного графа с параметрами $(|\Omega| - n, 10, 3, 5)$ и n-коклики. По лемме 6.27,

$$\chi_2(g) = \frac{20\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g)/2 + 5\alpha_2(g)/12}{47} = 5z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Поэтому $240|\Omega| - 42\alpha_1(g) + 5\alpha_2(g) = 2820z$. Учитывая, что $329 = |\Omega| + \alpha_1(g) + \alpha_2(g)$, получим $2820z = 240|\Omega| - 42\alpha_1(g) + 5(329 - |\Omega| - \alpha_1(g)) = 235|\Omega| - 47\alpha_1(g) + 1645$ и $\alpha_1(g) = 5|\Omega| - 60z + 35$.

Пусть $p = 3$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{0, 2, 3, 5\}$. По лемме 6.27,

$$\chi_2(g) - 140 = \frac{20\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g)/2 + 5\alpha_2(g)/12}{47} - 140 = 3z_1$$

для некоторого $z_1 \in \mathbb{Z}$. Поэтому $240\alpha_0(g) - 42\alpha_1(g) + 5\alpha_2(g) = 1692z + 1128$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $329 = |\Omega| + \alpha_1(g) + \alpha_2(g)$, получим $1692z + 1128 = 240|\Omega| - 42\alpha_1(g) + 5(329 - |\Omega| - \alpha_1(g)) = 235|\Omega| - 47\alpha_1(g) + 1645$ и $\alpha_1(g) = 5|\Omega| - 36z + 11$.

Пусть $p = 2$. Тогда для любой вершины $b \in \Theta_2(a) \cap \Omega$ имеем $\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega \neq \emptyset$ и для любой вершины $x \in \Theta - \Omega$ имеем $\Theta_1(x) \cap \Theta_1(x^g) \cap \Omega \neq \emptyset$. Поэтому $d(\Omega) \leq 2$ и $329 - |\Omega| \leq 40|\Omega|$, т.е. $|\Omega| \in \{9, 11, 13, ..., 47\}$. Кроме того, для каждой вершины $b \in \Omega \cap \Theta_2(a)$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{1, 3, 5\}$ и для каждой вершины $b \in \Omega_1(a)$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{1, 3\}$. По лемме 6.27,

$$\chi_1(g) = \frac{4\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/12}{7} = 2z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $168z = 48\alpha_0(g) + 6\alpha_1(g) - (329 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)) = 49\alpha_0(g) + 7\alpha_1(g) - 329$ и $\alpha_1(g) = 24z + 47 - 7|\Omega|$.

Лемма 6.29. *Пусть $p, q \in \pi(\widetilde{G})$ и $\widetilde{G}$ содержит элемент h порядка pq. Тогда выполняются следующие утверждения;*

(1) *$(p, q) \neq (47, 7), (47, 5), (47, 2)$ и если $(p, q) = (47, 3)$, то $|\mathrm{Fix}(h^p)| = 47$, $\alpha_1(h^p) = 282$ и каждая неодноточечная $\langle h^p \rangle$-орбита является 3-кликой;*

(2) *если $(p, q) = (7, 5)$, то $\mathrm{Fix}(h^p)$ — 14-коклика, $\alpha_1(h^p) = 105 = \alpha_2(h^p)/2$, $\alpha_1(h^q) = 35$ и на вершинах графа Θ имеется ровно 2 $\langle h \rangle$-орбиты длины 7 и ровно 9 $\langle h \rangle$-орбит длины 35;*

(3) *если $(p, q) = (7, 3)$, то либо $|\mathrm{Fix}(h^p)| = 14$ и $\alpha_1(h^p) = 189$, либо $|\mathrm{Fix}(h^p)| = 35$ и $\alpha_1(h^7) \in \{42, 294\}$;*

(4) *если $(p, q) = (7, 2)$, то либо $|\mathrm{Fix}(h^p)| = 21$ и $\alpha_1(h^p) \in \{140, 308\}$, либо $|\mathrm{Fix}(h^p)| = 35$ и $\alpha_1(h^p) \in \{42, 210\}$;*

Доказательство. Пусть $p, q \in \pi(\widetilde{G})$, $h \in \widetilde{G}$ и $|h| = pq$. Положим $g = h^q$ и $f = h^p$. Ясно, что $|\mathrm{Fix}(f) - \mathrm{Fix}(g)| \equiv 0 \pmod p$ и $|\mathrm{Fix}(g) - \mathrm{Fix}(f)| \equiv 0 \pmod q$. Если $(p, q) = (47, 7)$, то $\alpha_1(g)$ делится на 7, противоречие с леммой 6.28.

Пусть $(p, q) = (47, 3)$. Тогда $|\mathrm{Fix}(f)| = 47$ и $\alpha_1(f)$ делится на 47. По лемме 6.28 $\alpha_1(f) = 5|\mathrm{Fix}(f)| - 36z + 11 = 246 - 36z$. Отсюда 47 делит $11 - 36z$. Но тогда $z = -1$ и $\alpha_1(f) = 282$. Значит, каждая неодноточечная $\langle f \rangle$-орбита является 3-кликой.

Пусть $(p,q)=(47,2)$. Тогда $|\mathrm{Fix}(f)|=47$ и $\alpha_1(f)$ делится на 47. По лемме 6.28 $\alpha_1(f)=24z+47-7|\mathrm{Fix}(f)|$. Отсюда 47 делит $24z$. Но тогда $z=0$ и $\alpha_1(f)=47-7|\mathrm{Fix}(f)|\geq 0$, противоречие.

Пусть $p\in\{7,47\}$ и $q=5$. Тогда по лемме 6.28 $\mathrm{Fix}(g)=\emptyset$ и $44\geq|\mathrm{Fix}(f)|\equiv 4 \pmod 5$. Но $|\mathrm{Fix}(f)|\equiv 0 \pmod p$, поэтому $p=7$, $|\mathrm{Fix}(f)|=14$, $\mathrm{Fix}(f)$ — коклика и $\alpha_1(f)=105-60z$ для некоторого $z\in\mathbb{Z}$. Таким образом, на вершинах графа Θ имеется ровно 2 $\langle h\rangle$-орбиты длины 7 и ровно 9 $\langle h\rangle$-орбит длины 35. Так как $\alpha_1(f)$ делится на 7, то $\alpha_1(f)=105=\alpha_1(f^i)=\alpha_2(f)/2$ для всех $i\in\{1,..,4\}$. Кроме того, $d(x,x^g)=2$ для всех $x\in\mathrm{Fix}(f)$, поэтому $\alpha_1(g)$ делится на 5. Ввиду леммы 6.28 $\alpha_1(g)=35-84z$ для некоторого $z\in\mathbb{Z}$, поэтому $\alpha_1(g)=35$.

Пусть $(p,q)=(7,3)$. Тогда $|\mathrm{Fix}(f)|\in\{14,35\}$ и $\alpha_1(f)$ делится на 7. По лемме 6.28 $\alpha_1(f)=5|\mathrm{Fix}(f)|-36z+11$. Отсюда 7 делит $-36z+11$. Если $|\mathrm{Fix}(f)|=14$, то $\alpha_1(f)=189$. Если $|\mathrm{Fix}(f)|=35$, то $\alpha_1(f)\in\{42,294\}$.

Пусть $(p,q)=(7,2)$. Тогда $|\mathrm{Fix}(f)|\in\{21,35\}$ и $\alpha_1(f)$ делится на 7. По лемме 6.28 $\alpha_1(f)=24z+47-7|\mathrm{Fix}(f)|$. Отсюда 7 делит $24z+47$. Если $|\mathrm{Fix}(f)|=21$, то $\alpha_1(f)\in\{140,308\}$. Если $|\mathrm{Fix}(f)|=35$, то $\alpha_1(f)\in\{42,210\}$.

Следствие 6.30. *Группа $\widetilde{G}$ не содержит подгрупп A со свойством $\{3,5,7\}\subseteq\pi(A)$ и $\{3,7\}\subseteq\pi(C_{\widetilde{G}}(A))$.*

Доказательство. От противного, предположим, что $\widetilde{G}$ содержит подгруппу A с заданным свойством. Пусть $f\in A$ и $g\in C_{\widetilde{G}}(A)$ — элементы порядков 5 и 3 соответственно. Тогда $\mathrm{Fix}(f)$ — 14-коклика и $\mathrm{Fix}(g)\in\{14,35\}$. Следовательно, $\mathrm{Fix}(f)\subseteq\mathrm{Fix}(g)\cup\{x\in\Theta\mid d(x,x^g)=2\}$ и поэтому $\alpha_1(g)$ делится на 5. Но $\alpha_1(g)\in\{42,189,294\}$, противоречие.

Предложение 6.31. *Если $p\in\{5,7,47\}$, то p^2 не делит $|\widetilde{G}|$.*

Доказательство. Пусть $p\in\{5,7,47\}$. Предположим, что p^2 делит $|\widetilde{G}|$. Тогда $\widetilde{G}$ содержит подгруппу P порядка p^2. Если $p>5$, то по лемме 6.28 P действует полурегулярно на вершинах графа Θ, противоречие с тем, что p^2 не делит 329.

Пусть $p=5$. Так как p не делит 329, то P имеет хотя бы одну одноточечную орбиту и $44\geq|\mathrm{Fix}(P)|\equiv 4 \pmod 5$. Пусть $a\in\mathrm{Fix}(P)$.

Предположим, что $P=\langle g\rangle$. Тогда $\mathrm{Fix}(P)\subseteq\mathrm{Fix}(g^2)$. Если P-орбита Δ содержит пару вершин $\{x,x^g\}$ с $d(x,x^g)=i$, то для каждой вершины $y\in\Delta$ имеем $d(y,y^g)=i$. Если вершина a изолирована в графе $\mathrm{Fix}(g^2)$, то P действует полурегулярно на $\Theta_1(a)$, противоречие с тем, что 25 не делит 40. Поэтому, ввиду леммы 6.28, $\mathrm{Fix}(g^2)$ — вполне регулярный граф с параметрами $(|\mathrm{Fix}(g^2)|,10,3,5)$ и $|\mathrm{Fix}(g^2)|\in\{24,29,34,39,44\}$. Но тогда P действует полурегулярно на $\Theta_1(a)-\mathrm{Fix}(g^2)$, противоречие с тем, что $|\Theta_1(a)-\mathrm{Fix}(g^2)|=30$ не делится на 25.

Теперь предположим, что $P=\langle g,f\rangle$ и $|g|=|f|=5$. Тогда $\mathrm{Fix}(P)=\mathrm{Fix}(g)\cap\mathrm{Fix}(f)$. Заметим, что ввиду леммы 6.28 $|(\mathrm{Fix}(g)\cup\mathrm{Fix}(f))\cap\Theta_1(a)|=15$ и $|\mathrm{Fix}(P)\cap\Theta_1(a)|=5$. Но тогда $\Theta_1(a)\cap\Theta_1(b)\subset\mathrm{Fix}(P)$ для всех $b\in\mathrm{Fix}(P)\cap\Theta_1(a)$ и связная компонента Δ графа $\mathrm{Fix}(P)$ — вполне регулярный граф с параметрами $(|\Delta|,5,3,5)$. Ввиду [40, теорема 1.5.5]

$d(\Delta) = 2$. Поэтому $|\Delta| = 7$ и по [40, теорема 1.3.1] Δ — полный многодольный граф с долями порядка 2, противоречие.

§§ 6.3.2. Автоморфизмы $AT4(5, 7, r)$-графа

До конца параграфа Γ — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\}$, где $r \in \{3, 6\}$, и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 6.32. *Пусть $g \in G$, $|g| = p$ — простое число и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется следующие утверждения:*

(1) *если $\Omega = \varnothing$, то $p \in \{2, 3\}$;*

(2) *если $\Omega \neq \varnothing$, то либо $p \leq 37$, либо $p = 47$ и Ω — антиподальный класс.*

Доказательство. Так как Γ имеет $v = 2 \cdot 3^6 r$ вершин, то в случае, если $\Omega = \varnothing$, получим $p \in \{2, 3\}$. Пусть далее $\Omega \neq \varnothing$ и $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$. Ясно, что если $p \geq 7$ и $F \cap \Omega \neq \varnothing$, то $F \subseteq \Omega$.

Предположим, что $p \geq 7$ и Ω содержит ровно $x > 0$ антиподальных классов, включая F. Пусть $a \in F$. Тогда $\alpha_4(g) \leq v - r(k+1)$ и $xr = v \pmod p$. Так как g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа $\bar{\Gamma}$, то по [32, теорема 3.2] $x \leq 84 \cdot 1458/(329 - 5) = 378$.

Имеем $|\Omega \cap \Gamma_1(a)| = |\Omega \cap \Gamma_1(a')|$ для всех $a' \in F$. Поэтому $(r-1)|\Omega \cap \Gamma_1(a)| = |\Omega \cap \Gamma_3(a)|$. Далее,

$$\begin{aligned}
x_1 &= |\Omega \cap \Gamma_1(a)| \equiv 329 \pmod p, \\
x_2 &= |\Omega \cap \Gamma_2(a)| \equiv 329 \cdot 288/\mu \pmod p, \\
x_3 &= |\Omega \cap \Gamma_3(a)| \equiv 329(r-1) \pmod p, \\
|\Gamma - \Omega| &= v - r - x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \pmod p,
\end{aligned}$$

причем $(r-1)x_1 = x_3$ и, в частности, если $p \notin \{2, 3, 5, 7, 47\}$, то $x_1 x_2 x_3 > 0$.

Заметим, что если $p > \mu$ и $p \neq 47$, то Ω — связный граф диаметра не менее 3. Действительно, каждая вершина c из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ находится на расстоянии 2 от каждой вершины $a' \in F$ и поэтому $\Gamma_1(a') \cap \Gamma_1(c) \subset \Omega$. Кроме того, если $p > \mu$, то $\Gamma_1(a) \nsubseteq \Omega$. От противного, пусть $\Gamma_1(a) \subseteq \Omega$ и $p > \mu$. Тогда $\Gamma_3(a) \subseteq \Omega$ и каждая вершина из $\Gamma_2(a)$ лежит в $\Gamma_1(a) \cap \Gamma_1(b)$ для некоторой вершины $b \in \Gamma_3(a)$ и поэтому $\Gamma_2(a) \subseteq \Omega$, то есть $\Omega = \Gamma$, противоречие.

Пусть $p > 37$. Предположим, что $x_1 x_2 x_3 > 0$. Тогда $\lambda_\Omega = 40, \mu_\Omega = \mu$ и по [40, предложение 1.1.2], Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(xr, k_\Omega, 40, \mu)$. Тогда μ делит $k_\Omega(k_\Omega - 41)$. Ввиду того, что диаметр графа Ω не меньше 3, то по [40, теорема 1.5.5], $k_\Omega(k_\Omega - 41)/\mu \geq k_\Omega \geq 41 + \mu$. Более того, так как $k_\Omega = x_1$, $k_\Omega(k_\Omega - 41)/\mu = x_2$, $(r-1)k_\Omega = x_3$ и $\Omega \neq \Gamma$, то либо $r = 3$ и $(p, x_1, x_2, x_3) = (197, 132, 858, 660)$, либо $r = 6$ и $(p, x_1, x_2, x_3) = (239, 90, 315, 450)$, $(211, 118, 649, 590)$, $(197, 132, 858, 660)$, $(137, 55, 55, 275)$, $(109, 111, 555, 555)$, $(89, 62, 93, 310)$, $(61, 146, 1095, 730)$, $(41, 83, 249, 415)$ или $(37, 70, 145, 350)$. В любом случае Ω — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений

$\{x_1, x_1-41, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, x_1-41, x_1\}$. Но так как $\lambda_\Omega > 0$, то по [40, следствие 4.2.5] число ${\lambda_\Omega}^2 + 4x_1$ — квадрат, противоречие для всех допустимых наборов (p, x_1, x_2, x_3).

Значит, $x_1x_2x_3 = 0$ и $p = 47$. Если $x_1 = 0$, то, учитывая, что $\mu \le 28$, получим $x_2 = 0$ и поэтому $\Omega = F(a)$. Если $x_1 > 0$, то $x_2 = 0$ и $x_1 = 47l$, где $l \le 6$. Но тогда степень каждой вершины в Ω не меньше 47, поэтому $|\Omega_2(a)| \ge 47 - 40 - 1$, противоречие.

Следствие 6.33. *Если $47 \in \pi(G_{\{F\}})$ для всех $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, то G действует транзитивно на $\mathcal{F}(\Gamma)$.*

Всюду далее в этом подпараграфе: $F \in \mathcal{F}(\Gamma), a \in F$, $\Phi = \Gamma_2(a)$, Θ^i — i-окрестность вершины F графа $\bar{\Gamma}$ и $\mathcal{F}_i$ — множество тех антиподальных классов графа Γ, которые пересекают $\Gamma_i(a)$, где $i \in \{1, 2\}$.

Заметим, что граф $\bar{\Gamma}$ имеет спектр $329^1, 5^{1316}, (-49)^{141}$ и его дополнительный граф $\bar{\Gamma}_2$ сильно регулярен с параметрами $(1458, 1128, 716, 840)$. Через $\bar{x}$ будем обозначать вершину графа $\bar{\Gamma}$, прообраз которой в Γ содержит x.

Из лемм 6.28, 6.32 и 6.24 заключаем, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 47\}$.

Пусть $S(G)$ — разрешимый радикал группы G.Ясно, что $K \le S(G)$. Пусть $\widehat{G} = G/S(G)$ и $\widehat{T}$ — минимальная нормальная подгруппа группы $\widehat{G}$.

Лемма 6.34. *Если группа G неразрешима, то $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и $\widehat{T} \simeq A_5$, A_6, $S_4(3)$, $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, A_7, $L_3(4)$, A_8, A_9, $U_4(3)$ или $S_6(2)$, и, в частности, если $S(G)$ содержит элемент порядка 5 или 7, то $G - S(G)$ содержит элемент порядка 35.*

Доказательство. Предположим, что группа G — неразрешима. Если p^2 делит $|G|$ для некоторого $p \in \{5, 7, 47\}$, то G содержит подгруппу P порядка p^2 и $\mathrm{Fix}(P) \neq \emptyset$, противоречие с предложением 6.31. Из [133, таблица 1] следует, что $\widehat{T}$ — одна из перечисленных групп. В любом случае $\mathrm{Aut}(\widehat{T})$ не содержит элементов порядка 47. Так как $\widehat{G}$ — почти простая группа или цоколь группы $\widehat{G}$ — прямое произведение двух неизоморфных неабелевых простых групп, то и $\widehat{G}$ не содержит элементов порядка 47.

Допустим, что $S(G)$ содержит элемент g порядка $p \in \{5, 7, 47\}$. По [69, теорема 1.1] для любого элемента f из G подгруппа $\langle f, g\rangle$ разрешима. Пусть $p = 47$. Тогда в G найдется элемент f порядка $q \in \{5, 7\}$ и группа $\langle f, g\rangle$ разрешима. Но тогда $\langle f, g\rangle$ содержит абелеву подгруппу P порядка $47q$ и ввиду леммы 6.32 $\mathrm{Fix}(P) \neq \emptyset$, противоречие с леммой 6.29. Пусть $p \in \{5, 7\}$. Тогда в $G - S(G)$ найдется элемент f порядка $35/p$ и группа $\langle f, g\rangle$ разрешима. Поэтому $\langle f, g\rangle$ содержит элемент порядка 35. Лемма доказана.

Далее будем предполагать, что G транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда G индуцирует транзитивную группу автоморфизмов $\bar{G}$ графа $\bar{\Gamma}$. Для вершины a графа Γ и антиподального класса F, содержащего a, имеем $|G : G_{\{F\}}| = 2 \cdot 3^6$ и $|G_{\{F\}} : G_a| = r$.

Лемма 6.35. *Если $47 \in \pi(G)$, то $G = S(G), \pi(G) = \{2, 3, 47\}$ и $1 \neq O_p(G) \le K$ для некоторого $p \in \{2, 3\}$.*

Доказательство. Предположим, что $47 \in \pi(G)$. По лемме 6.34 $G = S(G)$. Если $q \in \{5, 7\} \cap \pi(G)$, то по предложению 6.31 G_a содержит элемент порядка $47q$, противоречие с леммой 6.29.

Далее, для некоторого $p \in \{2,3\}$ имеем $O_p(G) \neq 1$. Тогда порядок l произвольной $O_p(G)$-орбиты на $\mathcal{F}(\Gamma)$ равен 2 или делит 3^6. С другой стороны, элемент порядка 47 фиксирует некоторую $O_p(G)$-орбиту на $\mathcal{F}(\Gamma)$ и поэтому $l \equiv 1 \pmod{47}$. Значит, $l = 1$ и $O_p(G) \leq K$.

§§ 6.3.3. Доказательства теорем 6.5 и 6.7

Докажем теорему 6.5. Допустим, что G транзитивна на дугах графа Γ. Тогда для любой вершины a группа G_a действует транзитивно на $\Gamma_1(a)$. Поэтому $|G_a : G_{a,b}| = 329$ для всех $b \in \Gamma_1(a)$. Так как $47 \in \pi(G)$, то по лемме 6.34 $G = S(G)$. Но $7 \in \pi(G)$, противоречие с леммой 6.35.

Доказательство теоремы 6.7 проводится с помощью тех же самых рассуждений, которые применялись в доказательствах лемм 6.34 и 6.35.

§ 6.4. Группы автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графов: случай $p = 7$

В этом параграфе доказываются теоремы 6.2 и 6.4.

Пусть Γ — это $\mathrm{AT4}(7, 9, r)$-граф. Тогда Γ имеет массив пересечений

$$\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$$

и $r \in \{4, 8\}$. Пусть a — это некоторая вершина графа Γ, $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $a \in F$, $\Phi = \Gamma_2(a)$ и Θ^i — это i-окрестность вершины F графа $\bar{\Gamma}$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда Φ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений

$$\{567, 512, (r-1)112/r, 1; 1, 112/r, 512, 567\},$$

$\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(3872, 711, 70, 144)$, $\Gamma_1(a) \simeq \Theta^1$ — сильно регулярный граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$ и $\bar{\Phi} \simeq \Theta^2$ — сильно регулярный граф с параметрами $(3160, 567, 54, 112)$ (см., например, [7]).

§§ 6.4.1. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(711, 70, 5, 7)$

В этом подпараграфе Θ — сильно регулярный граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$, $\widetilde{G} = \mathrm{Aut}(\Theta)$ и $v = 711$. Заметим, что граф Θ имеет спектр $70^1, 7^{395}, (-9)^{315}$ и ввиду [40, предложение 1.3.2] порядок коклики в Θ не превосходит 81.

Обозначим через ψ стандартное матричное представление группы $\widetilde{G}$ в $\mathrm{GL}_v(\mathbb{C})$, индуцируемое подстановочным представлением группы $\widetilde{G}$ на вершинах графа Θ.

Лемма 6.36. *Если $g \in \widetilde{G}$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 395 и χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 315, то*

$$\chi_1(g) = \frac{5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/16}{9} \text{ и } \chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79}.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 395$ и $\chi_2(g) - 315$ делятся на p.

Доказательство. Следует из леммы 6.18.

Лемма 6.37. *Пусть* $g \in \widetilde{G}$, $|g| = p$ *— простое число и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(\widetilde{G}) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 79\}$ *и справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $\Omega = \varnothing$, *то либо* $p = \alpha_1(g) = 79$, *либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 63 - 48z$ *для некоторого* $z \in \mathbb{Z}$;

(2) *если* $\Omega \neq \varnothing$, *то* $p \leq 7$ *и либо*

  (*i*) $p = 7$, $|\Omega| \equiv 4 \pmod 7, |\Omega| \leq 76$, $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 112z + 63$ *для некоторого* $z \in \mathbb{Z}$, Ω *— коклика или* Ω *— объединение вполне регулярного графа с параметрами* $(|\Omega| - n, x_1, 3, 5)$ *и* n*-коклики, где* $x_1 \in \{14, 21\}$, *либо*

  (*ii*) $p = 5$, $|\Omega| \equiv 1 \pmod 5, |\Omega| \leq 76$, $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 80z + 63$ *для некоторого* $z \in \mathbb{Z}$, *либо*

  (*iii*) $p = 3$, $|\Omega| \equiv 0 \pmod 3, |\Omega| \leq 75$ *и* $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 48z + 63$ *для некоторого* $z \in \mathbb{Z}$, *либо*

  (*iv*) $p = 2$, $|\Omega| \equiv 1 \pmod 2, 11 \leq |\Omega| \leq 79$ *и* $\alpha_1(g) = 32z + 95 - 9|\Omega|$ *для некоторого* $z \in \mathbb{Z}$;

Доказательство. Пусть $\Omega = \varnothing$. Тогда $p \in \{3, 79\}$. Пусть $p = 79$. По лемме 6.36,

$$\chi_1(g) = \frac{5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/16}{9} = 79z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $11376z = 8\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 8\alpha_1(g) - (711 - \alpha_1(g)) = 9\alpha_1(g) - 711$, $\alpha_1(g) = 1264z + 79$ и $z = 0$.

Пусть $p = 3$. По лемме 6.36,

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79} = 3z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $3792z = -72\alpha_1(g) + 7\alpha_2(g) = -72\alpha_1(g) + 7(711 - \alpha_1(g)) = -79\alpha_1(g) + 4977$ и $\alpha_1(g) = 63 - 48z$.

Пусть теперь $a \in \Omega \neq \varnothing$. Тогда по [32, теорема 3.2] $|\Omega| \leq 7 \cdot 711/(70 - 7) = 79$. Имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= |\Omega \cap \Theta_1(a)| \equiv 70 \pmod p, \\ x_2 &= |\Omega \cap \Theta_2(a)| \equiv 640 \pmod p, \\ |\Theta - \Omega| &= v - 1 - x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod p, \end{aligned}$$

в частности, если $p \notin \{2, 5, 7\}$, то $x_1 x_2 > 0$.

Пусть $p > 7$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \subset \Omega$ и по [40, предложение 1.1.2], Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(|\Omega|, x_1, 5, 7)$ и $|\Omega| = 1 + x_1 + x_1(x_1 - 6)/7$. Тогда $(p, x_1, x_2) = (19, 13, 13)$ и Ω — регулярный граф степени 13 на 27 вершинах, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $\lambda_\Omega = 5$ и для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{0, 5, 7\}$. Пусть Δ — связная компонента графа Ω. Если $d(\Delta) = 1$, то $\Delta \simeq K_7$, но $|\Omega(a)| \equiv 0 \pmod 7$ для $a \in \Delta$, противоречие. Предположим, что $d(\Delta) > 1$. Тогда $\lambda_\Delta = 5$ и $\mu_\Delta = 7$ и по [40, предложение 1.1.2], Δ — вполне регулярный граф с параметрами $(|\Delta|, k_\Delta, 5, 7)$ и $|\Delta| \geq 1 + k_\Delta + k_\Delta(k_\Delta - 6)/7$. Если $d(\Delta) = 2$, то $|\Delta| = 1 + k_\Delta + k_\Delta(k_\Delta - 6)/7$ и $k_\Delta = 7l$, где $l \geq 1$. Но тогда $(x_1, x_2) = (14, 16)$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(31, 14, 5, 7)$ и, учитывая [40, теорема 1.3.1], собственные значения графа Δ целые, противоречие. Значит, $d(\Delta) \geq 3$, и по [40, теорема 1.5.5], $k_\Delta(k_\Delta - 6)/7 \geq k_\Delta \geq 13$. Как и выше, получим $k_\Delta \in \{14, 21\}$ и $|\Delta| \geq 31$.

Поэтому либо Ω — n-коклика и $n \equiv 4 \pmod 7$, либо $|\Omega| \in \{32, 39, 46, 53, 60, 67, 74\}$ и Ω — дизъюнктное объединение вполне регулярного графа с параметрами $(|\Omega| - n, x_1, 5, 7)$ и n-коклики, где $x_1 \in \{14, 21\}$. По лемме 6.36,

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79} = 7z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Поэтому $210|\Omega| - 72\alpha_1(g) + 7\alpha_2(g) = 8848z$. Учитывая, что $711 = |\Omega| + \alpha_1(g) + \alpha_2(g)$, получим $8848z = 560|\Omega| - 72\alpha_1(g) + 7(711 - |\Omega| - \alpha_1(g)) = 553|\Omega| - 79\alpha_1(g) + 4977$ и $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 112z + 63$.

Пусть $p = 5$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{0, 2, 5, 7\}$. По лемме 6.36,

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79} = 5z_1$$

для некоторого $z_1 \in \mathbb{Z}$. Поэтому $560\alpha_0(g) - 72\alpha_1(g) + 7\alpha_2(g) = 6320z$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 80z + 63$.

Пусть $p = 3$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{1, 2, 4, 5, 7\}$. По лемме 6.36,

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79} = 3z_1$$

для некоторого $z_1 \in \mathbb{Z}$. Поэтому $560\alpha_0(g) - 72\alpha_1(g) + 7\alpha_2(g) = 3792z$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 48z + 63$.

Пусть $p = 2$. Тогда для любой вершины $b \in \Theta_2(a) \cap \Omega$ имеем $\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega \neq \varnothing$ и для любой вершины $x \in \Theta - \Omega$ имеем $\Theta_1(x) \cap \Theta_1(x^g) \cap \Omega \neq \varnothing$. Поэтому $d(\Omega) \leq 2$ и $711 - |\Omega| \leq 70|\Omega|$, т.е. $|\Omega| \in \{11, 13, ..., 79\}$. Кроме того, для каждой вершины $b \in \Omega \cap \Theta_2(a)$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{1, 3, 5, 7\}$ и для каждой вершины $b \in \Omega_1(a)$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{1, 3, 5\}$. По лемме 6.36,

$$\chi_1(g) - 395 = \frac{5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/16}{9} - 395 = 2z_1$$

для некоторого $z_1 \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\alpha_1(g) = 32z + 95 - 9|\Omega|$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$.

Лемма 6.38. *Пусть $p, q \in \pi(\widetilde{G})$ и $\widetilde{G}$ содержит элемент h порядка pq. Тогда $(p, q) \notin \{(79, 7), (79, 5), (79, 3)\}$ и если $(p, q) = (79, 2)$, то $|\mathrm{Fix}(h^{79})| = 79$, $\alpha_1(h^p) = 632$ и каждая неодноточечная $\langle h^p \rangle$-орбита является ребром.*

Доказательство. Пусть $p, q \in \pi(\widetilde{G})$, $h \in \widetilde{G}$ и $|h| = pq$. Положим $g = h^q$ и $f = h^p$. Ясно, что $|\mathrm{Fix}(f) - \mathrm{Fix}(g)| \equiv 0 \pmod p$ и $|\mathrm{Fix}(g) - \mathrm{Fix}(f)| \equiv 0 \pmod q$.

Пусть $p = 79$ и $2 < q \leq 7$. Тогда $|\mathrm{Fix}(f)|$ делится на 79 или $\alpha_1(g)$ делится на q, противоречие с леммой 6.37.

Пусть $(p, q) = (79, 2)$. По лемме 6.37 $\alpha_1(f) = 32z + 95 - 9|\mathrm{Fix}(f)|$. Так как $|\mathrm{Fix}(f)| = 79$ и $\alpha_1(f)$ делится на 79, то 79 делит $32z + 95$ и поэтому $\alpha_1(f) = 632$.

§§ 6.4.2. Автоморфизмы $AT4(7, 9, r)$-графа

До конца подпараграфа Γ — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$, где $r \in \{4, 8\}$, и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 6.39. *Пусть $g \in G$, $|g| = p$ — простое число и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется следующие утверждения:*

(1) *если $\Omega = \varnothing$, то $p \in \{2, 11\}$;*

(2) *если $\Omega \neq \varnothing$, то либо $p \leq 73$, либо $p = 83$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{296, 296 - \lambda - 1, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, 296 - \lambda - 1, 296\}$, либо $p = 79$ и Ω — антиподальный класс.*

Доказательство. Так как Γ имеет $v = 2^5 11^2 r$ вершин, то в случае, если $\Omega = \varnothing$, получим $p \in \{2, 11\}$. Пусть далее $\Omega \neq \varnothing$ и $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$. Ясно, что если $p \geq 11$ и $F \cap \Omega \neq \varnothing$, то $F \subseteq \Omega$.

Предположим, что $p \geq 11$ и Ω содержит ровно $x > 0$ антиподальных классов, включая F. Пусть $a \in F$. Тогда $\alpha_4(g) \leq v - r(k+1)$ и $xr = v \pmod p$. Так как g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа $\bar{\Gamma}$, то по [32, теорема 3.2] $x \leq 144 \cdot 3872/(711 - 7) = 792$.

Имеем $|\Omega \cap \Gamma_1(a)| = |\Omega \cap \Gamma_1(a')|$ для всех $a' \in F$. Поэтому $(r-1)|\Omega \cap \Gamma_1(a)| = |\Omega \cap \Gamma_3(a)|$. Далее,

$$\begin{aligned}
x_1 &= |\Omega \cap \Gamma_1(a)| \equiv 711 \pmod p, \\
x_2 &= |\Omega \cap \Gamma_2(a)| \equiv 711 \cdot 640/\mu \pmod p, \\
x_3 &= |\Omega \cap \Gamma_3(a)| \equiv 711(r-1) \pmod p, \\
|\Gamma - \Omega| &= v - r - x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \pmod p,
\end{aligned}$$

причем $(r-1)x_1 = x_3$ и, в частности, если $p \notin \{2, 3, 5, 7, 79\}$, то $x_1 x_2 x_3 > 0$.

Заметим, что если $p > \mu$ и $p \neq 79$, то Ω — связный граф диаметра не менее 3. Действительно, каждая вершина c из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ находится на расстоянии 2 от каждой вершины $a' \in F$ и поэтому $\Gamma_1(a') \cap \Gamma_1(c) \subset \Omega$. Кроме того, если $p > \mu$, то $\Gamma_1(a) \not\subseteq \Omega$. От противного, пусть $\Gamma_1(a) \subseteq \Omega$ и $p > \mu$. Тогда $\Gamma_3(a) \subseteq \Omega$ и каждая вершина из $\Gamma_2(a)$ лежит в $\Gamma_1(a) \cap \Gamma_1(b)$ для некоторой вершины $b \in \Gamma_3(a)$ и поэтому $\Gamma_2(a) \subseteq \Omega$, то есть $\Omega = \Gamma$, противоречие.

Пусть $p > \max\{\lambda, \mu\}$. Предположим, что $x_1 x_2 x_3 > 0$. Покажем, что в этом случае $p = 83$. Имеем $\lambda_\Omega = \lambda$, $\mu_\Omega = \mu$ и по [40, предложение 1.1.2], Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(xr, k_\Omega, \lambda, \mu)$. Поэтому μ делит $k_\Omega(k_\Omega-\lambda-1)$. Ввиду того, что диаметр графа Ω не меньше 3, то по [40, теорема 1.5.5], $k_\Omega(k_\Omega-\lambda-1)/\mu \ge k_\Omega \ge \lambda+\mu+1$. Более того, Ω — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x_1, x_1-\lambda-1, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, x_1-\lambda-1, x_1\}$. Так как $\lambda_\Omega > 0$, то по [40, следствие 4.2.5] число ${\lambda_\Omega}^2+4x_1$ — квадрат, поэтому либо $r=4$ и $(p, x_1, x_2, x_3) = (83, 296, 1850, 888)$, либо $r=8$ и $(p, x_1, x_2, x_3) = (83, 296, 3700, 2072)$.

Пусть теперь $x_1x_2x_3 = 0$. Тогда $p = 79$. Если $x_1 = 0$, то, учитывая, что $\mu < p$, получим $x_2 = 0$ и поэтому $\Omega = F(a)$. Если $x_1 > 0$, то $x_2 = 0$ и $x_1 = pl$, где $l \le 9$. Но тогда степень каждой вершины в Ω не меньше p, поэтому $|\Omega_2(a)| \ge p-\lambda-1 > 0$, противоречие.

Следствие 6.40. *Если $79 \in \pi(G_{\{F\}})$ для всех $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, то группа G действует транзитивно на $\mathcal{F}(\Gamma)$.*

Из лемм 6.37, 6.39 и 6.24 заключаем, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 79\}$. До конца этого подпараграфа мы считаем, что $a \in F \in \mathcal{F}(\Gamma)$.

Лемма 6.41. *Если группа G неразрешима, то $79 \notin \pi(G)$.*

Доказательство. Пусть $S(G)$ — разрешимый радикал группы G. Ясно, что $K \le S(G)$. Пусть $\widehat{G} = G/S(G)$ и $\widehat{T}$ — цоколь группы $\widehat{G}$. Предположим, что группа G — неразрешима. Если 79^2 делит $|G|$, то G содержит погруппу P порядка 79^2 и $\mathrm{Fix}(P) \ne \varnothing$, противоречие с леммами 6.37 и 6.24. Если $|G|$ делится на 11^3, то G_a содержит элемент порядка 11, снова противоречие с леммами 6.37 и 6.24. Из [133, таблица 1] следует, что $79 \notin \pi(\widehat{T})$.

Допустим, что $S(G)$ содержит элемент g порядка 79. По [69, теорема 1.1] для любого элемента f из G подгруппа $\langle f, g\rangle$ разрешима. Пусть f — элемент порядка $q \in \{5, 7, 11\}$ из G. Тогда $\langle f, g\rangle$ содержит холлову $\{79, q\}$-подгруппу P.

Пусть $q \in \{5, 7\}$. Тогда можно считать, что $g \in P$ и P нормализует свою силовскую q-подгруппу S. Если $\langle g\rangle \lhd P$, то можно считать, что f централизует g и ввиду леммы 6.39 $\mathrm{Fix}(P) \ne \varnothing$, противоречие с леммой 6.38. Значит, $|S| \ge q^9$. Если $\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h) = \varnothing$ для всех $h \in S - \{1\}$, то длина S-орбиты, содержащей вершину $a \in \mathrm{Fix}(g)$ не меньше $|S|$, противоречие. Значит, $\langle g, h\rangle \le G_a$ для некоторого $h \in S - \{1\}$ и подгруппа $\langle g, h\rangle$ разрешима. Тогда $\langle g, h\rangle$ содержит холлову $\{79, q\}$-подгруппу P_1. Можно считать, что $g \in P_1$ и P_1 нормализует свою силовскую q-подгруппу S_1. Если $\langle g\rangle \lhd P_1$, то элемент порядка q из P_1 централизует g, противоречие с леммой 6.38. Значит, $|S_1| \ge q^9$. Так как $\mathrm{Fix}(S_1) \cap \Gamma_1(a) \ne \varnothing$, то $|\mathrm{Fix}(S_1) \cap \Gamma_1(a)| \ge 79$ и следовательно, $|\mathrm{Fix}(h_1)| \ge 79$ для некоторого элемента $h_1 \in P_1$ порядка q, противоречие с леммой 6.37.

Если $q = 11$, то можно считать, что $\langle g\rangle \lhd P$ и f централизует g, откуда $\mathrm{Fix}(g) \subseteq \mathrm{Fix}(f)$ или $|\mathrm{Fix}(g)| \ge qr$, противоречие с леммой 6.39.

Значит, $\widehat{G} - \widehat{T}$ содержит элемент $\hat{h}$ порядка 79. Пусть $\widehat{S}$ — минимальная нормальная подгруппа в $\widehat{G}$. Тогда $\widehat{S}$ — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп $\widehat{S}_1, ..., \widehat{S}_l$. Так как $\mathrm{Aut}(\widehat{S}_1)$ не содержит элементов порядка 79, то можно считать, что $\hat{h} \notin N_{\widehat{G}}(\widehat{S}_1)$. Тогда $79|\widehat{S}_1|^{79}$ делит $|G|$. Так как 11^3 не делит $|G|$, то $\pi(\widehat{S}_1) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$. Кроме того, по лемме 6.37 $|\mathrm{Fix}(G_a) \cap \Gamma_1(a)| \leq 80$, поэтому $|G_a| \leq 711 \cdot k_\Theta!(k_\Theta - \lambda_\Theta - 1)^9$, где $\Theta = \Gamma_1(a)$. Таким образом,

$$79|\widehat{S}_1|^{79}/(2^5 11^2 r) \leq |G_a| \leq 711 \cdot 70!(64)^9,$$

противоречие с тем, что $|\widehat{S}_1| \geq 60$.

Лемма 6.42. *Если группа G транзитивна на вершинах графа Γ, то $79 \notin \pi(G)$.*

Доказательство. Пусть G транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда G индуцирует транзитивную группу автоморфизмов $\bar{G}$ графа $\bar{\Gamma}$. Для вершины a графа Γ и антиподального класса F, содержащего a, имеем $|G : G_{\{F\}}| = 2^5 11^2$, $|G_{\{F\}} : G_a| = r$ и $|G : G_a| = 2^{5+e}11^2$, где $e \in \{2, 3\}$.

Предположим, что $79 \in \pi(G)$. По лемме 6.41 группа G разрешима. Так как $11 \in \pi(G)$, то G содержит элемент h порядка $79 \cdot 11$. Но тогда $\mathrm{Fix}(h^{11}) \subseteq \mathrm{Fix}(h^{79})$ или $|\mathrm{Fix}(h^{11})| \geq 11r$, противоречие с леммой 6.39.

§§ 6.4.3. Доказательства теорем 6.6 и 6.8

Докажем теорему 6.6. Допустим, что G транзитивна на дугах графа Γ. Тогда G транзитивна на вершинах графа Γ и для любой вершины a группа G_a действует транзитивно на $\Gamma_1(a)$. Поэтому $|G_a : G_{a,b}| = 711$ для всех $b \in \Gamma_1(a)$, противоречие с леммой 6.42.

Докажем теорему 6.8. Пусть Θ — сильно регулярный граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$. Тогда $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 79\}$. Предположим, что $\mathrm{Aut}(\Theta)$ транзитивна на вершинах графа Θ. С помощью тех же рассуждений, которые применялись в доказательстве леммы 6.41 получим, что группа $\mathrm{Aut}(\Theta)$ разрешима и поэтому содержит холлову $\{3, 79\}$-подгруппу P. Пусть Q — подгруппа в P порядка 79. По лемме 6.38 $Q = C_P(Q)$. Значит, $O_{79}(P) = 1$.

Пусть N — минимальная нормальная 3-подгруппа в P. Тогда все N-орбиты на вершинах Θ имеют длину 3 или 9. Пусть $a, b_1, ..., b_m$ — представители $(m + 1)$ попарно различных N-орбит, где $m = 8$ при $|N : N_a| = 9$ и $m = 24$ при $|N : N_a| = 3$. Тогда $|N_a : N_{a,b_1,...,b_m}| \leq |N : N_a|^m$. Так как группа N — абелева, то любой элемент из N, фиксирующий некоторую вершину b, фиксирует и всю N-орбиту, содержащую b, поэтому ввиду леммы 6.38 получим $N_{a,b_1,...,b_m} = 1$. Но $|N| \geq 3^{79}$, противоречие.

Заключение

В диссертации были решены следующие задачи, возникшие в контексте проблем описания транзитивных и флаг-транзитивных групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов:

1. Классифицированы антиподальные дистанционно регулярные графы смежных классов диаметра 3 с $r > 2$ квазипростых групп $U_3(q)$, $SU_3(q)$, $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Найдены новые бесконечные семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = \mu$, связанные с сериями простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Результат опубликован в статьях [146, 142].

2. Для каждой группы $G \in \{U_3(q), Sz(q)\}$, где $q = 2^n \geq 4$, доказано, что граф на множестве ее инволюций, в котором две вершины смежны, если порядок произведения соответствующих инволюций равен ассоциированному простому числу группы G в смысле Судзуки, дистанционно регулярен. Как следствие, для групп $U_3(2^n)$ решена задача описания графов S_3-инволюций, предложенная в [55]. Кроме того, для каждого $n \geq 2$ доказано, что граф S_3-инволюций группы $L_2(2^n)$ изоморфен дистанционно регулярному графу Мэтона степени 2^n с $\mu = 1$. Установлено, что несколько бесконечных семейств фактор-графов графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ принадлежат классу локально сильно регулярных графов. Результат опубликован в статьях [146, 142, 144]

3. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда G индуцирует почти простую 2-транзитивную группу подстановок на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Классифицированы графы Γ в почти простом случае. Результат опубликован в статьях [149, 141, 143].

4. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда G индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Показано, что за исключением одномерного случая $G^{\Sigma} \leq \mathrm{A\Gamma L}_1(|\Sigma|)$ и случая $\mu = 1$, при нечетном $|\Sigma|$ граф Γ является графом Таса-Соммы или графом Годсила-Хензеля. Результат опубликован в статьях [137, 145, 148].

5. Доказано, что антиподальное дистанционно регулярное накрытие диаметра 4 графа эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, группа автоморфизмов которого действует транзитивно на дугах и индуцирует группу ранга 3 на множестве его антиподальных классов, изоморфно графу Уэлса или графу смежных классов укороченного тернарного кода Голея. Результат опубликован в статье [147].

6. Получены ограничения на простой спектр и строение группы автоморфизмов $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графа в случае, когда p — степень простого числа. Доказано, что $\mathrm{AT4}(p, p+2, r)$-графы с $p = 5, 7, 11, 17, 27$ не являются реберно симметричными. Результат опубликован в статьях [139, 140, 136].

7. Исследован класс абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ

диаметра 3 со свойством ($*$): Γ обладает транзитивной группой автоморфизмов G, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ антиподальных классов графа. Классифицированы графы со свойством ($*$) при условии, что цоколь группы G^{Σ} — спорадическая простая группа ранга 3. Результат опубликован в статье [135].

В дальнейшем представляет интерес исследование следующих задач.

1. А. Броувер, А. Коэн и А.Ноймайер (1989) выдвинули гипотезу о том, что если двудольный и антиподальный дистанционно регулярный граф Γ имеет валентность $k \geq 3$ и диаметр 6, то граф Γ изоморфен 6-кубу. Дж. Холл и М. Альфурайдан (2006) установили, что она справедлива, если вместо дистанционной регулярности графа Γ предполагать его дистанционную транзитивность (в этом случае половинные графы графа Γ являются дистанционно-транзитивными). Верна ли гипотеза Броувера, Коэна и Ноймайера в предположении о том, что половинные графы графа Γ являются реберно-транзитивными?

2. Выяснить, как устроены шуровы схемы отношений квазипростых групп, у которых граф некоторого базисного отношения является антиподальным плотным графом диаметра 4.

3. Описать реберно симметричные антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 4, антиподальное частное которых является графом ранга 3.

Список литературы

[1] Баннаи Э., Ито Т. *Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений* // Перев. с англ. (под ред. Ю.И. Журавлева, А.И. Кострикина). — М. : Мир, 1987.

[2] Белоногов В.А. *Представления и характеры в теории конечных групп* // В. А. Белоногов; АН СССР, Урал. отд-ние. — Свердловск : УрО АН СССР, 1990 (1991).

[3] Браун К.С. *Когомологии групп* // М. — Наука, 1987.

[4] Васильев А.В., Мазуров В.Д. *Минимальные подстановочные представления конечных простых ортогональных групп* // Алгебра и логика. 1994. Т.33, № 6, С. 603–627.

[5] Васильев А.В. *Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4* // Алгебра и логика. 1996, Т.35, № 6. С. 663–684.

[6] Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Доклады академии наук. 2010. Т.432, № 5, С. 583–587.

[7] Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., Падучих Д.В. *О дистанционно регулярных графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны* // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452, № 3. С. 247–251.

[8] Го В., Махнев А.А., Падучих Д.В. *О почти дистанционно транзитивных антиподальных графах* // Доклады академии наук. 2013. Т.452, № 6, С. 599–603.

[9] Го В., Махнев А.А., Падучих Д.В. *Об автоморфизмах накрытий сильно регулярного графа с параметрами* $(81, 20, 1, 6)$ // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 1. С. 22–36.

[10] Горенстейн Д. *Конечные простые группы. Введение в их классификацию* // М. — Мир, 1985.

[11] Кондратьев А.С. *О компонентах графа простых чисел конечных простых групп* // Матем. сб. 1989. Т.180, № 6. С. 787–797.

[12] Левчук В.М., Нужин Я.Н. *О строении групп Ри* // Алгебра и логика. 1985. Т.24, № 1. С. 26–41.

[13] Мазуров В.Д. *Минимальное подстановочное представление простой группы Томпсона* // Алгебра и логика. 1988. Т.27, № 5. С. 562–580.

[14] Мазуров В.Д. *Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы* // Алгебра и логика. 1993. Т.32, № 3. С. 267–287.

[15] Махнев А.А. *Частичные геометрии и их расширения* // УМН. 1999. Т. 54, № 5(329). С. 25–76.

[16] Махнев А. А., Падучих Д.В. *Об автоморфизмах графа Ашбахера* // Алгебра и логика. 2001. V.40, № 2. P. 69–74.

[17] Махнев А.А., Падучих Д.В. *О накрытиях графа Хигмена–Симса и их автоморфизмах* // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 1. С. 26–29.

[18] Махнев А.А., Носов В.В. *Об автоморфизмах 6-накрытия графа Хигмена–Симса* // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 3. С. 26–29.

[19] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. *Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с* $\lambda = \mu$ // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 237–246.

[20] Махнев А.А., Падучих Д.В. *Небольшие* AT4-*графы и отвечающие им сильно регулярные подграфы* // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 220–230.

[21] Махнев А. А., Нирова М. С. *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ // Труды ИММ УрО РАН. 2017. V.23, № 3. P. 182–190.

[22] Мухаметьянов И.Т. *Графы на классе сопряженных инволюций группы* $L_2(2^m)$ // Научн. обозр. 2013. № 5, P. 133–139.

[23] Alavi S.H., Burness T.C. *Large subgroups of simple groups* // J. Algebra. 2015. V.421. P. 187–233.

[24] Alfuraidan M.R. *Antipodal distance transitive covers with primitive quotient diameter two* // Discrete Math. 2013, V. 313. P. 2409-2422.

[25] Alfuraidan M.R., Hall J.I. *Smith's theorem and a characterization of the 6-cube as distance-transitive graph* // J. Algebr. Comb. 2006, V. 24. P. 195–207.

[26] Alfuraidan M.R., Hall J.I. *Imprimitive distance-transitive graphs with primitive core of diameter at least 3* // Mich. Math. J. 2009. V.58. P. 31–77.

[27] Alfuraidan M.R., Hall J.I., Laradji A. *Antipodal covers of distance-transitive generalized polygons* // J. Algebr. Comb. 2018. V.48. P. 607–626.

[28] Aschbacher M. *The non-existence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57* // J. Algebra. 1971. V.19. P. 538-540.

[29] Aschbacher M. *Finite Group Theory, second ed.* // Cambridge : Cambridge University Press, 2000.

[30] Bannai E., Bannai E., Ito T., Tanaka R. *Algebraic Combinatorics* // De Gruyter Series in Discrete Mathematics and Applications, 5. Berlin/Boston : De Gruyter, 2021.

[31] Ballantyne J. *Local fusion graphs of finite groups* // Doctoral thesis, Manchester Inst. for Math. Sci., The University of Manchester, 2011.

[32] Behbahani M., Lam C. *Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms* // Discrete Math. 2011. V.311. P. 132–144.

[33] Bending T., Fon-Der-Flaass D. *Crooked functions, bent functions, and distance regular graphs* // Elect. J. Combin. 1998. V.5. R34.

[34] Berezcky A. *Maximal overgroups of Singer elements in classical groups* // J. Algebra. 2000. V.234, № 1. P. 187–206.

[35] Biggs N.L. *Intersection matrices for linear graphs* // Combinatorial Mathematics and its applications (Proc. Oxford 7-10 July 1969) Acad. Press, London 1971, P. 15–23.

[36] Biggs N.L. *Algebraic graph theory* // Cambridge Tracts in Mathematics, № 67. London, Cambridge University Press, 1974.

[37] Biggs N.L. *Distance-regular graphs with diameter three* // Ann. Discr. Math. 1982. V.15. P. 69–80.

[38] Bosma W., Cannon J., Playoust C. *The Magma algebra system. I. The user language* // J. Symbolic Comput. 1997. V.24. P. 235–265.

[39] Bray J., Holt D., Roney-Dougal C. *The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups* // London Math. Soc. Lect. Note Ser., Cambridge: Cambridge University Press. 2013.

[40] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs* // Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.

[41] Brouwer A.E. *Corrections and additions to the book "Distance-regular graphs"*, manuscript // URL: http://www.win.tue.nl/˜ aeb/drg/index.html.

[42] Brouwer A.E., van Bon J.T.M. *The distance-regular antipodal covers of classical distance-regular graphs* // Combinatorics (Eger, 1987), in: Colloq. Math. Soc. János Bolyai, V.52, North-Holland Amsterdam, 1988. P. 141–166.

[43] Brouwer A.E., Koolen J.H., Klin M.H. *A root graph that is locally the line graph of the Petersen graph* // Discrete Math. 2003. V.264, № 1-3. P. 13–24.

[44] Brouwer A.E. *Parameters of strongly regular graphs* // URL: http://www.win.tue.nl/˜ aeb/graphs/srg/srgtab.html

[45] Brouwer A.E., Haemers W.H. *Spectra of graphs* // New York: Springer, 2012.

[46] Brouwer A.E., van Maldeghem H. *Strongly regular graphs* // Cambridge University Press, 2022.

[47] Cameron P.J. *Covers of graphs and EGQs* // Discrete Math. 1991. V.97, № 1-3. P. 83–92.

[48] Cameron P.J. *Finite permutation groups and finite simple groups* // Bull. London Math. Soc. 1981. V.13, № 1. P. 1–22.

[49] Cameron P.J. *Permutation groups* // London Math. Soc. Student Texts № 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

[50] Cameron P.J., van Lint J.H. *Graphs, codes and designs* // London Math. Soc. Student Texts № 22. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

[51] Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R. *Atlas of finite groups* // Oxford: Clarendon Press, 1985.

[52] de Caen D., Mathon R., Moorhouse G.E. *A family of antipodal distance-regular graphs related to the classical Preparata codes* // J. Algebr. Comb. 1995. V.4. P. 317–327.

[53] de Caen D., Fon-Der-Flaass D. *Distance regular covers of complete graphs from Latin squares* // Des. Cod. Crypt. 2005. V.34. P. 149–153.

[54] Delsarte P. *An algebraic approach to the association schemes of coding theory* // Philips Res. Rep. Suppl. 10, 1973.

[55] Devillers A., Giudici M. *Involution graphs where the product of two adjacent vertices has order three* // J. Aust. Math. Soc. 2008. V.85. P. 305–322.

[56] Devillers A., Giudici M., Li C.H., Pearce G., Praeger Ch.E. *On imprimitive rank 3 permutation groups* // J. London Math. Soc. 2011. V.84. P. 649–669.

[57] Dickson L.E. *Linear groups: with an exposition of the Galois field theory* // New York: Dover Publications, 1958.

[58] Dixon J.D., Mortimer B. *Permutation groups* // Springer, New York, 1996.

[59] The GAP Group, GAP Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.8, 2015.

[60] Gardiner A. *Antipodal covering graphs* // J. Comb. Theory B. 1974. V.16. P. 255–273.

[61] Gardiner A. *Antipodal graphs of diameter three* // Lin. Alg. Appl. 1982. V.46. P. 215–219.

[62] Gardiner A. *Distance-transitive antipodal covers: the extremal case* // Discrete Math. 1994. V.134. P. 63–64.

[63] Gardiner A., Praeger C.E. *On 4-valent symmetric graphs* // Europ. J. Comb. 1994. V.15, № 4. P. 375–381.

[64] Godsil C.D. *Krein covers of complete graphs* // Australas. J. Combin. 1992. V.6. P. 245–255.

[65] Godsil C.D. *Covers of complete graphs* // In: Progress in Algebraic Combinatorics, Adv. Stud. Pure Math. 1996. V.24. P. 137–163.

[66] Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E. *Antipodal distance transitive covers of complete graphs* // Europ. J. Comb. 1998. V.19, № 4. P. 455–478.

[67] Godsil C.D., Hensel A.D. *Distance regular covers of the complete graph* // J. Comb. Theory Ser. B. 1992. V.56. P. 205–238.

[68] Godsil C., Royle G. *Algebraic graph theory* // Grad. Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 2001.

[69] Guralnick R., Kunyavskiĭ B., Plotkin E., Shalev A. *Thompson-like characterizations of the solvable radical* // J. Algebra. 2006. Vol. 300. P. 363–375.

[70] Fujisaki T., Koolen J.H., Tagamoto M. *Some properties of the twisted Grassmann graphs* // Innovations in Incidence Geometry. 2006. V.3, № 1. P. 81–87.

[71] Higman D.G. *Flag-transitive collineation groups of finite projective spaces* // Illinois J. Math. 1962. V.6. P. 79–96.

[72] Higman D.G. *Intersection matrices for finite permutation groups* // J. Algebra. 1967. V.6. P.22–42.

[73] Hestens M. D., Higman D. G. *Rank 3 group and strongly regular graphs* // SIAM-AMS Proc., Providence. 1971. V.4. P. 141-159.

[74] Hering Ch. *Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order* // Geom. Dedicata. 1974. V.2. P. 425–460.

[75] Hoffman A.J., Singleton R.R. *Moore graphs with diameter 2 and 3* // IBM J. Res. Dev. 1960. V.5, No. 4. P. 497–504.

[76] Huppert B. *Zweifach transitive, auflosbare Permutationsgruppen* // Math. Z. 1957. V.68. P. 126–150.

[77] Huppert B. *Endliche Gruppen I* // Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[78] Huppert B., Blackburn N. *Finite groups II* // New York: Springer-Verlag, 1982.

[79] Huppert B., Blackburn N. *Finite groups III* // New York: Springer-Verlag, 1982.

[80] Ivanov A.A., Liebler R.A., Penttila T., Praeger C.E. *Antipodal distance transitive covers of complete bipartite graphs* // Europ. J. Comb. 1997. V.18. P. 11–33.

[81] Ivanov A.A. *Distance-transitive graphs and their classification.* In: Faradžev I.A., Ivanov A.A., Klin M.H., Woldar A.J. (eds) Investigations in algebraic theory of combinatorial objects. Mathematics and its applications (Soviet series), V.84. Dordrecht: Springer, 1994.

[82] Jones W., Parshall B. *On the 1-cohomology of finite groups of Lie type* // Proceedings of the Conf. on Finite Groups, eds: W.R. Scott and F. Gross, Academic Press, New York. 1976. P. 313–327.

[83] Jurišić A. *Antipodal covers* // Ph.D. Thesis. Waterloo, Ontario, Canada, 1995.

[84] Jurišić A., Koolen J.H., Terwilliger P. *Tight distance-regular graphs* // J. Algebr. Comb. 2000. V. 12. P. 163–197.

[85] Jurišić A., Koolen J.H. *Nonexistence of some antipodal distance-regular graphs of diameter four* // Europ. J. Comb. 2000. V. 21. P. 1039–1046.

[86] Jurišić A., Koolen J. *Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4* // Discrete Math. 2002. V.244. P. 181–202.

[87] Jurišić A. AT4 *family and 2-homogeneous graphs* // Discrete Math. 2003. V.264. P. 127–148.

[88] Jurišić A., Koolen J.H. *Distance-regular graphs with complete multipartite μ-graphs and AT4 family* // J. Algebr. Comb. 2007. V.25. P. 459–471.

[89] Jurišić A., Koolen J. *Classification of the family* AT4(qs, q, q) *of antipodal tight graphs* // J. Comb. Theory, Ser. A. 2011. V.118, № 3. P. 842–852

[90] Kantor W.M. *Moore geometries and rank 3 groups having* $\mu = 1$ // Quart. J. Math.. 1977. V.28, No. 3. P. 309-328.

[91] Kantor W.M., Seress A. *Large element orders and the characteristic of Lie-type simple groups* // J. Algebra. 2009. V.322. P. 802–832.

[92] Kleidman P.B., Liebeck W.M. *The subgroup structure of the finite classical groups* // London Math. Soc. Lect. Notes Texts Vol. 129. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990.

[93] Klin M., Pech Ch. *A new construction of antipodal distance-regular covers of complete graphs through the use of Godsil-Hensel matrices* // Ars Math. Contemp. 2011. V.4. P. 205–243.

[94] Lam T.-Y. *A first course in noncommutative rings*, 2nd edition // New York: Springer, 2001.

[95] Liebeck M.W., Saxl J. *The primitive permutation groups of odd degree* // J. London Math. Soc. 1985. V.31, № 2. P. 250–264.

[96] Liebeck M.W., Saxl J. *The finite primitive permutation groups of rank three* // Bull. London Math. Soc. 18. 1986. P. 165–172.

[97] Liebeck M.W. *On the orders of maximal subgroups of the finite classical groups* // Proc. London Math. Soc. 1985. V.50. P. 426–446.

[98] Lorimer P. *Vertex-transitive graphs: symmetric graphs of prime valency* // J. Graph Theory 1984. V.8. P. 55-69.

[99] Lüneburg H. *Ein einfacher Beweis für den Satz von Zsigmondy über primitive Primteiler von* $A^N - 1$ // Springer Lecture Notes in Mathematics. 1981. V.893. P. 219–222.

[100] Mathon R. *3-class association schemes* // Algebraic Aspects of Combinatorics, Congressus Numerantium XI11 (Utilitas Math. Winnipeg, 1975).

[101] Mathon R. *Lower bounds for Ramsey numbers and association schemes* // J. Comb. Theory Ser. B. 1987. V.42. P. 122–127.

[102] McKay B.D. *Transitive graphs with fewer than twenty vertices* // Math. Comp. 1979. V.33, № 147. P. 1101–1121.

[103] Norton S.P. *On the group* Fi_{24} // In: Aschbacher M., Cohen A.M., Kantor W.M. (eds) Geometries and Groups. Springer, Dordrecht. 1988. P. 483–501.

[104] Payne S.E. *The generalized quadrangle with* $(s;t) = (3;5)$ // Proceedings of the Twenty-First Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, FL, 1990, Congr. Numer. 1990. V.77. P. 5–29.

[105] Pollatsek H. *First cohomology groups of some linear groups over fields of characteristic two* // Illinois J. Math. 1971. V.15. P. 393–417.

[106] Ree R. *A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type* G_2 // Am. J. Math. 1961. V.83, № 6. P. 432–463.

[107] Roney-Dougal C.M. *The primitive permutation groups of degree less than 2500* // J. Algebra. 2005. V.292. P. 154–183.

[108] Schade T. *Antipodal distance-regular graphs of diameter four and five* // J. Comb. Des. 1999. V.7. P. 69–77.

[109] Shrijver A., van Lint J.H. *Construction of strongly regular graphs, two-weight codes and partial geometries by finite fields* // Combinatorica. 1981. V.1. P. 63–73.

[110] Smith D.H. *Primitive and imprimitive graphs* // Quart. J. Math. Oxford. 1971. V.22. P. 551–557.

[111] Smith S.D. *Nonassociative commutative algebras for triple covers of 3-transposition groups* // Mich. Math. J. 1977. V.24. P. 273-287.

[112] Sims C.C. *Graphs and finite permutation groups* // Math. Z. 1967. V.95. P. 76–86.

[113] Sabidussi G. *Vertex-transitive graphs* // Monatsh. Math. 1964. V.68. P. 426–438.

[114] Soicher L.H. *Three new distance-regular graphs* // Europ. J. Combin. 1993. V.14. P. 501-505.

[115] Soicher L.H. *Uniqueness of a distance-regular graph with intersection array* $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ *and related topics* // preprint arXiv:1512.05976 [math.CO].

[116] Soicher L.H. The GRAPE package for GAP, Version 4.6.1, 2012.

[117] Suzuki M. *On a class of doubly transitive groups* // Ann. Math., Sec. Ser. 1962. V.75, № 1. P. 105–145.

[118] Suzuki M. *On a class of doubly transitive groups II* // Ann. Math., Sec. Ser. 1964. V.79, № 3. P. 514–589.

[119] Suzuki M. *Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent* // Ann. Math., Sec. Ser. 1964. V.80, № 1. P. 58–77.

[120] Suzuki M. *A characterization of the 3-dimensional projective unitary group over a finite field of odd characteristic* // J. Algebra. 1965. V.2, № 1. P. 1–14.

[121] Taylor D.E. *Two-graphs and doubly transitive groups* // J. Comb. Theory Ser. A. 1992. V.61. P. 113–122.

[122] Tits J. *Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent* // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1959. V.2. P. 14–60.

[123] Tsiovkina L. Yu. *A new construction of Deza graphs through* π*-local fusion graphs of finite simple groups of Lie-type of even characteristic* // preprint arXiv:2009.11788 [math.CO].

[124] Tsiovkina L. Yu. *On a class of edge-transitive distance-regular antipodal covers of complete graphs* // Ural Math. J. 2021. V.7, № 2. P. 136–158.

[125] van Bon J. *Finite primitive distance-transitive graphs* // Europ. J. Comb. 2007. V.28, № 2. P. 517–532.

[126] van Dam E.R., Koolen J.H., Tanaka H. *Distance-regular graphs* // Electr. J. Combin. 2016. DS22.

[127] van Dam E.R., Koolen J.H. *A new family of distance-regular graphs with unbounded diameter* // Invent. Math. 2005. V.162. P. 189–193.

[128] Ward H.N. *On Ree's series of simple groups* // Trans. Am. Math. Soc. 1966. V.121, № 1. P. 62–89.

[129] Wielandt H. *Finite permutation groups* // Academic Press, New York. 1964.

[130] Wilson R.A. *The finite simple groups* // Grad. Texts in Math., V.251, Springer-Verlag, London. 2009.

[131] Winter D.L. *The automorphism group of an extraspecial p-group* // Rocky Mount. J. Math. 1972. V.2, № 2. P. 159–168.

[132] Zavarnitsine A.V. *Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders* // J. Group Theory. 2004. V.7, № 1. P. 81–97.

[133] Zavarnitsine A.V. *Finite simple groups with narrow prime spectrum* // Siberian Electr. Math. Reports. 2009. V.6. P. 1–12.

[134] Zsigmondy K. *Zur Theorie der Potenzreste* // Monatsh. Math. Phys. 1892. V.3. P. 265–284..

Работы автора по теме диссертации

[135] Циовкина Л.Ю. *Об одном классе вершинно-транзитивных дистанционно регулярных накрытий полных графов* // Сиб. электр. матем. изв. 2021. Т.18, № 2. С. 758–781.

[136] Циовкина Л.Ю. *О простом спектре группы автоморфизмов* AT4$(p, p+2, r)$*-графа* // Алгебра и анализ. 2020. Т.32, № 5, С. 130–144 (переводная версия: Tsiovkina L.Yu. *The prime spectrum of an automorphism group of an* AT4$(p, p+2, r)$*-graph* // St. Petersb. Math. J. 2020. V.32, № 5. P. 917–928).

[137] Циовкина Л.Ю. *Транзитивные на дугах группы автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в аффинном случае* // Сиб. электр. матем. изв. 2020. Т.17. С. 445–495.

[138] Циовкина Л.Ю. *Некоторые шуровы схемы отношений, связанные с группами Судзуки и Ри* // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т.25, № 4, С. 249–254.

[139] Циовкина Л.Ю. *О группе автоморфизмов антиподального плотного графа диаметра* 4 *с параметрами* $(5, 7, r)$ // Матем. заметки. 2019. Т.105, № 1, С. 123–135 (переводная версия: Tsiovkina L.Yu. *On the automorphism group of an antipodal tight graph of diameter 4 with parameters* $(5, 7, r)$ // Math. Notes. 2019. V.105, № 1-2. P. 104–114).

[140] Циовкина Л.Ю. *О группах автоморфизмов $AT4(7, 9, r)$-графов и их локальных подграфов* // Труды ИММ УрО РАН 2018. Т.24, № 3. С. 263–271 (переводная версия: Tsiovkina L.Yu. *On automorphism groups of $AT4(7, 9, r)$-graphs and of their local subgraphs* // Proc. Steklov Inst. Math. 2019. V.307, Suppl. 1. S151–S158).

[141] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. *Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия полных графов: почти простой случай* // Алгебра и логика. 2018. Т.57, № 2. С. 214–231 (переводная версия: Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Tsiovkina L.Yu. *Edge-symmetric distance-regular coverings of complete graphs: the almost simple case* // Algebra and Logic. 2018. V.57, № 2. P. 141–152).

[142] Tsiovkina L.Yu. *Arc-transitive antipodal distance-regular covers of complete graphs related to* $SU_3(q)$ // Discrete Math. 2017. V.340, № 2. P. 63–71.

[143] Makhnev A.A., Tsiovkina L.Yu. *Arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three related to* $PSL_d(q)$ // Sib. Electr. Math. Rep., Special issue: Graphs and Groups, Spectra and Symmetries — G2S2 2016. 2016. V.13. P. 1339–1345.

[144] Циовкина Л.Ю. *О локальном строении дистанционно-регулярных графов Мэтона* // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т.22, № 3. С. 293–298 (переводная версия: Tsiovkina L.Yu. *On the local structure of distance-regular Mathon graphs* // Proc. Steklov Inst. Math. 2017. V.299, Suppl. 1. S225–S230).

[145] Циовкина Л.Ю. *Об аффинных дистанционно регулярных накрытиях полных графов* // Сиб. электр. матем. изв. 2015. Т.12. С. 998–1005.

[146] Tsiovkina L.Yu. *Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with* $\lambda = \mu$ *related to groups* $Sz(q)$ *and* ${}^2G_2(q)$ // J. Algebr. Comb. 2015. V.41, № 4. P. 1079–1087.

[147] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. *Антиподальные дистанционно-регулярные накрытия графов эрмитовых форм* $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ // Доклады Академии наук. 2015. Т.462, № 3. С. 268–273.

[148] Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. *Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик: аффинный случай* // Сиб. матем. журнал. 2013. Т.54, № 6. С. 1353–1367.

[149] Циовкина Л.Ю. *Об автоморфизмах графа с массивом пересечений* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т.10. С.689–698.

[150] Махнев А.А., Циовкина Л.Ю. *Антиподальные дистанционно регулярные графы и их автоморфизмы* // А.А. Махнев, Л.Ю. Циовкина; Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. — Новосибирск : СО РАН, 2018.