Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ивановский государственный университет»

На правах рукописи

Соколов Евгений Викторович

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д. ф.-м. н., профессор
Д. И. Молдаванский

Иваново – 2022

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования

Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$ относительно отношения θ*, если для любых элементов и множеств элементов данной группы, не состоящих в отношении θ, найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, при котором образы указанных элементов и множеств по-прежнему не состоят в отношении θ. Если θ — это отношение вхождения элемента в заданное подмножество Y, то говорят об *отделимости* (соответствующим классом групп) подмножества Y. Аппроксимируемость классом всех конечных групп (относительно любого отношения) принято называть *финитной*.

Хорошо известно, что если группа X конечно определена, то из ее финитной аппроксимируемости относительно θ следует разрешимость алгоритмической проблемы, состоящей в определении того, находятся ли заданные элементы и подмножества группы X в отношении θ [43]. Именно это обстоятельство послужило причиной для начала интенсивных и систематических исследований аппроксимационных свойств групп, продолжающихся до сих пор. Однако, в настоящее время известен и целый ряд других применений указанных свойств; некоторые из них описываются ниже.

Финитная аппроксимируемость (относительно равенства элементов) тесно связана с такими свойствами, как хопфовость и линейность [40], гиперболичность [116], локальная разрешимость [154]. Из финитной аппроксимируемости конечно порожденной группы X следует финитная аппроксимируемость ее группы автоморфизмов [56, 92]. Известные критерии финитной аппроксимируемости и описания конечных гомоморфных образов могут служить целям классификации групп и их подгрупп (см., например, [97, 99, 130, 171, 176]).

Аппроксимируемость конечными p-группами для всех p из некоторого бесконечного множества простых чисел означает упорядочиваемость [172] и, в некоторых случаях, нильпотентность [8, 55] группы. Почти аппроксимируемость групп конечными p-группами (или даже конечными $\mathfrak{P}$-группами для некоторого множества $\mathfrak{P}$ простых чисел) может оказаться достаточной для доказательства финитной аппроксимируемости свободной конструкции, построенной из этих групп, в то время как из одной лишь финитной аппроксимируемости указанных групп аппроксимируемость конструкции вывести не удается [9]. Известные необходимые и достаточные условия аппроксимируемости конечными p-группами очень сильно упрощают исследования нильпотентной аппроксимируемости конечно порожденных групп [2, 13, 28, 53, 143].

Аппроксимируемость нильпотентными и разрешимыми группами имеет приложения в теории многообразий и CW-комплексов [44, 75, 141, 157, 158], используется при изучении групп кос, узлов и зацеплений [18, 19, 84–86]. Кроме того, аппроксимируемость нильпотентными группами без кручения является необходимым условием аппроксимируемости свободными группами [155].

Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности конечно порожденной группы X в сочетании с некоторыми свойствами автоморфизмов этой группы обеспечивает финитную аппроксимируемость (относительно равенства) группы внешних автоморфизмов $\operatorname{Out} X = \operatorname{Aut} X / \operatorname{Inn} X$ [117]. Известен частичный аналог данного утверждения для случая аппроксимируемости конечными p-группами [166].

Отделимость объединенных или связанных подгрупп почти всегда является одним из необходимых и/или достаточных условий аппроксимируемости (относительно равенства) свободных конструкций групп. Аналогичные взаимосвязи существуют между аппроксимируемостью и отделимостью относительно сопряженности (последняя обозначает аппроксимируемость относительно сопряженности элемента группы с одним из элементов заданной подгруппы) [137, 139].

Таким образом, свойства аппроксимируемости различными классами групп относительно различных отношений существенно взаимосвязаны и обладают многочисленными применениями в математической логике, алгебре и геометрии.

Свободные конструкции групп (свободные, древесные и полигональные произведения, HNN-расширения, фундаментальные группы графов групп и др.) естественным образом возникают в топологии и играют важную роль как в комбинаторной, так и в геометрической теории групп, во-первых, выступая в качестве средства построения новых групп с желаемыми свойствами и, во-вторых, обеспечивая возможность изучения заданной группы путем ее представления в виде конструкции, составленной из более просто устроенных или лучше изученных групп. Например, одним из ключевых моментов в доказательстве почти аппроксимируемости конечными p-группами групп 3-мерных многообразий является возможность описания структуры последних в виде фундаментальных групп графов групп [81]. Поэтому изучение аппроксимируемости свободных конструкций групп относительно различных отношений составляет немаловажную часть исследований аппроксимационных свойств групп в целом.

Цели, задачи и методы исследования

Цель работы состояла в развитии методов исследования аппроксимируемости свободных конструкций групп различными, в первую очередь корневыми, классами групп и получении с помощью этих методов конкретных необходимых и/или достаточных условий аппроксимируемости. Здесь имеет смысл напомнить, что согласно одному из равносильных определений класс групп $\mathcal{C}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y\in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Легко видеть, что корневыми являются классы всех конечных групп, всех разрешимых групп, всех групп без кручения, конечных $\mathfrak{P}$-групп и периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода для любого непустого множества $\mathfrak{P}$ простых чисел. Нетрудно показать также, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс. Таким образом, к числу корневых относятся многие аппроксимирующие классы групп, рассматриваемые в литературе. Классы нильпотентных и свободных групп, тоже нередко фигурирующие в подобном качестве, корневыми не являются. Однако, аппроксимируемость классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп для всякого простого числа p служит необходимым условием аппроксимируемости свободными группами, а нильпотентная аппроксимируемость конечно порожденной группы равносильна аппроксимируемости объединением $\bigcup_p \mathcal{F}_p$. Поэтому утверждения об аппроксимируемости корневыми классами могут применяться и для доказательства аппроксимируемости свободными и нильпотентными группами.

Вошедшие в диссертацию результаты являются частью более обширной программы исследований, подразумевающей изучение применительно к свободным конструкциям групп следующих аппроксимационных свойств:

1 (1). Аппроксимируемость корневыми классами групп относительно равенства.

2 (2). Отделимость корневыми классами групп циклических (а также, вероятно, конечно порожденных абелевых) подгрупп.

3 (2). Нильпотентная аппроксимируемость.

4 (2). Аппроксимируемость корневыми классами групп относительно сопряженности.

5 (3). Отделимость корневыми классами групп циклических (а также, вероятно, конечно порожденных абелевых) подгрупп относительно сопряженности.

6 (3). Нильпотентная аппроксимируемость относительно сопряженности.

Каждое свойство в этом перечне имеет вес, указанный в скобках после номера. Аппроксимационные свойства с одинаковыми весами могут рассматриваться одновременно и независимо друг от друга, в то время как для исследования свойства с бо́льшим весом требуется определенный задел в изучении свойства с меньшим. Необходимость такого задела объясняется следующими соображениями.

Аппроксимируемость группы равносильна отделимости ее единичной подгруппы. Кроме того, методы исследования отделимости циклических подгрупп в свободных конструкциях групп очень похожи на те, что используются для изучения аппроксимируемости; все они применяются при одних и тех же условиях. Поэтому отделимость подгрупп обычно рассматривают в группах, аппроксимируемость которых уже известна. Взаимный порядок аппроксимируемости относительно сопряженности и аппроксимируемости относительно равенства еще более однозначен: из первой следует вторая. Выбор места для нильпотентной аппроксимируемости объясняется тем, что для ее исследования предполагается использовать имеющиеся результаты об аппроксимируемости той же группы корневыми классами групп.

В приведенном выше перечне отсутствуют свойства произвольных конечно порожденных подгрупп. Это связано с тем, что бо́льшая часть известных результатов об отделимости таких подгрупп получена с помощью геометрических методов, достаточно далеко отстоящих от алгебраического подхода, который в описываемой программе исследований предполагается применять для изучения остальных аппроксимационных свойств.

Настоящая диссертация имеет отношение к первому, третьему, четвертому и, отчасти, второму из перечисленных выше свойств. Основными ее задачами являлись

– совершенствование и применение методов изучения аппроксимируемости относительно равенства корневыми классами групп свободных конструкций групп;

– использование доказанных утверждений для исследования свойства нильпотентной аппроксимируемости;

– получение базовых результатов об аппроксимируемости свободных конструкций групп корневыми классами относительно сопряженности.

Кроме этого, ставилась задача изучения свойства отделимости подгрупп в абелевых, нильпотентных и разрешимых группах. Ее решение необходимо как для уточнения полученных условий аппроксимируемости свободных конструкций групп, так и в качестве задела для исследования отделимости подгрупп указанных конструкций.

Перечисленные задачи с самого начала предполагалось решать путем усовершенствования алгебраических методов исследования аппроксимируемости свободных конструкций групп (относительно равенства и сопряженности) и их применения совместно с классическими методами комбинаторной теории групп (такими как преобразования Тице, метод Рейдемейстера–Шрайера и др.). Помимо этого, в настоящей диссертации используются некоторые свойства абелевых и нильпотентных групп, описания подгрупп свободных конструкций групп, ряд сведений о строении обобщенных групп Баумслага–Солитэра и отдельные факты из элементарной теории графов.

Степень разработанности темы исследования

Если говорить об аппроксимационных свойствах групп в целом, то можно заметить, что существует основной набор таких свойств, который изучается уже около 50 лет и интерес к которому пока не ослабевает. Выглядит он следующим образом.

1. Аппроксимируемость относительно равенства
   – конечными группами;
   – конечными p-группами;
   – нильпотентными группами;
   – разрешимыми группами;
   – свободными группами.
2. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности.

3. Финитная отделимость подгрупп (как правило, определенного типа, например, циклических, абелевых или конечно порожденных), а также двойных смежных классов.

Количественное представление о существующем на момент написания диссертации интересе к свойствам из данного набора можно составить, анализируя статьи соответствующей тематики, опубликованные за предшествующие 5 лет. Как и следовало ожидать, более 20% из них посвящены изучению финитной аппроксимируемости. Второй по частоте встречаемости за тот же период оказалась финитная отделимость конечно порожденных подгрупп (около 15%). Каждому из остальных свойств соответствует примерно 5% статей. Среди групп и теоретико-групповых конструкций, для которых исследовались аппроксимационные свойства, чаще всего фигурировали обобщенные свободные произведения и HNN-расширения, группы многообразий, а также группы кос, узлов и зацеплений.

Отложив на время более подробное рассмотрение описанного выше набора, заметим, что он постепенно расширяется за счет естественных аналогов и обобщений входящих в него свойств. Так, например, в 90-х годах в связи с интенсивным изучением (применительно к свободным конструкциям групп) аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп и финитной аппроксимируемости относительно сопряженности в литературе стали использоваться понятия $\mathcal{F}_p$-отделимой и сопряженно финитно отделимой подгруппы.

Сопряженная финитная отделимость всех конечно порожденных подгрупп была установлена в [45] для свободных и сверхразрешимых групп; первый из этих результатов обобщается в [173], где доказано, что аналогичным свойством обладают конечные расширения свободных групп, предельные (limit) группы, группы Линдона и некоторые группы с одним определяющим соотношением. Сопряженная финитная отделимость всех циклических подгрупп некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений рассматривается в [186] и [150] соответственно.

Исследованию свойства $\mathcal{F}_p$-отделимости конечно порожденных подгрупп в абсолютно свободных и свободных метабелевых группах посвящены статьи [17,83]. $\mathcal{F}_p$-отделимость циклических подгрупп свободных конструкций групп изучалась автором диссертации в [57,60,95,183,184]. Эти исследования (а именно, статья [95]), по-видимому, оказали определенное влияние на работу [94], которая содержит законченное исследование $\mathcal{F}_p$-отделимости циклических подгрупп графовых произведений групп (graph products of groups).

Еще одним аппроксимационным свойством, интерес к которому возрос в последнее время, является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость относительно сопряженности. Сразу же отметим, что в работах [111,160,173] вместо или в дополнение к классу $\mathcal{F}_p$ рассматривается произвольный корневой класс $\mathcal{R}$, состоящий из конечных групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп (или, что то же самое, многообразие конечных групп, замкнутое относительно взятия расширений). В [166], [188], [160] и [190] изучается $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость относительно сопряженности групп поверхностей, прямоугольных групп Артина (right-angled Artin groups), подпрямых произведений и фундаментальных групп некоторых многообразий соответственно. В [111] и [160] исследуется $\mathcal{R}$-аппроксимируемость относительно сопряженности графовых произведений групп и подпрямых произведений. Наконец, в [173] доказано, что в произвольном расширении свободной группы при помощи $\mathcal{R}$-группы все конечно порожденные подгруппы сопряженно $\mathcal{R}$-отделимы. Отметим, что $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость относительно сопряженности свободных групп была установлена еще в 1971 году [54]. На протяжении следующих 40 лет указанное свойство рассматривалось, по-видимому, только в работах [20,28–31,50], где указаны критерии $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности для конечно порожденных нильпотентных групп, групп Баумслага–Солитэра и некоторых обобщенных свободных произведений двух групп.

Исследование финитной аппроксимируемости относительно сопряженности привело к появлению в последние два десятилетия большого количества результатов о финитной аппроксимируемости (относительно равенства) групп внешних автоморфизмов. Все они получены при помощи теоремы 1 из [117], согласно которой группа $\operatorname{Out} X$ финитно аппроксимируема, если группа X финитно аппроксимируема относительно сопряженности и удовлетворяет свойству $\mathfrak{A}$: всякий автоморфизм группы X, переводящий классы сопряженных элементов в себя, является внутренним. Последние результаты такого типа содержатся в [79,112,140]. Интересно отметить, что если группа X $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема относительно сопряженности, то группа $\operatorname{Out} X$ оказывается не просто финитно аппроксимируемой, а почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой [166]. Поэтому исследование $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости относительно сопряженности применительно к группам, для которых ранее было доказано свойство $\mathfrak{A}$, будет немедленно приводить к уточнению имеющихся сведений о финитной аппроксимируемости их групп внешних автоморфизмов. Первые примеры таких результатов содержатся в [112, 166, 188].

Возвращаясь к приведенному выше основному набору, отметим, что описание всех известных утверждений, касающихся входящих в него свойств, могло бы составить содержание отдельного исследования. Поэтому далее ограничимся рассмотрением аппроксимируемости относительно равенства свободных конструкций групп: области, к которой относится бо́льшая часть результатов настоящей диссертации.

Вопрос о том, при каких условиях заданная конструкция аппроксимируется каждым из интересующих нас классов групп, полностью исследован лишь для (обычного) свободного произведения групп. А именно, для такого произведения получены критерии аппроксимируемости произвольным корневым классом групп [16, 118], нильпотентными группами [41,149] и свободными группами [87]. Аппроксимационные свойства более сложно устроенных свободных конструкций: свободного произведения групп с объединенной подгруппой, древесного и полигонального произведений, HNN-расширения, фундаментальной группы графа групп — удается исследовать, лишь накладывая различные дополнительные ограничения на входящие в состав этих конструкций группы и объединенные или связанные подгруппы. Для групп таким ограничением чаще всего служит принадлежность к классу абелевых, нильпотентных, разрешимых или свободных групп, для подгрупп — конечность, цикличность, центральность или нормальность. С учетом необычайного разнообразия формулировок уже доказанных утверждений логично предположить, что для перечисленных конструкций никогда не будут получены критерии, столь же простые и универсальные, как для свободного произведения групп. Скорее всего, их исследование будет идти по пути постепенного расширения списка групп, которые можно использовать для построения конструкции, и ослабления накладываемых на эти группы и их подгруппы ограничений.

Среди аппроксимационных свойств свободных конструкций групп наибольший интерес всегда вызывала финитная аппроксимируемость. Вследствие высокой степени разработанности данной тематики темпы ее изучения постепенно снижаются. Из последних результатов, обобщающих значительное число доказанных ранее утверждений, следует отметить

– критерии финитной аппроксимируемости HNN-расширения с центральными связанными подгруппами [47] и тубулярной (tubular) группы [122];

– достаточные условия финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений свободных и конечно порожденных линейных групп [96];

– цикл статей о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений разрешимых групп и групп конечного общего ранга [4–7, 9, 10].

Кроме этого, имеет смысл упомянуть результаты о финитной аппроксимируемости

– HNN-расширений с циклическими связанными подгруппами, нормальными в базовой группе [193];

– автоморфно индуцированных HNN-расширений [152, 153];

– полигональных произведений свободных групп [134];

– некоторых древесных произведений групп [156, 194].

Вторым по частоте рассмотрения в литературе является свойство аппроксимируемости классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп. В 90-х — 2000-х годах с помощью критерия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных групп [121] и аналога фильтрационной методики из [93] было получено достаточно много результатов об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенных свободных и древесных произведений [2, 3, 12, 38, 57, 95, 107, 135, 136, 138, 195]. Критерии $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения конечной группы были найдены в [46, 80, 170] и сформулированы в различных терминах. В [48, 49] получены также критерии $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости HNN-расширения произвольной группы с конечно порожденными центральными связанными подгруппами и HNN-расширения конечно порожденной нильпотентной группы с конечными связанными подгруппами. В [81, 189] некоторые из описанных выше результатов были распространены на фундаментальные группы произвольных графов групп.

В 2010-х годах $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость свободных конструкций групп практически не исследовалась. Ей на смену пришла аппроксимируемость классом $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ всех конечных $\mathfrak{P}$-групп, где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел. Ряд результатов об $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений был получен в [10, 11, 63, 64, 68] и [20, 32, 52, 66] соответственно. К настоящему времени многие из них обобщены на случай произвольного корневого класса групп. В [108] доказан критерий $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-аппроксимируемости обобщенной группы Баумслага–Солитэра.

Если не учитывать результаты об аппроксимируемости конечными p-группами и произвольными корневыми классами групп, то можно без труда перечислить статьи, где рассматривалась аппроксимируемость свободных конструкций групп разрешимыми или нильпотентными группами (все они упомянуты ниже). Ряд утверждений об аппроксимируемости обобщенного свободного произведения указанными классами групп доказан в [2, 82, 123–125] и [2, 26–28, 146] соответственно. Единственным результатом об аппроксимируемости разрешимыми группами конструкции HNN-расширения является теорема 1.1 из [169], согласно которой данным классом аппроксимируется произвольное HNN-расширение конечно порожденной абелевой группы. Критерии нильпотентной аппроксимируемости для HNN-расширений конечной и конечно порожденной абелевой группы приводятся в [170]. В [189] первый из них распространен на фундаментальные группы произвольных графов конечных групп.

При изучении аппроксимируемости свободными группами наряду с классом $\mathcal{R}\Phi$ групп, обладающих этим свойством, обычно рассматривается и класс $\mathcal{FR}\Phi$ (fully residually free-групп), принадлежность которому группы X означает, что для любого своего конечного подмножества Y она обладает гомоморфизмом на свободную группу, действующим инъективно на Y. Аппроксимируемость свободных конструкций групп свободными группами исследовалась, по-видимому, лишь в [87–89, 91, 168, 191]. Вместе с тем, за последние 25 лет было получено множество результатов о строении и свойствах (включая проблему изоморфизма) конечно порожденных $\mathcal{R}\Phi$- и $\mathcal{FR}\Phi$-групп (см., в частности, [98, 101, 128, 129, 142, 159, 178]). Вероятно, в некоторых конкретных случаях этих результатов может оказаться достаточно для того, чтобы ответить на вопрос, принадлежит ли заданная конечно порожденная группа, представимая в виде той или иной свободной конструкции, классу $\mathcal{R}\Phi$ или $\mathcal{FR}\Phi$.

Начало систематическому исследованию аппроксимируемости свободных конструкций групп произвольными корневыми классами положила статья [16], где установлено, в частности, что каждая свободная группа аппроксимируется любым корневым классом групп. После этого была в той или иной степени изучена аппроксимируемость корневыми классами следующих свободных конструкций:

– свободного произведения двух групп с нормальными объединенными подгруппами [15, 65, 70, 209];

– HNN-расширения с совпадающими связанными подгруппами [69, 187];

– HNN-расширения с центральными связанными подгруппами при условии, что базовая группа принадлежит аппроксимирующему классу или связанные подгруппы конечны [22];

– свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, являющейся ретрактом хотя бы в одном из свободных множителей [61];

– древесного произведения, реберные подгруппы которого служат ретрактами в содержащих их вершинных группах [15, 67, 72];

– автоморфно индуцированного HNN-расширения с циклическими связанными подгруппами [73].

Полученные результаты и некоторые технические приемы, наработанные при их доказательстве, позволили установить критерии аппроксимируемости корневыми классами для

– групп Баумслага–Солитэра [71];

– групп Артина и групп Коксетера с древесной структурой [72].

Подводя итог данному обзору и оценивая место и перспективы исследований аппроксимируемости свободных конструкций произвольными корневыми классами групп, можно сделать следующие выводы.

1. К настоящему времени все наиболее естественные ограничения, которые можно было бы наложить на объединенные или связанные подгруппы, по-видимому, уже рассмотрены. Поэтому, как правило, новые результаты о финитной аппроксимируемости свободных конструкций групп получаются двумя путями. Первый из них состоит в рассмотрении (относительно) простых конструкций (обобщенных свободных произведений и HNN-расширений), в состав которых входят новые, более сложно устроенные группы. Это направление исследований реализовано, например, в упомянутых выше работах [4–7, 9, 10]. Поскольку для вновь рассматриваемых групп условия аппроксимируемости произвольным корневым классом, скорее всего, неизвестны, рассматривать аппроксимируемость такими классами вместо финитной в данном случае невозможно.

Второй путь — прямо противоположный: сложные конструкции строятся из простых, иногда совсем примитивных групп. Это направление тоже является весьма перспективным, поскольку ряд известных групп получается именно таким способом. В качестве примеров можно привести обобщенные группы Баумслага–Солитэра (представляющие собой фундаментальные группы конечных графов групп с бесконечными циклическими вершинными и реберными группами), тубулярные группы (отличающиеся от обобщенных групп Баумслага–Солитэра тем, что вершинные группы являются свободными абелевыми ранга 2), группы Артина с древесной структурой (древесные произведения с циклическими реберными подгруппами, в которых каждая вершинная группа — это либо обобщенное свободное произведение двух бесконечных циклических групп, либо HNN-расширение бесконечной циклической группы). Для таких групп изучение аппроксимируемости сразу произвольными корневыми классами групп выглядит более реалистично и позволяет получить значительно больше результатов ценой незначительных дополнительных усилий.

2. Исследования аппроксимируемости свободных конструкций нильпотентными, разрешимыми, свободными и конечными p-группами находятся в состоянии стагнации. В первых трех случаях это связано с отсутствием подходящих методов, в четвертом — с большими техническими трудностями, возникающими при использовании фильтрационной методики в сочетании с критериями из [46, 121] (особенно при рассмотрении древесных произведений и фундаментальных групп графов групп). Изучение аппроксимируемости произвольными корневыми классами уже сейчас оживляет это направление, причем с технической точки зрения предлагаемый подход оказывается проще, чем упомянутые выше традиционные исследования аппроксимируемости конечными p-группами.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

Одним из основных методов исследования аппроксимационных свойств свободных конструкций групп служит фильтрационный подход Г. Баумслага, долгое время применявшийся для изучения аппроксимируемости указанных конструкций классом всех конечных групп и некоторыми его подклассами. Наиболее важным результатом настоящей диссертации является выполненное в главе 2 обобщение данного метода на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса и фундаментальной группы любого графа групп. Как отмечено ниже, предложенное обобщение упрощает изучение аппроксимируемости свободных конструкций групп и позволяет доказывать сразу несколько утверждений вместо одного. Подтверждением этому служат полученные в главах 3–5 результаты об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп различных графов групп с центральными реберными подгруппами. Для их доказательства используются еще два вспомогательных метода, также входящие в число основных результатов диссертации. Первый из них опирается на свойства определяемых в главе 3 конструкций обобщенного прямого и обобщенного свободного произведений, ассоциированных с графом групп, и применяется для построения гомоморфизма фундаментальной группы графа групп на группу из аппроксимирующего класса, действующего инъективно на всех вершинных группах (отыскание таких гомоморфизмов является одной из наиболее сложных задач, возникающих при использовании фильтрационного подхода). Второй метод служит обобщением на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп, замкнутого относительно взятия фактор-групп, метода спуска и подъема совместимых подгрупп, изначально предложенного Д. И. Молдаванским для исследования аппроксимируемости HNN-расширений с центральными связанными подгруппами классами всех конечных и конечных p-групп. В главе 4 он применяется для сведéния задачи изучения аппроксимируемости рассматриваемых HNN-расширений к аналогичной задаче для расщепляемых расширений групп, являющейся в общем случае более простой.

С помощью перечисленных методов в диссертации получены

– критерий аппроксимируемости произвольным корневым классом фундаментальной группы графа изоморфных групп (теорема 2.4.3);

– достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп с центральными реберными подгруппами при условии, что указанные подгруппы в каждой вершинной группе пересекаются тривиально или граф содержит не более одного простого цикла (теоремы 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5, 3.3.6);

– достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами (теоремы 4.1.1–4.1.3);

– критерий аппроксимируемости корневым классом групп, замкнутым относительно взятия фактор-групп, HNN-расширения с центральными циклическими связанными подгруппами (теоремы 4.1.6–4.1.9);

– критерий аппроксимируемости обобщенной группы Баумслага–Солитэра корневым классом, состоящим из периодических групп, и достаточное условие аппроксимируемости той же группы корневым классом, содержащим непериодические группы (теоремы 5.2.2, 5.2.3).

К числу основных результатов диссертации относятся также

– равносильные определения и некоторые другие свойства корневых классов групп (§ 1.4);

– описания подгрупп, отделимых корневым классом, состоящим из периодических групп, в абелевых, нильпотентных и разрешимых группах определенного вида, а также в группах, аппроксимируемых нильпотентными и разрешимыми группами такого же вида (§§ 6.2, 6.3);

– критерии аппроксимируемости относительно сопряженности корневым классом $\mathcal{C}$, состоящим из конечных групп, расширения свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы и фундаментальной группы конечного графа групп с конечными реберными подгруппами (теоремы 7.1.1, 7.1.3);

– критерии аппроксимируемости обобщенных групп Баумслага–Солитэра классами всех нильпотентных групп, нильпотентных групп без кручения и свободных групп (теоремы 8.1.3, 8.1.4).

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Существенной ее особенностью является изучение аппроксимируемости не каким-то одним конкретным классом групп, а сразу целым семейством классов, удовлетворяющих определенному набору условий. Понятно, что данный подход позволяет сэкономить усилия, доказывая «за раз» несколько утверждений вместо одного. Более важно, однако, то, что он обладает следующими двумя преимуществами.

1. Благодаря фиксированному набору условий, предъявляемых к аппроксимирующим классам групп, получаемые результаты хорошо стыкуются друг с другом и позволяют постепенно продвигаться в направлении усложнения рассматриваемых конструкций и ослабления ограничений, накладываемых на группы, из которых они построены. Если в начале исследований аппроксимируемости произвольными корневыми классами речь шла в основном об уточнении и обобщении известных фактов, то теперь накопленный багаж позволяет доказывать, в том числе, и новые утверждения о финитной аппроксимируемости групп.

2. Наличие для одной и той же группы сведений о ее аппроксимируемости классами групп из достаточно представительного семейства дает возможность «зажать» очередной аппроксимирующий класс между двумя другими, для которых необходимые и/или достаточные условия аппроксимируемости уже известны. Это позволяет либо сразу получить результат об аппроксимируемости новым классом, либо очень существенно сократить число рассматриваемых случаев.

Если сравнивать методы исследования аппроксимируемости произвольными корневыми классами с доказательствами известных утверждений об аппроксимируемости конкретными классами групп, то следует признать, что при изучении свойства финитной аппроксимируемости они не дают заметного ускорения или упрощения. Гораздо лучше обстоит дело с аппроксимируемостью конечными p-группами. Обычно при исследовании этого свойства применяют критерий Г. Хигмена [121] и другие аналогичные результаты, вызывающие значительные трудности технического характера в случае древесных произведений и более сложно устроенных фундаментальных групп графов групп. Для таких конструкций использование лишь свойств, которыми обладают все корневые классы, приводит не к уменьшению, а, напротив, к увеличению числа получающихся результатов за счет упрощения необходимых для их доказательства рассуждений. По похожим причинам еще большего продвижения удается достигнуть при изучении аппроксимируемости разрешимыми группами. Как уже было отмечено выше, несмотря на наличие отдельных утверждений, достаточно универсальных методов исследования указанного свойства применительно к свободным конструкциям групп не существует. По-видимому, это связано с тем, что наиболее известные характеристики разрешимых групп (такие, как наличие нормальных рядов с абелевыми факторами и т. п.) мало что дают при подобных исследованиях. Использование вместо них свойств, присущих всем корневым классам, оказывается более продуктивным и приводит к кратному увеличению числа результатов в данной области.

Настоящая диссертация развивает описанные выше идеи, распространяя методы исследования аппроксимируемости корневыми классами на фундаментальные группы произвольных графов групп. Экономия усилий, о которой шла речь выше, становится еще большей за счет использования введенного в главе 2 понятия допустимой системы совместимых подгрупп. Оно упрощает применение имеющихся результатов в случае изменения ограничений, которым должна удовлетворять свободная конструкция (подробнее об этом написано в § 2.1).

Новыми утверждениями о финитной аппроксимируемости групп служат полученные в главе 3 достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп с тривиально пересекающимися центральными реберными подгруппами. Эти же теоремы, а также ряд доказанных в главе 4 критериев аппроксимируемости HNN-расширений с центральными связанными подгруппами дают неизвестные ранее условия аппроксимируемости конечными p-группами, где p — простое число. Что же касается аппроксимируемости классом всех разрешимых групп и различными его подклассами, то здесь новые результаты доставляют практически все доказанные в диссертации утверждения об аппроксимируемости корневыми классами групп.

Упомянутый выше подход, состоящий в окружении аппроксимирующего класса двумя другими, применяется, во-первых, в § 6.4 для снятия с указанного класса требования замкнутости относительно взятия фактор-групп и, во-вторых, в главе 8 для получения критерия нильпотентной аппроксимируемости обобщенной группы Баумслага–Солитэра. Последний пример особенно важен, так как показывает возможный путь исследования нильпотентной аппроксимируемости свободных конструкций групп на основе известных утверждений об аппроксимируемости тех же конструкций корневыми классами групп.

Таким образом, в диссертации развиваются новые, более универсальные и в ряде случаев более продуктивные методы исследования аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. Получаемые с их помощью конкретные научные результаты могут найти свое применение в теории групп и связанных с ней разделах математики.

Описание и взаимосвязь глав диссертации

Первая из 8 глав диссертации является вводной, и характер ее содержимого существенным образом меняется от параграфа к параграфу. В § 1.1 приводятся определения и необходимые далее свойства конструкций свободного произведения групп с объединенной подгруппой и HNN-расширения. Все утверждения этого параграфа сформулированы без доказательств, поскольку два из них являются непосредственными следствиями теорем из [102] о строении подгрупп указанных конструкций, а остальные могут быть найдены практически в любой монографии по комбинаторной теории групп (см., например, [37, 51]).

Параграфы 1.2 и 1.3 посвящены фундаментальным группам графов групп и аппроксимационным свойствам соответственно. Содержащиеся в них утверждения, по-видимому, известны, но найти их опубликованными в точности в той формулировке, которая требуется для последующих рассуждений, может быть затруднительно. Поэтому большинство предложений в указанных параграфах даны с доказательствами. Следует также отметить, что введенные в § 1.3 и особенно в § 1.2 обозначения используются до конца работы.

Содержание § 1.4 относится к основным результатам диссертации. В нем указаны равносильные определения корневого класса и описаны некоторые семейства групп, заведомо принадлежащих заданному корневому классу. В конце § 1.4 сформулированы два соглашения относительно рассматриваемых корневых классов и графов групп, которые действуют во всей оставшейся части диссертации.

Основной целью главы 2 является распространение фильтрационного метода Г. Баумслага на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп $\mathcal{C}$ и доказательство двух условий общего характера, достаточных для аппроксимируемости таким классом фундаментальной группы $\mathfrak{G}$ произвольного графа групп. В настоящей диссертации используются два способа проверки $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$. Первый из них описывается в § 2.2 и состоит в отыскании гомоморфизма указанной группы на группу из класса $\mathcal{C}$, действующего инъективно на всех реберных подгруппах. Второй способ заключается в том, чтобы аппроксимировать группу $\mathfrak{G}$ не непосредственно $\mathcal{C}$-группами, а фундаментальными группами графов групп, $\mathcal{C}$-аппроксимируемость которых установлена первым способом. Именно такая двухступенчатая схема и составляет суть фильтрационного метода. Более формально она описана в § 2.1, а реализующее ее достаточное условие доказано в § 2.3.

Понятно, что первый способ применим лишь в случае, когда все реберные подгруппы группы $\mathfrak{G}$ принадлежат классу $\mathcal{C}$. Второй способ свободен от данного требования, но для его использования на граф групп и вершинные группы обычно приходится накладывать более жесткие ограничения. Иллюстрацией этому могут служить теоремы 3.3.1, 3.3.2 и 3.3.5, 3.3.6 из главы 3, первая пара которых получена первым способом, а вторая — вторым.

В §§ 2.5–2.7 исследуется вопрос о необходимости достаточных условий, доказанных в §§ 2.2 и 2.3. В § 2.4 второе из этих условий применяется для отыскания критерия аппроксимируемости корневыми классами фундаментальной группы графа изоморфных групп. Последняя конструкция достаточно искусственна, но нередко применяется для построения различных контрпримеров. В таком качестве она используется и в § 2.5.

Отметим, что даже если некая изучаемая группа конечно определена, ее строение может описываться при помощи фундаментальных групп бесконечных графов групп (например, нормальное замыкание базы HNN-расширения представляет собой древесное произведение бесконечного числа изоморфных копий базовой группы). Поэтому в главах 2 и 3 были предприняты усилия к тому, чтобы всюду, где это возможно, избежать требования конечности рассматриваемого графа, несмотря на определенное усложнение условий и доказательств ряда утверждений.

В главе 3 описанные выше результаты применяются для изучения аппроксимируемости корневым классом $\mathcal{C}$ фундаментальной группы $\mathfrak{G}$ графа групп с центральными реберными подгруппами. Для реализации первого из описанных выше способов доказательства $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ в § 3.1 вводится в рассмотрение конструкция обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп. В простейших случаях такое произведение является естественным гомоморфным образом группы $\mathfrak{G}$ и принадлежит классу $\mathcal{C}$, а отображающий на него группу $\mathfrak{G}$ гомоморфизм действует инъективно на всех реберных подгруппах, что позволяет сразу же применить достаточное условие из § 2.2. Эта идея допускает определенное развитие, но ее использование ограничивается условиями, при которых обобщенное прямое произведение существует (т. е., в частности, обладает свойством вложимости в него всех вершинных групп). Два таких условия указаны в § 3.2, и именно они определяют те требования, которым должен удовлетворять граф групп в остальной части главы 3.

Новые результаты об аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ сформулированы в § 3.3. Как уже было отмечено выше, теоремы 3.3.1 и 3.3.2 доказаны первым способом, который в данном случае опирается на свойства обобщенных прямых произведений групп. Теоремы 3.3.5 и 3.3.6 получаются вторым способом, а именно, путем совместного использования необходимых и достаточных условий из §§ 2.3, 2.7 и теорем 3.3.1, 3.3.2. В перечисленных утверждениях предполагается, что граф групп, задающий группу $\mathfrak{G}$, является деревом или в каждой его вершинной группе все реберные подгруппы порождают их прямое произведение (и, стало быть, попарно не пересекаются). Теоремы 3.3.1 и 3.3.2 допускают также ситуацию, когда граф имеет в точности один простой цикл, но в аппроксимирующий класс при этом обязательно должны входить непериодические группы.

Неисследованным в главе 3 остается случай, когда граф групп содержит циклы и не удовлетворяет свойству тривиальности пересечения реберных подгрупп. Фундаментальная группа $\mathfrak{G}$ простейшего графа групп указанного вида представляет собой HNN-расширение с центральными связанными подгруппами, и изучению аппроксимируемости таких HNN-расширений посвящена глава 4. Все основные результаты данной главы сформулированы в § 4.1 и образуют две группы. В первую из них входят теоремы 4.1.1–4.1.3, относящиеся к общему случаю. Вторую группу составляют теоремы 4.1.6–4.1.9, дающие в совокупности критерий аппроксимируемости HNN-расширения $\mathfrak{G}$ при условии, что связанные подгруппы являются циклическими. Методы доказательства утверждений из разных групп существенно отличаются. Хотя теоремы 4.1.6–4.1.9 относятся к более специальной ситуации, они выводятся напрямую из результатов §§ 2.3, 2.7 с использованием теоремы 3.3.1. Доказательства теорем 4.1.1–4.1.3 гораздо сложнее и осуществляются с помощью предложенного в [47, 48] метода спуска и подъема совместимых подгрупп, который в свою очередь опирается на фильтрационный метод и в настоящей диссертации распространен на случай аппроксимируемости произвольным корневым классом групп, замкнутым относительно взятия фактор-групп. Рассуждения используют также свойства некоторых обобщенных прямых произведений, рассматриваемых в § 4.2, и теорему 3.3.2.

Если потребовать, чтобы циклическими (точнее, бесконечными циклическими) были не одни лишь реберные, а и все вершинные группы, то получить законченные результаты об аппроксимируемости корневыми классами удается не только для HNN-расширений, но и для фундаментальных групп любых конечных графов групп. Как уже было отмечено выше, такие фундаментальные группы называют обобщенными группами Баумслага–Солитэра или GBS-группами. Их аппроксимируемость корневыми классами изучается в главе 5. Рассматриваемый случай оказывается настолько особенным, что в доказательствах не используются результаты предыдущих трех глав (за исключением теоремы 2.7.1). Вместо них применяются специфические свойства GBS-групп, бо́льшая часть которых описана в § 5.1 и в начале § 5.3.

В условиях ряда теорем из глав 2–4 фигурируют свойства отделимости подгруппы и регулярности группы по подгруппе. Глава 6 описывает некоторые случаи, в которых указанные свойства выполняются автоматически или могут быть относительно легко проверены. Известно много примеров ситуаций, когда отделимость подгруппы некоторым корневым классом групп $\mathcal{C}$, состоящим из периодических групп, оказывается равносильной ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированности, где $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ — множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$ (подгруппа Y $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе X, если для любых элемента $x \in X$ и простого числа $q \notin \mathfrak{P}(\mathcal{C})$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$). В частности, это верно для циклических подгрупп свободных групп, но данный результат, вообще говоря, нельзя распространить на произвольные конечно порожденные подгруппы; см. [17]. В главе 6 изучается вопрос о том, какие условия достаточно наложить на абелеву или нильпотентную группу для того, чтобы в ней для выбранного корневого класса $\mathcal{C}$, состоящего из периодических групп, равносильность $\mathcal{C}$-отделимости и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированности имела место для всех подгрупп. Ответом на данный вопрос служат понятия слабо $\mathcal{C}$-ограниченной абелевой и $\mathcal{C}$-ограниченной нильпотентной группы. Свойства таких групп, включая $\mathcal{C}$-регулярность по подгруппе, изучаются в §§ 6.1–6.3. Там же приводятся примеры, показывающие, что для разрешимых групп частичные аналоги полученных результатов имеют место только в случае, когда множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа. В § 6.4 с помощью свойств $\mathcal{C}$-ограниченных групп доказывается ряд следствий из теорем 3.3.5, 3.3.6, 4.1.1, 4.1.7 и 4.1.9.

В главах 1–6 речь идет исключительно об аппроксимируемости свободных конструкций групп корневыми классами относительно равенства. Последние две главы намечают два других возможных направления исследований: они посвящены свойствам нильпотентной аппроксимируемости и аппроксимируемости корневым классом групп относительно сопряженности. Основным результатом главы 7 является утверждение о том, что если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из конечных групп, то произвольное расширение свободной группы при помощи группы из класса $\mathcal{C}$ аппроксимируется этим классом относительно сопряженности. Данное утверждение открывает дорогу к изучению $\mathcal{C}$-аппроксимируемости относительно сопряженности свободных конструкций групп, и в качестве примера его применения доказана $\mathcal{C}$-аппроксимируемость относительно сопряженности фундаментальной группы конечного графа групп с конечными реберными подгруппами. Цель главы 8 состоит в том, чтобы показать (на примере обобщенных групп Баумслага–Солитэра), как имеющиеся результаты об аппроксимируемости корневыми классами групп можно использовать для изучения аппроксимируемости той же конструкции нильпотентными группами. В рассмотренном случае вопрос удается решить полностью, получив критерии аппроксимируемости GBS-группы классами всех нильпотентных групп и нильпотентных групп без кручения. Вполне ожидаемо, что доказательства обоих критериев весьма существенным образом опираются на утверждения из главы 5.

Степень достоверности и апробация результатов диссертации. Личный вклад автора

Все основные результаты диссертации содержатся в статьях [201–213], опубликованных в журналах, включенных в перечень ВАК. Их достоверность подтверждается подробными доказательствами, прошедшими проверку в том числе при рецензировании указанных работ. Статьи [201–205, 210–212] подготовлены автором лично. Из результатов работ [206–209, 213] в диссертацию включены лишь те, которые принадлежат автору, а именно

– критерий аппроксимируемости корневым классом групп, замкнутым относительно взятия фактор-групп, HNN-расширения с бесконечными циклическими связанными подгруппами, лежащими в центре базовой группы [206, теоремы 2–5];

– определения и свойства конструкций обобщенного прямого и обобщенного свободного произведений групп, ассоциированных с графом групп; общая идея их использования для изучения аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп [207, 208];

– ряд свойств корневых классов групп [209, § 5] и гомоморфизмов фундаментальных групп графов групп на группы из таких классов, действующих инъективно на всех вершинных группах [208, § 3], [213, теоремы 2, 3];

– критерий аппроксимируемости произвольным корневым классом фундаментальной группы графа изоморфных групп [213, теорема 4].

Результаты проведенных исследований были представлены на следующих международных и всероссийских конференциях:

– Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2013, 2015, 2016, 2017, 2018, 2020, 2021 гг.);

– Международной конференции, посвященной 75-летию профессора Д. И. Молдаванского (Иваново, 2015 г.);

– XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Саратов, 2016 г.);

– Всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов», посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета (Иваново, 2018 г.);

– XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2018 г.);

– XVI и XVII Международных конференциях «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, май и сентябрь 2019 г.);

– Международной конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 2019 г.);

– Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2019 г.);

– Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2021 г.);

– Международной алгебраической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А. И. Старостина (Екатеринбург, 2021 г.);

– Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 110-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Нальчик, 2022 г.);

– XIV Международной школе-конференции по теории групп, посвященной памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова (Брянск, 2022 г.);

– Второй конференции Математических центров России (Москва, 2022 г.).

Кроме того, результаты диссертации докладывались на семинаре «Алгебра и логика» (Новосибирск, 2022 г.) и на семинаре по теории групп Ивановского государственного университета (Иваново, 2013–2021 гг.).

Благодарности

Прежде всего, автор хотел бы выразить благодарность и признательность своему научному консультанту, профессору Д. И. Молдаванскому, бывшему также и руководителем его кандидатской диссертации. Проделанная Д. И. Молдаванским огромная методическая работа и организованный им спецсеминар позволили автору составить первое целостное представление об исследованиях аппроксимационных свойств групп и сделали путь, которым он шел в последующие годы, значительно более прямым и легким. Автор также считает нужным отметить, что продолжает неизменно следовать множеству полезных советов, полученных им от Д. И. Молдаванского по поводу написания статей. Помимо этого, автор хотел бы поблагодарить участников семинара по теории групп Ивановского государственного университета, в особенности профессоров Д. Н. Азарова, Д. И. Молдаванского и Н. И. Яцкина, за постоянный интерес к его докладам и плодотворное их обсуждение.

Используемые обозначения

Ниже перечислены только общеупотребительные символы и выражения, используемые в тексте диссертации без специальных пояснений. Некоторые более специфические обозначения, вводимые по мере изложения, могут быть найдены в предметном указателе.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$	кольцо целых чисел и кольцо вычетов по модулю n; если речь идет о группе, то подразумевается аддитивная группа кольца
$\mathbb{Q}$	поле рациональных чисел
$\lvert x\rvert$, $\operatorname{sign} x$	модуль и знак числа x
$x \mid y$	число x делит число y
(x, y)	наибольший общий делитель чисел x и y
$\operatorname{card} X$	мощность множества X
$\ker \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$	ядро и образ отображения φ
$\varphi\rvert_X$	ограничение отображения φ на множество X
id_X	тождественное отображение множества X
$\operatorname{sgp}\{X\}$	подгруппа, порожденная множеством X
$\langle x\rangle$	циклическая подгруппа, порожденная элементом x
$\widehat{x}$	внутренний автоморфизм, производимый элементом x
$\operatorname{Aut} X$	группа автоморфизмов группы X
$X \times Y$	прямое произведение групп (или множеств) X и Y
$[x, y]$	коммутатор $x^{-1}y^{-1}xy$ элементов x и y
$[X, Y]$	взаимный коммутант подгрупп X и Y, т. е. подгруппа, порожденная множеством $\big\{[x, y] \mid x \in X, y \in Y\big\}$
$[X : Y]$	индекс подгруппы Y в группе X
$\langle X; Y\rangle$	группа, заданная множеством образующих символов X и множеством определяющих соотношений Y
$x \sim_Z y$	элементы x и y сопряжены при помощи элемента из подгруппы Z

Глава 1. Основные понятия

§ 1.1. Свободные произведения с объединенными подгруппами и HNN-расширения

Почти все теоретико-групповые конструкции, рассматриваемые в настоящей диссертации, могут быть описаны как фундаментальные группы некоторых графов групп. Однако, свойства фундаментальной группы произвольного графа очень часто оказываются непосредственными следствиями аналогичных свойств частных случаев этой конструкции: обобщенных свободных произведений и HNN-расширений. Поэтому в данной главе конструкции описываются в соответствии с историческим порядком их появления: сначала, в § 1.1, свободные произведения с объединенной подгруппой и HNN-расширения с одной или несколькими проходными буквами, а уже потом, в § 1.2, древесные произведения и фундаментальные группы произвольных графов групп.

Бóльшая часть утверждений, сформулированных в настоящем параграфе, хорошо известна. Более подробное обсуждение данных вопросов, включая некоторые доказательства, можно найти в книгах [37, 39, 51, 62].

Свободным произведением двух групп A *и* B *с подгруппами* $H \leqslant A$ *и* $K \leqslant B$, *объединенными относительно изоморфизма* $\varphi\colon H \to K$, (или просто *обобщенным свободным произведением групп* A *и* B) называется группа

$$P = \big\langle A * B;\ H = K,\ \varphi \big\rangle,$$

образующими которой являются образующие групп A и B, а определяющими соотношениями — соотношения групп A и B, а также всевозможные соотношения вида $h = h\varphi$, где h — слово от образующих группы A, определяющее элемент из подгруппы H, $h\varphi$ — слово от образующих группы B, определяющее образ данного элемента относительно изоморфизма φ. Группы A и B называются *свободными множителями* группы P, подгруппы H и K — *объединенными подгруппами.*

Известно, что тождественные отображения образующих групп A и B в группу P определяют инъективные гомоморфизмы и потому свободные множители можно считать подгруппами обобщенного свободного произведения P. Легко видеть, что каждый элемент $x \in P$ может быть представлен в виде произведения $x = x_1x_2\dots x_n$, где $n \geqslant 1$, $x_i \in A \cup B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и, если $n > 1$, то для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ элементы x_i и x_{i+1} лежат в разных свободных множителях и, следовательно, не содержатся в объединенных подгруппах. Запись такого вида называется *несократимой*, а элементы x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — *слогами* данной записи. Одно из основных свойств обобщенного свободного произведения двух групп состоит в том, что любой его элемент, имеющий несократимую запись неединичной длины, отличен от 1. Пользуясь этим фактом, можно показать, в частности, что хотя несократимая запись заданного элемента $x \in P$ определена неоднозначно, количество слогов во всех таких записях одинаково. Оно называется *длиной несократимой записи* элемента x или просто *длиной элемента* x.

Говорят, что элемент $x \in P$ *циклически несократим*, если его длина четна или равна 1. Легко видеть, что каждый элемент группы P сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом, поэтому следующее утверждение дает критерий сопряженности двух элементов.

Предложение 1.1.1. *Пусть x_1 и x_2 — два циклически несократимых элемента группы P. Если x_1 и x_2 сопряжены в P, то их дли́ны равны одному и тому же числу n и возможны два случая*:

1) $n = 1$ *и существуют элементы* $h_1, h_2, \ldots, h_k \in H$ $(k \geqslant 0)$ *такие, что соседние члены последовательности* $x_1, h_1, h_2, \ldots, h_k, x_2$ *сопряжены в A или в B*;

2) $n > 1$ *и x_2 можно получить из x_1, циклически переставляя слоги несократимой записи элемента x_1 и сопрягая результат перестановки некоторым элементом $h \in H$.*

Очевидно, что если элемент $x \in P$ обладает циклически несократимой записью длины $n > 1$, то для каждого $k > 1$ элемент x^k также циклически несократим, имеет длину nk и, в частности, отличен от 1. Отсюда вытекает

Предложение 1.1.2. *Всякий элемент конечного порядка группы P сопряжен с некоторым элементом одного из свободных множителей.*

Обобщением конструкции свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами служит *свободное произведение произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой*, определяемое следующим образом.

Пусть $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — некоторое семейство групп, и пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ в группе A_λ фиксирована подгруппа H_λ. Пусть также для любых $\lambda, \mu \in \Lambda$ существует изоморфизм $\varphi_{\lambda\mu}\colon H_\lambda \to H_\mu$, причем для произвольных $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ выполнены соотношения

$$\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\mu\nu} = \varphi_{\lambda\nu}, \quad \varphi_{\lambda\mu}^{-1} = \varphi_{\mu\lambda}, \quad \varphi_{\lambda\lambda} = \mathrm{id}_{H_\lambda}.$$

Тогда определена группа

$$\mathbb{P} = \big\langle A_\lambda \ (\lambda \in \Lambda);\ H_\lambda = H_\mu,\ \varphi_{\lambda\mu} \ (\lambda, \mu \in \Lambda)\big\rangle,$$

порождаемая объединением (попарно непересекающихся) систем образующих всех групп A_λ и определяемая соотношениями групп A_λ и всевозможными соотношениями вида $h = h\varphi_{\lambda\mu}$, где $\lambda, \mu \in \Lambda$, $h \in H_\lambda$. Можно показать, что все группы A_λ вкладываются в группу $\mathbb{P}$ посредством тождественных отображений их образующих. Подгруппы H_λ при этом оказываются совпадающими и потому построенную таким образом группу $\mathbb{P}$ называют *свободным произведением групп A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ с одной объеди-*

ненной подгруппой. Первоначально данная конструкция возникла как частный случай обобщенного свободного произведения семейства групп, введенного Х. Нейманн (см. § 3.1). Однако, сейчас ее удобнее рассматривать как древесное произведение, соответствующее графу-звезде; подробнее об этом написано в § 1.2.

Если $H_\lambda = 1$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то группа $\mathbb{P}$ называется (обычным) *свободным произведением семейства групп* $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Обычное свободное произведение устроено проще, чем свободное произведение с объединенной подгруппой, поэтому для него нередко удается получить более сильные и законченные результаты.

HNN-расширением группы B с подгруппами $H \leqslant B$ и $K \leqslant B$, связанными при помощи изоморфизма $\varphi\colon H \to K$, называется группа

$$E = \big\langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\big\rangle,$$

образующими которой являются образующие группы B и символ t, а определяющими соотношениями — определяющие соотношения группы B, а также всевозможные соотношения вида $t^{-1}ht = h\varphi$, где h и $h\varphi$ — слова от образующих группы B, определяющие элемент из подгруппы H и его образ относительно изоморфизма φ. Группа B называется *базовой группой*, подгруппы H и K — *связанными подгруппами*, а символ t — *проходной буквой* HNN-расширения E. Как и в случае обобщенного свободного произведения, группа B вкладывается в HNN-расширение E посредством тождественного отображения образующих, что позволяет считать ее подгруппой группы E.

Нетрудно показать, что каждый элемент $x \in E$ может быть записан в виде

$$x = b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \ldots b_{n-1} t^{\varepsilon_n} b_n,$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_n \in B$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ и для всякого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняются следующие условия:

1) если $-\varepsilon_i = 1 = \varepsilon_{i+1}$, то $b_i \notin H$;

2) если $\varepsilon_i = 1 = -\varepsilon_{i+1}$, то $b_i \notin K$.

Любая запись такого вида называется *приведенной*. *Лемма Бриттона* [100] утверждает, что всякий элемент HNN-расширения E, обладающий приведенной записью ненулевой длины, отличен от 1. Как и несократимая запись элемента обобщенного свободного произведения, приведенная запись определена неоднозначно. Однако, в силу леммы Бриттона количество вхождений в нее букв t и t^{-1} является инвариантом, оно называется *длиной* этой приведенной записи или *длиной элемента* группы E.

Говорят, что элемент $x \in E$ с приведенной записью

$$b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \ldots b_{n-1} t^{\varepsilon_n} \quad (b_n = 1)$$

циклически приведен, если все циклические перестановки последовательности

$$b_0,\ t^{\varepsilon_1},\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-1},\ t^{\varepsilon_n}$$

приведены. Легко видеть, что любой элемент $x \in E$ сопряжен с некоторым циклически приведенным элементом. Критерий сопряженности двух элементов HNN-расширения известен как *лемма Коллинза* [103].

Предложение 1.1.3. (Лемма Коллинза) *Пусть x_1 и x_2 — два циклически приведенных элемента группы E. Если x_1 и x_2 сопряжены в E, то их длины равны одному и тому же числу n и возможны два случая*:

1) $n = 0$ и существуют элементы $b_1, b_2, \ldots, b_k \in H \cup K$ $(k \geqslant 0)$ такие, что соседние члены последовательности $x_1, b_1, b_2, \ldots, b_k, x_2$ сопряжены при помощи элемента из множества $B \cup \{t, t^{-1}\}$;

2) $n > 0$ и x_2 можно получить из x_1, циклически переставляя сомножители приведенной записи элемента x_1 и сопрягая результат перестановки некоторым элементом $b \in H \cup K$.

Как и в случае свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, имеет место

Предложение 1.1.4. *Всякий элемент конечного порядка группы E сопряжен с некоторым элементом базовой группы.*

Помимо HNN-расширения с одной проходной буквой рассматривают также HNN-расширение с произвольным семейством проходных букв. Определяется эта конструкция следующим образом.

Пусть B — группа, Λ — некоторое множество и $\{H_\lambda, H_{-\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ — семейство подгрупп группы B такое, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует изоморфизм $\varphi_\lambda\colon H_\lambda \to H_{-\lambda}$. Тогда *HNN-расширением группы B с семейством проходных букв* $\{t_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ называется группа

$$\mathbb{E} = \big\langle B, t_\lambda;\ t_\lambda^{-1} H_\lambda t_\lambda = H_{-\lambda},\ \varphi_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)\big\rangle,$$

образующими которой являются образующие группы B и символы t_λ $(\lambda \in \Lambda)$, а определяющими соотношениями — определяющие соотношения группы B, а также всевозможные соотношения вида $t_\lambda^{-1} h t_\lambda = h\varphi_\lambda$, где h и $h\varphi_\lambda$ — слова от образующих группы B, определяющие элемент из подгруппы H_λ и его образ относительно изоморфизма φ_λ.

Запись элемента $x \in \mathbb{E}$ в виде

$$x = b_0 t_{\lambda_1}^{\varepsilon_1} b_1 \ldots b_{n-1} t_{\lambda_n}^{\varepsilon_n} b_n,$$

где

$$b_0, b_1, \ldots, b_n \in B, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda, \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\},$$

называется *приведенной*, если для всякого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ такого, что $\lambda_i = \lambda_{i+1}$, выполняются следующие условия:

1) если $-\varepsilon_i = 1 = \varepsilon_{i+1}$, то $b_i \notin H_{\lambda_i}$;

2) если $\varepsilon_i = 1 = -\varepsilon_{i+1}$, то $b_i \notin H_{-\lambda_i}$.

Группа $\mathbb{E}$ может изучаться как с помощью свойств конструкции HNN-расширения с одной проходной буквой, так и путем ее представления в виде свободного произведения семейства групп

$$\mathbb{E}_\lambda = \big\langle B, t_\lambda;\ t_\lambda^{-1} H_\lambda t_\lambda = H_{-\lambda},\ \varphi_\lambda\big\rangle \quad (\lambda \in \Lambda)$$

с одной объединенной подгруппой B (все необходимые для построения этого произведения изоморфизмы $\varphi_{\lambda\mu}\colon B \to B$ являются тождественными отображениями).

Описание подгрупп обобщенных свободных произведений двух групп и HNN-расширений было получено в [126, 127] и позднее уточнено в [102]. Из результатов последней статьи вытекают следующие два утверждения.

Предложение 1.1.5. *Пусть*

$$P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$$

и N — нормальная подгруппа группы P, тривиально пересекающаяся с объединенными подгруппами H и K. Тогда подгруппа N раскладывается в (обычное) свободное произведение некоторой свободной подгруппы, подгрупп $N \cap A$ и $N \cap B$, а также некоторых подгрупп вида $x^{-1}(N \cap A)x$, $y^{-1}(N \cap B)y$ (где $x, y \in P \setminus \{1\}$).

Предложение 1.1.6. *Пусть*

$$\mathbb{E} = \langle B, t_\lambda;\ t_\lambda^{-1} H_\lambda t_\lambda = H_{-\lambda},\ \varphi_\lambda\ (\lambda \in \Lambda) \rangle$$

и N — нормальная подгруппа группы $\mathbb{E}$, тривиально пересекающаяся со всеми связанными подгруппами $H_{\varepsilon\lambda}$ ($\lambda \in \Lambda$, $\varepsilon = \pm 1$). Тогда подгруппа N раскладывается в (обычное) свободное произведение некоторой свободной подгруппы, подгруппы $N \cap B$, а также некоторых подгрупп вида $x^{-1}(N \cap B)x$ (где $x \in \mathbb{E} \setminus \{1\}$).

Описание подгрупп обычного свободного произведения семейства групп получено в [145] и выглядит следующим образом.

Предложение 1.1.7. *Пусть $\mathbb{P}$ — свободное произведение групп A_λ ($\lambda \in \Lambda$), N — произвольная подгруппа группы $\mathbb{P}$. Тогда подгруппа N раскладывается в обычное свободное произведение некоторой свободной группы и групп, каждая из которых изоморфна подгруппе $x^{-1}Nx \cap A_\lambda$ для некоторых $x \in \mathbb{P}$, $\lambda \in \Lambda$.*

§ 1.2. Фундаментальные группы графов групп

Все вводимые в этом параграфе обозначения будут использоваться до конца диссертации, причем, как правило, без специальных пояснений.

Пусть Γ — непустой ориентированный граф с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$ (допускаются петли и кратные ребра). Если $e \in \mathcal{E}$, то через $e(1)$ и $e(-1)$ будем обозначать вершины графа Γ, являющиеся концами ребра e.

Сразу же нужно отметить, что ориентация ребер графа Γ требуется лишь для задания представления определяемой ниже фундаментальной группы. Во всех остальных случаях (когда речь идет о путях, циклах, компонентах связности, остовных деревьях и лесах) предполагается, что мы «забываем» о направлениях ребер на время поиска требуемого подграфа или проверки соответствующих условий. Например, приводимая далее фраза «пусть Φ — некоторый остовный лес в графе Γ» означает, что мы удалили из графа Γ информацию об ориентации ребер, затем нашли остовный лес в получившемся неориентированном графе и после этого восстановили направления ребер леса Φ так, что они получили в точности ту же ориентацию, какую имели в графе Γ.

Зададим над Γ структуру графа групп, сопоставив каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ некоторую группу G_v, а каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — группу H_e и инъективные гомоморфизмы

$$\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}, \quad \varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}.$$

В результате получим *граф групп*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big).$$

Будем называть группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ и H_e $(e \in \mathcal{E})$ *вершинными* и *реберными группами* соответственно, подгруппы $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$ — *реберными подгруппами*. Последние для краткости будем обозначать через H_{+e} и H_{-e}. Отметим, что в графе групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ ребру e сопоставлены два, вообще говоря, различных гомоморфизма φ_{+e}, φ_{-e} даже в том случае, когда e является петлей, т. е. $e(1) = e(-1)$.

Всюду далее, если Γ' — непустой подграф графа Γ, через $\mathcal{G}(\Gamma')$ будем обозначать граф групп, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы и гомоморфизмы, что и в графе $\mathcal{G}(\Gamma)$.

Пусть Φ — некоторый остовный лес в графе Γ, $\mathcal{E}_\Phi$ — множество ребер графа Γ, входящих в лес Φ. *Фундаментальной группой* графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ называется группа

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) = \big\langle & G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ t_e\ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\Phi); \\ & h\varphi_{+e} = h\varphi_{-e}\ (e \in \mathcal{E}_\Phi,\ h \in H_e),\ t_e^{-1}h\varphi_{+e}t_e = h\varphi_{-e}\ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\Phi,\ h \in H_e)\big\rangle,\end{aligned}$$

образующими которой служат образующие групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ и символы t_e $(e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\Phi)$, а определяющими соотношениями — соотношения групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ и всевозможные соотношения вида

$$h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e}\ (e \in \mathcal{E}_\Phi,\ h_e \in H_e),$$
$$t_e^{-1}(h_e\varphi_{+e})t_e = h_e\varphi_{-e}\ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\Phi,\ h_e \in H_e),$$

где $h\varphi_{\varepsilon e}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ — слово в образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$, задающее образ элемента h относительно гомоморфизма $\varphi_{\varepsilon e}$ [179, § 5.1]. Если граф Γ является деревом, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ называется *древесным произведением* групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ [126].

Очевидно, что представление группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ зависит от выбора остовного леса Φ. Известно [179, § 5.1], что все группы с представлениями описанного выше вида, соответствующими различным остовным лесам графа Γ, изоморфны, и это позволяет говорить о фундаментальной группе графа групп без упоминания конкретного остовного леса. Тем не менее, используя обозначение $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, мы всегда будем неявно предполагать, что некоторый остовный лес Φ в графе Γ, определяющий представление этой группы, выбран и зафиксирован. Иногда, чтобы уточнить, какой именно лес имеется в виду, будем писать $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \Phi)$ вместо $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.

Заметим, что все конструкции из § 1.1 являются частными случаями фундаментальной группы графа групп. Так, если граф Γ состоит из двух вершин и соединяющего их ребра e, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой свободное произведение групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Если Γ имеет только одну вершину v и хотя бы одну петлю, то $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ — HNN-расширение группы G_v с множеством проходных букв $\{t_e \mid e \in \mathcal{E}\}$. Если $\mathcal{E} = \varnothing$, то $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ — (обычное) свободное произведение групп G_v ($v \in \mathcal{V}$). Наконец, нетрудно показать, что свободное произведение групп G_λ ($\lambda \in \Lambda$) с одной объединенной подгруппой H изоморфно древесному произведению, соответствующему графу-звезде, листьям которого сопоставлены группы G_λ ($\lambda \in \Lambda$), а центральной вершине и ребрам — группа H, отображение $\mathrm{id}|_H$ и вложения $H \to G_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$).

Известно, что для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ тождественное отображение образующих группы G_v в группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ определяет инъективный гомоморфизм [179, § 5.2] и, следовательно, группу G_v можно считать подгруппой группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Обобщением данного утверждения является

Предложение 1.2.1. *Пусть $\mathcal{T}$ — непустой связный подграф леса Φ и Γ' — подграф графа Γ, для которого $\mathcal{T}$ является остовным деревом. Тогда тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T})$ в группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \Phi)$ определяет инъективный гомоморфизм.*

Доказательство. Пусть граф $\overline{\Gamma}$ получается из Γ путем стягивания подграфа Γ' в точку, и пусть u и $\overline{\Phi}$ — образы подграфа Γ' и леса Φ в графе $\overline{\Gamma}$. Из равенства $\mathcal{T} = \Phi \cap \Gamma'$ легко следует, что $\overline{\Phi}$ — остовный лес графа $\overline{\Gamma}$. Сопоставим вершине u группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T})$, остальным вершинам и ребрам графа $\overline{\Gamma}$ — те же группы, что и в графе групп $\mathcal{G}(\Gamma)$. Если ребро e графа $\overline{\Gamma}$ и число $\varepsilon = \pm 1$ таковы, что $e(\varepsilon) = u$, поставим в соответствие паре (e, ε) гомоморфизм $\psi_{\varepsilon e} = \varphi_{\varepsilon e} \iota_{e(\varepsilon)}$, где $\iota_{e(\varepsilon)} \colon G_{e(\varepsilon)} \to \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T})$ — вложение, определяемое тождественным отображением образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$. Всем остальным парам (e, ε) сопоставим те же гомоморфизмы, что и в графе групп $\mathcal{G}(\Gamma)$. Обозначим полученный в результате граф групп через $\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma})$.

Непосредственно проверяется, что представление группы $\pi_1(\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma}), \overline{\Phi})$ идентично представлению группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \Phi)$. Поскольку вершинная группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T})$ вкладывается в группу $\pi_1(\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma}), \overline{\Phi})$ посредством тождественного отображения образующих, отсюда вытекает требуемый результат. □

Еще одно вложение описывает

Предложение 1.2.2. *Для любого $e \in \mathcal{E}$ группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ содержит подгруппу, изоморфную свободному произведению P групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с подгруппами H_{+e} и H_{-e}, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e} \colon H_{+e} \to H_{-e}$.*

Доказательство. Если ребро e не является петлей, то оно принадлежит некоторому остовному лесу графа Γ и требуемое утверждение вытекает из предложения 1.2.1. Если e — петля, то согласно тому же предложению 1.2.1 группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ содержит подгруппу, изоморфную HNN-расширению E группы $G_{e(1)} = G_{e(-1)}$ с подгруппами H_{+e} и H_{-e}, связанными посредством изоморфизма $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e} \colon H_{+e} \to H_{-e}$.

Рассмотрим отображение σ порождающих группы P в группу E, действующее на образующих группы $G_{e(1)}$ по правилу $x \mapsto t_e^{-1} x t_e$, а на образующих группы $G_{e(-1)}$ — по правилу $x \mapsto x$. Очевидно, что, будучи продолженным до отображения слов, σ переводит все определяющие соотношения группы P в равенства, верные в группе E, и потому задает гомоморфизм. Легко видеть также, что σ действует инъективно на группах $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ и ставит в соответствие любому элементу группы P, имеющему несократимую запись неединичной длины, элемент группы E, обладающий неприводимой записью ненулевой длины. Таким образом, гомоморфизм σ инъективен и, следовательно, обобщенное свободное произведение P вкладывается в группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. $\square$

Легко видеть, что если Γ_i $(i \in \mathcal{I})$ — все компоненты связности графа Γ, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой (обычное) свободное произведение групп $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_i))$ $(i \in \mathcal{I})$, а каждая группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_i))$ в свою очередь является HNN-расширением древесного произведения $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}_i))$, где $\mathcal{T}_i$ — некоторое остовное дерево графа Γ_i. Таким образом, некоторые свойства группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ могут быть выведены из свойств свободных конструкций, описанных в § 1.1. Примером этому служит

Предложение 1.2.3. *Всякий элемент конечного порядка группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ сопряжен с элементом одной из вершинных групп.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что граф Γ можно считать связным. Если это не так, добавим к нему недостающие ребра и сопоставим им в графе групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ единичные группы. Понятно, что группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ при этом не изменится.

Пусть $\mathcal{T}$ — остовное дерево в графе Γ, g — элемент конечного порядка группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и w — некоторое слово от образующих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$, задающее элемент g. Определим подмножества $\mathcal{V}_g \subseteq \mathcal{V}$ и $\mathcal{E}_g \subseteq \mathcal{E}$ следующим образом: $v \in \mathcal{V}_g$ тогда и только тогда, когда слово w содержит некоторый образующий группы G_v или обратный к нему; $e \in \mathcal{E}_g$ тогда и только тогда, когда в слово w входит символ t_e или t_e^{-1}. Пусть $\mathcal{T}'$ — конечное поддерево дерева $\mathcal{T}$, содержащее все вершины из множества

$$\mathcal{V}_g \cup \{e(\varepsilon) \mid e \in \mathcal{E}_g,\ \varepsilon = \pm 1\},$$

и Γ' — подграф графа Γ, получающийся путем добавления к дереву $\mathcal{T}'$ всех ребер из множества $\mathcal{E}_g$. Тогда согласно предложению 1.2.1 группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma')) = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T}')$ вкладывается в группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ посредством тождественного отображения образующих и $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'))$. Поскольку Γ' — конечный связный граф, из предложений 1.1.2 и 1.1.4 при помощи очевидной индукции выводится, что элемент g сопряжен в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'))$ с элементом некоторой вершинной группы G_v. Ввиду указанного выше вложения G_v является вершинной группой и в $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. $\square$

Еще одним примером использования результатов из § 1.1 является

Предложение 1.2.4. *Пусть Γ — связный граф с конечным числом вершин и N — нормальная подгруппа группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, тривиально пересекающаяся с каж-*

дой подгруппой $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$). Тогда подгруппа N раскладывается в (обычное) свободное произведение некоторой свободной подгруппы, подгрупп $N \cap G_v$ ($v \in \mathcal{V}$) и подгрупп вида $x^{-1}(N \cap G_v)x$ ($v \in \mathcal{V}$, $x \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$).

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ — остовное дерево в графе Γ, используемое для задания представления группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Предположим сначала, что $\Gamma = \mathcal{T}$ и воспользуемся индукцией по числу n ребер в графе Γ. Если $n = 0$, то рассматриваемый граф содержит только одну вершину и утверждение предложения тривиально.

Пусть $n > 0$, e — некоторое ребро графа Γ и Γ_1, Γ_{-1} — компоненты связности графа, получающегося из Γ путем удаления ребра e. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой свободное произведение групп $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_1))$ и $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_{-1}))$ с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Так как $N \cap H_{+e} = 1 = N \cap H_{-e}$, то в силу предложения 1.1.5 подгруппа N раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы, подгрупп $N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_1))$ и $N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_{-1}))$, а также некоторых подгрупп вида

$$x^{-1}\big(N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_1))\big)x, \quad y^{-1}\big(N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_{-1}))\big)y$$

(где $x, y \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$). Подгруппы $N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_1))$ и $N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_{-1}))$ тривиально пересекаются со всеми реберными подгруппами групп $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_1))$ и $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_{-1}))$ соответственно. Поэтому, применяя к указанным группам и подгруппам индуктивное предположение, получаем требуемый результат.

В общем случае группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой HNN-расширение группы $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ со связанными подгруппами $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) и согласно предложению 1.1.6 подгруппа N раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы, подгруппы $N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$, а также некоторых подгрупп вида $x^{-1}\big(N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))\big)x$ (где $x \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$). Остается заметить, что ввиду доказанного выше подгруппа $N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ имеет разложение требуемого вида. $\square$

Пусть для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ в группе G_v выбрана некоторая нормальная подгруппа R_v. Семейство $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ будем называть *системой совместимых нормальных подгрупп* в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, если для любого ребра $e \in \mathcal{E}$ справедливо равенство

$$(R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}.$$

Пусть

$$\overline{G}_v = G_v/R_v \quad (v \in \mathcal{V}), \quad R_e = (R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1} \quad (e \in \mathcal{E}),$$
$$\overline{H}_e = H_e/R_e \quad (e \in \mathcal{E}), \quad \overline{H}_{\varepsilon e} = H_{\varepsilon e}R_{e(\varepsilon)}/R_{e(\varepsilon)} \quad (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1).$$

Легко видеть, что отображение $\overline{\varphi}_{\varepsilon e}\colon \overline{H}_e \to \overline{G}_{e(\varepsilon)}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$), переводящее смежный класс hR_e ($h \in H_e$) в элемент $(h\varphi_{\varepsilon e})R_{e(\varepsilon)}$, корректно определено и является изоморфизмом группы $\overline{H}_e$ на подгруппу $\overline{H}_{\varepsilon e}$. Поэтому наряду с графом групп

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big)$$

определен граф групп

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ \overline{G}_v\ (v \in \mathcal{V}),\ \overline{H}_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \overline{\varphi}_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big).$$

Пусть Φ — некоторый остовный лес в графе Γ. Нетрудно показать, что с помощью преобразований Тице представление группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma),\Phi)$ может быть приведено к виду

$$\big\langle G_v\ (v\in\mathcal{V}),\ t_e\ (e\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_\Phi);\ r_v=1\ (v\in\mathcal{V},\ r_v\in R_v),$$
$$h\varphi_{+e}=h\varphi_{-e}\ (e\in\mathcal{E}_\Phi,\ h\in H_e),\ t_e^{-1}h\varphi_{+e}t_e=h\varphi_{-e}\ (e\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_\Phi,\ h\in H_e)\big\rangle.$$

Отсюда сразу же вытекает

Предложение 1.2.5. *Пусть $\mathcal{R}=\{R_v\mid v\in\mathcal{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и Φ — некоторый остовный лес в графе Γ. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Тождественное отображение образующих символов группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma),\Phi)$ в группу $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma),\Phi)$ определяет сюръективный гомоморфизм $\rho_{\mathcal{R}}$, ядро которого совпадает с нормальным замыканием в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma),\Phi)$ множества $\bigcup_{v\in\mathcal{V}}R_v$.*

2. *Для любой вершины $v\in\mathcal{V}$ гомоморфизм $\rho_{\mathcal{R}}$ продолжает естественный гомоморфизм $G_v\to G_v/R_v$ и потому $\ker\rho_{\mathcal{R}}\cap G_v=R_v$.*

Далее, когда речь будет идти о группе $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ или о гомоморфизме $\rho_{\mathcal{R}}$ для некоторой системы $\mathcal{R}$ совместимых нормальных подгрупп, мы всегда будем предполагать, что представление группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ соответствует тому же остовному лесу, что и представление группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.

Предложение 1.2.6. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если N — произвольная нормальная подгруппа группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, то семейство $\mathcal{R}=\{N\cap G_v\mid v\in\mathcal{V}\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ на группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/N$, действующий инъективно на всех вершинных группах $\overline{G}_v$ $(v\in\mathcal{V})$.*

2. *Если $\mathcal{R}=\{R_v\mid v\in\mathcal{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и σ — гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$, инъективный на всех вершинных группах $\overline{G}_v$ $(v\in\mathcal{V})$, то найдется нормальная подгруппа N группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ такая, что $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/N\cong\operatorname{Im}\sigma$ и $R_v=N\cap G_v$ для всех $v\in\mathcal{V}$.*

Доказательство. 1. Положим $R_v=N\cap G_v$ для всех $v\in\mathcal{V}$. Для каждого ребра $e\in\mathcal{E}$ равенства

$$(R_{e(1)}\cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1}=(N\cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1}=(N\cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}=(R_{e(-1)}\cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}$$

проверяются непосредственно. Поэтому $\mathcal{R}=\{R_v\mid v\in\mathcal{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Определим отображение

$$\sigma\colon\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))\to\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/N$$

по правилу: если $g\in\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, то $(g\rho_{\mathcal{R}})\sigma=g\eta$, где

$$\eta\colon\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\to\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/N\ —$$

естественный гомоморфизм. Из предложения 1.2.5 следует, что $\ker\rho_{\mathcal{R}}\leqslant N$ и потому данное определение корректно; гомоморфность и сюръективность σ очевидны. Остается заметить, что если $v \in \mathcal{V}$ и $g \in G_v \setminus R_v$, то из равенства $R_v = N \cap G_v$ вытекают соотношения $g \notin N$ и $(g\rho_{\mathcal{R}})\sigma = g\eta \neq 1$, т. е. гомоморфизм σ действует инъективно на вершинной группе G_v/R_v.

2. Пусть $N_{\mathcal{R}} = \ker\sigma$ и N — прообраз подгруппы $N_{\mathcal{R}}$ относительно гомоморфизма $\rho_{\mathcal{R}}$. Тогда $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/N \cong \operatorname{Im}\sigma$ и из равенств $N_{\mathcal{R}} \cap G_v/R_v = 1$ $(v \in \mathcal{V})$ следует, что $N \cap G_v = R_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Таким образом, подгруппа N является искомой. □

§ 1.3. Аппроксимационные свойства

Как уже было отмечено во введении, в самом общем виде понятие аппроксимируемости группы может быть сформулировано следующим образом (см. [33, § 4]). Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп, X — группа и θ — отношение между элементами и/или множествами элементов, определенное на группе X и всех ее гомоморфных образах. Группа X называется *аппроксимируемой классом $\mathcal{C}$ относительно отношения θ*, если для любых элементов и множеств элементов группы X, не состоящих в отношении θ, найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ (*$\mathcal{C}$-группу*) такой, что образы относительно σ указанных элементов и множеств по-прежнему не состоят в отношении θ.

В настоящей работе исследуется аппроксимируемость относительно отношений равенства элемента единице, сопряженности двух элементов и вхождения элемента в подгруппу. Первую из них принято называть просто *аппроксимируемостью*, опуская слова об отношении, вторую — *аппроксимируемостью относительно сопряженности*, третью — *отделимостью подгрупп.* Для обозначения аппроксимируемости и отделимости классом $\mathcal{C}$ будем использовать также термины «*$\mathcal{C}$-аппроксимируемость*» и «*$\mathcal{C}$-отделимость*» соответственно.

Всюду далее, если $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа, то через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех таких нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$. Подгруппы семейства $\mathcal{C}^*(X)$ представляют собой ядра всевозможных гомоморфизмов группы X на группы из класса $\mathcal{C}$. Поэтому группа X аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно отношения θ тогда и только тогда, когда для любых элементов и множеств элементов данной группы, не состоящих в отношении θ, существует подгруппа из семейства $\mathcal{C}^*(X)$, по модулю которой указанные элементы и множества по-прежнему не состоят в отношении θ. В частности, $\mathcal{C}$-аппроксимируемость (относительно равенства) группы X равносильна соотношению

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} N \;=\; 1,$$

а $\mathcal{C}$-отделимость ее подгруппы Y — соотношению

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN \;=\; Y.$$

Перечисленные факты, а также почти очевидные утверждения, собранные в предложении 1.3.1, далее будут использоваться весьма часто, причем без специальных оговорок.

Предложение 1.3.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Любая подгруппа $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группы в свою очередь является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группой.*

2. *Если X — некоторая группа, Y, Z — ее подгруппы и $Y \in \mathcal{C}^*(X)$, то $Y \cap Z \in \mathcal{C}^*(Z)$. В частности, если $Y \leqslant Z$, то $Y \in \mathcal{C}^*(Z)$.*

Из предложения 1.3.1 следует, в частности, что, если класс групп $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то аппроксимируемость им фундаментальной группы графа групп имеет смысл изучать лишь в предположении о $\mathcal{C}$-аппроксимируемости всех вершинных групп. Поэтому в большинстве утверждений, приводимых далее, указанное предположение сформулировано просто как одно из ограничений, а не как необходимое и/или достаточное условие.

В оставшейся части настоящего параграфа приводятся, главным образом, несложные утверждения общего характера, содержащие необходимые и достаточные условия аппроксимируемости и отделимости, а также описывающие некоторые взаимосвязи между этими понятиями.

Предложение 1.3.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа.*

1. *Если фактор-группа X/Y $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X.*

2. *Если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то из $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы Y в группе X следует $\mathcal{C}$-аппроксимируемость фактор-группы X/Y.*

Доказательство. 1. Если $x \in X \setminus Y$, то xY — неединичный элемент $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группы X/Y и потому существует подгруппа $N/Y \in \mathcal{C}^*(X/Y)$ такая, что $xY \notin N/Y$. Тогда $N \in \mathcal{C}^*(X)$ и $x \notin N = NY$.

2. Пусть xY — произвольный неединичный элемент фактор-группы X/Y. Тогда $x \notin Y$ и ввиду $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы Y в группе X найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая соотношению $x \notin YN$. Так как $N \in \mathcal{C}^*(X)$ и класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то

$$(X/Y)/(YN/Y) \cong X/YN \cong (X/N)/(YN/N) \in \mathcal{C}.$$

Следовательно, $YN/Y \in \mathcal{C}^*(X/Y)$ и $xY \notin YN/Y$. $\square$

Предложение 1.3.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее подмножество. Если группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то централизатор $C_X(Y)$ подмножества Y в группе X является $\mathcal{C}$-отделимой подгруппой.*

Доказательство. Пусть $x \in X \setminus C_X(Y)$ — произвольный элемент. Тогда $[x, y] \neq 1$ для некоторого $y \in Y$ и ввиду $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы X найдется гомоморфизм σ этой группы на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $[x, y]\sigma \neq 1$. Поскольку $[x, y]\sigma = [x\sigma, y\sigma]$, элемент $x\sigma$ не принадлежит централизатору $C_{X\sigma}(Y\sigma)$ подмножества $Y\sigma$ в группе $X\sigma$. Остается лишь заметить, что $C_X(Y)\sigma \leqslant C_{X\sigma}(Y\sigma)$ и потому $x\sigma \notin C_X(Y)\sigma$. □

Предложение 1.3.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любой группы X пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{C}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства.*

2. *Если Y — $\mathcal{C}$-отделимая подгруппа некоторой группы X и $S \subseteq X \setminus Y$ — конечное множество, то существует подгруппа $Z \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $S \cap YZ = \varnothing$. В частности, если $S \subseteq X \setminus \{1\}$ и группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то найдется подгруппа $Z \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая соотношению $S \cap Z = \varnothing$.*

3. *Если X — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X и существует подгруппа $Z \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$, то подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X.*

4. *Если X — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа и Y — ее конечная подгруппа, то подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X и существует подгруппа $Z \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $Y \cap Z = 1$.*

5. *Любая конечная $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа принадлежит классу $\mathcal{C}$.*

Доказательство. 1. Если N_1, N_2, $\ldots$, N_k — подгруппы семейства $\mathcal{C}^*(X)$, то согласно теореме Ремака [33, теорема 4.3.9] фактор-группа

$$X \Big/ \left(\bigcap_{i=1}^{k} N_i \right)$$

вкладывается в прямое произведение фактор-групп X/N_1, X/N_2, $\ldots$, X/N_k и в силу условий, наложенных на класс $\mathcal{C}$, принадлежит этому классу. Значит,

$$\bigcap_{i=1}^{k} N_i \in \mathcal{C}^*(X).$$

2. Ввиду $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы Y для каждого элемента $x \in S$ найдется подгруппа $Z_x \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая соотношению $x \notin YZ_x$. Положим

$$Z = \bigcap_{x \in S} Z_x.$$

Тогда $S \cap YZ = \varnothing$ и, так как множество S конечно, то согласно утверждению 1 $Z \in \mathcal{C}^*(X)$. Стало быть, подгруппа Z является искомой.

3. Пусть

$$x \in \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN.$$

Тогда $x = yz$ для некоторых $y \in Y$, $z \in Z$. Если $N \in \mathcal{C}^*(X)$, то согласно утверждению 1 $N \cap Z \in \mathcal{C}^*(X)$ и потому $yz \in Y(N \cap Z)$. Так как $(N \cap Z) \cap Y = 1$, отсюда следует, что $z \in N \cap Z$. Значит,

$$z \in \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} (N \cap Z) \leqslant \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} N = 1$$

и $x = y \in Y$. Таким образом,

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN = Y.$$

4, 5. Данные утверждения очевидным образом следуют из утверждений 2 и 3. □

Говорят (см., например, [106]), что группа имеет *конечный ранг Гирша–Зайцева*, равный r, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, и число бесконечных циклических факторов данного ряда равно r.

Предложение 1.3.5. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша–Зайцева. Тогда существует подгруппа $Z \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$. В частности, Y является $\mathcal{C}$-группой.*

Доказательство. Пусть

$$1 = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \ldots \leqslant Y_n = Y \text{ —}$$

субнормальный ряд группы Y, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой. Воспользуемся индукцией по длине этого ряда. Если $n = 0$, то утверждение предложения очевидным образом следует из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы X. Поэтому далее будем считать, что $n \geqslant 1$.

Так как группа X аппроксимируется группами без кручения, то она сама не имеет кручения. Поэтому Y_1 — бесконечная циклическая группа, порожденная некоторым элементом y, и ввиду $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы X существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $y \notin N$. Из отсутствия кручения в фактор-группе X/N вытекает, что порядок элемента y по модулю подгруппы N бесконечен и, следовательно, $N \cap Y_1 = 1$. Поскольку

$$(N \cap Y_{i+1})/(N \cap Y_i) \cong (N \cap Y_{i+1})Y_i/Y_i \leqslant Y_{i+1}/Y_i,$$

группа $N \cap Y$ также обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой. Ввиду равенства $N \cap Y_1 = 1$ длина указанного ряда строго меньше n. Поэтому в силу индуктивного предположения существует подгруппа $M \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая соотношению $M \cap (N \cap Y) = 1$. Согласно предложению 1.3.4 $M \cap N \in \mathcal{C}^*(X)$. Следовательно, подгруппа $M \cap N$ является искомой. □

Всюду далее, если $\mathfrak{P}$ — некоторое множество простых чисел, то через $\mathfrak{P}'$ будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих $\mathfrak{P}$. Если множество $\mathfrak{P}$ состоит из одного простого числа p, то вместо $\{p\}$- и $\{p\}'$- почти всегда будем писать просто p- и p'- соответственно.

Напомним, что целое число называется $\mathfrak{P}$-*числом*, если все его простые делители принадлежат множеству $\mathfrak{P}$, периодическая группа называется $\mathfrak{P}$-*группой*, если порядки всех ее элементов являются $\mathfrak{P}$-числами.

Говорят, что подгруппа Y некоторой группы X $\mathfrak{P}'$-*изолирована* в этой группе, если для каждого элемента $x \in X$ и для каждого простого числа $q \in \mathfrak{P}'$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Отметим, что если $\mathfrak{P}$ совпадает с множеством всех простых чисел, то $\mathfrak{P}'$-изолированной оказывается любая подгруппа. Если $\mathfrak{P}'$-изолированной является единичная подгруппа группы X, то говорят, что указанная группа *не имеет* $\mathfrak{P}'$-*кручения*.

Легко видеть, что пересечение любого числа $\mathfrak{P}'$-изолированных подгрупп снова оказывается $\mathfrak{P}'$-изолированной подгруппой. Поэтому, если X — некоторая группа, то для каждой ее подгруппы Y существует наименьшая подгруппа, содержащая Y и являющаяся $\mathfrak{P}'$-изолированной в X. Мы будем называть ее $\mathfrak{P}'$-*изолятором* подгруппы Y в группе X и обозначать через $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Y)$. Также через $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Rt}(X, Y)$ обозначим *множество* $\mathfrak{P}'$-*корней*, извлекающихся из элементов подгруппы Y в группе X. Более точно, элемент $x \in X$ входит в множество $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Rt}(X, Y)$, если существует $\mathfrak{P}'$-число q такое, что $x^q \in Y$. Очевидно, что множество $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Rt}(X, Y)$ содержится в подгруппе $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Y)$ и совпадает с ней тогда и только тогда, когда само является подгруппой.

Предложение 1.3.6. [74, § 4] *Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел, X — локально нильпотентная группа, Y — некоторая подгруппа группы X. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Имеет место равенство $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Rt}(X, Y) = \mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Y)$.*

2. *Если подгруппа Y $\mathfrak{P}'$-изолирована в X, то и ее нормализатор в группе X является $\mathfrak{P}'$-изолированной подгруппой этой группы.*

3. *Если группа X не имеет $\mathfrak{P}'$-кручения, то все члены ее верхнего центрального ряда $\mathfrak{P}'$-изолированы в ней. В такой группе извлечение $\mathfrak{P}'$-корней однозначно.*

Всюду далее, если $\mathcal{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$. Следующее утверждение показывает, что при изучении свойства отделимости таким классом можно ограничиться рассмотрением лишь $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп.

Предложение 1.3.7. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, состоящий только из периодических групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Если подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X, то она $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в X.*

Доказательство. Если элемент $x \in X$ и простое число $q \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ таковы, что $x^q \in Y$, то при любом гомоморфизме σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ справедливо включение $x\sigma \in Y\sigma$. В самом деле, порядок r элемента $x\sigma$, будучи $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом, взаимно прост с q. Поэтому $q\alpha + r\beta = 1$ для подходящих целых чисел α, β и

$$x\sigma = (x\sigma)^{q\alpha+r\beta} = (x^q\sigma)^\alpha \in Y\sigma.$$

Таким образом, если подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X, должно выполняться включение $x \in Y$ и, стало быть, Y оказывается $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной в X. $\square$

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Легко видеть, что пересечение любого числа $\mathcal{C}$-отделимых подгрупп группы X снова является $\mathcal{C}$-отделимой подгруппой. Поэтому существует наименьшая $\mathcal{C}$-отделимая подгруппа группы X, содержащая подгруппу Y. Будем называть ее *$\mathcal{C}$-замыканием* подгруппы Y в группе X и обозначать $\mathcal{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X, Y)$. Из предложения 1.3.7 следует, что если класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп, то для любых группы X и ее подгруппы Y выполнено соотношение

$$\mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Y) \leqslant \mathcal{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X, Y).$$

Предложение 1.3.8. *Каковы бы ни были класс групп $\mathcal{C}$, группа X и ее подгруппа Y, имеет место равенство*

$$\mathcal{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X, Y) = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN.$$

Доказательство. Обозначим для краткости подгруппы $\mathcal{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X, Y)$ и

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN$$

через Z и $\overline{Y}$ соответственно. Заметим, что для любой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(X)$

$$\overline{Y}N = \Bigl(\bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(X)} YM\Bigr)N \leqslant YN \cdot N \leqslant YN$$

и потому

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} \overline{Y}N \leqslant \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN = \overline{Y}.$$

Значит, подгруппа $\overline{Y}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе X и, следовательно, $Z \leqslant \overline{Y}$. С другой стороны, так как подгруппа Z $\mathcal{C}$-отделима в X, то

$$Z = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} ZN.$$

Поскольку $Y \leqslant Z$, отсюда следует, что

$$\overline{Y} = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN \leqslant \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} ZN = Z. \qquad \square$$

Предложение 1.3.9. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, X — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X, удовлетворяющая некоторому нетри-*

виальному тождеству $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Тогда $\mathcal{C}$-замыкание подгруппы Y в группе X также удовлетворяет этому тождеству. В частности, если Y — нильпотентная группа ступени c, то и подгруппа $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Cl}(X, Y)$ является нильпотентной группой ступени c.

Доказательство. Если $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathcal{C}$-$\mathfrak{Cl}(X, Y)$ и $x = \omega(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, то в силу предложения 1.3.8 для любой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(X)$ справедливы включения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in YN$ и, следовательно, $x \equiv 1 \pmod{N}$. Отсюда ввиду $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы X вытекает, что $x = 1$.

В частности, если Y — нильпотентная группа ступени c, то подгруппа $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Cl}(X, Y)$ удовлетворяет тождеству $[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{c+1}] = 1$ и потому является нильпотентной группой ступени не выше c. Так как, с другой стороны, она содержит подгруппу Y, ее ступень нильпотентности в точности равна c. □

§ 1.4. Корневые классы групп

Понятие корневого класса было введено К. Грюнбергом в 1957 году [118]. Согласно данному им определению класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он

1) замкнут относительно взятия подгрупп;

2) замкнут относительно взятия прямых произведений двух групп;

3) удовлетворяет следующему условию: для любой группы X и для любого субнормального ряда $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$, факторы X/Y и Y/Z которого принадлежат классу $\mathcal{C}$, существует подгруппа $T \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $T \leqslant Z$.

Легко видеть, что из третьего условия вытекает замкнутость класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений, а, значит, и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в приведенном определении второе условие оказывается излишним. Третье условие, сейчас называемое обычно *условием Грюнберга*, носит чисто утилитарный характер и позволяет доказать весьма полезное и часто используемое утверждение о том, что если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, то произвольное расширение $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группы при помощи группы из класса $\mathcal{C}$ в свою очередь является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группой (см. предложение 1.4.8 ниже). Вместе с тем, условие Грюнберга затрудняет понимание того, что представляют собой корневые классы групп в целом. Проясняет ситуацию

Теорема 1.4.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию Грюнберга (и, следовательно, является корневым).*

2. *Класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений.*

3. *Класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия расширений и для любых двух групп $X, Y \in \mathcal{C}$ содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть X, Y — произвольные группы из класса $\mathcal{C}$, W — декартово сплетение группы X с группой Y и $V = \prod_{y \in Y} X_y$ — декартово произведение, все сомножители которого изоморфны группе X. Нам необходимо показать, что $W \in \mathcal{C}$.

Напомним, что группа V представляет собой множество функций, отображающих Y в X, с поточечным умножением, а W — это множество $Y \cdot V$ с операцией умножения, заданной правилом

$$(y_1v_1)(y_2v_2) = y_1y_2v_1^{y_2}v_2,$$

где $v_1^{y_2}$ — функция из группы V, переводящая y в $v_1(y_2y)$ для каждого $y \in Y$.

Пусть

$$U = \bigl\{v \in V \mid v(1) = 1\bigr\}.$$

Легко видеть, что отображение $\sigma\colon V \to X$, действующее по правилу $v\sigma = v(1)$, является сюръективным гомоморфизмом и ядро этого гомоморфизма совпадает с U. Поэтому U — нормальная подгруппа в V и $V/U \cong X$. Из определения операции умножения в группе W следует также, что подгруппа V нормальна в W и $W/V \cong Y$. Стало быть, $U \leqslant V \leqslant W$ — субнормальная последовательность с факторами из класса $\mathcal{C}$ и по условию Грюнберга найдется подгруппа $T \in \mathcal{C}^*(W)$, лежащая в U.

Поскольку подгруппа T нормальна в W, она содержится в подгруппе

$$y^{-1}Uy = \bigl\{v \in V \mid v(y^{-1}) = 1\bigr\}$$

для любого $y \in Y$. Но

$$\bigcap_{y \in Y} y^{-1}Uy = 1,$$

следовательно, $T = 1$ и $W \in \mathcal{C}$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть снова X, Y — произвольные $\mathcal{C}$-группы, W — декартово сплетение группы X с группой Y и $V = \prod_{y \in Y} X_y$. Так как класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений и подгрупп, то $W \in \mathcal{C}$ и $V \in \mathcal{C}$, поскольку $V \leqslant W$. По теореме Фробениуса (см., например, [33, теорема 6.2.8]) произвольное расширение группы X при помощи группы Y вкладывается в W и потому также принадлежит $\mathcal{C}$. Следовательно, класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно обеих требуемых операций.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть X — некоторая группа и $Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальная последовательность с факторами из класса $\mathcal{C}$. Зафиксируем некоторую систему S представителей смежных классов группы X по подгруппе Y, положим

$$T = \bigcap_{s \in S} s^{-1}Zs$$

и покажем, что подгруппа T является искомой.

Очевидно, что T — нормальная подгруппа группы X, лежащая в Z. Фактор-группа Y/T согласно теореме Ремака [33, теорема 4.3.9] вкладывается в декартово произведение D фактор-групп $Y/s^{-1}Zs$ $(s \in S)$. Каждая из групп $Y/s^{-1}Zs$ изоморфна $\mathcal{C}$-группе Y/Z. Поэтому $D \in \mathcal{C}$ согласно условию утверждения и из замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и расширений следует, что $Y/T \in \mathcal{C}$ и $X/T \in \mathcal{C}$. $\square$

Непосредственно из теоремы 1.4.1 вытекают следующие два утверждения.

Следствие 1.4.2. [23, предложение 8] *Класс, состоящий лишь из конечных групп, является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений.*

Следствие 1.4.3. *Пересечение любых двух корневых классов групп снова является корневым классом.*

Так как класс всех групп без кручения является корневым, то частным случаем следствия 1.4.3 оказывается

Следствие 1.4.4. *Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, то класс $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$, состоящий из всевозможных $\mathcal{C}$-групп без кручения, также является корневым.*

Из утверждений 2 и 3 теоремы 1.4.1 видно, что каждый корневой класс содержит достаточно много групп. Следующие три предложения более точно описывают некоторые семейства групп, заведомо принадлежащих заданному корневому классу.

Предложение 1.4.5. *Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, то конечная разрешимая группа принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда ее порядок является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. В частности, если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну неединичную группу, то ему принадлежат все конечные p-группы для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Из теоремы Силова очевидно следует, что порядок любой конечной группы, принадлежащей классу $\mathcal{C}$, является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. Покажем, что для разрешимых групп справедливо и обратное.

Если $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, то по определению множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ существует $\mathcal{C}$-группа, содержащая элемент, порядок которого делится на p, а, значит, и элемент порядка p. В силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп ему принадлежит циклическая подгруппа, порожденная вторым из этих элементов. Поскольку любая конечная разрешимая $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группа X обладает полициклическим рядом, порядки факторов которого принадлежат $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$, из доказанного выше и замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений следует, что $X \in \mathcal{C}$. $\square$

Предложение 1.4.6. *Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, то произвольная группа из класса $\mathcal{C}$ имеет конечный период.*

Доказательство. В самом деле, пусть X — произвольная группа из класса $\mathcal{C}$. Тогда согласно теореме 1.4.1 декартово произведение $D = \prod_{x \in X} X_x$, где X_x — изоморфная копия группы X для каждого элемента $x \in X$, также принадлежит классу $\mathcal{C}$ и, следовательно, является периодической группой. Это означает, что элемент группы D, функция $f\colon X \to X$, определенная по правилу $f(x) = x$, имеет некоторый конечный порядок q. Очевидно, что в силу задания функции f период группы X совпадает с q и, в частности, конечен. $\square$

Предложение 1.4.7. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, X — некоторая неединичная $\mathcal{C}$-группа и $\mathfrak{c}$ — мощность группы X. Пусть также $\aleph_\infty$ обозначает первый предельный кардинал, больший $\aleph_0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если класс $\mathcal{C}$ включает хотя бы одну непериодическую группу, то ему принадлежат все свободные разрешимые группы, мощности которых не превосходят $2^\mathfrak{c}$. В частности, класс $\mathcal{C}$ содержит любую свободную разрешимую группу мощности, меньшей $\aleph_\infty$.

2. Если класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, то ему принадлежат все периодические разрешимые $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группы конечного периода, мощности которых не превосходят $2^\mathfrak{c}$. В частности, вместе с некоторой бесконечной группой класс $\mathcal{C}$ содержит любую периодическую разрешимую $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группу, имеющую конечный период и мощность, меньшую $\aleph_\infty$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 будем доказывать параллельно.

Пусть $Y^{(\alpha)}$ и $Y^{(\beta)}$ — соответственно свободная разрешимая группа и периодическая разрешимая $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группа конечного периода, мощности которых не превосходят $2^\mathfrak{c}$ (здесь и далее группы с индексом β рассматриваются, только если класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп и потому определено множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$). Пусть также $Z^{(\alpha)}$ — бесконечная циклическая группа, q — период группы $Y^{(\beta)}$ (являющийся $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом) и $Z^{(\beta)}$ — циклическая группа порядка q. Тогда, если $\mathcal{C}$ включает хотя бы одну непериодическую группу, то $Z^{(\alpha)} \in \mathcal{C}$ в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп; если же $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп, то $Z^{(\beta)} \in \mathcal{C}$ согласно предложению 1.4.5.

Рассмотрим декартовы произведения

$$\mathcal{I} = \prod_{x \in X} X_x, \quad D^{(\lambda)} = \prod_{i \in \mathcal{I}} Z_i^{(\lambda)},$$

где $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$, X_x и $Z_i^{(\lambda)}$ — изоморфные копии групп X и $Z^{(\lambda)}$ соответственно для всех $x \in X$, $i \in \mathcal{I}$. Тогда $\mathcal{I}$, $D^{(\alpha)}$, $D^{(\beta)} \in \mathcal{C}$ в силу утверждения 3 теоремы 1.4.1 и $2^\mathfrak{c} \leqslant \operatorname{card} \mathcal{I} \leqslant 2^{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}}$.

Пусть $F^{(\lambda)}$ — произвольный фактор ряда коммутантов группы $Y^{(\lambda)}$, $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$. Тогда $F^{(\alpha)}$ — свободная абелева группа, $F^{(\beta)}$ — периодическая абелева группа, период которой конечен и делит q. Последнее означает, что группа $F^{(\beta)}$ имеет конечное число примарных компонент и каждая из них согласно первой теореме Прюфера раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп, порядки которых также делят q. Отсюда и из соотношений

$$\operatorname{card} F^{(\lambda)} \leqslant \operatorname{card} Y^{(\lambda)} \leqslant 2^\mathfrak{c}, \quad \lambda \in \{\alpha, \beta\},$$

следует, что $F^{(\lambda)} \leqslant D^{(\lambda)}$. Поэтому $F^{(\lambda)} \in \mathcal{C}$ и $Y^{(\lambda)} \in \mathcal{C}$ ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и расширений. $\square$

В следующем предложении собраны результаты, создающие основу для изучения аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп.

Предложение 1.4.8. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну неединичную группу, то каждая свободная группа аппроксимируется этим классом* [16, теорема 1].

2. *Свободное произведение произвольного числа $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группой* [118, теорема 4.1]; [16, теорема 2].

3. *Всякое расширение $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группы при помощи группы из класса $\mathcal{C}$ в свою очередь аппроксимируется этим классом* [118, лемма 1.5].

Приведем еще легко проверяемое

Предложение 1.4.9. *Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, то прямое произведение любого числа $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группой.*

Очевидно, что если некоторый класс групп содержит только единичную группу, то и любая аппроксимируемая им группа будет единичной. Поэтому до конца диссертации будем предполагать выполненным

Соглашение 1. *Под корневым классом понимается класс групп, удовлетворяющий любому из равносильных условий, содержащихся в формулировке теоремы 1.4.1, и включающий хотя бы одну неединичную группу.*

Заметим также, что если

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big) \text{ —}$$

некоторый граф групп и Γ_i $(i \in \mathcal{I})$ — компоненты связности графа Γ, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой свободное произведение групп $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_i))$ $(i \in \mathcal{I})$ и в силу предложения 1.4.8 ее $\mathcal{C}$-аппроксимируемость равносильна $\mathcal{C}$-аппроксимируемости всех групп $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_i))$. Поэтому примем еще и

Соглашение 2. *Всюду далее, если явным образом не указано иное, предполагается, что рассматриваемые графы групп являются связными.*

Глава 2. Общие условия аппроксимируемости корневыми классами относительно равенства

§ 2.1. Фильтрационный метод

До конца главы будем предполагать, что
$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big) —$$
некоторый (связный) граф групп и $\mathcal{T}$ — остовное дерево в графе Γ, используемое для задания представления группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.

Бо́льшая часть результатов об аппроксимируемости свободных конструкций групп получена с помощью так называемого фильтрационного подхода. Впервые он был предложен Г. Баумслагом [93] для изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп, затем распространен на конструкции HNN-расширения [90] и фундаментальной группы произвольного графа групп [181], а также адаптирован для исследования аппроксимируемости классами конечных p-групп [38, 46] и конечных $\mathfrak{P}$-групп, где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел [68].

Суть метода, используемого во всех перечисленных работах, состоит в том, чтобы сначала найти достаточные условия $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в предположении, что все вершинные группы принадлежат аппроксимирующему классу $\mathcal{C}$, а затем, в случае произвольных вершинных групп, аппроксимировать группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ не напрямую $\mathcal{C}$-группами, а группами, удовлетворяющими найденным ранее достаточным условиям. Более формально это можно описать так.

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп и $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Назовем систему $\mathcal{R}$ *слабо $\mathcal{C}$-допустимой*, если все группы $G_v\rho_{\mathcal{R}}$ $(v \in \mathcal{V})$ принадлежат классу $\mathcal{C}$ и группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ аппроксимируется этим классом.

Пусть $\mathfrak{R}$ — совокупность всех слабо $\mathcal{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Если $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ и $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$, то через $\mathcal{R}(v)$ будем обозначать подгруппу R_v. Понятно, что если для каждого элемента $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ существует система $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющая условию $g\rho_{\mathcal{R}} \neq 1$, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ оказывается $\mathcal{C}$-аппроксимируемой. Чтобы иметь возможность найти подходящую систему $\mathcal{R}$ для любого неединичного элемента g, на группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ накладывают следующие два условия, которые и дали методу название «фильтрационный»:

$$(\mathfrak{F}.1) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \ \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} \mathcal{R}(v) = 1;$$

$$(\mathfrak{F}.2) \qquad \forall e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1 \ \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} H_{\varepsilon e}\mathcal{R}(e(\varepsilon)) = H_{\varepsilon e}.$$

Первое из этих условий позволяет отыскать систему $\mathcal{R}$, если элемент g принадлежит одной из вершинных групп. Второе условие используется в противном случае и (в сочетании с определенными дополнительными ограничениями) дает сохранить при гомоморфизме $\rho_{\mathcal{R}}$ длину приведенной или несократимой записи элемента g, тем самым гарантируя, что $g\rho_{\mathcal{R}} \neq 1$.

Можно показать (это будет сделано далее), что если аппроксимирующий класс $\mathcal{C}$ является корневым, то любой гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$ проходит через гомоморфизм $\rho_{\mathcal{R}}$ для некоторой слабо $\mathcal{C}$-допустимой системы $\mathcal{R}$. Поэтому при изучении аппроксимируемости корневыми классами описанная двухступенчатая схема построения гомоморфизма группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ не является каким-то ограничением. Отсюда также легко следует, что условие ($\mathfrak{F}.1$) оказывается необходимым для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Сказать то же об условии ($\mathfrak{F}.2$), увы, нельзя.

По определению, если $\mathcal{R}$ — слабо $\mathcal{C}$-допустимая система, то $\mathcal{R}(v) \in \mathcal{C}^*(G_v)$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Поэтому из условия ($\mathfrak{F}.2$) следует, что для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$. Требование $\mathcal{C}$-отделимости всех реберных подгрупп в вершинных группах служит принципиальным ограничением как исходного метода Г. Баумслага, так и всех его обобщений, включая то, которое реализовано в настоящей диссертации. Существуют примеры (см., например, [36]), показывающие, что это ограничение не является необходимым для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.

Хотя выше фильтрационный метод описан в общем виде, до недавнего времени он использовался лишь применительно к конкретным аппроксимирующим классам групп и свободным конструкциям (почти всегда свободным произведениям двух групп с объединенной подгруппой или HNN-расширениям с одной проходной буквой). Исследования, в основе которых лежали работы [38, 46, 68, 90, 93], в целом придерживались следующей последовательности действий:

1) выбор конкретных аппроксимирующего класса групп $\mathcal{C}$ и свободной конструкции, удовлетворяющей, возможно, некоторым дополнительным ограничениям (например, требованию нормальности объединяемых подгрупп в сомножителях обобщенного свободного произведения двух групп);

2) доказательство критерия аппроксимируемости выбранной конструкции классом $\mathcal{C}$ при условии, что все вершинные группы принадлежат этому классу;

3) введение понятия совместимых подгрупп, опирающегося на формулировку критерия из пункта 2 и равносильного определенному выше понятию слабой $\mathcal{C}$-допустимости;

4) доказательство достаточных условий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости, аналогичных условиям ($\mathfrak{F}.1$) и ($\mathfrak{F}.2$), а также некоторых утверждений, упрощающих применение этих условий в конкретных ситуациях;

5) исследование с помощью утверждений из пункта 4 $\mathcal{C}$-аппроксимируемости выбранной свободной конструкции при различных дополнительных (к пункту 1) ограничениях, накладываемых на вершинные группы и/или реберные подгруппы.

Уже в начале 2000-х годов стало ясно, что в описанной схеме, начиная с пункта 4, все время используются примерно одни и те же рассуждения. Однако, для того, чтобы провести их однократно, требовалось ввести на шаге 3 некоторое универсальное понятие совместимости. Попытка сделать это в случае произвольного корневого аппроксимирующего класса $\mathcal{C}$ и фундаментальной группы конечного графа групп была предпринята в [81] и состояла в использовании понятия, которое выше было названо слабой $\mathcal{C}$-допустимостью. Будучи вполне естественным, данный подход оказался, однако, не слишком продуктивным. Причина этого заключается в том, что условие «группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$» в общем случае не допускает, по-видимому, никакой равносильной формулировки: такой вывод напрашивается после изучения критериев из пункта 2 приведенной выше схемы, полученных в [46, 68, 90, 93, 121]. Сам же факт аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ некоторым (точно неизвестно каким) корневым классом $\mathcal{C}$ оказывается не слишком полезным. Например, он не позволяет ответить на вопрос, будет ли пересечение двух слабо $\mathcal{C}$-допустимых систем снова слабо $\mathcal{C}$-допустимой системой, и это вынудило авторов работы [81] модифицировать условие ($\mathfrak{F}.2$) следующим образом:

$$\forall n \geqslant 1\ \forall e_i \in \mathcal{E},\ \varepsilon_i = \pm 1,\ g_i \in G_{e_i(\varepsilon_i)} \setminus H_{\varepsilon_i e_i}\ (1 \leqslant i \leqslant n)$$
$$\exists \mathcal{R} \in \mathfrak{R}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ g_i \notin H_{\varepsilon_i e_i}\mathcal{R}(e_i(\varepsilon_i)).$$

В настоящей диссертации предлагается другой подход к определению универсального понятия совместимости, требующий от группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ несколько большего, нежели просто аппроксимируемость классом $\mathcal{C}$. Полученные с его помощью результаты позволяют утверждать, что этот вариант оказывается более удачным.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп и $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Назовем систему $\mathcal{R}$ *$\mathcal{C}$-допустимой*, если выполняется любое из следующих двух равносильных (ввиду предложения 1.2.6) утверждений:

1) существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$ такая, что $R_v = N \cap G_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$;

2) существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на всех вершинных группах $\overline{G}_v = G_v/R_v$ $(v \in \mathcal{V})$.

Первое из приведенных условий совершенно неконструктивно, но очень удобно для применения, особенно когда одна фундаментальная группа вкладывается в другую. Оно, в частности, позволяет легко ответить на вопрос о $\mathcal{C}$-допустимости пересечения двух $\mathcal{C}$-допустимых систем. Второе условие используется для построения систем совместимых подгрупп, примеры этому будут даны в следующей главе.

Приводимая далее теорема 2.2.1 утверждает, что если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, то из существования гомоморфизма группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективного на всех вершинных группах, следует $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$

и потому $\mathcal{C}$-допустимость влечет за собой слабую $\mathcal{C}$-допустимость. Теорема 2.5.1 описывает некоторые ситуации, когда верно и обратное. Например, это так, если $\mathcal{C}$ — корневой класс, состоящий только из конечных групп, и граф Γ является конечным. Равносильность $\mathcal{C}$-допустимости и слабой $\mathcal{C}$-допустимости в указанном случае активно используется в упоминавшихся выше исследованиях, продолжающих работы [38,46,68,90,93]. Именно благодаря ей, проблема поиска наиболее удачного определения совместимых подгрупп возникла только с началом систематического изучения аппроксимируемости свободных конструкций произвольными корневыми классами групп. Вопрос о полном описании ситуаций, когда $\mathcal{C}$ — корневой класс и $\mathcal{C}$-допустимость равносильна слабой $\mathcal{C}$-допустимости, остается открытым. В § 2.6 приводятся примеры, показывающие, что в общем случае требование $\mathcal{C}$-допустимости оказывается сильнее.

Если в условиях ($\mathfrak{F}$.1) и ($\mathfrak{F}$.2) выше в качестве $\mathfrak{R}$ взять совокупность всех $\mathcal{C}$-допустимых (а не слабо $\mathcal{C}$-допустимых) систем совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, то указанным условиям можно дать следующую топологическую трактовку. При выборе семейства $\mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$ в качестве базиса окрестностей единицы на группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ оказывается заданной так называемая *про-$\mathcal{C}$ топология*. Для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ семейство

$$\big\{N \cap G_v \mid N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))\big\}$$

служит базисом окрестностей единицы в топологии группы G_v, индуцированной про-$\mathcal{C}$ топологией группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Условие ($\mathfrak{F}$.1) означает, что указанная индуцированная топология является хаусдорфовой, а условие ($\mathfrak{F}$.2) — что любая подгруппа $H_{\varepsilon e}$, где $e(\varepsilon) = v$, оказывается в ней замкнутой.

Как уже было отмечено выше, сочетание второго определения $\mathcal{C}$-допустимости с требованием к аппроксимирующему классу быть корневым оказывается весьма продуктивным. При таких ограничениях удается в общем виде доказать фильтрационные условия аппроксимируемости фундаментальной группы произвольного графа групп (см. теорему 2.3.1 ниже), а также некоторые другие утверждения. Более важно, однако, то, что введенное определение позволяет несколько видоизменить указанную выше последовательность изучения аппроксимируемости, сделав шаги 3–4 и 1, 2, 5 практически независимыми.

Далее будем называть *результатами первого уровня* утверждения, в которых устанавливается существование гомоморфизма группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из аппроксимирующего класса, инъективного на всех вершинных группах. Сто́ит отметить, что никакой общей схемы для доказательства результатов первого уровня нет, каждый из них является весьма удачной находкой и получается при тех или иных ограничениях, накладываемых на вершинные группы, реберные подгруппы и/или связывающие эти подгруппы изоморфизмы. Однако, сразу после появления очередной теоремы такого рода можно воспользоваться готовыми утверждениями общего характера (например, упомянутой выше теоремой 2.3.1) и при тех же ограничениях доказывать *результаты второго уровня*, т. е. достаточные условия аппроксимируемости, в которых уже не предполагается, что вершинные группы принадлежат аппроксимирующему классу. В настоящей диссертации данная схема реализуется в главе 3 и, отчасти, в главе 4.

§ 2.2. Случай, когда реберные подгруппы принадлежат аппроксимирующему классу

Целью данного параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп и все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы. Если существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех реберных подгруппах $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1)$, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Как уже было отмечено в предыдущем параграфе, из теоремы 2.2.1 следует, что если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, то $\mathcal{C}$-допустимость системы совместимых нормальных подгрупп влечет за собой ее слабую $\mathcal{C}$-допустимость. Поэтому двухступенчатая схема построения гомоморфизма группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, используемая в фильтрационном методе, успешно работает в сочетании с новым понятием $\mathcal{C}$-допустимости, введенным в настоящей диссертации. Но, чтобы установить данный факт, в приведенной теореме достаточно было бы потребовать не $\mathcal{C}$-аппроксимируемости вершинных групп, а только лишь их принадлежности классу $\mathcal{C}$. Помимо естественного желания доказать больше теми же усилиями для ослабления условия теоремы 2.2.1 имеется еще одна причина.

Если все реберные подгруппы принадлежат аппроксимирующему классу, то довольно часто с помощью фильтрационного подхода в лице приводимой далее теоремы 2.3.1 и ее следствий не удается получить результаты более сильные, чем те, что вытекают из сформулированной выше теоремы 2.2.1. В этом нет ничего удивительного, учитывая, насколько существенно вторая из этих теорем опирается на первую. Использование в подобной ситуации лишь теоремы 2.2.1 оказывается проще, а потому предпочтительнее.

Для доказательства сформулированной теоремы потребуются следующие два предложения.

Предложение 2.2.2. *Если граф Γ является деревом, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ вкладывается в HNN-расширение*

$$\mathbb{E} = \big\langle G_v \ (v \in \mathcal{V}),\ t_e \ (e \in \mathcal{E});\ t_e^{-1} h\varphi_{+e} t_e = h\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E},\ h \in H_e)\big\rangle.$$

Доказательство. Хорошо известно, что нормальное замыкание базовой группы HNN-расширения представляет собой древесное произведение изоморфных копий этой группы. Поскольку базовая группа $\mathbb{P}$ HNN-расширения $\mathbb{E}$ является свободным произведением групп G_v $(v \in \mathcal{V})$, ее нормальное замыкание оказывается «лесны́м» (т. е. соответствующим, вообще говоря, лесу, а не дереву) произведением изоморфных копий групп G_v ($v \in \mathcal{V}$). Опишем более подробно, как устроено это произведение, и затем укажем поддерево, фундаментальная группа которого изоморфна $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.

Пусть T — свободная группа с базисом $\{t_e \mid e \in \mathcal{E}\}$. Рассмотрим граф Γ' с множеством вершин $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times T$ и множеством ребер $\mathcal{E}'$, индексированным множеством $\mathcal{E} \times T$ и определенным следующим образом: для любых $e \in \mathcal{E}$, $t \in T$ ребро e' с индексом (e, t) соединяет вершины $e'(1) = \bigl(e(1),\, t_e t\bigr)$ и $e'(-1) = \bigl(e(-1),\, t\bigr)$. Легко видеть, что граф Γ' не имеет кратных ребер и петель. Для доказательства ацикличности (неориентированной версии) построенного графа заметим, что произвольной простой цепи L в этом графе, имеющей ненулевую длину и ведущей из некоторой вершины $u' = (u, r)$ в некоторую вершину $w' = (w, s)$, соответствует элемент $\tau \in T \setminus \{1\}$ такой, что $\tau r = s$ и потому $u' \neq w'$.

В самом деле, пусть e' — ребро цепи L, соединяющее вершины $e'(1) = \bigl(e(1),\, t_e t\bigr)$ и $e'(-1) = \bigl(e(-1),\, t\bigr)$ для некоторых $e \in \mathcal{E}$, $t \in T$. Если при движении вдоль цепи (от u' к w') происходит перемещение от вершины $\bigl(e(1),\, t_e t\bigr)$ к вершине $\bigl(e(-1),\, t\bigr)$, то сопоставим ребру e' элемент $t_{e'} = t_e^{-1}$, в противном случае положим $t_{e'} = t_e$. Поскольку L — простая цепь, элементы, сопоставленные ее смежным ребрам, не являются взаимообратными. Значит, произведение τ всех элементов, соответствующих ребрам цепи L и взятых в порядке, противоположном движению вдоль цепи от u' к w', имеет в группе T несократимую запись ненулевой длины и, следовательно, отлично от 1. Равенство $\tau r = s$ вытекает из определения элементов $t_{e'}$.

Для любых $v \in \mathcal{V}$, $t \in T$ обозначим через $G_{v,t}$ изоморфную копию группы G_v и через $\iota_{v,t}$ изоморфизм $G_v \to G_{v,t}$. Определим граф групп $\mathcal{G}'(\Gamma')$, сопоставляя вершине $(v, t) \in \mathcal{V}'$ ($v \in \mathcal{V}$, $t \in T$) группу $G_{v,t}$, а ребру $e' \in \mathcal{E}'$ с индексом (e, t) ($e \in \mathcal{E}$, $t \in T$) — группу H_e и гомоморфизмы

$$\varphi_{+e'} = \varphi_{+e}\iota_{e(1),\, t_e t}, \quad \varphi_{-e'} = \varphi_{-e}\iota_{e(-1),\, t}.$$

Для любого элемента $\tau \in T$ рассмотрим отображение вершин графа Γ', определенное правилом $(v, t) \mapsto (v, t\tau)$, и соответствующие ему изоморфизмы вершинных групп $\iota_{v,t}^{-1}\iota_{v,t\tau}$. Легко видеть, что эти отображения индуцируют автоморфизмы графов Γ' и $\mathcal{G}'(\Gamma')$, а, значит, и автоморфизм α_τ группы $\pi_1(\mathcal{G}'(\Gamma'))$. Очевидно также, что $\alpha_{\tau_1\tau_2} = \alpha_{\tau_1}\alpha_{\tau_2}$ для любых $\tau_1, \tau_2 \in T$ и потому определено расщепляемое расширение S группы $\pi_1(\mathcal{G}'(\Gamma'))$ при помощи группы T, в котором сопряжение при помощи элемента $\tau \in T$ действует на группе $\pi_1(\mathcal{G}'(\Gamma'))$ как автоморфизм α_τ.

Группа S имеет представление

$$\bigl\langle G_{v,t}\ (v \in \mathcal{V},\ t \in T),\ t_e\ (e \in \mathcal{E});\ \tau^{-1} g \tau = g\alpha_\tau\ (g \in G_{v,t},\ v \in \mathcal{V},\ t, \tau \in T),$$
$$h\varphi_{+e}\iota_{e(1),\, t_e t} = h\varphi_{-e}\iota_{e(-1),\, t}\ (e \in \mathcal{E},\ h \in H_e,\ t \in T)\bigr\rangle.$$

Так как для любых $v \in \mathcal{V}$, $g \in G_v$, $\tau \in T$ в ней выполняются равенства

$$\tau^{-1} g\iota_{v,1}\tau = g\iota_{v,1}\alpha_\tau = g\iota_{v,1}\iota_{v,1}^{-1}\iota_{v,\tau} = g\iota_{v,\tau},$$

то образующие групп $G_{v,t}$ ($v \in \mathcal{V}$, $t \in T \setminus \{1\}$) могут быть исключены из указанного представления вместе с соотношениями

$$\tau^{-1}g\tau = g\alpha_\tau \quad (g \in G_{v,1},\ v \in \mathcal{V},\ \tau \in T).$$

При этом соотношения

$$\tau^{-1}g\tau = g\alpha_\tau \quad (g \in G_{v,t},\ v \in \mathcal{V},\ t \in T \setminus \{1\},\ \tau \in T)$$

превращаются в тождества, а соотношения

$$h\varphi_{+e}\iota_{e(1),\,t_e t} = h\varphi_{-e}\iota_{e(-1),\,t} \quad (e \in \mathcal{E},\ h \in H_e,\ t \in T)$$

приобретают вид

$$t_e^{-1}(h\varphi_{+e}\iota_{e(1),1})t_e = h\varphi_{-e}\iota_{e(-1),1} \quad (e \in \mathcal{E},\ h \in H_e).$$

Таким образом, отождествляя элементы групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ и их образы относительно изоморфизмов $\iota_{v,1}$, представление группы S можно превратить в представление группы $\mathbb{E}$. Следовательно, $\mathbb{E} \cong S$.

Теперь построим вложение графа Γ в граф Γ'. Для этого зафиксируем некоторую вершину $u \in \mathcal{V}$ и будем рассуждать индукцией по длине (единственного) пути в дереве Γ, связывающего произвольным образом выбранную вершину $v \in \mathcal{V}$ с u. Каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ будет отображаться в вершину вида (v, t) для некоторого $t \in T$. Вершине u поставим в соответствие вершину $(u, 1)$. Пусть $v \in \mathcal{V}$ — произвольная вершина, отличная от u, e — последнее ребро пути, ведущего из u в v, $\varepsilon = \pm 1$ — такое число, что $v = e(\varepsilon)$, и вершине $e(-\varepsilon)$ соответствует вершина $\bigl(e(-\varepsilon),\, t\bigr)$. Тогда вершине $v = e(\varepsilon)$ сопоставим вершину $\bigl(e(\varepsilon),\, t_e^{\varepsilon} t\bigr)$. Согласно определению графа Γ' справедливы равенства $e'(\varepsilon) = \bigl(e(\varepsilon),\, t_e^{\varepsilon} t\bigr)$ и $e'(-\varepsilon) = \bigl(e(-\varepsilon),\, t\bigr)$, где e' — ребро с индексом (e, t), если $\varepsilon = 1$, или с индексом $\bigl(e,\, t_e^{-1} t\bigr)$, если $\varepsilon = -1$. Поэтому построенное отображение вершин задает искомое вложение. Легко видеть также, что в сочетании с изоморфизмами $\iota_{v,t}$ $(v \in \mathcal{V},\ t \in T)$ оно определяет и вложение графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ в граф групп $\mathcal{G}'(\Gamma')$. Следовательно, в силу предложения 1.2.1 группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ вкладывается в группу $\pi_1(\mathcal{G}'(\Gamma'))$, что и требовалось. $\square$

Для любого семейства групп Ω через $\mathcal{P}(\Omega)$ будем обозначать класс групп, состоящий из (обычных) свободных произведений, каждый сомножитель которых является свободной группой или вкладывается в некоторую группу из семейства Ω. Из предложения 1.1.7 следует, что этот класс замкнут относительно взятия подгрупп. Поэтому, если Θ — некоторое семейство $\mathcal{P}(\Omega)$-групп, то $\mathcal{P}(\Theta) \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Предложение 2.2.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп и существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех реберных подгруппах $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$. Пусть также $N = \ker \sigma$ и $\Omega = \{N \cap G_v \mid v \in \mathcal{V}\}$. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой расширение некоторой $\mathcal{P}(\Omega)$-группы при помощи группы из класса $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что граф Γ является деревом, и рассмотрим HNN-расширение $\mathbb{E}$ из предложения 2.2.2. Очевидно, что группа $\mathbb{T} = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$

представляет собой фактор-группу группы $\mathbb{E}$ по нормальному замыканию множества элементов $\{t_e \mid e \in \mathcal{E}\}$. Обозначим через K прообраз подгруппы N относительно естественного гомоморфизма $\varepsilon\colon \mathbb{E} \to \mathbb{T}$. Тогда $K \in \mathcal{C}^*(\mathbb{E})$ и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ справедливо равенство $K \cap G_v = N \cap G_v$, поскольку гомоморфизм ε действует на группе G_v тождественно. Отсюда следует, в частности, что $K \cap H_{\varepsilon e} = 1$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, и согласно предложению 1.1.6 $K \in \mathcal{P}\bigl(\{K \cap \mathbb{P}\}\bigr)$, где $\mathbb{P}$ — базовая группа HNN-расширения $\mathbb{E}$, т. е. свободное произведение групп G_v $(v \in \mathcal{V})$. В силу предложения 1.1.7 $K \cap \mathbb{P} \in \mathcal{P}(\Theta)$, где

$$\Theta = \bigl\{(K \cap \mathbb{P}) \cap G_v \mid v \in \mathcal{V}\bigr\},$$

и так как

$$\Theta = \bigl\{K \cap G_v \mid v \in \mathcal{V}\bigr\} = \Omega,$$

то $K \cap \mathbb{P} \in \mathcal{P}(\Omega)$ и $K \in \mathcal{P}(\Omega)$. Согласно предложению 2.2.2 группа $\mathbb{T}$ вкладывается в группу $\mathbb{E}$ и, следовательно, оказывается расширением группы $\mathbb{T} \cap K$ при помощи группы $\mathbb{T}/\mathbb{T} \cap K$. Остается заметить, что ввиду предложения 1.3.1 и замкнутости классов $\mathcal{P}(\Omega)$ и $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп справедливы включения $\mathbb{T} \cap K \in \mathcal{P}(\Omega)$ и $\mathbb{T}/\mathbb{T} \cap K \in \mathcal{C}$.

Итак, в случае, когда Γ является деревом, утверждение доказано. Предположим теперь, что Γ — произвольный связный граф и, как уже было указано в начале главы, $\mathcal{T}$ — его остовное дерево, используемое для задания представления группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Так как ограничение $\sigma_{\mathcal{T}}$ гомоморфизма σ на древесное произведение $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ действует инъективно на всех реберных подгруппах этого произведения и

$$\bigl\{\ker \sigma_{\mathcal{T}} \cap G_v \mid v \in \mathcal{V}\bigr\} = \Omega,$$

то ввиду рассмотренного выше случая группа $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ является расширением некоторой $\mathcal{P}(\Omega)$-группы P при помощи группы из класса $\mathcal{C}$. Положим $U = N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ и $V = U \cap P$. Тогда $V \in \mathcal{C}^*(U) \cap \mathcal{P}(\Omega)$ в силу предложения 1.3.1 и замкнутости классов $\mathcal{P}(\Omega)$ и $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп.

Так как $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ — HNN-расширение группы $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$, то по предложению 1.1.6 подгруппа N раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы F и групп X_i $(i \in \mathcal{I})$, изоморфных U. Пусть $\theta\colon N \to U$ — сюръективный гомоморфизм, продолжающий изоморфизмы $X_i \to U$ $(i \in \mathcal{I})$ и переводящий сомножитель F в единицу. Положим $M = \ker \theta\delta$, где $\delta\colon U \to U/V$ — естественный гомоморфизм. Тогда $M \in \mathcal{C}^*(N)$ и $M \cap X_i \cong V \in \mathcal{P}(\Omega)$ для всех $i \in \mathcal{I}$. Применяя предложение 1.1.7 к свободному произведению N, получаем, что

$$M \in \mathcal{P}\bigl(\{M \cap X_i \mid i \in \mathcal{I}\}\bigr).$$

Значит, $M \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Так как $M \leqslant N \leqslant \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ — субнормальная последовательность с факторами из класса $\mathcal{C}$, то согласно условию Грюнберга существует подгруппа $L \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$, лежащая в M. Тогда $L \in \mathcal{P}(\Omega)$ и, стало быть, группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой расширение $\mathcal{P}(\Omega)$-группы L при помощи $\mathcal{C}$-группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/L$. $\square$

Доказательство теоремы 2.2.1. Предложение 1.4.8 утверждает, что если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп и семейство Ω состоит из $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп, то любое расширение $\mathcal{P}(\Omega)$-группы при помощи $\mathcal{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$. Поэтому теорема 2.2.1 сразу же следует из предложения 2.2.3. $\square$

§ 2.3. Случай произвольных реберных подгрупп

Настоящий параграф посвящен доказательству приводимой далее теоремы 2.3.1, служащей своего рода ядром фильтрационного метода. Если $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, то, как и выше, через $\mathcal{R}(v)$ будем обозначать подгруппу R_v.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп и $\mathfrak{R}$ — совокупность всех $\mathcal{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.*

1. *Если выполняются следующие условия:*

$$(\mathfrak{F}.3) \qquad \forall v \in \mathcal{V} \ \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} \mathcal{R}(v) = 1,$$

$$(\mathfrak{F}.4) \qquad \forall e \in \mathcal{E},\ \ \varepsilon = \pm 1 \ \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} H_{\varepsilon e}\mathcal{R}(e(\varepsilon)) = H_{\varepsilon e},$$

то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

2. *Если группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то выполняется условие ($\mathfrak{F}.3$).*

Приведенная теорема обобщает основной результат статьи [181], предложение 2 из [93], теорему 4.2 из [90], предложение 5 из [38], теорему 2 из [46], теорему 2 из [68], предложение 10 из [70] и предложение 2.4 из [69], а также дополняет условия аппроксимируемости корневым классом групп фундаментальной группы конечного графа групп, полученные в [81].

Далее в этом параграфе, если N — нормальная подгруппа группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, то соответствующие системе совместимых нормальных подгрупп $\mathcal{R} = \{N \cap G_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ граф групп $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma)$ и гомоморфизм $\rho_{\mathcal{R}}$ будем обозначать через $\mathcal{G}_N(\Gamma)$ и ρ_N.

Предложение 2.3.2. *Пусть $\mathcal{T}'$ — непустое поддерево остовного дерева $\mathcal{T}$ графа Γ и Γ' — связный подграф графа Γ, для которого $\mathcal{T}'$ является остовным поддеревом. Если N — нормальная подгруппа группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и $N' = N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T}')$, то гомоморфизм ρ_N продолжает гомоморфизм*

$$\rho_{N'}\colon \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T}') \to \pi_1(\mathcal{G}_{N'}(\Gamma'), \mathcal{T}').$$

Доказательство. Утверждение равносильно коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T}') & \xrightarrow{\ \iota\ } & \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{N'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_N} \\
\pi_1(\mathcal{G}_{N'}(\Gamma'), \mathcal{T}') & \xrightarrow{\ \iota\ } & \pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma)),
\end{array}$$

где ι обозначает вложения из предложения 1.2.1. Указанная коммутативность имеет место, так как гомоморфизмы ι, $\rho_{N'}$ и ρ_N продолжают тождественные отображения образующих соответствующих групп. $\square$

Предложение 2.3.3. *Пусть Γ — конечный граф и Ω — непустое семейство нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, удовлетворяющее условиям*

$$\forall L, M \in \Omega \quad \exists N \in \Omega \quad N \leqslant L \cap M; \tag{1}$$

$$\forall v \in \mathcal{V} \quad \bigcap_{N \in \Omega} (N \cap G_v) = 1; \tag{2}$$

$$\forall e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1 \quad \bigcap_{N \in \Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}. \tag{3}$$

Если вершина $v \in \mathcal{V}$ и подгруппа $X \leqslant G_v$ таковы, что

$$\bigcap_{N \in \Omega} X(N \cap G_v) = X,$$

то для каждого элемента $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus X$ найдется подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая соотношению $g\rho_N \notin X\rho_N$.

Доказательство. Сначала предположим, что граф Γ является деревом, и воспользуемся индукцией по числу вершин в нем. Если Γ содержит только одну вершину v, то $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) = G_v$ и требуемое утверждение вытекает из равенств

$$X = \bigcap_{N \in \Omega} X(N \cap G_v) = \bigcap_{N \in \Omega} XN.$$

Поэтому далее будем считать, что в дереве Γ имеется по крайней мере две вершины.

Пусть $e \in \mathcal{E}$ — произвольное ребро. При его удалении граф Γ распадается на две компоненты связности. Обозначим через Γ_ε ($\varepsilon = \pm 1$) ту из них, которая содержит вершину $e(\varepsilon)$, и через P_ε — группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_\varepsilon))$. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой свободное произведение групп P_1 и P_{-1} с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Для каждого $\varepsilon = \pm 1$ положим

$$\Omega_\varepsilon = \bigl\{N \cap P_\varepsilon \mid N \in \Omega\bigr\}$$

и заметим, что дерево Γ_ε и семейство Ω_ε удовлетворяют условиям предложения, поэтому к ним можно применить индуктивное предположение.

Пусть вершина $v \in \mathcal{V}$ и подгруппа $X \leqslant G_v$ таковы, что

$$\bigcap_{N \in \Omega} X(N \cap G_v) = X,$$

и пусть $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus X$ — произвольный элемент. Будем считать для определенности, что $X \leqslant P_1$, и рассмотрим два случая.

Случай 1. $g \in P_1$.

Применяя индуктивное предположение к дереву Γ_1, семейству Ω_1, подгруппе X и элементу g, найдем подгруппу $M \in \Omega_1$ такую, что $g\rho_M \notin X\rho_M$. По определению Ω_1 существует подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая равенству $M = N \cap P_1$. В силу предложения 2.3.2 гомоморфизм ρ_N продолжает ρ_M. Следовательно, $g\rho_N \notin X\rho_N$ и подгруппа N является искомой.

Случай 2. $g \notin P_1$.

Пусть $g = g_1 \ldots g_n$ — несократимая запись g как элемента свободного произведения групп P_1 и P_{-1} с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдется такое $\varepsilon_i = \pm 1$, что $g_i \in P_{\varepsilon_i} \setminus H_{\varepsilon_i e}$, причем $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и, если $n = 1$, то $\varepsilon_1 = -1$. В силу индуктивного предположения, применяемого к дереву Γ_{ε_i}, семейству Ω_{ε_i}, подгруппе $H_{\varepsilon_i e}$ и элементу g_i, существует подгруппа $L_i \in \Omega_{\varepsilon_i}$, удовлетворяющая соотношению $g_i\rho_{L_i} \notin H_{\varepsilon_i e}\rho_{L_i}$. Выберем подгруппу $M_i \in \Omega$ так, чтобы выполнялось равенство $L_i = M_i \cap P_{\varepsilon_i}$. Тогда согласно условию (1) найдется подгруппа $N \in \Omega$, лежащая в $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$.

Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ из определения подгруппы M_i, предложения 2.3.2 и соотношения $\ker \rho_N \leqslant \ker \rho_{M_i}$, справедливого ввиду предложения 1.2.5, следует, что $g_i\rho_N \notin H_{\varepsilon_i e}\rho_N$. Отсюда вытекает, что в группе $\pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma))$, рассматриваемой как свободное произведение групп $\pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma_1))$ и $\pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma_{-1}))$ с объединенными подгруппами $H_{+e}\rho_N$ и $H_{-e}\rho_N$, элемент $g\rho_N$ имеет несократимую запись длины n и, если $n = 1$, то $g\rho_N \in \pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma_{-1})) \setminus H_{-e}\rho_N$. Это в свою очередь означает, что он не может принадлежать подгруппе $X\rho_N$ свободного множителя $\pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma_1))$ и, стало быть, подгруппа N является искомой.

Теперь обратимся к общей ситуации и воспользуемся индукцией по числу ребер, не входящих в остовное дерево $\mathcal{T}$ графа Γ. База индукции доказана выше, поэтому будем предполагать далее, что имеется по крайней мере одно такое ребро e. Пусть граф Γ' получается из Γ путем удаления ребра e. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой HNN-расширение группы $B = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'))$ с проходной буквой t_e и связанными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Дальнейшие рассуждения следуют той же схеме, что и выше.

Пусть вершина $v \in \mathcal{V}$ и подгруппа $X \leqslant G_v$ таковы, что

$$\bigcap_{N \in \Omega} X(N \cap G_v) = X,$$

и пусть $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus X$ — произвольный элемент. Положим

$$\Omega' = \bigl\{N \cap B \mid N \in \Omega\bigr\}$$

и рассмотрим два случая.

Случай 1. $g \in B$.

По индуктивному предположению, примененному к графу Γ', семейству Ω', подгруппе X и элементу g, найдется подгруппа $M \in \Omega'$, удовлетворяющая соотношению $g\rho_M \notin X\rho_M$. Тогда искомой является подгруппа $N \in \Omega$ такая, что $M = N \cap B$.

Случай 2. $g \notin B$.

Пусть $g = g_0 t_e^{\varepsilon_1} g_1 \ldots t_e^{\varepsilon_n} g_n$ $(n \geqslant 1)$ — приведенная запись g как элемента HNN-расширения группы B с проходной буквой t_e. Для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ определим подгруппу $L_i \in \Omega'$ следующим образом. Если $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$, то $g_i \notin H_{-\varepsilon_i e}$ и L_i — подгруппа, удовлетворяющая соотношению $g_i\rho_{L_i} \notin H_{-\varepsilon_i e}\rho_{L_i}$, существование которой обеспечивается индуктивным предположением, примененным к графу Γ', семейству Ω', подгруппе $H_{-\varepsilon_i e}$ и элементу g_i. В противном случае L_i — произвольная подгруппа семейства Ω', непустого по условию предложения.

Пусть $M_i \in \Omega$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ — такая подгруппа, что $L_i = M_i \cap B$, и $N \in \Omega$ — подгруппа, лежащая в $\bigcap_{i=0}^{n} M_i$. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ из равенства $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ следует, что $g_i\rho_N \notin H_{-\varepsilon_i e}\rho_N$. Поэтому в группе $\pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma))$, рассматриваемой как HNN-расширение группы $\pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma'))$ с проходной буквой t_e и связанными подгруппами $H_{+e}\rho_N$ и $H_{-e}\rho_N$, элемент $g\rho_N$ имеет приведенную запись длины $n \geqslant 1$ и, следовательно, не принадлежит подгруппе $X\rho_N$, содержащейся в базовой группе. Таким образом, подгруппа N является искомой. $\square$

Доказательство теоремы 2.3.1. 1. Пусть $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ — произвольный элемент и w — некоторое слово от образующих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, задающее элемент g. Определим подмножества $\mathcal{V}_g \subseteq \mathcal{V}$ и $\mathcal{E}_g \subseteq \mathcal{E}$ так же, как и при доказательстве предложения 1.2.3: $v \in \mathcal{V}_g$ тогда и только тогда, когда слово w содержит некоторый образующий группы G_v или обратный к нему; $e \in \mathcal{E}_g$ тогда и только тогда, когда в слово w входит символ t_e или t_e^{-1}. Пусть $\mathcal{T}'$ — конечное поддерево дерева $\mathcal{T}$, содержащее все вершины множества

$$\mathcal{V}_g \cup \big\{e(\varepsilon) \mid e \in \mathcal{E}_g,\ \varepsilon = \pm 1\big\},$$

Γ' — подграф графа Γ, получающийся путем добавления к дереву $\mathcal{T}'$ всех ребер из множества $\mathcal{E}_g$. Тогда согласно предложению 1.2.1 группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma')) = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T}')$ вкладывается в группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ посредством тождественного отображения образующих и $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'), \mathcal{T}')$.

Пусть

$$\Omega = \big\{N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma')) \mid N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))\big\}.$$

Поскольку $\mathcal{C}$ — непустой класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, ему принадлежит единичная группа. Поэтому семейство $\mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$ также непусто и в силу предложения 1.3.4 вместе с любыми двумя подгруппами содержит их пересечение. Очевидно, что теми же свойствами обладает и Ω. Следовательно, граф Γ' и семейство Ω удовлетворяют условиям предложения 2.3.3, согласно которому найдется подгруппа $M \in \Omega$ такая, что $g\rho_M \neq 1$ (здесь в качестве X выбирается единичная подгруппа).

По определению семейства Ω для некоторой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$ справедливо равенство $M = N \cap \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'))$. Так как согласно предложению 2.3.2 гомоморфизм ρ_N продолжает ρ_M, то $g\rho_N \neq 1$. По предложению 1.2.6 существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}_N(\Gamma)) = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\rho_N$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех вершинных группах. Значит, группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\rho_N$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема в силу теоремы 2.2.1 и отображение ρ_N может быть продолжено до гомоморфизма группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, переводящего g в неединичный элемент.

2. Из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ следует, что

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))} N = 1,$$

откуда вытекают требуемые равенства. □

§ 2.4. Графы изоморфных групп

Понятно, что для применения теоремы 2.3.1 нужно, во-первых, уметь строить системы совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и, во-вторых, располагать достаточными условиями существования гомоморфизма этой группы на группу из аппроксимирующего класса, инъективного на всех вершинных группах. Но даже если и то, и другое имеется, остается еще проблема проверки равенств из условий ($\mathfrak{F}$.3) и ($\mathfrak{F}$.4). Упростить эту задачу позволяет

Предложение 2.4.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, и $\mathfrak{R}$ — совокупность всех $\mathcal{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Если для любых $v \in \mathcal{V}$, $N \in \mathcal{C}^*(G_v)$ существует система $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ такая, что $\mathcal{R}(v) \leqslant N$, то условия ($\mathfrak{F}$.3) и ($\mathfrak{F}$.4) равносильны соответственно условиям*

($\mathfrak{F}$.5) *все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы;*

($\mathfrak{F}$.6) *для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Доказательство. Если $N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$, то в силу предложения 1.3.1 для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ справедливо включение $N \cap G_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$. Поэтому

$$(\mathfrak{F}.3) \Rightarrow (\mathfrak{F}.5), \quad (\mathfrak{F}.4) \Rightarrow (\mathfrak{F}.6).$$

Противоположные утверждения (в случае выполнения условия предложения) очевидны. □

Объединяя предложение 2.4.1 и теорему 2.3.1, получаем более слабую, но и более удобную в применении версию последней.

Теорема 2.4.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп и $\mathfrak{R}$ — совокупность всех $\mathcal{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Пусть также для любых $v \in \mathcal{V}$, $N \in \mathcal{C}^*(G_v)$ существует система $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющая условию $\mathcal{R}(v) \leqslant N$. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Применим теорему 2.4.2 для доказательства критерия аппроксимируемости корневым классом групп фундаментальной группы графа изоморфных групп. Эта конструкция определяется ниже и выглядит довольно искусственной, но может быть полезна для построения примеров групп с заданными свойствами (см., например, [114, 151, 174] и теорему 2.5.1 из § 2.5).

Пусть для любых $u, w \in \mathcal{V}$ существует изоморфизм $\alpha_{u,w} \colon G_u \to G_w$ и множество изоморфизмов $\{\alpha_{u,w} \mid u, w \in \mathcal{V}\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall v \in \mathcal{V}\ \alpha_{v,v} = \mathrm{id}_{G_v}$;

2) $\forall u, v, w \in \mathcal{V}\ \alpha_{u,v}\alpha_{v,w} = \alpha_{u,w}$ (в частности, $\forall u, w \in \mathcal{V}\ \alpha_{w,u} = \alpha_{u,w}^{-1}$);

3) $\forall e \in \mathcal{E}\ \forall \varepsilon = \pm 1\ \alpha_{e(\varepsilon),\, e(-\varepsilon)}\big|_{H_{\varepsilon e}} = \varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$.

Тогда $\mathcal{G}(\Gamma)$ будем называть *графом изоморфных групп.*

Фундаментальная группа графа изоморфных групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ в некоторых случаях имеет особое название. А именно, если граф Γ состоит из двух вершин и соединяющего их ребра e, то обобщенное свободное произведение $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ называется *дублем группы* $G_{e(1)}$ (или $G_{e(-1)}$); см., например, [174]. Если же граф Γ имеет одну вершину и одну петлю в ней, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ является частным случаем *автоморфно индуцированного HNN-расширения* (это — HNN-расширение, в котором связывающий изоморфизм действует как некоторый автоморфизм базовой группы) [152].

Аппроксимируемость различными, в том числе произвольными, корневыми классами фундаментальных групп графов изоморфных групп изучалась в [16, 136, 187]. Обобщением полученных в этих работах результатов служит

Теорема 2.4.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, Γ — произвольный граф и*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E}),\ \alpha_{u,w}\ (u, w \in \mathcal{V})\big) \ -$$

соответствующий ему граф изоморфных групп. Группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.

Доказательство. Достаточность. Предположим сначала, что $G_v \in \mathcal{C}$ для всех $v \in \mathcal{V}$ и покажем, что тогда существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех вершинных группах.

Зафиксируем некоторую вершину $u \in \mathcal{V}$ и определим отображение σ_0 образующих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в группу G_u следующим образом: если x — образующий группы G_v, то $x\sigma_0 = x\alpha_{v,u}$, если $e \in \mathcal{E}$ — ребро, не принадлежащее остовному дереву $\mathcal{T}$, то $t_e\sigma_0 = 1$.

Пусть σ обозначает продолжение σ_0 до отображения слов, $e \in \mathcal{E}$ и $h \in H_e$. Так как $\varphi_{+e}\alpha_{e(1),\, e(-1)} = \varphi_{-e}$ и $\alpha_{e(1),\, e(-1)}\alpha_{e(-1),u} = \alpha_{e(1),u}$, то

$$h\varphi_{+e}\sigma = h\varphi_{+e}\alpha_{e(1),u} = h\varphi_{+e}\alpha_{e(1),\, e(-1)}\alpha_{e(-1),u} = h\varphi_{-e}\alpha_{e(-1),u} = h\varphi_{-e}\sigma.$$

Следовательно, σ переводит все определяющие соотношения группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в равенства, верные в группе G_u, и потому определяет гомоморфизм первой на вторую. Остается заметить, что, будучи продолжением изоморфизмов $\alpha_{v,u}$ $(v \in \mathcal{V})$, σ действует инъективно на всех вершинных группах и, стало быть, является искомым отображением.

Пусть теперь G_v $(v \in \mathcal{V})$ — произвольные $\mathcal{C}$-аппроксимируемые группы, $u \in \mathcal{V}$ и $N \in \mathcal{C}^*(G_u)$. Положим $R_v = R_u\alpha_{u,v}$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Пользуясь соотношениями $R_w = R_v\alpha_{v,w}$ и $\alpha_{e(\varepsilon),\, e(-\varepsilon)}\big|_{H_{\varepsilon e}} = \varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$, справедливыми для всех $v, w \in \mathcal{V}$, $e \in \mathcal{E}$,

$\varepsilon = \pm 1$, легко проверить, что $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Нетрудно показать также, что $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma)$ — граф изоморфных $\mathcal{C}$-групп и, значит, ввиду доказанного выше система $\mathcal{R}$ является $\mathcal{C}$-допустимой. Поскольку вершина $u \in \mathcal{V}$ и подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G_u)$ были выбраны произвольными, отсюда следует, что группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема согласно теореме 2.4.2.

Необходимость. Пусть $e \in \mathcal{E}$ — произвольное ребро. Тогда согласно предложению 1.2.2 группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ содержит подгруппу, изоморфную свободному произведению P групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с подгруппами H_{+e} и H_{-e}, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}$.

Предположим, что для некоторого $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ не является $\mathcal{C}$-отделимой в группе $G_{e(\varepsilon)}$ и $x \in G_{e(\varepsilon)} \setminus H_{\varepsilon e}$ — такой элемент, что $x\theta \in H_{\varepsilon e}\theta$ для каждого гомоморфизма θ группы $G_{e(\varepsilon)}$ на группу из класса $\mathcal{C}$. Так как $\alpha_{e(\varepsilon),\,e(-\varepsilon)}\big|_{H_{\varepsilon e}} = \varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$, то $x\alpha_{e(\varepsilon),e(-\varepsilon)} \in G_{e(-\varepsilon)} \setminus H_{-\varepsilon e}$. Поэтому элемент $g = x\alpha_{e(\varepsilon),e(-\varepsilon)}x^{-1}$ имеет в группе P несократимую запись длины 2 и, следовательно, отличен от 1. Вместе с тем, если σ — произвольный гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathcal{C}$, то $x \equiv h \pmod{\ker\sigma}$ для некоторого элемента $h \in H_{\varepsilon e}$ и

$$g \equiv (h\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e})h^{-1} = 1 \pmod{\ker\sigma}.$$

Следовательно, группа P не является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой, что противоречит $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.

Таким образом, подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$ для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. $\mathcal{C}$-аппроксимируемость всех групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ очевидна. $\square$

§ 2.5. О необходимости условия теоремы 2.2.1

Целью настоящего параграфа является обсуждение вопроса о справедливости утверждения, обратного теореме 2.2.1. Отметим, что если гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из корневого класса $\mathcal{C}$, инъективный на всех реберных подгруппах, существует, то каждая подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$ вкладывается в $\mathcal{C}$-группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\sigma$ и ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп сама принадлежит данному классу. Таким образом, интересующий нас вопрос имеет смысл сформулировать следующим образом.

Вопрос. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$ принадлежат классу $\mathcal{C}$ и отличны от 1. При каких условиях $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ влечет за собой существование гомоморфизма этой группы на группу из класса $\mathcal{C}$, действующего инъективно на всех подгруппах $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$?*

Приводимая далее теорема описывает некоторые случаи, в которых указанный гомоморфизм существует. Отметим, что ввиду теорем 2.6.1 и 2.6.3 из § 2.6 условие конечности графа Γ в ней, вообще говоря, не может быть опущено.

Теорема 2.5.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп, Γ — конечный граф и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) конечны и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема;

2) все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) имеют конечный ранг Гирша–Зайцева и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения.

Тогда (при любом выборе остовного дерева $\mathcal{T}$ в графе Γ) существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех подгруппах $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$). Более того, если в каждой группе G_v ($v \in \mathcal{V}$) зафиксирована некоторая подгруппа $N_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$, то гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ выполнялось соотношение $\ker\sigma \cap G_v \leqslant N_v$.

Доказательство. Если все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) конечны, то согласно предложению 1.3.4 существует подгруппа $L \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$, не пересекающаяся с множеством

$$\bigcup_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \varepsilon=\pm1}} H_{\varepsilon e} \setminus \{1\}$$

(являющимся конечным ввиду конечности графа Γ), и естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/L$ оказывается искомым.

Пусть все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) имеют конечный ранг Гирша–Зайцева. Класс всех $\mathcal{C}$-групп без кручения, как и класс $\mathcal{C}$, замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому согласно предложению 1.3.5 для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ найдется подгруппа $L_{\varepsilon e} \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$, тривиально пересекающаяся с подгруппой $H_{\varepsilon e}$. Так как граф Γ конечен, то в силу предложения 1.3.4 подгруппа

$$L = \bigcap_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \varepsilon=\pm1}} L_{\varepsilon e}$$

принадлежит семейству $\mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$ и, следовательно, естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/L$ вновь оказывается искомым.

Допустим теперь, что в каждой группе G_v ($v \in \mathcal{V}$) зафиксирована некоторая подгруппа $N_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$, и положим $R_v = L \cap N_v$, где L — найденная выше подгруппа из семейства $\mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$. Так как $R_{e(\varepsilon)} \cap H_{\varepsilon e} = L \cap H_{\varepsilon e} = 1$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, то совокупность $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и потому определена группа $\pi_1(\mathcal{G}_\mathcal{R}(\Gamma))$ и гомоморфизм $\rho_\mathcal{R}\colon \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathcal{G}_\mathcal{R}(\Gamma))$. Согласно предложению 1.2.5 ядро гомоморфизма $\rho_\mathcal{R}$ совпадает с нормальным замыканием в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ множества $\bigcup_{v\in\mathcal{V}} R_v$ и, следовательно, содержится в L. Поэтому $L\rho_\mathcal{R} \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}_\mathcal{R}(\Gamma)))$ и $L\rho_\mathcal{R} \cap H_{\varepsilon e}\rho_\mathcal{R} = 1$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Из приведенных равенств и предложения 1.2.4 вытекает, что подгруппа $L\rho_\mathcal{R}$ раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы F и подгрупп, сопряженных с подгруппами $L\rho_\mathcal{R} \cap G_v\rho_\mathcal{R}$ ($v \in \mathcal{V}$). Очевидно, что существует гомоморфизм σ группы $L\rho_{\mathcal{R}}$ на прямое произведение D групп $L\rho_{\mathcal{R}} \cap G_v\rho_{\mathcal{R}}$ $(v \in \mathcal{V})$, действующий инъективно на всех свободных множителях, кроме F, и переводящий элементы подгруппы F в 1.

Так как $L \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$, то ввиду предложений 1.3.1 и 1.3.4

$$L \cap G_v \in \mathcal{C}^*(G_v), \quad R_v = N_v \cap (L \cap G_v) \in \mathcal{C}^*(G_v),$$
$$G_v\rho_{\mathcal{R}} = G_v/R_v \in \mathcal{C}, \quad L\rho_{\mathcal{R}} \cap G_v\rho_{\mathcal{R}} \in \mathcal{C}$$

для всех $v \in \mathcal{V}$. Отсюда и из конечности множества $\mathcal{V}$ следует, что группа D представляет собой прямое произведение конечного числа $\mathcal{C}$-групп и потому сама принадлежит классу $\mathcal{C}$. Значит, $\ker\sigma \in \mathcal{C}^*(L\rho_{\mathcal{R}})$ и мы получаем субнормальную последовательность

$$\ker\sigma \leqslant L\rho_{\mathcal{R}} \leqslant \pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$$

с факторами из класса $\mathcal{C}$. Поскольку данный класс является корневым, найдется подгруппа $T_{\mathcal{R}} \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma)))$ такая, что $T_{\mathcal{R}} \leqslant \ker\sigma$.

Пусть T — прообраз подгруппы $T_{\mathcal{R}}$ относительно гомоморфизма $\rho_{\mathcal{R}}$. Тогда $T \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$. Так как гомоморфизм σ действует инъективно на всех свободных множителях группы $L\rho_{\mathcal{R}}$, сопряженных с подгруппами $L\rho_{\mathcal{R}} \cap G_v\rho_{\mathcal{R}}$ $(v \in \mathcal{V})$, то

$$1 = \ker\sigma \cap (L\rho_{\mathcal{R}} \cap G_v\rho_{\mathcal{R}}) = \ker\sigma \cap G_v\rho_{\mathcal{R}}$$

для всех $v \in \mathcal{V}$. Поскольку $T_{\mathcal{R}} \leqslant \ker\sigma$, отсюда следует, что $T_{\mathcal{R}} \cap G_v\rho_{\mathcal{R}} = 1$ и потому $T \cap G_v = R_v$ для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$. Так как $T_{\mathcal{R}} \leqslant L\rho_{\mathcal{R}}$, то $T \leqslant L$ и $T \cap H_{\varepsilon e} = 1$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Стало быть, естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/T$ является искомым. $\square$

Основным результатом настоящего параграфа служит теорема 2.5.2, утверждающая, что для многих корневых классов групп аппроксимируемость таким классом фундаментальной группы графа групп является более слабым утверждением, нежели существование гомоморфизма этой группы на группу из указанного класса, инъективного на всех реберных подгруппах.

Теорема 2.5.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну бесконечную группу и не содержащий некоторую (абсолютно) свободную группу конечного или счетного ранга. Тогда для любого графа $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ существует граф групп*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big)$$

такой, что:

1) *все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы;*

2) *все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1)$ принадлежат классу $\mathcal{C}$ и отличны от 1;*

3) *группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема;*

4) *каковы бы ни были остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ и гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ на группу из класса $\mathcal{C}$, для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ имеет место соотношение $\ker\sigma \cap H_{\varepsilon e} \neq 1$.*

Отметим, что условию теоремы 2.5.2 удовлетворяет, в частности, любой корневой класс, состоящий только из периодических групп и содержащий хотя бы одну бесконечную группу.

Предложение 2.5.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, содержащий группу G, мощность которой не меньше мощности некоторой* (*абсолютно*) *свободной группы F, не принадлежащей $\mathcal{C}$. Тогда найдутся группа X и ее подгруппа Y такие, что*:

1) *группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема*;

2) *подгруппа Y принадлежит классу $\mathcal{C}$ и отлична от* 1;

3) *подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X*;

4) *ядро любого гомоморфизма группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ пересекается с подгруппой Y нетривиально.*

Доказательство. Предположим сначала, что класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп. Тогда в силу предложения 1.4.5 он содержит все циклические группы, порядки которых являются степенями некоторого простого числа p.

Пусть для каждого $i \geqslant 1$ C_{p^i} — циклическая группа порядка p^i. Обозначим через X прямое произведение групп C_{p^i} $(i \geqslant 1)$, а через Y — произведение подгрупп $(C_{p^i})^{p^{i-1}}$. Тогда группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема согласно предложению 1.4.9, а подгруппа Y принадлежит классу $\mathcal{C}$ в силу предложения 1.4.7. Так как $X/Y \cong X$, то ввиду предложения 1.3.2 подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X. Заметим, наконец, что если существует гомоморфизм группы X на некоторую группу $Z \in \mathcal{C}$, инъективный на подгруппе Y, то он должен быть инъективен на каждой подгруппе C_{p^i} $(i \geqslant 1)$ и, значит, группа Z содержит элементы сколь угодно большого порядка, что противоречит предложению 1.4.6.

Таким образом, в случае, когда класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп, предложение доказано. Пусть теперь класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу и X — прямое сплетение свободной группы F с $\mathcal{C}$-группой G. Пусть также D — прямое произведение изоморфных копий группы F, индексированных элементами группы G, т. е. множество всех функций из G в F, принимающих отличные от 1 значения не более чем в конечном числе точек, с поточечным умножением. Тогда X — это расширение группы D при помощи группы G, в котором сопряжение посредством элемента $g \in G$ переводит функцию $d \in D$ в функцию d^g, определенную следующим образом: $d^g(x) = d(gx)$, $x \in G$.

Так как мощность группы F не превосходит мощности группы G, то существует инъективное отображение β первой во вторую. Для каждого элемента $g \in G$ определим функцию $d_g \in D$ следующим образом: если существует элемент $f \in F$ такой, что $\beta(f) = g$, то

$$d_g(x) = \begin{cases} f, & x = g, \\ 1, & x \neq g; \end{cases}$$

в противном случае $d_g = 1$. Обозначим через Y подгруппу группы D, порожденную всеми элементами d_g $(g \in G)$.

В силу предложений 1.4.8 и 1.4.9 группы F, D и X аппроксимируются классом $\mathcal{C}$. Легко видеть, что подгруппа Y представляет собой прямое произведение циклических подгрупп, порожденных элементами d_g ($g \in G$). Поскольку группа D не имеет кручения, Y оказывается свободной абелевой группой и потому принадлежит классу $\mathcal{C}$ в силу предложения 1.4.7.

Покажем, что подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X. Для этого зафиксируем произвольный элемент $x \in X \setminus Y$ и укажем гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$.

Если $x \notin D$, искомым является естественный гомоморфизм группы X на фактор-группу X/D, изоморфную $\mathcal{C}$-группе G. Пусть $x \in D$. Так как $x \notin Y$, то найдется такой элемент $h \in G$, что $x(h)$ не принадлежит циклической подгруппе $\big\langle d_h(h) \big\rangle \leqslant F$.

Согласно следствию 1.4.4 класс всех $\mathcal{C}$-групп без кручения является корневым. Значит, по предложению 1.4.8 группа F аппроксимируется $\mathcal{C}$-группами без кручения и в силу предложений 1.3.4 и 1.3.5 подгруппа $\big\langle d_h(h) \big\rangle$ $\mathcal{C}$-отделима в группе F.

Пусть подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(F)$ такова, что $x(h) \notin \big\langle d_h(h) \big\rangle N$, и $\overline{X}$ — прямое сплетение группы $\overline{F} = F/N$ с группой G. Нетрудно показать, что отображение, переводящее произведение gd ($g \in G$, $d \in D$) в произведение $g\overline{d}$, где $\overline{d}$ — функция из G в $\overline{F}$, определенная по правилу $\overline{d}(x) = d(x)N$, задает гомоморфизм σ группы X на группу $\overline{X}$. Образ подгруппы Y при этом гомоморфизме по-прежнему представляет собой прямое произведение подгрупп, порожденных элементами $\overline{d_g}$ ($g \in G$). Поэтому из соотношений

$$\overline{x}(h) = x(h)N \notin \big\langle d_h(h) \big\rangle N/N = \big\langle \overline{d_h}(h) \big\rangle$$

вытекает, что $x\sigma \notin Y\sigma$.

Остается заметить, что декартово сплетение $\mathcal{C}$-группы $\overline{F}$ с $\mathcal{C}$-группой G согласно теореме 1.4.1 в свою очередь оказывается $\mathcal{C}$-группой. Поскольку прямое сплетение является подгруппой декартового, отсюда следует, что $\overline{X} \in \mathcal{C}$. Таким образом, подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X.

Предположим теперь, что некоторый гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ действует инъективно на подгруппе Y. Тогда $d_g \notin \ker\sigma$ для любого $g \in G$ такого, что $d_g \neq 1$.

Для каждого $f \in F$ обозначим через $\dot{f}$ элемент подгруппы D, определенный следующим образом:

$$\dot{f}(x) = \begin{cases} f, & x = 1, \\ 1, & x \neq 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что множество функций $\dot{F} = \{\dot{f} \mid f \in F\}$ является подгруппой и отображение $f \to \dot{f}$ задает изоморфизм F на $\dot{F}$.

Пусть $f \in F \setminus \{1\}$ и $g = \beta(f)$. Тогда $d_g = g\dot{f}g^{-1}$ и, следовательно, $\dot{f} \notin \ker\sigma$. Стало быть, подгруппа $\dot{F}$ вкладывается в $\mathcal{C}$-группу $X\sigma$ и потому сама содержится в классе $\mathcal{C}$. Но это невозможно, поскольку по условию предложения $F \notin \mathcal{C}$.

Таким образом, ядро любого гомоморфизма группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ пересекается с подгруппой Y нетривиально. $\square$

Следующее утверждение представляет собой усиленную форму теоремы 2.5.2.

Предложение 2.5.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, содержащий группу G, мощность которой не меньше мощности некоторой (абсолютно) свободной группы F, не принадлежащей $\mathcal{C}$. Тогда для любого графа $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ существует граф групп*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big)$$

такой, что:

1) *все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы;*

2) *все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$ принадлежат классу $\mathcal{C}$;*

3) *группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема;*

4) *каковы бы ни были остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ и гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ на группу из класса $\mathcal{C}$, для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ имеет место соотношение $\ker \sigma \cap H_{\varepsilon e} \neq 1$.*

Доказательство. Данное утверждение вытекает из предложения 2.5.3 и теоремы 2.4.3. Если X и Y — группа и подгруппа из предложения 2.5.3, то в качестве групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ и H_e $(e \in \mathcal{E})$ следует взять группы X и Y соответственно, а в качестве отображений $\varphi_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$ — естественные вложения Y в X. Утверждения 1, 2 и 4 в этом случае будут следовать из предложения 2.5.3, а утверждение 3 — из теоремы 2.4.3. $\square$

Доказательство теоремы 2.5.2. Свободная группа не более чем счетного ранга счетна и потому ее мощность не больше мощности любой бесконечной группы, принадлежащей классу $\mathcal{C}$. Таким образом, указанный класс удовлетворяет условию предложения 2.5.4, из которого и вытекает требуемый результат. $\square$

§ 2.6. О соотношении понятий $\mathcal{C}$-допустимости и слабой $\mathcal{C}$-допустимости

Вершинные группы графа групп, построенного при доказательстве теоремы 2.5.2, не принадлежат аппроксимирующему классу, и это обстоятельство существенным образом используется в рассуждениях. Целью настоящего параграфа является конструирование примеров графов групп, фундаментальные группы которых аппроксимируются некоторым корневым классом $\mathcal{C}$, но не обладают гомоморфизмами на $\mathcal{C}$-группы, инъективными на всех вершинных группах, несмотря на то, что последние содержатся в классе $\mathcal{C}$. Тем самым устанавливается, что условие $\mathcal{C}$-допустимости, вообще говоря, сильнее условия слабой $\mathcal{C}$-допустимости. Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 2.6.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из конечных групп. Тогда для любого графа $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ с бесконечным числом вершин существует граф групп*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big)$$

такой, что:

1) *все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ принадлежат классу $\mathcal{C}$*;

2) *все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1)$ отличны от* 1;

3) *группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема*;

4) *для любого остовного дерева $\mathcal{T}$ в графе Γ и для любого гомоморфизма σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ на группу из класса $\mathcal{C}$ найдется вершина $v \in \mathcal{V}$, удовлетворяющая условию* $\ker \sigma \cap G_v \neq 1$.

Теорема 2.6.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и содержащий хотя бы одну бесконечную группу. Тогда для любого графа $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, имеющего хотя бы одно ребро, существует граф групп*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big)$$

такой, что:

1) *все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ принадлежат классу $\mathcal{C}$*;

2) *все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1)$ отличны от* 1;

3) *группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема*;

4) *каковы бы ни были остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ и гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ на группу из класса $\mathcal{C}$, для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ имеет место соотношение* $\ker \sigma \cap H_{\varepsilon e} \neq 1$.

В случае, когда класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы, вопрос о справедливости утверждения, аналогичного теореме 2.6.2, остается открытым. Однако, может быть доказана, например,

Теорема 2.6.3. *Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{tf}}$ — класс всех разрешимых групп без кручения. Тогда для любого графа $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ с бесконечным числом вершин существует граф групп*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big)$$

такой, что:

1) *все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ принадлежат классу $\mathcal{S}_{\mathrm{tf}}$*;

2) *все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1)$ отличны от* 1;

3) *группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{S}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируема*;

4) *для любого остовного дерева $\mathcal{T}$ в графе Γ и для любого гомоморфизма σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ на разрешимую группу найдется вершина $v \in \mathcal{V}$, удовлетворяющая условию* $\ker \sigma \cap G_v \neq 1$.

Доказательство теоремы 2.6.1. Согласно предложению 1.4.5 класс $\mathcal{C}$ включает класс $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп для некоторого простого числа p. Пусть $\{F_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ — семейство $\mathcal{F}_p$-групп, содержащее бесконечное число попарно неизоморфных групп, H — некоторая неединичная $\mathcal{F}_p$-группа. Сопоставим каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ прямое произведение $H \times F_v$, каждому ребру — группу H и ее естественные вложения в вершинные группы. Понятно, что бесконечное число неизоморфных групп $H \times F_v$ $(v \in \mathcal{V})$ не может быть одновременно вложено ни в какую (конечную по условию) группу из класса $\mathcal{C}$ и потому выполнены утверждения 1, 2 и 4. Покажем, что группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой и, следовательно, справедливо утверждение 3. Для этого зафиксируем произвольный элемент $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ и найдем гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{F}_p$, переводящий g в неединичный элемент.

Легко видеть, что подгруппа H нормальна в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и одновременно является ретрактом в этой группе. Поэтому, если $g \in H$, то искомым оказывается ретрактирующий гомоморфизм. Фактор-группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/H$ представляет собой свободное произведение $\mathcal{F}_p$-групп F_v $(v \in \mathcal{V})$ и свободной группы, базисом которой служат проходные буквы группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Такое произведение аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ в силу предложения 1.4.8. Следовательно, если $g \notin H$, то естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/H$ также может быть продолжен до искомого. □

Доказательство теоремы 2.6.3 проводится с использованием тех же рассуждений, что и выше. Достаточно заменить в них класс $\mathcal{F}_p$ классом $\mathcal{S}_{\mathrm{tf}}$ и потребовать, чтобы в семействе $\{F_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ встречались группы сколь угодно большой ступени разрешимости, одновременно вложить которые в разрешимую группу невозможно. □

Для доказательства теоремы 2.6.2 потребуются три вспомогательных предложения.

Предложение 2.6.4. *Пусть p — простое число и $n = p^l$ для некоторого $l \geqslant 1$. Пусть также λ, μ — биекции множества чисел $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, определенные следующим образом:*

$$\lambda(i) = (i+1) \bmod n,$$
$$\mu(i) = \begin{cases} i+1, & i \not\equiv p-1 \pmod{p}, \\ i-(p-1), & i \equiv p-1 \pmod{p}, \end{cases}$$

и X — подгруппа группы биективных отображений множества M, порожденная элементами λ, μ. Тогда $X^n = 1$ и потому X является конечной p-группой.

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольный элемент, записанный в виде произведения порождающих λ, μ; $\sigma_\lambda(x)$ и $\sigma_\mu(x)$ — суммы показателей степеней, в которых λ и μ входят в эту запись. Заметим, что для любого $i \in M$

$$\lambda(i) = \begin{cases} \mu(i), & i \not\equiv p-1 \pmod{p}, \\ (\mu\lambda^p)(i), & i \equiv p-1 \pmod{p}, \end{cases}$$
$$\lambda^{-1}(i) = \begin{cases} \mu^{-1}(i), & i \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ (\lambda^{-p}\mu^{-1})(i), & i \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Поэтому для каждого $i \in M$ найдутся такие элемент $y_i \in \mathrm{sgp}\{\lambda^p, \mu\}$ и число $k_i \in \mathbb{Z}$, что

$$(x^p)(i) = y_i(i), \quad \sigma_\mu(y_i) = p\big(\sigma_\lambda(x) + \sigma_\mu(x)\big), \quad \sigma_\lambda(y_i) = pk_i$$

(здесь, как и выше, $\sigma_\lambda(y_i)$ и $\sigma_\mu(y_i)$ обозначают суммы показателей степеней, в которых λ и μ входят в запись элемента y_i). Поскольку $\mu^p = [\lambda^p, \mu] = 1$, справедливо равенство $y_i = \lambda^{pk_i}$. Следовательно,

$$(x^p)(i) = (\lambda^{pk_i})(i) = (i + pk_i) \bmod n.$$

Если $j = (i + pr) \bmod n$ для некоторого $r \in \mathbb{Z}$, то

$$(x^p)(j) = (\lambda^{pr}x^p)(i) = (x^p\lambda^{pr})(i) = \big(i + p(k_i + r)\big) \bmod n.$$

Отсюда с помощью очевидной индукции получаем, что для любого $s \geqslant 1$ справедливо равенство

$$(x^p)^s(i) = (i + psk_i) \bmod n$$

и, следовательно, $(x^p)^{n/p}(i) = i$. Поскольку элемент x и число i были выбраны произвольными, это означает, что $X^n = 1$. □

Предложение 2.6.5. *Пусть p, n, M, λ и μ определены так же, как и в предложении 2.6.4, $C_0, \ldots, C_{n-1}$ — циклические группы порядка p с порождающими $c_0, \ldots, c_{n-1}$ соответственно, H_n — прямое произведение групп C_i ($i \in M$), A_n и B_n — расщепляемые расширения группы H_n при помощи групп $\langle\alpha_n\rangle$ и $\langle\beta_n\rangle$ соответственно, где α_n и β_n — автоморфизмы группы H_n, действующие по правилу:*

$$c_i\alpha_n = c_{\mu(i)}, \quad c_i\beta_n = c_{(\lambda^{-1}\mu\lambda)(i)} \quad (i \in M).$$

Тогда свободное произведение P_n групп A_n и B_n с объединенной подгруппой H_n аппроксимируется конечными p-группами.

Доказательство. Так как подгруппа H_n нормальна в группах A_n и B_n, то определена группа $\mathrm{Aut}_{P_n}(H_n)$, состоящая из ограничений на подгруппу H_n всевозможных внутренних автоморфизмов группы P_n. Очевидно, что группа $\mathrm{Aut}_{P_n}(H_n)$ порождается автоморфизмами α_n, β_n и изоморфна подгруппе группы X из предложения 2.6.4, порожденной биекциями μ и $\lambda^{-1}\mu\lambda$. Отсюда следует, что $\mathrm{Aut}_{P_n}(H_n)$ — конечная p-группа и, поскольку A_n и B_n также являются конечными p-группами, аппроксимируемость группы P_n имеет место в силу следствия 2 из [121]. □

Предложение 2.6.6. *Пусть p — простое число, λ_∞ и μ_∞ — биекции множества $\mathbb{Z}$, определенные следующим образом:*

$$\lambda_\infty(i) = i + 1,$$
$$\mu_\infty(i) = \begin{cases} i + 1, & i \not\equiv p - 1 \pmod p, \\ i - (p - 1), & i \equiv p - 1 \pmod p. \end{cases}$$

Пусть также C_i — циклическая группа порядка p с порождающим c_i для любого *числа $i \in \mathbb{Z}$, H_∞ — прямое произведение групп C_i ($i \in \mathbb{Z}$), A_∞ и B_∞ — расщепляемые расширения группы H_∞ при помощи групп $\langle \alpha_\infty \rangle$ и $\langle \beta_\infty \rangle$ соответственно, где α_∞ и β_∞ — автоморфизмы группы H_∞, действующие по правилу:*

$$c_i\alpha_\infty = c_{\mu_\infty(i)}, \quad c_i\beta_\infty = c_{(\lambda_\infty^{-1}\mu_\infty\lambda_\infty)(i)} \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Свободное произведение P_∞ групп A_∞ и B_∞ с объединенной подгруппой H_∞ аппроксимируется конечными p-группами.*

2. *Автоморфизм $\alpha_\infty^{-1}\beta_\infty$ имеет бесконечный порядок.*

Доказательство. 1. Пусть $x \in P_\infty \setminus \{1\}$ — произвольный элемент. Укажем гомоморфизм группы P_∞ на конечную p-группу, переводящий x в неединичный элемент.

Подгруппа H_∞ нормальна в группе P_∞ и фактор-группа P_∞/H_∞ представляет собой свободное произведение двух конечных p-групп $\langle \alpha_\infty \rangle$ и $\langle \beta_\infty \rangle$. Поэтому, если $x \notin H_\infty$, то в силу предложения 1.4.8 естественный гомоморфизм $P_\infty \to P_\infty/H_\infty$ может быть продолжен до искомого.

Если $x \in H_\infty$, то существует такое p-число n, что

$$x \in \prod_{-n/2 \leqslant i < n/2} C_i.$$

Поскольку $p \mid n$, отображение образующих группы P_∞ в группу P_n из предложения 2.6.5, действующее по правилу

$$\alpha_\infty \mapsto \alpha_n, \quad \beta_\infty \mapsto \beta_n, \quad c_i \mapsto c_{i \bmod n},$$

определяет гомоморфизм. Понятно, что ввиду выбора n элемент x не принадлежит ядру этого гомоморфизма и, следовательно, последний может быть продолжен до искомого отображения.

2. Непосредственно проверяется, что, если $i \in \mathbb{Z}$ и $i \equiv 0 \pmod p$, то

$$[\mu_\infty, \lambda_\infty](i) = i + p.$$

Отсюда $c_i(\alpha_\infty^{-1}\beta_\infty) = c_{i+p}$ и, следовательно, порядок автоморфизма $\alpha_\infty^{-1}\beta_\infty$ бесконечен. □

Доказательство теоремы 2.6.2. Так как класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп и содержит хотя бы одну бесконечную группу, то согласно предложению 1.4.5 он включает класс $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп для некоторого простого числа p (которое далее предполагается фиксированным) и декартово произведение бесконечного числа циклических групп порядка p. Значит, классу $\mathcal{C}$ принадлежат группы H_∞, A_∞ и B_∞ из предложения 2.6.6. Определим граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ следующим образом.

Если граф Γ имеет только одну вершину, то сопоставим ей группу H_∞, а каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — ту же группу H_∞ и гомоморфизмы $\varphi_{+e} = \mathrm{id}_{H_\infty}$, $\varphi_{-e} = \alpha_\infty^{-1}\beta_\infty$, где α_∞ и β_∞ — автоморфизмы из предложения 2.6.6. В противном случае выберем в графе Γ некоторое не являющееся петлей ребро f, сопоставим вершине $f(1)$ группу A_∞, всем остальным вершинам — группу B_∞, всем ребрам — группу H_∞ и тождественные ее вложения в группы A_∞ и B_∞.

Легко видеть, что в обоих случаях при любом выборе остовного дерева $\mathcal{T}$ в графе Γ все реберные подгруппы группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ оказываются совпадающими, нормальными в $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и равными H_∞ (эту единственную подгруппу снова будем обозначать через H_∞). Для доказательства утверждения 3 зафиксируем произвольный элемент $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ и укажем гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на $\mathcal{C}$-группу, переводящий g в неединичный элемент.

Фактор-группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/H_\infty$ представляет собой либо свободную группу, базисом которой служат проходные буквы группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, либо свободное произведение указанной группы и принадлежащих классу $\mathcal{C}$ конечных p-групп, изоморфных A_∞/H_∞ или, что то же самое, B_∞/H_∞. Значит, она аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ согласно предложению 1.4.8 и потому, если $g \notin H_\infty$, то естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))/H_\infty$ может быть продолжен до искомого.

Пусть $g \in H_\infty$. Рассмотрим отображение порождающих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в группу P_∞ из предложения 2.6.6, действующее тождественно на образующих всех вершинных групп и переводящее символы t_e либо в элемент $\alpha_\infty^{-1}\beta_\infty$ (если граф Γ имеет одну вершину), либо в единицу (в противном случае). Легко видеть, что указанное отображение определяет гомоморфизм, инъективный на подгруппе H_∞. Согласно предложению 2.6.6 группа P_∞ аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p \subseteq \mathcal{C}$. Значит, построенный гомоморфизм снова может быть продолжен до искомого.

Переходя к доказательству утверждения 4, заметим, что в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ найдется элемент γ, сопряжение которым действует на подгруппе H_∞ так же, как автоморфизм $\alpha_\infty^{-1}\beta_\infty$.

В самом деле, если граф Γ имеет одну вершину, то в качестве γ можно взять элемент t_e для некоторого ребра $e \in \mathcal{E}$. В противном случае полагаем γ равным одному из элементов

$$\alpha_\infty^{-1}\beta_\infty, \quad (t_f^{-1}\alpha_\infty t_f)^{-1}\beta_\infty$$

в зависимости от того, принадлежит или нет выбранное выше ребро f дереву $\mathcal{T}$ (здесь α_∞ и β_∞ — элементы групп A_∞ и B_∞, сопоставленных вершинам $f(1)$ и $f(-1)$).

Если σ — гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на периодическую группу, то $(\gamma\sigma)^k = 1$ для некоторого $k \geqslant 1$. Так как согласно предложению 2.6.6 автоморфизм $\alpha_\infty^{-1}\beta_\infty$ имеет бесконечный порядок, то найдется элемент $h \in H_\infty$, удовлетворяющий соотношениям

$$h \neq h(\alpha_\infty^{-1}\beta_\infty)^k = \gamma^{-k}h\gamma^k.$$

Следовательно,

$$1 \neq [h, \gamma^k] \in \ker\sigma \cap H_\infty = \ker\sigma \cap H_{\pm e}$$

для всех $e \in \mathcal{E}$. □

§ 2.7. О необходимости условия теоремы 2.3.1

Как уже было отмечено выше, использование условия ($\mathfrak{F}.4$) теоремы 2.3.1 является принципиальным ограничением фильтрационного подхода. И раз уж избавиться от него не удается, то хотелось бы знать, в каких случаях это условие оказывается не только достаточным, но и необходимым для аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.

По-видимому, одним из первых данный вопрос исследовал М. Ширвани [180,182] применительно к свойству финитной аппроксимируемости и конструкциям обобщенного свободного произведения двух групп и HNN-расширения. В [36] результаты М. Ширвани почти в полном объеме распространены на случай аппроксимируемости произвольным классом групп. Там же приводится пример, показывающий, что в общем случае условие ($\mathfrak{F}.4$) не является необходимым для аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Дополнением работы [36] могут служить предложение 3.4 из [69], лемма 8 из [10] и предложение 9 из [209]. Частичным обобщением основных результатов из [36] и перечисленных утверждений из [69, 209] является приводимая далее теорема 2.7.1.

Будем говорить, что слово $w(x,y)$ имеет *специальный вид*, если $w(x,y) = w_1^{\varepsilon_1} \ldots w_n^{\varepsilon_n}$, где $n \geqslant 2$, $w_1, \ldots, w_n \in \{x, y\}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ и никакие два соседних символа w_i, w_{i+1} не равны одновременно x или y. Если X — некоторая группа и Y — ее нормальная подгруппа, то через $\mathrm{Aut}_X(Y)$ будем обозначать подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, Y$, составленную из ограничений на подгруппу Y всевозможных внутренних автоморфизмов группы X.

Сразу же сто́ит пояснить, что если взять в качестве слова специального вида коммутатор $[x, y]$, то результаты данного параграфа можно применить к фундаментальным группам графов групп с центральными реберным подгруппами, которые изучаются в последующих главах.

Теорема 2.7.1. *Пусть для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ в группе $G_{e(\varepsilon)}$ имеется подгруппа $L_{\varepsilon e}$, содержащая подгруппу $H_{\varepsilon e}$ собственным образом и удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий*:

1) *существует слово $w(x,y)$ специального вида такое, что $w(x,y) = 1$ для всех $x \in H_{\varepsilon e}$, $y \in L_{\varepsilon e}$*;

2) *группа $L_{\varepsilon e}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству*;

3) *подгруппа $H_{\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{\varepsilon e}$ и существует слово $w(x,y)$ специального вида такое, что $w(\widehat{x}, \widehat{y}|_{H_{\varepsilon e}}) = \mathrm{id}_{H_{\varepsilon e}}$ для всех $x \in H_{\varepsilon e}$, $y \in L_{\varepsilon e}$*;

4) *подгруппа $H_{\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{\varepsilon e}$ и группа $\mathrm{Aut}_{L_{\varepsilon e}}(H_{\varepsilon e})$ удовлетворяет нетривиальному тождеству.*

Пусть также для любого ребра $e \in E$, если $[L : H_{+e}] = 2 = [L : H_{-e}]$ и $L_{+e} \neq L_{-e}$, то хотя бы одна из групп L_{+e}, L_{-e} удовлетворяет условию 1 или 3. Тогда для каждого класса групп $\mathcal{C}$ из аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ этим классом следует выполнение условия ($\mathfrak{F}.4$).

Доказательство теоремы 2.7.1 составляют три приводимые далее предложения.

Предложение 2.7.2. [180, лемма 2] *Если группа удовлетворяет нетривиальному тождеству, то она удовлетворяет тождеству вида*

$$\omega(y, x_1, x_2) = \omega_0(x_1, x_2) y^{\varepsilon_1} \omega_1(x_1, x_2) \ldots y^{\varepsilon_m} \omega_m(x_1, x_2),$$

где $m \geqslant 1$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, -1\}$ *и* $\omega_0(x_1, x_2), \ldots, \omega_m(x_1, x_2) \in \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, (x_1 x_2^{-1})^{\pm 1}\}$.

Предложение 2.7.3. *Пусть*

$$P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle \text{ —}$$

свободное произведение групп A *и* B *с подгруппами* $H \leqslant A$ *и* $K \leqslant B$, *объединенными относительно изоморфизма* $\varphi\colon H \to K$, L *и* M *— подгруппы группы* P, *удовлетворяющие соотношениям* $H \leqslant L \leqslant A$ *и* $K \leqslant M \leqslant B$. *Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) *существует слово* $w(x, y)$ *специального вида такое, что* $w(x, y) = 1$ *для всех* $x \in H$, $y \in L$;

2) *группа* L *удовлетворяет нетривиальному тождеству и* $[L : H] \geqslant 3$;

3) *подгруппа* H *нормальна в группе* L *и существует слово* $w(x, y)$ *специального вида такое, что* $w(\widehat{x}, \widehat{y}|_H) = \mathrm{id}_H$ *для всех* $x \in H$, $y \in L$;

4) *подгруппа* H *нормальна в группе* L, *группа* $\mathrm{Aut}_L(H)$ *удовлетворяет нетривиальному тождеству и* $[L : H] \geqslant 3$.

Тогда для любого непустого семейства Ω *нормальных подгрупп группы* P *справедливы следующие утверждения.*

I. *Если*

$$\bigcap_{N \in \Omega} K(N \cap B) \neq K$$

и $H \neq L$, *то* $\bigcap_{N \in \Omega} N \neq 1$.

II. *Если*

$$\bigcap_{N \in \Omega} H(N \cap A) \neq H,$$

подгруппа K *нормальна в группе* M *и* $K \neq M$, *то* $\bigcap_{N \in \Omega} N \neq 1$.

Доказательство. I. Пусть

$$b \in \Bigl(\bigcap_{N \in \Omega} K(N \cap B)\Bigr) \setminus K.$$

Тогда $b \in B \setminus K$ и $b \in KN$ для всех $N \in \Omega$. Рассмотрим четыре случая, соответствующие условиям 1–4, и в каждом из них определим некоторым образом элемент $g \in P$. Затем покажем, что во всех случаях $g \neq 1$, но $g \in N$ для любой подгруппы $N \in \Omega$.

1. Поскольку $H \neq L$, найдется элемент $a \in L \setminus H$. Положим $g = w(b, a)$.

2. Согласно предложению 2.7.2 тождество, которому удовлетворяет группа L, можно считать имеющим вид

$$\omega(y, x_1, x_2) = \omega_0(x_1, x_2) y^{\varepsilon_1} \omega_1(x_1, x_2) \ldots y^{\varepsilon_m} \omega_m(x_1, x_2),$$

где $m \geqslant 1$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, -1\}$ и $\omega_0(x_1, x_2), \ldots, \omega_m(x_1, x_2) \in \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, (x_1 x_2^{-1})^{\pm 1}\}$.

Поскольку $[L : H] \geqslant 3$, найдутся элементы $a_1, a_2 \in L \setminus H$, лежащие в разных правых смежных классах группы L по подгруппе H. Положим $g = \omega(b, a_1, a_2)$.

3. Заменяя, если нужно, слово w сопряженным, можем считать, что оно начинается символом $y^{\pm 1}$. Положим $g = \bigl[b, w(b, a)\bigr]$, где a — тот же элемент, что и в случае 1.

4. Положим $g = \bigl[b,\, \omega(b, a_1, a_2)\bigr]$, где тождество ω и элементы a_1, a_2 определены так же, как и в случае 2.

Длина слова w по определению не меньше 2, поэтому в случае 1 элемент g имеет несократимую запись неединичной длины. Так как элементы a_1, a_2 лежат в разных правых смежных классах группы L по подгруппе H, то $a_1 a_2^{-1} \notin H$ и, значит, в случае 2 длина несократимой записи элемента g равна $2m+1$, причем первый и последний слоги указанной записи принадлежат множеству $L \setminus H$. Отсюда сразу же следует, что в случае 4 элемент g имеет несократимую запись длины $4m+4$. Так как в случае 3 слово w начинается символом $y^{\pm 1}$, то длина несократимой записи элемента $w(b, a)^{-1} b w(b, a)$ равна $2n + 1$, где n — длина слова w. Значит, элемент g имеет несократимую запись длины, не меньшей $2n$. Таким образом, во всех случаях $g \neq 1$.

Пусть $N \in \Omega$ — произвольная подгруппа. Так как $b \in KN = HN$, то в случаях 1 и 2 $w(b, a) \equiv 1 \pmod N$ и $\omega(b, a_1, a_2) \equiv 1 \pmod N$, откуда сразу же получаем, что $g \in N$. Легко видеть, что в случаях 3 и 4 группа $\mathrm{Aut}_{LN/N}(HN/N)$ является гомоморфным образом группы $\mathrm{Aut}_L(H)$ и, следовательно, удовлетворяет тем же тождествам. Поэтому в указанных случаях

$$w(\widehat{bN},\, \widehat{aN}|_{HN/N}) = \mathrm{id}_{HN/N}, \quad \omega(\widehat{bN},\, \widehat{a_1 N}|_{HN/N},\, \widehat{a_2 N}|_{HN/N}) = \mathrm{id}_{HN/N}$$

и $gN = 1$.

II. Пусть

$$c \in \Bigl(\bigcap_{N \in \Omega} H(N \cap A)\Bigr) \setminus H$$

и $d \in M \setminus K$. Тогда для любой подгруппы $N \in \Omega$ справедливы соотношения $c \in HN = KN$ и $d^{-1} c d \in KN$, поскольку подгруппа K нормальна в M. Заменим в определениях элемента g из рассмотренных выше случаев 1–4 элементы a и b на c и $d^{-1}cd$ соответственно. Легко видеть, что после такой замены длина несократимой записи элемента g лишь увеличится и, значит, указанный элемент по-прежнему будет отличен от 1. При этом те же рассуждения, что и выше, доказывают включение $g \in N$ для всех $N \in \Omega$. □

Предложение 2.7.4. *Пусть для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ в группе $G_{e(\varepsilon)}$ имеется подгруппа $L_{\varepsilon e}$, содержащая подгруппу $H_{\varepsilon e}$ собственным образом и удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий*:

1) *существует слово $w(x, y)$ специального вида такое, что $w(x, y) = 1$ для всех $x \in H_{\varepsilon e}$, $y \in L_{\varepsilon e}$*;

2) *группа $L_{\varepsilon e}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству*;

3) *подгруппа $H_{\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{\varepsilon e}$ и существует слово $w(x, y)$ специального вида такое, что $w(\widehat{x}, \widehat{y}|_{H_{\varepsilon e}}) = \mathrm{id}_{H_{\varepsilon e}}$ для всех $x \in H_{\varepsilon e}$, $y \in L_{\varepsilon e}$*;

4) *подгруппа $H_{\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{\varepsilon e}$ и группа $\mathrm{Aut}_{L_{\varepsilon e}}(H_{\varepsilon e})$ удовлетворяет нетривиальному тождеству.*

Пусть также для любого ребра $e \in E$, если $[L : H_{+e}] = 2 = [L : H_{-e}]$ и $L_{+e} \neq L_{-e}$, то хотя бы одна из групп L_{+e}, L_{-e} удовлетворяет условию 1 или 3. Тогда для каждого непустого семейства Ω нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ из равенства $\bigcap_{N\in\Omega} N = 1$ следует, что

$$\bigcap_{N\in\Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$$

для всех $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство. Рассуждая от противного, зафиксируем ребро $e \in E$ и число $\varepsilon = \pm 1$, предположим, что

$$\bigcap_{N\in\Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq H_{\varepsilon e},$$

и покажем, что тогда

$$\bigcap_{N\in\Omega} N \neq 1.$$

Согласно условию предложения имеет место по крайней мере одно из следующих утверждений:

(α) $L_{+e} = L_{-e}$;

(β) $[L_{+e} : H_{+e}] \geqslant 3$ или $[L_{-e} : H_{-e}] \geqslant 3$;

(γ) хотя бы одна из групп L_{+e}, L_{-e} удовлетворяет условию 1 или 3.

Рассмотрим три взаимоисключающих случая.

Случай 1. Справедливо утверждение (β) или (γ), ребро e принадлежит дереву $\mathcal{T}$, используемому для задания представления группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$.

Согласно предложению 1.2.1 подгруппа $P = \mathrm{sgp}\left\{G_{e(1)}, G_{e(-1)}\right\}$ представляет собой свободное произведение групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Положим $\Omega_P = \{N \cap P \mid N \in \Omega\}$. Тогда

$$\bigcap_{N\in\Omega_P} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq H_{\varepsilon e}.$$

Пусть подгруппы $H = H_{-\varepsilon e}$ и $L = L_{-\varepsilon e}$ удовлетворяют хотя бы одному из условий 1–4 предложения 2.7.3 (отметим, что от условий настоящего предложения они отличаются лишь дополнительным ограничением на индекс $[L : H]$). Тогда, применяя утверждение I предложения 2.7.3 к группе P и семейству Ω_P (в роли H, K, L и M выступают подгруппы $H_{-\varepsilon e}$, $H_{\varepsilon e}$, $L_{-\varepsilon e}$ и $L_{\varepsilon e}$ соответственно), получаем, что $\bigcap_{N\in\Omega_P} N \neq 1$ и, следовательно, $\bigcap_{N\in\Omega} N \neq 1$.

Предположим, что группа $L_{-\varepsilon e}$ не удовлетворяет ни условию 1, ни условию 3 настоящего предложения и $[L_{-\varepsilon e} : H_{-\varepsilon e}] = 2$ (иначе говоря, условия предложения 2.7.3 для $L_{-\varepsilon e}$ не выполняются). Тогда подгруппа $H_{-\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{-\varepsilon e}$ и, если группа $L_{\varepsilon e}$ также не удовлетворяет ни одному из условий 1, 3 настоящего предложения, то утверждение (γ) не имеет места и $[L_{\varepsilon e} : H_{\varepsilon e}] \geqslant 3$ в силу утверждения (β). Это означает, что для подгрупп $H = H_{\varepsilon e}$ и $L = L_{\varepsilon e}$ справедливо хотя бы одно из условий 1–4 предложения 2.7.3 и потому к группе P и семейству Ω_P можно применить его утверждение II (теперь подгруппы $H_{-\varepsilon e}$ и $H_{\varepsilon e}$, $L_{-\varepsilon e}$ и $L_{\varepsilon e}$ меняются местами и выступают в роли K и H, M и L соответственно). Таким образом, снова $\bigcap_{N\in\Omega} N \neq 1$.

Случай 2. Справедливо утверждение (β) или (γ), ребро e не принадлежит дереву $\mathcal{T}$.

Пусть P — свободное произведение групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с подгруппами H_{+e} и H_{-e}, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}\colon H_{+e} \to H_{-e}$, и σ — отображение порождающих группы P в группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, действующее на образующих группы $G_{e(1)}$ по правилу $x \mapsto x^{t_e} = t_e^{-1}xt_e$, а на образующих группы $G_{e(-1)}$ — по правилу $x \mapsto x$. Как и при доказательстве предложения 1.2.2, проверяется, что σ — инъективный гомоморфизм и $P \cong \operatorname{sgp}\left\{G_{e(1)}^{t_e},\, G_{e(-1)}\right\}$.

Поскольку все подгруппы семейства Ω нормальны в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, из соотношения

$$\bigcap_{N\in\Omega} H_{+e}\big(N \cap G_{e(1)}\big) \neq H_{+e}$$

(если оно имеет место) следует, что

$$\bigcap_{N\in\Omega} H_{+e}^{t_e}\big(N \cap G_{e(1)}^{t_e}\big) \neq H_{+e}^{t_e}.$$

Кроме того,

$$\big[L_{+e}^{t_e} : H_{+e}^{t_e}\big] = \big[L_{+e} : H_{+e}\big].$$

Поэтому остается применить предложение 2.7.3 к группе $\operatorname{sgp}\left\{G_{e(1)}^{t_e},\, G_{e(-1)}\right\}$ и подгруппам $L_{+e}^{t_e}$, L_{-e} так же, как и в случае 1.

Случай 3. Утверждение (α) справедливо, а (β) и (γ) — нет.

Для удобства обозначим подгруппы $L_{+e} = L_{-e}$ и

$$\bigcap_{N\in\Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)})$$

через L_e и $B_{\varepsilon e}$ соответственно. Так как утверждения (β) и (γ) не выполняются, то $[L_e : H_{+e}] = 2 = [L_e : H_{-e}]$ и хотя бы одна из групп L_e, $\operatorname{Aut}_{L_e}(H_{+e})$, $\operatorname{Aut}_{L_e}(H_{-e})$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое в силу предложения 2.7.2 можно считать имеющим вид

$$\omega(y, x_1, x_2) = \omega_0(x_1, x_2)y^{\varepsilon_1}\omega_1(x_1, x_2)\ldots y^{\varepsilon_m}\omega_m(x_1, x_2),$$

где $m \geqslant 1$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, -1\}$ и $\omega_0(x_1, x_2), \ldots, \omega_m(x_1, x_2) \in \left\{x_1^{\pm 1},\, x_2^{\pm 1},\, (x_1x_2^{-1})^{\pm 1}\right\}$.

Предположим, что ребро e принадлежит дереву $\mathcal{T}$. Тогда, как уже было отмечено выше, подгруппа $P = \operatorname{sgp}\left\{G_{e(1)},\, G_{e(-1)}\right\}$ представляет собой свободное произведение групп $G_{e(1)}$, $G_{e(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+e}, H_{-e} и потому в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ выполняются равенства $H_{+e} = G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} = H_{-e}$ [39, следствие 4.4.3]. Поскольку $H_{+e} \neq L_{+e} \leqslant G_{e(1)}$ и $H_{-e} \neq L_{-e} \leqslant G_{e(-1)}$, отсюда вытекает, что $L_{+e} \neq L_{-e}$ в противоречие с утверждением (α). Следовательно, ребро e не принадлежит $\mathcal{T}$.

Зафиксируем элементы $b \in B_{\varepsilon e} \backslash H_{\varepsilon e}$, $g \in L_e \backslash (H_{+e} \cup H_{-e})$ и заметим, что для любой подгруппы $N \in \Omega$ из соотношений $H_{\varepsilon e} \leqslant B_{\varepsilon e} \leqslant H_{\varepsilon e}N$ вытекает, что $B_{\varepsilon e}N = H_{\varepsilon e}N$. Так как $[L_e : H_{\varepsilon e}] = 2$, то либо $H_{\varepsilon e} \leqslant L_e \leqslant B_{\varepsilon e}$, либо $H_{\varepsilon e} = B_{\varepsilon e} \cap L_e$. Предположим сначала, что $H_{\varepsilon e} \leqslant L_e \leqslant B_{\varepsilon e}$.

Пусть

$$x = \omega\bigl(g,\, t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon},\, t_e^{-2\varepsilon} b t_e^{2\varepsilon}\bigr), \quad y = \bigl[g^{-1} t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} g,\, x\bigr].$$

Тогда

$$\omega_i\bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon},\, t_e^{-2\varepsilon} b t_e^{2\varepsilon}\bigr) \in \bigl\{t_e^{-\varepsilon} b^{\pm 1} t_e^{\varepsilon},\, t_e^{-2\varepsilon} b^{\pm 1} t_e^{2\varepsilon},\, (t_e^{-\varepsilon} b t_e^{-\varepsilon} b^{-1} t_e^{2\varepsilon})^{\pm 1}\bigr\} \quad (0 \leqslant i \leqslant m)$$

и, так как $b \notin H_{\varepsilon e}$, $g \notin H_{-\varepsilon e}$, то элементы x, y имеют приведенные записи ненулевой длины и, следовательно, отличны от 1.

Пусть $N \in \Omega$ — произвольная подгруппа. Тогда

$$H_{\varepsilon e}N = L_e N = B_{\varepsilon e}N, \quad H_{-\varepsilon e}N \leqslant L_e N = H_{\varepsilon e}N,$$
$$b \in H_{\varepsilon e}N, \quad t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} \in H_{-\varepsilon e}N \leqslant H_{\varepsilon e}N, \quad t_e^{-2\varepsilon} b t_e^{2\varepsilon} \in H_{-\varepsilon e}N.$$

Поэтому, если группа L_e удовлетворяет тождеству ω, то $x \equiv 1 \pmod N$. Поскольку подгруппа $H_{-\varepsilon e}$ нормальна в группе L_e, из соотношения $t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} \in H_{-\varepsilon e}N$ вытекает, что

$$g^{-1} t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} g \in H_{-\varepsilon e}N \leqslant H_{\varepsilon e}N.$$

Следовательно, если одна из групп $\mathrm{Aut}_{L_e}(H_{+e})$, $\mathrm{Aut}_{L_e}(H_{-e})$ удовлетворяет тождеству ω, то внутренний автоморфизм, производимый в фактор-группе $L_e N/N$ элементом xN, действует тождественно на элемент

$$\bigl(g^{-1} t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} g\bigr)N \in H_{-\varepsilon e}N/N \cap H_{\varepsilon e}N/N$$

и потому $y \equiv 1 \pmod N$.

Таким образом, подгруппа $\bigcap_{N \in \Omega} N$ содержит хотя бы один из неединичных элементов x, y.

Пусть теперь $H_{\varepsilon e} = B_{\varepsilon e} \cap L_e$. Положим

$$x = \omega\bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon},\, b,\, g\bigr), \quad y_{-\varepsilon} = \bigl[t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon},\, x\bigr], \quad y_{\varepsilon} = \bigl[(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon})^{-1} b (t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon}),\, x\bigr].$$

Из соотношения $H_{\varepsilon e} = B_{\varepsilon e} \cap L_e$ вытекает, что $b \notin L_e$ и потому $bg^{-1} \notin L_e$. Следовательно, $b \notin H_{+e} \cup H_{-e}$, $\omega_i(b, g) \notin H_{+e} \cup H_{-e}$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$ и элементы x, y_ε, $y_{-\varepsilon}$ имеют приведенные записи ненулевой длины. Вместе с тем, если $N \in \Omega$, то

$$b \in H_{\varepsilon e}N, \quad t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} \in H_{-\varepsilon e}N, \quad (t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon})^{-1} b (t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon}) \in H_{\varepsilon e}N$$

(ввиду нормальности подгруппы $H_{\varepsilon e}$ в группе L_e), откуда $xN = 1$, $y_\varepsilon N = 1$ или $y_{-\varepsilon}N = 1$ в зависимости от того, какая группа — L_e, $\mathrm{Aut}_{L_e}(H_{\varepsilon e})$ или $\mathrm{Aut}_{L_e}(H_{-\varepsilon e})$ — удовлетворяет тождеству ω. Таким образом, снова $\bigcap_{N \in \Omega} N \neq 1$. □

Теорема 2.7.1 следует из предложения 2.7.4, если положить $\Omega = \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$. Как видно из приведенного доказательства, использование в формулировке данного предложения произвольного семейства Ω может оказаться более удобным для последующего его применения. □

Глава 3. Аппроксимируемость фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами

§ 3.1. Обобщенные свободные и обобщенные прямые произведения групп

В этой главе, как и в предыдущей, всюду предполагается, что

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \bigl(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\bigr) \text{ —}$$

некоторый (связный) граф групп.

В 1948 году Х. Нейман [163] в связи с изучением строения подгрупп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой ввела понятие обобщенного свободного произведения произвольного семейства групп. Несколько позднее в совместной работе Б. Неймана и Х. Нейман [162] было определено аналогичное понятие обобщенного прямого произведения групп. К сожалению, вопрос о существовании данных конструкций удалось решить лишь в самых простых случаях (подробнее см. ниже), поэтому широкого распространения в самом общем своем виде они не получили.

Задача описания подгрупп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой была решена в 1970 году А. Каррасом и Д. Солитэром [126] с использованием теории групп, действующих на деревьях (см. [179]). Для этого, помимо прочего, ими была введена упоминавшаяся в главе 1 конструкция древесного произведения групп, существование которой обеспечивалось лишь свойствами обобщенного свободного произведения двух групп. Еще одной структурой, известные теоремы о существовании которой также опираются на свойства обобщенного свободного произведения двух групп, является полигональное произведение групп (см., например, [77]). Обе эти конструкции достаточно активно изучаются со времени своего появления, однако, их аналогов, в основе которых лежало бы не свободное, а прямое произведение групп, до настоящего времени определено не было. Единственным исключением служит центральное произведение групп (см., например, [115, с. 29]), представляющее собой обобщенное прямое произведение двух групп.

С целью описания с единых позиций ряда упоминавшихся выше конструкций и утверждений в данной диссертации определяются обобщенное свободное и обобщенное прямое произведения, ассоциированные с графом групп. Как можно будет неоднократно убедиться ниже, второе из этих произведений оказывается весьма полезным для получения результатов первого уровня о фундаментальных группах графов групп с центральными реберными подгруппами.

Далее в этом параграфе будем считать, что граф Γ не имеет кратных ребер и петель. Рассмотрим группы

$$\begin{aligned}\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma)) &= \big\langle G_v\ (v \in \mathcal{V});\ H_{+e} = H_{-e}\ (e \in \mathcal{E})\big\rangle,\\ \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)) &= \big\langle G_v\ (v \in \mathcal{V});\ H_{+e} = H_{-e}\ (e \in \mathcal{E}),\\ &\qquad\qquad\qquad [G_u, G_w] = 1\ (u, w \in \mathcal{V},\ u \neq w)\big\rangle,\end{aligned}$$

образующими которых являются образующие групп G_v $(v \in \mathcal{V})$, а определяющими соотношениями — определяющие соотношения групп G_v $(v \in \mathcal{V})$, всевозможные соотношения вида

$$h\varphi_{+e} = h\varphi_{-e} \quad (e \in \mathcal{E},\ h \in H_e),$$

а также, в случае группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$, соотношения вида

$$[g_u, g_w] = 1 \quad (u, w \in \mathcal{V},\ u \neq w),$$

где g_u — произвольный образующий группы G_u, g_w — произвольный образующий группы G_w. Очевидно, что группы $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ и $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляют собой фактор-группы соответственно свободного и прямого произведений групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ по нормальному замыканию множества элементов

$$\big\{h\varphi_{+e}(h\varphi_{-e})^{-1} \mid e \in \mathcal{E},\ h \in H_e\big\},$$

а группа $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ является также и фактор-группой группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ по нормальному замыканию множества всех проходных букв.

Группу $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ (группу $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$) будем называть *обобщенным свободным* (соответственно *обобщенным прямым*) *произведением, ассоциированным с графом групп* $\mathcal{G}(\Gamma)$, если выполняются следующие два условия:

($\mathfrak{E}.1$) для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ тождественное отображение образующих группы G_v в группу $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ (в группу $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$) продолжаемо до инъективного гомоморфизма и потому все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ можно считать подгруппами группы $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ (соответственно группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$);

($\mathfrak{E}.2$) для каждого ребра $e \in \mathcal{E}$ в группе $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ (в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$) имеют место равенства

$$H_{+e} = G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} = H_{-e}.$$

Отметим, что если граф Γ является полным, то ассоциированные с графом $\mathcal{G}(\Gamma)$ обобщенные произведения оказываются *обобщенным свободным* и *обобщенным прямым* произведениями в смысле определений, данных в [163] и [162] соответственно, если же Γ — дерево, то $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ — древесное произведение групп G_v $(v \in \mathcal{V})$. Кроме того, группу $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ называют *полигональным произведением*, если Γ представляет собой простой цикл [77].

В связи с введенными понятиями сразу же возникает вопрос о существовании обобщенных произведений, т. е. об условиях, при которых группы $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$

и (или) $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ удовлетворяют требованиям ($\mathfrak{E}.1$) и ($\mathfrak{E}.2$). Известно, что ассоциированное с графом $\mathcal{G}(\Gamma)$ обобщенное свободное произведение существует в следующих случаях:

1) если граф Γ является деревом [126];

2) если граф Γ представляет собой простой цикл длины, не меньшей 4, и для любых $e, f \in \mathcal{E}$, $\varepsilon, \delta = \pm 1$ из равенства $e(\varepsilon) = f(\delta)$ следует, что $H_{e(\varepsilon)} \cap H_{f(\delta)} = 1$ [77].

Известно также, что полигональное произведение трех групп с тривиально пересекающимися реберными подгруппами уже не обязано удовлетворять требованию ($\mathfrak{E}.1$): соответствующий пример приводится в [120].

Прежде, чем перейти к описанию условий существования обобщенного прямого произведения, заметим, что если $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, $g \in G_{e(\varepsilon)}$ и $h \in H_{\varepsilon e}$, то в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ справедливы равенства

$$h = h\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}, \quad [g,\, h\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}] = 1,$$

откуда $[g, h] = 1$. Таким образом, необходимым условием выполнения требования ($\mathfrak{E}.1$) для данной группы является центральность реберных подгрупп в содержащих их вершинных группах. Вследствие этого обобщенное прямое произведение двух групп в литературе называют также *центральным произведением*.

Нетрудно показать (см. следствие 3.2.3 ниже), что изучение вопроса о существовании обобщенного прямого произведения может быть сведено к рассмотрению случая, когда все вершинные группы такого произведения абелевы. Известно, что если $\mathcal{G}(\Gamma)$ — полный граф и все его вершинные группы являются локально циклическими, то некоторые естественные необходимые условия существования соответствующего обобщенного прямого произведения оказываются и достаточными [164]. Это верно также в случае, когда граф $\mathcal{G}(\Gamma)$ содержит три вершины и все вершинные группы абелевы [165]. Однако, если $\mathcal{G}(\Gamma)$ — полный граф с четырьмя вершинами, которым сопоставлены абелевы группы, упомянутые выше необходимые условия существования обобщенного прямого произведения перестают быть достаточными [161, § 16], что оставляет вопрос об отыскании критерия существования такого произведения открытым. Результаты о существовании обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп, не являющимся полным, приводятся в следующем параграфе.

Отметим еще, что группы $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ и $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$, разумеется, могут быть определены и для несвязного графа Γ. Однако, решение задачи о существовании обобщенных произведений, ассоциированных с таким графом, легко сводится к рассмотрению случая, когда граф является связным. В самом деле, если Γ_i $(i \in \mathcal{I})$ — компоненты связности графа Γ, то группы $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ и $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляют собой, очевидно, (обычные) свободное и прямое произведения групп $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma_i))$ и $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma_i))$ соответственно. Поэтому группа $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ (группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$) удовлетворяет условию ($\mathfrak{E}.1$) или условиям ($\mathfrak{E}.1$)–($\mathfrak{E}.2$) тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают группы $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma_i))$ (соответственно $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma_i))$) для всех $i \in \mathcal{I}$.

§ 3.2. Теоремы существования для некоторых обобщенных прямых произведений, ассоциированных с графами групп

В данном параграфе будет установлено, что обобщенное прямое произведение существует в ситуациях, аналогичных указанным в § 3.1 случаям 1 и 2 существования обобщенного свободного произведения, ассоциированного с графом групп. Кроме того, при тех же ограничениях будут получены достаточные условия отсутствия кручения в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$. Последнее необходимо для изучения аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ корневыми классами, состоящими из групп без кручения.

Для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ положим

$$\Theta_v = \bigl\{(e, \varepsilon) \mid e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1,\ v = e(\varepsilon)\bigr\}, \quad H_v = \operatorname{sgp}\bigl\{H_{\varepsilon e} \mid (e, \varepsilon) \in \Theta_v\bigr\}$$

(эти обозначения будут использоваться до конца главы). Понятно, что подгруппа H_v содержится в центре $\mathcal{Z}(G_v)$ группы G_v тогда и только тогда, когда $H_{\varepsilon e} \leqslant \mathcal{Z}(G_v)$ для всех $(e, \varepsilon) \in \Theta_v$.

Теорема 3.2.1. *Пусть граф Γ является деревом и для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Ассоциированное с графом $\mathcal{G}(\Gamma)$ обобщенное прямое произведение существует.*
2. *Если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ не имеют кручения и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$, то группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ не имеет кручения.*

Теорема 3.2.2. *Пусть Γ — связный граф без кратных ребер и петель, для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v и представляет собой прямое произведение подгрупп семейства*

$$\bigl\{H_{\varepsilon e} \mid (e, \varepsilon) \in \Theta_v\bigr\}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Ассоциированное с графом $\mathcal{G}(\Gamma)$ обобщенное прямое произведение существует.*
2. *Если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ не имеют кручения и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v изолирована в группе G_v, то группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ не имеет кручения.*

Легко видеть, что если группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ обладает свойством ($\mathfrak{E}.1$) или свойствами ($\mathfrak{E}.1$)–($\mathfrak{E}.2$), тому же условию удовлетворяет и группа $\mathrm{GFP}(\mathcal{G}(\Gamma))$. Поэтому из теоремы 3.2.2 следует, в частности, что полигональное произведение с центральными тривиально пересекающимися объединенными подгруппами существует и в случае трех вершинных групп.

Пусть граф групп $\mathcal{H}(\Gamma)$ получается из $\mathcal{G}(\Gamma)$ путем замены для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группы G_v на H_v. Поскольку образы всех реберных гомоморфизмов графа $\mathcal{G}(\Gamma)$ содержатся в подгруппах H_v $(v \in \mathcal{V})$, можно считать, что ребрам графа $\mathcal{H}(\Gamma)$ соответствуют те же гомоморфизмы, что и ребрам графа $\mathcal{G}(\Gamma)$. Из теоремы 3.2.1 вытекает следующее утверждение, представляющее собой аналог теоремы 2 из [162] и позволяющее свести изучение вопроса о существовании ассоциированного с графом групп обобщенного прямого произведения к рассмотрению случая, когда все вершинные группы такого графа являются абелевыми.

Следствие 3.2.3. *Пусть* Γ *— связный граф без кратных ребер и петель, для любой вершины* $v \in \mathcal{V}$ *подгруппа* H_v *лежит в центре группы* G_v *и* $\mathcal{H}(\Gamma)$ *— определенный выше граф групп. Тогда обобщенные прямые произведения, ассоциированные с графами* $\mathcal{G}(\Gamma)$ *и* $\mathcal{H}(\Gamma)$, *существуют одновременно.*

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству сформулированных теорем 3.2.1, 3.2.2 и следствия 3.2.3.

Приводимое далее утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 3.2.4. *Пусть* X *— некоторая группа без кручения,* Y *и* Z *— центральные, тривиально пересекающиеся подгруппы группы* X. *Если подгруппа* YZ *изолирована в группе* X, *то и подгруппа* Z *изолирована в* X.

Основную часть доказательства теорем 3.2.1 и 3.2.2 составляют следующие три утверждения.

Предложение 3.2.5. *Пусть граф* Γ *содержит лишь две вершины и соединяющее их ребро* e, *подгруппа* H_{+e} *лежит в центре группы* $G_{e(1)}$, *подгруппа* H_{-e} *— в центре группы* $G_{e(-1)}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа* $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ *удовлетворяет условиям* ($\mathfrak{E}.1$) *и* ($\mathfrak{E}.2$).

2. *Если* $K \leqslant G_{e(1)}$ *и* $K \cap H_{+e} = 1$, *то в группе* $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ *имеет место равенство* $K \cap G_{e(-1)} = 1$.

3. *Если группы* $G_{e(1)}$ *и* $G_{e(-1)}$ *не имеют кручения и подгруппа* H_{+e} *изолирована в группе* $G_{e(1)}$, *то группа* $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ *не имеет кручения.*

Доказательство. Пусть D — обычное прямое произведение групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$. Так как подгруппы H_{+e} и H_{-e} содержатся в центрах групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ соответственно, то подмножество

$$M = \bigl\{h\varphi_{+e}(h\varphi_{-e})^{-1} \mid h \in H_e\bigr\}$$

группы D является центральной подгруппой и потому $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)) \cong D/M$. Из однозначности записи элементов группы D в виде g_1g_{-1}, где $g_1 \in G_{e(1)}$, $g_{-1} \in G_{e(-1)}$, следует, что если $g_1g_{-1} \in M$, то $g_1 = h\varphi_{+e}$ и $g_{-1} = (h\varphi_{-e})^{-1}$ для некоторого элемента $h \in H_e$, а потому $g_1 \in H_{+e}$ и $g_{-1} \in H_{-e}$. Отсюда и из инъективности отображений φ_{+e}, φ_{-e} вытекает также, что если $g_1 \in M$ ($g_{-1} \in M$), то $g_1 = 1$ (соответственно $g_{-1} = 1$). Таким образом, утверждение 1 предложения имеет место. Из него следует, в частности, что если $K \leqslant G_{e(1)}$ и $K \cap H_{+e} = 1$, то

$$K \cap G_{e(-1)} = (K \cap G_{e(1)}) \cap G_{e(-1)} = K \cap H_{+e} = 1$$

и, значит, утверждение 2 также справедливо. Докажем утверждение 3.

Пусть элементы $g_1 \in G_{e(1)}$, $g_{-1} \in G_{e(-1)}$ и число n таковы, что $(g_1 g_{-1})^n = g_1^n g_{-1}^n \in M$. Тогда $g_1^n \in H_{+e}$ и в силу изолированности подгруппы H_{+e} имеет место включение $g_1 \in H_{+e}$. Пусть $g_1' = g_1 \varphi_{+e}^{-1} \varphi_{-e}$. Тогда $g_1' \equiv g_1 \pmod M$ и $(g_1' g_{-1})^n \in M$. Но $g_1' g_{-1} \in G_{e(-1)}$ и согласно доказанному выше $(g_1' g_{-1})^n = 1$. Из отсутствия кручения в группе $G_{e(-1)}$ теперь следует, что $g_1' g_{-1} = 1$. Таким образом, $g_{-1} = (g_1')^{-1}$ и потому $g_1 g_{-1} \in M$, что доказывает утверждение 3. $\square$

Предложение 3.2.6. *Пусть граф Γ представляет собой конечное дерево и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа* $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ *удовлетворяет условиям* ($\mathfrak{C}.1$) *и* ($\mathfrak{C}.2$).

2. *Если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ не имеют кручения и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$, то группа* $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ *не имеет кручения.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по количеству вершин в графе Γ. Если вершина только одна, утверждения 1 и 2 очевидны. Поэтому будем считать, что граф Γ имеет по крайней мере две вершины и доказываемое предложение справедливо для обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп $\mathcal{G}(\Gamma')$, который получается из $\mathcal{G}(\Gamma)$ путем удаления некоторой концевой вершины v и ведущего в эту вершину ребра e.

Пусть число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $v = e(\varepsilon)$, и пусть Δ — граф групп, содержащий лишь две вершины и соединяющее их ребро $\bar{e}$, вершине $\bar{e}(\varepsilon)$ сопоставлена группа $G_{e(\varepsilon)}$, вершине $\bar{e}(-\varepsilon)$ — группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma'))$, ребру $\bar{e}$ — группа H_e и вложения $\varphi_{\varepsilon\bar{e}} = \varphi_{\varepsilon e}$ и $\varphi_{-\varepsilon\bar{e}} = \varphi_{-\varepsilon e}$ (группу $G_{e(-\varepsilon)}$ можно считать подгруппой в $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma'))$ в силу индуктивного предположения). Тогда группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ и $\mathrm{GDP}(\Delta)$ имеют одно и то же представление.

Так как подгруппа $H_e \varphi_{-\varepsilon\bar{e}}$, очевидно, центральна в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma'))$, то к группе $\mathrm{GDP}(\Delta)$ можно применить предложение 3.2.5. Из него и индуктивного предположения сразу же вытекает, что группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{C}.1$), а также равенствам из условия ($\mathfrak{C}.2$) для всех ребер графа $\mathcal{G}(\Gamma')$. Кроме того, в силу предложения 3.2.5

$$H_{\varepsilon e} = G_{e(\varepsilon)} \cap \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma')) = H_e \varphi_{-\varepsilon\bar{e}}.$$

Но

$$H_e \varphi_{-\varepsilon\bar{e}} = H_{-\varepsilon e} \leqslant G_{e(-\varepsilon)},$$

поэтому

$$G_{e(\varepsilon)} \cap \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma')) = G_{e(\varepsilon)} \cap \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma')) \cap G_{e(-\varepsilon)} = G_{e(\varepsilon)} \cap G_{e(-\varepsilon)}.$$

Таким образом, для ребра e указанные равенства также имеют место и утверждение 1 тем самым доказано.

Для проверки утверждения 2 достаточно воспользоваться описанным представлением группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ в виде обобщенного прямого произведения двух групп, предложением 3.2.5 и индуктивным предположением. $\square$

Предложение 3.2.7. *Пусть* Γ *— конечный связный граф без кратных ребер и петель, для каждой вершины* $v \in \mathcal{V}$ *подгруппа* H_v *лежит в центре группы* G_v *и представляет собой прямое произведение подгрупп семейства*

$$\left\{H_{\varepsilon e} \mid (e, \varepsilon) \in \Theta_v\right\}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Группа* $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ *удовлетворяет условиям* ($\mathfrak{E}.1$) *и* ($\mathfrak{E}.2$).

2. *Если* $v \in \mathcal{V}$, $K \leqslant G_v$ *и* $K \cap H_v = 1$, *то в группе* $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ *выполняется равенство*

$$K \cap \mathrm{sgp}\left\{G_w \mid w \in \mathcal{V},\, w \neq v\right\} = 1.$$

3. *Если все группы* G_v $(v \in \mathcal{V})$ *не имеют кручения и для каждой вершины* $v \in \mathcal{V}$ *подгруппа* H_v *изолирована в группе* G_v, *то группа* $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ *не имеет кручения.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что предложение достаточно доказать для случая, когда Γ — полный граф. В самом деле, если это не так, добавим к Γ недостающие ребра и сопоставим каждому из них единичную группу. Очевидно, что полученный в результате граф групп Δ по-прежнему удовлетворяет условиям предложения, а группа $\mathrm{GDP}(\Delta)$ имеет то же представление, что и группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$. Отсюда легко следует, что если утверждения 1–3 выполняются для группы $\mathrm{GDP}(\Delta)$, то они справедливы и для группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$.

Итак, предположим, что Γ — полный граф, и воспользуемся индукцией по количеству его вершин. Утверждения 1–3 очевидны, если вершина одна, и следуют из предложения 3.2.5, если вершин две. Поэтому далее будем считать, что граф Γ имеет по крайней мере три вершины и, какова бы ни была вершина $u \in \mathcal{V}$, доказываемое предложение справедливо для группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma - u))$, где $\Gamma - u$ — подграф графа Γ, получающийся из последнего путем удаления вершины u и всех ребер из множества Θ_u (отметим, что этот граф также оказывается полным).

Покажем, что подгруппа L группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma - u))$, порожденная всеми подгруппами $H_{-\varepsilon e}$, где $(e, \varepsilon) \in \Theta_u$, является их прямым произведением и, следовательно, изоморфна подгруппе

$$H_u = \mathrm{sgp}\left\{H_{\varepsilon e} \mid (e, \varepsilon) \in \Theta_u\right\}.$$

В самом деле, пусть $(e, \varepsilon) \in \Theta_u$, т. е. e — ребро, соединяющее вершину $u = e(\varepsilon)$ с некоторой вершиной $v = e(-\varepsilon)$. По условию подгруппа H_v представляет собой прямое произведение подгрупп семейства

$$\left\{H_{\delta f} \mid (f, \delta) \in \Theta_v\right\},$$

в которое входит и подгруппа $H_{-\varepsilon e}$. Поэтому

$$H_{-\varepsilon e} \cap \mathrm{sgp}\left\{H_{\delta f} \mid (f, \delta) \in \Theta_v,\ f \neq e\right\} = 1.$$

Отсюда следует, что группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma - u))$, вершина v и подгруппа $K = H_{-\varepsilon e}$ удовлетворяют условиям утверждения 2 доказываемого предложения. Воспользовавшись индуктивным предположением, получаем, что в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma - u))$ справедливо равенство

$$H_{-\varepsilon e} \cap \operatorname{sgp}\left\{G_w \mid w \in \mathcal{V} \setminus \{u, v\}\right\} = 1.$$

Поскольку

$$\operatorname{sgp}\left\{H_{-\lambda x} \mid (x, \lambda) \in \Theta_u,\, x \neq e\right\} \leqslant \operatorname{sgp}\left\{G_w \mid w \in \mathcal{V} \setminus \{u, v\}\right\},$$

это означает, что подгруппа $H_{-\varepsilon e}$ выделяется в L прямым сомножителем.

Таким образом, подгруппы H_u и L изоморфны и лежат в центрах групп G_u и $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma - u))$ соответственно. Это позволяет рассмотреть обобщенное прямое произведение P групп G_u и $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma - u))$ с реберными подгруппами H_u и L. Представление группы P содержит все образующие символы и определяющие соотношения группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$, а также дополнительные соотношения вида $h = h\varphi$, где $h \in H_u$ и $\varphi\colon H_u \to L$ — изоморфизм подгрупп, продолжающий отображения $\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$ $((e, \varepsilon) \in \Theta_u)$. Легко видеть, что все эти дополнительные соотношения выводятся из соотношений группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ и, следовательно, тождественное отображение образующих группы P в группу $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ определяет изоморфизм α первой на вторую. Согласно предложению 3.2.4, если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ не имеют кручения и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v изолирована в группе G_v, то для любой вершины $v \in \mathcal{V} \setminus \{u\}$ подгруппа

$$\operatorname{sgp}\left\{H_{\mu y} \mid (y, \mu) \in \Theta_v,\, y(-\mu) \neq u\right\},$$

выделяющаяся в H_v прямым множителем, также изолирована в группе G_v. Отсюда, из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
G_u & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)) & \xleftarrow{\iota} & G_v \\
\| & & \uparrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\
G_u & \xrightarrow{\iota} & P & \xleftarrow{\iota} & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma - u))
\end{array}$$

для всех $v \in \mathcal{V} \setminus \{u\}$, индуктивного предположения и предложения 3.2.5 вытекает, что группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{C}$.1), для нее выполняется утверждение 3 доказываемого предложения, а также равенства из условия ($\mathfrak{C}$.2), соответствующие ребрам графа $\mathcal{G}(\Gamma - u)$ (в этой и последующих диаграммах настоящей главы символом ι обозначены гомоморфизмы, определяемые тождественными отображениями образующих).

Отметим теперь, что в графе Γ по крайней мере три вершины и вершина u была выбрана из них произвольным образом. Поэтому можно считать, что если e — некоторое наперед заданное ребро графа Γ, то его концы отличны от u. Тогда ребро e оказывается принадлежащим $\Gamma - u$ и, значит, для него выполняются равенства из условия ($\mathfrak{C}$.2). Точно так же подгруппу K из формулировки утверждения 2 можно считать содержащейся в группе G_u, что дает возможность воспользоваться для доказательства данного утверждения предложением 3.2.5. Тем самым, для группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ выполняются утверждения 1 и 2. $\square$

Доказательство теорем 3.2.1 и 3.2.2. Заметим, что если ω — некоторое слово от образующих групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ и определяемый этим словом элемент группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ равен единице, то слово ω может быть преобразовано в пустое путем конечного числа операций, в каждой из которых фигурируют образующие лишь конечного числа вершинных групп. Выбирая максимальный подграф Γ' графа Γ, содержащий все соответствующие этим группам вершины, получаем, что в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma'))$ элемент, определяемый словом ω, также равен единице. Поэтому все доказываемые для группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ утверждения вытекают из аналогичных утверждений для группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma'))$, имеющих место в силу предложений 3.2.6 и 3.2.7. В частности, если e — некоторое ребро графа Γ, $\omega_{e(1)}$ и $\omega_{e(-1)}$ — слова от образующих групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ соответственно и $\omega = \omega_{e(1)}\omega_{e(-1)}$, то из равенства единице определяемого словом ω элемента группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ следует, что $\omega_{e(1)}$ задает элемент подгруппы H_{+e}, а $\omega_{e(-1)}$ — элемент подгруппы H_{-e} и, таким образом,

$$H_{+e} = G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} = H_{-e}. \qquad \square$$

Доказательство следствия 3.2.3. Покажем сначала, что группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ и $\mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma))$ удовлетворяют требованию ($\mathfrak{C}.1$) одновременно.

Легко видеть, что отображения образующих групп H_v $(v \in \mathcal{V})$ в группу $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$, действующие так же, как естественные вложения $\delta_v\colon H_v \to G_v$, продолжаемы до гомоморфизма $\delta\colon \mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma)) \to \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$. При этом для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ оказывается коммутативной диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_v & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \delta_v} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta} \\ G_v & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)). \end{array}$$

Если группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ обладает свойством ($\mathfrak{C}.1$), отсюда следует, что группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma))$ также удовлетворяет требованию ($\mathfrak{C}.1$).

Пусть теперь группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma))$ обладает свойством ($\mathfrak{C}.1$). Тогда группы H_v $(v \in \mathcal{V})$ можно считать ее подгруппами. Рассмотрим граф групп Δ, представляющий собой звезду, центральной вершине которой соответствует группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma))$, остальным вершинам — группы G_v $(v \in \mathcal{V})$, ребрам — группы H_v $(v \in \mathcal{V})$, их естественные вложения δ_v в группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ и тождественные отображения в группу $\mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma))$.

Используя преобразования Тице и определения реберных гомоморфизмов графов $\mathcal{H}(\Gamma)$ и Δ, нетрудно показать, что все образующие групп H_v $(v \in \mathcal{V})$, а также определяющие соотношения вида $[h_u, h_w] = 1$, где $u, w \in \mathcal{V}$, $u \neq w$, h_u — образующий группы H_u, h_w — образующий группы H_w, могут быть исключены из представления группы $\mathrm{GDP}(\Delta)$, которое в результате превратится в представление группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$. Таким образом, тождественное отображение образующих группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ в группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$ продолжается до изоморфизма $\alpha\colon \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \mathrm{GDP}(\Delta)$.

Поскольку все подгруппы H_v ($v \in \mathcal{V}$) лежат в центре группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma))$, к группе $\mathrm{GDP}(\Delta)$ можно применить теорему 3.2.1, согласно которой тождественные отображения образующих групп $\mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma))$ и G_v ($v \in \mathcal{V}$) в группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$ продолжаемы до инъективных гомоморфизмов. Ввиду коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} G_v \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)) \arrow[d, "\alpha"] \\ G_v \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{GDP}(\Delta) \end{tikzcd}$$

для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ отсюда следует, что группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ обладает свойством ($\mathfrak{E}.1$).

Предположим теперь, что группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ и $\mathrm{GDP}(\mathcal{H}(\Gamma))$ удовлетворяют требованию ($\mathfrak{E}.1$) и покажем, что условие ($\mathfrak{E}.2$) выполняется для них одновременно. Поскольку для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ изоморфизм α отображает подгруппу G_v группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ на аналогичную подгруппу группы $\mathrm{GDP}(\Delta)$, далее вместо группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ будем рассматривать группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$.

Пусть e — некоторое ребро графа групп Δ, и пусть для определенности вершина $e(1)$ является концевой. Как и при доказательстве предложения 3.2.6, представим группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$ в виде обобщенного прямого произведения групп $\mathrm{GDP}(\Delta - e(1))$ и $G_{e(1)}$, где $\Delta - e(1)$ обозначает граф групп, получающийся из Δ удалением вершины $e(1)$ и ведущего в эту вершину ребра. Применяя к этому произведению теорему 3.2.1, получаем, что

$$G_{e(1)} \cap \mathrm{GDP}(\Delta - e(1)) = H_{e(1)}$$

и, так как

$$G_{e(-1)} \leqslant \mathrm{GDP}(\Delta - e(1)),$$

то $G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} \leqslant H_{e(1)}$. Аналогичным образом доказывается, что $G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} \leqslant H_{e(-1)}$ и, стало быть,

$$G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} = H_{e(1)} \cap H_{e(-1)}.$$

Значит, оба эти пересечения совпадают с подгруппами H_{+e} и H_{-e} одновременно. $\square$

§ 3.3. Формулировка основных результатов

Если все реберные подгруппы графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ лежат в центрах содержащих их вершинных групп, то конструкция обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп, и теоремы 3.2.1, 3.2.2 могут быть использованы для построения гомоморфизмов группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группы из аппроксимирующего класса, инъективных на всех реберных подгруппах. Далее этот подход применяется к графам групп с тривиально пересекающимися реберными подгруппами и к графам групп, содержащим не более одного простого цикла.

Начиная с данного параграфа, мы вновь считаем, что граф Γ может содержать кратные ребра и петли. Будем предполагать также, что в нем зафиксировано некоторое остовное дерево $\mathcal{T}$ и представление группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ соответствует этому дереву. Рассмотрим следующий набор свойств графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$:

(1) для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v представляет собой прямое произведение подгрупп $H_{\varepsilon e}$ $((e, \varepsilon) \in \Theta_v)$;

(2) граф Γ является деревом;

(3) граф Γ содержит в точности один простой цикл.

Будем говорить, что граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ *имеет тип* (k) $(1 \leqslant k \leqslant 3)$, если он обладает свойством (k) и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v.

Отметим, что при выполнении свойства (3) группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой HNN-расширение с одной проходной буквой древесного произведения групп G_v $(v \in \mathcal{V})$. Далее при рассмотрении таких групп всегда будет требоваться, чтобы аппроксимирующий класс $\mathcal{C}$ содержал непериодические группы. Хотя это дополнительное ограничение не имеет никакого отношения к группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, для упрощения формулировок утверждений его удобно включить в описание типа графа групп. Поэтому будем использовать выражение «граф групп имеет тип $(3)_{+\mathcal{C}}$» как сокращение для конъюнкции «граф групп имеет тип (3) и класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу».

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективным на подгруппе H_v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если прямое произведение D групп $G_v\sigma_v$ $(v \in \mathcal{V})$ принадлежит классу $\mathcal{C}$, то существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, продолжающий гомоморфизмы σ_v $(v \in \mathcal{V})$.*

2. *Если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.*

3. *Пусть $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$ — класс всех $\mathcal{C}$-групп без кручения, для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа $G_v\sigma_v$ не имеет кручения и подгруппа $H_v\sigma_v$ изолирована в ней. Тогда*:
   а) *если $D \in \mathcal{C}$, то гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы выполнялось включение $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\sigma \in \mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$;*
   б) *если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ является $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируемой.*

Теорема 3.3.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (2) *или* $(3)_{+\mathcal{C}}$. *Пусть также для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективным на всех подгруппах $H_{\varepsilon e}$ $((e, \varepsilon) \in \Theta_v)$, и прямое произведение D групп $G_v\sigma_v$ $(v \in \mathcal{V})$ принадлежит классу $\mathcal{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, продолжающий гомоморфизмы σ_v $(v \in \mathcal{V})$.*

2. *Если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.*

3. *Пусть $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$ — класс всех $\mathcal{C}$-групп без кручения, для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа $G_v\sigma_v$ не имеет кручения и все подгруппы $H_{\varepsilon e}\sigma_v$ $((e, \varepsilon) \in \Theta_v)$ изолированы в ней. Тогда*:

а) *гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы выполнялось включение $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\sigma \in \mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$;*

б) *если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ является $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируемой.*

Отметим, что содержащиеся в условии теоремы 3.3.2 требования принадлежности классу $\mathcal{C}$ прямого произведения D и (если Γ не является деревом) хотя бы одной непериодической группы, вообще говоря, существенны для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$: это следует из основных результатов работы [1] и приводимой далее теоремы 4.1.6 соответственно.

Следствие 3.3.3. *Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1), (2) *или* (3), *для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v разрешима и ступени разрешимости групп G_v ограничены в совокупности. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ аппроксимируется разрешимыми группами.*

2. *Группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ аппроксимируется разрешимыми группами без кручения, если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ не имеют кручения и выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

а) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v изолирована в группе G_v;*

б) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (2) *или* (3) *и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

3. *Если $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *или* (2) *и для некоторого множества простых чисел $\mathfrak{P}$ все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ являются периодическими $\mathfrak{P}$-группами, причем их периоды ограничены в совокупности, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ аппроксимируется периодическими разрешимыми $\mathfrak{P}$-группами конечного периода.*

Доказательство. Легко видеть, что классы всех разрешимых групп $\mathcal{S}$ и периодических разрешимых $\mathfrak{P}$-групп конечного периода $\mathcal{PS}_{\mathfrak{P}}$ являются корневыми и замкнуты относительно взятия фактор-групп. Так как ступени разрешимости и периоды групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ ограничены в совокупности, то их прямое произведение принадлежит классу $\mathcal{S}$ или $\mathcal{PS}_{\mathfrak{P}}$ в зависимости от того, какое утверждение следствия рассматривается. Поэтому аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ вытекает из теорем 3.3.1 и 3.3.2. □

Следствие 3.3.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *или конечный граф групп ти-*

па (2) *или* $(3)_{+\mathcal{C}}$. *Группа* $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ *является* $\mathcal{C}$*-аппроксимируемой, если для любой вершины* $v \in \mathcal{V}$ *выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) *группа* G_v *принадлежит классу* $\mathcal{C}$;

2) *группа* G_v $\mathcal{C}$*-аппроксимируема и подгруппа* H_v *конечна*;

3) *группа* G_v *аппроксимируется* $\mathcal{C}$*-группами без кручения и подгруппа* H_v *имеет конечный ранг.*

Доказательство. Заметим, что каждая группа G_v $(v \in \mathcal{V})$ обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективным на подгруппе H_v: если $G_v \in \mathcal{C}$, то σ_v — тождественное отображение группы G_v; в остальных двух случаях его существование обеспечивается предложениями 1.3.4 и 1.3.5 соответственно. Если граф Γ конечен, то прямое произведение групп $G_v\sigma_v$ $(v \in \mathcal{V})$ принадлежит классу $\mathcal{C}$. Значит, снова можно воспользоваться теоремами 3.3.1 и 3.3.2. □

Отметим, что следствие 3.3.4 обобщает основные результаты статьи [22], полученные с использованием других методов, а следствие 3.3.3 — теорему 1.1 из [169].

Сформулированные выше теоремы 3.3.1 и 3.3.2 представляют собой результаты первого уровня и неявно предполагают, что все реберные подгруппы графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ принадлежат аппроксимирующему классу. Используя результаты предыдущей главы, это ограничение удается преодолеть для графов групп с тривиально пересекающимися реберными подгруппами и древесных произведений конечного числа групп, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Будем говорить, что группа X *$\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе* Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$. Отметим, что понятие регулярности обобщает классическое понятие *мощного элемента* [76]: если $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, то элемент $x \in X$ является мощным тогда и только тогда, когда группа X $\mathcal{F}$-регулярна по циклической подгруппе $\langle x \rangle$. Как и мощность, регулярность используется при изучении аппроксимируемости свободных конструкций групп для построения подгрупп вершинных групп, имеющих заданное пересечение с реберными подгруппами; подробнее об этом написано в [60, § 2.3].

Теорема 3.3.5. *Пусть* $\mathcal{C}$ *— корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и* $\mathcal{G}(\Gamma)$ *— граф групп типа* (1). *Пусть также для любой вершины* $v \in \mathcal{V}$ *группа* G_v $\mathcal{C}$*-аппроксимируема и* $\mathcal{C}$*-регулярна по подгруппе* H_v, *подгруппа* H_v $\mathcal{C}$*-отделима в группе* G_v. *Тогда группа* $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ *является* $\mathcal{C}$*-аппроксимируемой.*

Предваряя формулировку следующей теоремы, заметим, что если $\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) или (2), то без потери общности для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ можно считать выполненным неравенство $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$.

В самом деле, если Γ — дерево и $H_{\varepsilon e} = G_{e(\varepsilon)}$ для некоторых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, то в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ справедливы соотношения $G_{e(\varepsilon)} = H_{-\varepsilon e} \leqslant G_{e(-\varepsilon)}$ и, значит, из ее представления можно исключить образующие группы $G_{e(\varepsilon)}$. Результатом этой операции служит фундаментальная группа графа групп, который получается из $\mathcal{G}(\Gamma)$ стягиванием ребра e и заменой для каждой пары $(f, \delta) \in \Theta_{e(\varepsilon)} \setminus \big\{(e, \varepsilon)\big\}$ гомоморфизма $\varphi_{\delta f}$ композицией $\varphi_{\delta f}\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$. Понятно, что указанный граф групп снова является деревом.

Если $\mathcal{G}(\Gamma)$ имеет тип (1) и $H_{\varepsilon e} = G_{e(\varepsilon)}$, то, выбирая остовное дерево $\mathcal{T}$ содержащим ребро e, получаем, что в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ справедливо равенство $H_{\varepsilon e} = H_{-\varepsilon e}$. Следовательно, ее представление и граф групп могут быть преобразованы так же, как и выше. Поскольку $H_{\varepsilon e}$ — единственная нетривиальная реберная подгруппа группы $G_{e(\varepsilon)}$, результирующий граф групп по-прежнему имеет тип (1).

Если среди групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ есть хотя бы одна неединичная, то конечное число описанных преобразований приводит граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ к требуемому виду. В противном случае $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ — свободная группа, базисом которой служит семейство проходных букв, и ее аппроксимируемость каждым корневым классом групп обеспечивается предложением 1.4.8.

Теорема 3.3.6. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *и для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе H_v;*

2) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (2) *и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$.*

Группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.

Легко видеть, что если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, Y — центральная подгруппа некоторой группы X и $X/Y \in \mathcal{C}$, то группа X $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе Y и последняя $\mathcal{C}$-отделима в группе X. Более содержательные примеры ситуаций, когда требования отделимости и регулярности из формулировок теорем 3.3.5 и 3.3.6 оказываются выполнены, приводятся в главе 6.

§ 3.4. Доказательства теорем 3.3.1 и 3.3.2

Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1), $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$

$$R_v = \prod_{\substack{(e,\varepsilon)\in\Theta_v \\ e\in\mathcal{F}}} H_{\varepsilon e}$$

(произведение пустого множества подгрупп предполагается равным 1). Тогда семейство $\{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ будем обозначать через $\mathcal{R}(\mathcal{F})$. Легко видеть, что оно является системой совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и граф групп $\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{F})}(\Gamma)$ имеет тип (1).

Предложение 3.4.1. *Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1). *Тогда для каждого элемента $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ найдется конечное множество ребер $\mathcal{F}_g$ такое, что $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)} \neq 1$ и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ из соотношения $g \notin H_{\varepsilon e}$ следует, что $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)} \notin H_{\varepsilon e}\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T})) \setminus \{1\}$. Тогда найдется конечное поддерево $\mathcal{T}'$ дерева $\mathcal{T}$ такое, что $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}'))$. Воспользуемся индукцией по числу k вершин в дереве $\mathcal{T}'$.

Пусть $k = 1$, т. е. $g \in G_v$ для некоторой вершины $v \in \mathcal{V}$. Если $g \notin H_v$, положим $\mathcal{F}_g = \varnothing$. В противном случае

$$g \in \operatorname{sgp}\big\{H_{\varepsilon e} \mid (e, \varepsilon) \in \vartheta\big\}$$

для некоторого конечного подмножества $\vartheta \subseteq \Theta_v$ и $\mathcal{F}_g = \big\{e \mid (e, \varepsilon) \in \vartheta\big\}$. Легко видеть, что определенное таким образом множество $\mathcal{F}_g$ является искомым.

Пусть $k > 1$ и для элементов группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, принадлежащих поддеревьям с меньшим числом вершин, утверждение предложения имеет место. Возьмем произвольное ребро e дерева $\mathcal{T}'$ и представим группу $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}'))$ в виде свободного произведения групп $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}'_1))$ и $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}'_{-1}))$ с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e} (здесь $\mathcal{T}'_\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$) — содержащая вершину $e(\varepsilon)$ компонента связности графа, получающегося из $\mathcal{T}'$ путем удаления ребра e). Пусть $g = g_1 \ldots g_n$ — несократимая запись элемента g в указанном обобщенном свободном произведении. Если $n = 1$, то существование искомого множества $\mathcal{F}_g$ следует из индуктивного предположения. Пусть $n > 1$. Тогда по индуктивному предположению для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдется конечное множество $\mathcal{F}_{g_i} \subseteq \mathcal{E}$ такое, что если $g_i \notin H_{\varepsilon e}$ ($\varepsilon = \pm 1$), то $g_i\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_{g_i})} \notin H_{\varepsilon e}\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_{g_i})}$. Положим $\mathcal{F}_g = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_{g_i}$. Ввиду предложения 1.2.5 для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо соотношение $\ker \rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)} \leqslant \ker \rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_{g_i})}$ и потому, если $g_i \notin H_{\varepsilon e}$ ($\varepsilon = \pm 1$), то $g_i\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)} \notin H_{\varepsilon e}\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}$. Следовательно, в группе $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}(\mathcal{T}))$, рассматриваемой как свободное произведение с объединенными подгруппами $H_{+e}\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}$ и $H_{-e}\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}$, элемент $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}$ имеет несократимую запись длины $n > 1$ и, стало быть, не принадлежит свободным множителям этого произведения, содержащим все реберные подгруппы группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}(\Gamma))$. Таким образом, множество $\mathcal{F}_g$ является искомым.

Пусть теперь $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ — произвольный элемент и $g = g_0 t_{e_1}^{\varepsilon_1} g_1 \ldots t_{e_n}^{\varepsilon_n} g_n$ — его приведенная запись в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, рассматриваемой как HNN-расширение группы $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$. Воспользуемся индукцией по n. Если $n = 0$, то $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ и требуемое утверждение уже доказано. Пусть $n > 0$. По индуктивному предположению для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$, если $g_i \notin H_{-\varepsilon_i e_i}$, то существует множество $\mathcal{F}_{g_i} \subseteq \mathcal{E}$ такое, что $g_i\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_{g_i})} \notin H_{-\varepsilon_i e_i}\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_{g_i})}$. Положим $\mathcal{F}_{g_i} = \varnothing$, если $g_i \in H_{-\varepsilon_i e_i}$, и $\mathcal{F}_g = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_{g_i}$. Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ из соотношения $g_i \notin H_{-\varepsilon_i e_i}$ вытекает, что $g_i\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)} \notin H_{-\varepsilon_i e_i}\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}$. Следовательно, элемент $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}$ имеет в HNN-расширении $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}(\Gamma))$ приведенную запись длины $n > 0$ и потому не принадлежит базовой группе $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}(\mathcal{T}))$ этого HNN-расширения, содержащей все реберные подгруппы. Таким образом, определенное выше множество $\mathcal{F}_g$ является искомым. $\square$

Предложение 3.4.2. *Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1). *Тогда для каждого элемента $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ найдется конечный подграф $\Gamma' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ графа Γ такой, что граф $\Gamma' \cap \mathcal{T}$ является деревом, граф групп $\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma')$ имеет тип* (1), *группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma'))$ (вкладывающаяся в $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma))$ посредством тождественного отображения образующих согласно предложению* 1.2.1) *служит ретрактом группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma))$ и $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')} \in \pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma')) \setminus \{1\}$.*

Доказательство. Пусть $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\setminus\{1\}$ и w — некоторое слово от образующих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, задающее элемент g. Как и выше, определим подмножества $\mathcal{V}_g \subseteq \mathcal{V}$ и $\mathcal{E}_g \subseteq \mathcal{E}$ следующим образом: $v \in \mathcal{V}_g$ тогда и только тогда, когда слово w содержит некоторый образующий группы G_v или обратный к нему; $e \in \mathcal{E}_g$ тогда и только тогда, когда в слово w входит символ t_e или t_e^{-1}.

Согласно предложению 3.4.1 найдется конечное множество ребер $\mathcal{F}_g$ такое, что $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)} \neq 1$. Пусть $\mathcal{T}'$ — конечное поддерево дерева $\mathcal{T}$, содержащее все вершины из множества

$$\mathcal{V}_g \cup \big\{e(\varepsilon) \mid e \in \mathcal{E}_g \cup \mathcal{F}_g,\ \varepsilon = \pm 1\big\},$$

Γ' — подграф графа Γ, получающийся путем добавления к дереву $\mathcal{T}'$ всех ребер из объединения $\mathcal{E}_g \cup \mathcal{F}_g$, $\mathcal{V}'$ и $\mathcal{E}'$ — множества вершин и ребер графа Γ' соответственно. Тогда $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'))$ и $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')} \in \pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma'))$. Так как $\mathcal{F}_g \subseteq \mathcal{E}'$, то $\ker \rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')} \leqslant \ker \rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{F}_g)}$ и потому $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')} \neq 1$.

По определению системы подгрупп $\mathcal{R}(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}') = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ для каждой вершины $v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}'$ справедливо равенство $R_v = H_v$. Поэтому группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma))$ изоморфна свободному произведению группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma'))$, групп G_v/R_v $(v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}')$ и свободной группы с множеством порождающих $\{t_e \mid e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'\}$. Следовательно, группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma'))$ является ретрактом группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma))$. Тот факт, что граф групп $\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma')$ имеет тип (1), как уже было отмечено выше, вытекает из определения системы $\mathcal{R}(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}')$. □

Предложение 3.4.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1), (2) *или* $(3)_{+\mathcal{C}}$ *и прямое произведение D групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ принадлежит классу $\mathcal{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех группах G_v $(v \in \mathcal{V})$.*

2. *Указанный гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы его образ был группой без кручения, если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ не имеют кручения и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

   а) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v изолирована в группе G_v;*

   б) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (2) *или* $(3)_{+\mathcal{C}}$ *и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}_\mathcal{T}$ — множество ребер дерева $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{E}' = \big\{e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T} \mid H_{+e} = 1 = H_{-e}\big\}$$

и граф Γ' получается из Γ путем удаления всех ребер из множества $\mathcal{E}'$. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой свободное произведение группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'))$ и свободной группы с базисом $\{t_e \mid e \in \mathcal{E}'\}$. Понятно, что предложение достаточно доказать для группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma'))$, поэтому далее предполагается, что $\mathcal{E}' = \varnothing$. Заметим еще, что если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ тривиальны, то утверждение предложения выполняется очевидным образом и, стало быть, данный случай можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Если $\Gamma = \mathcal{T}$ и $\eta\colon \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \to \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ — естественный гомоморфизм, то группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ принадлежит классу $\mathcal{C}$ как гомоморфный образ группы D и в силу теоремы 3.2.1 все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ вкладываются в нее посредством тождественного отображения образующих. Отсюда и из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} G_v & \xrightarrow{\iota} & \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \\ \| & & \big\downarrow \eta \\ G_v & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)) \end{array}$$

для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ следует, что гомоморфизм η действует инъективно на всех группах G_v $(v \in \mathcal{V})$ и потому является искомым. Далее будем считать, что $\Gamma \neq \mathcal{T}$ и потому $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T} \neq \varnothing$.

Так как класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну неединичную группу и замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, то ему принадлежит некоторая циклическая группа $\mathcal{Z}$, порядок которой можно считать большим 2, если $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп, и равным бесконечности в противном случае. Пусть z — некоторый фиксированный порождающий группы $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{I}$ — множество всех функций из $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T}$ в $\mathcal{Z}$ с поточечным умножением (т. е. декартова степень группы $\mathcal{Z}$, показатель которой равен мощности множества $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T}$). Пусть также $\mathcal{G}(\mathcal{T})_i$ $(i \in \mathcal{I})$ — изоморфная копия графа групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$, $\tau_i\colon \mathcal{G}(\mathcal{T}) \to \mathcal{G}(\mathcal{T})_i$ — соответствующий изоморфизм (его ограничения на группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ будем считать изоморфизмами групп) и Σ — дизъюнктное объединение графов $\mathcal{G}(\mathcal{T})_i$ $(i \in \mathcal{I})$. Для любых $i \in \mathcal{I}$, $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T}$

– определим функцию $j \in \mathcal{I}$ по правилу:

$$j(e') = \begin{cases} i(e')z^{-1}, & e' = e, \\ i(e'), & e' \in \mathcal{E} \setminus (\mathcal{E}_\mathcal{T} \cup \{e\}); \end{cases}$$

– соединим новым ребром f вершины $e(1)\tau_i$ и $e(-1)\tau_j$ графа Σ;

– сопоставим ребру f группу H_e и гомоморфизмы $\psi_{+f} = \varphi_{+e}\tau_i$, $\psi_{-f} = \varphi_{-e}\tau_j$.

Полученный в результате граф групп обозначим через Δ. Заметим, что если считать его подграфы $\mathcal{G}(\mathcal{T})_i$ $(i \in \mathcal{I})$ макровершинами, то при $\operatorname{card}\mathcal{Z} = \infty$ соответствующий макрограф представляет собой целочисленную решетку в пространстве размерности $\mathfrak{c} = \operatorname{card}(\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T})$, а при $\operatorname{card}\mathcal{Z} < \infty$ — $\mathfrak{c}$-мерный «целочисленный тор», получающийся отождествлением указанной решетки с каждым ее образом относительно сдвига вдоль некоторой координатной оси на расстояние, кратное $\operatorname{card}\mathcal{Z}$.

Из определения графа групп Δ сразу же следует, что если $\mathcal{G}(\Gamma)$ имеет тип (1), то Δ также имеет тип (1) и в силу выбора порядка группы $\mathcal{Z}$ не содержит кратных ребер и петель. Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа $(3)_{+\mathcal{C}}$. Тогда множество $\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ состоит в точности из одного ребра, класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы и $\mathcal{Z}$ — бесконечная циклическая группа. Отсюда следует, что описанный выше макрограф представляет собой бесконечную цепь и потому Δ имеет тип (2). Таким образом, в обоих случаях согласно теоремам 3.2.1 и 3.2.2 все вершинные группы $G_v\tau_i$ ($v\in\mathcal{V}$, $i\in\mathcal{I}$) графа групп Δ вкладываются в группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$ посредством тождественного отображения образующих и, стало быть, их можно считать подгруппами последней. Заметим еще, что если граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ удовлетворяет условию утверждения 2, то Δ также удовлетворяет данному условию и в силу тех же теорем 3.2.1, 3.2.2 группа $\mathrm{GDP}(\Delta)$ не имеет кручения.

Легко видеть, что для каждого $i\in\mathcal{I}$ отображение образующих группы $\mathrm{GDP}(\Delta)$, продолжающее изоморфизмы $\tau_j^{-1}\tau_{j\cdot i}$ ($j\in\mathcal{I}$), задает автоморфизм α_i этой группы (здесь $j\cdot i$ обозначает поточечное произведение функций j и i). Значит, определено расширение X группы $\mathrm{GDP}(\Delta)$ при помощи группы $\mathcal{I}$, в котором внутренний автоморфизм, производимый элементом $i\in\mathcal{I}$, действует на $\mathrm{GDP}(\Delta)$ как α_i (отметим, что группа X очень похожа на прямое сплетение группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ с группой $\mathcal{I}$; разница лишь в том, что в качестве базы используется не обычное, а обобщенное прямое произведение изоморфных копий группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$). Все группы G_v ($v\in\mathcal{V}$) принадлежат классу $\mathcal{C}$ как подгруппы группы D, и согласно сделанному предположению среди них есть хотя бы одна неединичная. Следовательно, если граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ удовлетворяет условию утверждения 2, то класс $\mathcal{C}$ содержит непериодическую группу и потому группы $\mathcal{Z}$, $\mathcal{I}$ и X не имеют кручения.

Для каждого ребра $e\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ определим функцию $\dot{e}\in\mathcal{I}$ по правилу:

$$\dot{e}(e')=\begin{cases} z, & e'=e,\\ 1, & e'\in\mathcal{E}\setminus(\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\cup\{e\}).\end{cases}$$

Пусть также $u\in\mathcal{I}$ — функция, тождественно равная 1. Непосредственно проверяется, что отображение слов в образующих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, действующее на образующих групп G_v ($v\in\mathcal{V}$) как изоморфизм τ_u и преобразующее каждый символ t_e ($e\in\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$) в элемент $\dot{e}$, переводит все определяющие соотношения группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в равенства, верные в группе X, и потому задает гомоморфизм $\sigma\colon\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\to X$. Ввиду доказанного выше этот гомоморфизм инъективен на всех группах G_v ($v\in\mathcal{V}$). Таким образом, для завершения доказательства предложения остается показать, что $X\in\mathcal{C}$. Воспользуемся для этого замкнутостью класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп, фактор-групп, прямых произведений, расширений и декартовых степеней.

Если $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (3), то в множестве $\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ имеется в точности одно ребро и потому $\mathcal{I}\cong\mathcal{Z}\in\mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1). Согласно сделанному выше предположению $H_{+e} \neq 1 \neq H_{-e}$ для всех $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ и, следовательно, каждому ребру $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ однозначно соответствует пара подгрупп (H_{+e}, H_{-e}) группы D, т. е. подгруппа $\mathcal{C}$-группы $P = D \times D$. Значит, множество $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ может быть вложено в множество всех подмножеств группы P, которое в свою очередь вкладывается в принадлежащую классу $\mathcal{C}$ декартову степень $Q = P^{\,\operatorname{card} P}$. Отсюда $\mathcal{I} \leqslant \mathcal{Z}^{\,\operatorname{card} Q} \in \mathcal{C}$ и потому снова $\mathcal{I} \in \mathcal{C}$.

Группа $\mathrm{GDP}(\Delta)$ представляет собой гомоморфный образ прямого произведения

$$R = \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\mathcal{T})_i),$$

все сомножители которого изоморфны группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$. Как уже было отмечено выше, $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\mathcal{T})) \in \mathcal{C}$, и, поскольку $\mathcal{I} \in \mathcal{C}$, группа R вкладывается в принадлежащую классу $\mathcal{C}$ декартову степень $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\mathcal{T}))^{\operatorname{card} \mathcal{I}}$. Значит, $R \in \mathcal{C}$, $\mathrm{GDP}(\Delta) \in \mathcal{C}$ и $X \in \mathcal{C}$ как расширение $\mathcal{C}$-группы $\mathrm{GDP}(\Delta)$ при помощи $\mathcal{C}$-группы $\mathcal{I}$. $\square$

Предложение 3.4.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей, $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$ — класс всех $\mathcal{C}$-групп без кручения. Пусть также X — некоторая группа, Y и Z — центральные подгруппы группы X, $Y \cap Z = 1$ и имеется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппе YZ. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует гомоморфизм $\overline{\sigma}$ группы X/Z на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппе YZ/Z.*

2. *Если группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то и фактор-группа X/Z $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

3. *Пусть группа $X\sigma$ не имеет кручения, подгруппа $(YZ)\sigma$ изолирована в ней. Тогда*:

   а) *гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы группа $(X/Z)\overline{\sigma}$ не имела кручения и подгруппа $(YZ/Z)\overline{\sigma}$ была изолирована в ней*;

   б) *если группа X $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируема, то и фактор-группа X/Z $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть $T = \ker \sigma$. Тогда $X/T \in \mathcal{C}$ и $T \cap YZ = 1$.

1. Заметим, что если $N \in \mathcal{C}^*(X)$, то группа

$$(X/Z)/(NZ/Z) \cong X/NZ \cong (X/N)/(NZ/N)$$

принадлежит классу $\mathcal{C}$ как фактор-группа $\mathcal{C}$-группы X/N. В частности, справедливо включение $(X/Z)/(TZ/Z) \in \mathcal{C}$. Из соотношения $T \cap YZ = 1$ следует, что $TZ/Z \cap YZ/Z = 1$. Поэтому естественный гомоморфизм группы X/Z на фактор-группу $(X/Z)/(TZ/Z)$ является искомым.

2. Пусть $x \in X$ и $xZ \neq 1$. Если подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такова, что $x \notin NZ$, то $xZ \notin NZ/Z$ и $(X/Z)/(NZ/Z) \in \mathcal{C}$. Поэтому остается найти подгруппу N, обладающую указанным свойством.

Если $x \notin TZ$, то подгруппа T — искомая. Пусть $x = tz$ для некоторых $t \in T$, $z \in Z$. Так как $xZ \neq 1$, то $t \neq 1$ и, пользуясь $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью группы X, можно найти подгруппу $M \in \mathcal{C}^*(X)$, не содержащую элемента t. Положим $N = M \cap T$. Тогда $N \in \mathcal{C}^*(X)$ по предложению 1.3.4 и, если $x = t'z'$ для некоторых $t' \in N$, $z' \in Z$, то из равенства $T \cap Z = 1$ получаем, что $t = t' \in N \leqslant M$ в противоречие с выбором подгруппы M. Следовательно, подгруппа N является искомой.

3а. Поскольку

$$(X/Z)\overline{\sigma} = (X/Z)/(TZ/Z), \quad (YZ/Z)\overline{\sigma} = (YZT/Z)/(TZ/Z),$$

достаточно показать, что подгруппы YZT и TZ изолированы в группе X. Из равенств $T \cap YZ = 1$ и $Y \cap Z = 1$ следует, что подгруппа YZT представляет собой прямое произведение групп Y, Z и T. Так как подгруппа $(YZ)\sigma = YZT/T$ изолирована в группе $X\sigma = X/T$, то подгруппа YZT изолирована в группе X и изолированность подгруппы TZ в этой группе вытекает из предложения 3.2.4.

3б. Рассуждение следует той же схеме, что и доказательство утверждения 2, нужно лишь выбрать подгруппу N таким образом, чтобы выполнялось соотношение $(X/Z)/(NZ/Z) \in \mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$. Поскольку группа $X\sigma$ не имеет кручения и группа X $\mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема, справедливо включение $T \in \mathcal{C}^*_{\mathfrak{tf}}(X)$ и подгруппу M тоже можно считать принадлежащей семейству $\mathcal{C}^*_{\mathfrak{tf}}(X)$. Согласно предложению 1.3.4 из замкнутости класса $\mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$ относительно взятия подгрупп и прямых произведений следует, что $N = M \cap T \in \mathcal{C}^*_{\mathfrak{tf}}(X)$. Ввиду соотношений

$$TZ/NZ \cong T/N(T \cap Z) = T/N$$

подгруппа NZ изолирована в подгруппе TZ, последняя же, как доказано выше, изолирована в группе X. Таким образом,

$$(X/Z)/(NZ/Z) \cong X/NZ \in \mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}. \qquad \square$$

Доказательство теорем 3.3.1 и 3.3.2. Предположим сначала, что прямое произведение D групп $G_v\sigma_v$ $(v \in \mathcal{V})$ принадлежит классу $\mathcal{C}$.

Пусть $S_v = \ker \sigma_v$ $(v \in \mathcal{V})$. Очевидно, что семейство $\mathcal{S} = \{S_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп и группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))\rho_{\mathcal{S}}$ удовлетворяет условию предложения 3.4.3. Поэтому композиция $\rho_{\mathcal{S}}$ и гомоморфизма из указанного предложения оказывается искомым отображением σ. Поскольку класс $\mathcal{C}_{\mathfrak{tf}}$ также является корневым, аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ обеспечивается теоремой 2.2.1.

Тем самым, теорема 3.3.2 и утверждения 1 и 3а теоремы 3.3.1 доказаны полностью, а утверждения 2 и 3б — при условии, что $D \in \mathcal{C}$. Убедимся, что последние два утверждения справедливы и в отсутствие данного предположения.

Пусть $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ — произвольный элемент. Согласно предложению 3.4.2 существует конечный подграф $\Gamma' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ графа Γ такой, что граф $\Gamma' \cap \mathcal{T}$ является деревом, $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')} \in \pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma')) \setminus \{1\}$, граф групп $\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma')$ имеет тип (1) и подгруппа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma'))$ служит ретрактом группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma))$.

Из определения системы подгрупп $\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}') = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ следует, что для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа R_v выделяется прямым множителем в группе H_v. Поэтому в силу предложения 3.4.4, применяемого к группе $X = G_v$, подгруппам $YZ = H_v$, $Z = R_v$ и гомоморфизму $\sigma = \sigma_v$,

а) существует гомоморфизм $\overline{\sigma}_v$ группы G_v/R_v на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппе H_v/R_v, и, если группа G_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то и группа G_v/R_v является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой;

б) если группа $G_v\sigma_v$ не имеет кручения и подгруппа $H_v\sigma_v$ изолирована в ней, то группа $(G_v/R_v)\overline{\sigma}_v$ и подгруппа $(H_v/R_v)\overline{\sigma}_v$ обладают теми же свойствами и из $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируемости группы G_v вытекает $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$-аппроксимируемость группы G_v/R_v.

Так как граф Γ' конечен, то прямое произведение групп $(G_v/R_v)\overline{\sigma}_v$ $(v \in \mathcal{V}')$ принадлежит классу $\mathcal{C}$. Следовательно, группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}(\Gamma'))$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ или $\mathcal{C}_{\mathrm{tf}}$ в силу доказанного выше. Таким образом, композиция отображения $\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}')}$ и ретрактирующего гомоморфизма может быть продолжена до гомоморфизма группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на $\mathcal{C}$-группу, переводящего g в неединичный элемент. $\square$

§ 3.5. Доказательства теорем 3.3.5 и 3.3.6

Предложение 3.5.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *и группа G_v $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе H_v для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$;*

2) *$\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (2) *и группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$.*

Тогда для любых $u \in \mathcal{V}$, $L \in \mathcal{C}^*(G_u)$ существует $\mathcal{C}$-допустимая система совместимых нормальных подгрупп $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ такая, что $R_u \leqslant L$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{V}$ и $L \in \mathcal{C}^*(G_u)$ — произвольная подгруппа. Укажем систему совместимых нормальных подгрупп $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ такую, что $R_u \leqslant L$, $R_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$ для всех $v \in \mathcal{V}$ и граф групп $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma)$ имеет тот же тип, что и $\mathcal{G}(\Gamma)$. Поскольку граф Γ конечен, в этом случае прямое произведение $\mathcal{C}$-групп G_v/R_v $(v \in \mathcal{V})$ принадлежит классу $\mathcal{C}$ и согласно предложению 3.4.3 система $\mathcal{R}$ $\mathcal{C}$-допустима.

Предположим сначала, что выполняется условие 1. Для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ определим подгруппу $L_{\varepsilon e} \leqslant H_{\varepsilon e}$ следующим образом. Если ребро e не является петлей и $u = e(\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, положим

$$L_{\varepsilon e} = L \cap H_{\varepsilon e}, \quad L_{-\varepsilon e} = L_{\varepsilon e}\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}.$$

Если e — петля и $e(-1) = u = e(1)$, то

$$L_{+e} = (L \cap H_{+e}) \cap (L \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}\varphi_{+e},$$

$$L_{-e} = (L \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e} \cap (L \cap H_{-e}) = L_{+e}\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}.$$

В остальных случаях $L_{\varepsilon e} = H_{\varepsilon e}$.

Пусть для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$

$$M_v = \prod_{(e,\varepsilon)\in\Theta_v} L_{\varepsilon e}.$$

Так как $L \in \mathcal{C}^*(G_u)$, то по предложению 1.3.1 для любой пары $(e,\varepsilon) \in \Theta_u$ имеет место включение $L \cap H_{\varepsilon e} \in \mathcal{C}^*(H_{\varepsilon e})$. Отсюда и из предложения 1.3.4 вытекает, что $L_{\varepsilon e} \in \mathcal{C}^*(H_{\varepsilon e})$ для всех $(e,\varepsilon) \in \Theta_u$. Поскольку $\mathcal{C}$ — непустой класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, ему принадлежит единичная группа и, следовательно, $L_{\varepsilon e} \in \mathcal{C}^*(H_{\varepsilon e})$ для всех остальных пар (e,ε). Значит, ввиду конечности графа Γ фактор-группа H_v/M_v представляет собой прямое произведение конечного числа $\mathcal{C}$-групп $H_{\varepsilon e}/L_{\varepsilon e}$ и потому $M_v \in \mathcal{C}^*(H_v)$ для всех $v \in \mathcal{V}$.

Для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$, пользуясь $\mathcal{C}$-регулярностью группы G_v по подгруппе H_v, найдем подгруппу $R_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$ такую, что $M_v = R_v \cap H_v$. Тогда $R_u \cap H_u = M_u \leqslant L$ и, поскольку естественный гомоморфизм $G_v \to G_v/R_v$ продолжает естественный гомоморфизм $H_v \to H_v/M_v$, подгруппа H_vR_v/R_v представляет собой прямое произведение подгрупп $H_{\varepsilon e}R_v/R_v$ ($(e,\varepsilon) \in \Theta_v$). Таким образом, система $\{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ — искомая.

Предположим теперь, что выполняется условие 2. Для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ определим подгруппу $R_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$, используя индукцию по длине (единственного) пути, связывающего v с u. Положим $R_u = L$. Пусть $v \neq u$, e — инцидентное v ребро пути из v в u, $v = e(\varepsilon)$ ($\varepsilon = \pm 1$) и подгруппа $R_{e(-\varepsilon)} \in \mathcal{C}^*(G_{e(-\varepsilon)})$ уже определена. Тогда

$$R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e} \in \mathcal{C}^*(H_{-\varepsilon e}), \quad (R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e})\varphi_{-\varepsilon e}^{-1}\varphi_{\varepsilon e} \in \mathcal{C}^*(H_{\varepsilon e})$$

и ввиду $\mathcal{C}$-регулярности группы $G_{e(\varepsilon)} = G_v$ по подгруппе $H_{\varepsilon e}$ найдется подгруппа $R_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$ такая, что

$$R_v \cap H_{\varepsilon e} = (R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e})\varphi_{-\varepsilon e}^{-1}\varphi_{\varepsilon e}.$$

Понятно, что система $\{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ является искомой. □

Предложение 3.5.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп, X — некоторая группа, Y и Z — центральные подгруппы группы X и $Y \cap Z = 1$. Пусть также группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе YZ, а подгруппа YZ $\mathcal{C}$-отделима в группе X. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа Z $\mathcal{C}$-отделима в группе X и фактор-группа X/Z $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

2. *Группа X/Z $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе YZ/Z и подгруппа YZ/Z $\mathcal{C}$-отделима в группе X/Z.*

Доказательство. 1. Пусть $x \in X \setminus Z$ — произвольный элемент. Покажем, что существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $x \notin ZN$.

Если $x \notin YZ$, то в силу $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы YZ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $x \notin YZN$. Очевидно, что тогда $x \notin ZN$.

Пусть $x = yz$ для некоторых $y \in Y$, $z \in Z$. Поскольку $x \notin Z$, элемент y отличен от 1 и ввиду $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы X не принадлежит некоторой подгруппе $L \in \mathcal{C}^*(X)$. Из условия $Y \cap Z = 1$ следует, что тогда $yz \notin (L \cap Y)Z$. Так как

$$YZ/(L \cap Y)Z \cong Y/L \cap Y \cong YL/L \leqslant X/L$$

и класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то $(L \cap Y)Z \in \mathcal{C}^*(YZ)$. Поэтому ввиду $\mathcal{C}$-регулярности группы X по подгруппе YZ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap YZ = (L \cap Y)Z$. Тогда $yz \notin N$ и $Z \leqslant N$, откуда $x = yz \notin ZN$.

Таким образом, подгруппа Z $\mathcal{C}$-отделима в группе X и по предложению 1.3.2 фактор-группа X/Z $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

2. Пусть $M/Z \in \mathcal{C}^*(YZ/Z)$ — произвольная подгруппа. Тогда $M \in \mathcal{C}^*(YZ)$ и в силу $\mathcal{C}$-регулярности группы X по подгруппе YZ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap YZ = M$. Отсюда легко следует, что $N/Z \in \mathcal{C}^*(X/Z)$ и $N/Z \cap YZ/Z = M/Z$. Таким образом, группа X/Z $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе YZ/Z. Остается заметить, что согласно предложению 1.3.2 $\mathcal{C}$-отделимость подгруппы YZ в группе X равносильна $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $X/YZ \cong (X/Z)/(YZ/Z)$, которая в свою очередь равносильна $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы YZ/Z в группе X/Z. $\square$

Доказательство теоремы 3.3.6 сводится к использованию теорем 2.3.1, 2.7.1 и предложений 2.4.1, 3.5.1. $\square$

Доказательство теоремы 3.3.5. Согласно предложению 3.4.2 для заданного элемента $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)\backslash\{1\}$ найдется конечный подграф $\Gamma' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ графа Γ такой, что граф $\Gamma' \cap \mathcal{T}$ является деревом, $g\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}')} \in \pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}')}(\Gamma'))\backslash\{1\}$, граф групп $\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}')}(\Gamma')$ имеет тип (1) и подгруппа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}')}(\Gamma'))$ служит ретрактом группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}')}(\Gamma))$. Из определения системы $\mathcal{R}(\mathcal{E}\setminus\mathcal{E}') = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ вытекает, что для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа R_v выделяется в группе H_v прямым множителем, а группа H_v/R_v представляет собой прямое произведение подгрупп $H_{\varepsilon e}R_v/R_v$ $((e,\varepsilon) \in \Theta_v)$. Поэтому согласно предложению 3.5.2 группа G_v/R_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе H_v/R_v, а подгруппа H_v/R_v $\mathcal{C}$-отделима в группе G_v/R_v. Перечисленные свойства в силу того же предложения 3.5.2 влекут за собой $\mathcal{C}$-отделимость в группе G_v/R_v всех прямых множителей $H_{\varepsilon e}R_v/R_v$ $((e,\varepsilon) \in \Theta_v)$ подгруппы H_v/R_v. Таким образом, группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}')}(\Gamma'))$ удовлетворяет условиям теоремы 3.3.6 и потому $\mathcal{C}$-аппроксимируема. Отсюда следует, что композиция отображения $\rho_{\mathcal{R}(\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}')}$ и ретрактирующего гомоморфизма может быть продолжена до гомоморфизма группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, переводящего g в неединичный элемент. $\square$

Глава 4. Аппроксимируемость HNN-расширений с центральными связанными подгруппами

§ 4.1. Формулировка результатов

В [78,169,170] С. Андреадакис, Е. Раптис и Д. Варсос указали критерии финитной и нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы и установили, что такое расширение аппроксимируется разрешимыми группами. Д. И. Молдаванский [47,48] существенным образом усилил некоторые из этих результатов, обобщив их на случай HNN-расширения с центральными связанными подгруппами. Для изучения $\mathcal{C}$-аппроксимируемости таких HNN-расширений он предложил оригинальный подход, названный им *методом спуска и подъема совместимых подгрупп*. В [47,48] этот метод применяется в предположении, что $\mathcal{C}$ — класс всех конечных групп или всех конечных p-групп, где p — простое число. Основной целью данной главы является обобщение полученных в указанных работах результатов на случай, когда $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп.

Набор (X, Y, Z, ψ) будем называть *HNN-кортежем*, если X — некоторая группа, Y и Z — изоморфные подгруппы группы X и $\psi\colon Y \to Z$ — изоморфизм. Если (X, Y, Z, ψ) — HNN-кортеж, то через $\mathrm{HNN}(X, Y, Z, \psi)$ будем обозначать HNN-расширение

$$\bigl\langle X, t;\ t^{-1}Yt = Z,\ \psi\bigr\rangle.$$

До конца данного параграфа будем считать, что (G, H, K, φ) — HNN-кортеж, подгруппы H и K *лежат в центре* группы G и $\mathfrak{G} = \mathrm{HNN}(G, H, K, \varphi)$. Положим

$$K_0 = G, \quad H_1 = H, \quad K_1 = K$$

и, если подгруппы H_i и K_i уже определены, то

$$H_{i+1} = H_i \cap K_i, \quad K_{i+1} = H_{i+1}\varphi.$$

Для упрощения обозначений ограничение изоморфизма φ на H_i ($i \geqslant 1$) или какую-либо другую подгруппу всюду далее будем обозначать просто символом φ.

Поскольку для любого $i \geqslant 0$ набор $(K_i, H_{i+1}, K_{i+1}, \varphi)$ является HNN-кортежем, определена группа $\mathfrak{K}_i = \mathrm{HNN}(K_i, H_{i+1}, K_{i+1}, \varphi)$. Очевидно, что если для некоторого $n \geqslant 1$ имеет место равенство $H_n = K_n$, то $H_{n+1} = K_n = K_{n+1}$ и потому группа $\mathfrak{K}_n$ представляет собой расщепляемое расширение группы K_n при помощи бесконечной циклической группы $\langle t\rangle$. Легко видеть также, что ограничение изоморфизма φ на подгруппу H_n оказывается автоморфизмом последней и подгруппа $E = \mathrm{sgp}\{H_n, t\}$

группы $\mathfrak{G}$ является расщепляемым расширением группы H_n при помощи подгруппы $\langle t \rangle$, изоморфным $\mathfrak{K}_n$.

Суть метода спуска и подъема совместимых подгрупп состоит в доказательстве того, что при определенных условиях для каждого $i \geqslant 0$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ равносильна $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{K}_i$. Если $H_n = K_n$ для некоторого $n \geqslant 1$, это позволяет свести вопрос о $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ к, вообще говоря, более простой задаче отыскания условий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости расщепляемого расширения $\mathfrak{K}_n$. Два критерия аппроксимируемости расщепляемых расширений корневыми классами групп приводятся в конце параграфа 4.3.

Отметим, что равенство $H_n = K_n$ может не иметь места ни для какого $n \geqslant 0$. Чтобы добиться его выполнения, в приводимых далее теоремах 4.1.1 и 4.1.3 на группу G накладывается более слабое условие: $H_n = H_{n+1}$ для некоторого $n \geqslant 1$. Ряд ситуаций, в которых последнее соотношение обязательно выполняется, описывается следствиями 4.1.4, 4.1.5, а также предложением 6.4.6.

Теорема 4.1.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, $H \neq G \neq K$ и для некоторого $n \geqslant 1$ имеет место равенство $H_n = H_{n+1}$. Пусть также для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ группа K_i $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{i+1}K_{i+1}$ и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолятор $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(K_i, H_{i+1}K_{i+1})$ $\mathcal{C}$-отделим в группе K_i. Группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) $H_n = K_n$;
2) *подгруппа* $E = \operatorname{sgp}\{H_n, t\}$ *$\mathcal{C}$-аппроксимируема*;
3) *подгруппы H и K $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G.*

Теорема 4.1.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, содержащий непериодические группы и замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и для некоторого $n \geqslant 0$ существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(K_n)$, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий*:

(α) $H_{n+1} \cap Q = 1 = K_{n+1} \cap Q$,
(β) $Q \leqslant H_{n+1} \cap K_{n+1}$ *и* $Q\varphi = Q$.

Пусть также для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ группа K_i $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{i+1}K_{i+1}$ и подгруппа $H_{i+1}K_{i+1}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе K_i. Тогда группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Для того, чтобы иметь возможность свести изучение вопроса об аппроксимируемости HNN-расширения $\mathfrak{K}_i$ к рассмотрению HNN-расширения $\mathfrak{K}_{i+1}$ и наоборот, в формулировках теорем 4.1.1 и 4.1.2 на подгруппы группы G приходится накладывать ограничения, связанные с отделимостью и регулярностью. Ряд результатов, касающихся данных свойств, и опирающиеся на эти результаты следствия приведенных утверждений будут доказаны в главе 6. Еще одним частным случаем теорем 4.1.1 и 4.1.2, в котором также удается избавиться от условий отделимости и регулярности, является

Теорема 4.1.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий:*

(α) $H \cap Q = 1 = K \cap Q$,

(β) $Q \leqslant H \cap K$ *и* $Q\varphi = Q$.

I. *Если класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

II. *Если класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, $H \neq G \neq K$ и для некоторого $n \geqslant 1$ имеет место равенство $H_n = H_{n+1}$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) $H_n = K_n$;

2) *подгруппа* $E = \mathrm{sgp}\{H_n, t\}$ *$\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Следствие 4.1.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, подгруппы H и K конечны. Тогда $H_n = K_n$ для некоторого $n \geqslant 1$ и справедливы следующие утверждения.*

I. *Если класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

II. *Если класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда порядок автоморфизма φ группы H_n является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом.*

Следствие 4.1.5. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, подгруппы H и K имеют конечный индекс в группе G и $H \neq G \neq K$.*

I. *Если класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющая условиям $Q \leqslant H \cap K$ и $Q\varphi = Q$.*

II. *Если класс $\mathcal{C}$ состоит только из конечных групп, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) $G/H \in \mathcal{C}$ *и* $G/K \in \mathcal{C}$;

2) $H_n = K_n$ *для некоторого* $n \geqslant 1$;

3) *подгруппа* $E = \mathrm{sgp}\{H_n, t\}$ *$\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Отметим, что теорема 4.1.3 обобщает теорему 1.1 из [169], а следствие 4.1.5 — основную теорему из [78] (в части, касающейся ненисходящих HNN-расширений), однако, указанные результаты из [78, 169] имеют более простые формулировки, благодаря дополнительным ограничениям, накладываемым в них на базовую группу и связанные подгруппы.

В некоторых случаях полностью исследовать аппроксимируемость HNN-расширения удается без использования метода спуска и подъема совместимых подгрупп. Здесь это будет проделано при условии, что связанные подгруппы H и K являются циклическими.

Если H и K — конечные циклические группы и $L = H \cap K$, то, поскольку в конечной циклической группе есть только одна подгруппа заданного порядка, имеет место равенство $L\varphi = L$. Таким образом, ограничение изоморфизма φ на подгруппу L оказывается ее автоморфизмом. Следующая теорема является частным случаем следствия 4.1.4, однако в § 4.4 будет дано независимое ее доказательство, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 4.1.6. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, подгруппы H и K являются конечными циклическими, $L = H \cap K$ и Φ — циклическая подгруппа группы* $\mathrm{Aut}\, L$, *порожденная ограничением изоморфизма φ на подгруппу L. Группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\Phi \in \mathcal{C}$. В частности, если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Далее будем считать, что подгруппы H и K бесконечны. Если G — бесконечная циклическая группа, то критерий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости HNN-расширения $\mathfrak{G}$ известен (см. теорему 5.2.1). Поэтому ниже предполагается, что группа G не является циклической и, в частности, не совпадает ни с одной из связанных подгрупп H и K.

Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и группа G обладает гомоморфизмом на $\mathcal{C}$-группу, действующим инъективно на подгруппах H и K, то класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы и в силу теоремы 3.3.2 из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G следует $\mathcal{C}$-аппроксимируемость HNN-расширения $\mathfrak{G}$. В случае, когда гомоморфизма группы G с указанными свойствами не существует, критерий аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ дают две приводимые далее теоремы.

Теорема 4.1.7. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема, подгруппы H и K являются бесконечными циклическими, $H \neq G \neq K$ и не существует гомоморфизма группы G на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективного на подгруппах H и K. Если $H \cap K \neq 1$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *фактор-группы $H/H \cap K$ и $K/H \cap K$ имеют одинаковые порядки*;

2) *подгруппы H и K $\mathcal{C}$-отделимы в группе G*;

3) *класс $\mathcal{C}$ содержит группу порядка 2, если только подгруппа $H \cap K$ не лежит в центре группы $\mathfrak{G}$.*

Теорема 4.1.8. *Пусть выполняются условия теоремы 4.1.7, $H \cap K = 1$ и*

$$\Omega = \bigl\{N \in \mathcal{C}^*(G) \mid \exists n \geqslant 1 \; N \cap HK = (HK)^n\bigr\}.$$

Группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K отделимы семейством Ω, т. е.

$$\bigcap_{N \in \Omega} HN = H, \quad \bigcap_{N \in \Omega} KN = K.$$

Описание семейства Ω и проверка отделимости им подгрупп H и K для конкретных класса $\mathcal{C}$ и группы G могут оказаться непростой задачей. Потребовав в дополнение к предположениям теоремы 4.1.8, чтобы подгруппа HK была $\mathcal{C}$-отделимой в группе G, удается доказать критерий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$, справедливость условий которого установить легче.

Теорема 4.1.9. *Пусть выполняются условия теоремы 4.1.7 и $H \cap K = 1$. Если подгруппа HK $\mathcal{C}$-отделима в группе G, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда среди подгрупп $(HK)^n$ $(n \geqslant 1)$ имеется бесконечное число $\mathcal{C}$-отделимых в G.*

Заметим, однако, что $\mathcal{C}$-отделимость подгруппы HK, вообще говоря, не является необходимым условием $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ и потому теорема 4.1.9 не может служить полной заменой теоремы 4.1.8. Подтверждением этому служит следующий

Пример. Пусть p и q — различные простые числа, G — свободная абелева группа ранга 2 с порождающими a и b, $H = \langle a \rangle$ и $K = \langle ab^q \rangle$. Тогда $HK = \mathrm{sgp}\{a, b^q\}$ и $[G : HK] = q$. Из последнего равенства и предложения 1.3.7 следует, что подгруппа HK не является отделимой в группе G классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп. Покажем, что группа $\mathfrak{G}$, тем не менее, оказывается $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

В самом деле, если $r \geqslant 1$, то

$$G/G^{p^r} \cong \mathbb{Z}_{p^r} \times \mathbb{Z}_{p^r} \in \mathcal{F}_p.$$

Ввиду взаимной простоты чисел p и q из включения $a^x b^{qy} \in G^{p^r}$ для некоторых $x, y \in \mathbb{Z}$ вытекает, что $p^r \mid x$ и $p^r \mid y$. Поэтому $a^x b^{qy} \in (HK)^{p^r}$ и, следовательно,

$$G^{p^r} \cap HK = (HK)^{p^r}.$$

Таким образом, подгруппа G^{p^r} принадлежит семейству

$$\Omega = \big\{N \in \mathcal{F}_p^*(G) \mid \exists n \geqslant 1 \ N \cap HK = (HK)^n\big\}.$$

Пусть теперь $a^i b^j$ — произвольный элемент группы G и число r таково, что

$$p^r > q|i| + |j|.$$

Если $a^i b^j \in HG^{p^r}$, то $p^r \mid j$ и, следовательно, $j = 0$ в силу выбора числа r. Стало быть, $a^i b^j \in H$. Если же $a^i b^j \in KG^{p^r}$, то для некоторого $x \in \mathbb{Z}$ имеют место сравнения

$$i \equiv x \pmod{p^r}, \quad j \equiv qx \pmod{p^r}.$$

Отсюда

$$j \equiv qi \pmod{p^r},$$

и снова в силу выбора числа r получаем, что $j = qi$ и $a^i b^j \in K$. Таким образом, подгруппы H и K отделимы семейством Ω и группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$ по теореме 4.1.8.

§ 4.2. Обобщенные прямые произведения групп, ассоциированные с простыми циклами

Цель настоящего параграфа состоит в отыскании условий существования некоторых обобщенных прямых произведений, ассоциированных с простыми циклами.

Пусть (X, Y, Z, ψ) — HNN-кортеж и Γ — простой цикл длины $n \geqslant 3$ с множеством вершин $\mathcal{V} = \mathbb{Z}_n$ и множеством ребер

$$\mathcal{E} = \bigl\{\{i-1,\, i\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\bigr\}.$$

Пусть также для каждого $i \in \mathbb{Z}_n$ X_i — изоморфная копия группы X и $\sigma_i\colon X \to X_i$ — изоморфизм. Сопоставим вершине $i \in \mathbb{Z}_n$ группу X_i, ребру $e = \{i-1,\, i\} \in \mathcal{E}$ группу Y и гомоморфизмы $\varphi_{e,i-1} = \sigma_{i-1}|_Y$, $\varphi_{e,i} = \psi\sigma_i|_Z$ (здесь и далее все индексы рассматриваются по модулю n). Полученный в результате граф групп будем обозначать через $\mathcal{G}_n(X, Y, Z, \psi)$.

Число $n \geqslant 3$ будем называть *допустимым для HNN-кортежа* (X, Y, Z, ψ) *с запасом* r $(0 \leqslant r \leqslant n-2)$, если выполняются следующие условия:

$(\mathfrak{E}.1)$ для каждой вершины $i \in \mathbb{Z}_n$ тождественное отображение образующих группы X_i в группу $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(X, Y, Z, \psi))$ продолжаемо до инъективного гомоморфизма;

$(\mathfrak{E}.3)$ для любых чисел $s \in \{0, 1, \ldots, r\}$, $q \in \mathbb{Z}_n$ и элементов

$$x_q \in X_q, \quad x_{q+1} \in X_{q+1}, \quad \ldots, \quad x_{q+s+1} \in X_{q+s+1}$$

из равенства $x_q x_{q+1} \ldots x_{q+s+1} = 1$ следует, что $x_q \in Y\sigma_q$ и $x_{q+s+1} \in Z\sigma_{q+s+1}$.

Отметим, что если число n допустимо для кортежа (X, Y, Z, ψ) с некоторым запасом $r \in \{0,\, \ldots,\, n-2\}$, то обобщенное прямое произведение, ассоциированное с графом групп $\mathcal{G}_n(X, Y, Z, \psi)$, существует. В самом деле, для каждого ребра $e = \{i-1,\, i\} \in \mathcal{E}$, если $x \in X_{i-1} \cap X_i$, $x_{i-1} = x$ и $x_i = x^{-1}$, то $x_{i-1}x_i = 1$ и в силу допустимости

$$x_{i-1} \in Y\sigma_{i-1} = Y\varphi_{e,i-1}, \quad x_i \in Z\sigma_i = Y\varphi_{e,i}.$$

Таким образом, $X_{i-1} \cap X_i \leqslant Y\varphi_{e,i-1} \cap Y\varphi_{e,i}$ и потому $Y\varphi_{e,i-1} = X_{i-1} \cap X_i = Y\varphi_{e,i}$.

Предложение 4.2.1. *Пусть (G, H, K, φ) — HNN-кортеж, подгруппы H и K лежат в центре группы G, $L = H \cap K$ и $M = L\varphi$. Число $n \geqslant 3$ является допустимым для кортежа (G, H, K, φ) с запасом $r \leqslant n-3$ тогда и только тогда, когда оно является допустимым для кортежа (K, L, M, φ) с запасом $r+1$.*

Доказательство. Пусть для каждого $i \in \mathbb{Z}_n$ G_i — изоморфная копия группы G и $\sigma_i\colon G \to G_i$ — изоморфизм. Положим

$$H_i = H\sigma_i, \quad K_i = K\sigma_i, \quad L_i = L\sigma_i, \quad M_i = M\sigma_i,$$
$$\varphi_i = \bigl(\sigma_{i-1}|_{H_{i-1}}\bigr)^{-1}\varphi\,\bigl(\sigma_i|_K\bigr)$$

(в параграфе 4.1 символы H_i и K_i соответствовали другим подгруппам; введенные только что обозначения действуют лишь до конца настоящего доказательства). Тогда отображение φ_i представляет собой изоморфизм подгруппы H_{i-1} на подгруппу K_i, а его ограничение на L_{i-1} — изоморфизм подгрупп L_{i-1} и M_i. Отметим, что если группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G,H,K,\varphi))$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{E}.1$), то подгруппы H_i и K_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) можно считать содержащимися в ней и из соотношений $h\sigma_{i-1} = h\varphi\sigma_i$ ($i \in \mathbb{Z}_n$, $h \in H$) вытекает, что в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G,H,K,\varphi))$ справедливы равенства $h\varphi_i = h$ ($i \in \mathbb{Z}_n$, $h \in H_{i-1}$). Аналогично, если группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K,L,M,\varphi))$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{E}.1$), то в ней выполняются равенства $h\varphi_i = h$ ($i \in \mathbb{Z}_n$, $h \in L_{i-1}$).

Достаточность. Зафиксируем число $i \in \mathbb{Z}_n$ и определим отображение θ_i подгруппы K_iH_i группы G_i в подгруппу K_iK_{i+1} группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K,L,M,\varphi))$ следующим образом: если $h \in H_i$ и $k \in K_i$, то $(kh)\theta_i = k(h\varphi_{i+1})$. Покажем, что это отображение задано корректно и является изоморфизмом подгрупп, продолжающим тождественное отображение подгруппы K_i.

Если $h_1, h_2 \in H_i$, $k_1, k_2 \in K_i$ и $k_1h_1 = k_2h_2$, то $k_2^{-1}k_1 = h_2h_1^{-1} \in H_i \cap K_i = L_i$ и потому в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K,L,M,\varphi))$ имеет место равенство $(h_2h_1^{-1})\varphi_{i+1} = h_2h_1^{-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned}(k_1h_1)\theta_i = k_1(h_1\varphi_{i+1}) = k_2(k_2^{-1}k_1)((h_1h_2^{-1})h_2)\varphi_{i+1} = \\ = k_2(k_2^{-1}k_1h_1h_2^{-1})(h_2\varphi_{i+1}) = k_2(h_2\varphi_{i+1}) = (k_2h_2)\theta_i.\end{aligned}$$

Пусть $h \in H_i$, $k \in K_i$ и $1 = (kh)\theta_i = k(h\varphi_{i+1})$. Так как $k \in K_i$, $h\varphi_{i+1} \in K_{i+1}$ и число n допустимо для кортежа (K,L,M,φ), то $k \in L_i$ и $h\varphi_{i+1} \in M_{i+1}$. Отсюда $h \in L_i$ и $1 = k(h\varphi_{i+1}) = kh$, поскольку в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K,L,M,\varphi))$ имеет место равенство $h\varphi_{i+1} = h$.

Таким образом, корректность определения и инъективность отображения θ_i доказаны, гомоморфность и сюръективность его очевидны.

Пусть Δ — граф групп, представляющий собой звезду с центральной вершиной w и множеством листьев $\{v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$, вершине v_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) сопоставлена группа G_i, вершине w — группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K,L,M,\varphi))$, а ребру, ведущему из w в v_i — подгруппа K_iH_i группы G_i и гомоморфизмы, один из которых является тождественным отображением, а другой совпадает с изоморфизмом θ_i. Из определений отображений θ_i и φ_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) следует, что для всех $i \in \mathbb{Z}_n$, $h \in H$ в группе $\mathrm{GDP}(\Delta)$ справедливы равенства

$$h\sigma_{i-1} = (h\sigma_{i-1})\theta_{i-1} = (h\sigma_{i-1})\varphi_i = h\varphi\sigma_i.$$

Поэтому тождественное отображение образующих группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G,H,K,\varphi))$ в группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$ задает гомоморфизм, который мы обозначим через λ. Пусть $i \in \mathbb{Z}_n$ — произвольное число, $\alpha_i\colon G_i \to \mathrm{GDP}(\Delta)$ и $\beta_i\colon G_i \to \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G,H,K,\varphi))$ — гомоморфизмы, определяемые тождественными отображениями образующих группы G_i. Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\beta_i} & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G,H,K,\varphi)) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ G_i & \xrightarrow{\alpha_i} & \mathrm{GDP}(\Delta) \end{array}$$

коммутативна и гомоморфизм α_i согласно теореме 3.2.1 инъективен, то гомоморфизм β_i также инъективен и, стало быть, группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{E}.1$). Проверим выполнение условия ($\mathfrak{E}.3$).

Пусть числа $q \in \mathbb{Z}_n$, $s \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ r\}$ и элементы

$$g_q \in G_q, \quad g_{q+1} \in G_{q+1}, \quad \ldots, \quad g_{q+s+1} \in G_{q+s+1}$$

таковы, что в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$ справедливо равенство $g_q g_{q+1} \ldots g_{q+s+1} = 1$. Тогда согласно определению гомоморфизма λ это равенство выполняется и в группе $\mathrm{GDP}(\Delta)$.

Пусть $j \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ s+1\}$ и граф групп $\Delta - v_{q+j}$ получается из Δ удалением вершины v_{q+j} и ведущего в нее ребра. Тогда группа $\mathrm{GDP}(\Delta)$ представляет собой обобщенное прямое произведение P_j групп $\mathrm{GDP}(\Delta - v_{q+j})$ и G_{q+j} с объединенными подгруппами $K_{q+j}K_{q+j+1}$ и $K_{q+j}H_{q+j}$. В силу теоремы 3.2.1 в группе P_j выполняется равенство

$$\mathrm{GDP}(\Delta - v_{q+j}) \cap G_{q+j} = K_{q+j}H_{q+j}.$$

Из соотношения $r \leqslant n-3$ следует, что $s+2 < n$ и потому

$$\begin{gathered} g_{q+j-1}^{-1} g_{q+j-2}^{-1} \ldots g_q^{-1} g_{q+s+1}^{-1} \ldots g_{q+j+2}^{-1} g_{q+j+1}^{-1} \in \mathrm{GDP}(\Delta - v_{q+j}), \\ g_{q+j} = g_{q+j-1}^{-1} g_{q+j-2}^{-1} \ldots g_q^{-1} g_{q+s+1}^{-1} \ldots g_{q+j+2}^{-1} g_{q+j+1}^{-1} \in \mathrm{GDP}(\Delta - v_{q+j}) \cap G_{q+j}. \end{gathered}$$

Значит, $g_{q+j} \in K_{q+j}H_{q+j}$.

Для каждого $j \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ s+1\}$ запишем элемент g_{q+j} в виде $g_{q+j} = k_{q+j}h_{q+j}$, где $h_{q+j} \in H_{q+j}$, $k_{q+j} \in K_{q+j}$. Так как группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{E}.1$), то в ней имеют место соотношения

$$h_{q+j} = h_{q+j}\varphi_{q+j+1} \in K_{q+j+1} \quad (0 \leqslant j \leqslant s+1)$$

и потому

$$k_q \in K_q, \quad h_q k_{q+1} \in K_{q+1}, \quad \ldots, \quad h_{q+s}k_{q+s+1} \in K_{q+s+1}, \quad h_{q+s+1} \in K_{q+s+2}.$$

Как уже было отмечено выше, равенство $g_q g_{q+1} \ldots g_{q+s+1} = 1$ справедливо в группе $\mathrm{GDP}(\Delta)$. Перепишем его в виде

$$k_q(h_q k_{q+1}) \ldots (h_{q+s}k_{q+s+1})h_{q+s+1} = 1.$$

Так как согласно теореме 3.2.1 группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K, L, M, \varphi))$ вкладывается в группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$ посредством тождественного отображения образующих, то последнее соотношение выполняется в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K, L, M, \varphi))$ и из допустимости числа n для кортежа (K, L, M, φ) с запасом $r+1$ следует, что $k_q \in L_q$ и $h_{q+s+1} \in M_{q+s+2}$. Отсюда

$$g_q = k_q h_q \in H_q, \quad h_{q+s+1}\varphi_{q+s+2}^{-1} \in L_{q+s+1} \leqslant K_{q+s+1}$$

и

$$g_{q+s+1} = k_{q+s+1}h_{q+s+1} = k_{q+s+1}(h_{q+s+1}\varphi_{q+s+2}^{-1}) \in K_{q+s+1},$$

что и требовалось.

Необходимость. Легко видеть, что отображение слов, действующее на образующих групп K_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) так же, как естественные вложения $\iota_i \colon K_i \to G_i$ ($i \in \mathbb{Z}_n$), переводит все определяющие соотношения группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K, L, M, \varphi))$ в равенства, верные в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$, и потому задает гомоморфизм μ первой во вторую. Пусть $\beta_i \colon G_i \to \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$ и $\gamma_i \colon K_i \to \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K, L, M, \varphi))$ — гомоморфизмы, определяемые тождественными отображениями образующих групп G_i и K_i ($i \in \mathbb{Z}_n$). Тогда для каждого $i \in \mathbb{Z}_n$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_i & \xrightarrow{\gamma_i} & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K, L, M, \varphi)) \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_i} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G_i & \xrightarrow{\beta_i} & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi)) \end{array}$$

коммутативна и из инъективности гомоморфизмов β_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) следует инъективность гомоморфизмов γ_i ($i \in \mathbb{Z}_n$). Таким образом, группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(K, L, M, \varphi))$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{E}.1$).

Пусть числа $q \in \mathbb{Z}_n$, $s \in \{0, 1, \ldots, r+1\}$ и элементы

$$k_q \in K_q, \quad k_{q+1} \in K_{q+1}, \quad \ldots, \quad k_{q+s+1} \in K_{q+s+1}$$

таковы, что $k_q k_{q+1} \ldots k_{q+s+1} = 1$. Из определения гомоморфизма μ следует, что равенство $k_q k_{q+1} \ldots k_{q+s+1} = 1$ имеет место и в группе $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$. Так как для кортежа (G, H, K, φ) число n является допустимым с запасом r и справедливы включения

$$k_q \in G_q, \quad \ldots, \quad k_{q+s-1} \in G_{q+s-1}, \quad k_{q+s} k_{q+s+1} = k_{q+s}(k_{q+s+1} \varphi_{q+s+1}^{-1}) \in G_{q+s},$$

то

$$k_q \in H_q, \quad k_{q+s}(k_{q+s+1} \varphi_{q+s+1}^{-1}) \in K_{q+s}.$$

Отсюда

$$k_q \in H_q \cap K_q = L_q, \quad k_{q+s+1} \varphi_{q+s+1}^{-1} \in K_{q+s}.$$

Из последнего соотношения вытекает, что

$$k_{q+s+1} \varphi_{q+s+1}^{-1} \in H_{q+s} \cap K_{q+s} = L_{q+s}$$

и потому $k_{q+s+1} \in M_{q+s+1}$, как и требовалось. □

Предложение 4.2.2. *Пусть (G, H, K, φ) — HNN-кортеж, G — абелева группа, $H = G = K$ и порядок q автоморфизма φ конечен. Тогда каждое кратное q число $n \geqslant 3$ является допустимым для кортежа (G, H, K, φ) с любым запасом $r \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$.*

Доказательство. Пусть снова для каждого $i \in \mathbb{Z}_n$ G_i — изоморфная копия группы G и $\sigma_i \colon G \to G_i$ — изоморфизм. Пусть также Δ — граф групп, представляющий собой звезду с центральной вершиной w и множеством листьев $\{v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$, вершине w сопоставлена группа G, вершине v_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) — группа G_i, ребру, ведущему из w в v_i — группа G и гомоморфизмы, один из которых является тождественным отображением, а другой совпадает с изоморфизмом $\varphi^i\sigma_i$. Поскольку $q \mid n$, из соотношения $x \equiv y \pmod{n}$ следует, что $\varphi^x = \varphi^y$ и обозначение φ^i корректно.

Согласно определению графа групп Δ для любых $i \in \mathbb{Z}_n$, $g' \in G$ в группе $\mathrm{GDP}(\Delta)$ выполняется равенство $g' = g'\varphi^i\sigma_i$, откуда $g\sigma_{i-1} = g\varphi^{-(i-1)} = g\varphi\sigma_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}_n$, $g \in G$. Значит, тождественное отображение образующих группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$ в группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$ продолжаемо до гомоморфизма

$$\lambda\colon \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi)) \to \mathrm{GDP}(\Delta).$$

Пусть $\alpha_i\colon G_i \to \mathrm{GDP}(\Delta)$ и $\beta_i\colon G_i \to \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$ — гомоморфизмы, определяемые тождественными отображениями образующих группы G_i ($i \in \mathbb{Z}_n$). Тогда для каждого $i \in \mathbb{Z}_n$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, equal] & \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi)) \arrow[d, "\lambda"] \\ G_i \arrow[r, "\alpha_i"] & \mathrm{GDP}(\Delta) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Так как согласно теореме 3.2.1 гомоморфизмы α_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) инъективны, то гомоморфизмы β_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) тоже являются инъективными и это означает, что группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$ удовлетворяет условию ($\mathfrak{E}.1$). Поскольку $H = G = K$, условие ($\mathfrak{E}.3$) выполняется тривиальным образом. $\square$

Предложение 4.2.3. *Пусть число $n \geqslant 3$ является допустимым для HNN-кортежа (G, H, K, φ) с запасом $r \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ и $\mathcal{Z}_n$ — циклическая группа порядка n с порождающим z. Пусть также $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп и расширений. Если $G \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{C}$, то существует гомоморфизм группы $\mathfrak{G} = \mathrm{HNN}(G, H, K, \varphi)$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на подгруппе G.*

Доказательство. Пусть G_i и σ_i ($i \in \mathbb{Z}_n$) определены, как и выше. Тогда группа $P = \mathrm{GDP}(\mathcal{G}_n(G, H, K, \varphi))$ имеет представление

$$\bigl\langle G_i \ (i \in \mathbb{Z}_n);\ [G_i, G_j] = 1 \ (i, j \in \mathbb{Z}_n,\, i \neq j),\ H\sigma_{i-1} = K\sigma_i \ (i \in \mathbb{Z}_n)\bigr\rangle,$$

из которого видно, что отображение, продолжающее изоморфизмы $\sigma_i^{-1}\sigma_{i-1}\colon G_i \to G_{i-1}$, определяет автоморфизм α этой группы. Очевидно, что порядок данного автоморфизма делит n и потому существует расщепляемое расширение Q группы P при помощи группы $\mathcal{Z}_n$ такое, что $\widehat{z}|_P = \alpha$. Поскольку $G \in \mathcal{C}$, группа P представляет собой фактор-группу прямого произведения n $\mathcal{C}$-групп. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия фактор-групп и расширений следует, что $P \in \mathcal{C}$ и $Q \in \mathcal{C}$.

Легко видеть, что отображение $\rho\colon \mathfrak{G} \to Q$, продолжающее гомоморфизм $\sigma_0\colon G \to G_0$ и переводящее t в z, преобразует все определяющие соотношения группы $\mathfrak{G}$ в равенства, верные в группе Q, и потому является гомоморфизмом. Поскольку $z^iG_0z^{-i} = G_i$ ($i \in \mathbb{Z}_n$), этот гомоморфизм сюръективен. Остается заметить, что ввиду допустимости числа n гомоморфизм ρ инъективен на подгруппе G и, следовательно, является искомым отображением. $\square$

§ 4.3. Совместимые подгруппы и условия аппроксимируемости HNN-расширений

До конца данного параграфа будем считать, что (G, H, K, φ) — HNN-кортеж и $\mathfrak{G} = \mathrm{HNN}(G, H, K, \varphi)$. Напомним, что подгруппа $R \leqslant G$ называется (H, K, φ)-*совместимой*, если $(R \cap H)\varphi = R \cap K$. Понятно, что если R — нормальная (H, K, φ)-совместимая подгруппа группы G, то множество $\{R\}$ оказывается системой совместимых нормальных подгрупп в группе $\mathfrak{G}$. Поэтому наряду с кортежем (G, H, K, φ) определен HNN-кортеж

$$(G/R,\ HR/R,\ KR/R,\ \varphi_R),$$

где $\varphi_R\colon HR/R \to KR/R$ — изоморфизм, переводящий смежный класс hR $(h \in H)$ в элемент $(h\varphi)R$. Гомоморфизм $\rho_{\{R\}}$ в данном случае для простоты будем обозначать через ρ_R.

Пусть для каждого класса групп $\mathcal{C}$

– $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ — семейство всех (H, K, φ)-совместимых подгрупп из $\mathcal{C}^*(G)$;

– $\mathcal{C}^*_r(G, H, K, \varphi)$ $(r \geqslant 0)$ — подмножество семейства $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$, определенное следующим образом: подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ принадлежит семейству $\mathcal{C}^*_r(G, H, K, \varphi)$ тогда и только тогда, когда существует число $n \geqslant \max\{3,\ r + 2\}$, являющееся допустимым с запасом r для HNN-кортежа

$$(G/N,\ HN/N,\ KN/N,\ \varphi_N)$$

и такое, что класс $\mathcal{C}$ содержит циклическую группу порядка n;

– $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi) = \big\{U \cap G \mid U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})\big\}$.

Предложение 4.3.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Тогда семейства $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ и $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ замкнуты относительно конечных пересечений.*

Доказательство. Очевидные индуктивные соображения позволяют ограничиться рассмотрением пересечения двух подгрупп.

Пусть $N_1, N_2 \in \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ и $N = N_1 \cap N_2$. Тогда $N \in \mathcal{C}^*(G)$ согласно предложению 1.3.4 и в силу инъективности отображения φ

$$(N \cap H)\varphi = \big((N_1 \cap H) \cap (N_2 \cap H)\big)\varphi = (N_1 \cap H)\varphi \cap (N_2 \cap H)\varphi = \\ = (N_1 \cap K) \cap (N_2 \cap K) = N \cap K.$$

Поэтому $N \in \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$.

Пусть $N_1, N_2 \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ и $U_1, U_2 \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$ — подгруппы, удовлетворяющие соотношениям $N_1 = U_1 \cap G$, $N_2 = U_2 \cap G$. Если $N = N_1 \cap N_2$ и $U = U_1 \cap U_2$, то $N = U \cap G$ и, снова по предложению 1.3.4, $U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$. Таким образом, $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$. $\square$

Предложение 4.3.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi) \subseteq \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$.*

2. *Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп и содержащий непериодические группы, подгруппы H и K лежат в центре группы G, то $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi) \subseteq \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$.*

3. *Если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп и расширений, то $\mathcal{C}^*_r(G, H, K, \varphi) \subseteq \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ для любого $r \geqslant 0$.*

Доказательство. 1. Пусть $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ и подгруппа $U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$ такова, что $N = U \cap G$. Тогда подгруппа N принадлежит семейству $\mathcal{C}^*(G)$ ввиду предложения 1.3.1 и (H, K, φ)-совместима согласно предложению 1.2.6.

2. Пусть $N \in \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$. Так как $G/N \in \mathcal{C}$ в силу определения семейства $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$, то по теореме 3.3.2 найдется гомоморфизм σ группы

$$\mathrm{HNN}(G/N,\ HN/N,\ KN/N,\ \varphi_N)$$

на группу из класса $\mathcal{C}$, продолжающий тождественное отображение группы G/N. Отсюда ввиду предложения 1.2.6 следует существование подгруппы $U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$ такой, что $U \cap G = N$. Значит, $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$.

3. Если $N \in \mathcal{C}^*_r(G, H, K, \varphi)$, то в силу предложения 4.2.3 существует гомоморфизм группы

$$\mathrm{HNN}(G/N,\ HN/N,\ KN/N,\ \varphi_N)$$

на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на подгруппе G/N, и снова можно воспользоваться предложением 1.2.6. □

Предложение 4.3.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также G — абелева группа, $H = G = K$ и N — некоторая подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *$N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$.*

2. *$N \in \mathcal{C}^*_r(G, H, K, \varphi)$ для любого $r \geqslant 0$.*

3. *$N\varphi = N$, $G/N \in \mathcal{C}$ и порядок автоморфизма φ_N группы G/N, индуцированного автоморфизмом φ, конечен и является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 3$. В силу предложения 4.3.2 $N \in \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$. Отсюда следует, что $G/N \in \mathcal{C}$ и, так как $H = G = K$, то

$$N\varphi = (N \cap H)\varphi = N \cap K = N.$$

Поскольку $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$, существует подгруппа $U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$, удовлетворяющая условию $N = U \cap G$. Так как $\mathfrak{G}/U \in \mathcal{C}$ и класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, то порядок n элемента t по модулю подгруппы U конечен и является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. Поскольку $N = U \cap G$, отображение $\gamma\colon G/N \to \mathfrak{G}/U$, переводящее смежный класс gN в элемент gU, корректно определено и представляет собой инъективный гомоморфизм. При этом для любого $g \in G$ имеют место равенства

$$(gN)\varphi_N^n = (g\varphi^n)N = (gN)\gamma(\widehat{t^nU})\gamma^{-1} = gN.$$

Отсюда вытекает, что порядок автоморфизма φ_N делит n и, следовательно, является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом.

$3 \Rightarrow 2$. Зафиксируем произвольное число $r \geqslant 0$ и выберем $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-число n кратным порядку автоморфизма φ_N и большим $r+3$ (последнее возможно, поскольку класс $\mathcal{C}$ содержит неединичные группы и, следовательно, $\mathfrak{P}(\mathcal{C}) \neq \varnothing$). Так как $H = G = K$, то

$$(N \cap H)\varphi = N\varphi = N = N \cap K$$

и, значит, $N \in \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$. Поэтому определен кортеж

$$(G/N,\ HN/N,\ KN/N,\ \varphi_N)$$

и согласно предложению 4.2.2 число n является для него допустимым с запасом r. Остается заметить, что в силу предложения 1.4.5 класс $\mathcal{C}$ содержит циклическую подгруппу порядка n.

$2 \Rightarrow 1$. Утверждение следует из предложения 4.3.2. □

Пусть X — некоторая группа, Y и Z — ее подгруппы. Напомним, что семейство Ω нормальных подгрупп группы X называется *фильтрацией*, если

$$\bigcap_{N \in \Omega} N = 1.$$

Фильтрацию Ω будем называть *Y-фильтрацией*, если

$$\bigcap_{N \in \Omega} YN = 1,$$

и *(Y, Z)-фильтрацией*, если она является Y-фильтрацией и Z-фильтрацией.

Заметим, что если $R \in \mathcal{C}^*_{\cap}(G, H, K, \varphi)$, то множество $\{R\}$ является $\mathcal{C}$-допустимой системой совместимых нормальных подгрупп в группе $\mathfrak{G}$. Поэтому из теорем 2.3.1 и 2.7.1 вытекает

Предложение 4.3.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп.*

1. *Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то семейство $\mathcal{C}^*_{\cap}(G, H, K, \varphi)$ является фильтрацией.*

2. *Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, H и K — собственные центральные подгруппы группы G, то семейство $\mathcal{C}^*_{\cap}(G, H, K, \varphi)$ является (H, K)-фильтрацией.*

3. *Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп и семейство $\mathcal{C}^*_{\cap}(G, H, K, \varphi)$ является (H, K)-фильтрацией, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Предложение 4.3.5. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, состоящий только из периодических групп, H — центральная подгруппа группы G и $H \leqslant K \neq G$. Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то $H = K$.*

Доказательство. Предположим, что $H \neq K$ и $k \in K \setminus H$. Пусть также $g \in G \setminus K$ и $x = [t^{-1}kt,\ g]$. Тогда элемент x имеет длину 4 и, следовательно, отличен от 1. Поскольку группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, найдется подгруппа $U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$, удовлетворяющая условию $x \notin U$. Так как класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп, то элемент t имеет конечный порядок по модулю подгруппы U и потому $t^{-1} \equiv t^m \pmod U$ для некоторого $m > 0$. Отсюда и из включения $H \leqslant K$ следует, что

$$t^{-1}kt \equiv t^m k t^{-m} = k\varphi^{-m} \in H \pmod U.$$

Подгруппа H центральна в G, поэтому $[k\varphi^{-m}, g] = 1$. Таким образом, $x \in U$, что противоречит выбору подгруппы U. □

Предложение 4.3.6. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, G — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, H и K — центральные подгруппы группы G. Пусть также существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий:*

(α) $H \cap Q = 1 = K \cap Q$,

(β) $Q \leqslant H \cap K$ и $Q\varphi = Q$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Подгруппы H и K $\mathcal{C}$-отделимы в группе G.*
2. *Если класс $\mathcal{C}$ содержит бесконечные группы, то семейство $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ является (H, K)-фильтрацией.*

Доказательство. 1. Если выполняется условие (α), то $\mathcal{C}$-отделимость подгрупп H и K обеспечивается предложением 1.3.4. Если же справедливо условие (β) и $g \in G \setminus H$ — произвольный элемент, то $g \notin HQ$ и, следовательно, подгруппа H является $\mathcal{C}$-отделимой. $\mathcal{C}$-отделимость подгруппы K проверяется аналогично.

2. Покажем, что каждая подгруппа из семейства $\mathcal{C}^*(G)$ содержит некоторую подгруппу из семейства $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$. Отсюда, из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G и $\mathcal{C}$-отделимости в ней подгрупп H и K, обеспечиваемой утверждением 1, будет следовать, что семейство $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ является (H, K)-фильтрацией.

Пусть $L \in \mathcal{C}^*(G)$. Согласно предложению 1.3.4 подгруппа $M = L \cap Q$ принадлежит семейству $\mathcal{C}^*(G)$. Если выполняется условие (α), то

$$(H \cap M)\varphi = (H \cap L \cap Q)\varphi = 1 = K \cap L \cap Q = K \cap M$$

и потому M входит в семейство $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$. Если же справедливо условие (β), то указанному семейству принадлежит подгруппа $N = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} M\varphi^i$.

Действительно, подгруппа N лежит в центре группы G, φ-инвариантна и, следовательно, (H, K, φ)-совместима. Так как $Q/M \leqslant G/M \in \mathcal{C}$, то в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп $M \in \mathcal{C}^*(Q)$. Поскольку подгруппа Q φ-инвариантна, ограничение изоморфизма φ на эту подгруппу является ее автоморфизмом и, следовательно, $M\varphi^i \in \mathcal{C}^*(Q)$. Значит, по теореме Ремака фактор-группа Q/N вкладывается в декартово произведение счетного числа изоморфных $\mathcal{C}$-групп $Q/M\varphi^i$. Поскольку класс $\mathcal{C}$ является корневым и содержит бесконечные группы, отсюда вытекает, что $Q/N \in \mathcal{C}$ и, так как $G/Q \in \mathcal{C}$, то $N \in \mathcal{C}^*(G)$ в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений. □

Предложение 4.3.7. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, H и K — собственные центральные подгруппы конечного индекса группы G. Если группа $\mathfrak{G}$*

$\mathcal{C}$-аппроксимируема, то существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющая условиям $Q \leqslant H \cap K$ и $Q\varphi = Q$.

Доказательство. Вместе с подгруппами H и K конечный индекс в группе G имеет и подгруппа $H \cap K$. Пусть $1 = g_1, g_2, \ldots, g_n$ — полная система представителей смежных классов группы G по этой подгруппе и $S = \{g_2, \ldots, g_n\}$. Из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ в силу предложения 4.3.4 следует, что семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ является (H, K)-фильтрацией. Отсюда

$$H \cap K \leqslant \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} (H \cap K)N \leqslant$$
$$\leqslant \Bigg(\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} HN\Bigg) \cap \Bigg(\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} KN\Bigg) = H \cap K$$

и потому для каждого элемента $s \in S$ найдется подгруппа $Q_s \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ такая, что $s \notin (H \cap K)Q_s$. Покажем, что подгруппа $Q = \bigcap_{s \in S} Q_s$ является искомой.

Действительно, если $g \in G \setminus (H \cap K)$ и $g = xs$ для подходящих $s \in S$, $x \in H \cap K$, то $x^{-1}g = s \notin (H \cap K)Q_s$ и потому $x^{-1}g \notin (H \cap K)Q$, откуда $g \notin (H \cap K)Q$. Ввиду произвольности выбора элемента g получаем, что $(H \cap K)Q \leqslant H \cap K$ и, стало быть, $Q \leqslant H \cap K$. Согласно предложению 4.3.1 $Q \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ и в силу предложения 4.3.2 $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi) \subseteq \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$. Следовательно, $Q \in \mathcal{C}^*(G)$ и

$$Q\varphi = (Q \cap H)\varphi = Q \cap K = Q. \qquad \square$$

Завершим данный параграф двумя критериями аппроксимируемости корневыми классами расщепляемых расширений.

Предложение 4.3.8. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также G — абелева группа, $H = G = K$ и Ω — семейство подгрупп группы G, определенное следующим образом: $N \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $N \in \mathcal{C}^*(G)$, $N\varphi = N$ и порядок автоморфизма φ_N группы G/N, индуцированного автоморфизмом φ, конечен и является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. Группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\bigcap_{N \in \Omega} N = 1$.*

Доказательство. Так как $H = G = K$, то любая фильтрация оказывается (H, K)-фильтрацией. Поэтому в силу предложения 4.3.4 группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ является фильтрацией. Остается заметить, что согласно предложению 4.3.3 подгруппа N принадлежит семейству $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ тогда и только тогда, когда $N\varphi = N$, $G/N \in \mathcal{C}$ и порядок автоморфизма φ_N конечен и является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. $\square$

Предложение 4.3.9. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп, G — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая абелева группа и $H = G = K$. Если порядок q автоморфизма φ конечен, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда q является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом.*

Доказательство. Необходимость. Поскольку q — порядок автоморфизма φ, для любого $i \in \{1, \ldots, q-1\}$ найдется элемент $g_i \in G$ такой, что $g_i\varphi^i \neq g_i$. Пусть

$$S = \{g_i\varphi^i g_i^{-1} \mid 1 \leqslant i \leqslant q-1\}.$$

Из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ и предложения 1.3.4 вытекает существование подгруппы $U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$, удовлетворяющей условию $U \cap S = \varnothing$. Положим $N = U \cap G$. Тогда $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ и в силу предложения 4.3.3 подгруппа N φ-инвариантна, порядок q_N автоморфизма φ_N группы G/N, индуцированного автоморфизмом φ, конечен и является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. Остается заметить, что $N \cap S = \varnothing$ и потому $q_N = q$.

Достаточность. Пусть Ω — семейство подгрупп группы G, определенное в формулировке предложения 4.3.8, $M \in \mathcal{C}^*(G)$ — произвольная подгруппа и $N = \bigcap_{i=0}^{q-1} M\varphi^i$. Тогда $N \leqslant M$, $N\varphi = N$ и в силу предложения 1.3.4 $N \in \mathcal{C}^*(G)$. Порядок автоморфизма φ_N группы G/N, индуцированного автоморфизмом φ, делит q и, следовательно, является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. Значит, $N \in \Omega$.

Таким образом, произвольная подгруппа из семейства $\mathcal{C}^*(G)$ содержит подгруппу из семейства Ω и из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G вытекает, что семейство Ω является фильтрацией. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ в силу предложения 4.3.8. □

§ 4.4. Доказательства теорем 4.1.6–4.1.9

Как и выше, если X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа, то через $\mathrm{Aut}_X(Y)$ будем обозначать подгруппу группы $\mathrm{Aut}\,Y$, составленную из ограничений на подгруппу Y всевозможных внутренних автоморфизмов группы X.

Предложение 4.4.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, (G, H, K, φ) — HNN-кортеж, $\mathfrak{G} = \mathrm{HNN}(G, H, K, \varphi)$, подгруппы H и K являются циклическими и лежат в центре группы G. Если подгруппа $L = H \cap K$ φ-инвариантна, то она нормальна в группе $\mathfrak{G}$, группа $\mathrm{Aut}_\mathfrak{G}(L)$ порождается ограничением изоморфизма φ на подгруппу L и из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ следует, что $\mathrm{Aut}_\mathfrak{G}(L) \in \mathcal{C}$.*

Доказательство. Так как подгруппа L центральна в G и φ-инвариантна, то она нормальна в $\mathfrak{G}$. Непосредственно проверяется, что отображение $\theta\colon \mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}_\mathfrak{G}(L)$, ставящее в соответствие элементу $g \in \mathfrak{G}$ автоморфизм $\widehat{g}|_L$, является сюръективным гомоморфизмом. Поскольку L центральна в G, образ данного гомоморфизма порождается автоморфизмом $\varphi|_L$. Легко видеть также, что ядром θ служит централизатор $C_\mathfrak{G}(L)$ подгруппы L в группе $\mathfrak{G}$. Согласно предложению 1.3.3 подгруппа $C_\mathfrak{G}(L)$ $\mathcal{C}$-отделима в $\mathfrak{G}$ и потому фактор-группа $\mathfrak{G}/C_\mathfrak{G}(L) \cong \mathrm{Aut}_\mathfrak{G}(L)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема в силу предложения 1.3.2. Так как подгруппа L является циклической, то группа $\mathrm{Aut}_\mathfrak{G}(L)$ конечна и по предложению 1.3.4 принадлежит классу $\mathcal{C}$. □

Доказательство теоремы 4.1.6. Необходимость условия теоремы следует из предложения 4.4.1. Для проверки достаточности покажем, что существует гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на подгруппах H и K. Тогда $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ будет следовать из теоремы 2.2.1.

Предположим сначала, что $G \in \mathcal{C}$. Так как подгруппа L φ-инвариантна и, следовательно, (H, K, φ)-совместима, то определены HNN-расширение

$$\mathfrak{G}_L = \mathrm{HNN}(G/L,\ H/L,\ K/L,\ \varphi_L)$$

и гомоморфизм $\rho_L\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_L$, причем ядро последнего ввиду предложения 1.2.5 совпадает с L.

Поскольку класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, $G/L \in \mathcal{C}$. Легко видеть также, что $H/L \cap K/L = 1$. Значит, в силу теоремы 3.3.1 группа $\mathfrak{G}_L$ обладает гомоморфизмом σ_L на $\mathcal{C}$-группу, действующим инъективно на подгруппе G/L. По предложению 1.1.6 группа $N_L = \ker \sigma_L$ свободна. Обозначая через N ее прообраз относительно гомоморфизма ρ_L, получаем в группе $\mathfrak{G}$ субнормальный ряд

$$1 \leqslant L \leqslant N \leqslant \mathfrak{G},$$

где $\mathfrak{G}/N \in \mathcal{C}$, N/L — свободная группа и $L \in \mathcal{C}$, так как $G \in \mathcal{C}$ и класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп.

Хорошо известно, что любое расширение при помощи свободной группы расщепляемо. Поэтому в группе N существует свободная подгруппа U, удовлетворяющая условиям $N = UL$ и $L \cap U = 1$. Как и при доказательстве предложения 4.4.1, рассмотрим гомоморфизм $\theta\colon \mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}_{\mathfrak{G}}(L)$, сопоставляющий каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ автоморфизм $\widehat{g}|_L$, и положим $V = U \cap \ker\theta$. Тогда $[V, L] = 1$, откуда следует, что подгруппа V нормальна в группе N.

Из соотношения $L \cap U = 1$ легко получается равенство $U \cap VL = V$. Поэтому

$$N/VL = UL/VL = UVL/VL \cong U/(U \cap VL) = U/V \cong U\theta \leqslant \mathrm{Aut}_{\mathfrak{G}}(L).$$

Ввиду предложения 4.4.1 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{G}}(L) = \Phi \in \mathcal{C}$ и, следовательно, $N/VL \in \mathcal{C}$. Так как

$$L \cap V \leqslant L \cap U = 1,$$

то

$$LV/V \cong L/(L \cap V) = L \in \mathcal{C}.$$

Стало быть, все факторы ряда

$$1 \leqslant V \leqslant LV \leqslant N \leqslant \mathfrak{G},$$

начиная со второго, принадлежат классу $\mathcal{C}$. Применяя условие Грюнберга к ряду

$$1 \leqslant V \leqslant LV \leqslant N,$$

найдем подгруппу $W \in \mathcal{C}^*(N)$, лежащую в V. Аналогичным образом, рассматривая ряд

$$1 \leqslant W \leqslant N \leqslant \mathfrak{G},$$

получим подгруппу $T \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$, содержащуюся в W.

Так как $N_L \cap G/L = 1$, то $N \cap G = L$. Поскольку $T \leqslant N$, отсюда следует, что $T \cap G \leqslant L$. Но в то же время $T \leqslant V$ и $L \cap V = 1$. Стало быть, $T \cap G = 1$ и естественный гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на фактор-группу $\mathfrak{G}/T$ является искомым.

Рассмотрим теперь общий случай, когда группа G аппроксимируется классом $\mathcal{C}$. По предложению 1.3.4 найдется подгруппа $R \in \mathcal{C}^*(G)$, тривиально пересекающаяся с подгруппами H и K. Очевидно, что она является (H, K, φ)-совместимой и потому определены HNN-расширение

$$\mathfrak{G}_R = \mathrm{HNN}(G/R,\ HR/R,\ KR/R,\ \varphi_R)$$

и гомоморфизм $\rho_R\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_R$, действующий на группе G как ее естественный гомоморфизм на фактор-группу G/R. Так как $G/R \in \mathcal{C}$ и $R \cap H = 1 = R \cap K$, то в силу доказанного выше гомоморфизм ρ_R может быть продолжен до искомого отображения. Остается заметить, что если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то ввиду замкнутости относительно взятия подгрупп и фактор-групп он включает также бесконечную циклическую группу и все ее гомоморфные образы. Это означает, в частности, что $\Phi \in \mathcal{C}$. $\square$

Доказательство теоремы 4.1.7. *Необходимость.* Так как H и K — собственные центральные подгруппы группы G, то согласно предложению 4.3.4 семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ является (H, K)-фильтрацией. Поскольку $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi) \subseteq \mathcal{C}^*(G)$ ввиду предложения 4.3.2, отсюда следует, что подгруппы H и K $\mathcal{C}$-отделимы в группе G.

Пусть m, n — положительные целые числа такие, что $H^m = H \cap K = K^n$. Предположим, что $m \neq n$. Тогда без потери общности можно считать, что $m < n$. Воспользовавшись неравенством $K \neq G$, возьмем элемент $g \in G \setminus K$ и рассмотрим коммутатор

$$x = [t^{-1}k^m t,\ g] = t^{-1}k^{-m}tg^{-1}t^{-1}k^m tg,$$

где k — некоторый порождающий подгруппы K.

В силу выбора чисел m, n и неравенства $m < n$ справедливо соотношение $k^m \notin H$. Значит, элемент x имеет приведенную запись длины 4 и потому отличен от 1. Пусть σ — произвольный гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на группу из класса $\mathcal{C}$. Тогда его ограничение на группу G также является гомоморфизмом на $\mathcal{C}$-группу и по условию теоремы хотя бы одна из подгрупп $H\sigma$, $K\sigma$ конечна. Поскольку эти подгруппы сопряжены в группе $\mathfrak{G}\sigma$, они имеют одинаковые порядки и

$$H^d\sigma = H\sigma \cap K\sigma = K^d\sigma$$

для некоторого делителя d чисел m и n. Стало быть,

$$k^m\sigma \in H\sigma, \quad (t^{-1}k^m t)\sigma \in K\sigma$$

и ввиду центральности подгруппы K в группе G

$$x\sigma = \big[(t^{-1}k^m t)\sigma,\ g\sigma\big] = 1.$$

Тем самым, получаем противоречие с $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью группы $\mathfrak{G}$, доказывающее, что $m = n$. Из данного равенства вытекает, в частности, что подгруппа

$L = H \cap K$ φ-инвариантна и согласно предложению 4.4.1 циклическая подгруппа Φ группы $\operatorname{Aut} L$, порожденная автоморфизмом $\varphi|_L$, принадлежит классу $\mathcal{C}$. Остается заметить, что порядок группы Φ равен 1 или 2 в зависимости от того, лежит ли подгруппа L в центре группы $\mathfrak{G}$.

Достаточность. Пусть $g \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$ — произвольный элемент. Если $g \in G$, воспользуемся $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью группы G и выберем подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющую условию $g \notin N$. В противном случае положим $N = G$ и заметим, что при этом также выполнены соотношения $N \in \mathcal{C}^*(G)$ и $g \notin N$.

Пусть $L = H \cap K$ и $M = N \cap L$. Поскольку $[H : L] = [K : L]$, подгруппа L φ-инвариантна. Следовательно, подгруппа M также является φ-инвариантной и определено HNN-расширение

$$\mathfrak{G}_M = \mathrm{HNN}(G/M,\ H/M,\ K/M,\ \varphi_M).$$

Подгруппа M $\mathcal{C}$-отделима в группе G как пересечение $\mathcal{C}$-отделимых в этой группе подгрупп H, K и N. Поэтому фактор-группа G/M $\mathcal{C}$-аппроксимируема в силу предложения 1.3.2. Легко видеть также, что $H/M \cap K/M = L/M$ и порядок автоморфизма $\varphi_M|_{L/M}$ совпадает с порядком автоморфизма $\varphi|_L$, который в свою очередь равен 1 или 2 в зависимости от того, лежит ли подгруппа L в центре группы $\mathfrak{G}$. Значит, группа $\mathfrak{G}_M$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема согласно теореме 4.1.6.

В силу предложения 1.2.5 ядро гомоморфизма $\rho_M \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_M$ совпадает с M. Поскольку $M \leqslant N$ и $g \notin N$, отсюда следует, что отображение ρ_M можно продолжить до гомоморфизма группы $\mathfrak{G}$ на $\mathcal{C}$-группу, переводящего g в неединичный элемент. $\square$

Доказательство теоремы 4.1.8. *Необходимость.* Зафиксируем произвольную подгруппу $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ и покажем, что существует подгруппа $M \in \Omega$, удовлетворяющая равенствам $HN = HM$ и $KN = KM$.

Так как $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$, то $N = U \cap G$ для некоторой подгруппы $U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$. Подгруппы HU/U и KU/U сопряжены в группе $\mathfrak{G}/U$ и по условию теоремы хотя бы одна из них конечна. Следовательно, они имеют одинаковые конечные порядки и, поскольку

$$HN/N \cong H/(H \cap N) = H/(H \cap U \cap G) = H/(H \cap U) \cong HU/U,$$
$$KN/N \cong K/(K \cap N) = K/(K \cap U \cap G) = K/(K \cap U) \cong KU/U,$$

тем же свойством обладают подгруппы HN/N и KN/N.

Очевидно, что индексы подгруппы $M/N = HN/N \cap KN/N$ в группах HN/N и KN/N совпадают и равны некоторому числу $n \geqslant 1$. Тогда $(HK)^n \leqslant M$ и при любом выборе порождающих h, k подгрупп H и K

$$\left\{h^i k^j \mid 0 \leqslant i, j \leqslant n-1\right\} \cap M = 1,$$

откуда $M \cap HK = (HK)^n$. Из соотношений

$$G/N \cong GU/U \leqslant \mathfrak{G}/U \in \mathcal{C}, \quad G/M \cong (G/N)/(M/N)$$

и замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и фактор-групп вытекает, что $M \in \mathcal{C}^*(G)$. Стало быть, $M \in \Omega$. Так как $M/N = HN/N \cap KN/N$, то $HM/N \leqslant HN/N$,

$KM/N \leqslant KN/N$ и из включения $N \leqslant M$ вытекает, что $HM = HN$ и $KN = KM$, как и требовалось.

Из доказанного следует, что

$$\bigcap_{M\in\Omega} HM \leqslant \bigcap_{N\in\mathcal{C}^*_{\cap}(G,H,K,\varphi)} HN, \qquad \bigcap_{M\in\Omega} KM \leqslant \bigcap_{N\in\mathcal{C}^*_{\cap}(G,H,K,\varphi)} KN$$

и, поскольку семейство $\mathcal{C}^*_{\cap}(G,H,K,\varphi)$ согласно предложению 4.3.4 является (H,K)-фильтрацией, подгруппы H и K отделимы семейством Ω.

Достаточность. Если $N \in \Omega$, то $N \cap HK = (HK)^n$ для некоторого $n \geqslant 1$ и, следовательно,

$$(N \cap H)\varphi = H^n\varphi = K^n = N \cap K.$$

Поэтому определено HNN-расширение

$$\mathfrak{G}_N = \mathrm{HNN}(G/N,\ HN/N,\ KN/N,\ \varphi_N),$$

причем, как легко видеть, $HN/N \cap KN/N = 1$. Поскольку $G/N \in \mathcal{C}$, отсюда согласно теореме 3.3.1 следует, что группа $\mathfrak{G}_N$ обладает гомоморфизмом на $\mathcal{C}$-группу, инъективным на подгруппе G/N. Значит, по предложению 1.2.6 $N \in \mathcal{C}^*_{\cap}(G,H,K,\varphi)$ и $\Omega \subseteq \mathcal{C}^*_{\cap}(G,H,K,\varphi)$ ввиду произвольности выбора подгруппы N. Покажем, что семейство Ω является фильтрацией. Тогда из отделимости этим семейством подгрупп H и K будет следовать, что Ω — (H,K)-фильтрация и группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема в силу предложения 4.3.4.

Действительно, если $g \in G \setminus \{1\}$, то, поскольку $H \cap K = 1$, $g \notin H$ или $g \notin K$. Так как подгруппы H и K отделимы семейством Ω, то найдется подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая условию $g \notin HN$ или $g \notin KN$. В обоих случаях $g \notin N$ и, стало быть, Ω — фильтрация. $\square$

Доказательство теоремы 4.1.9. Как и выше, обозначим через h и k некоторые порождающие подгрупп H и K соответственно.

Необходимость. Пусть $m \geqslant 1$. Так как группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то по теореме 4.1.8 подгруппа H отделима семейством

$$\Omega = \bigl\{N \in \mathcal{C}^*(G) \mid \exists n \geqslant 1\ N \cap HK = (HK)^n\bigr\}.$$

Следовательно, для любого $i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, m\}$ найдется подгруппа $N_i \in \Omega$, удовлетворяющая условию $k^i \notin HN_i$. Ввиду предложения 1.3.4 пересечение $N = \bigcap_{i=1}^{m} N_i$ принадлежит семейству Ω. В частности, $N \cap HK = (HK)^n$ для некоторого n, причем из соотношений $k^i \notin N$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ следует, что $n > m$. Покажем, что подгруппа $(HK)^n$ $\mathcal{C}$-отделима в группе G.

В самом деле, если $g \in G \setminus HK$, то ввиду $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы HK в группе G найдется подгруппа $M \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющая условию $g \notin HKM$, и потому $g \notin (HK)^nM$. Если же $g \in HK \setminus (HK)^n$, то, поскольку $N \cap HK = (HK)^n$, справедливо соотношение $g \notin (HK)^nN$.

Таким образом, ввиду произвольности выбора числа m, среди подгрупп вида $(HK)^n$ имеется бесконечное число $\mathcal{C}$-отделимых.

Достаточность. Зафиксируем произвольный элемент $g \in G \setminus H$ и укажем подгруппу $N \in \Omega$, удовлетворяющую условию $g \notin HN$.

В силу $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы HK в группе G и предложения 1.3.2 фактор-группа G/HK $\mathcal{C}$-аппроксимируема. Поэтому, если $g \notin HK$, то найдется подгруппа $N/HK \in \mathcal{C}^*(G/HK)$, не содержащая неединичного элемента gHK. Тогда $N \in \mathcal{C}^*(G)$, $g \notin HKN$ и, так как $HK \leqslant N$, то $N \cap HK = HK$. Стало быть, подгруппа N является искомой.

Пусть теперь $g \in HK \setminus H$ и $g = h^i k^j$. По условию теоремы найдется число n, большее $|j|$ и такое, что подгруппа $(HK)^n$ $\mathcal{C}$-отделима в группе G. Тогда, снова в силу предложения 1.3.2, фактор-группа $G/(HK)^n$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема и согласно предложению 1.3.4 из конечности подгруппы $HK/(HK)^n$ вытекает существование тривиально пересекающейся с ней подгруппы $N/(HK)^n \in \mathcal{C}^*(G/(HK)^n)$. Отсюда $N \in \mathcal{C}^*(G)$, $N \cap HK = (HK)^n$ и потому $N \in \Omega$. Так как $g = h^i k^j \notin H$, то $j \neq 0$ и $k^j \notin K^n$ ввиду выбора числа n. Значит, $g \notin HK^n$ и, поскольку $HN \cap HK = HK^n$, имеет место соотношение $g \notin HN$. Стало быть, N — искомая подгруппа.

Итак, подгруппа H отделима семейством Ω. Аналогичным образом проверяется, что и подгруппа K отделима данным семейством. Поэтому $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ следует из теоремы 4.1.8. $\square$

§ 4.5. Спуск и подъем совместимых подгрупп

Доказательства утверждений данного параграфа следуют идеям из [47,48] и в отдельных местах повторяют приведенные в указанных работах рассуждения почти дословно. Далее будем считать, что (G, H, K, φ) — HNN-кортеж, $L = H \cap K$ и $M = L\varphi$.

Предложение 4.5.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, и X — некоторая подгруппа группы G, содержащая L и M. Пусть также N — подгруппа группы G и $R = N \cap X$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $N \in \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$, то $R \in \mathcal{C}^*(X, L, M, \varphi)$.*
2. *Если $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$, то $R \in \mathcal{C}^*_\cap(X, L, M, \varphi)$.*

Доказательство. 1. Ввиду инъективности отображения φ и (H, K, φ)-совместимости подгруппы N имеет место равенство

$$\big((N \cap H) \cap L\big)\varphi = (N \cap K) \cap M.$$

Поскольку $L \cup M \leqslant X$, из него вытекает, что

$$(R \cap L)\varphi = \big((N \cap X) \cap L\big)\varphi = (N \cap L)\varphi = \big((N \cap H) \cap L\big)\varphi = \\ = (N \cap K) \cap M = N \cap M = (N \cap X) \cap M = R \cap M.$$

Ввиду соотношения $N \in \mathcal{C}^*(G)$ и предложения 1.3.1 справедливо включение $X/R \in \mathcal{C}$. Следовательно, $R \in \mathcal{C}^*(X, L, M, \varphi)$.

2. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathrm{HNN}(G, H, K, \varphi), \quad \mathfrak{X} = \mathrm{HNN}(X, L, M, \varphi).$$

Тогда отображение $\lambda\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{G}$, переводящее порождающие группы $\mathfrak{X}$ в соответствующие им элементы группы $\mathfrak{G}$, определяет гомоморфизм, действующий тождественно на подгруппе X.

Пусть $U \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$ — такая подгруппа, что $N = U \cap G$, и пусть $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}\lambda$, $\widetilde{V} = U \cap \widetilde{\mathfrak{X}}$, V — полный прообраз подгруппы $\widetilde{V}$ относительно гомоморфизма λ. Тогда $\widetilde{\mathfrak{X}}/\widetilde{V} \in \mathcal{C}$ ввиду предложения 1.3.1 и $\mathfrak{X}/V \cong \widetilde{\mathfrak{X}}/\widetilde{V}$.

Так как гомоморфизм λ действует тождественно на подгруппе X, то из равенств

$$\widetilde{V} \cap X = U \cap \widetilde{\mathfrak{X}} \cap X = U \cap X = U \cap G \cap X = N \cap X = R$$

вытекает, что $V \cap X = R$. Следовательно, $R \in \mathcal{C}^*_\cap(X, L, M, \varphi)$. $\square$

Предложение 4.5.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, и X — некоторая подгруппа группы G, содержащая L и M. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ — фильтрация, то семейство $\mathcal{C}^*_\cap(X, L, M, \varphi)$ также является фильтрацией.*

2. *Пусть $X = G$ или $X = K$. Если $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ — (H, K)-фильтрация, то семейство $\mathcal{C}^*_\cap(X, L, M, \varphi)$ — (L, M)-фильтрация.*

Доказательство. В силу предложения 4.5.1, если $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$, то $N \cap X \in \mathcal{C}^*_\cap(X, L, M, \varphi)$. Отсюда следует, что

$$\bigcap_{R \in \mathcal{C}^*_\cap(X,L,M,\varphi)} R \leqslant \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} (N \cap X),$$
$$\bigcap_{R \in \mathcal{C}^*_\cap(X,L,M,\varphi)} RL \leqslant \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} (N \cap X)L.$$

Если семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ является фильтрацией, то

$$1 = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} N = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} (N \cap X)$$

и, следовательно, семейство $\mathcal{C}^*_\cap(X, L, M, \varphi)$ также оказывается фильтрацией. Пусть $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ — (H, K)-фильтрация. Тогда

$$L \leqslant \bigcap_{R \in \mathcal{C}^*_\cap(X,L,M,\varphi)} RL \leqslant \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} NL = \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} N(H \cap K) \leqslant$$
$$\leqslant \Bigg(\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} NH\Bigg) \cap \Bigg(\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)} NK\Bigg) = H \cap K = L$$

и потому $\mathcal{C}^*_\cap(X, L, M, \varphi)$ — L-фильтрация. Для доказательства того, что это семейство является M-фильтрацией, возьмем произвольный элемент $x \in X \setminus M$ и укажем подгруппу $R \in \mathcal{C}^*_\cap(X, L, M, \varphi)$, удовлетворяющую условию $x \notin MR$.

Если $x \notin K$, то, поскольку семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ — K-фильтрация, существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ такая, что $x \notin KN$. Из предложения 4.5.1 и включения $M(N\cap X)\leqslant KN$ следует, что $N\cap X\in\mathcal{C}^*_\cap(X,L,M,\varphi)$ и $x\notin M(N\cap X)$. Значит, подгруппа $N\cap X$ является искомой.

Если $x\in K$, положим $y=x\varphi^{-1}$. Так как $x\notin M$, то $y\in H\setminus L$, откуда $y\notin K$. Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. $X=G$.

Пусть $\mathfrak{X}=\mathrm{HNN}(G,L,M,\varphi)$. Ввиду доказанного выше семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G,L,M,\varphi)$ — L-фильтрация. Следовательно, $y\notin LR$ для некоторой подгруппы $R\in\mathcal{C}^*_\cap(G,L,M,\varphi)$. По определению семейства $\mathcal{C}^*_\cap(G,L,M,\varphi)$ существует подгруппа $U\in\mathcal{C}^*(\mathfrak{X})$ такая, что $R=U\cap G$. Если $y\in LU$ и $y=hu$ для некоторых $h\in L$, $u\in U$, то $u=h^{-1}y\in U\cap G=R$ и потому $y\in LR$ в противоречие с выбором подгруппы R. Следовательно, $y\notin LU$ и $x=y\varphi=t^{-1}yt\notin t^{-1}LUt$. Поскольку подгруппа U нормальна в группе $\mathfrak{X}$, имеем $t^{-1}LUt=MU$. Значит, $x\notin MU$ и $x\notin MR$ ввиду включения $R\leqslant U$. Таким образом, подгруппа R является искомой.

Случай 2. $X=K$.

Поскольку семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)$ — K-фильтрация, существует подгруппа $N\in\mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)$, удовлетворяющая условию $y\notin KN$. В силу предложения 4.3.2 подгруппа N (H,K,φ)-совместима и потому

$$\big(M(N\cap K)\big)\varphi^{-1}=L(N\cap H)\leqslant KN.$$

Отсюда $y\notin\big(M(N\cap K)\big)\varphi^{-1}$ и $x=y\varphi\notin M(N\cap K)$. Остается заметить, что по предложению 4.5.1 $N\cap K\in\mathcal{C}^*_\cap(K,L,M,\varphi)$ и, стало быть, подгруппа $N\cap K$ является искомой. $\square$

Следуя [47], будем говорить, что подгруппа $N\leqslant G$ служит *подъемом* подгруппы $R\leqslant K$, если $K\cap N=R$.

Пусть подгруппы H и K лежат в центре группы G. Подъем $N\leqslant G$ подгруппы $R\leqslant K$ будем называть *каноническим*, если $H\cap N=R\varphi^{-1}$ и $HK\cap N=(R\varphi^{-1})R$. Отметим, что ввиду соотношений $(H\cap N)\varphi=R=K\cap N$ канонический подъем N всегда является (H,K,φ)-совместимой подгруппой.

Предложение 4.5.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп, подгруппы H и K лежат в центре группы G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений, группа G $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $P=HK$ и $R\in\mathcal{C}^*(K,L,M,\varphi)$. Тогда существует канонический подъем $N\in\mathcal{C}^*(G,H,K,\varphi)$ подгруппы R. Более того, если X — такая нормальная подгруппа группы G, что $P\leqslant X$ и фактор-группа G/X $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то для любого конечного множества элементов $S\subseteq G\setminus X$ найдется канонический подъем $N\in\mathcal{C}^*(G,H,K,\varphi)$ подгруппы R, удовлетворяющий условию $S\cap XN=\varnothing$.*

2. *Если $R\in\mathcal{C}^*_{r+1}(K,L,M,\varphi)$ для некоторого $r\geqslant 0$ и $N\in\mathcal{C}^*(G,H,K,\varphi)$ — канонический подъем подгруппы R, то $N\in\mathcal{C}^*_r(G,H,K,\varphi)$.*

Доказательство. 1. Если $X = G$ и $S = \varnothing$, то $P \leqslant X$, фактор-группа G/X $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $S \subseteq G \setminus X$. Следовательно, достаточно доказать лишь вторую часть утверждения 1. Положим $Q = R\varphi^{-1}$ и покажем, что

$$H \cap QR = Q, \quad K \cap QR = R.$$

Так как $L, Q \leqslant H$, отображение φ инъективно и подгруппа R (L, M, φ)-совместима, то

$$L \cap Q = M\varphi^{-1} \cap R\varphi^{-1} = (M \cap R)\varphi^{-1} = L \cap R.$$

Пусть $g \in H \cap QR$ и $g = xy$, где $x \in Q$, $y \in R$. Так как $g, x \in H$, то

$$y \in H \cap R = H \cap K \cap R = L \cap R = L \cap Q$$

и потому $g \in Q$, откуда $H \cap QR \subseteq Q$. Аналогично проверяется, что $K \cap QR \subseteq R$, и поскольку противоположные включения очевидны, требуемые равенства доказаны.

Группа P/QR является расширением группы HR/QR при помощи группы P/HR. Так как $R \in \mathcal{C}^*(K, L, M, \varphi)$, то $K/R \in \mathcal{C}$ и, следовательно, $H/Q \in \mathcal{C}$. Поэтому из соотношений

$$HR/QR \cong H/Q(R \cap H) \cong \big(H/Q\big)/\big(Q(R \cap H)/Q\big),$$
$$P/HR = HK/HR \cong K/R(H \cap K) \cong \big(K/R\big)/\big(R(H \cap K)/R\big)$$

в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия фактор-групп и расширений вытекает, что $P/QR \in \mathcal{C}$. Значит, воспользовавшись $\mathcal{C}$-регулярностью группы G по подгруппе P, можно найти такую подгруппу $U \in \mathcal{C}^*(G)$, что $U \cap P = QR$.

Так как группа G/X $\mathcal{C}$-аппроксимируема и класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп и расширений (а потому и прямых произведений конечного числа сомножителей), то в силу предложения 1.3.4 существует подгруппа $V/X \in \mathcal{C}^*(G/X)$, удовлетворяющая условию $SX/X \cap V/X = \varnothing$. Отсюда $V \in \mathcal{C}^*(G)$ и $S \cap V = \varnothing$.

Положим $N = U \cap V$. Тогда

$$S \cap XN \subseteq S \cap XV = S \cap V = \varnothing$$

и, снова в силу предложения 1.3.4, $N \in \mathcal{C}^*(G)$. Поскольку $P \leqslant X \leqslant V$, имеем

$$P \cap N = P \cap U \cap V = P \cap U = QR,$$
$$H \cap N = H \cap P \cap N = H \cap QR = Q,$$
$$K \cap N = K \cap P \cap N = K \cap QR = R.$$

Так как $Q\varphi = R$, отсюда следует, что подгруппа N (H, K, φ)-совместима и представляет собой искомый канонический подъем подгруппы R.

2. Соотношение $R \in \mathcal{C}^*_{r+1}(K, L, M, \varphi)$ означает, что существует число $n \geqslant r + 3$, являющееся допустимым для HNN-кортежа

$$(K/R,\ LR/R,\ MR/R,\ \varphi_R)$$

с запасом $r + 1$ и такое, что циклическая группа $\mathcal{Z}_n$ порядка n принадлежит классу $\mathcal{C}$. Поскольку $K \cap N = R$, отображение фактор-группы K/R в фактор-группу G/N, при котором смежному классу kR $(k \in K)$ ставится в соответствие смежный класс kN, является изоморфизмом группы K/R на подгруппу KN/N группы G/N. При этом отображении подгруппы LR/R и MR/R переходят на подгруппы LN/N и MN/N, а изоморфизму φ_R соответствует изоморфизм φ_N. Следовательно, число n является допустимым с запасом $r+1$ и для HNN-кортежа

$$(KN/N,\ LN/N,\ MN/N,\ \varphi_N).$$

Покажем, что $HN/N \cap KN/N = LN/N$.

Если $gN \in HN/N \cap KN/N$, то $g \in HN \cap KN$ и $g = hx = ky$ для подходящих элементов $h \in H$, $k \in K$ и $x, y \in N$. Тогда $h^{-1}k = xy^{-1} \in HK \cap N$. Поскольку N — канонический подъем подгруппы R, имеет место соотношение $HK \cap N = QR$ (где, как и выше, $Q = R\varphi^{-1}$) и, следовательно, $h^{-1}k = h_1k_1$ для некоторых элементов $h_1 \in Q$, $k_1 \in R$. Отсюда $hh_1 = kk_1^{-1} \in H \cap K = L$ и потому $h \in h_1^{-1}L$. Так как $h_1 \in Q \leqslant N$, получаем, что $g = hx \in LN$ и $gN \in LN/N$. Стало быть, $HN/N \cap KN/N \subseteq LN/N$ и, поскольку противоположное включение очевидно, требуемое равенство доказано.

Таким образом, $HN/N \cap KN/N = LN/N$ и $(LN/N)\varphi_N = MN/N$ по определению изоморфизма φ_N. Отсюда в силу предложения 4.2.1 следует, что число n является допустимым с запасом r для кортежа

$$(G/N,\ HN/N,\ KN/N,\ \varphi_N).$$

Поскольку $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{C}$, это означает, что $N \in \mathcal{C}_r^*(G, H, K, \varphi)$, как и требовалось. □

Пусть X — некоторая группа, Y и Z — ее подгруппы. Семейство Ω нормальных подгрупп группы X будем называть *сильной* (Y, Z)*-фильтрацией*, если для любого конечного множества S элементов группы X существует подгруппа $N \in \Omega$ такая, что для каждого элемента $x \in S$ выполняется следующее:

1) если $x \neq 1$, то $x \notin N$;
2) если $x \notin Y$, то $x \notin YN$;
3) если $x \notin Z$, то $x \notin ZN$.

Легко видеть, что любая сильная (Y, Z)-фильтрация является (Y, Z)-фильтрацией, а если семейство Ω замкнуто относительно конечных пересечений, то верно и обратное: каждая (Y, Z)-фильтрация оказывается сильной (Y, Z)-фильтрацией.

Предложение 4.5.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и расширений, подгруппы H и K лежат в центре группы G и $\mathfrak{P}'$-изолированы в этой группе для некоторого множества простых чисел $\mathfrak{P}$, группа G $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $P = HK$. Пусть также существует нормальная подгруппа X группы G такая, что $P \leqslant X$, фактор-группа X/P — периодическая $\mathfrak{P}'$-группа и фактор-группа G/X $\mathcal{C}$-аппроксимируема. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\mathcal{C}^*(K, L, M, \varphi)$ — сильная (L, M)-фильтрация, то $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ — сильная (H, K)-фильтрация.*

2. *Если для некоторого $r \geqslant 0$ $\mathcal{C}_{r+1}^*(K, L, M, \varphi)$ — сильная (L, M)-фильтрация, то $\mathcal{C}_r^*(G, H, K, \varphi)$ — сильная (H, K)-фильтрация.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 будем доказывать одновременно. Пусть S — некоторое конечное множество элементов группы G и $g \in S$ — произвольный элемент. Тогда:

1) если $g \in K \setminus H$, то $g \notin L$;

2) если $g \in H \setminus K$, то $g\varphi \notin M$;

3) если $g \in P \setminus (H \cup K)$ и $g = hk$, где $h \in H$, $k \in K$, то $k \notin L$, $h\varphi \notin M$;

4) если $g \in X \setminus P$, q — порядок элемента g по модулю подгруппы P и $g^q = hk$, где $h \in H$, $k \in K$, то $k \notin L$, $h\varphi \notin M$.

Действительно, если $g \in K \setminus H$, то $g \notin H \cap K = L$. Аналогично, если $g \in H \setminus K$, то $g \notin H \cap K = L$ и потому $g\varphi \notin M$. Если $g \in P \setminus (H \cup K)$ и $g = hk$, где $h \in H$, $k \in K$, то $h \notin K$, $k \notin H$ и в силу доказанного выше $k \notin L$, $h\varphi \notin M$. Пусть $g \in X \setminus P$, q — порядок элемента g по модулю подгруппы P и $g^q = hk$, где $h \in H$, $k \in K$. Так как $g \notin H \cup K$, подгруппы H и K $\mathfrak{P}'$-изолированы в группе G и по условию q является $\mathfrak{P}'$-числом, то $hk \notin H \cup K$. Отсюда с помощью приведенных выше рассуждений получаем, что $k \notin L$, $h\varphi \notin M$.

Стало быть, пользуясь тем, что семейство $\mathcal{C}^*(K, L, M, \varphi)$ или $\mathcal{C}^*_{r+1}(K, L, M, \varphi)$ является сильной (L, M)-фильтрацией, можно выбрать подгруппу R из данного семейства так, чтобы для каждого элемента $g \in S$ выполнялись следующие условия:

1) если $g \in L$ и $g \neq 1$, то $g \notin R$;

2) если $g \in K \setminus H$, то $g \notin LR$;

3) если $g \in H \setminus K$, то $g\varphi \notin MR$;

4) если $g \in P \setminus (H \cup K)$ и $g = hk$, где $h \in H$, $k \in K$, то $k \notin LR$, $h\varphi \notin MR$;

5) если $g \in X \setminus P$, q — порядок элемента g по модулю P и $g^q = hk$, где $h \in H$, $k \in K$, то $k \notin LR$, $h\varphi \notin MR$.

Нам достаточно, чтобы для каждого элемента $g \in S$ условие 4 или 5 было выполнено при некотором фиксированном выборе элементов h и k. Заметим, однако, что если для некоторых $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$ имеет место равенство $h_1k_1 = h_2k_2$, то $h_1^{-1}h_2 = k_1k_2^{-1} \in L$. Поэтому, если $k_1 \notin LR$ и $h_1\varphi \notin MR$, то $k_2 \notin LR$ и $h_2\varphi \notin MR$.

Пусть $S_1 = S \setminus X$ и $Q = R\varphi^{-1}$. Согласно предложению 4.5.3 существует канонический подъем $N \in \mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ подгруппы R такой, что $S_1 \cap XN = \varnothing$ и, если $R \in \mathcal{C}^*_{r+1}(K, L, M, \varphi)$, то $N \in \mathcal{C}^*_r(G, H, K, \varphi)$. Для завершения доказательства достаточно показать, что для каждого элемента $g \in S$ выполняется следующее:

1) если $g \neq 1$, то $g \notin N$;

2) если $g \notin H$, то $g \notin HN$;

3) если $g \notin K$, то $g \notin KN$.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. $g \in L$ и $g \neq 1$.

В силу выбора подгруппы R имеет место соотношение $g \notin R$. Поскольку $R = N \cap K$ и $g \in K$, отсюда следует, что $g \notin N$.

Случай 2. $g \in K \setminus H$.

Предположим, что $g \in HN$ и $g = hx$, где $h \in H$, $x \in N$. Тогда $x = h^{-1}g \in N \cap P$. Так как N — канонический подъем подгруппы R, то $N \cap P = QR$ и $x = h_1 k$, где $h_1 \in Q$, $k \in R$. Отсюда $gk^{-1} = hh_1 \in H \cap K = L$ и $g \in LR$, что противоречит выбору подгруппы R.

Случай 3. $g \in H \setminus K$.

Предположим, что $g \in KN$ и $g = kx$, где $k \in K$, $x \in N$. Тогда, как и в предыдущем случае, $x = k^{-1}g \in N \cap P = RQ$ и потому $x = k_1 h$, где $h \in Q$, $k_1 \in R$. Отсюда $gh^{-1} = kk_1 \in L$, $g = (kk_1)h \in LQ$ и $g\varphi \in MR$, что вновь противоречит выбору подгруппы R.

Случай 4. $g \in P \setminus (H \cup K)$.

Пусть $g = hk$, где $h \in H$, $k \in K$. Предположим сначала, что $g \in HN$ и $g = h_1 x$, где $h_1 \in H$, $x \in N$. Тогда из равенства $hk = h_1 x$ вытекает, что $x \in P$ и потому $x \in N \cap P = QR$. Следовательно, $x = h_2 k_2$, где $h_2 \in Q$, $k_2 \in R$, и из соотношения $hk = h_1 h_2 k_2$ получаем, что $kk_2^{-1} = h^{-1}h_1 h_2 \in L$. Отсюда $k = (h^{-1}h_1 h_2)k_2 \in LR$ в противоречие с выбором подгруппы R.

Аналогично, если $g \in KN$ и $g = k_1 x$, где $k_1 \in K$, $x \in N$, то снова $x \in N \cap P = QR$ и $x = h_2 k_2$ для некоторых $h_2 \in Q$, $k_2 \in R$. Отсюда $hk = k_1 h_2 k_2$ и, так как $[H, K] = 1$, то $hh_2^{-1} = k^{-1}k_1 k_2 \in L$, $h = (k^{-1}k_1 k_2)h_2 \in LQ$ и $h\varphi \in MR$, что вновь противоречит выбору подгруппы R.

Случай 5. $g \in X \setminus P$.

Как уже было доказано выше, из условия $g \in X \setminus P$ следует, что $g^q \notin H \cup K$, где q — порядок элемента g по модулю подгруппы P. Отсюда с помощью тех же рассуждений, что и в рассмотренном выше случае 4, получаем, что $g^q \notin HN \cup KN$. Но тогда, очевидно, $g \notin HN \cup KN$, что и требовалось.

Случай 6. $g \notin X$.

Из условия $g \notin X$ следует, что $g \in S_1$ и в силу выбора подгруппы N $g \notin XN$. Так как $H \cup K \subseteq X$, то из последнего соотношения получаем, что $g \notin HN \cup KN$. □

§ 4.6. Доказательства теорем 4.1.1–4.1.3 и следствий 4.1.4, 4.1.5

Всюду в этом параграфе будем считать, что (G, H, K, φ) — HNN-кортеж, подгруппы H и K лежат в центре группы G и $\mathfrak{G} = \mathrm{HNN}(G, H, K, \varphi)$. Также будем использовать следующие обозначения:

$$K_0 = G,\ H_1 = H,\ K_1 = K,\ H_{i+1} = H_i \cap K_i,\ K_{i+1} = H_{i+1}\varphi,\ P_i = H_i K_i \quad (i \geqslant 1).$$

Предложение 4.6.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп и $H \neq G \neq K$. Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то для любого $n \geqslant 1$ группы $\mathfrak{G}_{n-1} = \mathrm{HNN}(G, H_n, K_n, \varphi)$ и $\mathfrak{K}_{n-1} = \mathrm{HNN}(K_{n-1}, H_n, K_n, \varphi)$ также являются $\mathcal{C}$-аппроксимируемыми.*

Доказательство. В силу предложения 4.3.4 из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ вытекает, что семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)$ является (H,K)-фильтрацией. Применяя повторно предложение 4.5.2, получаем отсюда, что семейства $\mathcal{C}^*_\cap(G,H_n,K_n,\varphi)$ и $\mathcal{C}^*_\cap(K_{n-1},H_n,K_n,\varphi)$ являются (H_n,K_n)-фильтрациями и, снова в силу предложения 4.3.4, группы $\mathfrak{G}_{n-1}$ и $\mathfrak{K}_{n-1}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы. □

Предложение 4.6.2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел. Если для некоторого $n \geqslant 1$ подгруппы H_n и K_n $\mathfrak{P}'$-изолированы в группе G, то подгруппы H_i и K_i являются $\mathfrak{P}'$-изолированными в этой группе для всех $i \geqslant n$.*

2. *Если число $n \geqslant 1$ и подгруппа Q таковы, что $Q \leqslant H_n \cap K_n$ и $Q\varphi = Q$, то $Q \leqslant H_i \cap K_i$ для всех $i \geqslant n$.*

3. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и расширений. Если $H \in \mathcal{C}^*(G)$ и $K \in \mathcal{C}^*(G)$, то $H_i \in \mathcal{C}^*(G)$ и $K_i \in \mathcal{C}^*(G)$ для всех $i \geqslant 1$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по i и заметим, что для всех трех утверждений база индукции очевидна.

1. Пусть для некоторого $i \geqslant n$ подгруппы H_i и K_i $\mathfrak{P}'$-изолированы в группе G. Если элемент $g \in G$ и число $q \in \mathfrak{P}'$ таковы, что $g^q \in H_{i+1}$, то $g^q \in H_i$ и $g^q \in K_i$. Поэтому в силу $\mathfrak{P}'$-изолированности подгрупп H_i и K_i $g \in H_i \cap K_i = H_{i+1}$ и, следовательно, подгруппа H_{i+1} $\mathfrak{P}'$-изолирована в группе G. Если теперь для некоторых $g \in G$ и $q \in \mathfrak{P}'$ имеет место включение $g^q \in K_{i+1}$, то $g \in K_i$ ввиду $\mathfrak{P}'$-изолированности подгруппы K_i. Поэтому определен элемент $g\varphi^{-1}$ и $(g\varphi^{-1})^q \in H_{i+1}$. Из последнего включения ввиду $\mathfrak{P}'$-изолированности подгруппы H_{i+1} вытекает, что $g\varphi^{-1} \in H_{i+1}$ и $g \in K_{i+1}$. Таким образом, подгруппа K_{i+1} также $\mathfrak{P}'$-изолирована в группе G.

2. Пусть для некоторого $i \geqslant n$ справедливо включение $Q \leqslant H_i \cap K_i$. Тогда

$$Q \leqslant H_{i+1} = H_i \cap K_i, \quad Q\varphi \leqslant H_{i+1}\varphi = K_{i+1}$$

и, так как $Q\varphi = Q$, то $Q \leqslant H_{i+1} \cap K_{i+1}$.

3. Пусть для некоторого $i \geqslant 1$ семейство $\mathcal{C}^*(G)$ содержит подгруппы H_i и K_i. Тогда согласно предложению 1.3.4 $H_{i+1} = H_i \cap K_i \in \mathcal{C}^*(G)$. Так как класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то $H_{i+1} \in \mathcal{C}^*(H_i)$ и из равенств $H_i\varphi = K_i$, $H_{i+1}\varphi = K_{i+1}$ следует, что $K_{i+1} \in \mathcal{C}^*(K_i)$. Значит, фактор-группа G/K_{i+1} представляет собой расширение $\mathcal{C}$-группы K_i/K_{i+1} при помощи $\mathcal{C}$-группы G/K_i и в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений $K_{i+1} \in \mathcal{C}^*(G)$. □

Доказательство теоремы 4.1.1. *Необходимость.* В силу предложения 4.6.1 группа $\mathfrak{G}_{n-1} = \mathrm{HNN}(G,H_n,K_n,\varphi)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема. Так как $H_n = H_{n+1} = H_n \cap K_n$, то $H_n \leqslant K_n$ и согласно предложению 4.3.5, применяемому к группе $\mathfrak{G}_{n-1}$, $H_n = K_n$. $\mathcal{C}$-аппроксимируемость подгруппы E вытекает из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ и замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп.

Из предложения 4.3.4 следует, что семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi)$ является (H,K)-фильтрацией. Согласно предложению 4.3.2 $\mathcal{C}^*_\cap(G,H,K,\varphi) \subseteq \mathcal{C}^*(G)$ и потому семейство $\mathcal{C}^*(G)$ также оказывается (H, K)-фильтрацией. Последнее означает, что подгруппы H и K $\mathcal{C}$-отделимы в группе G и в силу предложения 1.3.7 $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в этой группе.

Достаточность. Поскольку

$$H_{n+1} = H_n = K_n, \quad K_{n+1} = H_{n+1}\varphi = H_n\varphi = K_n,$$

группа $\mathfrak{K}_n = \mathrm{HNN}(K_n, H_{n+1}, K_{n+1}, \varphi)$ представляет собой расщепляемое расширение группы K_n при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t. Поэтому отображение порождающих группы $\mathfrak{K}_n$ в соответствующие им элементы группы $\mathfrak{G}$ продолжаемо до инъективного гомоморфизма, переводящего $\mathfrak{K}_n$ на E. Следовательно, группа $\mathfrak{K}_n$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема и по предложению 4.3.4 семейство $\mathcal{C}^*_\cap(K_n, H_{n+1}, K_{n+1}, \varphi)$ является фильтрацией. Поскольку $H_{n+1} = K_n = K_{n+1}$, это семейство в действительности оказывается (H_{n+1}, K_{n+1})-фильтрацией, а, значит, и сильной (H_{n+1}, K_{n+1})-фильтрацией, так как согласно предложению 4.3.1 оно замкнуто относительно конечных пересечений. В силу предложения 4.3.3

$$\mathcal{C}^*_\cap(K_n, H_{n+1}, K_{n+1}, \varphi) = \mathcal{C}^*_n(K_n, H_{n+1}, K_{n+1}, \varphi)$$

и потому семейство $\mathcal{C}^*_n(K_n, H_{n+1}, K_{n+1}, \varphi)$ также оказывается сильной (H_{n+1}, K_{n+1})-фильтрацией.

Поскольку класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G вытекает $\mathcal{C}$-аппроксимируемость групп K_i $(i \geqslant 0)$. Для любого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ подгруппа P_{i+1} содержится в центре $\mathcal{Z}(K_i)$ группы K_i, последний же ввиду предложений 1.3.3 и 1.3.7 является $\mathcal{C}$-отделимой и потому $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной подгруппой этой группы. Следовательно, $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолятор $X_i = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(K_i, P_{i+1})$ лежит в подгруппе $\mathcal{Z}(K_i)$ и согласно предложению 1.3.6 совпадает с множеством $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(K_i, P_{i+1})$. Это означает, что фактор-группа X_i/P_{i+1} является периодической $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-группой.

Согласно условию для любого $i \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$ группа K_i $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе P_{i+1}. Также по условию подгруппа X_i $\mathcal{C}$-отделима в группе K_i, откуда ввиду предложения 1.3.2 вытекает, что фактор-группа K_i/X_i $\mathcal{C}$-аппроксимируема. Наконец, в силу предложения 4.6.2 подгруппы H_{i+1} и K_{i+1} $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G, а потому и в группе K_i. Значит, мы можем последовательно применять предложение 4.5.4 к HNN-кортежам

$$(K_i, H_{i+1}, K_{i+1}, \varphi), \quad i = n-1,\ \ldots,\ 1,\ 0,$$

получив в конечном итоге утверждение о том, что семейство $\mathcal{C}^*_0(G, H, K, \varphi)$ является сильной (H, K)-фильтрацией. Ввиду предложения 4.3.2 $\mathcal{C}^*_0(G, H, K, \varphi) \subseteq \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$. Поэтому семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ — (H, K)-фильтрация и группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема в силу предложения 4.3.4. $\square$

Доказательство теоремы 4.1.2. Так как группа G аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ и этот класс замкнут относительно взятия подгрупп, то группа K_n также является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой и по предложению 4.3.6 семейство $\mathcal{C}^*(K_n, H_{n+1}, K_{n+1}, \varphi)$ —

(H_{n+1}, K_{n+1})-фильтрация. Согласно предложению 4.3.1 данное семейство замкнуто относительно конечных пересечений и потому оказывается сильной (H_{n+1}, K_{n+1})-фильтрацией. По условию для каждого $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ подгруппа P_{i+1} $\mathcal{C}$-отделима в группе K_i и, следовательно, фактор-группа K_i/P_{i+1} $\mathcal{C}$-аппроксимируема в силу предложения 1.3.2. Полагая $\mathfrak{P}$ равным множеству всех простых чисел и последовательно применяя предложение 4.5.4 к HNN-кортежам $(K_i, H_{i+1}, K_{i+1}, \varphi)$ и подгруппам

$$X_{i+1} = P_{i+1} \quad (i = n-1, \ldots, 1, 0),$$

получаем, что семейство $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi)$ является сильной (H, K)-фильтрацией. Так как по предложению 4.3.2 $\mathcal{C}^*(G, H, K, \varphi) = \mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$, то семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G, H, K, \varphi)$ тоже оказывается (H, K)-фильтрацией и группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема в силу предложения 4.3.4. $\square$

Доказательство теоремы 4.1.3. Утверждение I вытекает из теоремы 4.1.2. Докажем утверждение II.

Пусть $i \geqslant 0$ — произвольное число. Покажем, что $K_i/P_{i+1} \in \mathcal{C}$.

Если $Q \leqslant H \cap K$ и $Q\varphi = Q$, то согласно предложению 4.6.2 $Q \leqslant H_{i+1} \cap K_{i+1}$. Следовательно, $Q \leqslant P_{i+1}$ и

$$G/P_{i+1} \cong (G/Q)/(P_{i+1}/Q) \in \mathcal{C}, \quad K_i/P_{i+1} \in \mathcal{C}$$

в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Если же $H \cap Q = 1 = K \cap Q$, то $K_i \cap Q = 1$ и

$$K_i/P_{i+1} \cong K_i/P_{i+1}(K_i \cap Q) \cong K_iQ/P_{i+1}Q.$$

Поскольку $Q \leqslant P_{i+1}Q$, отсюда, как и выше, получаем, что $K_iQ/P_{i+1}Q \in \mathcal{C}$.

Таким образом, $K_i/P_{i+1} \in \mathcal{C}$. Поэтому подгруппа P_{i+1} $\mathcal{C}$-отделима и ввиду предложения 1.3.7 $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе K_i. Значит, $P_{i+1} = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(K_i, P_{i+1})$. Заметим также, что если $N \in \mathcal{C}^*(P_{i+1})$, то фактор-группа K_i/N является расширением $\mathcal{C}$-группы P_{i+1}/N при помощи $\mathcal{C}$-группы K_i/P_{i+1} и в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений принадлежит данному классу. Следовательно, $\mathcal{C}^*(P_{i+1}) \subseteq \mathcal{C}^*(K_i)$ и потому группа K_i $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе P_{i+1}.

Таким образом, требуемое утверждение вытекает из теоремы 4.1.1, нужно лишь заметить, что согласно предложению 4.3.6 подгруппы H и K $\mathcal{C}$-отделимы в группе G и ввиду предложения 1.3.7 $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в этой группе. $\square$

Доказательство следствия 4.1.4. Поскольку подгруппа H конечна, для некоторого $n \geqslant 1$ должно выполняться равенство $H_n = H_{n+1} = H_n \cap K_n$. Отсюда $H_n \leqslant K_n$ и, так как подгруппы H_n, K_n конечны и изоморфны, то $H_n = K_n$. $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы G в силу предложения 1.3.4 влечет существование подгруппы $Q \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющей условию $H \cap Q = 1 = K \cap Q$. Поэтому утверждение I следует из теоремы 4.1.3. Докажем утверждение II.

Поскольку подгруппа H_n конечна, порядок q ограничения на нее изоморфизма φ также конечен. Так как $H \cap Q = 1$, то подгруппа H_n вкладывается в $\mathcal{C}$-группу G/Q и в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп принадлежит данному классу. Значит, согласно предложению 4.3.9 подгруппа $E = \mathrm{sgp}\{H_n, t\}$ группы $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда q является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. Если $H = G = K$, то $\mathfrak{G} = E$ и требуемое утверждение доказано. В противном случае ввиду конечности и изоморфности подгрупп H и K неравенства $G \neq H$ и $G \neq K$ выполняются одновременно и утверждение следствия вытекает из теоремы 4.1.3. $\square$

Доказательство следствия 4.1.5. I. *Необходимость* утверждения обеспечивается предложением 4.3.7 и замкнутостью класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп, *достаточность* — теоремой 4.1.3.

II. *Необходимость.* В силу предложений 4.3.7 и 4.6.2 существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $Q\varphi = Q$ и $Q \leqslant H_i \cap K_i$ для всех $i \geqslant 1$. Поскольку класс $\mathcal{C}$ состоит из конечных групп, подгруппа Q имеет конечный индекс в группе G и, стало быть, для некоторого n выполняется равенство $H_n = H_{n+1}$. Так как класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема. Поэтому справедливость условий 2 и 3 вытекает из теоремы 4.1.3. Поскольку

$$G/H \cong (G/Q)/(H/Q), \quad G/K \cong (G/Q)/(K/Q),$$

условие 1 следует из замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия фактор-групп.

Достаточность. В силу предложения 4.6.2 для любого $i \geqslant 1$ справедливы включения $H_i \in \mathcal{C}^*(G)$ и $K_i \in \mathcal{C}^*(G)$. Значит, $H_n \in \mathcal{C}^*(G)$, $H_n \leqslant H \cap K$ и $H_n\varphi = H_n$. Так как группа E $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп им аппроксимируется и подгруппа H_n. Следовательно, группа G представляет собой расширение $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группы H_n при помощи $\mathcal{C}$-группы G/H_n и потому аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ согласно предложению 1.4.8. Таким образом, $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ вытекает из теоремы 4.1.3. $\square$

Глава 5. Аппроксимируемость обобщенных групп Баумслага–Солитэра

§ 5.1. Необходимые определения

Как уже было отмечено во введении, *обобщенной группой Баумслага–Солитэра* или *GBS-группой* называют фундаментальную группу конечного связного графа групп, все вершинные и реберные группы которого являются бесконечными циклическими. В связи с приведенным определением имеет смысл напомнить, что (обычная) *группа Баумслага–Солитэра* — это HNN-расширение бесконечной циклической группы, т. е. группа с представлением вида

$$\mathrm{BS}(m,n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^{m}a = b^{n}\rangle,$$

где m и n — ненулевые целые числа. Ввиду попарной изоморфности групп $\mathrm{BS}(m,n)$, $\mathrm{BS}(n,m)$ и $\mathrm{BS}(-m,-n)$ можно считать, что числа m и n удовлетворяют неравенствам $|n| \geqslant m > 0$.

Заметим, что если

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big) \ —$$

некоторый граф групп, все его вершинные и реберные группы являются бесконечными циклическими и зафиксированы их порождающие g_v $(v \in \mathcal{V})$ и h_e $(e \in \mathcal{E})$, то гомоморфизм $\varphi_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)$ однозначно определяется числом $\lambda(\varepsilon e) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ таким, что $g_{e(\varepsilon)}^{\lambda(\varepsilon e)} = h_e\varphi_{\varepsilon e}$. Поэтому вместо графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ можно рассматривать *граф с метками* $\mathcal{L}(\Gamma)$, который получается из Γ путем сопоставления концам каждого ребра $e \in \mathcal{E}$ ненулевых целых чисел $\lambda(+e)$ и $\lambda(-e)$. Группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в таком случае будем называть *фундаментальной группой графа с метками* $\mathcal{L}(\Gamma)$ и обозначать через $\pi_1(\mathcal{L}(\Gamma))$. Понятно, что каждая GBS-группа представляет собой фундаментальную группу некоторого конечного связного графа с метками и наоборот, каждый граф с метками над непустым конечным связным графом Γ определяет некоторую GBS-группу.

Граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ называется *редуцированным*, если каждое не являющееся петлей ребро имеет метки, отличные от ± 1 [113, с. 224]. Заметим, что любая GBS-группа может быть задана редуцированным графом с метками.

В самом деле, пусть граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ не является редуцированным, т. е. в нем имеется ребро e, не являющееся петлей и такое, что $|\lambda(\varepsilon e)| = 1$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$. Выберем остовное дерево в графе Γ содержащим ребро e. Тогда в группе $\pi_1(\mathcal{L}(\Gamma))$ справедливо равенство $g_{e(\varepsilon)} = g_{e(-\varepsilon)}^{\lambda(\varepsilon e)\lambda(-\varepsilon e)}$ и, значит, порождающий $g_{e(\varepsilon)}$ может быть исключен из ее представления. В графе $\mathcal{L}(\Gamma)$ этой операции соответствует стягивание ребра e с предварительным умножением всех меток вокруг вершины $e(\varepsilon)$ на $\lambda(\varepsilon e)\lambda(-\varepsilon e)$. Такое преобразование графа $\mathcal{L}(\Gamma)$ называется *элементарным схлопыванием* (см. [147, с. 480]). Если граф Γ конечен, то граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ всегда может быть приведен к редуцированной форме путем выполнения конечного числа элементарных схлопываний.

С этого момента и до конца главы будем считать, что Γ — непустой конечный связный граф, $\mathcal{L}(\Gamma)$ — некоторый граф с метками $\lambda(\varepsilon e)$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) и $\mathfrak{G} = \pi_1(\mathcal{L}(\Gamma))$ — соответствующая ему GBS-группа с вершинными группами $G_v = \langle g_v \rangle$ ($v \in \mathcal{V}$) и реберными подгруппами $H_{\varepsilon e} = \langle g_{e(\varepsilon)}^{\lambda(\varepsilon e)} \rangle$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$).

Группа $\mathfrak{G}$ называется *элементарной*, если она изоморфна $\mathrm{BS}(1,1)$, $\mathrm{BS}(1,-1)$ или бесконечной циклической группе [148, с. 6]. Известно, что GBS-группа разрешима, если она элементарна или изоморфна $\mathrm{BS}(1,q)$, где $q \neq \pm 1$ [104].

Элемент $a \in \mathfrak{G}$ называется *эллиптическим*, если он сопряжен с элементом некоторой вершинной группы. Если группа $\mathfrak{G}$ не является элементарной, то эллиптичность элемента не зависит от выбора графа $\mathcal{L}(\Gamma)$, задающего группу $\mathfrak{G}$, множество эллиптических элементов инвариантно относительно автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$ и любые два эллиптических элемента $a, b \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$ *соизмеримы*, т. е. $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq 1$ [147, лемма 2.1, следствие 2.2]. Это позволяет определить отображение Δ группы $\mathfrak{G}$ в мультипликативную группу $\mathbb{Q}^*$ поля рациональных чисел следующим образом.

Пусть $g \in \mathfrak{G}$ — произвольный элемент. Выберем некоторый неединичный эллиптический элемент a. Тогда элемент $g^{-1}ag$ также является эллиптическим и потому найдутся ненулевые числа m и n такие, что $g^{-1}a^m g = a^n$. Положим $\Delta(g) = n/m$.

Это определение не зависит от выбора элемента a и чисел m, n [144]. Построенное отображение Δ называется *модулярным гомоморфизмом* группы $\mathfrak{G}$. Обозначение Δ далее будет использоваться без специальных пояснений.

Циклическим радикалом $C(\mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}$ называется наибольшая циклическая нормальная подгруппа этой группы. Циклический радикал существует, если группа $\mathfrak{G}$ не изоморфна $\mathrm{BS}(1,1)$ или $\mathrm{BS}(1,-1)$ [105, с. 1808].

§ 5.2. Формулировка результатов

Для начала приведем одно известное утверждение об аппроксимируемости (обычных) групп Баумслага–Солитэра, поскольку оно дополняет результаты настоящей главы и используется при доказательстве некоторых из них.

Теорема 5.2.1. [71] *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $1 < m < |n|$, то группа $\mathrm{BS}(m,n)$ не является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.*

2. *Группа $\mathrm{BS}(m,m)$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда m является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом.*

3. *Группа* $\mathrm{BS}(m, -m)$ $\mathcal{C}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда* m *является* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$*-числом и* $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$.

4. *Группа* $\mathrm{BS}(1, n)$, *где* $|n| \neq 1$, $\mathcal{C}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует число* $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, *не делящее* n *и такое, что порядок образа* $n+p\mathbb{Z}$ *числа* n *в мультипликативной группе вычетов по модулю* p *является* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$*-числом.*

Отметим, что в действительности теорема 5.2.1 верна для любого корневого класса $\mathcal{C}$, состоящего из периодических групп (см. предложение 6.4.1 ниже). Поэтому в сочетании с ней приводимая далее теорема 5.2.2 дает критерий аппроксимируемости таким классом произвольной GBS-группы.

Теорема 5.2.2. *Пусть* $\mathcal{C}$ *— корневой класс групп, состоящий только из периодических групп, группа* $\mathfrak{G}$ *не является разрешимой и задающий ее граф* $\mathcal{L}(\Gamma)$ *редуцирован. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $\mathrm{Im}\,\Delta = \{1\}$, *то группа* $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все метки графа* $\mathcal{L}(\Gamma)$ *являются* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$*-числами.*

2. *Если* $\mathrm{Im}\,\Delta = \{1, -1\}$, *то группа* $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все метки графа* $\mathcal{L}(\Gamma)$ *являются* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$*-числами и* $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$.

3. *Если* $\mathrm{Im}\,\Delta \nsubseteq \{1, -1\}$, *то группа* $\mathfrak{G}$ *не является* $\mathcal{C}$*-аппроксимируемой.*

Теорема 5.2.3. *Пусть* $\mathcal{C}$ *— корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если группа* $\mathfrak{G}$ *элементарна, то она является* $\mathcal{C}$*-группой без кручения.*

2. *Пусть группа* $\mathfrak{G}$ *не является элементарной и* Q *— подкольцо поля* $\mathbb{Q}$, *порожденное множеством* $\mathrm{Im}\,\Delta$. *Если аддитивная группа кольца* Q *принадлежит классу* $\mathcal{C}$, *то группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется* $\mathcal{C}$*-группами без кручения. В частности, если* $\mathrm{Im}\,\Delta \subseteq \{1, -1\}$ *или класс* $\mathcal{C}$ *замкнут относительно взятия фактор-групп, то группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется* $\mathcal{C}$*-группами без кручения.*

Так как классы всех конечных групп, конечных разрешимых групп и всех разрешимых групп являются корневыми и замкнуты относительно взятия фактор-групп, то непосредственно из теорем 5.2.1–5.2.3 вытекают следующие два утверждения.

Следствие 5.2.4. *Приводимые далее утверждения равносильны.*

1. *Группа* $\mathfrak{G}$ *финитно аппроксимируема.*

2. *Группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется конечными разрешимыми группами.*

3. *Либо группа* $\mathfrak{G}$ *разрешима, либо она не является элементарной и* $\mathrm{Im}\,\Delta \subseteq \{1, -1\}$.

Следствие 5.2.5. *Произвольная GBS-группа аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.*

Отметим, что теорема 5.2.2 и следствия 5.2.4, 5.2.5 усиливают и обобщают теорему 1 из [108], следствие 7.7 из [148] и следствие 3 из [175] соответственно.

§ 5.3. Некоторые свойства GBS-групп

Предложение 5.3.1. [148, предложения 7.5, 7.11] *Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является разрешимой, n/m — несократимая дробь, принадлежащая $\operatorname{Im}\Delta$ и отличная от 1. Тогда группа $\mathfrak{G}$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{BS}(m,n)$.*

Предложение 5.3.2. [148, лемма 7.6] *Если неразрешимая группа $\mathfrak{G}$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{BS}(1,n)$, где $|n| \neq 1$, то в ней имеется подгруппа, изоморфная $\mathrm{BS}(q,qn)$, где q — некоторое простое число.*

Предложение 5.3.3. *Пусть граф Γ является деревом, $\mathcal{I}$ — непустое конечное множество индексов, представляющее собой объединение множества $\big\{(e,\varepsilon) \mid e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1\big\}$ и некоторого непересекающегося с ним множества $\mathcal{J}$. Пусть также $\Sigma = \{H_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ — семейство подгрупп групп G_v $(v \in \mathcal{V})$ и $\nu\colon \mathcal{I} \to \mathcal{V}$ — функция такие, что для любого $i \in \mathcal{I}$ $1 \neq H_i \leqslant G_{\nu(i)}$ и, если $i = (e,\varepsilon)$ для некоторых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, то $H_i = H_{\varepsilon e}$ и $\nu(i) = e(\varepsilon)$. Пусть, наконец, $K = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} H_i$ и $\chi(i) = [G_{\nu(i)} : H_i]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *$K \leqslant \bigcap_{v\in\mathcal{V}} G_v$ и потому определены числа $\mu(v) = [G_v : K]$ $(v \in \mathcal{V})$.*
2. *$K \neq 1$ и потому все числа $\mu(v)$ $(v \in \mathcal{V})$ конечны.*
3. *Наименьшее общее кратное μ чисел $\mu(v)$ $(v \in \mathcal{V})$ делит $\prod_{i\in\mathcal{I}} \chi(i)$.*

Доказательство. 1. Заметим, что $\mathcal{V} = \{\nu(i) \mid i \in \mathcal{I}\}$. В самом деле, если граф Γ состоит из одной вершины v, то $v = \nu(i)$ для всех $i \in \mathcal{I}$ и требуемое равенство обеспечивается непустотой множества $\mathcal{I}$. В противном случае каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ инцидентна хотя бы одному ребру $e \in \mathcal{E}$ и, следовательно, существует такое $\varepsilon = \pm 1$, что $v = e(\varepsilon) = \nu(i)$, где $i = (e,\varepsilon) \in \mathcal{I}$. Отсюда

$$K = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} H_i \leqslant \bigcap_{i\in\mathcal{I}} G_{\nu(i)} = \bigcap_{v\in\mathcal{V}} G_v,$$

что и требовалось.

2. Положим

$$H = \bigcap_{v\in\mathcal{V}} G_v$$

и покажем, используя индукцию по числу вершин в графе Γ, что H — бесконечная циклическая подгруппа. Если граф Γ содержит только одну вершину v, то $H = G_v$ и требуемое утверждение очевидно. Поэтому будем считать далее, что в графе Γ имеется более одной вершины и, следовательно, $\mathcal{E} \neq \varnothing$.

Пусть $f \in \mathcal{E}$ — произвольное ребро. Так как Γ — дерево, то граф $\Gamma - f$, получающийся из Γ путем удаления ребра f, имеет в точности две компоненты связности. Для каждого $\varepsilon = \pm 1$ обозначим через Γ_ε ту компоненту связности, которая содержит вершину $f(\varepsilon)$, и через $\mathcal{V}_\varepsilon$ множество вершин дерева Γ_ε. По индуктивному предположению для любого $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа

$$H_\varepsilon = \bigcap_{v\in\mathcal{V}_\varepsilon} G_v$$

является бесконечной циклической и потому $H_\varepsilon \cap H_{\varepsilon f} \neq 1$ как пересечение двух нетривиальных подгрупп группы $G_{f(\varepsilon)}$.

В силу предложения 1.2.1 свободное произведение групп $G_{f(1)}$ и $G_{f(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+f} и H_{-f} вкладывается в группу $\mathfrak{G}$ посредством тождественного отображения образующих. Поэтому по теореме 4.4.3 из [39] в группе $\mathfrak{G}$ справедливы равенства $H_{+f} = G_{f(1)} \cap G_{f(-1)} = H_{-f}$. Следовательно,

$$H = H_1 \cap H_{-1} = (H_1 \cap G_{f(1)}) \cap (H_{-1} \cap G_{f(-1)}) = (H_1 \cap H_{+f}) \cap (H_{-1} \cap H_{-f}),$$

т. е. подгруппа H представляет собой пересечение двух нетривиальных подгрупп бесконечной циклической группы $H_{+f} = H_{-f}$, что и требовалось.

Итак, $H \neq 1$ и потому $H_i \cap H$ — бесконечная циклическая подгруппа группы $G_{\nu(i)}$ для любого $i \in \mathcal{I}$. Как уже было отмечено выше, $\mathcal{V} = \{\nu(i) \mid i \in \mathcal{I}\}$, следовательно,

$$K \;=\; \bigcap_{i \in \mathcal{I}} (H_i \cap G_{\nu(i)}) \;=\; \bigcap_{i \in \mathcal{I}} (H_i \cap H).$$

Поскольку все подгруппы $H_i \cap H$ $(i \in \mathcal{I})$ лежат в H и множество $\mathcal{I}$ конечно, отсюда вытекает, что $K \neq 1$.

3. Снова воспользуемся индукцией по числу вершин в графе Γ. Если Γ содержит лишь одну вершину v, то $\mu = \mu(v) = [G_v : K]$, $\chi(i) = [G_v : H_i]$ и требуемое утверждение вытекает из соотношения

$$\Big[G_v : \bigcap_{i \in \mathcal{I}} H_i\Big] \;\Big|\; \prod_{i \in \mathcal{I}} [G_v : H_i].$$

Поэтому далее будем считать, что в графе Γ имеется по крайней мере две вершины.

Как и выше, выберем произвольное ребро $f \in \mathcal{E}$ и обозначим через Γ_ε $(\varepsilon = \pm 1)$ компоненту связности графа $\Gamma - f$, содержащую вершину $f(\varepsilon)$. Пусть также $\mathcal{V}_\varepsilon$ — множество вершин дерева Γ_ε,

$$\mathcal{I}_\varepsilon = \big\{ i \mid i \in \mathcal{I},\, \nu(i) \in \mathcal{V}_\varepsilon \big\},$$
$$K_\varepsilon = \bigcap_{i \in \mathcal{I}_\varepsilon} H_i, \quad p_\varepsilon = \prod_{i \in \mathcal{I}_\varepsilon} \chi(i).$$

Тогда

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} \chi(i) = p_1 p_{-1}$$

и в группе $\mathfrak{G}$ справедливо равенство $K = K_1 \cap K_{-1}$.

Ввиду определения отображения ν множество индексов $\mathcal{I}_\varepsilon$ содержит пару (f, ε) и потому непусто. Легко видеть также, что дерево Γ_ε, множество $\mathcal{I}_\varepsilon$, семейство $\Sigma_\varepsilon = \{H_i \mid i \in \mathcal{I}_\varepsilon\}$ и функция $\nu_\varepsilon = \nu|_{\mathcal{I}_\varepsilon}$ удовлетворяют всем условиям предложения. Поэтому в силу доказанного выше числа $\mu_\varepsilon(v) = [G_v : K_\varepsilon]$ $(v \in \mathcal{V}_\varepsilon)$ определены и конечны, а их наименьшее общее кратное μ_ε по индуктивному предположению делит p_ε.

Так как $K_1 \leqslant H_{+f}$, $K_{-1} \leqslant H_{-f}$ и ввиду отмеченного ранее в группе $\mathfrak{G}$ выполняются соотношения $H_{+f} = G_{f(1)} \cap G_{f(-1)} = H_{-f}$, то $K_1 K_{-1} \leqslant G_{f(1)} \cap G_{f(-1)}$ и

$$[K_1 K_{-1} : K_\varepsilon] \mid [G_{f(\varepsilon)} : K_\varepsilon] = \mu_\varepsilon(f(\varepsilon)) \mid \mu_\varepsilon$$

для каждого $\varepsilon = \pm 1$. Поэтому для любых $\varepsilon = \pm 1$, $v \in \mathcal{V}_\varepsilon$ имеем

$$\mu(v) = [G_v : K] = [G_v : K_\varepsilon][K_\varepsilon : K_\varepsilon \cap K_{-\varepsilon}] = \\ = [G_v : K_\varepsilon][K_\varepsilon K_{-\varepsilon} : K_{-\varepsilon}] \mid \mu_\varepsilon \mu_{-\varepsilon} \mid p_1 p_{-1}.$$

Следовательно, наименьшее общее кратное чисел $\mu(v)$ ($v \in \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_{-1}$) также делит произведение $p_1 p_{-1}$. □

Если заменить порождающий некоторой вершинной группы G_v ($v \in \mathcal{V}$) на обратный к нему, то в графе $\mathcal{L}(\Gamma)$ все метки вокруг соответствующей вершины изменят знак. Аналогично замена порождающего некоторой реберной группы обратным приводит к изменению знаков меток на концах данного ребра. Перечисленные замены порождающих определяют автоморфизмы группы $\mathfrak{G}$ и потому соответствующие им преобразования графа $\mathcal{L}(\Gamma)$ называются *допустимыми изменениями знаков* [147, с. 479]. Если зафиксировано некоторое остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ, то, применяя подходящие допустимые изменения знаков, можно сделать все метки на концах ребер дерева $\mathcal{T}$ положительными. В этом случае будем говорить, что граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ является *$\mathcal{T}$-положительным*.

Всюду далее, если Γ' — подграф графа Γ, то через $\mathcal{L}(\Gamma')$ будем обозначать граф с метками, концам ребер которого сопоставлены те же метки, что и в графе $\mathcal{L}(\Gamma)$.

Предложение 5.3.4. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является элементарной, $\mathcal{T}$ — некоторое остовное дерево в графе Γ, $\mathcal{E}_\mathcal{T}$ — множество ребер дерева $\mathcal{T}$ и*

$$K = \bigcap_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \varepsilon = \pm 1}} H_{\varepsilon e}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *$K \leqslant \bigcap_{v \in \mathcal{V}} G_v$ и потому определены числа $\mu(v) = [G_v : K]$ ($v \in \mathcal{V}$).*
2. *$K \neq 1$ и потому все числа $\mu(v)$ ($v \in \mathcal{V}$) конечны.*
3. *Наименьшее общее кратное μ чисел $\mu(v)$ ($v \in \mathcal{V}$) делит произведение*

$$\prod_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \varepsilon = \pm 1}} \lambda(\varepsilon e).$$

4. *Если граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ является $\mathcal{T}$-положительным, то $g_v^{\mu(v)} = g_w^{\mu(w)}$ для любых вершин $v, w \in \mathcal{V}$ и*

$$\lambda(+e)/\mu(e(1)) = \lambda(-e)/\mu(e(-1))$$

для любого ребра $e \in \mathcal{E}_\mathcal{T}$.

5. *Если $\operatorname{Im} \Delta \subseteq \{1, -1\}$, то подгруппа K нормальна в группе $\mathfrak{G}$ и ее централизатор в этой группе совпадает с $\Delta^{-1}(1)$.*

6. *Если $\operatorname{Im} \Delta \subseteq \{1, -1\}$ и τ — такой гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$, что $\ker \tau \cap G_v = K$ для всех $v \in \mathcal{V}$, то подгруппа $\ker \tau$ представляет собой расширение группы K при помощи некоторой свободной группы.*

7. *Если $\operatorname{Im} \Delta \subseteq \{1, -1\}$ и граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован, то подгруппа K совпадает с циклическим радикалом $C(\mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. $1, 2, 3$. Так как группа $\mathfrak{G}$ представляет собой HNN-расширение древесного произведения $\pi_1(\mathcal{L}(\mathcal{T}))$ и все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ содержатся в группе $\pi_1(\mathcal{L}(\mathcal{T}))$, то утверждения 1–3 получаются путем применения предложения 5.3.3 к дереву $\mathcal{T}$, группе $\pi_1(\mathcal{L}(\mathcal{T}))$, множеству

$$\mathcal{I} = \big\{(e, \varepsilon) \mid e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}},\, \varepsilon = \pm 1\big\} \cup \big\{(e, \varepsilon) \mid e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}},\, \varepsilon = \pm 1\big\},$$

семейству

$$\Sigma = \big\{H_{\varepsilon e} \mid e \in \mathcal{E},\, \varepsilon = \pm 1\big\}$$

и функции $\nu\colon \mathcal{I} \to \mathcal{V}$ — такой, что $\nu(e, \varepsilon) = e(\varepsilon)$. Следует лишь заметить, что поскольку группа $\mathfrak{G}$ не является элементарной, множества $\mathcal{E}$ и $\mathcal{I}$ непусты. Кроме того, из утверждения 3 предложения 5.3.3 вытекает соотношение

$$\mu \;\Big|\; \prod_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \varepsilon = \pm 1}} |\lambda(\varepsilon e)|,$$

равносильное требуемому.

4. Воспользуемся индукцией по длине пути, соединяющего вершины v и w в дереве $\mathcal{T}$. Если $v = w$, утверждение очевидно, поэтому будем считать, что указанный путь содержит ребро e, соединяющее вершину v с некоторой вершиной u (возможно, совпадающей с w). Пусть также, для определенности, $e(1) = v$ и $e(-1) = u$.

По индуктивному предположению $g_u^{\mu(u)} = g_w^{\mu(w)}$. Поскольку $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$, в группе $\mathfrak{G}$ справедливы соотношения $g_v^{\lambda(+e)} = g_u^{\lambda(-e)}$ и $H_{+e} = H_{-e}$. Отсюда следует, что для некоторого $k \geqslant 1$ имеют место равенства $[H_{+e} : K] = k = [H_{-e} : K]$. Так как граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ является $\mathcal{T}$-положительным, то

$$[G_v : H_{+e}] = \lambda(+e), \quad [G_u : H_{-e}] = \lambda(-e).$$

Значит,

$$\mu(v) = [G_v : K] = [G_v : H_{+e}][H_{+e} : K] = \lambda(+e)k,$$
$$\mu(u) = [G_u : K] = [G_u : H_{-e}][H_{-e} : K] = \lambda(-e)k$$

и

$$g_v^{\mu(v)} = g_v^{\lambda(+e)k} = g_u^{\lambda(-e)k} = g_u^{\mu(u)} = g_w^{\mu(w)}.$$

Поскольку вершины v и w были выбраны произвольно, отсюда вытекает также, что

$$\lambda(+e)/\mu(e(1)) = \lambda(-e)/\mu(e(-1))$$

для любого ребра $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$.

5. Пусть x — порождающий подгруппы K. Очевидно, что $[x, g_v] = 1$ для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$. Если $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$, то ввиду эллиптичности элемента x существует число $n \geqslant 1$ такое, что $t_e^{-1} x^n t_e = x^{\Delta(t_e)n}$. Поскольку $\operatorname{Im} \Delta \subseteq \{1, -1\}$, элементы $t_e^{-1} x t_e$, $x^{\Delta(t_e)}$ принадлежат подгруппе H_{-e} и последняя является бесконечной циклической, отсюда вытекает, что $t_e^{-1} x t_e = x^{\Delta(t_e)}$. Следовательно, подгруппа K нормальна в группе $\mathfrak{G}$.

Если $g \in \mathfrak{G}$ — произвольный элемент, то ввиду нормальности подгруппы K справедливо включение $g^{-1} x g \in K$, из которого вытекает, что $g^{-1} x g = x^{\Delta(g)}$. Таким образом, $[g, x] = 1$ тогда и только тогда, когда $\Delta(g) = 1$.

6. Так как $K \leqslant \ker\tau$, то отображение $\overline{\tau}\colon \mathfrak{G}/K \to \operatorname{Im}\tau$, переводящее смежный класс gK $(g \in \mathfrak{G})$ в элемент $g\tau$, корректно определено и является сюръективным гомоморфизмом. Из равенств $\ker\tau \cap G_v = K$ $(v \in \mathcal{V})$ следует, что $\ker\overline{\tau} \cap G_v/K = 1$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Легко видеть, что группа $\mathfrak{G}/K$ представляет собой фундаментальную группу графа групп, в котором вершине $v \in \mathcal{V}$ сопоставлена группа G_v/K, а ребру $e \in \mathcal{E}$ — группа H_e/K_e, где $K_e = K\varphi_{+e}^{-1} = K\varphi_{-e}^{-1}$, и гомоморфизмы, индуцированные гомоморфизмами φ_{+e} и φ_{-e}. Поэтому согласно предложению 1.2.4 $\ker\overline{\tau}$ — свободная группа. Из определения гомоморфизма $\overline{\tau}$ легко следует также, что прообраз подгруппы $\ker\overline{\tau}$ относительно естественного гомоморфизма $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/K$ совпадает с подгруппой $\ker\tau$. Таким образом, подгруппа $\ker\tau$ представляет собой расширение группы K при помощи свободной группы $\ker\overline{\tau}$.

7. Пусть
$$H = \bigcap_{v\in\mathcal{V}} G_v.$$
Согласно лемме 5 из [105] $C(\mathfrak{G}) \leqslant H$. Покажем, что для каждого элемента $h \in H \setminus K$ найдется элемент $g \in \mathfrak{G}$ такой, что $g^{-1}hg \notin H$. Это будет означать, что K — наибольшая подгруппа H, нормальная в группе $\mathfrak{G}$, и потому $K = C(\mathfrak{G})$.

Пусть $h \in H \setminus K$ — произвольный элемент. Как уже было отмечено при доказательстве предложения 5.3.3, для любого ребра $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ в группе $\mathfrak{G}$ выполняются равенства $H_{+e} = G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} = H_{-e}$. Если $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} \neq \varnothing$, то каждая вершина графа Γ инцидентна некоторому ребру $e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ и потому
$$H = \bigcap_{\substack{e\in\mathcal{E}_{\mathcal{T}}\\ \varepsilon=\pm1}} H_{\varepsilon e}.$$
Значит, $h \notin H_{\varepsilon e}$ для некоторых $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$, $\varepsilon = \pm1$. Очевидно, что последнее верно и в случае, когда граф Γ содержит только одну вершину и $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = \varnothing$. Но тогда в группе $\mathfrak{G}$, рассматриваемой как HNN-расширение с проходной буквой t_e, элемент $t_e^{-\varepsilon}ht_e^{\varepsilon}$ имеет приведенную запись длины 2 и, следовательно, не может принадлежать подгруппе H, содержащейся в базовой группе этого HNN-расширения. Таким образом, t_e^{ε} — искомый элемент. □

§ 5.4. Доказательства теорем 5.2.2 и 5.2.3

Предложение 5.4.1. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является элементарной, $\mathcal{T}$ — некоторое остовное дерево в графе Γ и граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ является $\mathcal{T}$-положительным. Пусть также*
$$K = \bigcap_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ \varepsilon=\pm1}} H_{\varepsilon e}$$
и μ — наименьшее общее кратное чисел $\mu(v) = [G_v : K]$ $(v \in \mathcal{V})$. Пусть, наконец, Q — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, порожденное множеством $\operatorname{Im}\Delta$, Q^{+} — аддитивная группа кольца Q, A — свободная абелева группа с базисом $\{a_q \mid q \in \operatorname{Im}\Delta\}$ и X — расщепля-

емое расширение группы Q^{+} при помощи группы A такое, что автоморфизм $\widehat{a}_q|_{Q^+}$ представляет собой умножение на q. Тогда отображение образующих группы $\mathfrak{G}$ в группу X, определенное следующим образом:

$$g_v \mapsto \mu/\mu(v) \quad (v \in \mathcal{V}), \quad t_e \mapsto a_{\Delta(t_e)} \quad (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}),$$

задает гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в группу X.

Доказательство. Продолжим указанное отображение образующих до отображения слов σ и покажем, что последнее переводит все определяющие соотношения группы $\mathfrak{G}$ в равенства, верные в группе X.

Если e — произвольное ребро дерева $\mathcal{T}$, то согласно предложению 5.3.4

$$\lambda(+e)/\mu(e(1)) = \lambda(-e)/\mu(e(-1))$$

и

$$g_{e(1)}^{\lambda(+e)}\sigma = \lambda(+e)\mu/\mu(e(1)) = \lambda(-e)\mu/\mu(e(-1)) = g_{e(-1)}^{\lambda(-e)}\sigma.$$

Пусть ребро $e \in \mathcal{E}$ не принадлежит дереву $\mathcal{T}$. По предложению 5.3.4 в группе $\mathfrak{G}$ справедливо равенство $g_{e(1)}^{\mu(e(1))} = g_{e(-1)}^{\mu(e(-1))}$; обозначим для краткости этот элемент через g. Так как g — эллиптический элемент и

$$t_e^{-1} g^{\lambda(+e)\mu/\mu(e(1))} t_e = t_e^{-1} g_{e(1)}^{\lambda(+e)\mu} t_e = g_{e(-1)}^{\lambda(-e)\mu} = g^{\lambda(-e)\mu/\mu(e(-1))},$$

то

$$\Delta(t_e) = \big(\lambda(-e)\mu/\mu(e(-1))\big) \;/\; \big(\lambda(+e)\mu/\mu(e(1))\big).$$

Отсюда

$$\big(t_e^{-1} g_{e(1)}^{\lambda(+e)} t_e\big)\sigma = \big(\lambda(+e)\mu/\mu(e(1))\big) \cdot \Delta(t_e) = \lambda(-e)\mu/\mu(e(-1)) = \big(g_{e(-1)}^{\lambda(-e)}\big)\sigma. \qquad \square$$

Предложение 5.4.2. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является элементарной, $\mathcal{T}$ — некоторое остовное дерево в графе Γ и граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ является $\mathcal{T}$-положительным. Пусть также* $\operatorname{Im}\Delta \subseteq \{1, -1\}$,

$$K = \bigcap_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \varepsilon = \pm 1}} H_{\varepsilon e}$$

и μ — наименьшее общее кратное чисел $\mu(v) = [G_v : K]$ $(v \in \mathcal{V})$. Тогда найдется свободная группа F такая, что $\mathfrak{G}$ является $(F \times \mathbb{Z})$-by-$\mathbb{Z}_\mu$-группой (т. е. расширением прямого произведения группы F и бесконечной циклической группы при помощи циклической группы порядка μ), если $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, *и $((F \times \mathbb{Z})$-by-$\mathbb{Z}_\mu)$-by-$\mathbb{Z}_2$-группой, если* $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$.

Доказательство. Пусть Q, X и $\sigma\colon \mathfrak{G} \to X$ — подкольцо, группа и гомоморфизм из предложения 5.4.1, $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ — множество ребер дерева $\mathcal{T}$. Так как $\operatorname{Im}\Delta \subseteq \{1, -1\}$, то $Q = \mathbb{Z}$. Поэтому группа X имеет представление

$$\big\langle x, a_1;\ [x, a_1] = 1 \big\rangle,$$

если $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, и

$$\big\langle x, a_1, a_{-1};\ [x, a_1] = [a_1, a_{-1}] = 1,\ a_{-1}^{-1} x a_{-1} = x^{-1} \big\rangle,$$

если $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$ (здесь x обозначает порождающий аддитивной группы Q^+ кольца Q, равный 1).

Пусть Y — группа с представлением $\langle x;\ x^\mu = 1\rangle$, если $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, и

$$\big\langle x, a_{-1};\ x^\mu = 1,\ a_{-1}^2 = 1,\ a_{-1}^{-1} x a_{-1} = x^{-1}\big\rangle,$$

если $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$. Очевидно, что отображение σ может быть продолжено до гомоморфизма τ группы $\mathfrak{G}$ в группу Y. Так как μ — наименьшее общее кратное чисел $\mu(v)$ ($v \in \mathcal{V}$), то наибольший общий делитель чисел $\mu/\mu(v)$ ($v \in \mathcal{V}$) равен 1 и, стало быть, $x \in \operatorname{Im}\tau$. Если для каждого ребра $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T}$ справедливо равенство $\Delta(t_e) = 1$, то $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$. Следовательно, если $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$, то найдется ребро $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T}$ такое, что $\Delta(t_e) = -1$ и потому $t_e\tau = a_{-1}$. Значит, $\operatorname{Im}\tau = Y$.

Так как $G_v\tau = \big\langle x^{\mu/\mu(v)}\big\rangle$, то $\ker\tau \cap G_v = G_v^{\mu(v)} = K$ для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ и согласно предложению 5.3.4 подгруппа $\ker\tau$ представляет собой расширение группы K при помощи некоторой свободной группы. Хорошо известно, что такое расширение расщепляемо, т. е. $\ker\tau = KF$, где F — некоторая свободная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $K \cap F = 1$. Остается показать, что $[K, F] = 1$ и потому $\ker\tau = K \times F$.

Если $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, то по предложению 5.3.4 подгруппа K центральна в группе $\mathfrak{G}$. Пусть $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$ и $g \in \ker\tau$ — произвольный элемент. Так как гомоморфизм τ переводит образующие

$$t_e\ \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T},\ \Delta(t_e) = -1) \tag{1}$$

в a_{-1}, а образующие

$$g_v\ \ (v \in \mathcal{V}), \quad t_e\ \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T},\ \Delta(t_e) = 1)\ \ — \tag{2}$$

в элементы подгруппы $\langle x\rangle$, то количество вхождений образующих первого типа и обратных к ним в запись элемента g должно быть четно. Поскольку сопряжение подгруппы K элементом вида (1) представляет собой автоморфизм этой подгруппы порядка 2, а все элементы вида (2) содержатся в централизаторе данной подгруппы, получаем, что g также принадлежит централизатору K. Следовательно, подгруппа K центральна в $\ker\tau$ и $[K, F] = 1$. $\square$

Доказательство теоремы 5.2.2. 1, 2. *Необходимость.* Зафиксируем произвольное ребро $e \in \mathcal{E}$ и покажем, что $\lambda(+e)$ и $\lambda(-e)$ — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числа.

Если ребро e не является петлей, то $|\lambda(+e)| \neq 1 \neq |\lambda(-e)|$ в силу редуцированности графа $\mathcal{L}(\Gamma)$, задающего группу $\mathfrak{G}$. Если e — петля, то $|\lambda(+e)| = |\lambda(-e)|$ ввиду условия $\operatorname{Im}\Delta \subseteq \{1, -1\}$ и, так как единица — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-число, то снова можно считать, что $|\lambda(+e)| \neq 1 \neq |\lambda(-e)|$. Согласно предложению 1.2.2 группа $\mathfrak{G}$ содержит подгруппу P, изоморфную свободному произведению групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Так как

$$[G_{e(1)} : H_{+e}] = |\lambda(+e)| \neq 1 \neq |\lambda(-e)| = [G_{e(-1)} : H_{-e}],$$

то, применяя теорему 2.7.1 к группе P, получаем, что подгруппа H_{+e} $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(1)}$ и подгруппа H_{-e} $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(-1)}$. Отсюда и из предложения 1.3.7 следует, что указанные подгруппы $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группах $G_{e(1)}$

и $G_{e(-1)}$ соответственно. Значит, метки $\lambda(+e)$ и $\lambda(-e)$ являются $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числами, как и требовалось.

Предположим теперь, что $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$, и обозначим через $\mathcal{D}$ класс всех периодических $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-групп конечного периода. Согласно предложению 5.3.1 группа $\mathfrak{G}$ содержит подгруппу H, изоморфную $\mathrm{BS}(1, -1)$. Ввиду предложения 1.4.6 справедливо включение $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ и потому подгруппа H $\mathcal{D}$-аппроксимируема. Поскольку класс $\mathcal{D}$ является корневым и замкнут относительно взятия фактор-групп, отсюда и из теоремы 5.2.1 следует, что $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{D})$. Остается заметить, что $\mathfrak{P}(\mathcal{D}) = \mathfrak{P}(\mathcal{C})$.

Достаточность. Выберем некоторое остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ и приведем граф с метками $\mathcal{L}(\Gamma)$, задающий группу $\mathfrak{G}$, к $\mathcal{T}$-положительной форме. Понятно, что в результате все метки по-прежнему будут являться $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числами. Пусть

$$K = \bigcap_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \varepsilon = \pm 1}} H_{\varepsilon e}$$

и μ — наименьшее общее кратное чисел $\mu(v) = [G_v : K]$ $(v \in \mathcal{V})$. В силу предложения 5.3.4 μ — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-число и по предложению 1.4.5 циклическая группа порядка μ принадлежит классу $\mathcal{C}$. Если $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, то согласно тому же предложению класс $\mathcal{C}$ содержит группу порядка 2. По предложению 5.4.2 для некоторой свободной группы F группа $\mathfrak{G}$ является $(F \times \mathbb{Z})$-by-$\mathbb{Z}_\mu$-группой, если $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, и $((F \times \mathbb{Z})$-by-$\mathbb{Z}_\mu)$-by-$\mathbb{Z}_2$-группой, если $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$. Значит, она аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ в силу предложений 1.4.8 и 1.4.9.

3. Согласно предложению 1.4.5 класс $\mathcal{C}$ содержит класс $\mathcal{FS}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$ конечных разрешимых $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-групп. Легко видеть, что последний является корневым и замкнут относительно взятия фактор-групп. Так как $\operatorname{Im}\Delta \nsubseteq \{1, -1\}$, то согласно предложениям 5.3.1 и 5.3.2 в группе $\mathfrak{G}$ имеется подгруппа H, изоморфная группе $\mathrm{BS}(m, n)$, где $1 < m < |n|$. В силу теоремы 5.2.1 указанная подгруппа не аппроксимируется классом $\mathcal{FS}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$, а, значит, и классом $\mathcal{C}$. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ также не является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой. $\square$

Доказательство теоремы 5.2.3. 1. Так как класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу и замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, то ему принадлежат бесконечная циклическая группа и оба ее расширения при помощи бесконечной циклической группы. Поэтому каждая элементарная GBS-группа является $\mathcal{C}$-группой без кручения.

2. Выберем некоторое остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ и приведем граф с метками $\mathcal{L}(\Gamma)$, задающий группу $\mathfrak{G}$, к $\mathcal{T}$-положительной форме. Так как фундаментальные группы исходного и модифицированного графов с метками изоморфны, то подкольцо Q остается при указанном преобразовании неизменным и, следовательно, $Q^+ \in \mathcal{C}$.

Пусть A, X и $\sigma\colon \mathfrak{G} \to X$ — группы и гомоморфизм из формулировки предложения 5.4.1. Согласно своему определению σ действует инъективно на всех вершинных группах. Поэтому в силу предложения 1.2.4 $\ker\sigma$ — свободная группа.

Согласно предложению 1.4.7 справедливо включение $A \in \mathcal{C}$. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений вытекает, что $\operatorname{Im}\sigma \in \mathcal{C}$. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема в силу предложения 1.4.8. Остается заметить, что группа Q^+ является гомоморфным образом свободной абелевой группы счетного ранга, принадлежащей классу $\mathcal{C}$ ввиду предложения 1.4.7. Поэтому, если данный класс замкнут относительно взятия фактор-групп, то $Q^+ \in \mathcal{C}$. Если же $\operatorname{Im}\Delta \subseteq \{1, -1\}$, то Q^+ — бесконечная циклическая группа, принадлежащая классу $\mathcal{C}$ ввиду отмеченного выше. $\square$

Глава 6. Отделимость подгрупп

§ 6.1. Классы $\mathcal{C}$-ограниченных абелевых, нильпотентных и разрешимых групп

Всюду в этой главе будем предполагать, что $\mathcal{C}$ — некоторый корневой класс групп, состоящий только из периодических групп.

В [43] А. И. Мальцев изучал вопрос о том, какие условия нужно наложить на разрешимую группу для того, чтобы в ней все подгруппы были финитно отделимыми. Результатом этих исследований стало понятие ограниченной разрешимой группы, определение которого приводится ниже. Если вместо финитной рассматривается отделимость указанным выше классом $\mathcal{C}$, то в соответствии с предложением 1.3.7 на роль $\mathcal{C}$-отделимых могут претендовать уже не какие угодно, а только $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированные подгруппы. Поэтому естественным обобщением свойства финитной отделимости всех подгрупп оказывается свойство $\mathcal{C}$-отделимости всех $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп.

Известно, что если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит не все простые числа, то разрешимая группа может не обладать последним свойством даже в относительно простых случаях. Так, например, в [83] установлено, что каждая свободная разрешимая группа ступени 2 содержит изолированную конечно порожденную подгруппу, не отделимую классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп для любого простого числа p. Из теоремы 5.2.1 и предложения 6.4.1 следует, что не имеющая кручения сверхразрешимая группа

$$\mathrm{BS}(1,-1) = \langle a, b;\ a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$$

аппроксимируется рассматриваемым классом $\mathcal{C}$, только если $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, в то время как ее единичная подгруппа всегда является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной. Дополнением этого факта служит утверждение о том, что если сверхразрешимая группа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого нечетного простого числа p, то она нильпотентна [14]. Отметим также, что для произвольной полициклической группы критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости неизвестен.

В то же время оказывается, что для абелевых и нильпотентных групп предложенные А. И. Мальцевым условия и понятия допускают вполне естественные аналоги, позволяющие доказать равносильность $\mathcal{C}$-отделимости и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированности для всех подгрупп. Указанные условия и определяемые ими классы абелевых, нильпотентных и разрешимых групп вводятся далее в этом параграфе, а отделимость подгрупп в группах из перечисленных классов изучается в §§ 6.2 и 6.3.

Если A — некоторая абелева группа, то все примарные компоненты ее периодической части, соответствующие числам из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$, будем для краткости называть *примарными* $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$*-компонентами.* Рассмотрим следующий набор условий:

(1) группа A имеет конечный ранг;

$(2)_{\mathcal{C}}$ произвольная фактор-группа группы A не содержит p-квазициклических подгрупп для любого числа $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$;

$(3)_{\mathcal{C}}$ в произвольной фактор-группе B группы A все примарные $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компоненты периодической части $\tau(B)$ имеют конечный период;

$(4)_{\mathcal{C}}$ каждая примарная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компонента периодической части группы A имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой группы из класса $\mathcal{C}$;

$(5)_{\mathcal{C}}$ в произвольной фактор-группе B группы A каждая примарная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компонента периодической части $\tau(B)$ имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой $\mathcal{C}$-группы;

$(6)_{\mathcal{C}}$ в произвольной фактор-группе B группы A все примарные $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компоненты периодической части $\tau(B)$ конечны.

Предложение 6.1.1. *Для любой абелевой группы A справедливы следующие утверждения.*

1. $(2)_{\mathcal{C}} \Rightarrow (1)$.
2. $(2)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (3)_{\mathcal{C}}$.
3. $(3)_{\mathcal{C}} \wedge (4)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (5)_{\mathcal{C}}$.
4. $(6)_{\mathcal{C}} \Rightarrow (5)_{\mathcal{C}}$. *Если $\mathcal{FC}$ — класс всех конечных $\mathcal{C}$-групп, то* $(6)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (5)_{\mathcal{FC}}$.

Доказательство. 1. Предположим, что ранг группы A бесконечен. Тогда она содержит в качестве подгруппы свободную абелеву группу бесконечного ранга, среди гомоморфных образов которой есть и p-квазициклические группы для каждого простого числа p. Группа A является абелевой, поэтому любой гомоморфизм ее подгруппы может быть продолжен до гомоморфизма всей группы. Так как класс $\mathcal{C}$ содержит неединичные группы, то множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ непусто. Это означает, что для группы A не выполняется условие $(2)_{\mathcal{C}}$.

2. Достаточность утверждения очевидна, проверим необходимость.

Предположим, что в некоторой фактор-группе B группы A существуют элементы b_1, b_2, b_3, $\ldots$, имеющие порядки p, p^2, p^3, $\ldots$ соответственно для какого-то $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Группа $N = \mathrm{sgp}\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ счетна и согласно второй теореме Прюфера либо раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп, порядки которых не ограничены в совокупности, либо содержит неединичный элемент b бесконечной высоты. В первом случае ее можно гомоморфно отобразить на p-квазициклическую группу, и, следовательно, существует фактор-группа группы A, содержащая такую подгруппу. Предположим, что реализуется вторая возможность и покажем, что в этом случае также найдется гомоморфизм группы A на p-квазициклическую группу.

Хорошо известно (см., например, [33, § 9]), что группа B может быть вложена в некоторую полную абелеву группу F и что последняя представима в виде прямого произведения квазициклических групп и групп, изоморфных аддитивной группе поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Так как N — периодическая p-группа, то среди прямых сомножителей разложения группы F обязательно есть p-квазициклические группы и существует гомоморфизм σ группы F на один из этих сомножителей, при котором b переходит в неединичный элемент. Поскольку высота элемента b бесконечна, ограничение гомоморфизма σ на группу B не может иметь конечный образ и, следовательно, композиция естественного гомоморфизма $A \to B$ и указанного ограничения является искомым отображением.

Таким образом, группа A не удовлетворяет условию $(2)_{\mathcal{C}}$.

3. Как и выше, следует проверить лишь необходимость.

Пусть M — произвольная подгруппа группы A. Из утверждений 1 и 2 следует, что подгруппа M имеет конечный ранг. Обозначим через N подгруппу, порожденную некоторой максимальной линейно независимой системой элементов группы M. Поскольку все элементы фактор-группы M/N имеют конечные порядки, периодическая часть $\tau(A/M)$ фактор-группы A/M является гомоморфным образом периодической части $\tau(A/N)$ фактор-группы A/N. Так как группа $\tau(A/M)$ раскладывается в прямое произведение своих примарных компонент, то каждая из них в свою очередь оказывается гомоморфным образом группы $\tau(A/N)$, а, следовательно, и соответствующей примарной компоненты этой группы. Стало быть, нам достаточно показать, что все примарные $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компоненты группы $\tau(A/N)$ имеют мощности, не превосходящие мощностей некоторых $\mathcal{C}$-групп.

Итак, пусть $T/N = \tau_p(A/N)$ — некоторая примарная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компонента периодической части фактор-группы A/N. Обозначим через q период этой группы, конечный согласно условию $(3)_{\mathcal{C}}$, и через σ — эндоморфизм группы T, осуществляющий возведение каждого ее элемента в степень q. Тогда образ группы T относительно эндоморфизма σ лежит в N, а ядро S этого эндоморфизма содержится в соответствующей примарной компоненте $\tau_p(A)$ периодической части группы A. Мощность подгруппы $\tau_p(A)$ ввиду условия $(4)_{\mathcal{C}}$ не превосходит мощности $\mathfrak{c}$ некоторой $\mathcal{C}$-группы, а подгруппа N конечно порождена и, стало быть, не более чем счетна. Следовательно, если группа S бесконечна, то мощности групп T и T/N не превосходят $\mathfrak{c}$. В противном случае группа T представляет собой расширение конечной группы при помощи конечно порожденной. Поэтому она конечно порождена, фактор-группа T/N конечна и согласно предложению 1.4.5 имеет порядок, не превосходящий порядка некоторой $\mathcal{C}$-группы.

4. Класс $\mathcal{FC}$ является корневым как пересечение класса $\mathcal{C}$ с корневым классом всех конечных групп. Очевидно также, что $\mathfrak{P}(\mathcal{C}) = \mathfrak{P}(\mathcal{FC})$. Поэтому доказываемое утверждение следует из предложения 1.4.5, согласно которому классы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{FC}$ содержат конечные группы сколь угодно больших порядков. □

Абелеву группу будем называть

– *слабо* $\mathcal{C}$*-ограниченной*, если она удовлетворяет условию $(3)_{\mathcal{C}}$;

– $\mathcal{C}$*-ограниченной*, если для нее выполняется условие $(5)_{\mathcal{C}}$;

– *сильно* $\mathcal{C}$*-ограниченной*, если справедливо условие $(6)_{\mathcal{C}}$.

Нильпотентную (разрешимую) группу назовем (*слабо*, *сильно*) $\mathcal{C}$*-ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным центральным (соответственно субнормальным) рядом со (слабо, сильно) $\mathcal{C}$-ограниченными абелевыми факторами. Отметим, что любая конечно порожденная абелева группа сильно $\mathcal{C}$-ограничена и потому полициклические и конечно порожденные нильпотентные группы всегда являются соответственно сильно $\mathcal{C}$-ограниченными разрешимыми и сильно $\mathcal{C}$-ограниченными нильпотентными.

Классы $\mathcal{C}$-ограниченных, слабо $\mathcal{C}$-ограниченных и сильно $\mathcal{C}$-ограниченных абелевых групп будем обозначать через $\mathcal{C}$-$\mathcal{BA}$, $\mathcal{C}$-$w\mathcal{BA}$ и $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$ соответственно. Для классов $\mathcal{C}$-ограниченных нильпотентных и $\mathcal{C}$-ограниченных разрешимых групп будем использовать аналогичные обозначения:

$$\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BN},\ \mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BN},\ \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BN};\quad \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS},\ \mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BS},\ \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}.$$

Отметим, что согласно предложению 6.1.1 справедливы равенства

$$\mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BA} = \mathcal{FC}\text{-}\mathcal{BA},\quad \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BN} = \mathcal{FC}\text{-}\mathcal{BN},\quad \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS} = \mathcal{FC}\text{-}\mathcal{BS}, \tag{$*$}$$

где $\mathcal{FC}$ — класс всех конечных $\mathcal{C}$-групп.

Предложение 6.1.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Все определенные выше классы групп замкнуты относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей.*

2. *Пусть X — абелева группа. Если $X \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS}$ ($X \in \mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BS}$, $X \in \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$), то $X \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$ (соответственно $X \in \mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BA}$, $X \in \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BA}$).*

Доказательство. Из равенств ($*$) следует, что оба утверждения достаточно проверить только для классов $\mathcal{C}$-ограниченных и слабо $\mathcal{C}$-ограниченных групп.

1. Если A — некоторая абелева группа и B — произвольная ее подгруппа, то каждый гомоморфный образ фактор-группы A/B является одновременно и гомоморфным образом группы A, а всякий гомоморфный образ группы B вкладывается в некоторый гомоморфный образ группы A. Следовательно, если группа A принадлежит классу $\mathcal{C}$-$\mathcal{BA}$ или $\mathcal{C}$-$w\mathcal{BA}$, то в этом же классе содержатся группы B и A/B.

Пусть U и V — некоторые $\mathcal{C}$-$w\mathcal{BA}$-группы и P — их прямое произведение. Если Q — произвольная подгруппа группы P и W — проекция подгруппы Q на группу V, то фактор-группа P/Q представляет собой расширение группы $UQ/Q \cong U/U \cap Q$ при помощи группы

$$(P/Q)/(UQ/Q) \cong P/UQ = UV/UW \cong V/W(V \cap U) = V/W.$$

Ввиду включений $U, V \in \mathcal{C}$-$w\mathcal{BA}$ все примарные $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компоненты периодических частей фактор-групп $U/U \cap Q$ и V/W имеют конечный период. Поэтому тем же свойством обладают примарные $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компоненты периодической части группы P/Q и, стало быть, $P \in \mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BA}$. Каждая примарная компонента периодической части группы P является прямым произведением соответствующих примарных компонент периодических частей групп U и V. Следовательно, если $U, V \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$, то группа P удовлетворяет условию $(4)_{\mathcal{C}}$ ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия прямых произведений и принадлежит классу $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$ в силу предложения 6.1.1.

Таким образом, для классов $\mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BA}$ и $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$ утверждение 1 справедливо. Пусть теперь X и Y — произвольные нильпотентные (разрешимые) группы,

$$1 = X_0 \leqslant X_1 \leqslant \ldots \leqslant X_m = X, \quad 1 = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \ldots \leqslant Y_n = Y \text{ —}$$

некоторые их центральные (субнормальные) ряды и Z — подгруппа группы X. Без потери общности можно считать, что $m = n$. Тогда подгруппы $X_i \times Y_i$, $X_i \cap Z$ и, если Z нормальна в X, то X_iZ/Z $(0 \leqslant i \leqslant n)$ составляют центральные (субнормальные) ряды групп $X \times Y$, Z и X/Z, причем факторы этих рядов изоморфны соответственно прямым произведениям, подгруппам и гомоморфным образам групп X_{i+1}/X_i, Y_{i+1}/Y_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Поэтому из установленных выше свойств классов $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$ и $\mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BA}$ вытекает, что утверждение 1 имеет место и для классов $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BN}$, $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS}$, $\mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BN}$, $\mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BS}$.

2. Пусть Y — произвольная фактор-группа группы X. Согласно утверждению 1 каждая примарная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компонента T периодической части группы Y является $\mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BS}$-группой и, следовательно, обладает субнормальным рядом с $\mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BA}$-факторами. Любой фактор F этого ряда, будучи p-группой для некоторого $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, имеет конечный период. Поэтому период группы T также конечен и $X \in \mathcal{C}\text{-}w\mathcal{BA}$. Если $X \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS}$, то $T \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS}$, $F \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$ и мощность фактора F не превосходит мощности некоторой $\mathcal{C}$-группы. Ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений тем же свойством обладает и группа T. Следовательно, $X \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$. $\square$

Из предложения 6.1.2 вытекает, в частности, что факторы произвольного субнормального разрешимого ряда $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS}$-группы являются $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$-группами. Поэтому нильпотентная группа $\mathcal{C}$-ограничена тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS}$. Аналогичные утверждения справедливы для слабо и сильно $\mathcal{C}$-ограниченных нильпотентных групп.

Напомним, что согласно работе [43]:

1) абелева группа A называется *ограниченной*, если сама она удовлетворяет условию $(4)_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, а ее фактор-группа по периодической части $\tau(A)$ — условиям (1) и $(2)_{\mathcal{F}}$;

2) разрешимая группа называется *ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным субнормальным рядом с абелевыми ограниченными факторами.

Предложение 6.1.3. *Абелева группа A тогда и только тогда удовлетворяет условию $(5)_{\mathcal{C}}$, когда для нее справедливо условие $(4)_{\mathcal{C}}$, а для ее фактор-группы по периодической части $\tau(A)$ — условие $(2)_{\mathcal{C}}$. В частности, если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содер-*

жит все простые числа, то классы ограниченных абелевых и ограниченных разрешимых групп совпадают соответственно с классами $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA} = \mathcal{FC}$-$\mathcal{BA}$ и $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS} = \mathcal{FC}$-$\mathcal{BS}$, где $\mathcal{FC}$ — класс всех конечных $\mathcal{C}$-групп.

Доказательство. Достаточность. Пусть B — произвольная подгруппа группы A. Тогда фактор-группа A/B представляет собой расширение группы

$$\tau(A)B/B \cong \tau(A)/\bigl(\tau(A) \cap B\bigr)$$

при помощи группы

$$A/\tau(A)B \cong \bigl(A/\tau(A)\bigr)/\bigl(\tau(A)B/\tau(A)\bigr).$$

Так как группа A удовлетворяет условию $(4)_{\mathcal{C}}$, а фактор-группа $A/\tau(A)$ — условию $(3)_{\mathcal{C}}$ (равносильному условию $(2)_{\mathcal{C}}$ согласно предложению 6.1.1), то в группах $\tau(A)B/B$ и $A/\tau(A)B$ все примарные $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компоненты периодической части имеют конечный период. Следовательно, примарные $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компоненты периодической части группы A/B также имеют конечный период и потому $A \in \mathcal{C}$-$w\mathcal{BA}$. Из предложения 6.1.1 теперь вытекает, что $A \in \mathcal{C}$-$\mathcal{BA}$.

Необходимость ввиду того же предложения почти очевидна. Если группа A удовлетворяет условию $(5)_{\mathcal{C}}$, то для нее выполняются также условия $(3)_{\mathcal{C}}$ и $(4)_{\mathcal{C}}$. Понятно, что и любая фактор-группа группы A удовлетворяет условию $(3)_{\mathcal{C}}$, а, значит, и условию $(2)_{\mathcal{C}}$.

Пусть теперь множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа. Поскольку условие (1) согласно предложению 6.1.1 является следствием условия $(2)_{\mathcal{F}}$, из доказанного выше вытекает, что ограниченность группы A в смысле [43] равносильна условию $(5)_{\mathcal{F}}$. Остается заметить, что $(5)_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow (6)_{\mathcal{F}}$ ввиду предложения 6.1.1 и $(6)_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow (6)_{\mathcal{C}}$, поскольку множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа. Таким образом, совпадение классов, указанных в формулировке предложения, имеет место. $\square$

§ 6.2. Отделимость подгрупп $\mathcal{C}$-ограниченных разрешимых групп

Будем говорить, что группа *обладает свойством* $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$, если все ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированные подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы. Исчерпывающий ответ на вопрос о том, при каких условиях свойство $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$ имеет место для абелевой группы, дает

Теорема 6.2.1. *Для любой абелевой группы X справедливы следующие утверждения.*

1. *Если группа X обладает свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$, то она слабо $\mathcal{C}$-ограничена.*

2. *Если группа X является слабо $\mathcal{C}$-ограниченной, то она обладает свойствами $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$ и $\mathcal{P}$-$\mathfrak{Sep}$, где класс $\mathcal{P}$ представляет собой объединение классов конечных p-групп по всем $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$.*

Доказательство. 1. Предположим, что $X \notin \mathcal{C}$-$w\mathcal{BA}$. Тогда согласно предложению 6.1.1 группа X не удовлетворяет условию $(2)_{\mathcal{C}}$ и, следовательно, существует подгруппа Y этой группы такая, что фактор-группа X/Y содержит p-квазициклическую подгруппу для некоторого $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$.

Пусть $T/Y = \tau_{p'}(X/Y)$ — произведение всех примарных компонент периодической части группы X/Y кроме той, которая соответствует числу p. Тогда фактор-группа $X/T \cong (X/Y)/(T/Y)$ также содержит p-квазициклическую подгруппу и потому не аппроксимируется классом $\mathcal{D}$ всех периодических $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-групп конечного периода. Поскольку этот класс замкнут относительно взятия фактор-групп, подгруппа T не является $\mathcal{D}$-отделимой в группе X в силу предложения 1.3.2. Так как $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ по предложению 1.4.6, то подгруппа T не может быть и $\mathcal{C}$-отделимой в X. Вместе с тем, периодическая часть группы X/T является p-группой, поэтому подгруппа T $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в X.

2. Пусть Y — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная подгруппа группы X. Покажем, что фактор-группа $A = X/Y$ $\mathcal{P}$-аппроксимируема и, следовательно, согласно предложению 1.3.2 подгруппа Y $\mathcal{P}$-отделима в X.

Пусть a — произвольный неединичный элемент группы A. Предположим сначала, что он принадлежит некоторой примарной компоненте T периодической части группы A, соответствующей простому числу p.

Так как подгруппа Y $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе X, то $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Обозначая через q период группы T, конечный ввиду условия $(3)_{\mathcal{C}}$, мы видим, что $A^q \cap T = 1$ и потому элемент $b = aA^q$ фактор-группы $B = A/A^q$ отличен от 1. Остается лишь заметить, что в соответствии с первой теоремой Прюфера периодическая p-группа B раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп и, следовательно, аппроксимируется конечными p-группами.

Случай, когда элемент a имеет конечный порядок, не являющийся степенью простого числа, сводится к рассмотренному выше. Необходимо только выбрать некоторый простой делитель p порядка элемента a и перейти к фактор-группе $A/\tau_{p'}(A)$, где, как и ранее, $\tau_{p'}(A)$ обозначает произведение всех примарных компонент периодической части группы A, кроме той, которая соответствует числу p.

Предположим теперь, что порядок элемента a бесконечен. Согласно предложению 6.1.2 фактор-группа $A/\langle a \rangle$ также удовлетворяет условию $(3)_{\mathcal{C}}$. Следовательно, каждая примарная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компонента ее периодической части имеет конечный период. Это означает, что для любого простого числа $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$ можно найти такое s, что $a \notin A^{p^s}$. Доказательство теперь завершается так же, как и в первом случае, необходимо лишь заметить, что множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ непусто (поскольку $\mathcal{C}$ — корневой класс) и выбрать произвольное принадлежащее этому множеству число p.

Итак, любая $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная подгруппа группы X $\mathcal{P}$-отделима. Поскольку $\mathfrak{P}(\mathcal{P}) = \mathfrak{P}(\mathcal{C})$ и $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$ в силу предложения 1.4.5, отсюда следует, что группа X обладает свойствами $\mathcal{P}$-$\mathfrak{Sep}$ и $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$. $\square$

Отметим, что конечности ранга абелевой группы в сочетании с конечностью периодов примарных $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-компонент ее периодической части недостаточно для того, чтобы эта группа обладала свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$. В качестве примера можно привести аддитивную группу поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, которая, очевидно, не удовлетворяет условию $(3)_{\mathcal{C}}$, если $\mathfrak{P}(\mathcal{C}) \neq \varnothing$.

Следующее предложение показывает, что слабо $\mathcal{C}$-ограниченные нильпотентные и $\mathcal{C}$-ограниченные разрешимые группы, в отличие от групп из класса $\mathcal{C}$-$w\mathcal{BA}$, не обязаны обладать свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$.

Предложение 6.2.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если мощности всех $\mathcal{C}$-групп меньше мощности некоторого множества $\mathfrak{M}$ (и потому существуют слабо $\mathcal{C}$-ограниченные абелевы группы, не являющиеся $\mathcal{C}$-ограниченными), то найдется слабо $\mathcal{C}$-ограниченная нильпотентная группа без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, не аппроксимируемая классом $\mathcal{C}$ и, следовательно, не обладающая свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$.*

2. *Если класс $\mathcal{C}$ содержит бесконечные группы, то существует $\mathcal{C}$-ограниченная разрешимая группа без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, не аппроксимируемая классом $\mathcal{C}$ и потому не обладающая свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$.*

Доказательство. 1. Так как класс $\mathcal{C}$ содержит неединичные группы, то множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ непусто. Пусть p — некоторое число из этого множества, Y — прямое произведение двух циклических групп порядка p с порождающими y, z и χ — автоморфизм группы Y, действующий по правилу $y\chi = yz$, $z\chi = z$. Легко видеть, что порядок автоморфизма χ равен p и, следовательно, определено расщепляемое расширение X группы Y при помощи циклической группы порядка p с порождающим x, в котором сопряжение при помощи x действует на Y как автоморфизм χ.

Пусть теперь $\mathcal{I}$ — некоторое непустое множество и для каждого $i \in \mathcal{I}$

$$X_i = \big\langle x_i, y_i, z_i;\ x_i^p = y_i^p = z_i^p = [x_i, z_i] = [y_i, z_i] = 1,\ [y_i, x_i] = z_i \big\rangle \text{ —}$$

изоморфная копия группы X. Рассмотрим граф-звезду Γ с центральной вершиной w и множеством листьев $\mathcal{I}$. Сопоставляя вершине w группу $Z = \langle z;\ z^p = 1\rangle$, вершине $i \in \mathcal{I}$ — группу X_i, а соединяющему их ребру — группу Z и вложения, определяемые отображениями образующих $z \mapsto z$, $z \mapsto z_i$, получим граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$. Так как граф Γ является деревом, элемент z лежит в центре группы Z, а элемент z_i $(i \in \mathcal{I})$ — в центре группы X_i, то в силу теоремы 3.2.1 определено обобщенное прямое произведение, ассоциированное с графом групп $\mathcal{G}(\Gamma)$.

Легко видеть, что представление группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ можно привести к виду

$$\begin{aligned}\big\langle x_i, y_i, z\ (i \in \mathcal{I});\ x_i^p = y_i^p = z^p = 1,\ [x_i, z] = [y_i, z] = 1,\ [y_i, x_i] = z\ (i \in \mathcal{I}),&\\ [x_k, x_l] = [y_k, y_l] = [x_k, y_l] = 1\ (k, l \in \mathcal{I},\ k \neq l)\big\rangle,&\end{aligned}$$

из которого следует, что последовательность $1 \leqslant \langle z\rangle \leqslant \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ является центральным рядом группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ с факторами периода p. Понятно, что группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ не имеет $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения и факторы указанного ряда слабо $\mathcal{C}$-ограничены, т. е. $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)) \in \mathcal{C}$-$w\mathcal{BN}$. Покажем, тем не менее, что если $\mathcal{I} = \mathfrak{M}$, то группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ не аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ и потому является искомой.

В самом деле, пусть σ — гомоморфизм группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ на некоторую $\mathcal{C}$-группу T. Тогда мощность множества $\mathcal{I}$ превосходит мощность группы T и потому найдутся такие $k, l \in \mathcal{I}$, что $k \neq l$ и $x_k\sigma = x_l\sigma$. Отсюда

$$z\sigma = [y_k\sigma,\, x_k\sigma] = [y_k\sigma,\, x_l\sigma] = 1$$

и ввиду произвольности выбора гомоморфизма σ группа $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ не является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.

2. Продолжим начатые выше построения и, предполагая, что $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$, рассмотрим автоморфизм τ группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$, определяемый отображениями образующих

$$z \mapsto z, \quad x_i \mapsto x_{i+1}, \quad y_i \mapsto y_{i+1} \quad (i \in \mathcal{I}),$$

и расщепляемое расширение Q группы $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ при помощи бесконечной циклической группы с порождающим t, сопряжение которым действует на $\mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma))$ как автоморфизм τ. Так как класс $\mathcal{C}$ содержит бесконечные группы, то последовательность

$$1 \leqslant \langle z \rangle \leqslant \mathrm{GDP}(\mathcal{G}(\Gamma)) \leqslant Q$$

является нормальным рядом группы Q с $\mathcal{C}$-ограниченными абелевыми факторами и потому $Q \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS}$. Однако, если θ — гомоморфизм группы Q на $\mathcal{C}$-группу, то порядок элемента $t\theta$ конечен и, следовательно, $x_k\theta = x_l\theta$ для некоторых $k, l \in \mathcal{I}$, $k \neq l$. Как и выше, отсюда следует, что группа Q не является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой и потому оказывается искомой. $\square$

Из второго утверждения предложения 6.2.2 и обсуждавшегося в начале § 6.1 примера с группой $\mathrm{BS}(1, -1)$ следует, что если разрешимая группа X $\mathcal{C}$-ограничена, но не является сильно $\mathcal{C}$-ограниченной или множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит не все простые числа, то группа X не обязана обладать свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$. Оставшийся случай, когда $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ совпадает с множеством всех простых чисел и $X \in \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$, описывается приводимой далее теоремой, обобщающей теорему 6 из [43].

Теорема 6.2.3. *Пусть множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа. Тогда для любой разрешимой группы X справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $X \in \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$, то все подгруппы группы X $\mathcal{C}$-отделимы.*

2. *Если группа X не имеет кручения и все ее подгруппы являются $\mathcal{C}$-отделимыми, то $X \in \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$.*

Утверждение 1 теоремы 6.2.3 в свою очередь обобщает

Теорема 6.2.4. *Пусть множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа, X — некоторая $\mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$-аппроксимируемая группа, Y — ее подгруппа и существует гомоморфизм σ группы X на $\mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$-группу, действующий инъективно на подгруппе Y. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа Y отделима в группе X классом $\mathcal{SC}$ разрешимых $\mathcal{C}$-групп.*

2. *Если подгруппа Y лежит в центре группы X, то последняя $\mathcal{C}$- и $\mathcal{SC}$-регулярна по подгруппе Y.*

Отметим, что требование наличия гомоморфизма на $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-группу, инъективного на подгруппе Y, в формулировке теоремы 6.2.4 является существенным. В самом деле, если $\mathcal{FS}$ — класс всех конечных разрешимых групп, то любая неабелева свободная группа F в силу предложения 1.4.8 $\mathcal{FS}$-аппроксимируема и каждая $\mathcal{FS}$-группа сильно $\mathcal{FS}$-ограничена. В то же время группа $\mathrm{BS}(1,2)$ согласно теореме 5.2.1 не аппроксимируется классом $\mathcal{FS}$ и, следовательно, ввиду предложения 1.3.2 подгруппа N группы F такая, что $F/N \cong \mathrm{BS}(1,2)$, не является $\mathcal{FS}$-отделимой.

Для доказательства теорем 6.2.3 и 6.2.4 потребуются следующие два вспомогательных предложения.

Предложение 6.2.5. *Пусть класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, X — некоторая группа,*

$$1 = X_0 \leqslant X_1 \leqslant \ldots \leqslant X_n = X \ —$$

нормальный ряд группы X и все подгруппы X_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в X. Если для группы X имеет место свойство $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$, то и все фактор-группы X_{i+1}/X_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ обладают этим свойством.

Доказательство. Пусть $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, Y/X_i — некоторая $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная подгруппа группы X_{i+1}/X_i и $x \in X_{i+1} \setminus Y$. Из $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированности подгруппы X_{i+1} в группе X следует, что подгруппа Y также $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в X и ввиду свойства $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$ $\mathcal{C}$-отделима в этой группе. Значит, существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $x \notin YN$. Тогда

$$xX_i \notin Y/X_i \cdot (NX_i \cap X_{i+1})/X_i$$

и ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и фактор-групп

$$NX_i \in \mathcal{C}^*(X), \quad NX_i \cap X_{i+1} \in \mathcal{C}^*(X_{i+1}), \quad (NX_i \cap X_{i+1})/X_i \in \mathcal{C}^*(X_{i+1}/X_i).$$

В силу произвольности выбора элемента x отсюда следует, что подгруппа Y/X_i $\mathcal{C}$-отделима в группе X_{i+1}/X_i. □

Предложение 6.2.6. *Произвольная $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-группа, принадлежащая классу $\mathcal{C}$, конечна.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{C}$-$s\mathcal{BS} \cap \mathcal{C}$ и Y — некоторый фактор нормального разрешимого ряда группы X. В силу предложения 1.4.6 группа X, а вместе с ней и подгруппа Y, принадлежат классу периодических $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-групп конечного периода. Поэтому группа Y имеет конечное число примарных компонент и все они соответствуют числам из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Из предложения 6.1.2 следует, что Y — $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$-группа и потому все ее примарные компоненты конечны. Значит, конечными являются как группа Y, так и вся группа X. □

Доказательство теоремы 6.2.3. 1. Пусть Y — произвольная подгруппа группы X. В силу предложения 6.1.3 класс $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$ совпадает с классом ограниченных разрешимых групп. Поэтому согласно теореме 6 из [43] подгруппа Y финитно отделима. Поскольку любой гомоморфный образ группы X является разрешимой группой, подгруппа Y оказывается отделимой в ней классом $\mathcal{FS}$ всех конечных разрешимых групп. Согласно предложению 1.4.5 $\mathcal{FS} \subseteq \mathcal{C}$. Следовательно, подгруппа Y $\mathcal{C}$-отделима в группе X.

2. Пусть $\mathcal{D}$ — класс всех периодических групп конечного периода. Согласно предложению 1.4.6 справедливо включение $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ и потому все подгруппы группы X $\mathcal{D}$-отделимы. Пусть

$$1 = X_0 \leqslant X_1 \leqslant \ldots \leqslant X_n = X \text{ —}$$

некоторый нормальный разрешимый ряд группы X и $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Так как множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа и класс $\mathcal{D}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то по предложению 6.2.5 в фактор-группе X_{i+1}/X_i все подгруппы являются $\mathcal{D}$-отделимыми и согласно теореме 6.2.1 группа X_{i+1}/X_i удовлетворяет условию $(3)_{\mathcal{D}}$. Из равенства $\mathfrak{P}(\mathcal{D}) = \mathfrak{P}(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, следует, что условие $(3)_{\mathcal{D}}$ равносильно условию $(3)_{\mathcal{F}}$ и потому $X \in \mathcal{F}\text{-}w\mathcal{BS}$. В силу предложений 6.1.1 и 6.1.2 фактор-группа группы X_{i+1}/X_i по ее периодической части имеет конечный ранг. Поэтому согласно теореме 3 из [42] группа X обладает нормальным разрешимым рядом, каждый фактор F которого удовлетворяет условию $(4)_{\mathcal{F}}$. Так как $X \in \mathcal{F}\text{-}w\mathcal{BS}$, то по предложению 6.1.2 $F \in \mathcal{F}\text{-}w\mathcal{BA}$ и ввиду предложения 6.1.3 $F \in \mathcal{F}\text{-}\mathcal{BA}$. Таким образом, группа X является ограниченной разрешимой и согласно предложению 6.1.3 принадлежит классу $\mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$. □

Доказательство теоремы 6.2.4. 1. Пусть $x \in X \setminus Y$ — произвольный элемент. Согласно предложению 6.1.2 класс $\mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому из равенства $Y \cap \ker\sigma = 1$ в силу предложения 1.3.4 вытекает, что подгруппа Y $\mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$-отделима в группе X. Следовательно, найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}^*(X)$ такая, что $x \notin YN$ и потому $xN \notin YN/N$. Согласно теореме 6.2.3 подгруппа YN/N $\mathcal{C}$-отделима в $\mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$-группе X/N. Значит, естественный гомоморфизм $X \to X/N$ можно продолжить до гомоморфизма τ на группу из класса $\mathcal{C}$ так, чтобы выполнялось условие $x\tau \notin Y\tau$. При этом $X\tau \in \mathcal{SC}$, поскольку фактор-группа X/N разрешима.

2. Пусть $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ — произвольная подгруппа, $\overline{X} = X\sigma/M\sigma$ и $\overline{Y} = Y\sigma/M\sigma$. Из условия $Y \cap \ker\sigma = 1$ следует, что $\overline{Y} \cong Y/M \in \mathcal{C}$. Так как $X\sigma \in \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$ и согласно предложению 6.1.2 класс $\mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$ замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп, то $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{C}\text{-}s\mathcal{BS}$. Ввиду утверждения 1 и предложения 6.2.6 группа $\overline{X}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-группа $\overline{Y}$ конечна. Поэтому из предложения 1.3.4 следует существование подгруппы $\overline{N} \in \mathcal{C}^*(\overline{X})$ такой, что $\overline{N} \cap \overline{Y} = 1$. Пусть N — прообраз подгруппы $\overline{N}$ относительно композиции гомоморфизма σ и естественного гомоморфизма $X\sigma \to X\sigma/M\sigma$. Тогда $N \in \mathcal{C}^*(X)$ и, так как $Y \cap \ker\sigma = 1$, то $N \cap Y = M$. Остается заметить, что группы $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ разрешимы, поэтому $M \in \mathcal{SC}^*(Y)$ и $N \in \mathcal{SC}^*(X)$. □

§ 6.3. Отделимость подгрупп $\mathcal{C}$-ограниченных нильпотентных групп

Предложение 6.2.2 показывает, что $\mathcal{C}$-$w\mathcal{BN}$-группа, вообще говоря, может не обладать свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$. Основным результатом данного параграфа является следующая теорема, утверждающая, что для групп из класса $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$ указанное свойство всегда имеет место.

Теорема 6.3.1. *Пусть X — $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группа и Y — произвольная подгруппа группы X. Тогда $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолятор $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y)$ подгруппы Y $\mathcal{C}$-отделим в группе X и совпадает с множеством $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-корней $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Rt}(X, Y)$. В частности, группа X обладает свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$. Если группа X не имеет $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, то ступени нильпотентности подгрупп Y и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y)$ совпадают.*

Отметим, что условие отсутствия $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения в группе X из формулировки теоремы 6.3.1 существенно для равенства ступеней нильпотентности подгрупп Y и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y)$. Например, если Y — бесконечная циклическая группа, Z — конечная нильпотентная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-группа ступени c и $X = Y \times Z$, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y) = X$ и потому ступень нильпотентности подгруппы $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y)$ равна c, в то время как ступень нильпотентности подгруппы Y — единице.

Теорема 6.2.1 показывает, что абелева группа, обладающая свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$, не обязана быть $\mathcal{C}$-ограниченной. Вместе с тем, справедливо

Следствие 6.3.2. *Нильпотентная группа без кручения обладает свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$ тогда и только тогда, когда она является $\mathcal{C}$-ограниченной.*

Доказательство. Ввиду теоремы 6.3.1 следует проверить лишь необходимость. Пусть X — нильпотентная группа без кручения, обладающая свойством $\mathcal{C}$-$\mathfrak{Sep}$,

$$1 = X_0 \leqslant X_1 \leqslant \ldots \leqslant X_c = X \text{ —}$$

ее верхний центральный ряд и $\mathcal{D}$ — класс периодических $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-групп конечного периода. Тогда $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ ввиду предложения 1.4.6 и, так как $\mathfrak{P}(\mathcal{C}) = \mathfrak{P}(\mathcal{D})$, то для X справедливо свойство $\mathcal{D}$-$\mathfrak{Sep}$. В силу предложения 1.3.6 из отсутствия кручения в группе X вытекает, что все подгруппы X_i $(0 \leqslant i \leqslant c)$ изолированы в X. Согласно предложению 6.2.5 отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{D}$ относительно взятия фактор-групп следует, что для каждого $i \in \{0, \ldots, c-1\}$ группа X_{i+1}/X_i обладает свойством $\mathcal{D}$-$\mathfrak{Sep}$ и по теореме 6.2.1 удовлетворяет условию $(3)_{\mathcal{D}}$. Так как $\mathfrak{P}(\mathcal{C}) = \mathfrak{P}(\mathcal{D})$, то условия $(3)_{\mathcal{C}}$ и $(3)_{\mathcal{D}}$ равносильны. Поскольку подгруппа X_i изолирована в группе X, группа X_{i+1}/X_i не имеет кручения и в силу предложения 6.1.1 удовлетворяет условию $(5)_{\mathcal{C}}$. Следовательно, $X \in \mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$. □

Далее через $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$ будем обозначать класс всех $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-групп без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения. Рассмотрение данного класса вполне естественно, поскольку согласно приводимому далее предложению 6.3.7 только такие $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группы аппроксимируются классом $\mathcal{C}$. Следующая теорема формально служит частичным обобщением теоремы 6.3.1.

Однако, в § 6.4 будут рассматриваться только $\mathcal{C}$-аппроксимируемые $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группы и при таком предположении обобщение становится полным.

Теорема 6.3.3. *Пусть X — некоторая $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-аппроксимируемая группа, Y — ее подгруппа и существует гомоморфизм σ группы X на $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группу, действующий инъективно на подгруппе Y. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y)$ отделима в группе X классом $\mathcal{NC}$ нильпотентных $\mathcal{C}$-групп, совпадает с множеством $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Rt}(X, Y)$ и имеет ту же ступень нильпотентности, что и подгруппа Y. Группа X $\mathcal{NC}$-аппроксимируема и, следовательно, не имеет $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения.*

2. *Гомоморфизм σ действует инъективно на подгруппе $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y)$ и потому последняя принадлежит классу $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$.*

3. *Для любой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{NC}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y \leqslant M$. При этом, если M нормальна в X, то подгруппу N можно выбрать так, что $N \cap Y = M$. В частности, если подгруппа Y центральна в группе X, то последняя $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе Y.*

Как и в случае с теоремой 6.2.4, в формулировке теоремы 6.3.3 требование существования гомоморфизма группы X на $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группу, инъективного на подгруппе Y, является существенным для $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y)$. Так, например, любая неабелева свободная группа аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения [119, 155], но при этом содержит конечно порожденную изолированную подгруппу, не отделимую классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп ни для какого простого числа p [17].

Следствие 6.3.4. *Пусть X — некоторая группа, аппроксимируемая $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группами без кручения, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша–Зайцева. Если подгруппа Y $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе X, то она отделима в этой группе классом $\mathcal{NC}$ нильпотентных $\mathcal{C}$-групп.*

Доказательство. Из предложения 6.1.2 следует, что класс $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{tf}}$ всех $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-групп без кручения замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 1.3.5 существует подгруппа $M \in \mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{tf}}^*(X)$, тривиально пересекающаяся с подгруппой Y, и требуемое утверждение вытекает из теоремы 6.3.3. □

Для доказательства теорем 6.3.1 и 6.3.3 потребуется несколько вспомогательных предложений.

Предложение 6.3.5. *Если периодическая $\mathcal{C}$-$\mathcal{BS}$-группа X имеет конечный период, являющийся $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом, то $X \in \mathcal{C}$.*

Доказательство. В силу предложения 6.1.2 произвольный фактор F некоторого нормального разрешимого ряда группы X принадлежит классу $\mathcal{C}$-$\mathcal{BA}$. Так как группа F имеет конечный период, являющийся $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом, то количество ее примарных компонент конечно, все они соответствуют числам из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ и потому имеют мощности, не превосходящие мощности некоторой $\mathcal{C}$-группы. Тогда ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия расширений мощность группы X также не превосходит мощности некоторой группы из этого класса и согласно предложению 1.4.7 $X \in \mathcal{C}$. □

Предложение 6.3.6. *Пусть X — $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группа, Y — подгруппа группы X и $M \in \mathcal{C}^*(Y)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$.*

2. *Если подгруппа M нормальна в группе X, то найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y = M$. В частности, группа X $\mathcal{C}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе.*

Доказательство. 1. Обозначим через Y_1 нормализатор $N_X(Y)$ подгруппы Y в группе X и по индукции через Y_{i+1} — подгруппу $N_X(Y_i)$. Хорошо известно (см., например, [74, лемма 2.6]), что для некоторого n имеет место равенство $Y_n = X$. Воспользуемся индукцией по n.

Пусть $n = 1$, т. е. подгруппа Y нормальна в группе X, и q — период $\mathcal{C}$-группы Y/M (конечный ввиду предложения 1.4.6). Тогда подгруппа Y^q также нормальна в X и $Y^q \leqslant M$. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех простых делителей числа q и S — некоторый центральный ряд группы $\overline{X} = X/Y^q$. Так как $\overline{X} \in \mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$ в силу предложения 6.1.2 и $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, то каждый фактор ряда S принадлежит классу $\mathcal{C}$-$\mathcal{BA}$ и все примарные $\mathfrak{S}$-компоненты его периодической части имеют конечный период. Количество этих компонент также конечно ввиду конечности множества $\mathfrak{S}$. Поэтому определено произведение r периодов всех примарных $\mathfrak{S}$-компонент периодических частей факторов ряда S.

Легко видеть, что произвольный элемент группы $\overline{X}$, порядок которого является $\mathfrak{S}$-числом, в степени r равен 1. Поскольку период подгруппы $\overline{Y} = Y/Y^q$ — также $\mathfrak{S}$-число, отсюда следует, что уравнение $x^r = y$ не разрешимо в группе $\overline{X}$ ни для какого элемента $y \in \overline{Y} \setminus \{1\}$. Но согласно лемме 2 из [43] оно разрешимо в $\overline{X}$ для каждого $y \in \overline{N}$, где $\overline{N} = \overline{X}^{r^c}$ и c — ступень нильпотентности группы $\overline{X}$. Значит, $\overline{Y} \cap \overline{N} = 1$.

Так как r является $\mathfrak{S}$-числом и $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, то $\overline{X}/\overline{N}$ — нильпотентная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группа конечного периода. Согласно предложению 6.1.2 $\overline{X}/\overline{N} \in \mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$ и в силу предложения 6.3.5 $\overline{X}/\overline{N} \in \mathcal{C}$. Обозначим через N прообраз подгруппы $\overline{N}$ относительно естественного гомоморфизма $X \to \overline{X}$. Тогда $N \in \mathcal{C}^*(X)$ и $N \cap Y \leqslant Y^q \leqslant M$, т. е. подгруппа N является искомой.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Так как подгруппа Y нормальна в группе Y_1, то в силу доказанного выше существует подгруппа $N_1 \in \mathcal{C}^*(Y_1)$, удовлетворяющая условию $N_1 \cap Y \leqslant M$. Применяя индуктивное предположение к подгруппам Y_1 и N_1, найдем подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такую, что $N \cap Y_1 \leqslant N_1$. Тогда

$$N \cap Y = N \cap Y_1 \cap Y \leqslant N_1 \cap Y \leqslant M$$

и, следовательно, подгруппа N является искомой.

2. В силу предложения 6.1.2 $X/M \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BN}$. Поэтому согласно утверждению 1, применяемому к группе $\overline{X} = X/M$ и подгруппам $\overline{Y} = Y/M$, $\{1\}$, существует подгруппа $\overline{N} \in \mathcal{C}^*(\overline{X})$, удовлетворяющая условию $\overline{N} \cap \overline{Y} = 1$. Легко видеть, что тогда прообраз N подгруппы $\overline{N}$ относительно естественного гомоморфизма $X \to \overline{X}$ является искомой подгруппой. □

Предложение 6.3.7. *$\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не имеет $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы обеспечивается предложением 1.3.7. Для проверки достаточности воспользуемся индукцией по ступени нильпотентности группы X, причем базой индукции будем считать случай, когда $X = 1$. Зафиксируем произвольный элемент $x \in X \setminus \{1\}$ и укажем подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такую, что $x \notin N$.

В силу индуктивных соображений и предложения 1.3.6 можно считать, что x лежит в центре $\mathcal{Z}(X)$ группы X. Так как согласно предложению 6.1.2 $\mathcal{Z}(X) \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BA}$ и единичная подгруппа группы $\mathcal{Z}(X)$ $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована, то по теореме 6.2.1 найдется не содержащая элемента x подгруппа $Y \in \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}(X))$. Тогда элемент $\overline{x} = xY$ отличен от единицы и имеет в группе $\overline{X} = X/Y$ конечный порядок, являющийся $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. По предложению 6.1.2 $\overline{X}$ снова оказывается $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-группой и в силу предложения 1.4.5 циклическая подгруппа U, порожденная элементом $\overline{x}$, принадлежит классу $\mathcal{C}$. Отсюда и из предложения 6.3.6 (применяемого к группе $\overline{X}$ и подгруппам U, $\{1\}$) следует, что существует подгруппа $\overline{N} \in \mathcal{C}^*(\overline{X})$, удовлетворяющая условию $\overline{N} \cap U = 1$. Тогда $\overline{x} \notin \overline{N}$ и потому прообраз N подгруппы $\overline{N}$ относительно естественного гомоморфизма $X \to \overline{X}$ является искомой подгруппой. □

Доказательство теоремы 6.3.1. Обозначим для краткости через $\mathfrak{I}$ подгруппу $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Y)$. Равенство $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(X, Y)$ следует из предложения 1.3.6. Если группа X не имеет $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, то ввиду предложения 6.3.7 она $\mathcal{C}$-аппроксимируема и согласно предложению 1.3.9 ступени нильпотентности подгрупп $\mathcal{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X, Y)$ и Y совпадают. Из предложения 1.3.7 вытекает, что $Y \leqslant \mathfrak{I} \leqslant \mathcal{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X, Y)$. Следовательно, подгруппа $\mathfrak{I}$ имеет ту же ступень нильпотентности, что и Y. Таким образом, остается проверить $\mathcal{C}$-отделимость подгруппы $\mathfrak{I}$. Как и при доказательстве предложения 6.3.6, воспользуемся индукцией по длине n последовательности подгрупп

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 \leqslant \mathfrak{I}_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{I}_n = X,$$

в которой $\mathfrak{I}_{i+1}$ обозначает нормализатор подгруппы $\mathfrak{I}_i$ в группе X.

Если $n = 1$, то подгруппа $\mathfrak{I}$ нормальна в группе X, фактор-группа $X/\mathfrak{I}$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ согласно предложению 6.3.7 и, следовательно, подгруппа $\mathfrak{I}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе X в силу предложения 1.3.2. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 2$, зафиксируем произвольный элемент $x \in X \setminus \mathfrak{I}$ и укажем подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющую условию $x \notin \mathfrak{I}N$.

Согласно предложению 1.3.6 вместе с подгруппой $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0$ в группе X $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована и подгруппа $\mathfrak{I}_1$. Значит, если $x \notin \mathfrak{I}_1$, то по индуктивному предположению найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $x \notin \mathfrak{I}_1 N$ и потому $x \notin \mathfrak{I}N$.

Пусть $x \in \mathfrak{I}_1$. Поскольку подгруппа $\mathfrak{I}$ $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе $\mathfrak{I}_1$, ввиду доказанного выше существует подгруппа $M \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{I}_1)$, удовлетворяющая условию $x \notin \mathfrak{I}M$. Применяя предложение 6.3.6 к группе X и подгруппам $\mathfrak{I}_1$, M, найдем подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такую, что $N \cap \mathfrak{I}_1 \leqslant M$. Легко видеть, что тогда $\mathfrak{I}N \cap \mathfrak{I}_1 \leqslant \mathfrak{I}M$ и, следовательно, $x \notin \mathfrak{I}N$. Таким образом, подгруппа N является искомой. $\square$

Доказательство теоремы 6.3.3. 1. Пусть x — некоторый элемент из подгруппы $\mathcal{NC}$-$\mathfrak{Cl}(X, Y)$, $V = \ker \sigma$, U — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}^*_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}(X)$ и $W = U \cap V$. Из предложения 6.1.2 вытекает, что класс $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, следовательно, $W \in \mathcal{C}$-$\mathcal{BN}^*_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}(X)$ в силу предложения 1.3.4.

Используя предложение 1.3.8, нетрудно показать, что

$$xV \in \mathcal{NC}\text{-}\mathfrak{Cl}(X/V,\, YV/V), \quad xW \in \mathcal{NC}\text{-}\mathfrak{Cl}(X/W,\, YW/W).$$

Ввиду нильпотентности групп X/V, X/W и теоремы 6.3.1 справедливы равенства

$$\mathcal{NC}\text{-}\mathfrak{Cl}(X/V,\, YV/V) = \mathcal{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X/V,\, YV/V) = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(X/V,\, YV/V),$$
$$\mathcal{NC}\text{-}\mathfrak{Cl}(X/W,\, YW/W) = \mathcal{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X/W,\, YW/W) = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(X/W,\, YW/W).$$

Следовательно, существуют наименьшие $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-числа q и r, удовлетворяющие условиям $(xV)^q \in YV/V$ и $(xW)^r \in YW/W$.

Пусть элементы $y, z \in Y$ таковы, что $yV = x^qV$ и $zW = x^rW$. Из последнего равенства и включения $W \leqslant V$ вытекает, что $(xV)^r = zV \in YV/V$ и в силу выбора q и r для некоторого $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-числа s имеет место равенство $r = qs$. Отсюда

$$y^sV = x^{qs}V = x^rV = zV$$

и, следовательно, $y^{-s}z \in Y \cap V$. Но $Y \cap V = 1$, значит, $z = y^s$ и

$$(xW)^{qs} = (xW)^r = zW = (yW)^s.$$

Так как $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группа X/W нильпотентна и не имеет $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, то согласно предложению 1.3.6 извлечение $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-корней в ней однозначно. Поэтому $(xW)^q = yW$ и $y^{-1}x^q \in W \leqslant U$. Ввиду произвольности выбора подгруппы U и $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-аппроксимируемости группы X отсюда следует, что $x^q = y \in Y$ и, стало быть, подгруппа $\mathcal{NC}$-$\mathfrak{Cl}(X, Y)$ совпадает с множеством $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Rt}(X, Y)$ и подгруппой $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Y)$. Это означает, в частности, что подгруппа $\mathfrak{I}$ $\mathcal{NC}$-отделима в группе X.

Группа X $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-аппроксимируема, а каждая $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группа нильпотентна и в силу предложения 6.3.7 аппроксимируется классом $\mathcal{NC}$. Следовательно, группа X $\mathcal{NC}$-аппроксимируема и по предложению 1.3.7 не имеет $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, а ступени нильпотентности подгрупп $\mathcal{NC}$-$\mathfrak{Cl}(X, Y)$ и Y (первая из которых равна $\mathfrak{I}$) совпадают согласно предложению 1.3.9.

2. Пусть снова $V = \ker\sigma$ и $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Y)$; $x \in \mathfrak{I} \cap V$ — произвольный элемент. Так как $\mathfrak{I} = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(X, Y)$, то $x^q \in Y$ для некоторого $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-числа q. Отсюда $x^q \in Y \cap V = 1$ и, поскольку группа X не имеет $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, $x = 1$. Значит, $\mathfrak{I} \cap V = 1$, подгруппа $\mathfrak{I}$ вкладывается в $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группу X/V и, стало быть, сама принадлежит классу $\mathcal{C}\text{-}\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$.

3. Так как $X\sigma \in \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BN}$ и

$$Y\sigma/M\sigma \cong Y/M(Y \cap \ker\sigma) = Y/M \in \mathcal{C},$$

то согласно предложению 6.3.6 найдется подгруппа $\overline{N} \in \mathcal{C}^*(X\sigma)$, удовлетворяющая соотношению $\overline{N} \cap Y\sigma \leqslant M\sigma$ или $\overline{N} \cap Y\sigma = M\sigma$, если подгруппа M нормальна в группе X. Поскольку группа $X\sigma$ нильпотентна, $\overline{N} \in \mathcal{NC}^*(X\sigma)$. Отсюда легко следует, что прообраз N подгруппы $\overline{N}$ относительно гомоморфизма σ является искомой подгруппой. □

§ 6.4. $\mathcal{C}$-ограниченные группы и аппроксимируемость корневыми классами

В данном параграфе с помощью теорем 6.2.4 и 6.3.3 будет получен ряд следствий из утверждений, доказанных в главах 3 и 4. Приводимое ниже предложение 6.4.1 позволяет избавляться в формулировках этих следствий от требования замкнутости аппроксимирующего класса относительно взятия фактор-групп.

Предложение 6.4.1. *Пусть для некоторой группы X получено необходимое или достаточное условие ее аппроксимируемости классом $\mathcal{C}$ в предположении, что указанный класс замкнут относительно взятия фактор-групп. Если составляющие данного условия, связанные с классом $\mathcal{C}$, зависят лишь от множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ и условий $(3)_{\mathcal{C}}$, $(5)_{\mathcal{C}}$, $(6)_{\mathcal{C}}$, то это же условие аппроксимируемости группы X оказывается справедливым и при отсутствии требования замкнутости аппроксимирующего класса относительно взятия фактор-групп.*

Доказательство. Согласно теореме 1.4.1 класс групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно операций взятия подгруппы ($\mathbb{S}$), расширения ($\mathbb{E}$) и декартовой степени ($\mathbb{D}$). В дополнение к ним будем рассматривать также операцию взятия фактор-группы ($\mathbb{F}$).

Пусть $\mathcal{D}$ — класс всех периодических $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-групп конечного периода, $\mathcal{SD}$ — класс разрешимых $\mathcal{D}$-групп и $\mathcal{C}_1$ — подкласс класса $\mathcal{SD}$, в котором мощность каждой группы не превосходит мощности некоторой $\mathcal{C}$-группы (не обязательно одной и той же для всех групп из класса $\mathcal{C}_1$). Пусть также $\mathcal{C}_2$ — класс групп, получающихся из $\mathcal{C}$-групп конечным числом операций $\mathbb{S}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{D}$ и $\mathbb{F}$. Понятно, что класс $\mathcal{C}_2$ замкнут относительно перечисленных операций. Так как класс $\mathcal{C}$, будучи корневым, выдерживает операции $\mathbb{S}$, $\mathbb{E}$ и $\mathbb{D}$, а классы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{SD}$ — еще и операцию $\mathbb{F}$, которая не увеличивает мощность группы, то класс $\mathcal{C}_1$ замкнут относительно всех четырех операций.

Очевидно, что $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_2$ и $\mathfrak{P}(\mathcal{C}_1) = \mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Так как класс $\mathcal{D}$ замкнут относительно операции $\mathbb{F}$ и $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ в силу предложения 1.4.6, то $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{D}$ и потому

$$\mathfrak{P}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{C}_2) \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{D}) = \mathfrak{P}(\mathcal{C}).$$

Поскольку $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{SD} \cap \mathcal{C}\text{-}\mathcal{BS}$, из предложения 6.3.5 следует, что $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$. Таким образом,

$$\mathfrak{P}(\mathcal{C}_1) = \mathfrak{P}(\mathcal{C}) = \mathfrak{P}(\mathcal{C}_2), \quad \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_2,$$

откуда

$$(3)_{\mathcal{C}_1} \Leftrightarrow (3)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (3)_{\mathcal{C}_2}, \quad (6)_{\mathcal{C}_1} \Leftrightarrow (6)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (6)_{\mathcal{C}_2}, \quad (5)_{\mathcal{C}_1} \Rightarrow (5)_{\mathcal{C}} \Rightarrow (5)_{\mathcal{C}_2}.$$

Поскольку операция $\mathbb{F}$ не увеличивает мощность, для каждой $\mathcal{C}_2$-группы найдется $\mathcal{C}$-группа, не меньшая ее по мощности, и потому $(5)_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (5)_{\mathcal{C}_2}$. Покажем, что аналогичное утверждение имеет место для классов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_1$.

Пусть Y — некоторая $\mathcal{C}$-группа, $p \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$ (множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ непусто, так как $\mathcal{C}$ — корневой класс), Z_y $(y \in Y)$ — циклическая группа порядка p и P — прямое произведение групп Z_y $(y \in Y)$. Тогда $Z_y \in \mathcal{C}$ в силу предложения 1.4.5 и $P \in \mathcal{C}$ согласно теореме 1.4.1. Значит, $P \in \mathcal{C}_1$ и при этом мощность группы P не меньше, чем мощность группы Y. Следовательно, $(5)_{\mathcal{C}_1} \Leftrightarrow (5)_{\mathcal{C}}$.

Таким образом, если группа X аппроксимируется классом $\mathcal{C}$, то она аппроксимируется классом $\mathcal{C}_2$ и удовлетворяет необходимому условию аппроксимируемости (зависящему только от $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ и условий $(3)_{\mathcal{C}}$, $(5)_{\mathcal{C}}$, $(6)_{\mathcal{C}}$). Если же выполнено достаточное условие (также зависящее только от $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ и условий $(3)_{\mathcal{C}}$, $(5)_{\mathcal{C}}$, $(6)_{\mathcal{C}}$), то группа X аппроксимируется классом $\mathcal{C}_1$, а, значит, и классом $\mathcal{C}$. $\square$

Теорема 6.4.2. *Пусть множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ включает все простые числа,*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big) \ —$$

граф групп типа (1) *или конечный граф групп типа* (2) (*в смысле определений, данных в* § 3.3). *Если для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v является $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-аппроксимируемой и обладает гомоморфизмом на $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-группу, инъективным на подгруппе*

$$H_v = \operatorname{sgp}\big\{H_{\varepsilon e} \mid e \in \mathcal{E},\, \varepsilon = \pm 1,\, v = e(\varepsilon)\big\},$$

то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Доказательство. В силу предложения 6.4.1 класс $\mathcal{C}$ можно считать замкнутым относительно взятия фактор-групп. Если граф Γ конечен, то, производя описанные в § 3.3 преобразования, можно добиться выполнения соотношения $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Легко видеть, что все вершинные группы при этом останутся $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-аппроксимируемыми и по-прежнему будут обладать гомоморфизмами на $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-группы, инъективными на подгруппах H_v $(v \in \mathcal{V})$. Поэтому согласно теореме 6.2.4 для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-регулярна по любой подгруппе, лежащей в H_v, а все подгруппы такого вида $\mathcal{C}$-отделимы в G_v. Значит, в силу теорем 3.3.5 и 3.3.6 группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема. $\square$

Теорема 6.4.3. *Пусть граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ и подгруппы H_v $(v \in \mathcal{V})$ определены так же, как и в теореме 6.4.2. Если для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v аппроксимируется $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группами и обладает гомоморфизмом на такую группу, действующим инъективно на подгруппе H_v, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\mathcal{G}(\Gamma)$ — произвольный граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ подгруппа H_v $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе G_v, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

2. *Пусть $\mathcal{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *или* (2) *и $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Доказательство. Ввиду предложения 6.4.1 можно считать, что класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп. Поэтому оба утверждения вытекают из теорем 3.3.5, 3.3.6 и 6.3.3. $\square$

Далее будем считать, что (G, H, K, φ) — HNN-кортеж, $H \neq G \neq K$, подгруппы H и K лежат в центре группы G и $\mathfrak{G} = \mathrm{HNN}(G, H, K, \varphi)$. Также будем использовать следующие обозначения:

$$K_0 = G,\ H_1 = H,\ K_1 = K,\ H_{i+1} = H_i \cap K_i,\ K_{i+1} = H_{i+1}\varphi,\ P_i = H_i K_i\ \ (i \geqslant 1).$$

Теорема 6.4.4. *Пусть множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа, группа G аппроксимируется $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-группами и обладает гомоморфизмом на $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-группу, действующим инъективно на подгруппе HK. Если существует такое $m \geqslant 0$, что подгруппы H_{m+1} и K_{m+1} $\mathfrak{P}'$-изолированы в группе K_m для некоторого конечного множества простых чисел $\mathfrak{P}$ (в частности, если подгруппы H_m и K_m конечно порождены при каком-то $m \geqslant 1$), то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $H_n = K_n$ для некоторого $n \geqslant m+1$.*

Теорема 6.4.5. *Пусть группа G аппроксимируется $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группами и обладает гомоморфизмом σ на $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-группу, действующим инъективно на подгруппе HK. Если существует такое $m \geqslant 0$, что подгруппы H_{m+1} и K_{m+1} принадлежат классу $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$ и $\mathfrak{P}'$-изолированы в группе K_m для некоторого конечного подмножества $\mathfrak{P}$ множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ (в частности, если подгруппы H_m и K_m конечно порождены при каком-то $m \geqslant 1$), то группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *$H_n = K_n$ для некоторого $n \geqslant m+1$;*

2) *подгруппы H и K $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G;*

3) *$\bigcap_{N \in \Omega} N = 1$, где Ω — семейство подгрупп группы H_n, определенное следующим образом: $N \in \Omega$ тогда и только тогда, когда H_n/N — конечная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группа, $N\varphi = N$ и порядок автоморфизма группы H_n/N, индуцированного автоморфизмом φ, является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом.*

Для доказательства теорем 6.4.4 и 6.4.5 потребуется

Предложение 6.4.6. *Пусть класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп и существует такое $m \geqslant 0$, что подгруппы H_{m+1} и K_{m+1} принадлежат классу $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$ и $\mathfrak{P}'$-изолированы в группе K_m для некоторого конечного подмножества $\mathfrak{P}$ множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то для некоторого $n \geqslant m+1$ имеет место равенство $H_n = H_{n+1}$.*

Доказательство. Согласно предложению 6.1.1 ранг $\operatorname{rk} H_{m+1}$ подгруппы H_{m+1} конечен и, так как $\operatorname{rk} H_{i+1} \leqslant \operatorname{rk} H_i$ для любого $i \geqslant 1$, то $\operatorname{rk} H_l = \operatorname{rk} H_{l+1}$ для некоторого $l \geqslant m+1$. Из соотношений $H_l \cong K_l$ и $H_{l+1} \cong K_{l+1}$ вытекает, что

$$\operatorname{rk} K_l = \operatorname{rk} H_l = \operatorname{rk} H_{l+1} = \operatorname{rk} K_{l+1}$$

и, следовательно, фактор-группы K_l/H_{l+1} и K_l/K_{l+1} являются периодическими.

Так как подгруппы H_{m+1} и K_{m+1} $\mathfrak{P}'$-изолированы в группе K_m, то согласно предложению 4.6.2, применяемому к HNN-кортежу $(K_m, H_{m+1}, K_{m+1}, \varphi)$, подгруппы H_{l+1} и K_{l+1} тоже $\mathfrak{P}'$-изолированы в этой группе. Значит, K_l/H_{l+1} и K_l/K_{l+1} — периодические $\mathfrak{P}$-группы, принадлежащие классу $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$ в силу предложения 6.1.2. Поскольку $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, отсюда следует, что все примарные компоненты указанных групп конечны. Ввиду конечности множества $\mathfrak{P}$ количества этих компонент, а вместе с ними и порядки групп K_l/H_{l+1} и K_l/K_{l+1} также оказываются конечными.

Согласно предложению 4.6.1 группы

$$\mathfrak{G}_l = \mathrm{HNN}(G, H_{l+1}, K_{l+1}, \varphi), \quad \mathfrak{K}_l = \mathrm{HNN}(K_l, H_{l+1}, K_{l+1}, \varphi)$$

являются $\mathcal{C}$-аппроксимируемыми. Если $H_{l+1} = K_l$ или $K_{l+1} = K_l$, то $H_{l+1} \geqslant K_{l+1}$ или $H_{l+1} \leqslant K_{l+1}$. Отсюда в силу предложения 4.3.5, применяемого к группе $\mathfrak{G}_l$, вытекает, что $H_{l+1} = K_{l+1}$ и, следовательно, можно положить $n = l+1$. Пусть $H_{l+1} \neq K_l \neq K_{l+1}$. Тогда согласно предложению 4.3.7, применяемому к группе $\mathfrak{K}_l$, существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(K_l)$, удовлетворяющая условиям $Q \leqslant H_{l+1} \cap K_{l+1}$ и $Q\varphi = Q$. Из предложений 6.1.2 и 6.2.6 следует, что $\mathcal{C}$-группа K_l/Q принадлежит классу $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$ и потому конечна. По предложению 4.6.2 $Q \leqslant H_i$ для любого $i \geqslant l+1$. Стало быть, найдется такое $n \geqslant l+1$, что $H_n = H_{n+1}$. □

Доказательство теорем 6.4.4 и 6.4.5. Ввиду предложения 6.4.1 класс $\mathcal{C}$ можно считать замкнутым относительно взятия фактор-групп. Проверим выполнение условий теоремы 4.1.1.

В силу предложения 6.1.2 для всех $i \geqslant 1$ справедливы включения $H_i, K_i \in \mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$, если выполнено условие теоремы 6.4.4, и $H_i, K_i \in \mathcal{C}$-$\mathcal{BA}$, если выполнено условие теоремы 6.4.5. В последнем случае также по теореме 6.3.3 гомоморфизм σ инъективен на подгруппе $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(K_0,\, H_1K_1)$. Поэтому из теорем 6.2.4 и 6.3.3 следует, что для любого $i \geqslant 0$ группа K_i $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе $H_{i+1}K_{i+1}$ и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолятор

$$\mathfrak{P}(\mathcal{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(K_i,\, H_{i+1}K_{i+1})$$

$\mathcal{C}$-отделим в группе K_i.

$\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы G вытекает из

– теоремы 6.2.4, если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа и группа G $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-аппроксимируема;

– теоремы 6.3.3, если группа G $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-аппроксимируема;

– замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп, если группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Если $N \in \mathcal{C}^*(H_n)$ для некоторого $n \geqslant m+1$, то из включений $H_{m+1}, K_{m+1} \in \mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$ и предложений 6.1.2, 6.2.6 следует, что $\mathcal{C}$-группа H_n/N принадлежит классу $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$, конечна и является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группой. Наоборот, если H_n/N — конечная $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-группа, то согласно предложению 1.4.5 $H_n/N \in \mathcal{C}$. Поэтому условие 3 теоремы 6.4.5 ввиду предложения 4.3.8 равносильно $\mathcal{C}$-аппроксимируемости подгруппы $E = \mathrm{sgp}\{H_n, t\}$.

Заметим, наконец, что для некоторого $n \geqslant m+1$ имеет место равенство $H_n = H_{n+1}$: это очевидно, если $H_n = K_n$, и гарантируется предложением 6.4.6, если группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$. Таким образом, необходимость условия теоремы 6.4.4 и теорема 6.4.5 вытекают из теоремы 4.1.1.

Будучи расширением $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$-группы H_n при помощи бесконечной циклической группы $\langle t \rangle$, тоже входящей в класс $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$, группа E принадлежит классу $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$. Если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа, то подгруппы H и K $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G и по теореме 6.2.4 группа E $\mathcal{C}$-аппроксимируема. Поэтому достаточность условия теоремы 6.4.4 также вытекает из теоремы 4.1.1.

Предположим теперь, что подгруппы H_m и K_m конечно порождены при каком-то $m \geqslant 1$ и, следовательно, принадлежат классу $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BA}$. Тогда группы K_m/H_{m+1} и K_m/K_{m+1} имеют конечные периодические части и потому подгруппы H_{m+1} и K_{m+1} $\mathfrak{P}'$-изолированы в группе K_m для некоторого конечного множества $\mathfrak{P}$. Покажем, что при выполнении условий теоремы 6.4.5 подгруппы H_{m+1} и K_{m+1} $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группе G и, стало быть, $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{C})$.

В самом деле, если подгруппы H и K $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в G, то требуемое утверждение следует из предложения 4.6.2. Если же группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то согласно предложению 4.6.1 группа $\mathfrak{G}_m = \mathrm{HNN}(G, H_{m+1}, K_{m+1}, \varphi)$ также аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ и по предложению 4.3.4 семейство $\mathcal{C}^*_\cap(G, H_{m+1}, K_{m+1}, \varphi)$ является (H_{m+1}, K_{m+1})-фильтрацией. Отсюда и из включений

$$\mathcal{C}^*_\cap(G, H_{m+1}, K_{m+1}, \varphi) \subseteq \mathcal{C}^*(G, H_{m+1}, K_{m+1}, \varphi) \subseteq \mathcal{C}^*(G),$$

справедливых в силу предложения 4.3.2, вытекает, что подгруппы H_{m+1} и K_{m+1} $\mathcal{C}$-отделимы в группе G и, следовательно, $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в этой группе согласно предложению 1.3.7. $\square$

Теорема 6.4.7. *Пусть подгруппы H и K являются бесконечными циклическими. Тогда справедливы следующие утверждения.*

I. *Если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ включает все простые числа, группа G аппроксимируется $\mathcal{C}$-$s\mathcal{BS}$-группами и обладает гомоморфизмом на такую группу, действую-*

щим инъективно на подгруппе HK, *то группа* $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-*аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группы* $H/H \cap K$ *и* $K/H \cap K$ *имеют одинаковые порядки.*

II. *Если группа* G *аппроксимируется* $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-*группами и обладает гомоморфизмом на такую группу, действующим инъективно на подгруппе* HK, *то группа* $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-*аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *фактор-группы* $H/H \cap K$ *и* $K/H \cap K$ *имеют одинаковые порядки*;

2) *подгруппы* H *и* K $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-*изолированы в группе* G;

3) $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, *если только подгруппа* $H \cap K$ *не лежит в центре группы* $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Ввиду предложения 6.4.1 класс $\mathcal{C}$ можно считать замкнутым относительно взятия фактор-групп.

I. Согласно теореме 6.2.4 в группе G $\mathcal{C}$-отделимы все ее подгруппы, лежащие в подгруппе HK. Поскольку $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$, класс $\mathcal{C}$ содержит группу порядка 2. Следовательно, доказываемое утверждение вытекает из теорем 4.1.7 и 4.1.9.

II. Если $H \cap K = 1$, то условия 1 и 3 выполнены автоматически и сформулированное утверждение оказывается частным случаем теоремы 6.4.3. Пусть $H \cap K \neq 1$. Согласно теореме 6.3.3 группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и произвольная подгруппа, лежащая в HK, $\mathcal{C}$-отделима в G тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в этой группе. Условие $2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})$ равносильно принадлежности классу $\mathcal{C}$ группы порядка 2. Поэтому вновь можно воспользоваться теоремой 4.1.7. □

Глава 7. Аппроксимируемость относительно сопряженности

§ 7.1. Формулировка результатов

Как видно из доказательств, приведенных в главе 2, основу для изучения аппроксимируемости (относительно равенства) свободных конструкций групп корневым классом $\mathcal{C}$ составляют утверждения об аппроксимируемости таким классом любой свободной группы и произвольного расширения $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{C}$-группы. С использованием результатов работы [54] первое из этих утверждений достаточно легко обобщается на случай аппроксимируемости классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности (см. предложение 7.2.1 ниже). Однако, расширение $\mathcal{C}$-аппроксимируемой относительно сопряженности группы при помощи $\mathcal{C}$-группы, вообще говоря, не обязано аппроксимироваться относительно сопряженности классом $\mathcal{C}$ [24]. Поэтому первым шагом в изучении $\mathcal{C}$-аппроксимируемости относительно сопряженности свободных конструкций групп является доказательство более слабого утверждения о том, что всякое расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности. К настоящему времени справедливость этого утверждения удалось установить лишь в предположении, что аппроксимирующий класс состоит из конечных групп. Имеет место

Теорема 7.1.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из конечных групп. Тогда любое расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности.*

В случае, когда $\mathcal{C}$ представляет собой класс всех конечных групп, теорема 7.1.1 была доказана Дж. Дайер [109] с использованием результатов работы П. Стиба [185]. Аналогичное утверждение об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами получено Е. А. Ивановой [28]. Приводимое в настоящей главе доказательство теоремы 7.1.1 также следует идеям работ [109, 185].

Далее в этом параграфе будем предполагать, что

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big) \text{ —}$$

некоторый граф групп. Ввиду приводимого ниже следствия 7.1.4 при изучении аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ корневыми классами относительно сопряженности мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда граф Γ является связным.

Согласно предложению 2.2.3, если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп и существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на $\mathcal{C}$-группу, действующий инъективно на всех вершинных группах G_v ($v \in \mathcal{V}$), то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой расширение свободной группы при помощи группы из класса $\mathcal{C}$. Поэтому непосредственно из теоремы 7.1.1 вытекает

Следствие 7.1.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из конечных групп. Если существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех группах G_v ($v \in \mathcal{V}$), то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Если граф Γ конечен, то условия следствия 7.1.2 можно ослабить, потребовав, чтобы гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на $\mathcal{C}$-группу действовал инъективно лишь на реберных подгруппах. Теорема 2.5.1 позволяет дать получающемуся в результате утверждению следующую равносильную и более удобную в применении формулировку.

Теорема 7.1.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из конечных групп, Γ — конечный граф, все группы G_v ($v \in \mathcal{V}$) $\mathcal{C}$-аппроксимируемы относительно сопряженности и все подгруппы $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) конечны. Если группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то она $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Следствие 7.1.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из конечных групп, и $\mathbb{P}$ — свободное произведение некоторого семейства групп $\{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$. Если все группы A_i ($i \in \mathcal{I}$) $\mathcal{C}$-аппроксимируемы относительно сопряженности, то и группа $\mathbb{P}$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольные несопряженные элементы группы $\mathbb{P}$ и $\mathcal{J}$ — подмножество множества $\mathcal{I}$, определенное следующим образом: $i \in \mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда некоторый образующий группы A_i (или обратный к нему) входит в фиксированную запись элемента x или y. Тогда указанные элементы содержатся в свободном произведении $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}$ групп A_i ($i \in \mathcal{J}$) и не сопряжены в нем.

Пусть Γ — некоторое дерево с множеством вершин $\mathcal{J}$, и пусть в графе групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ вершинам сопоставлены группы A_i ($i \in \mathcal{J}$), а ребрам — единичные группы. Тогда, очевидно, $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)) \cong \mathbb{P}_{\mathcal{J}}$. Поскольку множество $\mathcal{J}$ конечно, из предложения 1.4.8 и теоремы 7.1.3 следует, что группа $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности. Кроме того, она является ретрактом группы $\mathbb{P}$. Значит, ретрактирующий гомоморфизм $\mathbb{P} \to \mathbb{P}_{\mathcal{J}}$ может быть продолжен до гомоморфизма группы $\mathbb{P}$ на группу из класса $\mathcal{C}$, переводящего x и y в несопряженные элементы. $\square$

Отметим, что теорема 7.1.3 и следствие 7.1.4 обобщают теорему 1 из [110], теорему 1 из [30], теорему 3 из [185] и теорему 10 из [28], в которых речь идет об аппроксимируемости относительно сопряженности классами всех конечных групп и конечных p-групп, где p — простое число.

§ 7.2. Некоторые вспомогательные утверждения

Следующее предложение служит обобщением теоремы 1 из [16].

Предложение 7.2.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп, F — некоторая свободная группа. Тогда группа F $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Доказательство. Хорошо известно, что для любого простого числа p группа F аппроксимируется относительно сопряженности классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп [54]. Согласно предложению 1.4.5, если класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп, то для некоторого простого p справедливо включение $\mathcal{F}_p \subseteq \mathcal{C}$. Значит, в этом случае доказываемое утверждение имеет место.

Пусть класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы, X — некоторый свободный базис группы F, f и g — несопряженные элементы этой группы, p — произвольное простое число. Ввиду отмеченного выше найдется подгруппа $N \in \mathcal{F}_p^*(F)$, по модулю которой элементы f и g несопряжены. Обозначим через M нормальное замыкание в группе F множества элементов

$$\{xy^{-1} \mid x, y \in X,\, xy^{-1} \in N\}$$

и положим $L = MF^{(c)}$, где c — ступень разрешимости фактор-группы F/N, $F^{(c)}$ — соответствующий член ряда коммутантов группы F. Тогда $L \leqslant N$ и, следовательно, $f \not\sim_F g \pmod{L}$.

Легко видеть, что отношение сравнимости элементов группы F по модулю подгруппы N разбивает множество X на классы эквивалентности, число которых не превосходит порядка фактор-группы F/N. Поэтому F/L — конечно порожденная (и, значит, счетная) свободная разрешимая группа, принадлежащая классу $\mathcal{C}$ ввиду предложения 1.4.7. □

Справедливость следующего утверждения устанавливается в ходе доказательства теоремы 2 из [185].

Предложение 7.2.2. *Пусть X — некоторая группа, F — ее свободная нормальная подгруппа конечного индекса, x — элемент бесконечного порядка группы X, n — порядок элемента x по модулю подгруппы F и y — произвольный элемент из подгруппы Y, порожденной x и F. Если $x \equiv y \pmod{F}$ и $x^n \sim_Y y^n$, то $x \sim_Y y$.*

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа. Будем говорить, что элемент $x \in X$ *сопряженно $\mathcal{C}$-отделим* (в X), если для любого элемента $y \in X$, не сопряженного с x, существует гомоморфизм группы X на $\mathcal{C}$-группу, отображающий x и y в несопряженные элементы. Приводимые ниже предложения 7.2.3 и 7.2.4 являются аналогами леммы 1 и теоремы 2 из [185], причем в отдельных местах их доказательства повторяют используемые в данной работе рассуждения почти дословно.

Предложение 7.2.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из конечных групп, X — некоторая группа, Y и F — ее подгруппы, причем $F \in \mathcal{C}^*(X)$ и $F \leqslant Y$. Если элемент $y \in Y$ сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в Y, то он сопряженно $\mathcal{C}$-отделим и во всей группе X.*

Доказательство. Пусть $y \in Y$ — некоторый элемент, сопряженно $\mathcal{C}$-отделимый в Y, $x \in X$ — произвольный элемент, не сопряженный с y в X, A — полная система представителей левых смежных классов группы X по подгруппе Y и

$$B = \{a \in A \mid a^{-1}xa \in Y\}.$$

Поскольку класс $\mathcal{C}$ состоит лишь из конечных групп, подгруппы F и Y имеют конечные индексы в группе X и, следовательно, множества A и B конечны.

Так как элемент y не сопряжен с x, то он не сопряжен ни с одним элементом вида $b^{-1}xb$, где $b \in B$. Поэтому, пользуясь сопряженной $\mathcal{C}$-отделимостью элемента y в группе Y, для каждого элемента $b \in B$ можно найти подгруппу $M_b \in \mathcal{C}^*(Y)$ такую, что

$$y \not\sim_Y b^{-1}xb \pmod{M_b}.$$

Положим

$$M = \Big(\bigcap_{b \in B} M_b\Big) \cap F.$$

Так как множество B конечно и $F \in \mathcal{C}^*(X)$, то в силу предложений 1.3.1 и 1.3.4 имеем

$$F \in \mathcal{C}^*(Y), \quad M \in \mathcal{C}^*(Y), \quad M \in \mathcal{C}^*(F).$$

Стало быть, $M \leqslant F \leqslant X$ — субнормальная последовательность с факторами из класса $\mathcal{C}$ и по условию Грюнберга найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$, лежащая в M.

Предположим, что

$$u^{-1}xu \equiv y \pmod{N}$$

для некоторого элемента $u \in X$. Записывая u в виде $u = av$ для подходящих элементов $a \in A$, $v \in Y$, получаем сравнение

$$a^{-1}xa \equiv vyv^{-1} \pmod{N},$$

из которого следует, что $a^{-1}xa \in Y$ и $a \in B$. Но тогда $N \leqslant M_a$ и

$$y \sim_Y a^{-1}xa \pmod{M_a},$$

что невозможно в силу выбора подгруппы M_a. Таким образом, $x \not\sim_X y \pmod{N}$. □

Предложение 7.2.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий только из конечных групп, X — расширение некоторой свободной группы F при помощи $\mathcal{C}$-группы и $x \in X$ — элемент бесконечного порядка. Тогда элемент x сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в группе X.*

Доказательство. Пусть Y — подгруппа группы X, порожденная x и F. Так как $x \in Y$ и подгруппа Y содержит подгруппу $F \in \mathcal{C}^*(X)$, то в силу предложения 7.2.3 достаточно показать, что элемент x сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в Y.

Пусть $y \in Y$ — произвольный элемент, не сопряженный с x в группе Y. Если $x \not\equiv y \pmod{F}$, то, поскольку фактор-группа Y/F абелева, $x \nsim_Y y \pmod{F}$. Пусть $x \equiv y \pmod{F}$ и n — порядок элемента x по модулю подгруппы F. Тогда по предложению 7.2.2 $x^n \nsim_Y y^n$.

Поскольку F — свободная группа, ее элемент x^n сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в F согласно предложению 7.2.1. Так как $F \in \mathcal{C}^*(Y)$, то по предложению 7.2.3 элемент x^n сопряженно $\mathcal{C}$-отделим и в подгруппе Y. Следовательно, найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(Y)$ такая, что $x^n \nsim_Y y^n \pmod{N}$. Но тогда, очевидно, $x \nsim_Y y \pmod{N}$. $\square$

Далее через $\mathcal{Z}_n$ будем обозначать циклическую группу порядка n.

Предложение 7.2.5. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп и число $n \geqslant 2$ таково, что $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{C}$. Пусть также*

$$r,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_k\ \ (k \geqslant 0) \ —$$

делители числа n, большие 1, и

$$G(r, s_1, s_2, \ldots, s_k) = \big\langle a,\ b,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k;\\ a^n = b^n = 1,\ a^r = b^r,\ t_i a^{s_i} t_i^{-1} = b^{s_i}\ (1 \leqslant i \leqslant k)\big\rangle.$$

Тогда существует гомоморфизм группы $G(r, s_1, s_2, \ldots, s_k)$ на $\mathcal{C}$-группу, переводящий a и b в несопряженные элементы.

Доказательство будем вести индукцией по k. Если $k = 0$, то

$$G(r) = \big\langle a, b;\ a^n = b^n = 1,\ a^r = b^r\big\rangle.$$

Так как $r \mid n$, то $\mathcal{Z}_r \leqslant \mathcal{Z}_n$, откуда $\mathcal{Z}_r \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{Z}_r \times \mathcal{Z}_r \in \mathcal{C}$ в силу замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и расширений. Следовательно, искомым является гомоморфизм группы $G(r)$ на группу

$$P = \big\langle a, b;\ a^r = b^r = 1,\ [a, b] = 1\big\rangle,$$

изоморфную $\mathcal{Z}_r \times \mathcal{Z}_r$.

Пусть теперь $k \geqslant 1$,

$$\overline{G} = \big\langle a,\ b,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_k;\\ a^n = b^n = 1,\ a^r = b^r,\ t_i a^{s_i} t_i^{-1} = b^{s_i}\ (1 \leqslant i \leqslant k),\ t_k^n = 1\big\rangle$$

и H — нормальное замыкание в группе $\overline{G}$ множества элементов

$$\big\{a,\ b,\ t_1,\ \ldots,\ t_{k-1}\big\}.$$

Тогда $\overline{G}/H \cong \mathcal{Z}_n$, т. е. $H \in \mathcal{C}^*(\overline{G})$.

Множество

$$\big\{1,\ t_k,\ t_k^2,\ \ldots,\ t_k^{n-1}\big\}$$

является шрайеровской системой представителей смежных классов группы $\overline{G}$ по подгруппе H. Поэтому согласно теореме 2.9 из [39] подгруппа H порождается элементами

$$a_j = t_k^j a t_k^{-j}, \quad b_j = t_k^j b t_k^{-j} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1),$$
$$t_{ij} = t_k^j t_i t_k^{-j} \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1),$$
$$t_{kj} = t_k^j t_k t_k^{-(j+1)} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-2),$$
$$t_{k,n-1} = t_k^{n-1} t_k = t_k^n$$

и определяется в этих порождающих соотношениями

$$a_j^n = \tau(t_k^j a^n t_k^{-j}) = 1 \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1),$$
$$b_j^n = \tau(t_k^j b^n t_k^{-j}) = 1 \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1),$$
$$a_j^r = \tau(t_k^j a^r t_k^{-j}) = \tau(t_k^j b^r t_k^{-j}) = b_j^r \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1),$$
$$t_{ij} a_j^{s_i} t_{ij}^{-1} = \tau(t_k^j t_i a^{s_i} t_i^{-1} t_k^{-j}) = \tau(t_k^j b^{s_i} t_k^{-j}) = b_j^{s_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1),$$
$$a_{j+1}^{s_k} = \tau(t_k^j t_k a^{s_k} t_k^{-1} t_k^{-j}) = \tau(t_k^j b^{s_k} t_k^{-j}) = b_j^{s_k} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-2),$$
$$a_0^{s_k} = \tau(t_k^{n-1} t_k a^{s_k} t_k^{-1} t_k^{-(n-1)}) = \tau(t_k^{n-1} b^{s_k} t_k^{-(n-1)}) = b_{n-1}^{s_k},$$
$$t_{k,n-1} = \tau(t_k^j t_k^n t_k^{-j}) = 1,$$
$$t_{kj} = 1 \quad (0 \leqslant j \leqslant n-2),$$

где τ — переписывающий процесс Рейдемейстера–Шрайера. Таким образом,

$$H = \big\langle a_j, b_j, t_{ij};\ a_j^n = b_j^n = 1,\ a_j^r = b_j^r,\ t_{ij} a_j^{s_i} t_{ij}^{-1} = b_j^{s_i},$$
$$a_{(j+1) \bmod n}^{s_k} = b_j^{s_k}\ (1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1)\big\rangle.$$

Покажем, что для каждого $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ существует гомоморфизм группы H на $\mathcal{C}$-группу, переводящий элементы a_0 и b_j в несопряженные. Если $j = 0$, рассмотрим отображение λ образующих группы H в группу $G(r, s_1, s_2, \ldots, s_{k-1})$, определенное по правилу

$$a_0,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ b_{n-1} \mapsto a,$$
$$b_0,\ a_1 \mapsto b,$$
$$t_{i0} \mapsto t_i,\ t_{i1} \mapsto t_i^{-1},\ t_{ij} \mapsto 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 2 \leqslant j \leqslant n-1),$$

и естественным образом продолжаемое до отображения слов. Так как

$$a_0^n\lambda = b_1^n\lambda = a_2^n\lambda = b_2^n\lambda = \ldots = a_{n-1}^n\lambda = b_{n-1}^n\lambda = a^n = 1,$$
$$b_0^n\lambda = a_1^n\lambda = b^n = 1,$$
$$a_0^r\lambda = b_1^r\lambda = a_2^r\lambda = b_2^r\lambda = \ldots = a_{n-1}^r\lambda = b_{n-1}^r\lambda = a^r = b^r = b_0^r\lambda = a_1^r\lambda,$$
$$\big(t_{i0} a_0^{s_i} t_{i0}^{-1}\big)\lambda = t_i a^{s_i} t_i^{-1} = b^{s_i} = b_0^{s_i}\lambda \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1),$$
$$\big(t_{i1} a_1^{s_i} t_{i1}^{-1}\big)\lambda = t_i^{-1} b^{s_i} t_i = a^{s_i} = b_1^{s_i}\lambda \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1),$$
$$\big(t_{ij} a_j^{s_i} t_{ij}^{-1}\big)\lambda = a^{s_i} = b_j^{s_i}\lambda \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 2 \leqslant j \leqslant n-1),$$
$$a_1^{s_k}\lambda = b^{s_k} = b_0^{s_k}\lambda,$$
$$a_{(j+1) \bmod n}^{s_k}\lambda = a^{s_k} = b_j^{s_k}\lambda \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1),$$

то отображение λ переводит все определяющие соотношения группы H в равенства, верные в группе $G(r, s_1, s_2, \ldots, s_{k-1})$, и, следовательно, задает гомоморфизм. Поскольку $a_0\lambda = a$ и $b_0\lambda = b$, этот гомоморфизм может быть продолжен до искомого в силу индуктивного предположения.

Если $1 \leqslant j \leqslant n-1$, то точно так же до искомого гомоморфизма продолжается отображение μ порождающих группы H в группу

$$G(s_k) = \langle a, b;\ a^n = b^n = 1,\ a^{s_k} = b^{s_k} \rangle,$$

определенное по правилу

$$a_0,\, b_0 \mapsto a,$$
$$a_1,\, b_1,\, a_2,\, b_2,\, \ldots,\, a_{n-1},\, b_{n-1} \mapsto b,$$
$$t_{ij} \mapsto 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1)$$

и переводящее a_0 в a, b_j в b.

Таким образом, для каждого $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ существует подгруппа $M_j \in \mathcal{C}^*(H)$, удовлетворяющая соотношению $a_0 \not\sim_H b_j \pmod{M_j}$. Положим $M = \bigcap_{j=0}^{n-1} M_j$. Тогда $M \in \mathcal{C}^*(H)$ в силу предложения 1.3.4 и согласно условию Грюнберга, применяемому к последовательности $M \leqslant H \leqslant \overline{G}$, найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(\overline{G})$, лежащая в M.

Предполагая, что $g^{-1}ag \equiv b \pmod N$ для некоторого элемента $g \in \overline{G}$, и записывая этот элемент в виде $g = ht_k^j$ для подходящих числа $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ и элемента $h \in H$, получаем соотношения

$$h^{-1}a_0h = h^{-1}ah \equiv t_k^j b t_k^{-j} = b_j \pmod N,$$

из которых следует, что $a_0 \sim_H b_j \pmod{M_j}$ в противоречие с выбором подгруппы M_j. Значит, $a \not\sim_{\overline{G}} b \pmod N$ и искомым отображением является композиция естественных гомоморфизмов $G \to \overline{G}$ и $\overline{G} \to \overline{G}/N$. $\square$

§ 7.3. Доказательство теоремы 7.1.1

Пусть F — некоторая свободная группа, X — расширение группы F при помощи группы из класса $\mathcal{C}$ и $x \in X$ — произвольный элемент. Покажем, что данный элемент сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в группе X.

В силу предложения 7.2.4 можно считать, что элемент x имеет конечный порядок. Подгруппа Y, порожденная подгруппой F и этим элементом, содержит подгруппу $F \in \mathcal{C}^*(X)$. Поэтому согласно предложению 7.2.3 для завершения доказательства достаточно показать, что элемент x сопряженно $\mathcal{C}$-отделим в группе Y. Выберем произвольный элемент $y \in Y$, не сопряженный (в Y) с x, и укажем гомоморфизм группы Y на группу из класса $\mathcal{C}$, переводящий x и y в несопряженные элементы.

Если элемент y имеет бесконечный порядок, то существование гомоморфизма с требуемыми свойствами следует из предложения 7.2.4. Если $x \not\equiv y \pmod F$, то, поскольку фактор-группа Y/F абелева, $x \not\sim_Y y \pmod F$ и естественный гомоморфизм $Y \to Y/F$ оказывается искомым. Стало быть, далее можно считать, что порядок элемента y конечен и $x \equiv y \pmod F$. Поскольку подгруппа F не имеет кручения, из последнего сравнения следует, что порядки элементов x и y совпадают и равны некоторому числу $n \geqslant 2$.

Будучи конечным расширением свободной группы, подгруппа Y представляет собой фундаментальную группу некоторого графа групп

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big),$$

все вершинные группы которого конечны [177]. Без потери общности данный граф можно считать связным (если это не так, добавим к нему недостающие ребра, сопоставив им единичные группы). Понятно, что для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ конечная группа G_v тривиально пересекается в группе $Y = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ со свободной подгруппой F и, следовательно, вкладывается в фактор-группу Y/F, изоморфную конечной циклической группе $\mathcal{Z}_n$.

Пусть Γ' — подграф графа Γ, содержащий все его вершины и те ребра, группы которых (в графе $\mathcal{G}(\Gamma)$) изоморфны $\mathcal{Z}_n$. Выберем остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ таким образом, чтобы его пересечения с компонентами связности графа Γ' были остовными деревьями в этих компонентах. Ввиду предложения 1.2.3 любой элемент конечного порядка группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ сопряжен с элементом некоторой вершинной группы. Поэтому, заменяя при необходимости элементы x и y сопряженными, можно предполагать далее, что $x \in G_u$ и $y \in G_w$ для некоторых $u, w \in \mathcal{V}$.

Если вершины u и w принадлежат одной компоненте связности графа Γ', то в силу выбора дерева $\mathcal{T}$ подгруппы G_u и G_w группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ совпадают. Значит, $x = y^k$ для некоторого целого k и, так как $y \equiv x \pmod{F}$, то $k \equiv 1 \pmod{n}$ и $x = y$, что невозможно. Следовательно, вершины u и w лежат в разных компонентах и потому соединяющий их путь в дереве $\mathcal{T}$ содержит некоторое ребро f, концы которого также принадлежат разным компонентам связности графа Γ'.

Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — компоненты связности графа, получающегося из $\mathcal{T}$ удалением ребра f, $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ — множества вершин графов $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ соответственно. Пусть также Γ_1 и Γ_2 — максимальные подграфы графа Γ, множества вершин которых совпадают с $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ соответственно, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — множества ребер графов Γ_1 и Γ_2. Рассмотрим граф $\overline{\Gamma}$ с множеством вершин $\overline{\mathcal{V}} = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ и множеством ребер $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$, получающийся из Γ путем стягивания подграфов Γ_1 и Γ_2 в точки. Сопоставим вершине Γ_i $(i = 1, 2)$ группу $\mathbb{G}_i = \pi_1(\mathcal{G}(\Gamma_i), \mathcal{T}_i)$, ребру $e \in \overline{\mathcal{E}}$ — группу H_e и гомоморфизмы $\overline{\varphi}_{\varepsilon e} = \varphi_{\varepsilon e}\iota_{\varepsilon e}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, где $\iota_{\varepsilon e}$ обозначает естественное вложение группы $G_{e(\varepsilon)}$ в соответствующую ей группу $\mathbb{G}_i$. В результате получим граф групп $\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma})$.

Пусть $\overline{\mathcal{T}}$ — остовное дерево в графе $\overline{\Gamma}$, содержащее ребро f. Очевидно, что группы $\pi_1(\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma}), \overline{\mathcal{T}})$ и $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma), \mathcal{T})$ имеют одинаковые представления и, стало быть, $Y = \pi_1(\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma}), \overline{\mathcal{T}})$. Заметим также, что в силу выбора ребра f каждая компонента связности графа Γ' содержится целиком либо в графе Γ_1, либо в графе Γ_2 и потому все реберные группы графа $\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma})$ отличны от $\mathcal{Z}_n$.

Согласно предложению 1.2.6 семейство $\mathcal{R} = \{F \cap \mathbb{G}_i \mid i = 1, 2\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma}))$ (выбранное выше дерево $\overline{\mathcal{T}}$

далее предполагается фиксированным). Поэтому определены граф групп $\overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(\overline{\Gamma})$ и гомоморфизм $\rho_{\mathcal{R}}\colon \pi_1(\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma})) \to \pi_1(\overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(\overline{\Gamma}))$, продолжающий естественные гомоморфизмы

$$\mathbb{G}_i \to \mathbb{G}_i/\mathbb{G}_i \cap F \quad (i = 1, 2).$$

С одной стороны, справедливы соотношения

$$\mathbb{G}_i\rho_{\mathcal{R}} = \mathbb{G}_i/\mathbb{G}_i \cap F \cong \mathbb{G}_iF/F \leqslant Y/F \cong \mathcal{Z}_n \quad (i = 1, 2).$$

С другой стороны, свободная подгруппа F тривиально пересекается с конечными подгруппами групп $\mathbb{G}_1$ и $\mathbb{G}_2$, порожденными элементами x и y. Поэтому элементы $x\rho_{\mathcal{R}}$ и $y\rho_{\mathcal{R}}$ по-прежнему имеют порядок n и, стало быть, $\mathbb{G}_1\rho_{\mathcal{R}} \cong \mathcal{Z}_n \cong \mathbb{G}_2\rho_{\mathcal{R}}$.

Выберем элементы $a = x\rho_{\mathcal{R}}$ и $b = y\rho_{\mathcal{R}}$ в качестве порождающих групп $\mathbb{G}_i\rho_{\mathcal{R}}$ $(i = 1, 2)$. Тогда, заменяя некоторые проходные буквы обратными к ним, представление группы $\overline{Y} = \pi_1(\overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(\overline{\Gamma}))$ можно привести к виду

$$\big\langle a,\, b,\, t_j;\ a^n = b^n = 1,\ a^{r_1} = b^{r_2},\ t_j a^{s_{j1}} t_j^{-1} = b^{s_{j2}}\ (j \in \mathcal{J})\big\rangle,$$

где $r_1,\, r_2,\, s_{j1},\, s_{j2} \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ для всех $j \in \mathcal{J}$ и множество $\mathcal{J}$ равномощно множеству $\overline{\mathcal{E}} \setminus \{f\}$.

Согласно предложению 1.2.5 ядро гомоморфизма $\rho_{\mathcal{R}}$ совпадает с нормальным замыканием в группе $Y = \pi_1(\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma}))$ множества $\mathbb{G}_1 \cup \mathbb{G}_2 \cap F$ и, следовательно, содержится в F. Поэтому отображение $\lambda\colon \overline{Y} \to Y/F$, действующее по правилу $(g\rho_{\mathcal{R}})\lambda = gF$ $(g \in Y)$, корректно определено и представляет собой сюръективный гомоморфизм. Так как $x \equiv y \pmod{F}$, то

$$a\lambda = x\rho_{\mathcal{R}}\lambda = xF = yF = y\rho_{\mathcal{R}}\lambda = b\lambda.$$

Поскольку фактор-группа Y/F абелева и элемент $xF = yF$ имеет порядок n, отсюда следует, что

$$r_1 \equiv r_2 \pmod{n}; \qquad \forall j \in \mathcal{J} \quad s_{j1} \equiv s_{j2} \pmod{n}.$$

Но $r_1,\, r_2,\, s_{j1},\, s_{j2} \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$, значит,

$$r_1 = r_2, \quad s_{j1} = s_{j2} \quad (j \in \mathcal{J}).$$

Из доказанных равенств вытекает, что числа $r_1,\, r_2,\, s_{j1},\, s_{j2}$ $(j \in \mathcal{J})$ можно считать делителями числа n. Заметим, что все они больше 1, поскольку реберные группы графа $\overline{\mathcal{G}}(\overline{\Gamma})$ отличны от $\mathcal{Z}_n$, а, значит, тем же свойством обладают и реберные группы графа $\overline{\mathcal{G}}_{\mathcal{R}}(\overline{\Gamma})$.

Очевидно, что среди чисел s_{j1} $(j \in \mathcal{J})$ лишь конечное число различных. Обозначим их через $s_1,\, s_2,\, \ldots,\, s_k$, положим $r = r_1 = r_2$ и рассмотрим отображение σ порождающих группы $\overline{Y}$ в группу

$$\begin{aligned} G(r, s_1, s_2, \ldots, s_k) = \big\langle \alpha,\, \beta,\, \tau_1,\, \tau_2,\, \ldots,\, \tau_k;\ \alpha^n = \beta^n = 1,\ \alpha^r = \beta^r, \\ \tau_i\alpha^{s_i}\tau_i^{-1} = \beta^{s_i}\ (1 \leqslant i \leqslant k)\big\rangle, \end{aligned}$$

определенное по правилу:

$$a \mapsto \alpha, \quad b \mapsto \beta, \quad t_j \mapsto \tau_{i_j} \quad (j \in \mathcal{J}),$$

где $i_j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, k\}$ — такое число, что $s_{j1} = s_{j2} = s_{i_j}$. Очевидно, что будучи продолженным до отображения слов, σ переводит все определяющие соотношения группы $\overline{Y}$ в равенства, верные в группе $G(r, s_1, s_2, \ldots, s_k)$, и, стало быть, определяет гомоморфизм. Так как $a\sigma = \alpha$ и $b\sigma = \beta$, то согласно предложению 7.2.5 композицию $\rho_{\mathcal{R}}\sigma$ можно продолжить до искомого отображения.

§ 7.4. Доказательство теоремы 7.1.3

Ввиду очевидных индуктивных соображений достаточно рассмотреть случай, когда граф Γ содержит одно ребро, т. е. группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой обобщенное свободное произведение двух групп или HNN-расширение с одной проходной буквой.

Пусть x и y — произвольные несопряженные элементы группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Тогда для построения гомоморфизма этой группы на группу из класса $\mathcal{C}$, переводящего x и y в несопряженные элементы, достаточно найти систему $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ такую, что $R_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$ для всех $v \in \mathcal{V}$ и элементы $x\rho_{\mathcal{R}}$ и $y\rho_{\mathcal{R}}$ несопряжены в группе $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$.

Действительно, если система с указанными свойствами существует, то согласно теореме 2.5.1 найдется гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, удовлетворяющий условию $\ker\sigma \cap G_v \leqslant R_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Положим $S_v = \ker\sigma \cap G_v$ и $\mathcal{S} = \{S_v \mid v \in \mathcal{V}\}$. Тогда $\mathcal{S}$ является $\mathcal{C}$-допустимой системой совместимых нормальных подгрупп в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и, так как $S_v \leqslant R_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$, то по предложению 1.2.5 $\ker\rho_{\mathcal{S}} \leqslant \ker\rho_{\mathcal{R}}$. Значит, элементы $x\rho_{\mathcal{S}}$ и $y\rho_{\mathcal{S}}$ несопряжены в группе $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{S}}(\Gamma))$. Остается заметить, что в силу определения $\mathcal{C}$-допустимости и следствия 7.1.2 группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{S}}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности и, стало быть, гомоморфизм $\rho_{\mathcal{S}}$ можно продолжить до искомого.

Итак, найдем систему $\mathcal{R}$ с указанными свойствами, начав с общего построения, не зависящего от вида графа Γ и элементов x, y.

Пусть U — некоторое конечное подмножество группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, содержащее все реберные подгруппы $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$). Из предложения 1.3.4 и $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ следует, что найдется подгруппа $L \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$, по модулю которой элементы множества U попарно несравнимы. В дополнение к этому для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ можно указать подгруппу $M_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$, удовлетворяющую условию

$$\forall g_1, g_2 \in U \cap G_v \quad g_1 \not\sim_{G_v} g_2 \;\Rightarrow\; g_1 M_v \not\sim_{G_v/M_v} g_2 M_v$$

(она существует благодаря $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G_v относительно сопряженности).

Положим $R_v = L \cap M_v$ ($v \in \mathcal{V}$). Тогда $R_v = (L \cap G_v) \cap M_v$ и, так как $L \cap G_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$ в силу предложения 1.3.1, то $R_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$ согласно предложению 1.3.4. Для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ из включения $H_{\varepsilon e} \subseteq U$ ввиду выбора подгруппы L следует, что $L \cap H_{\varepsilon e} = 1$ и потому $R_{e(\varepsilon)} \cap H_{\varepsilon e} = 1$. Значит, $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп, и остается показать, что элементы $x\rho_R$ и $y\rho_R$ не сопряжены в группе $\pi_1(\mathcal{G}_\mathcal{R}(\Gamma))$.

В силу предложения 1.2.5 подгруппа $Q = \ker \rho_\mathcal{R}$ совпадает с нормальным замыканием в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ множества $\bigcup_{v\in\mathcal{V}} R_v$ и удовлетворяет равенствам $Q\cap G_v = R_v$ $(v \in \mathcal{V})$. Поэтому $Q \leqslant L$ и $Q \cap G_v \leqslant M_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Отсюда следует, что

$$\forall v \in \mathcal{V} \quad \forall g_1, g_2 \in U \cap G_v \quad g_1 \nsim_{G_v} g_2 \;\Rightarrow\; g_1\rho_\mathcal{R} \nsim_{G_v\rho_\mathcal{R}} g_2\rho_\mathcal{R}, \tag{1}$$

$$\forall g_1, g_2 \in U \quad g_1 \neq g_2 \;\Rightarrow\; g_1\rho_\mathcal{R} \neq g_2\rho_\mathcal{R}. \tag{2}$$

Последняя формула означает, в частности, что

$$\forall e \in \mathcal{E},\, \varepsilon = \pm 1 \quad \forall g \in U \quad g \notin H_{\varepsilon e} \;\Rightarrow\; g\rho_\mathcal{R} \notin H_{\varepsilon e}\rho_\mathcal{R}. \tag{3}$$

Дальнейшие рассуждения (включающие определение подмножества U) будут зависеть от того, какой вид имеет граф Γ. Предположим сначала, что он содержит две вершины u, w и соединяющее их ребро f. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой обобщенное свободное произведение двух групп и потому в ней имеет место равенство $H_{+f} = H_{-f}$. Заменяя при необходимости элементы x и y сопряженными, можем считать, что они циклически несократимы. Зафиксируем некоторые несократимые записи

$$x = x_1x_2\ldots x_m, \quad y = y_1y_2\ldots y_n$$

этих элементов и положим

$$U = H_{+f} \cup \{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n\} \cup$$
$$\cup \{h^{-1}x_ix_{i+1}\ldots x_mx_1\ldots x_{i-1}h \mid h \in H_{+f},\, 1 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{y\}.$$

Из (3) следует, что произведения

$$x_1\rho_\mathcal{R}x_2\rho_\mathcal{R}\ldots x_m\rho_\mathcal{R}, \quad y_1\rho_\mathcal{R}y_2\rho_\mathcal{R}\ldots y_n\rho_\mathcal{R}$$

являются циклически несократимыми записями элементов $x\rho_\mathcal{R}$ и $y\rho_\mathcal{R}$. Поэтому, если указанные элементы сопряжены в группе $\pi_1(\mathcal{G}_\mathcal{R}(\Gamma))$, то согласно предложению 1.1.1 возможны два случая:

1) $m = n = 1$ и существуют элементы $h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_k \in H_{+f}$ $(k \geqslant 0)$ такие, что любые соседние члены последовательности

$$x\rho_\mathcal{R},\, h_1\rho_\mathcal{R},\, h_2\rho_\mathcal{R},\, \ldots,\, h_k\rho_\mathcal{R},\, y\rho_\mathcal{R}$$

сопряжены в $G_u\rho_\mathcal{R}$ или в $G_w\rho_\mathcal{R}$;

2) $m = n > 1$ и для некоторых элемента $h \in H_{+f}$ и числа $i \in \{1,\, \ldots,\, m\}$ имеет место равенство

$$y\rho_\mathcal{R} = (h\rho_\mathcal{R})^{-1}x_i\rho_\mathcal{R}x_{i+1}\rho_\mathcal{R}\ldots x_m\rho_\mathcal{R}x_1\rho_\mathcal{R}\ldots x_{i-1}\rho_\mathcal{R}h\rho_\mathcal{R}.$$

В первом случае из включений

$$x,\, h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_k,\, y \in (U \cap G_u) \cup (U \cap G_w)$$

ввиду (1) вытекает, что соседние члены последовательности x, h_1, h_2, $\ldots$, h_k, y сопряжены в G_u или в G_w. Во втором случае из (2) и соотношений $y, x^* \in U$, $y\rho_{\mathcal{R}} = x^*\rho_{\mathcal{R}}$, где

$$x^* = h^{-1}x_i x_{i+1} \ldots x_m x_1 \ldots x_{i-1} h,$$

следует, что $y = x^*$. Так или иначе, элементы x и y оказываются сопряженными в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в противоречие с предположением. Значит, элементы $x\rho_R$ и $y\rho_R$ не сопряжены в группе $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ и система $\mathcal{R}$ является искомой.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда граф Γ содержит одну вершину u и петлю f в ней, т. е. группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ представляет собой HNN-расширение с одной проходной буквой t_f. Будем считать, что элементы x, y циклически приведены и

$$x = x_0 t_f^{\delta_1} x_1 \ldots t_f^{\delta_m} x_m, \quad y = y_0 t_f^{\varepsilon_1} y_1 \ldots t_f^{\varepsilon_n} y_n \ —$$

их циклически приведенные записи, причем $x_m = 1$, если $m > 0$, и $y_n = 1$, если $n > 0$. Определим подмножество U группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$, включив в него объединение

$$H_{+f} \cup H_{-f} \cup \{y,\, x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_m,\, y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_n\},$$

а также всевозможные элементы вида $w^{-1}x^*w$, где x^* — некоторая циклическая перестановка элемента x и $w \in H_{+f} \cup H_{-f}$.

Как и выше, из (3) следует, что

$$x_0\rho_{\mathcal{R}} t_f^{\delta_1} x_1\rho_{\mathcal{R}} \ldots t_f^{\delta_m} x_m\rho_{\mathcal{R}}, \quad y_0\rho_{\mathcal{R}} t_f^{\varepsilon_1} y_1\rho_{\mathcal{R}} \ldots t_f^{\varepsilon_n} y_n\rho_{\mathcal{R}} \ —$$

циклически приведенные записи элементов $x\rho_{\mathcal{R}}$ и $y\rho_{\mathcal{R}}$. Если указанные элементы сопряжены в группе $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$, то согласно предложению 1.1.3 возможны два случая:

1) $m = n = 0$ и существуют элементы $h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_k \in H_{+f} \cup H_{-f}$ $(k \geqslant 0)$ такие, что любые соседние члены последовательности

$$x\rho_{\mathcal{R}},\, h_1\rho_{\mathcal{R}},\, h_2\rho_{\mathcal{R}},\, \ldots,\, h_k\rho_{\mathcal{R}},\, y\rho_{\mathcal{R}}$$

сопряжены при помощи элемента из множества $G_u\rho_{\mathcal{R}} \cup \{t_f, t_f^{-1}\}$;

2) $m = n > 0$ и $y\rho_{\mathcal{R}} = (w\rho_{\mathcal{R}})^{-1}x^*_{\mathcal{R}}w\rho_{\mathcal{R}}$ для подходящих элемента $w \in H_{+f} \cup H_{-f}$ и циклической перестановки $x^*_{\mathcal{R}}$ элемента $x\rho_{\mathcal{R}}$.

Очевидно, что $x^*_{\mathcal{R}} = x^*\rho_{\mathcal{R}}$ для некоторой циклической перестановки x^* элемента x. Поэтому во втором случае $y\rho_{\mathcal{R}} = (w^{-1}x^*w)\rho_{\mathcal{R}}$ и, так как y, $w^{-1}x^*w \in U$, то $y = w^{-1}x^*w$ ввиду (2). В первом случае, если $g_1\rho_{\mathcal{R}}$, $g_2\rho_{\mathcal{R}}$ — соседние члены последовательности и $g_1\rho_{\mathcal{R}} \sim_{G_u\rho_{\mathcal{R}}} g_2\rho_{\mathcal{R}}$, то $g_1 \sim_{G_u} g_2$ в силу (1). Если же

$$g_1\rho_{\mathcal{R}} = t_f^{-\varepsilon} g_2\rho_{\mathcal{R}} t_f^{\varepsilon} = (t_f^{-\varepsilon} g_2 t_f^{\varepsilon})\rho_{\mathcal{R}}$$

для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, то g_1, g_2, $t_f^{-\varepsilon} g_2 t_f^{\varepsilon} \in H_{+f} \cup H_{-f}$ и $g_1 = t_f^{-\varepsilon} g_2 t_f^{\varepsilon}$ согласно (2). Таким образом, в любом случае элементы x и y оказываются сопряженными в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в противоречие с предположением и отсюда вновь следует, что элементы $x\rho_{\mathcal{R}}$ и $y\rho_{\mathcal{R}}$ не сопряжены в группе $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$.

Глава 8. Нильпотентная аппроксимируемость

§ 8.1. Формулировка результатов

Общая идея изучения нильпотентной аппроксимируемости, применяемая в настоящей главе, состоит в том, чтобы исключить из рассмотрения как можно больше случаев, используя для этого необходимые и достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами групп, а также приводимое ниже необходимое условие локальной аппроксимируемости нильпотентными группами. Как обычно, будем говорить, что группа обладает некоторым свойством *локально*, если для каждой ее конечно порожденной подгруппы указанное свойство имеет место.

Предложение 8.1.1. [35, теорема 1] *Пусть* Γ *— связный граф,*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathcal{E})\big)\ -$$

граф групп над Γ, *каждая группа* G_v $(v \in \mathcal{V})$ *локально удовлетворяет нетривиальному тождеству* (*необязательно одному и тому же для всех групп*) *и для всякого ребра* $e \in \mathcal{E}$ *справедливы соотношения*

$$H_{+e} \neq G_{e(1)}, \quad H_{-e} \neq G_{e(-1)}, \quad [G_{e(1)} : H_{+e}] \cdot [G_{e(-1)} : H_{-e}] > 4.$$

Если группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ *локально аппроксимируется нильпотентными группами, то существует простое число* p *такое, что для любых* $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ *подгруппа* $H_{\varepsilon e}$ p'*-изолирована в группе* $G_{e(\varepsilon)}$.

Формулировку приведенного утверждения несколько портит условие на индексы реберных подгрупп. Однако, в некоторых случаях (в том числе для обобщенных групп Баумслага–Солитэра) от него удается избавиться.

Если сравнить необходимое условие из предложения 8.1.1, например, с результатами из параграфов 4.1, 5.1 и 6.4, то легко увидеть, что оно является существенной частью ряда достаточных условий аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ конечными p-группами. Некоторые другие составляющие указанных условий выполняются при дополнительном предположении о финитной аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$. Это предположение оказывается верным, если данная группа нильпотентно аппроксимируема и конечно порождена (см. предложение 8.2.1 ниже). Таким образом, в отдельных случаях «зазор» между необходимым условием нильпотентной аппроксимируемости из предложения 8.1.1 и тем или иным достаточным условием аппроксимируемости конечными p-группами становится совсем небольшим и его удается ликвидировать. Настоящая глава служит примером применения такого подхода (и результатов главы 5) к исследованию аппроксимируемости нильпотентными группами обобщенных групп Баумслага–Солитэра.

Критерий нильпотентной аппроксимируемости обычной группы Баумслага–Солитэра содержит

Теорема 8.1.2. [53] *Группа* $\mathrm{BS}(m,n)$ *аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда либо* $m = 1$ *и* $n \neq 2$, *либо* $m > 1$ *и* $n = \varepsilon m$ *для некоторого* $\varepsilon = \pm 1$.

Далее, как и в главе 5, будем предполагать, что Γ — непустой конечный связный граф, $\mathcal{L}(\Gamma)$ — некоторый граф с метками $\lambda(\varepsilon e)$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) и $\mathfrak{G} = \pi_1(\mathcal{L}(\Gamma))$ — соответствующая ему GBS-группа с вершинными группами $G_v = \langle g_v \rangle$ ($v \in \mathcal{V}$) и реберными подгруппами $H_{\varepsilon e} = \big\langle g_{e(\varepsilon)}^{\lambda(\varepsilon e)} \big\rangle$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$). В сочетании с теоремой 8.1.2 критерий нильпотентной аппроксимируемости произвольной GBS-группы дает

Теорема 8.1.3. *Пусть группа* $\mathfrak{G}$ *не является разрешимой и задающий ее граф с метками* $\mathcal{L}(\Gamma)$ *редуцирован.*

1. *Если* $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$, *то группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируется конечными* p*-группами для некоторого простого числа* p.

2. *Если* $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$, *то следующие утверждения равносильны*:
   а) *группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется нильпотентными группами*;
   б) *группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется конечными нильпотентными* $\{2, p\}$*-группами для некоторого простого числа* p *(которое может быть равно* 2*)*;
   в) *все метки графа* $\mathcal{L}(\Gamma)$ *являются* p*-числами для некоторого простого* p *и, если* $p \neq 2$, *то каждый сопряженный со своим обратным эллиптический элемент принадлежит циклическому радикалу группы* $\mathfrak{G}$.

3. *Если* $\operatorname{Im}\Delta \nsubseteq \{1, -1\}$, *то группа* $\mathfrak{G}$ *не аппроксимируется нильпотентными группами.*

Отметим, что если граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован, все его метки являются p-числами для некоторого простого $p \neq 2$ и $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$, то существует алгоритм, проверяющий, что каждый сопряженный со своим обратным эллиптический элемент принадлежит циклическому радикалу группы $\mathfrak{G}$; он приводится в конце параграфа 8.3.

Результаты главы 5 позволяют ответить и на вопрос об условиях аппроксимируемости GBS-группы нильпотентными группами без кручения. Справедлива

Теорема 8.1.4. *Следующие утверждения равносильны.*

1. *Группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется нильпотентными группами без кручения.*
2. *Группа* $\mathfrak{G}$ *аппроксимируется свободными группами.*
3. *Группа* $\mathfrak{G}$ *изоморфна прямому произведению свободной и бесконечной циклической групп.*

В связи с последним утверждением имеет смысл отметить, что согласно теореме 1 из [87] прямое произведение свободной и бесконечной циклической групп принадлежит классу $\mathcal{FR}\Phi$ (fully residually free-групп) тогда и только тогда, когда оба его сомножителя являются циклическими группами.

§ 8.2. Некоторые вспомогательные утверждения

Конечной группой *примарного порядка* будем называть конечную группу, порядок которой является степенью некоторого простого числа.

Предложение 8.2.1. *Пусть X — конечно порожденная группа. Если группа X аппроксимируется нильпотентными группами, то она аппроксимируется конечными группами примарных порядков. Если группа X аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, то для каждого простого числа p она аппроксимируется конечными p-группами.*

Доказательство. Так как группа X конечно порождена, то она аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами или конечно порожденными нильпотентными группами без кручения и требуемое утверждение вытекает из теоремы 2.1 работы [118]. □

Предложение 8.2.2. *Пусть X — некоторая группа, x, y — элементы группы X такие, что $x^{-1}yx = y^{-1}$. Пусть также p — простое число и ψ — гомоморфизм группы X на конечную p-группу. Если $p \neq 2$, то $y\psi = 1$.*

Доказательство. Пусть $\gamma_i(X)$ обозначает i-й член нижнего центрального ряда группы X, r — порядок элемента $y\psi$. Непосредственно проверяется, что для каждого $i \geqslant 0$ справедливо включение $y^{2^i} \in \gamma_{i+1}(X)$. Поскольку группа $X\psi$ нильпотентна, отсюда следует, что для некоторого $i \geqslant 0$ имеет место равенство $y^{2^i}\psi = 1$. Если $p \neq 2$, то $1 = (r, 2^i) = r\alpha + 2^i\beta$ для подходящих целых чисел α, β и потому $y\psi = (y\psi)^{r\alpha+2^i\beta} = 1$. □

Предложение 8.2.3. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является разрешимой и граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован. Если группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется нильпотентными группами, то все метки $\lambda(\varepsilon e)$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) представляют собой p-числа для некоторого простого p.*

Доказательство. Так как граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован, то для каждого его ребра e, не являющегося петлей, справедливы соотношения $|\lambda(+e)| \neq 1 \neq |\lambda(-e)|$. Покажем, что эти неравенства можно считать выполненными и для всех петель графа $\mathcal{L}(\Gamma)$.

Согласно предложению 8.2.1 группа $\mathfrak{G}$ финитно аппроксимируема, и по теореме 5.2.2 $\operatorname{Im}\Delta \subseteq \{1, -1\}$. Отсюда следует, что граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ не может содержать петлю e, удовлетворяющую соотношениям $|\lambda(\varepsilon e)| = 1 \neq |\lambda(-\varepsilon e)|$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$. Пусть подграф Γ' графа Γ получается из последнего путем удаления каждой петли e такой, что (в графе $\mathcal{L}(\Gamma)$) $|\lambda(+e)| = 1 = |\lambda(-e)|$. Тогда по предложению 1.2.1 группа $\pi_1(\mathcal{L}(\Gamma'))$ изоморфна подгруппе группы $\mathfrak{G}$ и, следовательно, аппроксимируется нильпотентными группами. Поскольку для каждого ребра e графа Γ' справедливы соотношения $|\lambda(+e)| \neq 1 \neq |\lambda(-e)|$ и единица является степенью любого числа p, далее вместо графов Γ, $\mathcal{L}(\Gamma)$ и группы $\mathfrak{G}$ можно рассматривать графы Γ', $\mathcal{L}(\Gamma')$ и группу $\pi_1(\mathcal{L}(\Gamma'))$.

Итак, будем считать, что $|\lambda(\varepsilon e)| \neq 1$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Если для любого ребра $e \in \mathcal{E}$ хотя бы одно из чисел $|\lambda(+e)|$, $|\lambda(-e)|$ больше 2, то требуемое утверждение вытекает из предложения 8.1.1. Поэтому предположим, что для некоторого ребра $e \in \mathcal{E}$ справедливы равенства $|\lambda(+e)| = 2 = |\lambda(-e)|$, и покажем, что тогда все метки $\lambda(\varepsilon f)$ ($f \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) являются 2-числами.

Пусть, напротив, ребро $f \in \mathcal{E}$ таково, что хотя бы одно из чисел $\lambda(+f)$, $\lambda(-f)$ делится на простое число $p \neq 2$. Покажем, что графы Γ и $\mathcal{L}(\Gamma)$ можно при необходимости модифицировать так, чтобы а) граф Γ содержал простую цепь, первым и последним ребрами которой служили бы ребра e и f; б) фундаментальные группы исходного и модифицированного графов с метками были изоморфны.

В самом деле, если цепи указанного вида в графе Γ нет, то выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:

1) ребра e и f не являются петлями и соединяют одну и ту же пару вершин, т. е. $f(1) = e(\varepsilon)$ и $f(-1) = e(-\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$;

2) e является петлей;

3) f является петлей.

В первом случае модифицируем графы Γ и $\mathcal{L}(\Gamma)$ следующим образом: добавим к графу Γ новую вершину v_f и ребро, соединяющее эту вершину с вершиной $f(-1)$; заменим ребро f ребром, идущим от вершины $f(1)$ к v_f; в графе $\mathcal{L}(\Gamma)$ первому из добавленных ребер сопоставим метки $(1,1)$, второму — $\lambda(+f)$ в вершине $f(1)$ и $\lambda(-f)$ в вершине v_f. Выполним в точности те же преобразования, если f — петля, и модифицируем графы Γ и $\mathcal{L}(\Gamma)$ аналогичным образом, если петлей является ребро e. Во всех случаях исходный граф с метками получается из модифицированного элементарным схлопыванием, поэтому их фундаментальные группы изоморфны.

Пусть Ω — простая цепь в графе Γ, начинающаяся ребром e и заканчивающаяся ребром f. Нетрудно показать, что она является подграфом некоторого остовного дерева в графе Γ. Поэтому согласно предложению 1.2.1 группа $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega))$ может быть вложена в группу $\pi_1(\mathcal{L}(\Gamma))$ и, следовательно, аппроксимируется нильпотентными группами. Пусть для определенности вершины $e(1)$ и $f(-1)$ являются концами цепи и число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $p \mid \lambda(\varepsilon f)$. Рассмотрим элементы

$$x_1 = \bigl[g_{e(1)}, g_{e(-1)}\bigr], \quad x_2 = \bigl[g_{f(-\varepsilon)}, g_{f(\varepsilon)}^{\lambda(\varepsilon f)/p}\bigr],$$
$$x = \bigl[x_1, x_2\bigr] = g_{e(-1)}^{-1} g_{e(1)}^{-1} g_{e(-1)} g_{e(1)} x_2^{-1} g_{e(1)}^{-1} g_{e(-1)}^{-1} g_{e(1)} g_{e(-1)} x_2.$$

Пусть цепь Ω_1 получается из цепи Ω удалением вершины $e(1)$ и ребра e, цепь Ω_2 — удалением вершины $f(-1)$ и ребра f, $F_1 = \pi_1(\mathcal{L}(\Omega_1))$ и $F_2 = \pi_1(\mathcal{L}(\Omega_2))$. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega))$ представляет собой свободное произведение P_1 групп $G_{e(1)}$, F_1 с объединенными подгруппами H_{+e}, H_{-e} и одновременно — свободное произведение P_2 групп F_2, $G_{f(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+f}, H_{-f}. Поскольку $|\lambda(-\varepsilon f)| \neq 1$ и $|\lambda(\varepsilon f)/p| < |\lambda(\varepsilon f)|$, элемент x_2 имеет в обобщенном свободном произведении P_2

несократимую запись длины 4 и, следовательно, не принадлежит свободному множителю F_2 и его подгруппе H_{-e}. Отсюда и из равенств $|\lambda(+e)| = 2 = |\lambda(-e)|$ вытекает, что элемент x имеет в обобщенном свободном произведении P_1 несократимую запись длины, не меньшей 8, и потому отличен от 1.

Пусть q — произвольное простое число и ψ — некоторый гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega))$ на конечную q-группу. Если $q \neq 2$ и r — порядок элемента $g_{e(1)}\psi$, то $(r, 2) = 1$. Отсюда и из включений $g_{e(1)}^2\psi \in H_{+e}\psi$, $g_{e(1)}^r\psi \in H_{+e}\psi$ следует, что $g_{e(1)}\psi \in H_{+e}\psi = H_{-e}\psi$ и $x_1\psi = 1$. Аналогично, если $q \neq p$ и s — порядок элемента $g_{f(\varepsilon)}^{\lambda(\varepsilon f)/p}\psi$, то из включений $\big(g_{f(\varepsilon)}^{\lambda(\varepsilon f)/p}\big)^p\psi \in H_{\varepsilon f}\psi$, $\big(g_{f(\varepsilon)}^{\lambda(\varepsilon f)/p}\big)^s\psi \in H_{\varepsilon f}\psi$ получаем, что $x_2\psi = 1$. Таким образом, при каждом гомоморфизме группы $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega))$ на конечную группу примарного порядка образ элемента x оказывается равным 1, и это противоречит нильпотентной аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega))$ в силу предложения 8.2.1. □

§ 8.3. Алгоритм для проверки условия теоремы 8.1.3

Пусть $\mathcal{E}^*$ — множество путей в графе Γ. Определим функцию $\xi\colon \mathcal{E}^* \to \{1, -1\}$ следующим образом. Если $e \in \mathcal{E}$, то $\xi(e) = \operatorname{sign} \lambda(+e)\lambda(-e)$. Если $s = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — путь в графе Γ, то $\xi(s) = \prod_{i=1}^{n} \xi(e_i)$. В частности, если путь s имеет нулевую длину, то $\xi(s) = 1$.

Приводимый далее алгоритм присваивает вершинам графа Γ метки, равные ± 1. Метка, соответствующая вершине v, обозначается через $\zeta(v)$. Исходно все вершины не отмечены.

Алгоритм.

1. Если граф уже содержит отмеченные вершины, выберем некоторую вершину v без метки, смежную с одной из отмеченных. В противном случае возьмем произвольную вершину v графа Γ.

2. Если в вершине v имеется петля e такая, что $\xi(e) = -1$, то алгоритм завершает работу, не отметив вершину v.

3. Пусть $\mathcal{E}_v$ — множество ребер графа Γ, каждое из которых соединяет вершину v с какой-либо из уже отмеченных вершин, и, если $e \in \mathcal{E}_v$, то $\varepsilon_e = \pm 1$ — такое число, что $e(\varepsilon_e) = v$.

3.1. Если существуют ребра $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_v$ такие, что

$$\xi(e_1)\zeta(e_1(-\varepsilon_{e_1})) \neq \xi(e_2)\zeta(e_2(-\varepsilon_{e_2})),$$

то алгоритм завершает работу, не отметив вершину v.

3.2. В противном случае полагаем $\zeta(v) = 1$, если $\mathcal{E}_v = \varnothing$, и $\zeta(v) = \xi(e)\zeta(e(-\varepsilon_e))$, если $\mathcal{E}_v \neq \varnothing$ и e — некоторое ребро из множества $\mathcal{E}_v$ (независимость метки $\zeta(v)$ от выбора ребра e обеспечивается шагом 3.1).

4. Если все вершины графа Γ были отмечены, то алгоритм завершает работу, в противном случае возвращается к шагу 1.

Предложение 8.3.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $\xi(s) = 1$ *для любого замкнутого пути* s *в графе* Γ, *то приведенный алгоритм завершает работу, отметив все вершины графа* Γ, *при любой последовательности выбора вершин на шаге* 1.

2. *Если при некоторой последовательности выбора вершин на шаге* 1 *приведенный алгоритм завершает работу, отметив все вершины графа* Γ, *то* $\xi(s) = 1$ *для любого замкнутого пути* s *в графе* Γ.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если v — некоторая отмеченная алгоритмом вершина графа Γ и u — вершина, которая была отмечена первой, то в графе Γ существует путь s, соединяющий u с v и состоящий из вершин, отмеченных не позже v, причем $\zeta(v) = \xi(s)$. Это нетрудно показать, используя индукцию по числу шагов работы алгоритма.

1. Зафиксируем некоторую последовательность выбора алгоритмом вершин на шаге 1 и рассмотрим произвольную вершину v из этой последовательности. Если в вершине v имеется петля e, то она представляет собой замкнутый путь и потому $\xi(e) = 1$. Пусть $\mathcal{E}_v \neq \varnothing$, $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_v$ — произвольные ребра, $v_1 = e_1(-\varepsilon_{e_1})$, $v_2 = e_2(-\varepsilon_{e_2})$ и u — первая отмеченная алгоритмом вершина. Тогда существуют пути s_1, s_2, соединяющие вершины v_1, v_2 с u и такие, что $\zeta(v_1) = \xi(s_1)$, $\zeta(v_2) = \xi(s_1)$. Путь s, составленный из путей s_1, s_2 и ребер e_1, e_2, является замкнутым, поэтому

$$1 = \xi(s) = \xi(s_1)\xi(s_2)\xi(e_1)\xi(e_2)$$

и

$$\xi(e_1)\zeta(v_1) = \xi(e_1)\xi(s_1) = \xi(e_2)\xi(s_2) = \xi(e_2)\zeta(v_2).$$

Таким образом, алгоритм не завершается ни на шаге 2, ни на шаге 3.1, и вершина v попадает в число отмеченных. Поскольку она была выбрана произвольно, это означает, что алгоритм отметит все вершины графа Γ.

2. Так как алгоритм отмечает все вершины графа, не завершаясь на шаге 2, то $\xi(e) = 1$ для каждой петли $e \in \mathcal{E}$ и далее можно ограничиться рассмотрением замкнутых путей, не содержащих петель. Будем рассуждать индукцией по числу n итераций (шагов 1–4), потребовавшихся алгоритму для того, чтобы отметить все вершины пути указанного вида.

Так как на каждой итерации алгоритма отмечается не более одной вершины, то при $n = 1$ рассматриваемый путь s ввиду отсутствия в нем петель имеет нулевую длину и равенство $\xi(s) = 1$ очевидно. Далее будем считать, что $n > 1$ и для всех замкнутых путей, вершины которых отмечаются не более, чем за $n - 1$ итерацию, функция ξ имеет требуемое значение.

Пусть s — замкнутый путь без петель ненулевой длины, вершины которого отмечаются за n итераций, v — принадлежащая s вершина, отмеченная последней. Разбивая при необходимости путь s на замкнутые части, каждая из которых начинается и заканчивается в вершине v, можем считать далее, что s проходит через v

только один раз. Тогда однозначно определен фрагмент (v_1, e_1, v, e_2, v_2) пути s, где e_1, e_2 — ребра (которые могут совпадать) и v_1, v_2 — вершины (которые также могут совпадать). Ввиду отсутствия петель в пути s справедливы соотношения $v_1 \neq v \neq v_2$ и $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_v$.

Пусть u — первая отмеченная алгоритмом вершина. Тогда существуют пути s_1, s_2, соединяющие вершины v_1, v_2 с u, состоящие из вершин, отмеченных не позже v_1, v_2 соответственно и такие, что $\zeta(v_1) = \xi(s_1)$, $\zeta(v_2) = \xi(s_2)$. Обозначим через s_0 путь, получающийся из s удалением вершины v и ребер e_1, e_2. Тогда объединение s_3 путей s_0, s_1, s_2 представляет собой замкнутый путь, все вершины которого отмечаются не более, чем за $n-1$ итерацию, и по индуктивному предположению

$$1 = \xi(s_3) = \xi(s_0)\xi(s_1)\xi(s_2).$$

Так как вершина v отмечается алгоритмом, то условие шага 3.1 не может быть выполнено и потому $\xi(e_1)\zeta(v_1) = \xi(e_2)\zeta(v_2)$. Отсюда

$$\xi(e_1)\xi(e_2) = \zeta(v_1)\zeta(v_2) = \xi(s_1)\xi(s_2)$$

и, следовательно,

$$\xi(s) = \xi(s_0)\xi(e_1)\xi(e_2) = \xi(s_0)\xi(s_1)\xi(s_2) = 1,$$

что и требовалось. □

Предложение 8.3.2. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является разрешимой, граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован, $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$ и все метки $\lambda(\varepsilon e)$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) представляют собой p-числа для некоторого простого $p \neq 2$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если каждый сопряженный со своим обратным эллиптический элемент группы $\mathfrak{G}$ принадлежит циклическому радикалу $C(\mathfrak{G})$, то $\xi(s) = 1$ для любого замкнутого пути s в графе Γ, все ребра которого содержатся в множестве*

$$\mathcal{E}' = \{e \in \mathcal{E} \mid H_{+e} \neq C(\mathfrak{G}) \neq H_{-e}\}.$$

2. *Если $\xi(s) = 1$ для каждого замкнутого пути s в графе Γ, все ребра которого содержатся в множестве $\mathcal{E}'$, то любой сопряженный со своим обратным эллиптический элемент принадлежит $C(\mathfrak{G})$ и фактор-группа $\mathfrak{G}/C(\mathfrak{G})$ аппроксимируется конечными p-группами.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ и начнем с нескольких замечаний, относящихся как к утверждению 1, так и к утверждению 2.

Согласно предложению 5.3.4

$$1 \neq C(\mathfrak{G}) = \bigcap_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \varepsilon = \pm 1}} H_{\varepsilon e} \leqslant \bigcap_{v \in \mathcal{V}} G_v$$

и наименьшее общее кратное μ чисел $\mu(v) = \big[G_v : C(\mathfrak{G})\big]$ ($v \in \mathcal{V}$) делит произведение

$$\prod_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \varepsilon = \pm 1}} \lambda(\varepsilon e).$$

Следовательно, μ и все индексы $\mu(v)$ ($v \in \mathcal{V}$) являются p-числами.

Если граф Γ содержит одну вершину v и $\mu = \mu(v) = 1$, то $\mathcal{E}' = \varnothing$, каждый эллиптический элемент группы $\mathfrak{G}$ принадлежит подгруппе $G_v = C(\mathfrak{G})$ и фактор-группа $\mathfrak{G}/C(\mathfrak{G})$ является свободной группой, аппроксимируемой конечными p-группами в силу предложения 1.4.8. Поэтому оба доказываемых утверждения оказываются выполненными. Если же в графе Γ имеется по крайней мере две вершины, то любая его вершина инцидентна некоторому ребру, не являющемуся петлей. Поскольку граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован, отсюда следует, что каждая вершинная группа собственным образом содержит некоторую реберную подгруппу и потому $C(\mathfrak{G}) \neq G_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Таким образом, далее можно считать, что все числа $\mu(v)$ $(v \in \mathcal{V})$ отличны от 1 и, стало быть, делятся на p.

Пусть $e \in \mathcal{E}$ — произвольное ребро. Тогда $g_{e(1)}^{\lambda(+e)} \sim_{\mathfrak{G}} g_{e(-1)}^{\lambda(-e)}$ и $H_{+e} \sim_{\mathfrak{G}} H_{-e}$. Поскольку подгруппа $C(\mathfrak{G})$ нормальна в группе $\mathfrak{G}$, отсюда следует, что для некоторого p-числа $k_e \geqslant 1$ имеют место равенства $\big[H_{+e} : C(\mathfrak{G})\big] = k_e = \big[H_{-e} : C(\mathfrak{G})\big]$ и потому

$$|\lambda(+e)|k_e = \mu(e(1)), \quad |\lambda(-e)|k_e = \mu(e(-1)).$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждений 1 и 2.

1. Положим $g'_v = g_v^{\mu(v)/p}$ $(v \in \mathcal{V})$ и покажем, что для любого ребра $e \in \mathcal{E}'$ элементы $g'_{e(1)}$ и $(g'_{e(-1)})^{\xi(e)}$ сопряжены в группе $\mathfrak{G}$.

Действительно, пусть $e \in \mathcal{E}'$ — произвольное ребро. Тогда $k_e \neq 1$ и потому $p \mid k_e$. Из соотношения $g_{e(1)}^{\lambda(+e)} \sim_{\mathfrak{G}} g_{e(-1)}^{\lambda(-e)}$ следует, что $g_{e(1)}^{|\lambda(+e)|} \sim_{\mathfrak{G}} g_{e(-1)}^{\xi(e)|\lambda(-e)|}$. Значит,

$$g'_{e(1)} = g_{e(1)}^{|\lambda(+e)|(k_e/p)} \sim_{\mathfrak{G}} g_{e(-1)}^{\xi(e)|\lambda(-e)|(k_e/p)} = (g'_{e(-1)})^{\xi(e)}.$$

Таким образом, если s — замкнутый путь в графе Γ, все ребра которого содержатся в множестве $\mathcal{E}'$, и $\xi(s) = -1$, то для каждой вершины v этого пути $g'_v \sim_{\mathfrak{G}} (g'_v)^{\xi(s)} = (g'_v)^{-1}$ и, поскольку $g'_v \notin C(\mathfrak{G})$, утверждение 1 доказано.

2. Пусть $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ обозначает множество ребер дерева $\mathcal{T}$. Для доказательства аппроксимируемости фактор-группы $\mathfrak{G}/C(\mathfrak{G})$ определим отображение σ_0 образующих g_v $(v \in \mathcal{V})$ и t_e $(e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}})$ группы $\mathfrak{G}$ в аддитивную группу кольца $\mathbb{Z}_\mu$ следующим образом.

Пусть $\Gamma' = (\mathcal{V}, \mathcal{E}')$ — граф, получающийся из Γ удалением всех ребер, не входящих в множество $\mathcal{E}'$, и $\Gamma'_i = (\mathcal{V}_i, \mathcal{E}'_i)$ — некоторая компонента связности графа Γ'. Выберем произвольным образом вершину $v \in \mathcal{V}_i$ и положим $g_v\sigma_0 = \mu/\mu(v)$. Если $w \in \mathcal{V}_i$ — некоторая вершина и s — путь в графе Γ'_i, соединяющий v и w, положим $g_w\sigma_0 = \xi(s)\mu/\mu(w)$. Из условия утверждения 2 следует, что для любых двух путей s_1, s_2, соединяющих вершины v и w в графе Γ'_i, справедливо равенство $\xi(s_1) = \xi(s_2)$ и потому приведенное определение корректно. Повторим описанные действия для всех остальных компонент связности графа Γ' и положим $t_e\sigma_0 = 0$ для всех $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$.

Продолжим σ_0 до отображения слов σ и покажем, что последнее переводит в верные равенства все определяющие соотношения группы $\mathfrak{G}$.

Пусть $e \in \mathcal{E}$ — произвольное ребро. Как установлено ранее, $|\lambda(+e)|k_e = \mu(e(1))$ и $|\lambda(-e)|k_e = \mu(e(-1))$, где $k_e = \bigl[H_{+e} : C(\mathfrak{G})\bigr] = \bigl[H_{-e} : C(\mathfrak{G})\bigr]$. Если $e \in \mathcal{E}'$, v — выбранная выше фиксированная вершина из компоненты связности графа Γ', которой принадлежит ребро e, и s_1, s_{-1} — некоторые пути в графе Γ', соединяющие вершину v с вершинами $e(1)$, $e(-1)$ соответственно, то $\xi(s_1) = \xi(s_{-1})\xi(e)$, откуда

$$\xi(s_1) \cdot \operatorname{sign} \lambda(+e) = \xi(s_{-1}) \cdot \operatorname{sign} \lambda(-e)$$

и

$$\begin{aligned} g_{e(1)}^{\lambda(+e)}\sigma &= \xi(s_1)\lambda(+e)\mu/\mu(e(1)) \\ &= \xi(s_1) \cdot \operatorname{sign} \lambda(+e) \cdot |\lambda(+e)|\mu/\mu(e(1)) \\ &= \xi(s_{-1}) \cdot \operatorname{sign} \lambda(-e) \cdot |\lambda(-e)|\mu/\mu(e(-1)) \\ &= \xi(s_{-1})\lambda(-e)\mu/\mu(e(-1)) = g_{e(-1)}^{\lambda(-e)}\sigma. \end{aligned}$$

Если $e \notin \mathcal{E}'$, то $k_e = 1$ и потому

$$g_{e(1)}^{\lambda(+e)}\sigma = \varepsilon|\lambda(+e)|\mu/\mu(e(1)) = \varepsilon\mu \equiv \delta\mu = \delta|\lambda(-e)|\mu/\mu(e(-1)) = g_{e(-1)}^{\lambda(-e)}\sigma \pmod{\mu}$$

для некоторых $\varepsilon, \delta = \pm 1$.

Таким образом, отображение σ задает гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в конечную p-группу. Из определения σ вытекает, что для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ порядок элемента $g_v\sigma$ равен $\mu(v)$ и, следовательно, $\ker \sigma \cap G_v = C(\mathfrak{G})$. Поэтому согласно предложению 5.3.4 подгруппа $\ker \sigma$ представляет собой расширение группы $C(\mathfrak{G})$ при помощи некоторой свободной группы. Отсюда следует, что фактор-группа $\mathfrak{G}/C(\mathfrak{G})$ является расширением указанной свободной группы при помощи конечной p-группы. Такое расширение аппроксимируется конечными p-группами в силу предложения 1.4.8.

Предположим теперь, что x и y — элементы группы $\mathfrak{G}$ такие, что $x^{-1}yx = y^{-1}$. Тогда

$$\bigl(xC(\mathfrak{G})\bigr)^{-1}\bigl(yC(\mathfrak{G})\bigr)\bigl(xC(\mathfrak{G})\bigr) = \bigl(yC(\mathfrak{G})\bigr)^{-1}$$

и из доказанной выше аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}/C(\mathfrak{G})$ конечными p-группами ввиду предложения 8.2.2 и соотношения $p \neq 2$ следует, что $yC(\mathfrak{G}) = 1$, т. е. $y \in C(\mathfrak{G})$. Тем самым, утверждение 2 полностью доказано. □

Алгоритм проверки условия утверждения 2в теоремы 8.1.3. Пусть группа $\mathfrak{G}$ не является разрешимой, граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован и $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$. Тогда $C(\mathfrak{G}) \leqslant \bigcap_{v \in \mathcal{V}} G_v$ и существует алгоритм, вычисляющий индексы $\mu(v) = \bigl[G_v : C(\mathfrak{G})\bigr]$ $(v \in \mathcal{V})$ [105, § 5]. Это позволяет найти граф Γ', который получается из Γ удалением всех ребер, не входящих в множество

$$\mathcal{E}' = \{e \in \mathcal{E} \mid H_{+e} \neq C(\mathfrak{G}) \neq H_{-e}\}.$$

В силу предложений 8.3.1 и 8.3.2 для завершения проверки условия утверждения 2в теоремы 8.1.3 остается к каждой компоненте связности графа Γ' применить приведенный выше алгоритм.

§ 8.4. Доказательства теорем 8.1.3 и 8.1.4

Доказательство теоремы 8.1.3.

1. Если группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется нильпотентными группами, то по предложению 8.2.3 все метки $\lambda(\varepsilon e)$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) являются p-числами для некоторого простого числа p. Отсюда и из равенства $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$ ввиду теоремы 5.2.2 следует, что группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется конечными p-группами. Поскольку каждая конечная p-группа нильпотентна, обратное утверждение также имеет место.

2. Импликация б $\Rightarrow$ а очевидна.

а $\Rightarrow$ в. Согласно предложению 8.2.3 все метки $\lambda(\varepsilon e)$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$) являются p-числами для некоторого простого числа p. Предположим, что $p \neq 2$ и существует эллиптический элемент a, сопряженный со своим обратным, но не принадлежащий циклическому радикалу группы $\mathfrak{G}$.

Зафиксируем некоторое остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ. Заменяя при необходимости элемент a на сопряженный с ним, можно считать, что $a \in G_v$ для некоторой вершины $v \in \mathcal{V}$. Так как подгруппа $C(\mathfrak{G})$ нормальна в $\mathfrak{G}$, то после произведенной замены элемент a по-прежнему не принадлежит $C(\mathfrak{G})$. Положим

$$\mathcal{E}_1 = \bigl\{e \in \mathcal{E} \bigm| |\lambda(+e)| = 1 = |\lambda(-e)|\bigr\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \bigl\{e \in \mathcal{E} \bigm| |\lambda(+e)| \neq 1 \neq |\lambda(-e)|\bigr\}$$

и покажем, что найдется ребро $e \in \mathcal{E}_2$ такое, что $a \notin H_{\varepsilon e}$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$.

В самом деле, согласно предложению 5.3.4

$$C(\mathfrak{G}) = \bigcap_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ \varepsilon = \pm 1}} H_{\varepsilon e}.$$

Так как граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован, то каждое ребро $e \in \mathcal{E}$, не являющееся петлей, принадлежит множеству $\mathcal{E}_2$. Если e — петля, то $\Delta(t_e) = \lambda(-e)/\lambda(+e)$ и из равенства $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$ следует, что либо $e \in \mathcal{E}_1$, либо $e \in \mathcal{E}_2$. Если $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$, то Γ имеет только одну вершину, циклический радикал $C(\mathfrak{G})$ совпадает с единственной вершинной группой и потому содержит все эллиптические элементы группы $\mathfrak{G}$, что противоречит соотношению $a \notin C(\mathfrak{G})$. Значит, либо граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ имеет одну вершину и хотя бы одну петлю $e \in \mathcal{E}_2$, либо он содержит по крайней мере две вершины и тогда каждая его вершина инцидентна некоторому ребру, не являющемуся петлей и, стало быть, входящему в множество $\mathcal{E}_2$. В обоих случаях

$$C(\mathfrak{G}) = \bigcap_{\substack{e \in \mathcal{E}_2 \\ \varepsilon = \pm 1}} H_{\varepsilon e},$$

откуда следует существование искомого ребра e.

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Ребро e принадлежит дереву $\mathcal{T}$.

Легко видеть, что в дереве $\mathcal{T}$ существует простая, содержащая e цепь Ω, один из концов которой совпадает с вершиной v, другой — с вершиной $e(\delta)$ для некоторого $\delta = \pm 1$. Согласно предложению 1.2.1 группа $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega))$ вкладывается в группу $\mathfrak{G}$ посредством тождественного отображения образующих.

Пусть Ω' — цепь, получающаяся из Ω путем удаления ребра e и вершины $e(\delta)$. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega))$ представляет собой свободное произведение групп $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega'))$ и $G_{e(\delta)}$ с объединенными подгруппами $H_{-\delta e}$ и $H_{\delta e}$. Рассмотрим элементы

$$x_1 = [g_{e(\delta)}, g_{e(-\delta)}], \quad x_2 = [x_1, a] = g_{e(-\delta)}^{-1} g_{e(\delta)}^{-1} g_{e(-\delta)} g_{e(\delta)} a^{-1} g_{e(\delta)}^{-1} g_{e(-\delta)}^{-1} g_{e(\delta)} g_{e(-\delta)} a.$$

Так как $|\lambda(+e)| \neq 1 \neq |\lambda(-e)|$, $a \notin H_{\varepsilon e}$ и в группе $\pi_1(\mathcal{L}(\Omega))$ справедливо равенство $H_{\varepsilon e} = H_{-\varepsilon e}$, то элемент x_2 имеет в этой группе несократимую запись длины, не меньшей 8, и, следовательно, отличен от 1.

Пусть q — произвольное простое число и ψ — некоторый гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на конечную q-группу. Если $q \neq 2$, то в силу предложения 8.2.2 $a\psi = 1$. Пусть $q = 2$ и r — порядок элемента $g_{e(1)}\psi$. Так как метка $\lambda(+e)$ является p-числом и $p \neq 2$, то $(r, \lambda(+e)) = 1$. Отсюда $g_{e(1)}\psi \in H_{+e}\psi = H_{-e}\psi$ и $x_1\psi = 1$. Таким образом, при любом значении q имеет место равенство $x_2\psi = 1$, что противоречит нильпотентной аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ в силу предложения 8.2.1.

Случай 2. Ребро e не принадлежит дереву $\mathcal{T}$.

Пусть $x_1 = \big[t_e^{\varepsilon} g_{e(-\varepsilon)} t_e^{-\varepsilon}, g_{e(\varepsilon)}\big]$. Тогда ввиду соотношений $|\lambda(+e)| \neq 1 \neq |\lambda(-e)|$ и $a \notin H_{\varepsilon e}$ элемент

$$x_2 = \big[x_1, a\big] = g_{e(\varepsilon)}^{-1} t_e^{\varepsilon} g_{e(-\varepsilon)}^{-1} t_e^{-\varepsilon} g_{e(\varepsilon)} t_e^{\varepsilon} g_{e(-\varepsilon)} t_e^{-\varepsilon} a^{-1} t_e^{\varepsilon} g_{e(-\varepsilon)}^{-1} t_e^{-\varepsilon} g_{e(\varepsilon)}^{-1} t_e^{\varepsilon} g_{e(-\varepsilon)} t_e^{-\varepsilon} g_{e(\varepsilon)} a$$

имеет в группе $\mathfrak{G}$, рассматриваемой как HNN-расширение с проходной буквой t_e, приведенную запись длины 8 и, следовательно, отличен от 1. Однако, как и выше, если ψ — гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на конечную 2-группу, то $g_{e(-\varepsilon)}\psi \in H_{-\varepsilon e}\psi$, откуда $\big(t_e^{\varepsilon} g_{e(-\varepsilon)} t_e^{-\varepsilon}\big)\psi \in H_{\varepsilon e}\psi$ и потому $x_1\psi = 1$. Таким образом, и в этом случае образ элемента x_2 равен 1 при любом гомоморфизме группы $\mathfrak{G}$ на группу примарного порядка, что противоречит нильпотентной аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$.

в $\Rightarrow$ б. Выберем некоторое остовное дерево $\mathcal{T}$ в графе Γ и приведем граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ к $\mathcal{T}$-положительной форме. Так как данная операция сводится лишь к замене некоторых из образующих g_v $(v \in \mathcal{V})$ обратными к ним, то после ее выполнения условия утверждения 2в остаются справедливыми.

Если все метки $\lambda(\varepsilon e)$ $(e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1)$ являются 2-числами, то в силу предложений 5.3.4 и 5.4.2 группа $\mathfrak{G}$ представляет собой расширение прямого произведения двух свободных групп при помощи 2-группы, аппроксимируемое 2-группами согласно предложениям 1.4.8 и 1.4.9. Поэтому далее будем считать, что $p \neq 2$.

Пусть $g \in \mathfrak{G}$ — произвольный неединичный элемент. Покажем, что существует гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на конечную p-группу или на конечную 2-группу, переводящий g в неединичный элемент.

В силу предложения 8.3.2 фактор-группа $\mathfrak{G}/C(\mathfrak{G})$ аппроксимируется конечными p-группами. Поэтому, если $g \notin C(\mathfrak{G})$, то естественный гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на группу $\mathfrak{G}/C(\mathfrak{G})$ может быть продолжен до искомого. Далее будем считать, что $g \in C(\mathfrak{G})$. Пусть Q, X и $\sigma\colon \mathfrak{G} \to X$ — подкольцо, группа и гомоморфизм из предложения 5.4.1. Так как $\operatorname{Im}\Delta = \{1, -1\}$, то $Q = \mathbb{Z}$ и группа X имеет представление

$$\big\langle x,\, a_1,\, a_{-1};\ [x, a_1] = [a_1, a_{-1}] = 1,\ a_{-1}^{-1} x a_{-1} = x^{-1}\big\rangle$$

(здесь, как и при доказательстве предложения 5.4.2, x обозначает порождающий аддитивной группы Q^+ кольца Q, равный 1). В силу предложения 5.3.4 $C(\mathfrak{G}) \leqslant \bigcap_{v\in\mathcal{V}} G_v$, поэтому $g \in G_v$ для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ и в силу определения гомоморфизма σ справедливо включение $g\sigma \in \langle x\rangle \setminus \{1\}$. Следовательно, элемент $g\sigma$ переходит в неединичный при гомоморфизме группы X на группу

$$\mathrm{BS}(1, -1) = \big\langle x, a_{-1};\ a_{-1}^{-1} x a_{-1} = x^{-1}\big\rangle.$$

Последняя аппроксимируется конечными 2-группами в силу теоремы 5.2.1, поэтому построенный гомоморфизм $\mathfrak{G} \to \mathrm{BS}(1, -1)$ может быть продолжен до искомого.

3. Так как $\operatorname{Im}\Delta \nsubseteq \{1, -1\}$, то в силу теоремы 5.2.2 группа $\mathfrak{G}$ не является финитно аппроксимируемой и согласно предложению 8.2.1 не аппроксимируется нильпотентными группами. $\square$

Доказательство теоремы 8.1.4.

$1 \Rightarrow 3$. Согласно предложению 8.2.1 из аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ нильпотентными группами без кручения следует, что она аппроксимируется конечными p-группами для любого простого числа p. Значит, в силу теоремы 5.2.1 группа $\mathfrak{G}$ не может быть изоморфна группе $\mathrm{BS}(1, n)$, где $n \neq 1$. Бесконечная циклическая группа и группа $\mathrm{BS}(1, 1)$, очевидно, удовлетворяют утверждению 3, поэтому далее будем считать, что группа $\mathfrak{G}$ не является разрешимой и задающий ее граф $\mathcal{L}(\Gamma)$ редуцирован. Тогда по теореме 5.2.2 $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$ и $|\lambda(\varepsilon e)| = 1$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Это означает, что граф Γ имеет одну вершину v и группа $\mathfrak{G}$ представляет собой расширение вершинной группы G_v при помощи свободной группы, порожденной элементами t_e ($e \in \mathcal{E}$). Поскольку расширение указанного вида расщепляемо, в группе $\mathfrak{G}$ найдется свободная подгруппа F такая, что $\mathfrak{G} = G_v F$ и $G_v \cap F = 1$. Из равенства $\operatorname{Im}\Delta = \{1\}$ и предложения 5.3.4 следует, что группа G_v лежит в центре группы $\mathfrak{G}$. Поэтому $\mathfrak{G} = G_v \times F$, как и требовалось.

$3 \Rightarrow 2$. Прямое произведение двух свободных групп аппроксимируется свободными группами в силу леммы 1.1 из [118].

$2 \Rightarrow 1$. Хорошо известно, что пересечение членов нижнего центрального ряда произвольной свободной группы тривиально [155], а факторы этого ряда являются свободными абелевыми группами [119]. Поэтому каждая свободная группа аппроксимируется нильпотентными группами без кручения. $\square$

Заключение

Подводя итог настоящей диссертации, следует отметить, что практически все ее результаты могут в том или ином смысле послужить отправной точкой для дальнейших исследований аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. Так, например, для теорем из глав 3 и 4 наиболее естественной представляется попытка ослабить требования, накладываемые на реберные подгруппы, заменив в них условие центральности нормальностью. Есть основания полагать, что таким образом удастся получить как минимум частичные аналоги достаточных условий аппроксимируемости корневыми классами для фундаментальных групп графов групп с тривиально пересекающимися реберными подгруппами и HNN-расширений с циклическими связанными подгруппами. Еще одним направлением работы может служить поиск новых ограничений, накладываемых на граф групп, при которых ассоциированное с этим графом обобщенное прямое произведение существует. Если такие ограничения будут найдены, то для фундаментальных групп удовлетворяющих им графов групп с помощью тех же методов, что и в главе 3, скорее всего, удастся доказать достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами как первого, так и второго уровней.

Результаты из главы 5 об аппроксимируемости корневыми классами обобщенных групп Баумслага–Солитэра имеет смысл попытаться распространить на тубулярные группы (отличающиеся, напомним, тем, что все их вершинные группы являются свободными абелевыми ранга 2). Существенно помочь в этом должна статья [122], где доказан критерий финитной аппроксимируемости таких групп.

Имеется довольно большая уверенность в том, что подход к исследованию свойства нильпотентной аппроксимируемости, продемонстрированный в главе 8 на примере все тех же обобщенных групп Баумслага–Солитэра, может быть использован и при изучении других групп, для которых известны условия аппроксимируемости корневыми классами групп. Среди них: свободные произведения с нормальными объединенными подгруппами, древесные произведения, реберные подгруппы которых являются ретрактами в соответствующих вершинных группах, фундаментальные группы графов групп с центральными реберными подгруппами, рассматривающиеся в настоящей диссертации, и др. По-видимому, по мере накопления примеров его успешного применения данный подход удастся превратить в полноценный метод исследования нильпотентной аппроксимируемости свободных конструкций групп.

Результаты главы 7 позволяют уже сейчас начать изучение аппроксимируемости относительно сопряженности свободных конструкций корневыми классами, состоящими из конечных групп. Однако, прежде, чем это делать, хотелось бы понять, возможно ли распространить указанные результаты хотя бы на случай, когда аппроксимирующий корневой класс содержит бесконечные периодические группы. Так или иначе, поскольку техника изучения аппроксимируемости относительно отношений равенства и сопряженности довольно сильно отличается, поначалу речь, скорее всего, будет идти лишь об обобщении известных утверждений, касающихся свойства финитной аппроксимируемости относительно сопряженности.

Результаты главы 6 формально не являются частью исследований аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, но могут пригодиться при описании отделимых подгрупп таких конструкций. Основанный на фильтрационной методике Г. Баумслага подход к изучению финитной отделимости циклических подгрупп свободных произведений двух групп с объединенной подгруппой и HNN-расширений был предложен в [131, 132]. В последующие годы он неоднократно применялся для доказательства финитной отделимости всех циклических подгрупп различных свободных конструкций групп. Последние результаты такого рода можно найти в [133, 167, 192–194, 196, 197]. Автором настоящей диссертации указанный подход был адаптирован для изучения отделимости другими классами групп и модифицирован таким образом, чтобы иметь возможность получить описание отделимых подгрупп в случае, когда не все циклические подгруппы вершинных групп обладают данным свойством [21, 25, 34, 58–60, 95, 183, 184]. Перечисленные работы открывают путь к исследованию отделимости циклических подгрупп свободных конструкций групп любым корневым классом $\mathcal{C}$, состоящим из периодических групп. При этом описанием $\mathcal{C}$-отделимых циклических подгрупп, скорее всего, можно будет снабдить любую конструкцию, для которой ранее предлагаемыми в настоящей диссертации методами или их аналогами было доказано достаточное условие $\mathcal{C}$-аппроксимируемости. Следует также отметить, что в [198–200] первоначальный подход к изучению финитной отделимости циклических подгрупп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений был распространен на конечно порожденные абелевы подгруппы. Это обещает полноценный «ремейк» уже проведенных исследований и, вероятно, позволит изучать отделимость подгрупп указанного вида произвольными корневыми классами, состоящими из периодических групп.

Так как описание отделимых циклических (или конечно порожденных абелевых) подгрупп той или иной свободной конструкции требует, очевидно, наличия аналогичных описаний для всех ее вершинных групп, то в намеченных выше исследованиях могут быть использованы результаты главы 6. Следуя совету Д. И. Молдаванского, заметим еще, что поскольку в свободной конструкции предполагается рассматривать только подгруппы определенного вида, имеет смысл попытаться обобщить данные результаты путем поиска условий, которые достаточно наложить на абелеву (нильпотентную, разрешимую и т. д.) группу для того, чтобы гарантировать $\mathcal{C}$-отделимость в ней лишь $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп требуемого вида.

Таким образом, существует целый ряд достаточно перспективных направлений, в которых сто́ит ожидать обобщения или дополнения результатов настоящей диссертации. В большинстве из них работу можно вести с помощью предлагаемых в диссертации подходов или их аналогов, и это лишний раз свидетельствует о том, что несмотря на многолетние исследования, потенциал алгебраических методов изучения аппроксимационных свойств свободных конструкций групп пока еще не исчерпан.

Список литературы*

[1] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–13.

[2] *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 3–8.

[3] *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух нильпотентных групп с конечными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2006. Вып. 3. С. 102–106.

[4] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.

[5] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 4. С. 483–491.

[6] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 9–19.

[7] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.

[8] *Азаров Д. Н.* Некоторые аппроксимационные свойства групп конечного ранга // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 2. С. 50–55.

[9] *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 163–169.

[10] *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 249–264.

[11] *Азаров Д. Н.* Критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободных произведений с объединенной циклической подгруппой нильпотентных групп конечных рангов // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 483–494.

[12] *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость конечными p-группами обобщенных свободных произведений групп // Изв. вузов. Математика. 2017. № 5. С. 3–10.

* Элементы списка расположены в соответствии с лексикографическим порядком троек (фамилия(и) автора(ов); год издания; название публикации). Предполагается, что в объединенном алфавите буквы кириллицы предшествуют буквам латиницы.

[13] *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* Аппроксимационные свойства свободных произведений конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2008. Вып. 3. С. 56–62.

[14] *Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 8–9.

[15] *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 6 (2008). С. 29–42.

[16] *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5 (2002). С. 6–10.

[17] *Бардаков В. Г.* К вопросу Д. И. Молдаванского о p-отделимости подгрупп свободной группы // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 505–509.

[18] *Бардаков В. Г., Михайлов Р. В.* Об аппроксимационных свойствах групп зацеплений // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 485–495.

[19] *Бардаков В. Г., Нещадим М. В.* Группы узлов и нильпотентная аппроксимируемость // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 4. С. 43–51.

[20] *Варламова И. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслага–Солитэра // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 107–114.

[21] *Гайворонская М. Ю., Соколов Е. В.* О финитной отделимости циклических подгрупп HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 90–97.

[22] *Гольцов Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 665–669.

[23] *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 115–128.

[24] *Горяга А. В.* Пример конечного расширения ФАС-группы, не являющегося ФАС-группой // Сиб. матем. журн. 1986. Т. 27, № 3. С. 203–205.

[25] *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115–123.

[26] *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости нильпотентными группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух абелевых групп // Чебышевский сб. 2002. Т. 3, № 1. С. 72–77.

[27] *Иванова Е. А.* Аппроксимируемость нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенными конечными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2004. Вып. 3. С. 120–125.

[28] *Иванова Е. А.* О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп : дисс... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2004.

[29] *Иванова Е. А.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений двух групп с объединенной подгруппой // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 4. С. 502–509.

[30] *Иванова Е. А.* Аппроксимируемость относительно сопряженности конечными p-группами свободных произведений двух групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2005. Вып. 3. С. 83–91.

[31] *Иванова Е. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2004. Вып. 3. С. 125–130.

[32] *Иванова О. А., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 6 (2008). С. 51–58.

[33] *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982. 288 с.

[34] *Коптева А. А., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 78–88.

[35] *Куваев А. Е.* Необходимые условия нильпотентной аппроксимируемости некоторых теоретико-групповых конструкций // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60, № 6. С. 1335–1349.

[36] *Куваев А. Е., Соколов Е. В.* Необходимые условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2017. № 9. С. 36–47.

[37] *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 448 с.

[38] *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.

[39] *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.

[40] *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем. сб. 1940. Т. 8 (50), № 3. С. 405–422.

[41] *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25 (67), № 3. С. 347–366.

[42] *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Матем. сб. 1951. Т. 28 (70), № 3. С. 567–588.

[43] *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

[44] *Михайлов Р. В.* Асферичность и аппроксимационные свойства скрещенных модулей // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 4. С. 79–94.

[45] *Молдаванский Д. И.* О финитной отделимости подгрупп // Ивановский государственный университет. 20 лет. Юбил. сб. науч. ст. Ч. II. Иваново, 1993. С. 18–23.

[46] *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2000. Вып. 3. С. 129–140.

[47] *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2002. Вып. 3. С. 123–133.

[48] *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2003. Вып. 3. С. 102–116.

[49] *Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений нильпотентных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2006. Вып. 3. С. 128–132.

[50] *Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2007. Вып. 3. С. 89–94.

[51] *Молдаванский Д. И.* Введение в комбинаторную теорию групп. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2018. 89 с.

[52] *Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2018. Вып. 2. С. 76–83.

[53] *Молдаванский Д. И.* О нильпотентной аппроксимируемости групп с одним определяющим соотношением // Матем. заметки. 2020. Т. 107, № 5. С. 752–759.

[54] *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12, № 5. С. 1085–1099.

[55] *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. Семинар. 1965. Т. 4, № 3. С. 79–83.

[56] *Смирнов Д. М.* К теории финитно аппроксимируемых групп // Укр. матем. журн. 1963. Т. 15. С. 453–457.

[57] *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений групп с нормальным объединением // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 125–131.

[58] *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения. Вып. 8 (2011). С. 101–104.

[59] *Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободного произведения двух групп с централизованными подгруппами // Математика и ее приложения. Вып. 9 (2012). С. 45–52.

[60] *Соколов Е. В.* Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 124 с.; см. также *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп : дисс... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2003.

[61] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

[62] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Корневые классы и аппроксимируемость ими свободных конструкций групп: основные понятия и результаты. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2018. 91 с.

[63] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 1. С. 150–152.

[64] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Математика и ее приложения. Вып. 9 (2012). С. 91–94.

[65] *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 134–141.

[66] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 94–102.

[67] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133–137.

[68] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Матем. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.

[69] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

[70] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

[71] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.

[72] *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.

[73] *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2020. № 12. С. 41–50.

[74] *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Период. сб. пер. иностр. ст. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

[75] *Agol I.* Criteria for virtual fibering // J. Topology. 2008. Vol. 1, № 2. P. 269–284.

[76] *Allenby R. B. J. T.* The potency of cyclically pinched one-relator groups // Arch. Math. 1981. Vol. 36, № 1. P. 204–210.

[77] *Allenby R. B. J. T.* Polygonal products of polycyclic by finite groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1996. Vol. 54, № 3. P. 369–372.

[78] *Andreadakis S., Raptis E., Varsos D.* A characterization of residually finite HNN-extensions of finitely generated Abelian groups // Arch. Math. 1988. Vol. 50, № 6. P. 495–501.

[79] *Antolìn Y., Minasyan A., Sisto A.* Commensurating endomorphisms of acylindrically hyperbolic groups and applications // Groups Geom. Dyn. 2016. Vol. 10, № 4. P. 1149–1210.

[80] *Aschenbrenner M., Friedl S.* A criterion for HNN extensions of finite p-groups to be residually p // J. Pure Appl. Algebra. 2011. Vol. 215, № 9. P. 2280–2289.

[81] *Aschenbrenner M., Friedl S.* 3-Manifold groups are virtually residually p // Memoirs Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 225, № 1058. 100 p.

[82] *Azarov D. N.* Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43, № 4. P. 1464–1471.

[83] *Bardakov V. G.* On p-separability of subgroups of free metabelian groups // Algebra Colloq. 2006. Vol. 13, № 2. P. 289–294.

[84] *Bardakov V. G., Bellingeri P.* Combinatorial properties of virtual braids // Topology Appl. 2009. Vol. 156, № 6. P. 1071–1082.

[85] *Bardakov V. G., Bellingeri P.* On residual properties of pure braid groups of closed surfaces // Comm. Algebra. 2009. Vol. 37, № 5. P. 1481–1490.

[86] *Bardakov V. G., Mikhailov R. V., Vershinin V. V., Wu J.* On the pure virtual braid group PV_3 // Comm. Algebra. 2016. Vol. 44, № 3. P. 1350–1378.

[87] *Baumslag B.* Residually free groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1967. Vol. 17, № 3. P. 402–418.

[88] *Baumslag B., Levin F.* A free product with a non-power amalgamated which is not residually free // Math. Z. 1976. Vol. 151, № 3. P. 235–237.

[89] *Baumslag B., Levin F., Rosenberger G.* A cyclically pinched product of free groups which is not residually free // Math. Z. 1993. Vol. 212, № 1. P. 533–534.

[90] *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6, № 2. P. 179–194.

[91] *Baumslag G.* On generalised free products // Math. Z. 1962. Vol. 78, № 1. P. 423–438.

[92] *Baumslag G.* Automorphism groups of residually finite groups // J. Lond. Math. Soc. (1). 1963. Vol. 38, № 1. P. 117–118.

[93] *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193–209.

[94] *Berlai F., Ferov M.* Separating cyclic subgroups in graph products of groups // J. Algebra. 2019. Vol. 531. P. 19–56.

[95] *Bobrovskii P. A., Sokolov E. V.* The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups // Algebra Colloq. 2010. Vol. 17, № 4. P. 577–582.

[96] *Borisov A., Sapir M.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // Invent. Math. 2005. Vol. 160, № 2. P. 341–356.

[97] *Bridson M. R., Conder M. D. E., Reid A. W.* Determining Fuchsian groups by their finite quotients // Isr. J. Math. 2016. Vol. 214, № 1. P. 1–41.

[98] *Bridson M. R., Howie J., Miller C. F. III, Short H.* On the finite presentation of subdirect products and the nature of residually free groups // Am. J. Math. 2013. Vol. 135, № 4. P. 891–933.

[99] *Bridson M. R., Reid A. W., Wilton H.* Profinite rigidity and surface bundles over the circle // Bull. Lond. Math. Soc. 2017. Vol. 49, № 5. P. 831–841.

[100] *Britton J. L.* The word problem // Math. Ann. Second Ser. 1963. Vol. 77, № 1. P. 16–32.

[101] *Bumagin I., Kharlampovich O., Miasnikov A.* The isomorphism problem for finitely generated fully residually free groups // J. Pure Appl. Algebra. 2007. Vol. 208, № 3. P. 961–977.

[102] *Cohen D. E.* Subgroups of HNN groups // J. Austral. Math. Soc. 1974. Vol. 17, № 4. P. 394–405.

[103] *Collins D. J.* Recursively enumerable degrees and the conjugacy problem // Acta Math. 1969. Vol. 122. P. 115–160.

[104] *Delgado A. L., Robinson D. J. S., Timm M.* Generalized Baumslag–Solitar graphs with soluble fundamental groups // Algebra Colloq. 2014. Vol. 21, № 1. P. 53–58.

[105] *Delgado A. L., Robinson D. J. S., Timm M.* Cyclic normal subgroups of generalized Baumslag–Solitar groups // Comm. Algebra. 2017. Vol. 45, № 4. P. 1808–1818.

[106] *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On various rank conditions in infinite groups // Algebra Discr. Math. 2007. № 4. P. 23–43.

[107] *Doniz D.* Residual properties of free products of infinitely many nilpotent groups amalgamating cycles // J. Algebra. 1996. Vol. 179, № 3. P. 930–935.

[108] *Dudkin F. A.* $\mathcal{F}_\pi$-residuality of generalized Baumslag–Solitar groups // Arch. Math. 2020. Vol. 114, № 2. P. 129–134.

[109] *Dyer J. L.* Separating conjugates in free-by-finite groups // J. Lond. Math. Soc. (2). 1979. Vol. 20, № 2. P. 215–221.

[110] *Dyer J. L.* Separating conjugates in amalgamated free products and HNN extensions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. Vol. 29., № 1. P. 35–51.

[111] *Ferov M.* On conjugacy separability of graph products of groups // J. Algebra. 2016. Vol. 447. P. 135–182.

[112] *Ferov M.* Separability properties of automorphisms of graph products of groups // Int. J. Algebra Comput. 2016. Vol. 26, № 1. P. 1–27.

[113] *Forester M.* Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees // Geom. Topol. 2002. Vol. 6, № 1. P. 219–267.

[114] *Gitik R.* Doubles of groups and hyperbolic LERF 3-manifolds // Math. Ann. Second Ser. 1999. Vol. 150, № 3. P. 775–806.

[115] *Gorenstein D.* Finite Groups. 2nd ed. New York: Chelsea Pub. Co., 1980. 519 p.

[116] *Gromov M.* Hyperbolic groups // In: *Gersten S. M.* (*ed.*) Essays in group theory. Math. Sciences Research Inst. Publ. Vol. 8. New York: Springer, 1987. P. 75–263.

[117] *Grossman E. K.* On the residual finiteness of certain mapping class groups // J. Lond. Math. Soc. (2). 1974. Vol. 9, № 1. P. 160–164.

[118] *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. Vol. 7, № 1. P. 29–62.

[119] *Hall M.* A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 5. P. 575–581.

[120] *Higman G.* A finitely generated infinite simple group // J. Lond. Math. Soc. (1). 1951. Vol. 26, № 1. P. 61–64.

[121] *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1, № 3. P. 301–305.

[122] *Hoda N., Wise D. T., Woodhouse D. J.* Residually finite tubular groups // Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. A: Mathematics. 2020. Vol. 150, № 6. P. 2937–2951.

[123] *Kahrobaei D.* Doubles of residually solvable groups // In: *Fine B., Rosenberger G., Spellman D.* (*eds.*) Aspects of infinite group theory: A festschrift in honor of Anthony Gaglione. Algebra Discr. Math. Vol. 1. World Scientific, 2008. P. 192–200.

[124] *Kahrobaei D.* On the residual solvability of generalized free products of finitely generated nilpotent groups // Comm. Algebra. 2011. Vol. 39, № 2. P. 647–656.

[125] *Kahrobaei D., Majewicz S.* On the residual solvability of generalized free products of solvable groups // DMTCS. 2012. Vol. 13, № 4. P. 45–50.

[126] *Karras A., Solitar D.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 150, № 1. P. 227–255.

[127] *Karras A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. Vol. 23, № 4. P. 627–643.

[128] *Kharlampovich O., Myasnikov A.* Irreducible affine varieties over a free group: II. Systems in triangular quasi-quadratic form and description of residually free groups // J. Algebra. 1998. Vol. 200, № 2. P. 517–570.

[129] *Kharlampovich O. G., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N., Serbin D. E.* Subgroups of fully residually free groups: algorithmic problems // In: *Myasnikov A. G., Shpilrain V.* (*eds.*) Group theory, statistics, and cryptography: AMS special session "Combinatorial and statistical group theory" (April 12–13, 2003, New York University). Contemp. Math. 2004. Vol. 360. P. 63–102.

[130] *Khukhro A., Valette A.* Expanders and box spaces // Adv. Math. 2017. Vol. 314. P. 806–834.

[131] *Kim G.* Cyclic subgroup separability of generalized free products // Can. Math. Bull. 1993. Vol. 36, № 3. P. 296–302.

[132] *Kim G.* Cyclic subgroup separability of HNN extensions // Bull. Korean Math. Soc. 1993. Vol. 30, № 2. P. 285–293.

[133] *Kim G.* On the residual finiteness of fundamental groups of graphs of certain groups // J. Korean Math. Soc. 2004. Vol. 41, № 5. P. 913–920.

[134] *Kim G.* On the residual finiteness of certain polygonal products of free groups // Comm. Korean Math. Soc. 2016. Vol. 31, № 3. P. 461–466.

[135] *Kim G., Lee Y., McCarron J.* Residual p-finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups // Kyungpook Math. J. 2008. Vol. 48, № 3. P. 495–502.

[136] *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // J. Algebra. 1993. Vol. 162, № 1. P. 1–11.

[137] *Kim G., Tang C. Y.* A criterion for the conjugacy separability of amalgamated free products of conjugacy separable groups // J. Algebra. 1996. Vol. 184, № 3. P. 1052–1072.

[138] *Kim G., Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. Vol. 201, № 1. P. 317–327.

[139] *Kim G., Tang C. Y.* A criterion for the conjugacy separability of certain HNN extensions of groups // J. Algebra. 1999. Vol. 222, № 2. P. 574–594.

[140] *Kim G., Zhou W.* Class-preserving automorphisms of certain HNN extensions of Baumslag–Solitar groups // Bull. Korean Math. Soc. 2016. Vol. 53, № 4. P. 1033–1041.

[141] *Koberda T., Suciu A. I.* Residually finite rationally p-groups // Comm. Contemp. Math. 2020. Vol. 22, № 3. Id/No 1950016. 44 p.

[142] *Kochloukova D. H.* On subdirect products of type FP_m of limit groups // J. Group Theory. 2010. Vol. 13, № 1. P. 1–19.

[143] *Kofinas C. E., Metaftsis V., Papistas A. I.* Baumslag–Solitar groups and residual nilpotence // arXiv:2201.10172 [math.GR].

[144] *Kropholler P. H.* A note on centrality in 3-manifold groups // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1990. Vol. 107, № 2. P. 261–266.

[145] *Kurosch A.* Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen // Math. Ann. 1934. Vol. 109, № 1. P. 647–660.

[146] *Labute J.* Residually torsion-free nilpotent one relator groups // arXiv:1503.05167 [math.GR].

[147] *Levitt G.* On the automorphism group of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. Topol. 2007. Vol. 11, № 1. P. 473–515.

[148] *Levitt G.* Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups // J. Group Theory. 2015. Vol. 18, № 1. P. 1–43.

[149] *Lichtman A. I.* Necessary and sufficient conditions for the residual nilpotence of free products of groups // J. Pure Appl. Algebra. 1978. Vol. 12, № 1. P. 49–64.

[150] *Lim H. M., Wong K. B., Wong P. C.* Cyclic conjugacy separability and conjugacy separability of certain HNN extensions // Comm. Algebra. 2020. Vol. 48, № 8. P. 3573–3589.

[151] *Logan A. D.* On a question of Bumagin and Wise // New York J. Math. 2016. Vol. 22. P. 865–873.

[152] *Logan A. D.* The residual finiteness of (hyperbolic) automorphism-induced HNN-extensions // Comm. Algebra. 2018. Vol. 46, № 12. P. 5399–5402.

[153] *Logan A. D.* Every group is the outer automorphism group of an HNN-extension of a fixed triangle group // Adv. Math. 2019. Vol. 353. P. 116–152.

[154] *Lubotzky A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1989. Vol. 106, № 3. P. 385–388.

[155] *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. 1935. Vol. 111, № 1. P. 259–280.

[156] *Metaftsis V., Raptis E.* Residual finiteness of infinite amalgamated products of cyclic groups // J. Pure Appl. Algebra. 2007. Vol. 208, № 3. P. 1091–1097.

[157] *Mikhailov R. V.* On residual nilpotence of projective crossed modules // Comm. Algebra. 2006. Vol. 34, № 4. P. 1451–1458.

[158] *Mikhailov R. V., Passi I. B. S.* Faithfulness of certain modules and residual nilpotence of groups // Int. J. Algebra Comput. 2006. Vol. 16, № 3. P. 525–539.

[159] *Minasyan A.* On subgroups of right angled Artin groups with few generators // Int. J. Algebra Comput. 2015. Vol. 25, № 4. P. 675–688.

[160] *Minasyan A.* On conjugacy separability of fibre products // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 2017. Vol. 115, № 6. P. 1170–1206.

[161] *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamations // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. Vol. 246, № 919. P. 503–554.

[162] *Neumann B. H., Neumann H.* A remark on generalized free products // J. Lond. Math. Soc. 1950. Vol. 25, № 3. P. 202–204.

[163] *Neumann H.* Generalized free products with amalgamated subgroups // Am. J. Math. 1948. Vol. 70, № 3. P. 590–625.

[164] *Neumann H.* Generalized free sums of cyclical groups // Am. J. Math. 1950. Vol. 72, № 4. P. 671–685.

[165] *Neumann H.* On an amalgam of abelian groups // J. Lond. Math. Soc. 1951. Vol. 26, № 3. P. 228–232.

[166] *Paris L.* Residual p-properties of mapping class groups and surface groups // Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 361, № 5. P. 2487–2507.

[167] *Raptis E.* A note on cyclic separability of groups // Bull. Greek Math. Soc. 2009. Vol. 56. P. 1–3.

[168] *Raptis E., Varsos D.* Some residual properties of certain HNN extensions // Bull. Greek Math. Soc. 1987. Vol. 28. P. 81–87.

[169] *Raptis E., Varsos D.* Residual properties of HNN-extensions with base group an Abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1989. Vol. 59, № 3. P. 285–290.

[170] *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. Vol. 76, № 2. P. 167–178.

[171] *Reid A. W.* Profinite rigidity // Proc. Int. Congress of Mathematicians, ICM 2018 (Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018). Volume II. Invited lectures. Hackensack: World Scientific; Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2018. P. 1193–1216.

[172] *Rhemtulla A. H.* Residually $\mathcal{F}_p$-groups, for many primes p, are orderable // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 41, № 1. P. 31–33.

[173] *Ribes L., Zalesskii P. A.* Conjugacy distinguished subgroups // J. Group Theory. 2016. Vol. 19, № 3. P. 477–495.

[174] *Rips E.* On a double of a free group // Isr. J. Math. 1996. Vol. 96, № 2. P. 523–525.

[175] *Robinson D. J. S.* Recent results on generalized Baumslag–Solitar groups // Note Mat. 2010. Vol. 30, № 1. P. 37–53.

[176] *Robinson D. J. S.* Sylow permutability in generalized soluble groups // J. Group Theory. 2017. Vol. 20, № 1. P. 61–70.

[177] *Scott G. P.* An embedding theorem for groups with a free subgroups of finite index // Bull. Lond. Math. Soc. 1974. Vol. 6, № 3. P. 304–306.

[178] *Sela Z.* Diophantine geometry over groups I: Makanin-Razborov diagrams // Publ. Math. IHÉS. 2001. Vol. 93. P. 31–105.

[179] *Serre J.-P.* Trees. Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag, 1980. 142 p.

[180] *Shirvani M.* On residually finite HNN-extensions // Arch. Math. 1985. Vol. 44, № 2. P. 110–115.

[181] *Shirvani M.* On residually finite graph products // J. Pure Appl. Algebra. 1987. Vol. 49, № 3. P. 281–282.

[182] *Shirvani M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 703–706.

[183] *Sokolov E. V.* On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii J. Math. 2002. Vol. 11. P. 27–38.

[184] *Sokolov E. V.* On the cyclic subgroup separability of the free product of two groups with commuting subgroups // Int. J. Algebra Comput. 2014. Vol. 24, № 5. P. 741–756.

[185] *Stebe P. F.* A residual property of certain groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 26, № 1. P. 37–42.

[186] *Tang C. Y.* Conjugacy separability of generalized free products of surface groups // J. Pure Appl. Algebra. 1997. Vol. 120, № 2. P. 187–194.

[187] *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. Algebra, Number Theory Appl. 2010. Vol. 18, № 2. P. 125–143.

[188] *Toinet E.* Conjugacy p-separability of right-angled Artin groups and applications // Groups Geom. Dyn. 2013. Vol. 7, № 3. P. 751–790.

[189] *Varsos D.* The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups // Houston J. Math. 1996. Vol. 22, № 2. P. 233–248.

[190] *Wilkes G.* Virtual pro-p properties of 3-manifold groups // J. Group Theory. 2017. Vol. 20, № 5. P. 999–1023.

[191] *Wise D.* Some virtual limit groups // Groups Geom. Dyn. 2018. Vol. 12, № 4. P. 1265–1272.

[192] *Wong K. B., Wong P. C.* Polygonal products of residually finite groups // Bull. Korean Math. Soc. 2007. Vol. 44, № 1. P. 61–71.

[193] *Wong K. B., Wong P. C.* Residual finiteness, subgroup separability and conjugacy separability of certain HNN extensions // Math. Slovaca. 2012. Vol. 62, № 5. P. 875–884.

[194] *Wong K. B., Wong P. C.* Cyclic subgroup separability of certain graph products of subgroup separable groups // Bull. Korean Math. Soc. 2013. Vol. 50, № 5. P. 1753–1763.

[195] *Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W.* Generalized free products of residually p-finite groups // Rocky Mt. J. Math. 2006. Vol. 36, № 5. P. 1729–1742.

[196] *Wong P. C., Wong K. B.* The cyclic subgroup separability of certain HNN extensions // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2). 2006. Vol. 29, № 2. P. 111–117.

[197] *Zhou W., Kim G.* Subgroup separability of certain generalized free products of nilpotent-by-finite groups // Acta Math. Sin. Engl. Ser. 2013. Vol. 29, № 6. P. 1199–1204.

[198] *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain generalized free products of free or finitely generated nilpotent groups // J. Pure Appl. Algebra. 2017. Vol. 221, № 1. P. 222–228.

[199] *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. Vol. 28, № 3. P. 543–552.

[200] *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. Vol. 27, № 4. P. 651–660.

Статьи, в которых опубликованы основные результаты диссертации

[201] *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

[202] *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.

[203] *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

[204] *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

[205] *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.

[206] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Матем. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

[207] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 6. С. 720–740.

[208] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 692–702.

[209] *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.

[210] *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43, № 2. P. 856–860.

[211] *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. Vol. 582. P. 1–25.

[212] *Sokolov E. V.* Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups // Comm. Algebra. 2022. Vol. 50, № 3. P. 962–987.

[213] *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* To the question of the root-class residuality of free constructions of groups // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, № 2. P. 260–272.

Предметный указатель*

* В настоящем указателе в целях упрощения обозначений тире используется для замены не отдельного слова, а всего словосочетания, имеющего одинаковый с ним отступ (например, словосочетания «графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$»).