

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Набеева Лилия Руслановна

**ТАБУЛИРОВАНИЕ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ В  
УТОЛЩЁННОЙ БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА**

**1.1.3 — Геометрия и топология**

**диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук**

Научный руководитель  
академик РАН  
доктор физ.–мат. наук  
профессор С.В. Матвеев

Челябинск, 2022

# Оглавление

<b>Список сокращений и условных обозначений</b> .....	<b>4</b>
<b>Введение</b> .....	<b>5</b>
<b>1 Узлы и зацепления в утолщённой бутылке Клейна</b> .....	<b>17</b>
1.1 Утолщённая бутылка Клейна.....	17
1.2 Типы зацеплений и их представление.....	18
1.3 Преобразования диаграмм зацеплений на квадрате .....	22
1.4 Обобщённый полином Кауффмана для зацеплений в утолщённой бутылке Клейна.....	25
<b>2 Табулирование существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна</b> .....	<b>29</b>
2.1 Перечисление существенных проекций узлов на бутылке Клейна, которые имеют не более трёх перекрёстков .....	29
2.2 Перечисление существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков .....	36
<b>3 Табулирование существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна</b> .....	<b>40</b>
3.1 Перечисление существенных нерасщепляемых проекций зацеплений на бутылке Клейна, которые имеют не более трёх перекрёстков .....	40
3.2 Перечисление существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков .....	46
<b>4 Дополнительные пространства к зацеплениям</b> .....	<b>50</b>
4.1 Гиперболические зацепления и их объёмы.....	50

Заключение.....	55
Литература .....	56
Приложения.....	61

## Список сокращений и условных обозначений

$S^3$  — трёхмерная сфера

$R^3$  — трёхмерное Евклидово пространство

$K$  — бутылка Клейна

$K \tilde{\times} I$  — утолщённая бутылка Клейна

$\tilde{\times}$  — косое произведение

$L$  — зацепление

$D_L$  — диаграмма зацепления

$G$  — проекция

$X(D_L)$  — обобщённый полином Кауффмана для диаграммы  $D_L$

$s$  — состояние диаграммы  $D_L$

$t$  — тривиальная окружность

$\mu, \tilde{\mu}$  — меридиан

$\lambda$  — параллель

$m, \tilde{m}$  — средняя линия листа Мёбиуса

$\gamma_t(s)$  — число тривиальных окружностей в состоянии  $s$

$\delta_\mu(s), \delta_\lambda(s), \delta_m(s)$  — число окружностей типа  $\mu, \lambda, m$  в состоянии  $s$

Двуугольник — двуугольная грань проекции  $G$

$c$  — простая замкнутая двухсторонняя кривая на поверхности

$\#(k_1 \cap k_2)$  — число точек пересечения кривых  $k_1$  и  $k_2$

## Введение

**Актуальность работы и степень её разработанности.** В последние десятилетия теория узлов бурно развивается. Большой интерес представляет классификация или табулирование узлов (или зацеплений) в трёхмерных многообразиях, отличных от трёхмерной сферы. Об этом свидетельствуют работы Ю.В. Дроботухиной, А.А. Акимовой и С.В. Матвеева, Б. Грабровсека и М. Мрокзковского и А. Каттабрига, Е. Манфреди и М. Мулацани и других.

Классическое зацепление представляет набор попарно непересекающихся простых замкнутых кривых в трёхмерном пространстве  $R^3$  (или в трёхмерной сфере  $S^3$ ). Узел — это однокомпонентное зацепление. Для изображения узлов (или зацеплений) удобно использовать их проекцию на плоскость с определенными условиями (см. например в книге [7]). При этом перекрёсток — это точка плоскости, в которую проецируются две различные точки зацепления. Диаграмма зацепления получается из проекции путем разрыва в перекрёстках с указанием, какая ветвь проходит выше, а какая ниже.

Впервые официальную таблицу классических узлов построил П. Тейт в 70-е годы 19-го века [25]–[27]. Тейт классифицировал альтернированные узлы, диаграммы которых имеют не более 10 перекрёстков, т.е. узлы, в которых чередуется обход перекрёстков. Затем с 1889 по 1899 годы К. Литтл составил таблицу узлов, диаграммы которых имели уже 11 перекрёстков, и таблицу неальтернированных узлов, диаграммы которых имели не более 10 перекрёстков [21]–[23]. В 1918 году табулировали зеркальных узлов с 12 перекрёстками в работе М. Хасмэна [17]. После Д. Ролфсен в 1976 классифицировал узлы до 10 перекрёстков [24] и Дж. Хосте, М. Фиселисвейт и Дж. Викс в 1998 до 16 перекрёстков [18]. Сейчас таблицы узлов (зацеплений) и их значения инвариантов можно посмотреть в интернет-ресурсе [30].

Начиная с 90-х годов 20 века активно развивается теория узлов в трёхмерных многообразиях, отличных от трёхмерной сферы:

1. Зацепления в проективном пространстве  $RP^3$ , диаграммы которых имеет не более шести перекрёстков, были табулированы и рассмотрены Ю.В. Дроботухиной в 1991 г. [5, 15];
2. Зацепления в линзовых пространствах изучались А. Каттабрига, Э. Манфреди, М. Мулацани в 2012 г. [14];
3. Узлы в полном торе с не более чем 6 перекрёстками были табулированы

Б. Грабровсек, М. Мрокзковский в 2012 г. [16];

4. Узлы и зацепления в утолщённом торе с не более чем 6 перекрёстками были табулированы А.А. Акимовой, С.В. Матеевым, В.В. Таркаевым с 2012 г. в работах [1]–[4], [12].

Задача табулирования зацеплений или узлов, которую ещё называют главной проблемой теории узлов, чрезвычайно сложна. Это связано с вопросом о нахождении метода сравнения двух данных узлов: являются ли они эквивалентными или нет.

Объектом исследования настоящей диссертации является утолщённая бутылка Клейна — это ориентируемое трёхмерное многообразие, которое является пространством локально тривиального расслоения над бутылкой Клейна со слоем отрезок. Предметом исследования является узлы и зацепления в утолщённой бутылке Клейна. Главная задача диссертации табулирования узлов и зацепления в утолщённой бутылке Клейна.

В настоящей диссертации роль инварианта, различающего табулированные зацепления и узлы в утолщённой бутылке Клейна, играет обобщённый полином Кауффмана (или обобщённая скобка Кауффмана). Полином Кауффмана был предложен в работе [20]. Заметим, что полином Кауффмана с точностью до замены переменных эквивалентна полиному Джонса [19].

В работах Ю.В. Дроботухиной [5], [15] для зацеплений в проективном пространстве был использован обобщённый полином Кауффмана от одной переменной. В работах о классификации зацеплений в утолщённом торе [1]–[4], [12] использован обобщённый полином Кауффмана от двух переменных.

В настоящей диссертации рассматривается инвариант от четырёх переменных. Введенные переменные позволяют различить типы окружностей на бутылке Клейна.

**Цели и задачи работы.** Первой целью работы является табулирование существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна до сложности три. Для этого в настоящей диссертации решаются следующие задачи:

1. Рассмотрение абстрактных регулярных связных графов степени 4, имеющих не более трёх вершин.
2. Вложение полученных графов в бутылку Клейна, дающих существенные проекции на бутылке Клейна с тремя и менее перекрёстками.

3. Доказательство различности всех построенных проекций.
4. Получение существенных диаграмм путем разрывов в перекрестках проекций на квадрате.
5. Доказательство не эквивалентности всех построенных диаграмм.

Второй целью настоящей диссертации является табулирование существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна до сложности три. Для этого в настоящей диссертации решаются следующие задачи:

1. Рассмотрение абстрактных регулярных связных графов степени 4, имеющих не более трёх вершин.
2. Вложение полученных графов в бутылку Клейна, дающих существенные проекции на бутылке Клейна с тремя и менее перекрестками.
3. Доказательство различности всех построенных проекций.
4. Получение нерасщепляемых существенных диаграмм путем разрывов в перекрестках проекций на квадрате.
5. Доказательство не эквивалентности всех построенных диаграмм.

Третьей целью настоящей диссертации является проверка наличия гиперболической структуры на дополнительных пространствах табулированных узлов и зацеплений в утолщённой бутылке Клейна. Для этого в настоящей диссертации решаются следующие задачи.

1. При помощи компьютерной программы 3-Manifold Recognizer [28] получить изометрические сигнатуры дополнительных пространств табулированных узлов и зацеплений.
2. При помощи компьютерной программы «SnapPy» [29] проверить наличие гиперболической структуры на дополнительных пространствах табулированных узлов и зацеплений.
3. Вычислить объемы для гиперболических табулированных узлов и зацеплений.

**Научная новизна работы.** В работе составлены таблицы:

1. Существенных проекций узлов и зацеплений на бутылке Клейна с не более тремя перекрёстками;
2. Существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков;
3. Существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков;
4. Значений сигнатур для дополнительных пространств всех табулированных узлов и зацеплений в утолщённой бутылке Клейна;
5. Значений гиперболических объемов для дополнительных пространств всех табулированных узлов и зацеплений в утолщённой бутылке Клейна.

Разработан ряд приёмов построения проекций и диаграмм для узлов и зацеплений в утолщённой бутылке Клейна.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы при дальнейшем исследовании узлов и зацеплений в трёхмерных многообразиях.

**Методология и методы исследования.** В процессе работы над диссертацией использовались результаты и методы теории трёхмерных многообразий, представленные в работах отечественных и зарубежных авторов. Также использовались методы табулирования узлов и зацеплений в трёхмерных многообразиях.

#### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Табулирование существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна до сложности три.
2. Табулирование существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна до сложности три.
3. Проверка наличие гиперболической структуры на дополнительных пространствах табулированных узлов и зацеплений в утолщённой бутылке Клейна.



**Степень достоверности и апробация результатов.** Все основные результаты являются новыми. В диссертации все результаты обеспечиваются математическими доказательствами. Значения инвариантов и сигнатур, а так же объемы подтверждаются программными вычислениями [28], [29].

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

1. В ЧелГУ на семинарах «Маломерная топология» под руководством С.В. Матвеева;
2. Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений» (Екатеринбург, в 2013, 2016, 2017 годах);
3. Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске» (Новосибирск, в 2013, 2016, 2017 годах);
4. Международная конференция «Геометрия и анализ на метрических структурах» (Новосибирск, в 2013 году);
5. Международная конференция «Квантовая топология» (Магнитогорск, в 2014 году);
6. Международная конференция «Александровские чтения» (Москва, в 2016 году);
7. Третья русско-китайская международная конференция «Теория узлов и её приложение» (Китай, в 2016 году);
8. В институте математики им. С.Л. Соболева на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» под руководством И.А. Тайманова в 2021 году.

**Публикации.** Основные результаты работы изложены в публикациях [31]–[38], в числе которых 3 статьи [31], [32], [33] в рецензируемых изданиях, включенных в перечень ВАК для кандидатских диссертаций. Работа [31] написана автором совместно с С.В. Матвеевым. Вклад соавтора в эту работу равный и неделим.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы, списка условных обозначений и приложения. Нумерация теорем, лемм и т.п. в каждой главе

своя. Список литературы из 30 наименований. Работа изложена на 64 страницах, снабжена 29 рисунками и 2 таблицами.

**Краткое содержание работы.** Во **Введении** формулируются основные задачи и дан краткий обзор предшествующих работ.

В **главе 1** содержатся основные определения, результаты и конструкции, необходимые для диссертации.

В **параграфе 1.1** дано определение утолщённой бутылки Клейна и её представления.

**Определение 1.1.** *Утолщённая бутылка Клейна  $K \tilde{\times} I$  — это ориентируемое трёхмерное многообразие, которое является пространством локально тривиального расслоения над бутылкой Клейна  $K$  со слоем отрезок  $I$ .*

Удобно представлять утолщённую бутылку Клейна  $K \tilde{\times} I$  в виде куба  $[0; 1] \times [0; 1] \times [-1; 1]$  с отождествлёнными гранями. Пусть квадрат  $ABCD$  является произведением  $[0; 1] \times [0; 1] \times \{0\}$ . Тогда отождествление граней куба осуществляется по следующему правилу: две грани, содержащие стороны  $DA$  и  $CB$ , отождествляются по параллельному переносу, а две грани, содержащие стороны  $BA$  и  $DC$ , отождествляются по центральной симметрии относительно центра куба. При этой склейке грани склеиваются с гранями, рёбра с рёбрами, а вершины с вершинами. При таком отождествлении квадрат  $ABCD$  склеится в бутылку Клейна  $K$ , а куб  $[0; 1] \times [0; 1] \times [-1; 1]$  — в многообразие  $K \tilde{\times} I$ .

В **параграфе 1.2** даны необходимые определения типов узлов и зацеплений.

**Определение 1.2.** Под *зацеплением* в  $K \tilde{\times} I$  понимается конечный набор попарно не пересекающихся простых замкнутых кривых, лежащих внутри утолщённой бутылки Клейна. Зацепление, состоящее из одной компоненты, называется *узлом*. Два зацепления в  $K \tilde{\times} I$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм многообразия  $K \tilde{\times} I$  на себя, переводящий одно зацепление в другое.

При табулировании классических зацеплений стараются ограничиться примарными зацеплениями. Мы тоже будем стараться сократить число рассматриваемых зацеплений в  $K \tilde{\times} I$  за счёт отсеивания тех зацеплений, которые можно получить из уже построенных с помощью несложных операций.

Во-первых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются составными. Это связано с тем, что такие зацепления однозначно определяются составной частью зацепления.

**Определение 1.3.** Зацепление в  $K \tilde{\times} I$  называется *составным*, если суще-

ствуется шар в  $K \tilde{\times} I$ , который пересекает зацепление по заузленной дуге.

Во-вторых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые можно вложить в шар, так как этим зацеплениям отвечают зацеплениям в  $S^3$ . Такие зацепления будем называть *локальными*.

В-третьих, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются *кольцевыми*. Это связано с тем, что кольцевые зацепления — зацепления в полном торе, которые уже табулированы в работе [16].

**Определение 1.4.** Зацепление в  $K \tilde{\times} I$  называется *кольцевым*, если дополнение к зацеплению содержит вертикальное кольцо. *Вертикальное кольцо* в  $K \tilde{\times} I$  — это послойное кольцо или изотопное ему, возникающее из нетривиальной замкнутой кривой на бутылке Клейна.

**Определение 1.5.** Зацепление с более одной компонентой в  $K \tilde{\times} I$  называется *расщепляемым*, если в дополнении к зацеплению существует разбивающий тор, который параллелен  $\partial(K \tilde{\times} I)$  и отделяет одну или несколько компонент зацепления от других компонент.

В-четвертых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются расщепляемыми.

**Определение 1.6.** *Проекцией* называется регулярный четырехвалентный граф на бутылке Клейна  $K$ . Вершины графа мы будем называть перекрёстками проекции. Компонентой проекции называется замкнутый путь на графе, проходящий по правилу «прямо – вперёд». Две проекции эквивалентны, если существует гомеоморфизм бутылки Клейна на себя, переводящий одну проекцию в другую.

Отметим, что в нашем случае общепринятый способ задания зацепления на бутылке Клейна с помощью размеченной проекции в перекрёстках (такую проекцию называют диаграммой зацепления) не работает, так как бутылка Клейна – неориентируемая поверхность. Чтобы устранить это препятствие, будем представлять бутылку Клейна  $K$  в виде склейки сторон квадрата  $ABCD$ .

**Определение 1.7.** *Проекция на квадрате  $ABCD$*  – это набор таких собственных дуг или связный граф на квадрате, что при указанных отождествлениях сторон квадрата концы дуг склеиваются попарно, каждая его вершина (перекрёсток) имеет валентность 4 и правило «прямо – вперёд» определяет его полные обходы. *Диаграмма* — это проекция на квадрате с указанием разрывов в перекрёстках. *Сложность диаграммы* — это количество перекрёстков диаграммы.

Мы рассматриваем диаграммы (или проекции) зацеплений на квадрате в об-

щем положении. Это означает, что все дуги являются гладкими, все перекрёстки двойные и трансверсальные, никакой перекрёсток не лежит на сторонах квадрата и никакая дуга диаграммы (или проекции) не касается сторон квадрата и не исходит из вершин квадрата.

**Определение 1.8.** Диаграмма зацепления  $L \subset K \tilde{\times} I$  называется *минимальной*, если её число перекрёстков не превосходит числа перекрёстков любой диаграммы любого зацепления, эквивалентного зацеплению  $L$ . Проекция зацепления в  $K \tilde{\times} I$  называется *минимальной*, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

**Лемма 1.1.**

1. Если проекция зацепления содержится в диске, то любая отвечающая ей диаграмма задаёт локальное зацепление.

2. Если на бутылке Клейна существует кольцо или лист Мёбиуса, содержащие проекцию зацепления, то любая отвечающая этой проекции диаграмма задаёт «кольцевое» зацепление.

3. Пусть проекция такова, что на бутылке Клейна имеется диск, край которого трансверсально пересекается с проекцией ровно в двух точках и делит проекцию на две части, в каждой из которых есть хотя бы один перекрёсток. Тогда любая отвечающая этой проекции диаграмма либо неминимальная, либо задаёт составное зацепление в  $K \tilde{\times} I$ .

4. Если проекция несвязна или одна из её компонент типа меридиан пересекается с объединением остальных в единственной точке, то любая диаграмма, отвечающая этой проекции, задаёт расщепляемое зацепление.

5. Если в диаграмме компоненты можно разбить на два набора так, что первый набор состоит из одной компоненты типа меридиан и она проходит всюду над (или под) компонентами из второго набора, то диаграмма задаёт расщепляемое зацепление.

6. Если в диаграмме компоненты можно разбить на два набора так, что первый набор состоит из одной компоненты типа параллель и она проходит сначала над, затем под компонентами из второго набора, то диаграмма задаёт расщепляемое зацепление.

**Определение 1.9.** Проекция зацепления называется *существенной*, если число её компонент больше 1, и к ней не применим ни один из пп. 1–4 леммы 1.1. Проекция узла называется *существенной*, если к ней неприменим ни один из пп. 1–3 леммы 1.1.

**Определение 1.10.** Зацепление (или узел) в  $K \tilde{\times} I$  называется *существен-*

ным, если оно не кольцевое и не составное.

В параграфе 1.3 приведены необходимые преобразования диаграмм узлов и зацеплений. Для диаграмм зацеплений в  $K \tilde{\times} I$ , помимо обычных преобразований Рейдемайстера  $R_1, R_2, R_3$  вводятся новые преобразования:  $R_4 - R_{12}$ . Опишем эти преобразования диаграмм зацеплений на квадрате, которые изображены на рисунке 1.5.

1.  $R_1$  — удаление (появление) малой петли (первое преобразование Рейдемайстера).
- (2)  $R_2$  — удаление (появление) парного перекрёстка (второе преобразование Рейдемайстера).
2.  $R_3$  — перемещение некоторой третьей ветви над или под перекрёстком (третье преобразование Рейдемайстера).
3.  $R_4$  — перемещение тривиальной дуги диаграммы через вертикальные стороны квадрата.
4.  $R_5$  — перемещение тривиальной дуги диаграммы через горизонтальные стороны квадрата.
5.  $R_6$  — перемещение перекрёстка диаграммы через вертикальные стороны квадрата.
6.  $R_7$  — перемещение перекрёстка диаграммы через горизонтальные стороны квадрата.
7.  $R_8$  — перемещение тривиальной дуги диаграммы через вершины квадрата.
8.  $R_9$  — скручивание вдоль двухсторонней простой замкнутой кривой  $s$ .
9.  $R_{10}$  — поворот квадрата на 180 градусов относительно центра квадрата.
10.  $R_{11}$  — зеркальное отображение квадрата относительно вертикальной или горизонтальной стороны квадрата.
11.  $R_{12}$  — смена всех типов перекрёстков на противоположные.

**Теорема 1.2.** Если две диаграммы на квадрате можно соединить одним из 12 преобразований  $R_1 - R_{12}$ , то соответствующие им зацепления в утолщённой бутылке Клейна эквивалентны.

В параграфе 1.4 приведен инвариант узлов и зацеплений в утолщённой бутылке Клейна.

**Определение 1.11.** Для ориентированной диаграммы  $D_L$  зацепления  $L$  в  $K \tilde{\times} I$  определим обобщённый полином Кауффмана  $\langle L \rangle$  от 4 переменных  $A$ ,  $x$ ,  $y$  и  $z$  по формуле:

$$\langle L \rangle = (-A)^{-3w(D_L)} \sum_s A^{\alpha(s)-\beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma_t(s)} x^{\delta_\mu(s)} y^{\delta_\lambda(s)} z^{\delta_m(s)},$$

где  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  – число выбранных расщеплений типа  $A$  и  $B$  в состоянии  $s$ ,  $\gamma_t(s)$  – число тривиальных окружностей и  $\delta_\mu(s)$ ,  $\delta_\lambda(s)$ ,  $\delta_m(s)$  – числа нетривиальных окружностей типа  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $m$ , соответственно, полученных в результате расщепления всех перекрёстков в состоянии  $s$ . Сумма берётся по всем возможным состояниям, а  $w(D_L)$  – сумма знаков перекрёстков.

**Теорема 1.2.** Обобщённый полином Кауффмана является инвариантом зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, т.е. не изменяется при преобразованиях  $R_1 - R_{12}$  (изображённые на рисунке 1.5).

В главе 2 табулируются существенные узлы в утолщённой бутылке Клейна до сложности три.

В параграфе 2.1 перебираются все абстрактные регулярные графы степени 4, имеющие не более трёх вершин, эти графы изображены на рисунке 2.1. Затем для получения проекций вводятся две операции: *операция устранения перекрёстка* и *операция устранения двуугольника*, изображённые на рисунке 2.2.

Доказываются следующие леммы и теорема:

**Лемма 2.1.** Пусть  $G$  – существенная проекция зацепления на бутылке Клейна  $K$ . Если проекция  $G$  имеет петли, то их не более двух, и петли соответствуют окружности типа средняя линия листа Мёбиуса.

**Лемма 2.2.** На бутылке Клейна существует ровно 1 существенная проекция узла, являющаяся вложением графа  $\mathbf{a}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекция  $1_1$ , см. рис. 4.1.

**Лемма 2.3.** На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проекции узлов, являющихся вложением графа  $\mathbf{b}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $2_1, 2_2$ , см. рис. 4.1.

**Лемма 2.4.** На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проек-

ции узлов, являющихся вложением графа  $\mathbf{c}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $2_3, 2_4$ , см. рис. 4.1.

**Лемма 2.5.** На бутылке Клейна существует ровно 3 существенных проекции узлов, являющихся вложением графа  $\mathbf{d}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $3_1, 3_2, 3_3$ , см. рис. 4.1.

**Лемма 2.6.** На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проекции узлов, являющихся вложением графа  $\mathbf{e}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $3_4, 3_5$ , см. рис. 4.1.

**Лемма 2.7.** На бутылке Клейна существует ровно 7 существенных проекций узлов, являющихся вложением графа  $\mathbf{f}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $3_6, 3_7, 3_8, 3_9, 3_{10}, 3_{11}, 3_{12}$ , см. рис. 4.1.

**Теорема 2.1.** Существует ровно 17 различных существенных проекций на бутылке Клейна  $K$ , число вершин которых не превосходит трёх. Все они изображены на рис. 4.1.

В параграфе 2.2 из проекций на квадрате путем разрывов в перекрёстках получаем существенные диаграммы узлов. С помощью некоторых приёмов убираются эквивалентные диаграммы. Различность узлов доказывается с помощью обобщённого полинома Кауффмана.

**Теорема 2.2.** Существует ровно 28 попарно неэквивалентных существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Задающие их диаграммы изображены на рис. 4.2.

В главе 3 табулируются существенные нерасщепляемые зацепления в утолщённой бутылке Клейна до сложности три.

В параграфе 3.1 получают проекции путем вложения графов изображённые на рис. 2.1 на бутылку Клейна. Доказываются следующие леммы и теорема:

**Лемма 3.1.** На бутылке Клейна не существует существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{a}$ , изображённого на рисунке 2.1.

**Лемма 3.2.** На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проекции зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{b}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l2_1$  и  $l2_2$ , см. рис. 3.1.

**Лемма 3.3.** На бутылке Клейна существуют ровно 3 существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{d}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l3_1, l3_2, l3_3$ , см. рис. 3.2.

**Лемма 3.4.** На бутылке Клейна существуют ровно 2 существенных проекции зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{c}$ , изображённого на рисунке

ке 2.1. Это проекции  $l_{2_3}, l_{2_4}$ , см. рис. 3.3.

**Лемма 3.5.** На бутылке Клейна существуют ровно 6 существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $e$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l_{3_4}, l_{3_5}, l_{3_6}, l_{3_7}, l_{3_8}, l_{3_9}$ , см. рис. 3.4.

**Лемма 3.6.** На бутылке Клейна существуют ровно 5 существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $f$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l_{3_{10}}, l_{3_{11}}, l_{3_{12}}, l_{3_{13}}, l_{3_{14}}$ , см. рис. 3.5.

**Теорема 3.1.** Существует ровно 18 попарно неэквивалентных существенных проекций зацеплений на бутылке Клейна, которые имеют не более чем три перекрёстка. Все они изображены на рисунке 4.3.

В параграфе 3.2 из проекций на квадрате путем разрывов в перекрёстках получаем диаграммы существенных зацеплений. С помощью некоторых приёмов убираются эквивалентные диаграммы и расщепляемые. Различность узлов доказывается с помощью обобщённого полинома Кауффмана.

**Теорема 3.2.** Существует ровно 25 попарно неэквивалентных существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Задающие их диаграммы изображены на рис. 4.4.

В главе 4 в таблице 4.1 приведены изометрические сигнатуры дополнительных пространств табличных узлов и зацеплений которые были получены с помощью компьютерной программы [28]. При помощи компьютерной программы «SnapPy» [29] была проведена проверка наличия гиперболической структуры на дополнительных пространствах к узлам и зацеплений, включенных в таблицу. Ответ для всех зацеплений с более одной компонентой оказался положительным, для узлов нет. В таблице 4.2 приведены величины гиперболических объемов дополнительных пространств табличных узлов и зацеплений.

В **Заключение** перечисляются основные результаты диссертации.

**Благодарности.** Автор благодарит своего научного руководителя академика РАН, доктора физико-математических наук, профессору Сергея Владимировича Матвеева за постановку интересных задач, постоянное внимание и важные замечания. Автор благодарен кандидатам физико-математических наук Владимиру Викторовичу Таркаеву и Филиппу Глебовичу Кораблёву. Автор также признателен всему коллективу кафедры компьютерной топологии и алгебры математического факультета ЧелГУ за теплую творческую атмосферу и комфортную обстановку для научной деятельности.



## ГЛАВА 1

**Узлы и зацепления в утолщённой бутылке Клейна**

Результаты данной главы опубликованы в [31]–[38].

Настоящая глава посвящена определению утолщённой бутылки Клейна и типам узлов и зацеплений в этом трёхмерном многообразии. Приведен список из 12 преобразований диаграмм зацеплений на квадрате. Обобщён инвариант Кауффмана для зацеплений в утолщённой бутылке Клейна.

**1.1 Утолщённая бутылка Клейна**

**Определение 1.1.** *Утолщённая бутылка Клейна  $K \tilde{\times} I$*  – это ориентируемое трёхмерное многообразие, которое является пространством локально тривиального расслоения над бутылкой Клейна  $K$  со слоем отрезок  $I$ .

Утолщённую бутылку Клейна можно реализовать в пространстве  $R^3$  (с самопересечениями) как регулярную окрестность стандартным образом погружённой бутылки Клейна. Это многообразие можно представить как многообразие Зейферта двумя способами: как многообразие Зейферта с базой  $D^2$  и двумя особыми слоями кратности 2 и как многообразие Зейферта без особых слоев с листом Мёбиуса в качестве базы [6]. Удобно представлять утолщённую бутылку Клейна  $K \tilde{\times} I$  в виде «толстого» цилиндра  $S^1 \times I \times I$  с отождествленными кольцевыми основаниями  $S^1 \times I \times \{0, 1\}$  по суперпозиции симметрии относительно окружности  $S$  и симметрии относительно её диаметра  $d(S^1)$  см. рис. 1.1 справа. При таком отождествлении цилиндр  $S^1 \times \{0\} \times I$  склеится в бутылку Клейна, а «толстый» цилиндр  $S^1 \times I \times I$  – в многообразие  $K \tilde{\times} I$ .

Другой способ представлять утолщённую бутылку Клейна  $K \tilde{\times} I$  в виде куба  $[0; 1] \times [0; 1] \times [-1; 1]$  с отождествлёнными гранями, см. рис. 1.1 слева. Пусть квадрат  $ABCD$  является произведением  $[0; 1] \times [0; 1] \times \{0\}$ . Тогда отождествление граней куба осуществляется по следующему правилу: две грани, содержащие стороны  $DA$  и  $CB$ , отождествляются по параллельному переносу, а две грани, содержащие стороны  $BA$  и  $DC$ , отождествляются по центральной симметрии относительно центра куба. При этой склейке грани склеиваются с гранями, ребра с ребрами, а вершины с вершинами. При таком отождествлении квадрат  $ABCD$  склеится в бутылку Клейна  $K$ , а куб  $[0; 1] \times [0; 1] \times [-1; 1]$  – в многообразие  $K \tilde{\times} I$ .

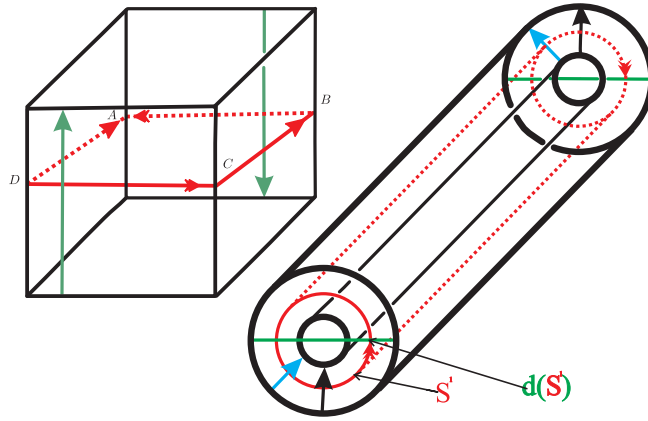


Рис. 1.1: Утолщённая бутылка Клейна представленная в виде куба и «толстого» цилиндра

## 1.2 Типы зацеплений и их представление

**Определение 1.2.** Под *зацеплением* в  $K \tilde{\times} I$  понимается конечный набор попарно не пересекающихся простых замкнутых кривых, лежащих внутри утолщённой бутылки Клейна. Зацепление, состоящее из одной компоненты, называется *узлом*. Два зацепления в  $K \tilde{\times} I$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм многообразия  $K \tilde{\times} I$  на себя, переводящий одно зацепление в другое.

При табулировании классических зацеплений стараются ограничиться примарными зацеплениями. Мы тоже будем стараться сократить число рассматриваемых зацеплений в  $K \tilde{\times} I$  за счёт отсеивания тех зацеплений, которые можно получить из уже построенных с помощью несложных операций.

Во-первых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются составными. Это связано с тем, что такие зацепления однозначно определяются составной частью зацепления.

**Определение 1.3.** Зацепление в  $K \tilde{\times} I$  называется *составным*, если существует шар в  $K \tilde{\times} I$ , который пересекает зацепление по заузленной дуге.

Во-вторых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые можно вложить в шар, так как этим зацеплениям отвечают зацепления в  $S^3$ . Такие зацепления будем называть *локальными*.

В-третьих, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются *кольцевыми*. Это связано с тем, что кольцевые зацепления — зацепления в

полном торе, которые уже табулированы в работе [16].

**Определение 1.4.** Зацепление в  $K \tilde{\times} I$  называется *кольцевым*, если дополнение к зацеплению содержит вертикальное кольцо. *Вертикальное кольцо* в  $K \tilde{\times} I$  — это послойное кольцо или изотопное ему, возникающее из нетривиальной замкнутой кривой на бутылке Клейна.

В-четвертых, мы не будем включать в таблицу зацепления, которые являются расщепляемыми.

**Определение 1.5.** Зацепление с более чем одной компонентой в  $K \tilde{\times} I$  называется *расщепляемым*, если в дополнении к зацеплению существует разбивающий тор, который параллелен  $\partial(K \tilde{\times} I)$  и отделяет одну или несколько компонент зацепления от других компонент.

В классическом случае зацепления в  $R^3$  (или  $S^3$ ) задаются с помощью проекций на плоскость  $R^2$  (или на сферу  $S^2$ ) [7]. В случае зацеплений в утолщённом торе зацепления задаются проекцией на тор [1]–[4], [12]. В случае зацеплений в проективном пространстве зацепления задаются проекцией на диск [5, 15]. В данной работе будем представлять зацепления в утолщённой бутылке Клейна  $K \tilde{\times} I$  с помощью проекций на бутылку Клейна  $K$ , где  $K$  — будет представлена виде склейки квадрата.

**Определение 1.6.** *Проекцией* называется регулярный четырёхвалентный граф на бутылке Клейна  $K$ . Вершины графа мы будем называть перекрёстками проекции. Компонентой проекции называется замкнутый путь на графе, проходящий по правилу «прямо — вперёд». Две проекции эквивалентны, если существует гомеоморфизм бутылки Клейна на себя, переводящий одну проекцию в другую.

Отметим, что в нашем случае общепринятый способ задания зацепления на бутылке Клейна с помощью проекции размеченной в перекрёстках (такую проекцию называют диаграммой зацепления) не работает, так как бутылка Клейна — неориентируемая поверхность. Чтобы устранить это препятствие, будем представлять бутылку Клейна  $K$  в виде склейки сторон квадрата  $ABCD$ . Для этого рассмотрим две кривые на бутылке Клейна: меридиан  $\tilde{\mu}$  — простую замкнутую кривую, при разрезании по которой получается кольцо, и среднюю линию листа Мёбиуса  $\tilde{m}$  — это простая замкнутая кривая, при разрезании по которой получается лист Мёбиуса. Разрежем бутылку Клейна  $K$  по  $\tilde{\mu}$  и  $\tilde{m}$ , получим квадрат

$ABCD$  с отождествлёнными сторонами (см. рис. 1.2, где стрелки показывают, какие точки и в каком порядке отождествляются).

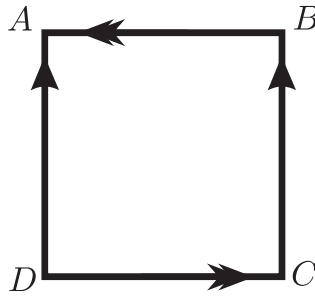


Рис. 1.2: Бутылка Клейна представлена в виде квадрата  $ABCD$  с отождествлёнными сторонами: вертикальные стороны отождествлены по параллельному переносу, а горизонтальные стороны по центральной симметрии относительно центра квадрата

Стороны квадрата  $AB$  и  $DC$  будем называть *горизонтальными сторонами*, а стороны  $AD$  и  $BC$  будем называть *вертикальными сторонами*. В дальнейшем, чтобы не загромождать рисунки, мы не будем помечать буквами вершины квадрата.

**Определение 1.7.** *Проекция на квадрате* — это набор таких собственных дуг или связный граф на квадрате, что при указанных отождествленных сторон квадрата концы дуг склеиваются попарно, каждая его вершина (перекрёсток) имеет валентность 4 и правило «прямо – вперёд» определяет его полные обходы. *Диаграмма* — это проекция на квадрате с указанием разрывов в перекрёстках. *Сложность диаграммы* — это количество перекрёстков.

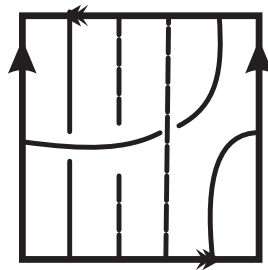


Рис. 1.3: Пример диаграммы двухкомпонентного зацепления на квадрате

Пример диаграммы двухкомпонентного зацепления показан на рисунке 1.3. Мы рассматриваем диаграммы (или проекции) зацеплений на квадрате в общем положении. Это означает, что все дуги являются гладкими, все перекрёстки

двойные и трансверсальные, никакой перекрёсток не лежит на сторонах квадрата и никакая дуга диаграммы (или проекции) не касается сторон квадрата и не исходит из вершин квадрата.

**Определение 1.8.** Диаграмма зацепления  $L \subset K \tilde{\times} I$  называется *минимальной*, если её число перекрёстков не превосходит числа перекрёстков любой диаграммы любого зацепления, эквивалентного зацеплению  $L$ . Проекция зацепления в  $K \tilde{\times} I$  называется *минимальной*, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

Рассмотрим простые замкнутые кривые:  $t; \mu; \lambda; m \in K$ . Пусть  $t$  — тривиальная окружность, которая ограничивает диск;  $\mu$  — меридиан, кривая ограничивает кольцо;  $\lambda$  — параллель, которая ограничивает два листа Мёбиуса;  $m$  — средняя линия листа Мёбиуса, которая ограничивает лист Мёбиуса. Будем говорить, что простая замкнутая кривая (в дальнейшем мы её будем называть окружностью) соответствует одному из 4 типов (тривиальная, меридиан, параллель или средняя линия листа Мёбиуса), если существует гомеоморфизм бутылки Клейна на себя, переводящий окружность в одну из этих 4 окружностей. На рисунке 1.4 изображены типы нетривиальных окружностей на бутылке Клейна:  $\mu$  — меридиан;  $\lambda$  — параллель;  $m$  — средняя линия листа Мёбиуса.

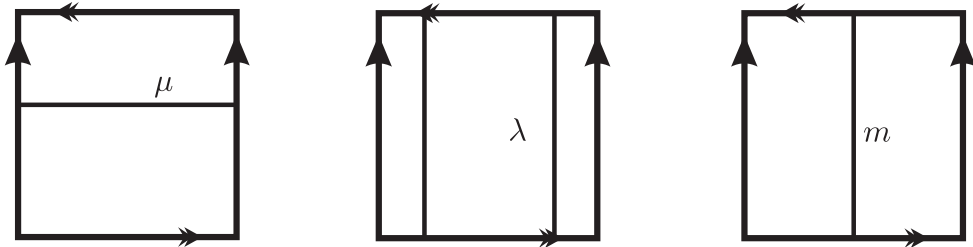


Рис. 1.4: Типы нетривиальных окружностей на бутылке Клейна:  $\mu$  — меридиан;  $\lambda$  — параллель;  $m$  — средняя линия листа Мёбиуса

Сформулируем очевидные достаточные условия того, что диаграмма задаёт зацепление одного из не рассматриваемых типов.

**Лемма 1.1.** 1. Если проекция зацепления содержится в диске, то любая отвечающая ей диаграмма задаёт локальное зацепление.

2. Если на бутылке Клейна существует кольцо или лист Мёбиуса, содержащие проекцию зацепления, то любая отвечающая этой проекции диаграмма задаёт кольцевое зацепление.

3. Пусть проекция такова, что на бутылке Клейна имеется диск, край которого трансверсально пересекается с проекцией ровно в двух точках и делит проекцию на две части, в каждой из которых есть хотя бы один перекрёсток. Тогда любая отвечающая этой проекции диаграмма либо неминимальная, либо задаёт составное зацепление в  $K \tilde{\times} I$ .

4. Если проекция несвязна или одна из её компонент типа меридиан пересекается с объединением остальных в единственной точке, то любая диаграмма, отвечающая этой проекции, задаёт расщепляемое зацепление.

5. Если в диаграмме компоненты можно разбить на два набора так, что первый набор состоит из одной компоненты типа меридиан и она проходит всюду над (или под) компонентами из второго набора, то диаграмма задаёт расщепляемое зацепление.

6. Если в диаграмме компоненты можно разбить на два набора так, что первый набор состоит из одной компоненты типа параллель и она проходит сначала над, затем под компонентами из второго набора, то диаграмма задаёт расщепляемое зацепление.

*Доказательство.* Очевидно следует из определения типов узлов и зацеплений, их проекций и диаграмм. □

**Определение 1.9.** Проекция зацепления называется *существенной*, если число её компонент больше 1, и к ней не применим ни один из пп. 1–4 леммы 1.1. Проекция узла называется *существенной*, если к ней неприменим ни один из пп. 1–3 леммы 1.1.

**Определение 1.10.** Зацепление (или узел) в  $K \tilde{\times} I$  называется *существенным*, если оно не кольцевое и не составное.

### 1.3 Преобразования диаграмм зацеплений на квадрате

Нарушение условий регулярности кривой в случае классических узлов приводит к преобразованиям Рейдемайстера. Аналогичным образом для диаграмм зацеплений в  $K \tilde{\times} I$ , помимо обычных преобразований Рейдемайстера  $R_1, R_2, R_3$  вводятся новые преобразования:  $R_4 - R_{12}$ . Опишем эти преобразования диаграмм зацеплений на квадрате, которые изображены на рисунке 1.5.

- (1)  $R_1$  — удаление (появление) малой петли (первое преобразование Рейдемайстера).

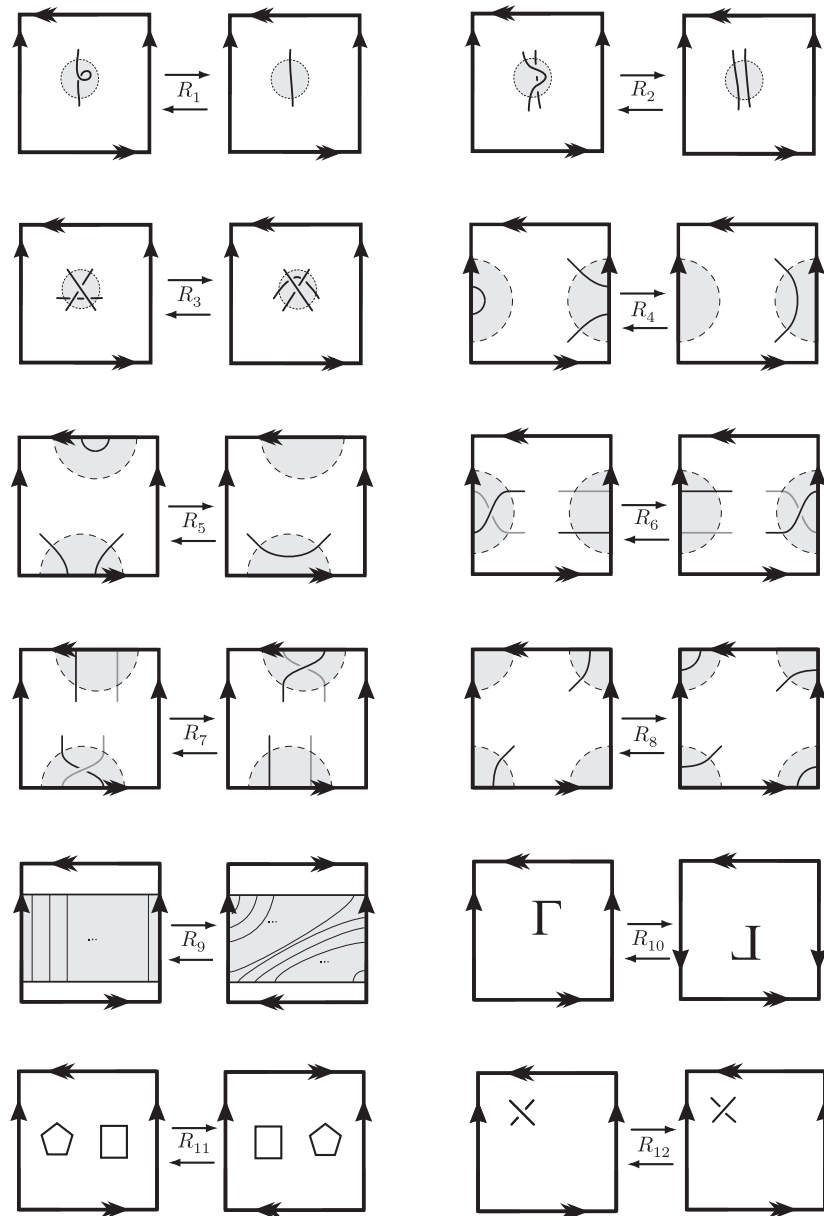


Рис. 1.5: Преобразования  $R_1$ – $R_{12}$  диаграмм зацеплений на квадрате

- (2)  $R_2$  — удаление (появление) парного перекрёстка (второе преобразование Рейдемайстера).
- (3)  $R_3$  — перемещение некоторой третьей ветви над или под перекрёстком (третье преобразование Рейдемайстера).
- (4)  $R_4$  — перемещение тривиальной дуги диаграммы через вертикальные стороны квадрата.
- (5)  $R_5$  — перемещение тривиальной дуги диаграммы через горизонтальные стороны квадрата.
- (6)  $R_6$  — перемещение перекрёстка диаграммы через вертикальные стороны

квадрата.

- (7)  $R_7$  — перемещение перекрёстка диаграммы через горизонтальные стороны квадрата.
- (8)  $R_8$  — перемещение тривиальной дуги диаграммы через вершины квадрата.

Пусть  $c$  — двухсторонняя простая замкнутая кривая на бутылке Клейна  $K$ . Разрежем поверхность  $K$  по кривой  $c$ , скрутим один из краев разреза на 360 градусов в одном из двух возможных направлений и склеим края разреза назад. Получим гомеоморфизм, называемый *скручиванием вдоль двухсторонней простой замкнутой кривой  $c$* . Это определение аналогично определению скручивания вдоль кривой в ориентируемой поверхности, см. например в книге [6].

- (9)  $R_9$  — скручивание вдоль двухсторонней простой замкнутой кривой  $c$ .
- (10)  $R_{10}$  — поворот квадрата на 180 градусов относительно центра квадрата.
- (11)  $R_{11}$  — зеркальное отображение квадрата относительно вертикальной или горизонтальной стороны квадрата.
- (12)  $R_{12}$  — смена всех типов перекрёстков на противоположные.

На рисунке 1.5 преобразование  $R_9$  применили вдоль меридиана, а преобразование  $R_{11}$  применили относительно вертикальной стороны.

**Теорема 1.1.** *Если две диаграммы на квадрате можно соединить одним из 12 преобразований  $R_1$ — $R_{12}$ , то соответствующие им зацепления в утолщённой бутылке Клейна эквивалентны.*

*Доказательство.* Легко проверить, что преобразования  $R_1$ — $R_7$  определяют изотопию зацеплений в утолщённой бутылке Клейна.

Преобразование  $R_8$  на рисунке 1.5 состоит в перемещении тривиальной дуги диаграммы через вершины квадрата. С другой стороны, это преобразование эквивалентно перемещению этой же дуги через точку пересечения кривых  $\tilde{\mu}$  и  $\tilde{m}$  на бутылке Клейна, см. рис. 1.6.

Преобразование  $R_9$  определяет гомеоморфизм утолщённой бутылки Клейна на себя. Мы разрежем утолщённую бутылку Клейна по кольцу  $c \times I$ , скрутим



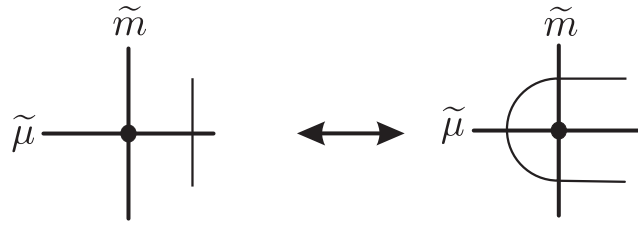


Рис. 1.6: Перемещение тривиальной дуги диаграммы через точку пересечения меридиана  $\tilde{\mu}$  и средней линии листа Мёбиуса  $\tilde{m}$

один край разреза на 360 градусов в одном из двух возможных направлений и склеим края разреза назад.

Опишем гомеоморфизмы утолщённой бутылки Клейна на себя, соответствующие преобразованиям  $R_{10}$ – $R_{12}$ . Для этого представим утолщённую бутылку Клейна в виде куба  $[0; 1] \times [0; 1] \times [-1; 1]$  с отождествлёнными гранями, в котором квадрат является произведением  $[0; 1] \times [0; 1] \times \{0\}$  см. параграф 1.1.

Тогда преобразование  $R_{10}$  — это гомеоморфизм куба на себя, который задаётся правилом:  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (1 - x_1, 1 - x_2, x_3)$ .

Преобразование  $R_{11}$  — это гомеоморфизм куба на себя, который задаётся правилом:  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, 1 - x_2, x_3)$  или  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (1 - x_1, x_2, x_3)$ .

Преобразование  $R_{12}$  — это гомеоморфизм куба на себя, который задаётся правилом:  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, -x_3)$ .  $\square$

#### 1.4 Обобщённый полином Кауффмана для зацеплений в утолщённой бутылке Клейна

Рассмотрим некоторое зацепление  $L$  в  $K \tilde{\times} I$  и его диаграмму  $D_L$  на квадрате. Каждый перекрёсток делит плоскость на два дополнительных угла, один из которых мы назовем углом типа  $A$ , а другой угол типа  $B$  (как в книге [8]). *Угол типа  $A$*  — это тот угол который мы сначала видим справа, когда проходим перекрёсток по верхней ветви; *угол типа  $B$*  — это тот который мы сначала видим справа, когда проходим перекрёсток по нижней ветви см. рис. 1.7. Если в каждом перекрёстке применить одно из двух возможных преобразований расщепления типа  $A$  или типа  $B$  (см. рис. 1.7), то получим диаграмму зацепления, состоящую из набора попарно не пересекающихся замкнутых кривых. Под состоянием  $s$  диаграммы зацепления  $L$  будем понимать выбор в каждом перекрёстке расщепление типа  $A$  или типа  $B$ . Для зацепления с  $n$  перекрёстками допускается, таким образом,  $2^n$  возможных состояний.



Рис. 1.7: Типы углов в перекрёстке и расщепление перекрёстка по  $A$  или по  $B$

Теперь рассмотрим ориентированное зацепление, т.е. будем считать, что на каждой компоненте задана ориентация (на рисунках она изображается стрелкой, задающей направление обхода). Для диаграммы  $D_L$  ориентированного зацепления определим число скученности:

$$w(D_L) = \sum_i \varepsilon_i,$$

где сумма берется по всем перекрёсткам, а число  $\varepsilon_i$  равно  $\pm 1$  в зависимости от знаков  $i$ -го перекрёстка, который определяется так, как показано на рис. 1.8. Если ориентацию всех компонент зацепления заменить на противоположные, то число  $w(D_L)$  не изменится.

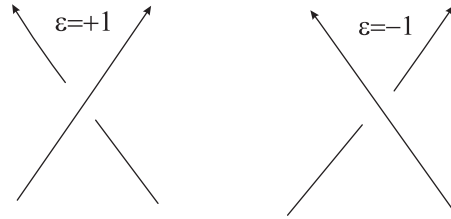


Рис. 1.8: Типы знаков перекрёстков

**Определение 1.11.** Для ориентированной диаграммы  $D_L$  зацепления  $L$  в  $K \tilde{\times} I$  определим обобщённый полином Кауффмана  $\langle L \rangle$  от 4 переменных  $A, x, y$  и  $z$  по формуле:

$$\langle L \rangle = (-A)^{-3w(D_L)} \sum_s A^{\alpha(s)-\beta(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\gamma_t(s)} x^{\delta_\mu(s)} y^{\delta_\lambda(s)} z^{\delta_m(s)},$$

где  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  — число выбранных расщеплений типа  $A$  и  $B$  в состоянии  $s$ ,  $\gamma_t(s)$  — число тривиальных окружностей и  $\delta_\mu(s), \delta_\lambda(s), \delta_m(s)$  — числа нетривиальных окружностей типа  $\mu, \lambda$ , и  $m$ , соответственно, полученных в результате расщепления всех перекрёстков в состояние  $s$ . Сумма берётся по всем возможным состояниям, а  $w(D_L)$  — сумма знаков перекрёстков.

**Теорема 1.2.** *Обобщённый полином Кауффмана является инвариантом зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, т.е. не изменяется при преобразованиях  $R_1 - R_{12}$  (изображены на рисунке 1.5).*

*Доказательство.* Доказательство инвариантности проверяется аналогично соответствующему доказательству для классических зацеплений. Единственно, число нетривиальных окружностей в наборах состояниях диаграммы, отличающейся только фрагментами преобразованиями  $R_1 - R_{12}$ , одинаковые, при этом гомеоморфизм бутылки Клейна на себя сохраняет тип окружности.  $\square$

**Замечание 1.1.** Как и в классическом случае, такие преобразования диаграмм, как зеркальное отображение  $R_{11}$  или одновременная смена типов всех её перекрёстков на противоположные  $R_{12}$ , влечет замену переменных  $A \rightarrow A^{-1}$ .

**Замечание 1.2.** Если  $L$  — это узел, то определение обобщённого полинома Кауффмана 1.11 определено для неориентированного узла.

**Замечание 1.3.** Чтобы получить инвариант неориентированного зацепления (число компонент которого больше одного) надо либо посчитать инварианты для всех возможных комбинаций ориентаций компонент, результатом будет не один полином, а неупорядоченный набор полиномов (их количество равно  $2^k$  в степени количество компонент). Либо определять скручивание диаграммы как сумму знаков только самопересечений компонент.

**Пример 1.1.** Рассмотрим вычисление обобщённого полинома Кауффмана на примере узла  $2_2$ , диаграмма которого изображена на рисунке 1.9 слева.

В каждом перекрёстке расставим типы углов  $A$  и  $B$ . Диаграмма имеет два перекрёстка, следовательно имеем  $2^2 = 4$  число состояний. Все состояния показаны на рисунке 1.9. Ориентируем узел и находим число скрученности:  $w(2_2) = (+1) + (+1) = 2$ .

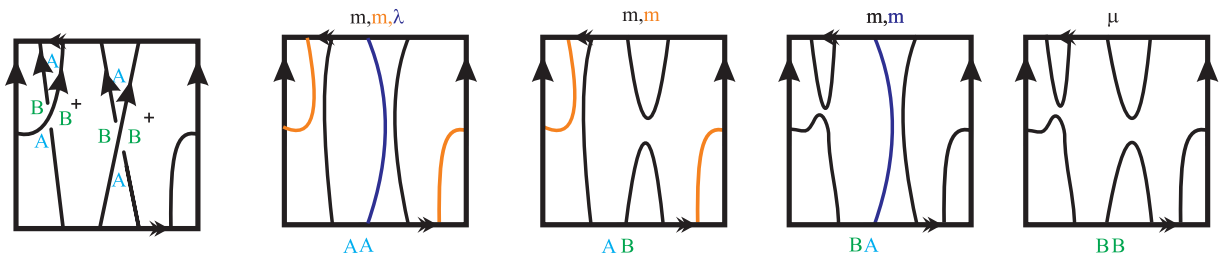


Рис. 1.9: Пример вычисления обобщённого полинома Кауффмана

Получаем:

$$\begin{aligned}
\langle 2_2 \rangle &= (-A)^{-3 \cdot 2} (A^{2-0} (-A^2 - A^{-2})^0 x^0 y^1 z^2 + A^{1-1} (-A^2 - A^{-2})^0 x^0 y^0 z^2 + \\
&\quad + A^{1-1} (-A^2 - A^{-2})^0 x^0 y^0 z^2 + A^{0-2} (-A^2 - A^{-2})^0 x^1 y^0 z^0) = (-A)^{-6} (A^2 y z^2 + z^2 + \\
&\quad z^2 + A^{-2} x) = A^{-8} x + 2A^{-6} z^2 + A^{-4} y z^2.
\end{aligned}$$

## ГЛАВА 2

**Табулирование существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна**

Результаты данной главы опубликованы в [31, 32, 34, 35, 35].

Настоящая глава посвящена классификации существенных узлов до сложности три в утолщённой бутылке Клейна. Сначала перебираются все абстрактные регулярные графы степени 4, имеющие не более трёх вершин. Затем получаем проекции, как вложения этих графов в бутылку Клейна. С помощью некоторых приёмов убираются не существенные и эквивалентные диаграммы. Различность узлов доказывается с помощью обобщённого полинома Кауффмана на случай узлов в утолщённой бутылке Клейна. Полученная таблица содержит 28 попарно неэквивалентных существенных узлов, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков.

### 2.1 Перечисление существенных проекций узлов на бутылке Клейна, которые имеют не более трёх перекрёстков

**Лемма 2.1.** *Пусть  $G$  — существенная проекция зацепления на бутылке Клейна  $K$ . Если проекция  $G$  имеет петли, то их не более двух, и петли соответствуют окружности типа средняя линия листа Мёбиуса.*

*Доказательство.* Пусть на проекции  $G$  имеется петля  $\nu$ . Покажем, что если  $\nu$  — петля, то она соответствует типу средней линии листа Мёбиуса. Инцидентный петле перекрёсток обозначим через  $V$ . Возможны три ситуации:  $\nu$  ограничивает диск;  $\nu$  — нетривиальная окружность и подходит к  $V$  с противоположных сторон;  $\nu$  — нетривиальная окружность и подходит к  $V$  с непротивоположных сторон. Разберем эти ситуации.

Пусть  $\nu$  ограничивает диск. Тогда найдется диск, край которого трансверсально пересекается с проекцией ровно в двух точках и делит проекцию на две части в каждой из которых есть хотя бы один перекрёсток. В этом случае к  $G$  применим п. 3 леммы 1.1, получим противоречие, так как  $G$  по условию существенная проекция.

Пусть  $\nu$  — нетривиальная окружность, подходящая к  $V$  с противоположных сторон. Тогда  $\nu$  является компонентой проекции, которая пересекается с остальными в единственной точке  $V$ . Следовательно,  $\nu$  — либо меридиан, либо средняя линия листа Мёбиуса. Если  $\nu$  — меридиан, то в этом случае к  $G$  применим п. 4 леммы 1.1, получим противоречие, так как  $G$  по условию существенная

проекция. Если  $\nu$  — средняя линия листа Мёбиуса, то проекция  $G$  имеет петлю типа средней линии листа Мёбиуса.

Пусть  $\nu$  — нетривиальная окружность, которая подходит к  $V$  с противоположных сторон. Если окружность, образуемая петлёй  $\nu$ , является нетривиальной, не меняющей ориентацию окружностью, то существует нетривиальная окружность, параллельная петле  $\nu$  и не имеющая с  $G$  общих точек. Следовательно, применим п. 2 леммы 1.1, получаем, что проекция несущественная. Если окружность, образуемая петлей  $\nu$ , является нетривиальной, меняющей ориентацию окружностью, то  $\nu$  — окружность типа средняя линия листа Мёбиуса.

В результате получаем, что проекция  $G$  может иметь петлю, которая соответствует нетривиальной окружности типа средняя линия листа Мёбиуса. Легко заметить, что количество петель не может превосходить двух, так как на бутылке Клейна существует всего две непересекающиеся окружности типа средняя линия листа Мёбиуса.  $\square$

**Замечание 2.1.** Существуют ровно 6 связных регулярных графов степени 4 с тремя и менее вершинами, с не более чем двумя петлями, см. рис. 2.1.

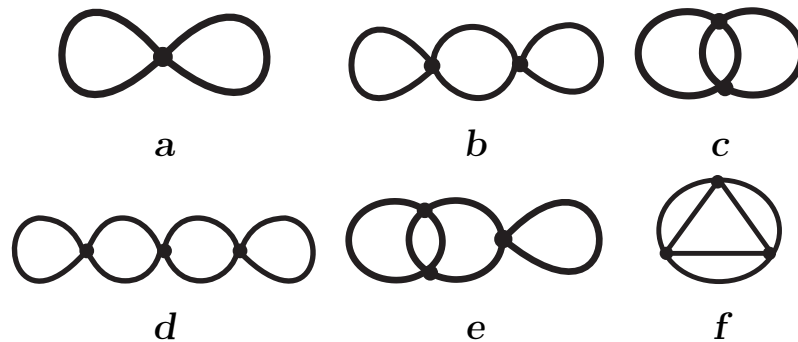


Рис. 2.1: Регулярные графы степени 4, имеющие не более трёх вершин и двух петель

Для построения проекций нам понадобятся две операции. Первая операция — *операция устранения перекрёстка*, изображённая на рисунке 2.2 слева. Она заключается в следующем: ориентируем ребра проекции, используя любой из двух её полных обходов по правилу «прямо — вперёд». Тогда операция устранения данного перекрёстка состоит в замене этого перекрёстка на пунктирную дугу так, как это показано на рисунке 2.2. В результате получится новая проекция, у которой на один перекрёсток меньше и которая снабжена пунктирной

дугой. Обозначим через  $M$  операцию устранения перекрёстка, а обратную операцию к  $M$  через  $M^{-1}$  (добавление перекрёстка).

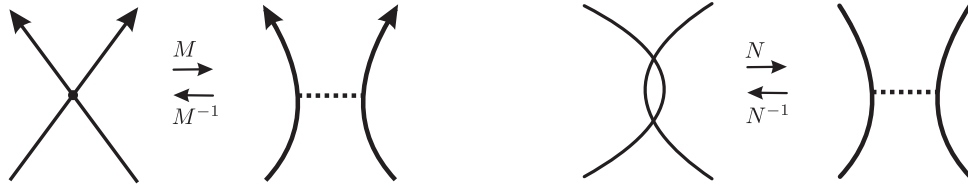


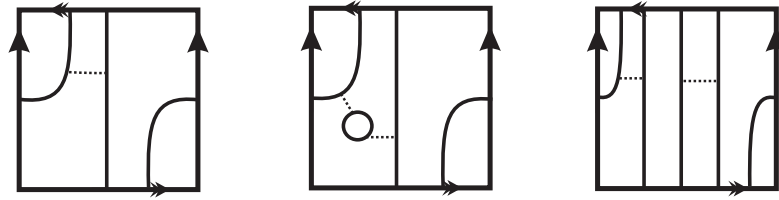
Рис. 2.2: Операция устранения (добавления) перекрёстка и операция устранения (добавления) двуугольника

Вторая операция — *операция устранения двуугольника*, изображённая на рисунке 2.2 справа. Операция состоит в замене двуугольника на пунктирную дугу. В результате получится новая проекция, у которой на два перекрёстка меньше и которая снабжена пунктирной дугой. Обозначим через  $N$  операцию устранения двуугольника, а обратную операцию к  $N$  через  $N^{-1}$  (добавление двуугольника).

**Лемма 2.2.** *На бутылке Клейна существует ровно 1 существенная проекция узла, являющаяся вложением графа  $\mathbf{a}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекция  $1_1$  см. рис. 4.1.*

*Доказательство.* Рассмотрим существенную проекцию  $G$  типа  $\mathbf{a}$ . Так как её единственная вершина является разбивающей, то устранение этой вершины даёт пару непересекающихся окружностей на бутылке Клейна, соединённых пунктирной дугой. Поскольку у этой дуги всего два конца, то обе окружности односторонние, т.е. обращают ориентацию (две окружности типа средней линии листа Мёбиуса). В противном случае одна из них имела бы свободную сторону, вдоль которой можно было бы провести нетривиальную простую замкнутую окружность, лежащую в  $K \setminus G$ . Это противоречит существенности проекции, см. лемму 1.1. Упомянутые окружности можно соединить только одной пунктирной дугой (с точностью до гомеоморфизмов  $K \rightarrow K$ , которые переводят эти окружности в себя), см. схему соединения на рис. 2.3 слева. Стягивая пунктирную дугу в точку (применим операцию добавления перекрёстка  $M^{-1}$ ), получаем проекцию  $1_1$ , см. рис. 4.1.  $\square$

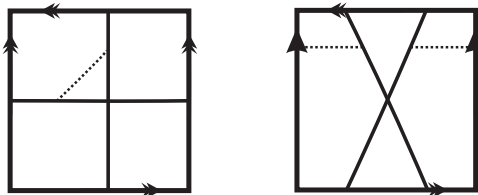
**Лемма 2.3.** *На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проекции узлов, являющихся вложением графа  $\mathbf{b}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $2_1, 2_2$  см. рис. 4.1.*

Рис. 2.3: Схемы проекций типов **a** и **b**

*Доказательство.* Рассмотрим существенную проекцию  $G$  типа **b**. Устранив обе её вершины, получим цепочку из трёх окружностей, соединённых двумя пунктирными дугами. Как и выше, две крайние окружности односторонние, а оставшаяся может быть как тривиальной, так и нет. За нетривиальную окружность подойдет только окружность типа параллель см. рис. 2.3. Окружности можно соединить только двумя пунктирными дугами с точностью до гомеоморфизмов  $K \rightarrow K$ , которые переводят эти окружности в себя. Стянув дуги в точки (применим операцию добавления перекрёстка  $M^{-1}$ ), получим проекции  $2_1$  и  $2_2$ , см. рис. 4.1.  $\square$

**Лемма 2.4.** *На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проекций узлов, являющихся вложением графа **c**, изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $2_3, 2_4$  см. рис. 4.1.*

*Доказательство.* Рассмотрим существенную проекцию  $G$  типа **c**. Устранив одну из её вершин, получим пару окружностей, которые трансверсально пересекаются в одной точке и соединены пунктирной дугой. С точностью до гомеоморфизма на  $K$  есть только две такие пары:  $(m, \mu)$  и  $(m_1, m_2)$ , где  $\mu$  — меридиан, а  $m, m_1, m_2$  — средняя линия листа Мёбиуса. В обоих случаях пунктирные дуги проводятся однозначно, см. рис. 2.4. Стягивая их в точки, получаем проекции  $2_3$  и  $2_4$ , см. рис. 4.1.  $\square$

Рис. 2.4: Схемы проекций типа **c**

**Лемма 2.5.** *На бутылке Клейна существует ровно 3 существенных проекции узлов, являющиеся вложением графа **d**, изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $3_1, 3_2, 3_3$  см. рис. 4.1.*



*Доказательство.* Построение существенных проекций типа  $d$  аналогично построению проекций типов  $a$  и  $b$ . Устранение всех трёх вершин даёт цепочку из 4 окружностей, соединённых 3 пунктирными дугами. Как и раньше, крайние окружности должны быть односторонними. Средние окружности могут быть как тривиальными, так и нет. Таким образом мы имеем 3 возможности расположения окружностей, которые удобно закодировать так:  $(m, t, t, m)$ ,  $(m, t, \lambda, m)$ ,  $(m, \lambda, \lambda, m)$ , где буквы  $m$  обозначает окружность типа средняя линия листа Мёбиуса,  $t$  — тривиальная окружность, а  $\lambda$  — параллель. Соответствующие схемы показаны на рис. 2.5. Стягивание пунктирных дуг в точки даёт три новые проекции  $Z_1, Z_2$  и  $Z_3$  см. рис. 4.1.  $\square$

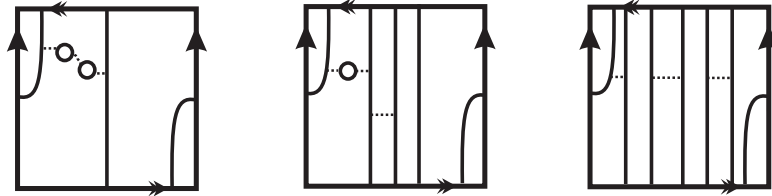


Рис. 2.5: Схемы проекций типа  $d$

**Лемма 2.6.** *На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проекции узлов, являющихся вложением графа  $e$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекция  $Z_4, Z_5$  см. рис. 4.1.*

*Доказательство.* Пусть  $G$  — проекция типа  $e$ . Устранив вершину её петли и одну из двух оставшихся вершин, мы получим три окружности  $k_1, k_2, k_3$ . Две из них, скажем,  $k_1, k_2$ , трансверсально пересекаются в одной точке и соединены пунктирной дугой. Окружность  $k_3$  расположена отдельно и соединена пунктирной дугой с одной из первых двух. Как было отмечено выше, две окружности могут трансверсально пересекаться в одной точке только в двух случаях: одна из окружностей является меридианом, а вторая является средней линией листа Мёбиуса; обе окружности типа средней линии листа Мёбиуса.

В первом случае окружность  $k_3$  обязана быть тривиальной, но тогда  $G$  будет иметь тривиальную петлю, что противоречит условию её существенности. Во втором случае окружность  $k_3$  тоже должна обращать ориентацию, так как быть тривиальной или иметь тип  $\lambda$  она не может из-за существенности проекции  $G$ . Заметим, что дополнение к объединению окружностей  $k_1, k_2, k_3$  на бутылке Клейна состоит из открытого диска и открытого кольца. Поэтому нетрудно показать, что соединяющие окружности пунктирные дуги можно провести только

двумя неэквивалентными способами, см. рис. 2.6. Стягивание пунктирных дуг в точки дают проекции  $\mathfrak{Z}_4$  и  $\mathfrak{Z}_5$ .  $\square$

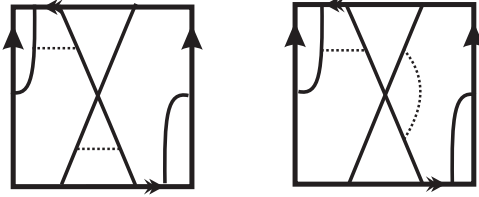


Рис. 2.6: Схемы проекций типа  $\mathfrak{e}$

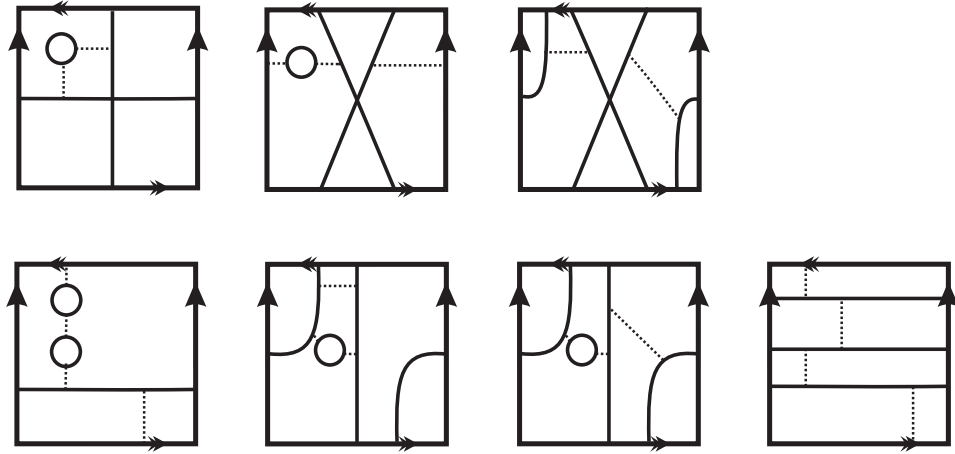
**Лемма 2.7.** *На бутылке Клейна существует ровно 7 существенных проекций узлов, являющихся вложением графа  $\mathbf{f}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $\mathfrak{Z}_6, \mathfrak{Z}_7, \mathfrak{Z}_8, \mathfrak{Z}_9, \mathfrak{Z}_{10}, \mathfrak{Z}_{11}, \mathfrak{Z}_{12}$  см. рис. 4.1.*

*Доказательство.* Пусть  $G$  — проекция типа  $\mathbf{f}$ . Она представляет собой цепочку из трёх окружностей  $k_1, k_2, k_3 \subset G$ , каждые две из которых имеют одну общую вершину.

Допустим, что в какой-нибудь вершине проходящие через неё окружности (пусть  $k_1, k_2$ ) пересекаются трансверсально. Тогда ни в одной из двух других вершин пересечение окружностей не может быть трансверсальным, поскольку иначе мы имели бы проекцию не узла, а зацепления. Как и выше, возможны два случая: одна из окружностей  $k_1, k_2$  типа  $\mu$ , а вторая типа  $t$ ; обе окружности  $k_1, k_2$  имеют тип  $t$ . Тогда для первой пары третья окружность  $k_3$  — тривиальная окружность, а для второй пары третья окружность  $k_3$  — это либо тривиальная либо средняя линия листа Мёбиуса. Схемы соответствующих трёх проекций показаны на рис. 2.7 вверху. Стягивая пунктирные дуги в точки, получаем проекцию  $\mathfrak{Z}_8$  в первом случае и проекции  $\mathfrak{Z}_9, \mathfrak{Z}_{11}$  во втором.

Теперь допустим, что все три точки пересечения окружностей  $k_1, k_2, k_3$  не являются трансверсальными. Устранив их, мы получим замкнутую цепочку из трёх непересекающихся окружностей, соединённых тремя пунктирными дугами. Потенциально возможные случаи удобно кодировать тройками типов участвующих окружностей:  $(\mu, t, t)$  — одна окружность типа меридиан, а две другие тривиальны;  $(t, t, t)$  — две окружности типа средняя линия листа Мёбиуса, а третья тривиальна;  $(\mu, \mu, \mu)$  — три окружности типа меридиан.

Заметим, что если параллель  $\lambda$  разбивает  $K$  на два листа Мёбиуса, то тройки, содержащие  $\lambda$ , не могут привести к существенным проекциям.

Рис. 2.7: Схемы проекций типа  $f$ 

Схемы соответствующих 4 проекций показаны на рис. 2.7 внизу. При стягивании пунктирных дуг в первом случае получается проекция  $\mathbb{Z}_6$ , во втором проекции  $\mathbb{Z}_7$  и  $\mathbb{Z}_{11}$  (схемы которых отличаются расположением пунктирных дуг), в третьем — проекция  $\mathbb{Z}_{12}$ .  $\square$

**Теорема 2.1.** *Существует ровно 17 различных существенных проекций на бутылке Клейна, число вершин которых не превосходит трёх. Все они изображены на рис. 4.1.*

*Доказательство.* Используя леммы с 2.2 по 2.7, получаем, что существует всего 17 существенных проекций зацеплений на бутылке Клейна, которые имеют не более чем три перекрёстка. Докажем, что все полученные проекции на рисунке 4.1 попарно неэквивалентны. Сопоставим каждой проекции так называемый *face-вектор*:  $(j; i_1, i_2, \dots, i_n)$ , где  $i_1, i_2, \dots, i_n$  — упорядоченное по неубыванию число углов её граней,  $j$  — графический тип проекции,  $j \in \{a, b, c, d, e, f\}$ . Строки, отвечающие построенным проекциям, приведены на рис. 4.1. Таких строк достаточно, чтобы различить любые две проекции, за исключением пары  $(\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_8)$ . Но эти две проекции неэквивалентны, потому что в первом случае граница семиугольной грани проходит по границе граней 3-7-2-7-3-7-7, а во втором случае граница семиугольной грани проходит по границе граней 3-7-3-7-2-7-7.  $\square$

## 2.2 Перечисление существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков

**Теорема 2.2.** *Существует ровно 28 попарно неэквивалентных существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Задающие их диаграммы изображены на рис. 4.2.*

*Доказательство.* По теореме 2.1 существует 17 существенных проекций. Чтобы по данной проекции построить диаграммы, нужно путем разрывов разметить все её перекрёстки. При смене всех знаков перекрёстков на противоположные класс эквивалентности зацеплений остаётся прежним. Тогда в рассмотрении каждой проекции тип одного перекрёстка можно зафиксировать, в силу чего для проекции с  $n$  перекрёстками достаточно рассмотреть  $2^{n-1}$  вариантов. Получаем, что проекций с одним перекрёстком 1, что проекций с двумя перекрёстками 4, а проекций с тремя перекрёстками 12. В итоге достаточно рассмотреть 57 диаграмм ( $1 \cdot 2^0 + 4 \cdot 2^1 + 12 \cdot 2^2$ ). Эти диаграммы изображены на рисунке 2.8.

Легко заметить, что диаграммы с номерами 3, 7, 11, 12, 13, 16, 17, 24, 25, 28, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 44, 45, 48, 49 не минимальны. На рисунке 2.9 приведены последовательность преобразований, связывающие диаграмму узлов 20 с диаграммой узла 21, 23 с диаграммами узлов 52, 51 с диаграммой узла 53 и диаграммы 55 с 56 и с 57. В результате осталось 28 диаграмм, см. рис. 4.4. Различность всех полученных узлов доказывается с помощью вычисления их обобщённых полиномов Кауффмана:

$$\begin{aligned}
1_1 &: -A^4x - A^{-2}z^2 \\
2_1 &: A^{-8}x + (A^{-6} - A^{-2})z^2 \\
2_2 &: A^{-8}x + 2A^{-6}z^2 + A^{-4}yz^2 \\
2_3 &: x + (A^{-2} + A^2)z^2 + yz^2 \\
2_4 &: (A^4 + A^6 - A^{10})z \\
2_5 &: (-2A^4 - 2A^8) + A^4y + A^8x^2 \\
2_6 &: (-A^{-4} - 2 - A^4) + y + x^2 \\
3_1 &: -A^{-12}x + (-A^{-10} + A^{-6} - A^{-2})z^2 \\
3_2 &: -A^{-4}x + (-A^{-6} - A^{-2} + A^2)z^2 + (-A^{-4} + 1)yz^2 \\
3_3 &: -A^{-12}x + (-2A^{-10} + A^{-6})z^2 + (-A^{-8} + A^{-4})yz^2
\end{aligned}$$

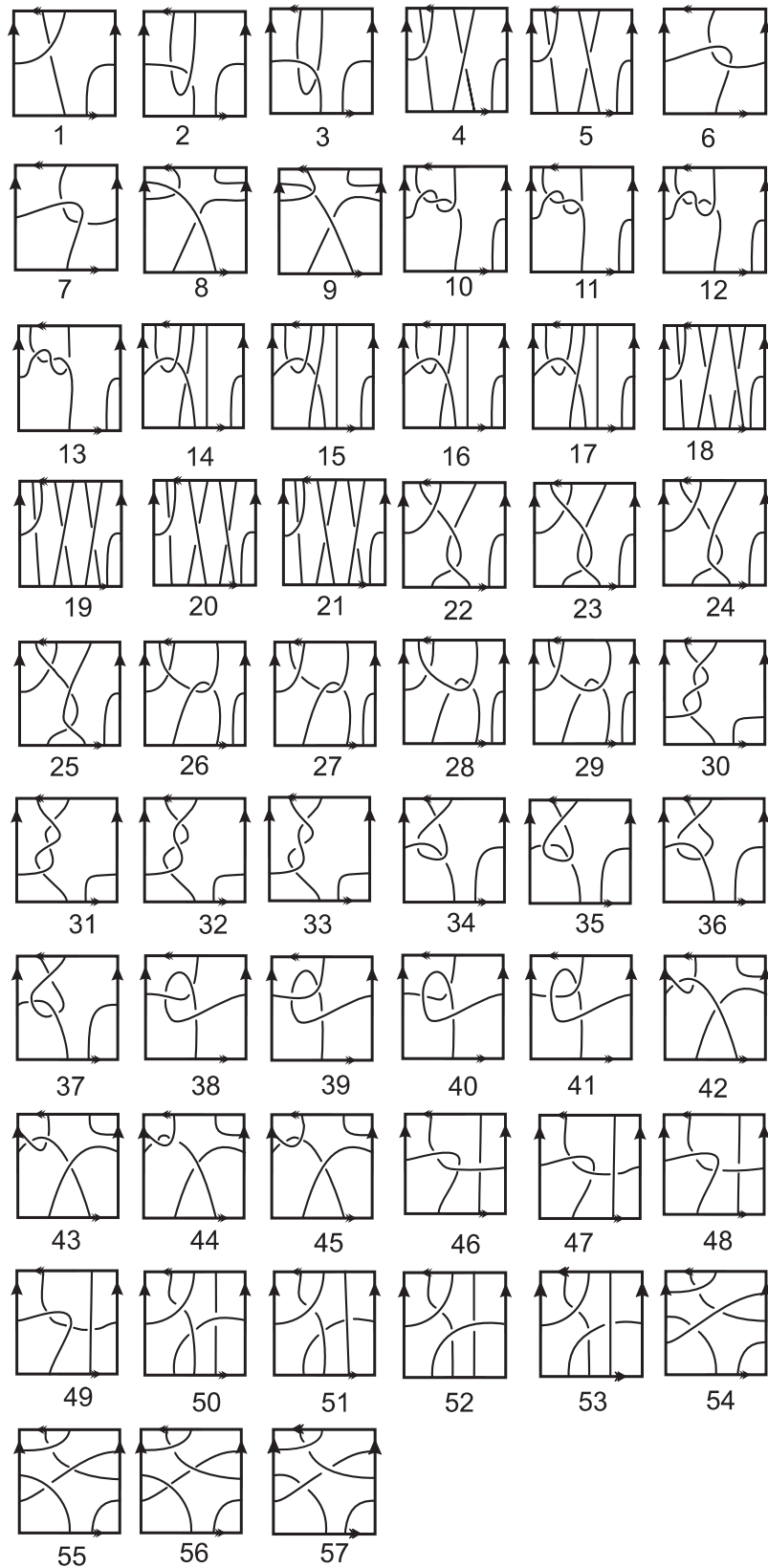


Рис. 2.8: Таблица из 57 диаграмм узлов, полученных из 17 проекций с зафиксированным одним перекрёстком

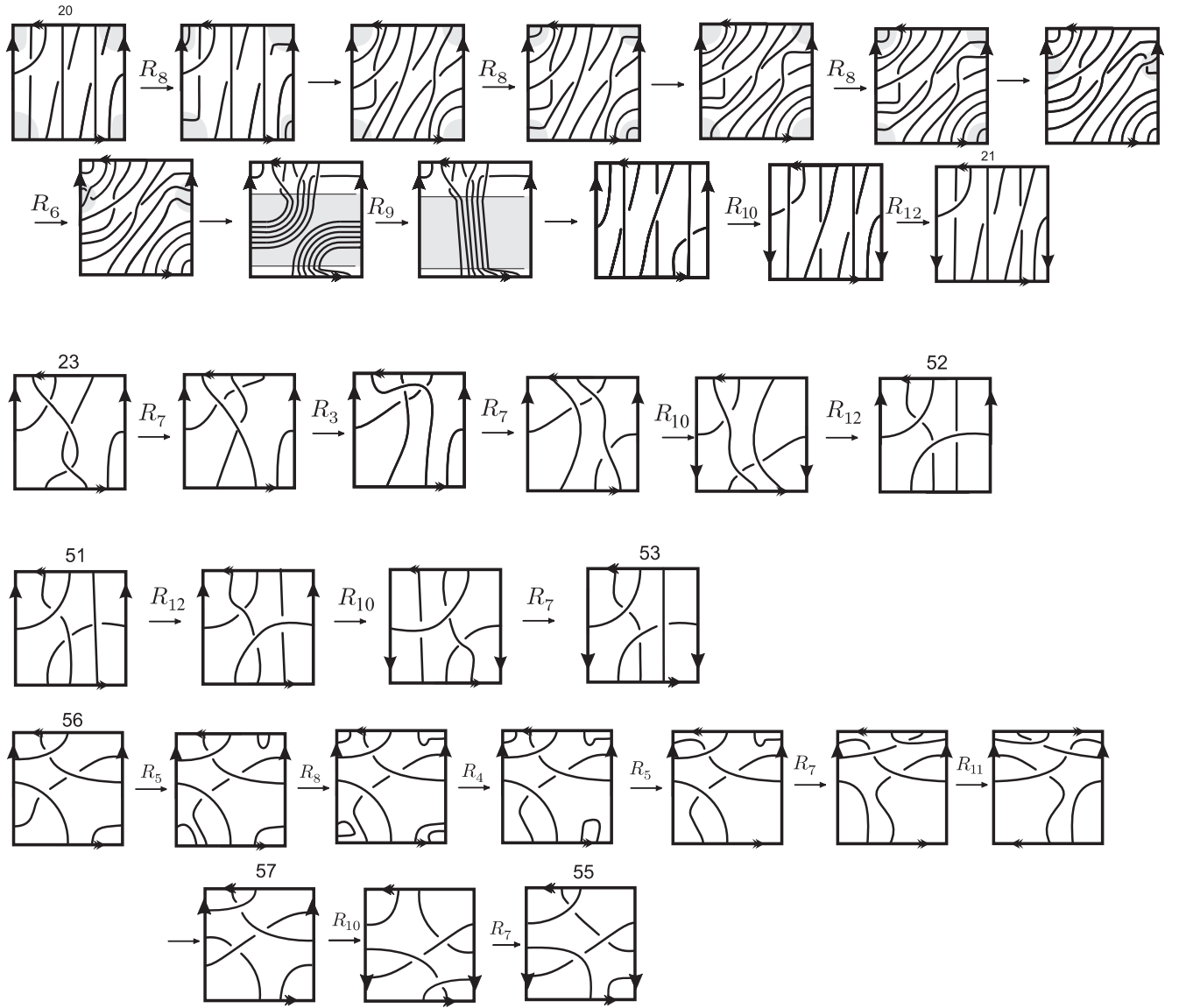


Рис. 2.9: Последовательность преобразований, связывающая диаграммы узлов 20 с 21, 23 с 52, 51 с 53, 56 с 57 и с 55

$$3_4 : -A^{-4}x + (-A^{-6} - A^{-2} + A^2)z^2 - 2A^{-4}yz^2 - A^{-2}y^2z^2$$

$$3_5 : -A^{-12}x + (-2A^{-10} + A^{-6})z^2 - 2A^{-8}yz^2 - A^{-6}y^2z^2$$

$$3_6 : -A^4x - A^2z^2 + (-1 - A^4)yz^2 - A^2y^2z^2$$

$$3_7 : (-1 + A^6 - A^{10})z - A^2yz$$

$$3_8 : (A^6 - A^8 - A^{10})z - A^6yz$$

$$3_9 : (A^4 - A^{10} + A^{14})z + (-A^8 + A^{12})yz$$

$$3_{10} : (-A^2 + A^4 + A^6)z + (-A^4 + A^8)yz$$

$$3_{11} : (-A^{-16} + A^{-12} - A^{-8})x - A^{-6}z^2$$

$$3_{12} : (A^4 - A^8 + A^{12})x + (-A^{10} + A^{14})z^2$$

$$3_{13} : (A^{-2} + 1 - A^2 - A^4 + A^8)z$$

$$3_{14} : (-A^{-2} + A^2 + 2A^6) + (A^{-2} - A^2)y - A^6x^2$$

$$\mathfrak{Z}_{15} : (-A^2 + 2A^{10} + A^{14}) + (A^6 - A^{10})y - A^{10}x^2$$

$$\mathfrak{Z}_{16} : (-2A^8 + A^{12})x + (-A^6 - A^{10} + A^{14})z^2$$

$$\mathfrak{Z}_{17} : (-1 - A^4 + A^8)x + (-2A^2 + A^6)z^2$$

$$\mathfrak{Z}_{18} : (A^{-8} - 2A^{-4} - A^{-2} + A^2)z - A^{-2}yz$$

$$\mathfrak{Z}_{19} : -A^4z - A^2yz$$

$$\mathfrak{Z}_{20} : 3A^{-12}x - A^{-6}z^2 - A^{-12}x^3$$

$$\mathfrak{Z}_{21} : (A^{-8} + A^{-4} + 1)x - A^{-2}z^2 - A^{-4}x^3.$$

В результате инвариант различил все узлы.

□

## ГЛАВА 3

### Табулирование существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна

Результаты данной главы опубликованы в [33].

В данной главе приведена полная таблица существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Сначала перебираются все абстрактные регулярные графы степени 4, имеющие не более трёх вершин. Затем получаем существенные нерасщепляемые проекции как вложения этих графов в бутылку Клейна. Бутылку Клейна представляем в виде квадрата с отождествленными сторонами. Из проекций на квадрате путем разрывов в перекрёстках получаем диаграммы зацеплений. С помощью некоторых приёмов убираются эквивалентные диаграммы. Различность зацеплений доказывается с помощью обобщения полинома Кауффмана на случай зацеплений в утолщённой бутылке Клейна. Полученная таблица содержит 25 попарно неэквивалентных зацеплений, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков.

#### 3.1 Перечисление существенных нерасщепляемых проекций зацеплений на бутылке Клейна, которые имеют не более трёх перекрёстков

**Лемма 3.1.** *На бутылке Клейна не существует существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{a}$ , изображённого на рисунке 2.1.*

*Доказательство.* Предположим, что на бутылке Клейна существует существенная проекция  $G$ , являющаяся вложением графа  $\mathbf{a}$ . Граф  $\mathbf{a}$  состоит из двух петель. По лемме 2.1, петли проекции соответствуют окружностям типа средней линии листа Мёбиуса. Тогда проекция  $G$ , соответствующая графу  $\mathbf{a}$ , состоит из двух окружностей типа средней линии листа Мёбиуса, пересекающихся трансверсально ровно в одной точке. Дополнение к такой проекции состоит из диска и листа Мёбиуса. Применим п. 2 леммы 1.1, получим, что проекция  $G$  не существенная, это противоречит выбору  $G$ .  $\square$

**Лемма 3.2.** *На бутылке Клейна существует ровно 2 существенных проекции зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{b}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l(2) : 2_1$  и  $l(3) : 2_2$ , см. рис. 4.3.*



*Доказательство.* Граф  $\mathbf{b}$  состоит из двух петель, соединенных двойным ребром. Тогда в этом графе возможно выделить не более три замкнутых пути. Следовательно, проекция  $G$ , соответствующая графу  $\mathbf{b}$ , может иметь 3 компоненты или 2 компоненты.

Предположим, что проекция  $G$  состоит из двух компонент. Применим операцию устранения перекрёстка к перекрёстку, где одна компонента пересекается сама с собой. Получим, что проекция  $G$  получается из трёх окружностей типа средней линии листа Мёбиуса. Так как две окружности — это петли, а третья окружность пересекается с одной петлей трансверсально в одной точке и соединена пунктирной дугой с другой петлей. Тогда с точностью до гомеоморфизма проекций существует единственная такая дуга. Применим операцию  $M^{-1}$ , получим проекцию  $l2_1$ , см. рис. 3.1.

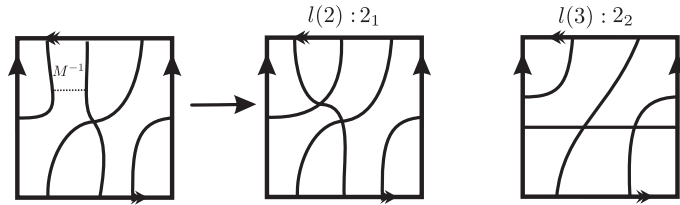


Рис. 3.1: Построение проекций типа  $\mathbf{b}$

Предположим, что проекция  $G$  состоит из трёх компонент. Петли проекции — это две средние линии листа Мёбиуса. Третья компонента пересекается трансверсально ровно в одной точке с каждой петлей. Следовательно, с точностью до гомеоморфизма,  $G$  является объединением двух средних линий листа Мёбиуса и меридиана. Это проекция  $l2_2$ , см. рис. 3.1.  $\square$

В дальнейшем, мы будем обозначать через  $\#(k_i \cap k_j)$  число точек пересечения окружностей  $k_i$  и  $k_j$ .

**Лемма 3.3.** *На бутылке Клейна существуют ровно 3 существенные проекции зацеплений, являющиеся вложением графа  $\mathbf{d}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l(2) : 3_1, l(2) : 3_2, l(3) : 3_3$ , см. рис. 4.3.*

*Доказательство.* Граф  $\mathbf{d}$  состоит из трёх вершин и двух петель, соединенных двумя двойными рёбрами. Тогда в этом графе возможно выделить максимально четыре замкнутых пути. Следовательно, проекция, соответствующая графу  $\mathbf{d}$ , может иметь 4, 3, или 2 компоненты.

Предположим, что  $G$  состоит из 2 компонент. Применим операцию устранения перекрёстка к двум перекрёсткам, в которых компоненты пересекаются

сами с собой. Тогда проекция получается из четырёх окружностей:  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Пусть  $k_1$  и  $k_4$  – окружности, соответствующие петлям. Возможны две ситуации. Первая ситуация:  $\#(k_2 \cap k_3) = 1$ , и окружности  $k_1$  и  $k_4$  соединены пунктирной дугой с окружностями  $k_2$  и  $k_3$ , соответственно. Получаем, что  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – окружности типа средней линии листа Мёбиуса, что невозможно на  $K$ , так как бутылка Клейна состоит из двух листов Мёбиуса. Следовательно, первая ситуация не подходит. Вторая ситуация:  $\#(k_4 \cap k_3) = 1$ , и пары  $(k_1, k_2)$  и  $(k_2, k_3)$  соединены пунктирными дугами. Так как  $\#(k_4 \cap k_3) = 1$ , то  $k_1, k_3, k_4$  – окружности типа средней линии листа Мёбиуса. Определим окружность  $k_2$ . Дополнение к  $k_1, k_3, k_4$  состоит из диска и кольца. Следовательно, чтобы проекция  $G$  была существенной, нужно выбрать окружность  $k_2$  на кольце. Получаем, что окружность  $k_2$  либо тривиальная, либо параллель. С точностью до гомеоморфизмов проекций выбор пунктирных дуг однозначен для каждого случая. Применим операцию  $M^{-1}$  вдоль пунктирных дуг, получим проекции  $l3_1$  и  $l3_2$ , см. рис. 3.2.

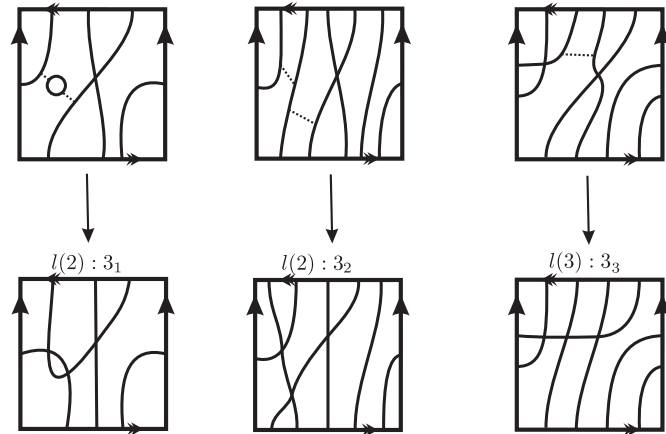


Рис. 3.2: Построение проекций типа  $d$

Предположим, что проекция  $G$  состоит из 3 компонент. Применим операцию устранения перекрёстка к перекрёстку, который образован одной компонентой. Тогда проекция получается из четырёх окружностей:  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Пусть  $k_1$  и  $k_4$  – окружности, соответствующие петлям. Возможны две ситуации. Первая ситуация:  $\#(k_4 \cap k_3) = 1$ ,  $\#(k_3 \cap k_2) = 1$ , а окружности  $k_1$  и  $k_2$  соединены пунктирной дугой. Следовательно,  $k_1, k_3, k_4$  – окружности типа средней линии листа Мёбиуса. Но выбрать  $k_2$  невозможно, так как дополнение к  $k_1, k_3, k_4$  на бутылке Клейна состоит из диска и кольца, тогда  $k_2$  трансверсально пересекается с  $k_3$  в двух точках. Следовательно, первая ситуация невозможна на  $K$ . Вторая ситуация:  $\#(k_1 \cap k_2) = 1$ ,  $\#(k_4 \cap k_3) = 1$  и окружности  $k_2$  и  $k_3$  соединены пунктирной дугой. Тогда  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – окружности типа средней линии листа

Мёбиуса, и с точностью до гомеоморфизма проекций существует единственная дуга, соединяющая  $k_2$  и  $k_3$ , см. рис. 3.2. Применим операцию  $M^{-1}$ , получим проекцию  $l3_3$ .

Проекция  $G$  не может состоять из 4 компонент. Так как дополнение к двум петлям на бутылке Клейна является кольцо, а любые подходящие окружности на кольце не разбивают его на диски. Следовательно, проекция  $G$ , соответствующая графу  $\mathbf{d}$ , не состоит из 4 компонент.  $\square$

**Лемма 3.4.** *На бутылке Клейна существуют ровно 2 существенные проекции зацеплений, являющиеся вложением графа  $\mathbf{c}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l(2) : 2_3, l(2) : 2_4$ , см. рис. 4.3.*

*Доказательство.* Пусть проекция является вложением графа  $\mathbf{c}$ . Граф  $\mathbf{c}$  состоит из двух вершин, соединённых 4 рёбрами. Тогда в этом графе возможно выделить максимально два замкнутых пути. Тогда проекция  $G$ , соответствующая графу  $\mathbf{c}$ , состоит из 2 компонент:  $k_1, k_2$ . Если проекция содержит двуугольник, применим операцию  $N$ . Получим, что  $k_1, k_2$  — две обращённые ориентации окружности. В противном случае к проекции применим п. 2 леммы 1.1. Тогда  $k_1, k_2$  — две средние линии листа Мёбиуса, соединённые пунктирной дугой. С точностью до гомеоморфизмов проекций выбор пунктирных дуг однозначен. Применим операцию  $N^{-1}$  вдоль пунктирной дуги, получим проекцию  $l2_3$ , см. рис. 3.3. Если проекция  $G$  не содержит двуугольник, то  $\#(k_1 \cap k_2) = 2$ . Получаем,  $k_1, k_2$  — меридиан и параллель. Получим проекцию  $l2_4$ , см. рис. 3.3.

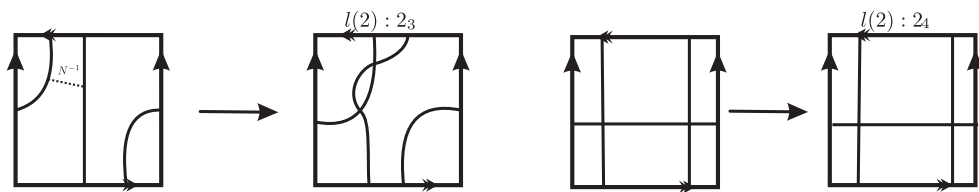


Рис. 3.3: Построение проекций типа  $\mathbf{c}$

$\square$

**Лемма 3.5.** *На бутылке Клейна существуют ровно 6 существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{e}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l(2) : 3_4, l(2) : 3_5, l(3) : 3_6, l(2) : 3_7, l(2) : 3_8, l(3) : 3_9$ , см. рис. 4.3.*

*Доказательство.* Граф  $\mathbf{e}$  получается из графа  $\mathbf{c}$  присоединением петли. Тогда в этом графе возможно выделить максимально три замкнутых пути. Следова-

тельно, проекция  $G$ , соответствующая графу  $e$ , может иметь 3 или 2 компоненты.

Предположим, что проекция  $G$  состоит из 2 компонент:  $k_1, k_2$ . Возможны две ситуации. Первая ситуация: пусть  $k_1$  — петля и  $\#(k_1 \cap k_2) = 1$ . Компонента  $k_2$  — проекции узла  $G'$  соответствующая графу  $e$ , см. рис. 2.1. Проекция  $G'$  получается из двух окружностей, трансверсально пересекающихся ровно в одной точке и соединённых пунктирной дугой. Две трансверсально пересекающиеся окружности — либо две средние линии листа Мёбиуса, либо средняя линия листа Мёбиуса и меридиан, соединённые пунктирными дугами. Применим операцию  $M^{-1}$ , получим проекции узлов. Легко заметить, что только вторая пара нам подходит. В результате получим проекцию  $l3_5$ , см. рис. 3.4. Вторая ситуация:  $\#(k_1 \cap k_2) = 2$  и  $k_2$  соединена пунктирной дугой с петлёй. Окружности  $k_1, k_2$  не могут быть одновременно не меняющими ориентацию окружностями, так как при соединении петли получим проекцию, к которой применим пункт 2 леммы 1.1. Если пересечения  $k_1, k_2$  образуют двуугольник, то применим операцию устранения двуугольника  $N$ , получим три окружности. С учетом всех условий, имеем две тройки: две средние линии листа Мёбиуса и тривиальная окружность; две средние линии листа Мёбиуса и параллель. Применим операцию  $N^{-1}$  и  $M^{-1}$ , получим проекции  $l3_4, l3_7, l3_8$ , см. рис. 3.4. Легко проверить, что если пересечение  $k_1, k_2$  не образует двуугольник, то такой проекции на бутылке Клейна не существует.

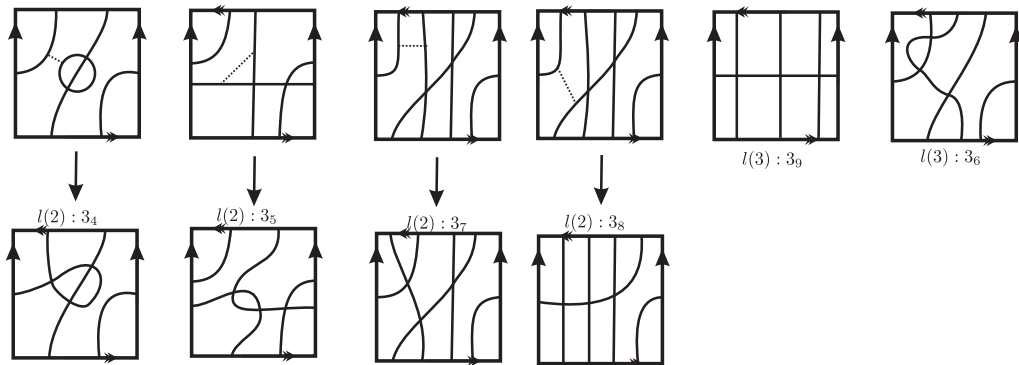


Рис. 3.4: Построение проекций типа  $e$

Предположим, что проекция  $G$  состоит из 3 компонент:  $k_1; k_2; k_3$ . Пусть  $k_1$  — петля,  $\#(k_1 \cap k_2) = 1$ , тогда  $\#(k_2 \cap k_3) = 2$ . Петля трансверсально пересекается ровно в одной точке либо с меридианом, либо со средней линией листа Мёбиуса. Тогда за  $k_3$  нужно взять параллель, либо среднюю линию листа Мёбиуса, соответственно. Имеем проекции  $l3_9$  и  $l3_6$ , см. рис. 3.4. □

**Лемма 3.6.** На бутылке Клейна существуют ровно 5 существенных проекций зацеплений, являющихся вложением графа  $\mathbf{f}$ , изображённого на рисунке 2.1. Это проекции  $l3(2) : 3_{10}, l(2) : 3_{11}, l(2) : 3_{12}, l(3) : 3_{13}, l(2) : 3_{14}$ , см. рис. 4.3.

*Доказательство.* Граф  $\mathbf{f}$  состоит из трёх вершин, каждые две соединены двойным ребром. Тогда в этом графе возможно выделить максимально три замкнутых пути. Следовательно, проекция  $G$ , соответствующая графу  $\mathbf{f}$ , может иметь 3 или 2 компоненты.

Предположим, что  $G$  состоит из 2 компонент. Пусть проекция  $G$  содержит двуугольную грань. Тогда применим операцию устранения двуугольника. Получим набор из двух окружностей:  $k_1, k_2$  и  $\#(k_1 \cap k_2) = 1$ . Окружности  $k_1, k_2$ , либо меридиан и средняя линия листа Мёбиуса, либо две средние линии листа Мёбиуса. Применим операцию  $N^{-1}$ , получим проекции  $l3_{10}$  и  $l3_{11}$ , см. рис. 3.5. Пусть проекция  $G$  не содержит двуугольной грани. Тогда применим операцию устранения перекрёстка к перекрёстку, в котором одна компонента пересекается сама с собой. Получим набор из трёх окружностей:  $k_1, k_2, k_3$ . Пусть  $\#(k_1 \cap k_2) = 1$  и  $\#(k_1 \cap k_3) = 1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  соединены пунктирной дугой. Окружности  $k_2$  и  $k_3$  являются неразбивающимися, следовательно, либо два меридиана, либо две средние линии листа Мёбиуса. Тогда,  $k_1$  — либо средняя линия листа Мёбиуса, либо меридиан. Применим операцию  $M^{-1}$  вдоль пунктирных дуг, получим проекции  $l3_{12}$  и  $l3_{14}$ , см. рис. 3.5.

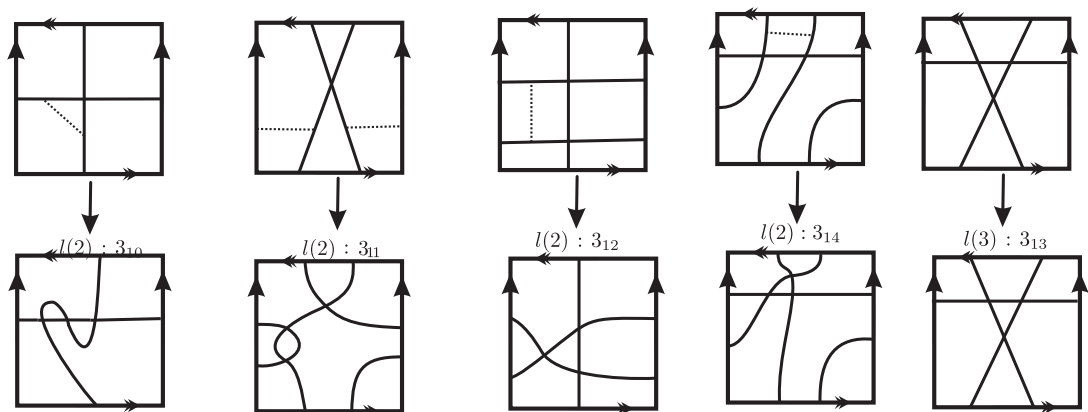


Рис. 3.5: Построение проекций типа  $\mathbf{f}$

Предположим, что проекция  $G$  состоит из 3 компонент. Тогда проекция получается из трёх окружностей, каждые две из которых трансверсально пересекаются ровно в одной точке. На бутылке Клейна существует две пары окружностей, трансверсально пересекающихся ровно в одной точке: две средние линии

листа Мёбиуса, либо меридиан со средней линией листа Мёбиуса. Тогда в качестве третьей окружности можно выбрать к первой паре меридиан, а ко второй паре — среднюю линию листа Мёбиуса. В результате получим две эквивалентные проекции на бутылке Клейна:  $I_{313}$ , см. рис 3.5.  $\square$

**Теорема 3.1.** *Существует ровно 18 попарно неэквивалентных существенных проекций зацеплений на бутылке Клейна, которые имеют не более чем три перекрёстка. Все они изображены на рисунке 4.3.*

*Доказательство.* Используя леммы с 3.1 по 3.6, получаем, что существует всего 18 существенных проекций зацеплений на бутылке Клейна, которые имеют не более чем три перекрёстка. Докажем, что все полученные проекции на рисунке 4.3 попарно неэквивалентны. Сопоставим каждой проекции так называемый *face-вектор*:  $(j(r)i_1, i_2, \dots, i_n)$ , где  $r$  — число компонент проекции,  $i_1, i_2, \dots, i_n$  — упорядоченное по неубыванию число углов её граней,  $j$  — графический тип проекции,  $j \in \{a, b, c, d, e, f, g\}$ . Строки, отвечающие построенным проекциям, приведены на рис. 4.3. Таких строк достаточно, чтобы различить любые две проекции, за исключением пары  $(3_{12}, 3_{13})$ . Но проекции неэквивалентны, потому что в первом случае треугольные грани имеют общее ребро, а во втором не имеют.  $\square$

### 3.2 Перечисление существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков

**Теорема 3.2.** *Существует ровно 25 попарно неэквивалентных существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Задающие их диаграммы изображены на рис. 4.4.*

*Доказательство.* По теореме 1 существует 18 существенных проекций. Чтобы по данной проекции построить диаграммы, нужно путем разрывов разметить все её перекрёстки. При смене всех знаков перекрёстков на противоположные класс эквивалентности зацеплений остаётся прежним. Тогда в рассмотрении каждой проекции тип одного перекрёстка можно зафиксировать, в силу чего для проекции с  $n$  перекрёстками достаточно рассмотреть  $2^{n-1}$  вариантов.

Получаем, что проекций с двумя перекрёстками 4, а проекций с тремя перекрёстками 14. В итоге достаточно рассмотреть 64 диаграммы ( $4 \cdot 2^1 + 14 \cdot 2^2$ ). Эти диаграммы изображены на рисунке 3.6.

Легко заметить, что диаграммы с номерами 6, 11, 12, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 39, 40, 46, 47, 48, 51, 52 не минимальны. Диаграммы 3, 7, 8, 34, 35, 42, 43, 44, 54, 55, 58, 60, 62, 63 задают расщепляемые зацепления по пунктам 5 и 6 леммы 1 и диаграммы 2, 16, 19, 36, 59 задают расщепляемые зацепления по определению. На рисунке 3.7 приведены последовательность преобразований, связывающие диаграмму зацепления 20 с диаграммой зацепления 17. Диаграммы 53 и 56 эквивалентны, так как одну диаграмму можно получить из другой с помощью преобразований диаграмм зацеплений  $R_3$ ,  $R_6$ . Диаграммы 61 и 64 эквивалентны, так как одну диаграмму можно получить из другой с помощью преобразований диаграмм зацеплений  $R_3$ ,  $R_7$ .

В результате осталось 25 диаграмм, см. рис. 4.4.

Различность всех полученных зацеплений доказывается с помощью вычисления их обобщённых полиномов Кауффмана:

$$\begin{aligned}
L_2\mathfrak{2}_1 &: (-A^{-5} + A)z - A^{-3}yz; \\
L_3\mathfrak{2}_2 &: -A^{-4} - 2 - A^4 + 2y; \\
L_2\mathfrak{2}_3 &: (1 - A^4)x + A^{-2}z^2; \\
L_2\mathfrak{3}_1 &: (A^{-7} + A^{-1})z + (A^{-5} - A^{-1})yz; \\
L_2\mathfrak{3}_2 &: (A^{-1} + A^9)z + (-A^3 + A^7)yz; \\
L_2\mathfrak{3}_3 &: (-A^{-5} - A^5)z + (-A^{-3} + A^{-1})yz + Ay^2z; \\
L_2\mathfrak{3}_4 &: (-A^{-5} - A^{-3})z + (A^{-7} - A^{-1})yz + A^{-5}y^2z; \\
L_2\mathfrak{3}_5 &: (-A^{-3} - A^3)z + (A^{-3} - A^{-1})yz + A^{-1}y^2z; \\
L_3\mathfrak{3}_6 &: A^{-6} - A^2 + (A^{-2} + A^2)y - A^{-2}y^2; \\
L_3\mathfrak{3}_7 &: -A^{-4} - 1 + A^4 + A^8 + 2y - A^4y^2; \\
L_2\mathfrak{3}_8 &: (-A^4 + A^8)x + (A^{-2} - A^2 + A^6)z^2; \\
L_2\mathfrak{3}_9 &: -2A^3 - A^7 + A^{11} + (A^3 + A^7 - A^{11})z; \\
L_2\mathfrak{3}_{10} &: A^{-13} - 2A^{-5} - A^{-1} + (-A^{-9} + 2A^{-5})z; \\
L_2\mathfrak{3}_{11} &: (1 - A^{-4})x + (-A^{-6} - A^{-2} + A^2)z^2 - A^{-4}yz^2; \\
L_2\mathfrak{3}_{12} &: (A^{-8} - A^{-4})x + (A^{-6} - 2A^{-2})z^2 - yz^2; \\
L_2\mathfrak{3}_{13} &: -2A^4x + (A^{-2} - 2A^2 - A^6)z^2 - A^4yz^2; \\
L_3\mathfrak{3}_{14} &: (-A^{-5} + A - A^3 - A^5)z + A^{-1}yz; \\
L_3\mathfrak{3}_{15} &: (-A^{-5} - A^{-3} + A - A^3)z + A^3z^2; \\
L_3\mathfrak{3}_{16} &: (-A^{-5} + A^{-1} + A - A^5)z + (A^{-1} + A)yz; \\
L_2\mathfrak{3}_{17} &: (A^{-3} + A^{-1} - A^3 + A^7)z;
\end{aligned}$$

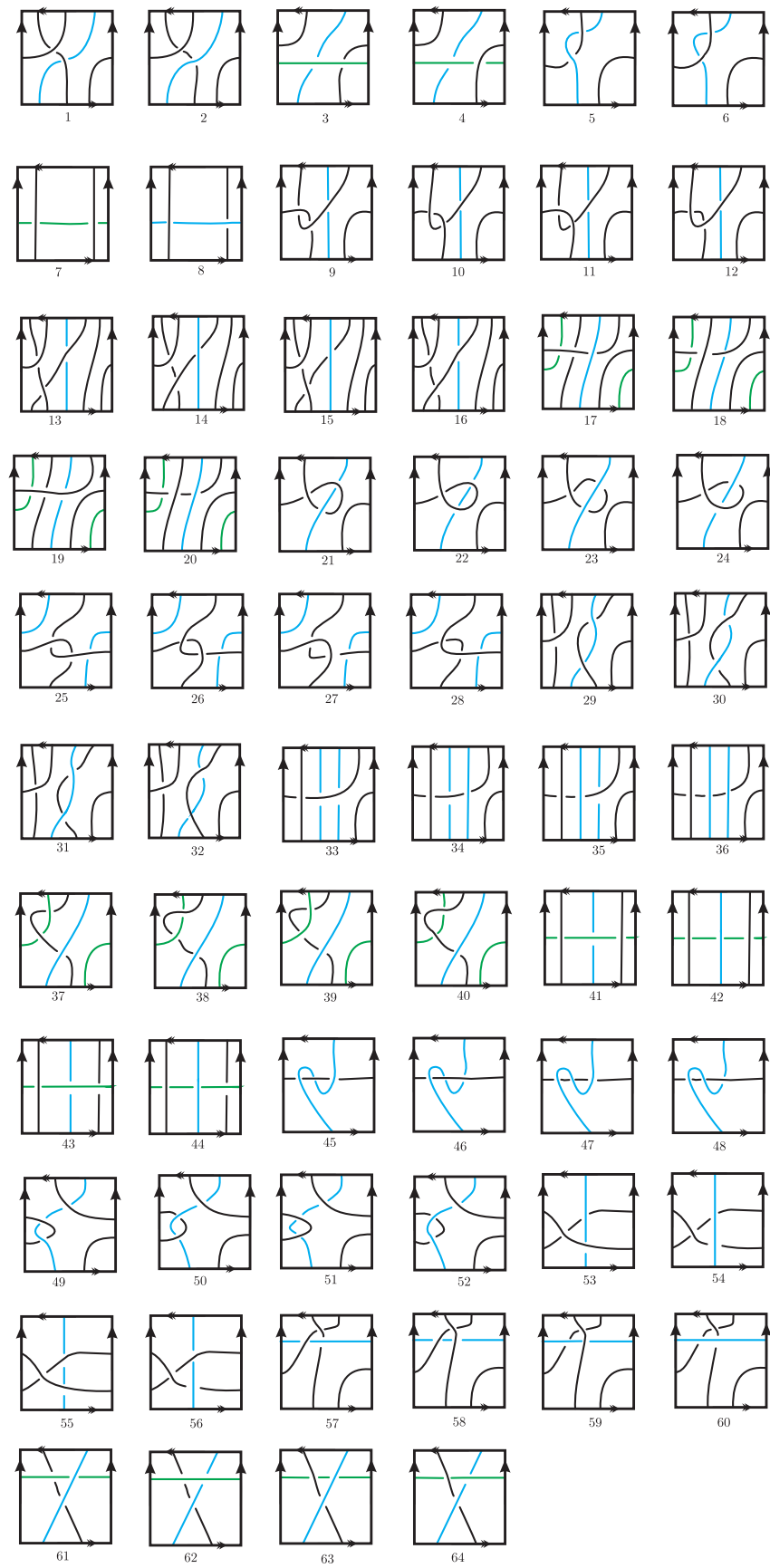


Рис. 3.6: Таблица 64 диаграмм зацеплений, полученных из 18 проекций с зафиксированным одним перекрёстком



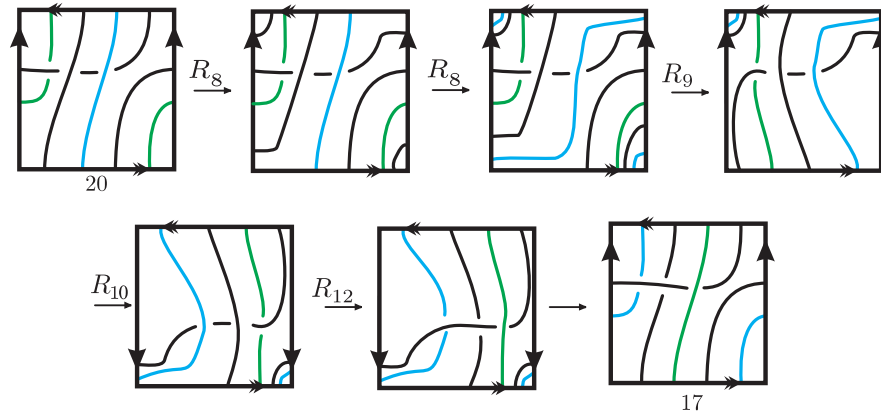


Рис. 3.7: Последовательность преобразований, связывающая диаграммы зацеплений 20 с 17

$$L_2\mathfrak{Z}_{18} : -2A^{-3} - A + A^5 + A^{-3}y + (A - A^5)x^2;$$

$$L_2\mathfrak{Z}_{19} : A^{-7} - 2A - A^5 + Ay + (-A^{-3} + A)x^2;$$

$$L_2\mathfrak{Z}_{20} : (A^{-8} - A^{-4} - 2A^{-2})z;$$

$$L_2\mathfrak{Z}_{21} : A^{-2} + 3A^2 + A^6 - A^{10} - A^2x^2 - 2A^2y;$$

$$L_3\mathfrak{Z}_{22} : (-A^{-5} + A^{-1})x + 2Az^2.$$

□

## ГЛАВА 4

## Дополнительные пространства к зацеплениям

Результаты данной главы опубликованы в [33].

В теории узлов гиперболический объём гиперболического зацепления равен объёму дополнения зацепления по отношению к его полной гиперболической метрике. Объём является конечным вещественным числом. Гиперболический объём негиперболического узла часто считается нулевым. Согласно теореме Мостова о жёсткости объём является топологическим инвариантом зацепления [10], [11]. Как инвариант зацепления объём изучался впервые Уильямом Тёрстоном в связи с его гипотезой геометризации [9]. На практике гиперболический объём очень эффективен для различения узлов, что применяется интенсивно в перечислении узлов. Компьютерная программа SnapPea [29] находит гиперболическую структуру на дополнительном пространстве к узлу (если он существует) и вычисляет объём.

## 4.1 Гиперболические зацепления и их объёмы

*Гиперболическим 3-многообразием* будем называть 3-мерное связное полное римановое многообразие с постоянной отрицательной кривизной, равной  $-1$ .

Узел или зацепление  $L$  в  $K \tilde{\times} I$  называется *гиперболическим*, если его дополнение  $(K \tilde{\times} I) \setminus L$  допускает полную гиперболическую структуру конечного объема.

В таблице 4.1 приведены изометрические сигнатуры дополнительных пространств табличных узлов и зацеплений. Изометрическая сигнатура — это способ описания триангуляции многообразий [13]. Приведенные сигнатуры получены при помощи компьютерной программы 3-Manifold Recognizer [28].

При помощи компьютерной программы «SnapPy» ([29]) была проведена проверка наличия гиперболической структуры на дополнительных пространствах узлов и зацеплений, включенных в таблицу. Ответ для всех зацеплений оказался положительным, для узлов нет. В таблице 4.2 приведены величины гиперболических объемов дополнительных пространств табличных узлов и зацеплений. В таблице 4.2 ноль означает, что узел негиперболический. В таблице в третьем столбце приведены названия трёхмерных многообразий для которых объём совпадает с объемом полученных дополнительных пространств к табулированным узлам и зацеплениям (обозначения взяты из программы [29]).

Таблица 4.1: Список сигнатур для узлов и зацеплений в утолщённой бутылке Клейна

Номер узла	Изометрическая сигнатура
1 <sub>1</sub>	iLLALQccdedghghhafafvlftt
2 <sub>1</sub>	iLLALQcbcedfhghhdfabbacad
2 <sub>2</sub>	mLLAzAwMQbcdeghgikllaccafdceaccbc
2 <sub>3</sub>	iLLMzQccdedfghhhtglffftta
2 <sub>4</sub>	iLvAAQcbefeghghhapaaaooob
2 <sub>5</sub>	mLLAvALQQccdedigjklllafaftfgvgvgfv
2 <sub>6</sub>	iLvLQQcceghffghhddaedfcc
3 <sub>1</sub>	mLLALMLMQbcdfhhikllldfabbaabbabed
3 <sub>2</sub>	mLLALMLMQbcdfhhijkllldfabbaabbbead
3 <sub>3</sub>	mLLALMwPQccdeghihjklpvpbabaaabapbv
3 <sub>4</sub>	mLLMzwMMQccdedfghkjkllltglfffalftlf
3 <sub>5</sub>	qLLAzAwMMLPkbcdeghgiklkmnpoppaccafdceaccefebed
3 <sub>6</sub>	mLLAzMLAQbcdefghkkjllbbaccadecdac
3 <sub>7</sub>	mLLALvAQQbcdehijjklldfabdaecffbf
3 <sub>8</sub>	mLLALvAQQbcdehjiikllldfafaadfcbbff
3 <sub>9</sub>	mLLLzzMQQcddfjhijjklgtgffaftllfgfv
3 <sub>10</sub>	mLLLvAMQQcddfijhijjklgtgffaftllfgfv
3 <sub>11</sub>	mvLALLPQQdefgjhkikjllbvaabboboopa
3 <sub>12</sub>	mvLALLPQQdefgkhijjklbbvaabbobvppp
3 <sub>13</sub>	mLvLwAPQQcfiggkijllaaaccfacadc
3 <sub>14</sub>	mLvLwAPQQcfiggkijllkladaccbdcddcac
3 <sub>15</sub>	mLvLwAPQQcfiggkijllkladaccddfecac
3 <sub>16</sub>	mLLvAvQQQcefhkiklljkjlaaaimgammammo
3 <sub>17</sub>	mvLALLPQQdefgjhkikjllbvaaoobvbaouu
3 <sub>18</sub>	mLLvALMQQcefggkijlliaamomigammoc
3 <sub>19</sub>	mLvLwMAQQcfighkiikllkiiacomgiomia
3 <sub>20</sub>	qLLAvLwMPMQkccdekjlimomlonpppabbaaavbvpvppvvo
3 <sub>21</sub>	mLLvwPPQQcefjhjiikllaiaccgiccmmac
Номер зацепления	

$L_2\mathfrak{Z}_1$	iLLAMPcbcdfeffhhhebbddbfcb
$L_3\mathfrak{Z}_2$	iLMLAPcbbdeffhhhpuaabbbbvo
$L_2\mathfrak{Z}_3$	ivLAPQcdefeghhghbvaoauvob
$L_2\mathfrak{Z}_4$	mLLALMMwQccdeghihjjlllpvbabaaavoobv
$L_2\mathfrak{Z}_5$	mLLALMMzQccdeghihjjlllpvbabapabvobv
$L_2\mathfrak{Z}_6$	mLLAzMMzQccdeghihjjlllpvbabapabvobv
$L_2\mathfrak{Z}_7$	mLLMLPPwQcdedfghijllltgafvftffffvg
$L_2\mathfrak{Z}_8$	mLLAzMMzQbcedfhijllldfabbaadcccbf
$L_3\mathfrak{Z}_9$	mLLwAPMzQceefhijllladeedffedbcfb
$L_3\mathfrak{Z}_{10}$	mLLvAMMAQcefgigikkkllliamoocimagco
$L_2\mathfrak{Z}_{11}$	mLLAvPPMQbcdeigikjllklebbdacacfadca
$L_2\mathfrak{Z}_{12}$	mLLvQLLQQceffjljilkklaaaimaaiaccco
$L_2\mathfrak{Z}_{13}$	mLMvzLMQQbbdfjhijiklllpuababbbbapu
$L_2\mathfrak{Z}_{14}$	mLLALLwQQccdehijljkklpvbappaboovo
$L_2\mathfrak{Z}_{15}$	mLLLzAzQQcddhfglljkkltgfvfgffffgvf
$L_2\mathfrak{Z}_{16}$	mLLALLMAQbcedhijkjllldfabddaacfdae
$L_3\mathfrak{Z}_{17}$	mLMLvMwQQbbdehghlkjllpuabuaoapvaa
$L_3\mathfrak{Z}_{18}$	mLMLvMPMQbbdegijlklklpuaoauvopaapv
$L_3\mathfrak{Z}_{19}$	mLLzwQPwQceefhghijllliiaaooommmai
$L_2\mathfrak{Z}_{20}$	mLvvwAQQQcgfhhkikjllliacoococoioaa
$L_2\mathfrak{Z}_{21}$	mLvvwAQQQcgfhhkikjlllaacgoccccccima
$L_2\mathfrak{Z}_{22}$	mLvvwAQQQcgfhhjjikllliacooccccicam
$L_2\mathfrak{Z}_{23}$	mLvLAzAQQcegfgiikllklaaaaccacaefcb
$L_2\mathfrak{Z}_{24}$	mLvLAzQMQcfgeigijlkllddaebcbadefbb
$L_3\mathfrak{Z}_{25}$	mLLzwPLQQceefhijlklkliaaiaccicamcco

Узлы с номерами  $1_1, 2_2, 2_5, 3_5, 3_{19}, 3_{20}, 3_{21}$  негиперболические. Трёхмерное многообразие  $L10n92$  является дополнительным пространством к зацеплениям с номерами  $L_2\mathfrak{Z}_1, L_2\mathfrak{Z}_4, L_2\mathfrak{Z}_5, L_2\mathfrak{Z}_9, L_2\mathfrak{Z}_{18}$ . Трёхмерное многообразие  $L8n7$  является дополнительным пространством к зацеплениям с номерами  $L_3\mathfrak{Z}_2, L_3\mathfrak{Z}_6, L_3\mathfrak{Z}_{15}, L_3\mathfrak{Z}_{22}$ .

Таблица 4.2: Объемы для дополнительных пространств к узлам и зацеплениям в утолщённой бутылке Клейна

Номер узла	Гиперболический объём	Обозначение из [29]
$1_1$	0	
$2_1$	5.333489567	$s782$
$2_2$	0	
$2_3$	5.573609113	$s880$
$2_4$	5.33348956690	$L9n9$
$2_5$	0	
$2_6$	7.3277247534	$t12044$
$3_1$	7.32772475342	$t12037$
$3_2$	8.2305357153	$o9_{41906}$
$3_3$	6.0768949190	$v2854$
$3_4$	8.9293178231	
$3_5$	0	
$3_6$	6.1190927591	$v2921$
$3_7$	8.1560316351	$o9_{41293}$
$3_8$	4.415332477	$m292$
$3_9$	8.6598090552	$o9_{43885}$
$3_{10}$	5.922845472	$v2652$
$3_{11}$	7.327724753	$t12042$
$3_{12}$	7.70691180281	$t12708$
$3_{13}$	7.7069118028	$L10n25$
$3_{14}$	6.35458655720	$v3220$
$3_{15}$	9.5034039310	
$3_{16}$	5.3334895669	
$3_{17}$	5.33348957	
$3_{18}$	9.364437259	
$3_{19}$	0	
$3_{20}$	0	
$3_{21}$	8.9293178231	

Номер зацепления	Гиперболический объём	Обозначение из [29]
$L_2\mathfrak{Z}_1$	6.3545865572	$L10n92$
$L_3\mathfrak{Z}_2$	7.32772475342	$L8n7$
$L_2\mathfrak{Z}_3$	5.3334895669	$L6a5$
$L_2\mathfrak{Z}_1$	6.3545865572	$L10n92$
$L_2\mathfrak{Z}_2$	8.7786588032	$L11n421$
$L_2\mathfrak{Z}_3$	9.5357002543	
$L_2\mathfrak{Z}_4$	7.035521457	$t11092$
$L_2\mathfrak{Z}_5$	6.3545865572	$L10n92$
$L_3\mathfrak{Z}_6$	7.3277247534	$L8n7$
$L_3\mathfrak{Z}_7$	10.1494160641	$L8a21$
$L_2\mathfrak{Z}_8$	7.706911803	$t12710$
$L_2\mathfrak{Z}_9$	6.35458655720	$L10n92$
$L_2\mathfrak{Z}_{10}$	9.5034039310	$L13n97272$
$L_2\mathfrak{Z}_{11}$	7.8679012756	$L12n1965$
$L_2\mathfrak{Z}_{12}$	6.5517432879	$L8a18$
$L_2\mathfrak{Z}_{13}$	6.354586557	
$L_3\mathfrak{Z}_{14}$	8.929317823	$L10n98$
$L_3\mathfrak{Z}_{15}$	7.327724753	$L8n7$
$L_3\mathfrak{Z}_{16}$	3.328	$L14n63157$
$L_2\mathfrak{Z}_{17}$	7.3277247534	$L10n84$
$L_2\mathfrak{Z}_{18}$	6.3545865572	$L10n92$
$L_2\mathfrak{Z}_{19}$	9.5034039310	$L11n419$
$L_2\mathfrak{Z}_{20}$	7.32772475342	$L8n5$
$L_2\mathfrak{Z}_{21}$	10.1494160641	
$L_3\mathfrak{Z}_{22}$	7.327724753	$L8n7$

## Заключение

Первым основным результатом настоящей диссертации является табулирование существенных узлов до сложности три в утолщённой бутылке Клейна. Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 2.1.** Существует ровно 17 различных существенных проекций на  $K$ , число вершин которых не превосходит трёх. Все они изображены на рис. 4.1.

**Теорема 2.2.** Существует ровно 28 попарно неэквивалентных существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Задающие их диаграммы изображены на рис. 4.2.

Вторым основным результатом настоящей диссертации является табулирование существенных нерасщепляемых зацеплений (зацеплений содержащие больше одной компоненты) до сложности три в утолщённой бутылке Клейна. Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 3.1.** Существует ровно 18 попарно неэквивалентных существенных проекций зацеплений на бутылке Клейна, которые имеют не более чем три перекрёстка. Все они изображены на рисунке 4.3.

**Теорема 3.2.** Существует ровно 25 попарно неэквивалентных существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков. Задающие их диаграммы изображены на рис. 4.4.

Третьим основным результатом настоящей диссертации является наличие гиперболической структуры на дополнительных пространствах табулированных некоторых узлов и табулированных всех зацеплений в утолщённой бутылке Клейна см. таблицу 4.2.

Применялся обобщённый полином Кауффмана на случай узлов и зацеплений в утолщённой бутылке Клейна и составлен список значений этого инварианта для табулированных узлов и зацеплений.

Полученные результаты и конструкции могут быть использованы при табулировании узлов и зацеплений в трёхмерных многообразиях.

## Литература

- [1] Акимова, А.А. Классификация узлов малой сложности в утолщенном торе [Текст] / А.А. Акимова, С.В. Матвеев // Вестник НГУ. Серия «Математика. Механика. Информатика». — 2012. — Т. 12, № 3. — С. 10—21.
- [2] Акимова, А.А. Классификация зацеплений малой сложности в утолщенном торе [Текст] / А.А. Акимова, С.В. Матвеев, В.В. Таркаев // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 4. — С. 18—31.
- [3] Акимова, А.А. Классификация узлов в утолщенном торе, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков [Текст] / А.А. Акимова // Вестник Южно-Ур. ун-та. Серия «Математика. Механика. Физика». — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 8—11.
- [4] Акимова, А.А. Классификация узлов в утолщенном торе, минимальные октаэдральные диаграммы которых не лежат в кольце [Текст] / А.А. Акимова // Вестник Южно-Ур. ун-та. Серия «Математика. Механика. Физика». — 2015. — Т. 7, № 1. — С. 5—10.
- [5] Дроботухина, Ю.В. Аналог многочлена Джоунса для зацеплений в  $RP^3$  и обобщение теоремы Кауффмана–Мурасуги [Текст] / Ю.В. Дроботухина // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2, № 3. — С. 171—191.
- [6] Матвеев, С.В. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии [Текст] / С.В. Матвеев., А.Т. Фоменко. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 301 с.
- [7] Прасолов, В.В. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия [Текст] / В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский. — М.: МЦНМО, 1997. — 352 с.
- [8] Сосинский, А.Б. Узлы. Хронология одной математической теории [Текст] / А.Б. Сосинский. — М.: МЦНМО, 2005. — 112 с.
- [9] Терстон, У. Трехмерная геометрия и топология [Текст] // У. Терстон. Перевод с англ. под ред. О.В. Шварцмана. — М.: МЦНМО, 2001. — 312 с.



- [10] Adams, C. The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots [Text] / C. Adams. American Mathematical Society, 2004. pp. —306.
- [11] Adams, C. Hyperbolic invariants of knots and links [Text] / C. Adams, M. Hildebrand, J. Weeks // Transactions of the American Mathematical Society — 1991. — Vol. 326, No. 1. — P. 1—56.
- [12] Akimova, A.A. Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings [Text] / A.A. Akimova, S.V. Matveev // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2014. — Vol. 23, No 6. — P. 1450031-1—1450031-19.
- [13] Burton, B. The pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations [Text] / B. Bourton // Proc. of the Twentyseventh annual symposium on computational geometry (SCG'11). NY, ACM, — 2011. — P. 153—162.
- [14] Cattabriga, A. On knots and links in lens spaces [Text] / A. Cattabriga, E. Manfredi, M. Mulazzani // Topology and its Applications. — 2013. 160 — P. 430—442.
- [15] Drobotukhina, J. Classification of links in  $RP^3$  with at most six crossings [Text] / Yu.V. Drobotukhina // Zap. Nauchn. Sem. LOMI. — 1991. — V. 39. — P. 39—63.
- [16] Gabrovsek, B. Knots in the solid torus up to 6 crossings [Text] / B. Gabrovsek, M. Mroczkowski // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 2012. — V. 21, No 11. — P. 1250106—1250148.
- [17] Haseman, M. On knots, with a census of the amphicherials with twelve crossings [Text] / M. Haseman // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. — 1918. — V. 52. — P. 235—255.
- [18] Hoste, J. The First 1,701,936 Knots [Text] / J. Hoste, M. Thistlethwaite, J. Weeks // The Mathematical Intelligencer. — 1998. — V. 20, No. 4. — P. 33—47.

- [19] Jones, F.R. *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras* [Text] / F.R. Jones // Bull. Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 12. № 1. — P. 103—111.
- [20] Kauffman, L.H. State models and the Jones polynomial [Text] / L.H. Kauffman // Topology. — 1987. — V. 26. № 3. — P. 395—407.
- [21] Little, C.N. Non alternate knots of orders eight and nine [Text] / C.N. Little // Trans. Royal. Soc. Edinburgh. — 1889. — V. 35. — P. 663—664.
- [22] Little, C.N. Alternate +/-Knots of order eleven [Text] / C.N. Little // Trans. Royal. Soc. Edinburgh. — 1890. — V. 36. — P. 253—255.
- [23] Little, C.N. Non Alternate Knots [Text] / C.N. Little // Trans. Royal. Soc. Edinburgh. — 1899. — V. 39 (III), No. 30. — P. 771—781.
- [24] Rolfsen, D. Knots and Links [Text] / D. Rolfsen // Berkeley, CA : Publish or Perish, — 1976. —450 pp.
- [25] Tait, P.G. On knots I [Text] / P.G. Tait // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. — 1876. — V. 28. — P. 145—190.
- [26] Tait, P.G. On knots II [Text] / P.G. Tait // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. — 1883. — V. 32. — P. 327—342.
- [27] Tait, P.G. On knots III [Text] / P.G. Tait // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. — 1884. — V. 32. — P. 493—506.
- [28] Матвеев, С.В. 3-Manifolds Recognizer [Электронный ресурс] / С.В. Матвеев, В.В. Таркаев и др. // Режим доступа: <http://www.matlas.math.csu.ru/?page=recognizer>, — Яз. англ. дата обращения: 26.02.2021
- [29] Culler, M., Dunfield N.M., Goerner, M., Weeks, J.R.: SnapPy, a Computer Program for Studying the Topology of 3-Manifolds. Available at <http://snappy.computop.org>, дата обращения: 26.02.2021
- [30] Bar-Natan, Dror Knot Atlas [Электронный ресурс] / Bar-Natan, Dror and Morrison, — Режим доступа: <http://katlas.org>, — Яз. англ. дата обращения: 26.02.2021

## Работы автора по теме диссертации

### Публикации в изданиях, включенные в перечень ВАК:

- [31] Матвеев, С.В. Табулирование узлов в утолщенной бутылке Клейна [Текст] / С.В. Матвеев, Л.Р. Набеева // Сибирский математический журнал. — 2016. — Том 57, № 3. — С. 688—696.
- [32] Набеева, Л.Р. Об эквивалентности некоторых табулированных узлов в утолщённой бутылке Клейна [Текст] / Л.Р. Набеева // Сибирские Электронные Математические Известия. — 2017. — Том 14. — С. 1472—1479.
- [33] Набеева, Л.Р. Классификация зацеплений в утолщённой бутылке Клейна [Текст] / Л.Р. Набеева // Сибирские Электронные Математические Известия. — 2020. — Том 17. — С. 1680—1696.

### Публикации в других изданиях:

- [34] Набеева, Л.Р. Классификация узлов в утолщенной бутылке Клейна [Текст] / Л.Р. Набеева // Вестник Челябинского государственного университета. Математика. Механика. Информатика. Выпуск 15. — 2012. — № 26(280). — С. 134—139.

### Тезисы докладов:

- [35] Набеева, Л.Р. Классификация узлов в утолщенной бутылке Клейна [Текст] / Л.Р. Набеева // Современные проблемы математики: тезисы Международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. — Екатеринбург : Институт математики и механики УрО РАН, 2013. — С. 197—199.
- [36] Набеева, Л.Р. Классификация узлов в утолщенной бутылке Клейна малой сложности [Текст] / Л.Р. Набеева // Дни геометрии в Новосибирске, 2013: Тезисы Международной конференции. — Новосибирск : Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2013. — С. 64—65.

- [37] Набеева, Л.Р. Табулирование узлов в утолщенной бутылке Клейна [Электронный ресурс] / Л.Р. Набеева // Дни геометрии в Новосибирске – 2014: Тезисы Международной конференции, посвященной 85-летию академика Ю.Г. Решетняка. – Новосибирск : Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2014. – С. 49. — Режим доступа: <http://math.nsc.ru/conference/geomtop/2014/abstracts/G-Days-2014.%20Abstracts.pdf> (дата обращения: 26.10.2020).
- [38] Набеева, Л.Р. О доказательстве эквивалентности некоторых табулированных узлов в утолщённой бутылке Клейна [Текст] / Л.Р. Набеева // Дни геометрии в Новосибирске — 2017: Тезисы Международной конференции. — Новосибирск : Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2017. — С. 47.

## Приложения

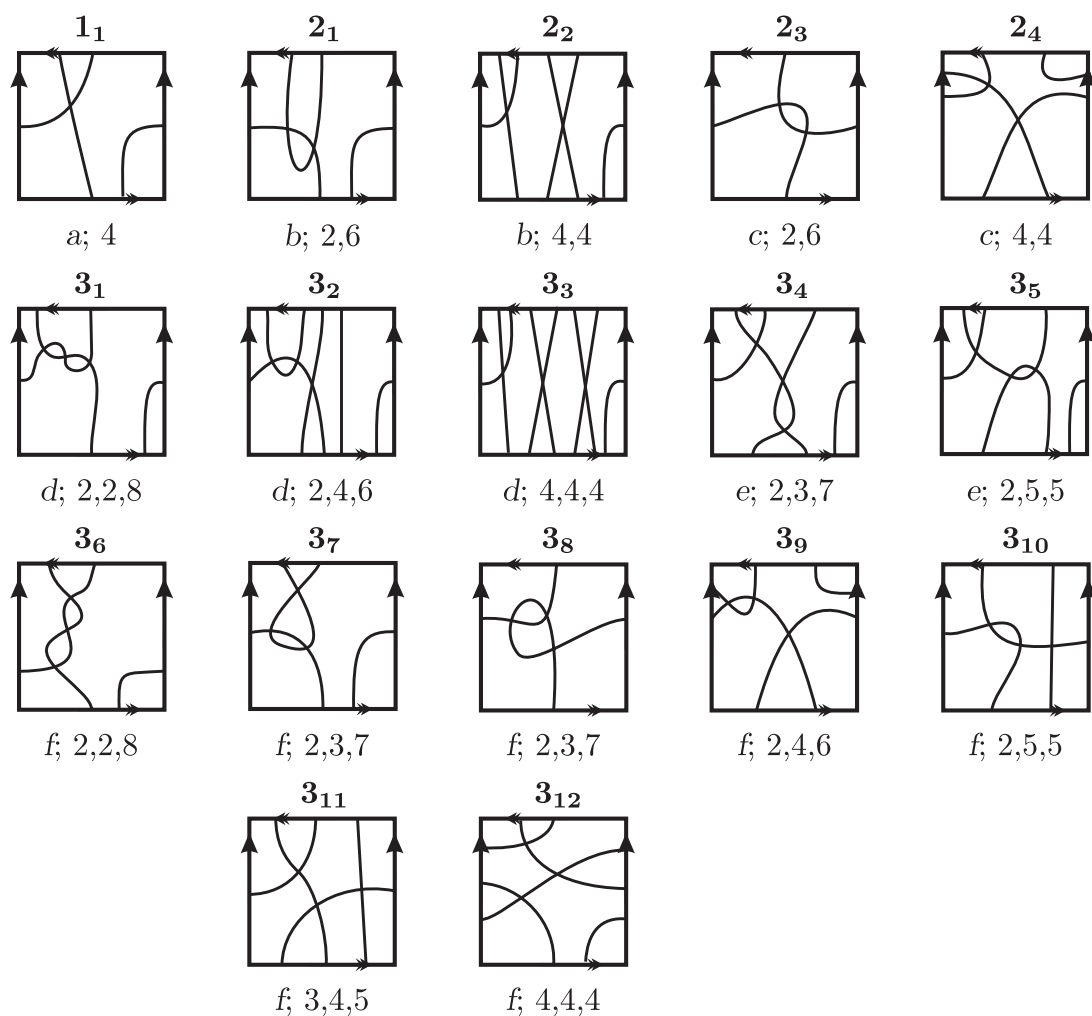


Рис. 4.1: Проекция узлов на бутылке Клейна с не более чем тремя перекрёстками. Над каждой проекцией указан её номер, а под ней приведены её графический тип (см. рис. 2.1) и *face*-вектор, составленный из чисел углов её граней

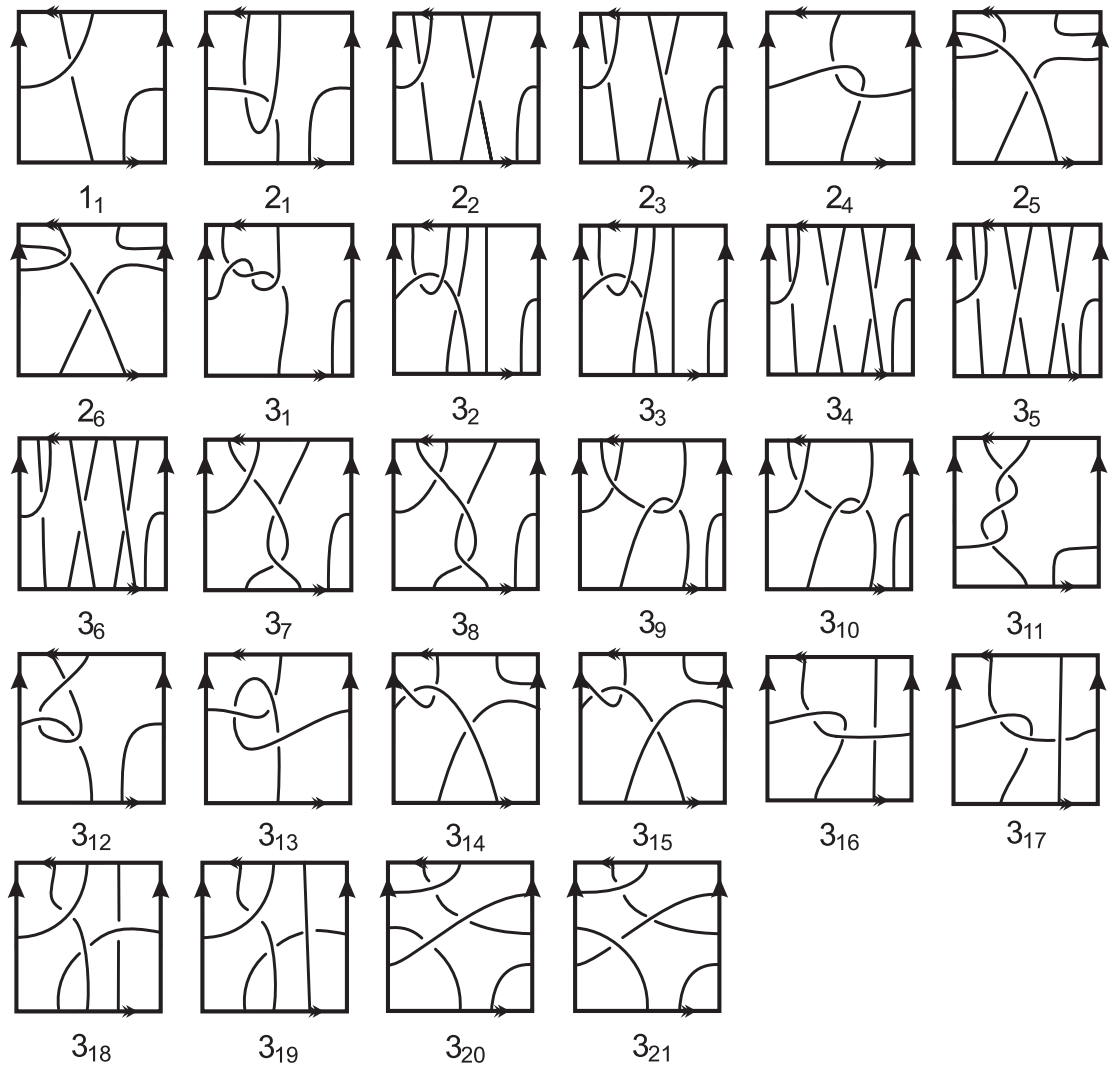


Рис. 4.2: Таблица существенных узлов в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков

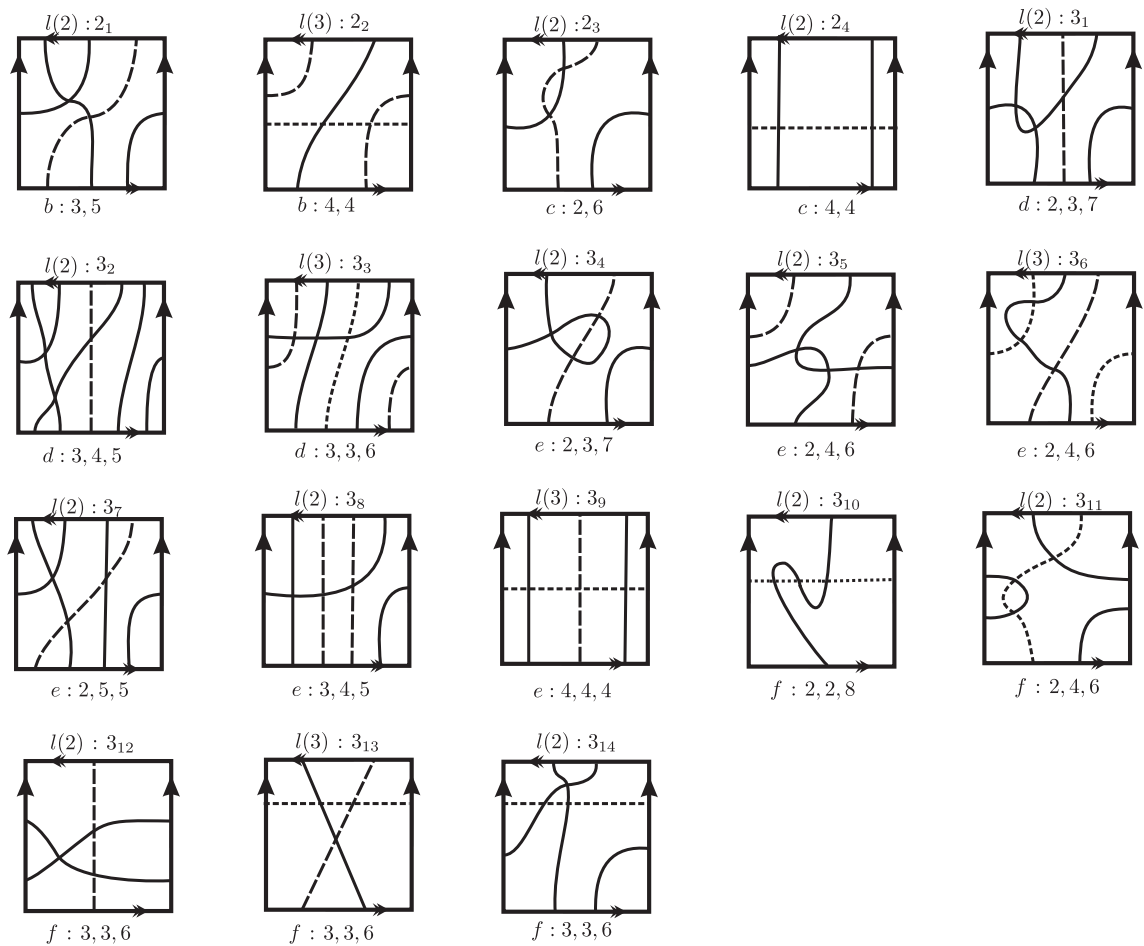


Рис. 4.3: Таблица проекций зацеплений на бутылке Клейна с не более чем тремя перекрёстками. Над каждой проекцией указан её номер, а под ней приведены её графический тип (см. рис. 2.1) и face-вектор, который составленный из чисел углов её граней и в скобках указано количество компонент

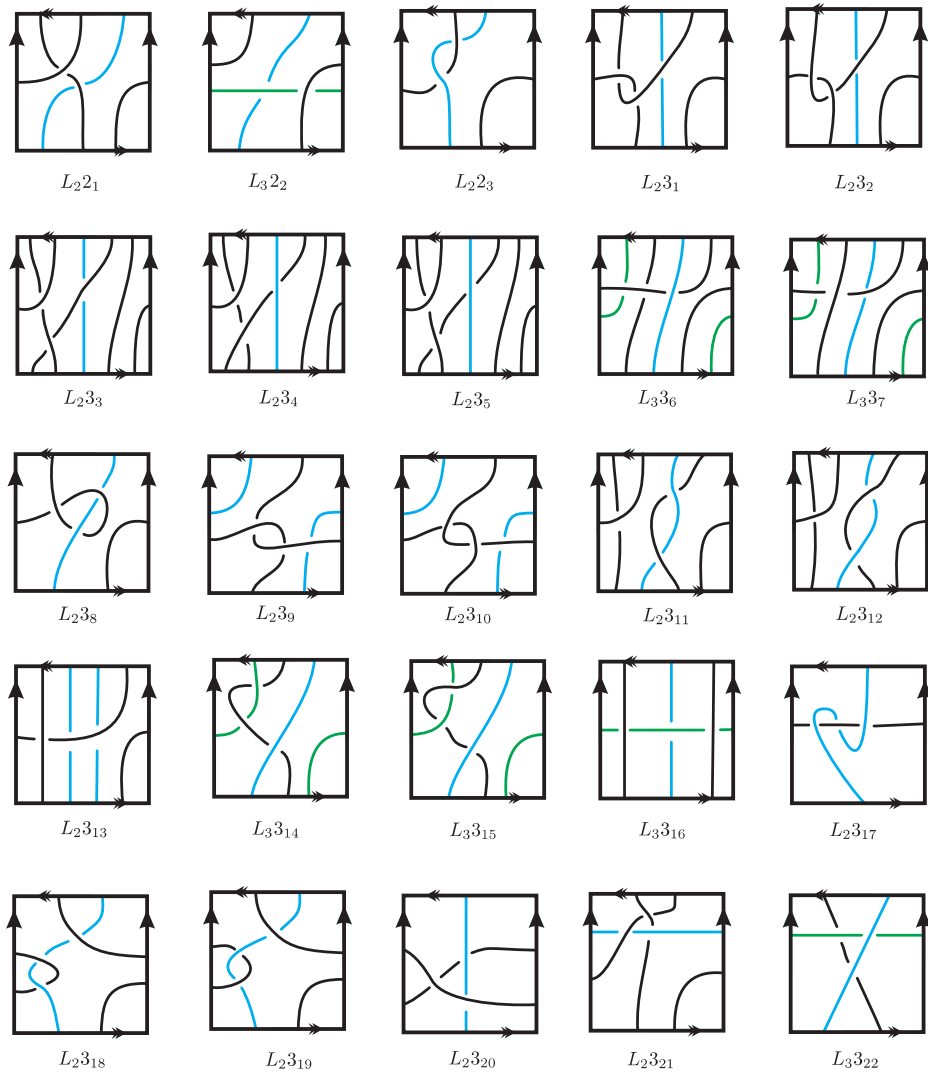


Рис. 4.4: Таблица существенных нерасщепляемых зацеплений в утолщённой бутылке Клейна, минимальные диаграммы которых имеют не более трёх перекрёстков