**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки**

**Институт математики им. С. Л. Соболева**

**Сибирского отделения Российской академии наук**

На правах рукописи

**Козлов Роман Александрович**

# Точные представления конечного типа конформных алгебр Ли

**1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика**

**Диссертация на соискание учёной степени**

**кандидата физико-математических наук**

**Научный руководитель**

**доктор физико-математических наук**

**Колесников Павел Сергеевич**

**Новосибирск – 2023**

# Содержание

# Введение

### Постановка задачи и цели исследования

Аксиоматическая квантовая теория поля зародилась в 50-х годах прошлого столетия в работах А. Уайтмана [67] и др. Отправной точкой нового и более активного интереса к данной области стала основополагающая работа А. Белавина, А. Полякова, А. Замолодчикова [15], где авторы подробно рассматривают 2-мерную конформную теорию поля, в которой сами элементы - киральные поля - обладают конформной симметрией. Они могут быть представлены формальными степенными рядами (бесконечными в обе стороны), коэффициенты которых являются линейными операторами на пространстве состояний. Ключевую роль в конформной теории поля играет конструкция разложения операторного произведения (operator product expansion, OPE), введённого К. Уилсоном [68]. Алгебраическое описание данной конструкции приводит к понятию вертексной операторной алгебры. Аксиоматическое определение вертексной операторной алгебры было введено Р. Борчердсом в 1986 г. [22]. Позднее, в работе [39] был дан эквивалентный набор определяющих аксиом, который оказался значительно проще для восприятия и проверки выполнимости.

К настоящему моменту понятие вертексной алгебры разрослось до более широкого класса. Для краткости, так мы и будем к ним обращаться в данной диссертации. В то же время, в классе всех вертексных алгебр объекты, удовлетворяющие изначальному определению, формируют подкласс. Следуя нотации В. Г. Каца, вертексные операторные алгебры часто называют конформными вертексными алгебрами [62].

В работе [45] В. Г. Кац установил, что коэффициенты сингулярной части разложения операторного произведения позволяют описать коммутатор формальных степенных рядов, отвечающих за операторы умножения в вертексной алгебре. Алгебраическое описание структур, возникающих при рассмотрении этих коммутаторов, приводит к понятию конформной алгебры Ли.

Пусть $V$ есть вертексная (супер)алгебра, снабжённая оператором трансляции $T$ и соответствием между состояниями и полями $Y$. Тогда, согласно аксиоме локальности, существует такая функция $N\colon V \times V \to \mathbb{Z}_+$, что разложение операторного произведения двух полей $Y(a,z)$ и $Y(b,w)$ для $a$, $b \in V$ имеет конечную сингулярную часть:

$$Y(a,z)Y(b,w) = \sum_{n=0}^{N(a,b)-1} \frac{Y(c_n,w)}{(z-w)^{n+1}} + \sum_{n\geq 0} Y(c_{-n},w)(z-w)^n,$$

где $c_n$ — снова некоторый элемент из $V$. Соответствие

$$(a, b) \to c_n, \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z},$$

задаёт на пространстве $V$ семейство билинейных операций, называемых $n$-произведениями и обозначаемых $a_{\ (n)}\ b$. Отметим, что коэффициенты сингулярной части полностью определены (супер)коммутатором полей:

$$[Y(a, z), Y(b, w)] = \sum_{n=0}^{N(a,b)-1} Y(c_n, w) \frac{1}{n!} \partial_w^n \delta(z - w),$$

где $\delta(z - w) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} z^s w^{-s-1} = \frac{1}{w} \sum_{s \in \mathbb{Z}} (\frac{z}{w})^s$ есть формальная дельта-функция. Ограничив $n$ неотрицательными целыми числами и добавив оператор трансляции $T$, мы превратим пространство $V$ в объект, называемый конформной (супер)алгеброй Ли. Стоит обратить внимание, что всякая конформная алгебра естественным образом несёт структуру модуля над $H = \mathbb{C}[T]$.

Заметим, что в теории конформных алгебр оператор трансляции принято обозначать как $\partial$, что никак не связывает его с частными производными. В течение данной диссертации мы будем обозначать его именно таким образом.

Другой источник появления конформных алгебр Ли — это теория алгебр Гельфанда — Дорфман (для краткости, ГД-алгебр), введенных в [5] для описания гамильтоновых операторов в формальном вариационном исчислении. Структура ГД-алгебры на векторном пространстве эквивалентна структуре конформной алгебры Ли на свободном $H$-модуле, порожденном этим пространством [70]. Конформные алгебры Ли, получающиеся таким образом, называются квадратичными. Структура ГД-алгебры может быть получена из дифференциальной алгебры Пуассона [72]. Однако, не любая ГД-алгебра получается таким образом, что приводит нас к естественному вопросу: можно ли произвольную ГД-алгебру вложить в соответствующую ГД-алгебру, полученную из дифференциальной алгебры Пуассона? Как показано в работе [56], ответ на данный вопрос отрицательный. Следовательно, класс алгебр Гельфанда — Дорфман разделяется на специальные (вложимые в дифференциальные алгебры Пуассона) и исключительные (не вложимые).

Периодически мы будем обращаться к конформным алгебрам на в чём-то даже более естественном языке псевдоалгебр. Концепция псевдоалгебр была предложена и разработана в труде Б. Бакалова, А. Де Андреа и В. Г. Каца [12] (см. так же книгу А. А. Бейлинсона, В. Г. Дринфельда [14]). Связь заключается в том, что конформная алгебра — это алгебра в подходящей псевдотензорной категории $\mathcal{M}^*(\mathbb{C}[\partial])$, объекты в которой есть модули над алгеброй полиномов $\mathbb{C}[\partial]$ от одной переменной.

Псевдотензорная структура отражает основные свойства полилинейных отображений в категории линейных пространств, такие как возможность взятия композиции, ассоциативность композиции, наличие единицы, симметрическая структура. Данных свойств достаточно для того, чтобы определить базовые понятия универсальной алгебры: что такое алгебра (ассоциативная, коммутативная, Ли и т. д.), гомоморфизм, идеал, представление, модуль, когомологии.

Таким образом, понятие конформной алгебры — это естественное продолжение понятия алгебры над полем характеристики нуль (обычно, комплексные числа $\mathbb{C}$).

Наиболее естественным аналогом конечномерных объектов в классе конформных алгебр являются конформные алгебры конечного типа, т. е. те, что конечнопорождены как модули над $H$. Одним из наиболее интересных вопросов в теории конформных алгебр Ли является аналог классической теоремы Адо. Оригинальная теоремы была доказана им в 1935 г., позднее доказательство опубликовано в работе [1].

**Теорема** (Адо, классическая). *Всякая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль имеет точное конечномерное представление.*

**Проблема** (Адо, конформная). *Имеет ли всякая конформная алгебра Ли конечного типа, свободнопорождённая как $H$-модуль, точное представление на конечнопорождённом свободном $H$-модуле?*

Для произвольной конформной алгебры Ли конечного типа $L$ поставленный вопрос не имеет смысла. Например, из аксиом конформных объектов следует, что любой элемент кручения $a \in \mathrm{tor}_H(L)$ (т. е. такой $a \in L$, что существует $0 \neq f(\partial) \in H$, для которого верно $f(\partial)a = 0$) лежит в ядре любого представления. В случае положительного ответа на поставленный вопрос всякая конформная алгебра Ли конечного типа, свободнопорождённая как $H$-модуль, может быть представлена элементами алгебры конформных эндоморфизмов $\mathrm{Cend}_n$, которая является конформным аналогом матричной алгебры линейных преобразований конечномерного пространства.

Вопрос существования точного представления не решен даже для класса квадратичных конформных алгебр Ли конечного типа (т.е. получающихся из конечномерных алгебр Гельфанда — Дорфман). В главе 2 данной диссертации будет показано, что для специальных алгебр Гельфанда — Дорфман конформная проблема Адо имеет положительное решение.

Теорема Адо есть ключ к пониманию того, почему по всякой алгебре Ли восстанавливается группа Ли. Формальный подход, реализованный в статье Дж. Мостового, Дж. М. Переса-

Искуэрдо, И. П. Шестакова [59] вселяет надежду, что для конформных алгебр возможно установить аналог "фундаментального треугольника"теории Ли. С этой точки зрения, аналогично классическому случаю, понадобится аналог теоремы Адо.

Доказательство оригинальной теоремы Адо базируется на следующем факте, именуемом теоремой Леви:

**Теорема** (Леви)**.** *Пусть $L$ есть конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль, $R$ — её разрешимый радикал. Тогда существует полупростая подалгебра $L'$ алгебры $L$, такая что $L \cong L' \ltimes R$.*

Как установлено В. Г. Кацем и соавторами в работах [13], [33], теорема Леви для конформных алгебр Ли конечного типа в общем случае неверна.

Большинство известных доказательств классической теоремы Адо вовлекают универсальную обёртывающую ассоциативную алгебру и нетривиальные факты, связанные с ней, такие как, в первую очередь, теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта (ПБВ, для краткости). Стандартный подход к построению универсальной обёртывающей ассоциативной алгебры — представить её набором порождающих элементов и определяющих соотношений. Данные наблюдения подсказывают, что логичными отправными шагами к доказательству конформной теоремы Адо является введение понятия универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры, а также её реализация на языке порождающих элементов и определяющих соотношений.

Первый шаг сделан в работе М. Ройтмана [65]. Там дано определение универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры, а также приводятся некоторые исследования в данной области и ставится проблема инъективности вложения. Тонкий момент заключается в том, что для всякой конформной алгебры Ли существует целая серия универсальных обёртывающих ассоциативных конформных алгебр, соответствующих функции ассоциативной локальности на порождающих. Стандартным способом проверки инъективности вложения (конформной) алгебры Ли в универсальную обёртывающую ассоциативную (конформную) алгебру является нахождение нормальной формы элементов. Второй шаг — реализация универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры на языке порождающих элементов и определяющих соотношений — сделан в работе П. С. Колесникова [54].

Наиболее общим и удобным методом нахождения нормальных форм в алгебрах, заданных набором порождающих элементов и определяющих соотношений, является вычисление стандартного базиса (или базиса Грёбнера — Ширшова) определяющих соотношений. Идея восходит к работе М. Ньюмана [60], где он сформулировал и доказал так называемую "бриллиантовую" лемму (от англ. diamond) ставшую толчком для целого направления в алгебре. Это отразилось изначально в работах А. И. Ширшова [9] и А. Бухбергера [27], затем в работах Л. А. Бокутя, напр., [3], и Г. Бергмана [16]. Отметим, что различия в подходах, используемых в данных работах, приводило к различным утверждениям, которые, тем не менее, эквивалентны. Мы в данной диссертации будем пользоваться утверждением в постановке А. И. Ширшова, именуемым леммой о композициях. Для ассоциативных конформных алгебр аналог леммы о композициях был впервые предложен в работе Л. А. Бокутя и соавторов [18].

Поскольку мы работаем в классе ассоциативных конформных алгебр, будет естественно подробнее изучить их структуру, а также обратиться к известным результатам. Структурная теория ассоциативных конформных алгебр с точным представление конечного типа хорошо изучена и мало отличается от таковой для классических конечномерных ассоциативных алгебр: простые объекты изоморфны либо конформным алгебрам петель $\mathrm{Cur}_n = \mathrm{Cur}\,\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C}[\partial])$, либо алгебрам конформных эндоморфизмов $\mathrm{Cend}_{n,Q} \cong Q(x)\mathrm{M}_n(\mathbb{C}[\partial, x])$, $\det Q \neq 0$; полупростые объекты есть прямая сумма простых, а также существует максимальный нильпотентный идеал (радикал).

Вопрос отщепления радикала в классическом случае разрешается известной теоремой Веддербёрна, сформулированной и доказанной им в начале 1900-х годов:

**Теорема** (Основная теорема Веддербёрна)**.** *Всякая конечномерная ассоциативная алгебра $A$ над совершенным полем $\Bbbk$ есть полупрямое произведение полупростой подалгебры $S$ и радикала $R$: $A \cong S \ltimes R$.*

Изначальное доказательство теоремы заключалось в непосредственной проверке. Однако, в 1945-46 г.г. в работах [42] и [43] Г. Хохшильдом была построена когомологическая теория, явившая более простой подход к доказательству основной теоремы Веддербёрна и других утверждений подобного рода. Идея заключается в доказательстве того, что короткая точная последовательность,

$$0 \to R \to A \to {}^{A}\!/_{R} \to 0,$$

естественных гомоморфизмов расщепляется гомоморфизмом алгебр. Вопрос расщепления, в свою очередь, эквивалентен вопросу тривиальности второй группы когомологий Хохшильда $H^2(A, R)$.

Повторяя логику, диктуемую классическим доказательством теоремы Адо, конформная проблема также существенно зависит от вопроса отщепляемости радикала. Следовательно, возникает естественный интерес к исследованию отщепляемости радикала и в классе ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа, как носителе ассоциативной обёртывающей для всякой конформной алгебры Ли.

Это приводит нас к постановке конформного аналога проблемы Веддербёрна:

**Проблема** (Основная теорема Веддербёрна, конформная)**.** *Описать условия, при которых ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа $A$ изоморфно представляется полупрямым произведением своей подалгебры $S$ и нильпотентного радикала $R$: $A \cong S \ltimes R$.*

Естественным инструментом для решения подобных задач вновь является метод когомологий, адаптация и развитие которого на новом — конформном — уровне приводится в основополагающей работе Б. Бакалова, В. Г. Каца, А. Воронова [13]. В данной диссертации, однако, мы будем чаще обращаться к эквивалентной конструкции, разработанной И. А. Долгунцевой [6].

Хорошо известно (например, из книги А. Картана и С. Эйленберга по гомологической алгебре, гл. 13), что для любой алгебры Ли $L$ и $L$-модуля $V$ группы когомологий $\mathrm{H}^n(L, V)$ совпадают с группами когомологий Хохшильда $\mathrm{H}^n(U(L), V)$ универсальной ассоциативной обёртывающей алгебры $U(L)$ с коэффициентами в том же пространстве $V$, но снабжённом индуцированной структурой $U(L)$-модуля. В частности, это верно для наиболее интересной нам второй группы когомологий, отвечающей за структуру сингулярных расширений. К сожалению, в конформном случае многозначность умножения и аксиома локальности вносят достаточно аберраций, чтобы данное соответствие нарушилось в общем случае.

### Степень разработанности задачи и цели исследования

Структурная теория конформных алгебр Ли конечного типа была разработана в [35], простые и полупростые алгебры и супералгебры Ли конечного типа были с точностью до изоморфизма описаны в работах [30], [36] и [37]. В работах [13], [24], [25], [31], [32], [33], [57] исследуется теория представлений, классифицируются неприводимые представления над простыми конформными (супер)алгебрами Ли конечного типа, а также над некоторыми другими исключительными представителями.

Опираясь на некоторые предыдущие труды, П. С. Колесникову в статьях [51] и [53] удалось частично решить конформную проблему Адо. Решение оказалось положительным в случае, когда полагалась выполненной конформная теорема Леви, т.е. отщеплялся разрешимый радикал. Как упоминалось ранее, конформные алгебры Ли конечного типа не исчерпываются лишь такими, что показывается, например, в [33].

Теория универсальных объектов, таких как свободная и универсальная обёртывающая алгебры, была представлена в работах [65], [66]. Там же было предложено необходимое условие для того, чтобы конформная алгебра Ли $L$ инъективно вкладывалась в свою универсальную обёртывающую ассоциативную конформную алгебру $\mathcal{U}(L, N)$ для некоторой функции локальности $N$.

В статье [18] был представлен метод базисов Грёбнера — Ширшова для ассоциативных конформных алгебр. Позднее он был существенно переработан и оптимизирован в работах Л. Ни, Ю. Чена [61] и П. С. Колесникова [54].

Структурная теория ассоциативных конформных алгебр конечного типа была разработана в [35], [73]. Там же была доказана конформная постановка основной теоремы Веддербёрна для алгебр данного класса. Другое доказательство, основанное на методе когомологий, приводится в [7]. В работе [51] показано, что класс ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа строго больше. Структурная теория для алгебр данного класса разработана в [23] и [48]. В отличие от предыдущего случая, как показано в [48], к основной теореме Веддербёрна существуют контрпримеры: ассоциативные конформные алгебры, для которых можно построить нерасщепляемое расширение.

Когомологическая теория для конформных алгебр различных классов построена в [13]. Она была переписана на языке псевдоалгебр в работе [12], однако, основное внимание было уделено псевдоалгебрам Ли (в том числе, конформным алгебрам Ли). Когомологическая теория для ассоциативных конформных алгебр на языке псевдоалгебр более детально изложена в [6].

## Основные результаты диссертации

1. Доказано, что квадратичные конформные (супер)алгебры Ли, построенные по дифференциальным (супер)алгебрам Пуассона, специальны. Как следствие, решена конформная проблема Адо в классе квадратичных конформных (супер)алгебр, построенных по конечномерным специальным (супер)алгебрам Гельфанда — Дорфман.

2. Вычислен базис Грёбнера — Ширшова (БГШ) для универсальной обертывающей ассоциативной конформной алгебры с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$ для произвольной конформной алгебры типа Каца — Муди. Как следствие, получен линейный базис данной конформной алгебры.

3. Полностью решен вопрос об отщеплении радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа.

Первый результат опубликован в работе [78], совместной с П. С. Колесниковым и А. С. Панасенко. При этом П. С. Колесникову принадлежит идея использования деформации регулярного представления для построения точного представления. А. С. Панасенко построил структуру алгебры Пуассона на универсальной дифференциальной обёртывающей для алгебры Новикова, продолжающую коммутатор по произведению Новикова. Автору диссертации принадлежит доказательство существования точного представления конечного типа для квадратичной конформной алгебры, построенной по специальной конечномерной (супер)алгебре Гельфанда — Дорфман (теорема 1).

Второй результат опубликован в работе [79], совместной с П. С. Колесниковым. Здесь П. С. Колесникову принадлежат постановка задачи и определение методики решения, а формулировки и доказательства результатов (теоремы 3 и 4) получены автором диссертации.

Третий результат является обобщением фактов, доказанных в личной работе автора [76] (теорема 5), а также совместных работах [75] и [77] с П. С. Колесниковым (теорема 6). В работе [77] решающий вклад автора диссертации состоит в исследовании случаев, когда вторые группы когомологий конформной алгебры вида $\mathrm{Cend}_{n,Q}$ тривиальны. Как следствие, доказан конформный аналог теоремы Веддербёрна (теорема 7).

## Публикации

Результаты диссертации содержатся в работах [75] — [82]. Основные результаты опубликованы в [75] — [79] в журналах, входящих в перечень ВАК, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

## Методы исследования

В диссертации используются классические результаты теории конформных алгебр Ли и ассоциативных конформных алгебр, а также когомологической теории для конформных алгебр.

В первом вопросе доказательство опирается на взаимно-однозначное соответствие между классом квадратичных конформных (супер)алгебр Ли и классом ГД-(супер)алгебр, установленное К. Ксу в работе [70]. Широко используется конструкция пуассоновой конформной обёртывающей, предложенная П. С. Колесниковым в [55].

При работе со вторым вопросом активно применяется новый подход к вычислению БГШ для ассоциативных конформных алгебр, разработанный П. С. Колесниковым в [54].

Доказательство третьего пункта опирается на адаптированный метод когомологий Хохшильда, представленный в работе И. А. Долгунцевой [6], а также на предыдущие результаты в данном направлении [7], [48], [49], [51].

### Научная новизна и значимость работы

Работа носит теоретический характер. Все результаты являются новыми. Новизна результата 1 состоит в том, что описан широкий класс конформных (супер)алгебр Ли, заведомо имеющих точное представление конечного типа и установлена исходно не очевидная связь между специальностью ГД-(супер)алгебры и построенной по ней квадратичной конформной (супер)алгебры. Результат 2 является завершением исследований универсальных ассоциативных обертывающих нетривиальных центральных расширений простых конформных алгебр Ли. Кроме того, в ходе решения этой задачи был впервые найден базис свободной коммутативной конформной алгебры с локальностью $N = 3$ на порождающих элементах. Результат 3 завершает серию работ об отщеплении радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа.

Результаты работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области теории представлений конформных алгебр, при изучении универсальных объектов, в теории когомологий конформных алгебр, а также некоторых комбинаторных вопросах. Кроме того, результаты могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов.

### Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2018), международной школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, 2020), второй конференции математических центров России (Москва, 2022), а также обсуждались на семинарах имени А. И. Ширшова по теории колец и «Алгебра и логика» института математики имени С. Л. Соболева и новосибирского государственного университета.

### Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 105 страницах. Главы диссертации подразделены на параграфы. Основные результаты сформулированы в виде теорем и имеют сквозную нумерацию. Вспомогательные утверждения имеют тройную нумерацию, где первая цифра отвечает за главу, вторая — за номер параграфа, третья — за номер утверждения. Список литературы содержит 74 наименования, отдельным списком из восьми пунктов идут работы автора по теме диссертации.

## Основное содержание диссертации

Во **введении** приводится постановка проблем, их описание, аргументируется актуальность и описывается степень проработанности. Сформулированы основные результаты, а также освещены применяемые методы исследования.

В **первой главе** даются основные определения и вспомогательные утверждения по общей теории конформных (супер)алгебр, теории представлений, об универсальных обёртывающих объектах, о теории базисов Грёбнера — Ширшова и когомологической теории. Каждый подраздел сопровождается наглядными примерами и необходимыми ссылками.

Во **второй главе** изучаются универсальные обёртывающие объекты для квадратичных конформных (супер)алгебр Ли, построенных по дифференциальным (супер)алгебрам Пуассона, а также их взаимосвязь с точными представлениями данных (супер)алгебр. В **первом параграфе** приводятся более специфические предварительные сведения, а также ряд вспомогательных утверждений, основным из которых является то, что квадратичная конформная (супер)алгебра Ли, построенная по специальной ГД-(супер)алгебре, инъективно вкладывается в универсальную пуассонову конформную обёртывающую (супер)алгебру. Во **втором параграфе** доказывается результат о том, что конформная проблема Адо имеет положительное разрешение для квадратичных конформных (супер)алгебр Ли, построенных по конечномерным специальным ГД-(супер)алгебрам.

**Теорема.** *Пусть $V$ будет конечномерной специальной ГД-(супер)алгеброй. Тогда квадратичная конформная (супер)алгебра Ли $L(V)$ имеет точное конформное представление конечного типа.*

В **третьем-четвёртом параграфах** исследуется вопрос инъективности вложения квадратичных конформных (супер)алгебр Ли, построенных по специальных ГД-(супер)алгебрам. В частности, доказывается следующая теорема:

**Теорема.** *Пусть $V$ будет специальной ГД-(супер)алгеброй. Тогда квадратичная конформная (супер)алгебра $L(V)$ инъективно вкладывается в универсальную ассоциативную конформную (супер)алгебру $\mathcal{U}(L(V), N)$ с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$.*

Данная теорема не относится к списку основных результатов по формальным критериям. Однако, она стоит упоминания отдельной строкой, поскольку результат является следствием дальнейших исследований и применения наработок, полученных при решении задачи о поиске точного представления конечного типа.

В **третьей главе** исследуется метод БГШ для ассоциативных конформных алгебр, а также его приложения к некоторым конкретным примерам. В **первом параграфе** приводятся более специфические предварительные сведения, необходимые для вычисления БГШ универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры. Во **втором параграфе** вычисляется БГШ универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$ для конформных алгебр Каца — Муди. Как следствие, в **третьем параграфе** мы получаем, что для конформных алгебр Каца — Муди оказывается верным конформный аналог теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

В **четвёртой главе** исследуется вопрос об отщеплении радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа. Как известно, этот вопрос полностью определяется строением второй группы когомологий Хохшильда. В **первых двух параграфах** рассматривается исключительная простая ассоциативная конформная алгебра $\mathrm{Cend}_{1,x}$, для которой вопрос о тривиальности второй группы когомологий Хохшильда является самостоятельным результатом.

**Теорема.** *Пусть $M$ будет произвольным бимодулем над $\mathrm{Cend}_{1,x}$. Тогда $\mathrm{H}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M) = 0$.*

Как следствие, получаем, что $\mathrm{Cend}_{1,x}$ отщепляется в любом расширении с нильпотентным ядром.

В **третьем и четвёртом параграфах параграфе** данный результат, вообще говоря, принципиально иными рассуждениями, достраивается до общего случая.

**Теорема.** *Пусть $M$ будет произвольным бимодулем над $A = \mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x)$, $n > 1$. Тогда $\mathrm{H}^2(A, M) = 0$.*

В пятом параграфе будет приведен ряд контрпримеров, которые, в совокупности с результатами И. А. Долгунцевой [6], [7], позволят доказать общую классификационную теорему.

**Теорема.** *Полупростая ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа $A$ отщепляется в любом расширении с нильпотентным ядром тогда и только тогда, когда $A = \bigoplus A_i$, где каждый идеал $A_i$ изоморфен $\mathrm{Cur}_n$, $\mathrm{Cend}_n$, и не более чем одной копии $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, где $Q = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x)$.*

### Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Павлу Сергеевичу Колесникову за всестороннюю поддержку в учебной и научной деятельности, а также за постановку интересных исследовательских задач. Автор благодарен Александру Сергеевичу Панасенко и Всеволоду Юрьевичу Губареву за научное сотрудничество и консультации. Также автор признателен всем сотрудникам лаборатории алгебры ИМ СО РАН и кафедры алгебры и математической логики НГУ за полученные знания и ценный опыт.

# Глава 1. Предварительные сведения

## § 1.1. (Супер)алгебры Новикова и Гельфанда — Дорфман

Тождества, определяющие класс неассоциативных алгебраических систем, которые впоследствии были названы алгебрами Новикова, возникли в [5] как соотношения на коэффициенты гамильтоновых операторов в формальном вариационном исчислении. Независимо данные алгебры были представлены в работе [2] как инструмент для изучения линейных скобок Пуассона гидродинамического типа.

Назовём $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $V = V_0 \oplus V_1$ *(супер)алгеброй Новикова*, если на нём задана билинейная операция $(\cdot \circ \cdot)$, являющаяся левосимметричной и правокоммутативной:

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = (-1)^{|a||b|}(b \circ a) \circ c - (-1)^{|a||b|} b \circ (a \circ c),$$
$$(a \circ b) \circ c = (-1)^{|b||c|}(a \circ c) \circ b,$$

для всех однородных $a$, $b$, $c \in V$.

Класс более сложных объектов, названных алгебрами Гельфанда — Дорфман появился также в работе [5] и служил аналогичной цели — построению гамильтоновых дифференциальных операторов.

Назовём $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $V = V_0 \oplus V_1$ *(супер)алгеброй Гельфанда-Дорфман*, если на нём одновременно заданы структуры (супер)алгебры Новикова $(V, (\cdot \circ \cdot))$ и (супер)алгебры Ли $(V, [\cdot, \cdot])$, согласованные следующим условием:

$$[a \circ b, c] - a \circ [b, c] + [a, b] \circ c + (-1)^{|a||b|}[b, a \circ c] - (-1)^{|b||c|}[a, c] \circ b = 0, \tag{1}$$

для всех однородных $a$, $b$, $c \in V$.

Серия примеров может быть получена из дифференциальных (супер)алгебр Пуассона. Пусть $P = P_0 \oplus P_1$ есть ассоциативная и коммутативная (супер)алгебра. Назовём (супер)алгебру $P$ *(супер)алгеброй Пуассона*, если на ней задана согласованная с градуировкой скобка Ли $\{\cdot, \cdot\}$, для которой выполнено (супер)тождество Лейбница:

$$\{a, b \cdot c\} = \{a, b\} \cdot c + (-1)^{|a||b|} b \cdot \{a, c\}, \tag{2}$$

для всех однородных $a$, $b$, $c \in P$.

Допустим, (супер)алгебра Пуассона $P$ имеет чётное дифференцирование $d$, т. е. линейный оператор $P \to P$, такой что

$$d(P_i) \subseteq P_i, \quad d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b), \quad d\{a, b\} = \{d(a), b\} + \{a, d(b)\},$$

для всех $a$, $b \in P$. Зададим на пространстве $P$ билинейные операции по правилу

$$a \circ b = a \cdot d(b), \quad [a, b] = \{a, b\}.$$

Как показано в [72], в результате мы получим ГД-(супер)алгебру. Обозначим её $P^{(d)}$.

Назовём ГД-(супер)алгебру $V$ *специальной*, если существует (супер)алгебра Пуассона $P$ с дифференцированием $d$, такая что $V \subseteq P^{(d)}$. Не являющиеся специальными ГД-(супер)алгебры будем называть *исключительными*.

Интересной серией примеров ГД-(супер)алгебр являются коммутаторные (супер)алгебры, впервые введённые в работе [5] в неградуированном случае. Пусть $V$ — (супер)алгебра Новикова. Тогда операция

$$[a, b] = (a \circ b) - (-1)^{|a||b|}(b \circ a),$$

для всех однородных $a$, $b \in V$, превращает $V$ в ГД-(супер)алгебру. Обозначим её $V^{(-)}$. Следующая теорема отвечает на вопрос о специальности таких алгебр.

**Теорема.** ([78]) *Пусть $V$ — (супер)алгебра Новикова. Тогда ГД-(супер)алгебра $V^{(-)}$ специальна.*

Основной идеей в данной теореме является применение конструкции универсальной обёртывающей дифференциальной (супер)алгебры для данной (супер)алгебры Новикова, предложенной в работах [20] для случая алгебр и [21] для случая (супер)алгебр. Заметим, что «алгебры Гельфанда — Дорфман — Новикова», изучающиеся в статьях [20], [21], — это не что иное, как «алгебры Новикова» в общепринятой терминологии, которой мы придерживаемся в данной диссертации.

**Пример 1.** Приведём в явном виде конструкцию универсальной обёртывающей дифференциальной (супер)алгебры для (супер)алгебры Новикова $V$. Пусть $X = X_0 \cup X_1$ — линейный базис $V$, где $X_i$ есть базис $V_i$ для $i = 0, 1$ соответственно. Обозначим через $F = s\,\mathrm{Com}\,\mathrm{Der}\langle X, d\rangle$ свободную ассоциативную коммутативную (супер)алгебру с дифференцированием $d$, порождённую чётными переменными из $X_0$ и нечётными из $X_1$. Как алгебра она изоморфна $\Bbbk[d^\omega X_0] \otimes \bigwedge(\Bbbk d^\omega X_1)$, где $d^\omega X_i = \{d^n(x) | n \geq 0,\ x \in X_i\}$, $i = 0, 1$.

Рассмотрим в $F$ дифференциальный идеал $I_V$, порожденный элементами вида

$$u(x, y) = x \cdot d(y) - x \circ y, \tag{3}$$

для всех $x, y \in X$, где $x \circ y$ представляет разложение по базису в (супер)алгебре Новикова $V$. В работах [20], [21] показано, что $I_V \cap \Bbbk X = 0$, следовательно, $I_V$ порождается как (не дифференциальный) идеал элементами $d^\omega u(x, y)$. Фактор-алгебра $F/_{I_V}$ есть искомая универсальная обёртывающая дифференциальная (супер)алгебра. Обозначим её $U_d(V)$.

Определим на порождающих $U_d(V)$ скобку по правилу

$$\{d^n(x), d^m(y)\} = (m-1)d^{n+1}(x) \cdot d^m(y) - (n-1)d^n(x) \cdot d^{m+1}(y),$$

для всех $x, y \in X$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Мы получим корректно-определённую структуру дифференциальной (супер)алгебры Пуассона, которая является искомой обёртывающей для $V^{(-)}$.

**Пример 2.** Далее приведём пример ГД-алгебры, которая является исключительной. Пусть $V$ — алгебра Гейзенберга, т. е. трёхмерное векторное пространство с базисом $\{x, y, z\}$ и таблицей умножения

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = [y, z] = 0.$$

Непосредственной проверкой получаем, что операция $(\cdot \circ \cdot)$, заданная по правилу

$$x \circ x = x - y, \quad y \circ x = -x \circ y = y,$$

$$x \circ z = z \circ x = y \circ z = z \circ y = y \circ y = z \circ z = 0,$$

превращает $V$ в ГД-алгебру. Допустим, она специальна. Тогда существует дифференциальная алгебра Пуассона $P$, такая что $V \subset P^{(d)}$. Рассмотрим выражение $\{x, x'\} \cdot x \cdot x' \in P$. С одной стороны,

$$\{x, x'\} \cdot (x \cdot x') = \{x, x'\} \cdot (x \circ x) = \{x, (x \circ x) \cdot x'\} - \{x, x \circ x\} \cdot x' = [x, (x \circ x) \circ x] - [x, x \circ x] \circ x = -2z.$$

С другой стороны,

$$\{x, x'\} \cdot (x \cdot x') = (\{x, x'\} \cdot x) \cdot x' = (\{x, x \cdot x'\}) \cdot x' - (\{x, x\} \cdot x') \cdot x' = [x, x \circ x] \circ x = 0.$$

Приходим к противоречию.

Более общими рассуждениями существование исключительных ГД-(супер)алгебр было показано в [56].

## § 1.2. Конформные (супер)алгебры

Всюду, где речь заходит о конформных алгебрах любого класса, зафиксируем $H = \Bbbk[\partial]$, алгебру полиномов от одной переменной над полем $\Bbbk$ характеристики нуль.

*Конформная (супер)алгебра* — это $\mathbb{Z}_2$-градуированный левый $H$-модуль $C = C_0 \oplus C_1$, снабжённый счётным семейством билинейных операций $(\cdot {}_{(n)} \cdot)\colon C \times C \to C$, $n \in \mathbb{Z}_+$, согласованных с градуировкой, т.е. $(C_i\ _{(n)}\ C_j) \subseteq C_{(i+j)(\mathrm{mod}\ 2)}$, и удовлетворяющих аксиомам:

(C1) для любых $a, b \in C$ существует $N(a,b) \in \mathbb{Z}_+$, что $(a\ _{(n)}\ b) = 0$ для всех $n \geq N$,

(C2) $(\partial a\ _{(n)}\ b) = -n(a\ _{(n-1)}\ b)$,

(C3) $(a\ _{(n)}\ \partial b) = \partial(a\ _{(n)}\ b) + n(a\ _{(n-1)}\ b)$,

для всех $a, b \in C$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Аксиома (C1) называется *аксиомой локальности*, (C2), (C3) — *аксиомами* 3/2-*линейности*. Кроме того, будем называть $N(\cdot,\cdot)$ *функцией локальности*. Пусть $C$ порождается как $H$-модуль множеством $B$. Скажем, что на $C$ задано ограничение на локальность $N = c$ для некоторой константы $c \in \mathbb{Z}_+$, если $N(a,b) \leq c$ для всех $a$, $b \in B$.

Пусть $C$ есть конформная алгебра. Назовём конформной единицей такой элемент $e \in C$, что
$$e\ _{(n)}\ e = 0,\ n > 0, \quad e\ _{(0)}\ a = a,$$
для всех $a \in C$.

Структура конформной (супер)алгебры может быть эквивалентно выражена в терминах одного билинейного отображения $(\cdot\ _{(\lambda)}\ \cdot)\colon C \times C \to C[\lambda]$, называемого $\lambda$-произведением:
$$(a\ _{(\lambda)}\ b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda^{(n)}(a\ _{(n)}\ b),$$
где $\lambda^{(n)} = \frac{\lambda^n}{n!}$. В самом деле, функция локальности запишется как $N(a,b) = \deg_\lambda(a\ _{(\lambda)}\ b) + 1$ при $(a\ _{(\lambda)}\ b) \neq 0$ и $N(a,b) = 0$ при $(a\ _{(\lambda)}\ b) = 0$. Аксиомы (C2), (C3) перепишем в следующем виде:
$$(\partial a\ _{(\lambda)}\ b) = -\lambda(a\ _{(\lambda)}\ b), \quad (a\ _{(\lambda)}\ \partial b) = (\partial + \lambda)(a\ _{(\lambda)}\ b).$$
В течение диссертации мы будем придерживаться именно этой нотации.

Для всякой конформной (супер)алгебры существует единственная *(супер)алгебра коэффициентов* $\mathrm{Coeff}\, C$, такая что $C$ изоморфна конформной (супер)алгебре формальных распределений над $\mathrm{Coeff}\, C$, как показано в [46]. Конформная (супер)алгебра $C$ называется *ассоциативной* (*коммутативной, Ли, Пуассона* и т. д.), если таковой является $\mathrm{Coeff}\, C$ [65]. Каждое тождество на $\mathrm{Coeff}\, C$ может быть выражено как семейство тождеств на $C$. Например, $\mathrm{Coeff}\, C$ ассоциативная тогда и только тогда, когда
$$(a\ _{(n)}\ (b\ _{(m)}\ c)) = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \binom{n}{s}((a\ _{(n-s)}\ b)\ _{(m+s)}\ c),$$
для всех $a$, $b$, $c \in C$ и $n$, $m \in \mathbb{Z}_+$. В терминах $\lambda$-произведения мы можем записать аксиому конформной ассоциативности как

(A) $$(a\ _{(\lambda)}\ (b\ _{(\mu)}\ c)) = ((a\ _{(\lambda)}\ b)\ _{(\lambda+\mu)}\ c),$$

для всех $a$, $b$, $c \in C$. Здесь $\lambda$ и $\mu$ — независимые коммутирующие переменные. Таким образом, мы можем переписать определение полностью в терминах конформных произведений. Конформная (супер)алгебра $A$ называется *ассоциативной*, если она удовлетворяет (A).

Аналогично, конформная (супер)алгебра $K$ называется *коммутативной*, если выполнена следующая аксиома:

$$\text{(C)} \qquad (a\ _{(\lambda)}\ b) = (-1)^{|a||b|}(b\ _{(-\partial-\lambda)}\ a),$$

для всех однородных $a$, $b \in K$. Конформная (супер)алгебра $L$ с умножением $[\cdot\ _{(\lambda)}\ \cdot]$ называется *(супер)алгеброй Ли*, если выполнен следующий набор аксиом:

$$\text{(L1)} \qquad [a\ _{(\lambda)}\ b] = -(-1)^{|a||b|}[b\ _{(-\partial-\lambda)}\ a],$$

$$\text{(L2)} \qquad [a\ _{(\lambda)}\ [b\ _{(\mu)}\ c]] - (-1)^{|a||b|}[b\ _{(\lambda)}\ [a\ _{(\mu)}\ c]] = [[a\ _{(\lambda)}\ b]\ _{(\lambda+\mu)}\ c],$$

для всех $a$, $b \in L_0 \cup L_1$, $c \in L$. Равенство (L1) называется аксиомой кососимметричности, а (L2) — тождеством Якоби.

Пусть $P$ есть конформная (супер)алгебра относительно пары умножений $[\cdot\ _{(\lambda)}\ \cdot]$ и $(\cdot\ _{(\lambda)}\ \cdot)$. Назовём $P$ *(супер)алгеброй Пуассона*, если $[\cdot\ _{(\lambda)}\ \cdot]$ удовлетворяет (L1) и (L2), $(\cdot\ _{(\lambda)}\ \cdot)$ удовлетворяет (A) и (C), и выполняется следующая аксиома:

$$\text{(P)} \qquad ([a\ _{(\lambda)}\ [b\ _{(\mu)}\ c]) = ([a\ _{(\lambda)}\ b]\ _{(\lambda+\mu)}\ c) + (-1)^{|a||b|}(b\ _{(\mu)}\ [a\ _{(\lambda)}\ c]),$$

для всех $a$, $b \in P_0 \cup P_1$, $c \in P$.

**Пример 3** (Конформная (супер)алгебра петель)**.** Пусть $(\mathfrak{g},\ f_1, \dots, f_n)$ есть обычная (супер)алгебра некоторого многообразия, снабжённая серией билинейных умножений $f_i$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим свободный $H$-модуль $\operatorname{Cur}\mathfrak{g} = H \otimes \mathfrak{g}$. Умножения, заданные по правилу,

$$(f(\partial) \otimes a\ _{(\lambda)}\ g(\partial) \otimes b)_i = f(-\lambda)g(\partial+\lambda) \otimes f_i(a,b),$$

для всех $f(\partial)$, $g(\partial) \in H$, $a$, $b \in \mathfrak{g}$, $i = \overline{1,n}$, превратят $\operatorname{Cur}\mathfrak{g}$ в конформную алгебру того же класса, что и $\mathfrak{g}$.

Отдельно стоит выделить случай $\mathfrak{g} = M_{n|m}(\Bbbk)$, $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры матриц размера $(n+m)$ с чётной компонентой $\begin{pmatrix} M_n & 0 \\ 0 & M_m \end{pmatrix}$ и нечётной компонентой $\begin{pmatrix} 0 & M_{n,m} \\ M_{m,n} & 0 \end{pmatrix}$. В дальнейшем будем обозначать $\operatorname{Cur}\mathfrak{g}$ как $\operatorname{Cur}_{n|m}$.

В главах 2 и 3 данной диссертации мы будем особенно заинтересованы в весьма широком подклассе в классе конформных (супер)алгебр Ли.

Конформная (супер)алгебра Ли $L$ называется *квадратичной*, если она является свободным $H$-модулем, т. е. $L = H \otimes V$, и на векторном пространстве $V$ заданы билинейные операции $c_i(a, b) : V \times V \to V$, $i = 0, 1, 2$, такие что

$$[a\ {}_{(\lambda)}\ b] = c_0(a, b) + \partial c_1(a, b) + \lambda c_2(a, b),$$

для всех $a, b \in V$.

В работе [70] было показано, что выполнение конформных аксиомы кососимметричности (L1) и тождества Якоби (L2) эквивалентно представлению:

$$c_0(a, b) = [a, b], \quad c_1(a, b) = (-1)^{|a||b|} b \circ a, \quad c_2(a, b) = a \circ b + (-1)^{|a||b|} b \circ a,$$

где $\mathfrak{V} = (V, (\cdot \circ \cdot), [\cdot, \cdot])$ есть ГД-(супер)алгебра. Обозначим соответствующую квадратичную конформную (супер)алгебру Ли $L(V)$.

**Пример 4.** Очевидным примером квадратичной конформной (супер)алгебры Ли является $\mathrm{Cur}\, \mathfrak{L}$, построенная по произвольной (супер)алгебре Ли $\mathfrak{L} = (V, [\cdot, \cdot])$. Соответствовать ей будет ГД-(супер)алгебра $\mathfrak{V}$ с той же скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$ и тривиальным умножением Новикова $(\cdot \circ \cdot)$.

**Пример 5.** Одним из базовых примеров, важным, кроме того, в рамках данной диссертации выступает конформная *алгебра Вирасоро* Vir. Рассмотрим свободный $H$-модуль, порождённый одним чётным элементом $v$, т. е. $Hv$. Умножение, заданное по правилу $[v\ {}_{(\lambda)}\ v] = (\partial + 2\lambda)v$, превращает $H$-модуль в конформную алгебру Ли. Соответствовать ей будет ГД-алгебра $\mathfrak{V} = \Bbbk v$ с умножением Новикова $v \circ v = v$.

**Пример 6.** Пусть $\mathfrak{L}$ есть (супер)алгебра Ли. Рассмотрим прямую сумму свободных $H$-модулей $Hv \oplus (H \otimes \mathfrak{L})$, где $v$ — чётный элемент, и зададим скобку по правилу

$$[v\ {}_{(\lambda)}\ v] = (\partial + 2\lambda)v, \quad [v\ {}_{(\lambda)}\ a] = (\partial + \lambda)a, \quad [a\ {}_{(\lambda)}\ b] = [a, b],$$

для всех $a, b \in \mathfrak{L}$. В результате мы получим конформную (супер)алгебру Ли $\mathrm{Vir} \ltimes \mathrm{Cur}\, \mathfrak{L}$, полупрямое произведение конформных (супер)алгебр Ли. Соответствовать ей будет ГД-(супер)алгебра $\mathfrak{V} = \Bbbk v \ltimes \mathfrak{L}$ со следующей таблицей умножения:

$$[a, b] \in \mathfrak{L}, \quad [v, a] = 0, \quad v \circ v = v, \quad a \circ b = a \circ v = 0, \quad v \circ a = a,$$

для всех $a, b \in \mathfrak{L}$.

Особое место в рамках данной диссертации уделено конформным объектам конечного типа. Скажем, что $C$ есть конформная алгебра *конечного типа*, если она конечнопорождена как $H$-модуль.

Данными тремя примерами полностью описывается структура простых и полупростых конформных алгебр Ли конечного типа, что ещё раз показывает, насколько широким является класс квадратичных конформных алгебр Ли.

**Теорема.** ([35]) *Пусть $L$ есть конформная алгебра Ли конечного типа. Тогда:*

(1) *если $L$ простая, то она изоморфна либо Vir, либо* $\operatorname{Cur}\mathfrak{L}$*, где $\mathfrak{L}$ есть конечномерная простая алгебра Ли;*

(2) *если $L$ полупростая, то $L = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$, где $C_i$, $i = \overline{1,k}$ изоморфны либо Vir, либо* $\operatorname{Cur}\mathfrak{L}$*, либо* $\mathrm{Vir} \ltimes \operatorname{Cur}\mathfrak{L}$*, где $\mathfrak{L}$ есть конечномерная простая алгебра Ли.*

Центральные расширения квадратичных конформных (супер)алгебр Ли, которые, вообще говоря, сами не являются квадратичными, также представляют большой интерес. Они могут быть получены с помощью следующей короткой точной последовательности:

$$0 \to I \to L' \to L \to 0,$$

где $L$ есть некоторая квадратичная конформная (супер)алгебра Ли, $I$ — $L$-модуль с тривиальным умножением, а $L'$ — искомое расширение.

**Пример 7.** Примером такой конформной алгебры служит конформная *алгебра Каца — Муди* (см. [38]). Пусть $\mathfrak{L}$ есть алгебра Ли, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ — билинейная симметрическая инвариантная форма на $\mathfrak{L}$, например, форма Киллинга. Рассмотрим в качестве $L$ конформную алгебру петель $\operatorname{Cur}\mathfrak{L}$, а в качестве $I$ одномерное пространство $\Bbbk e$. Обозначим результирующую $L'$ как $K(\mathfrak{L})$.

В явном виде, $K(\mathfrak{L}) = (H \otimes \mathfrak{L}) \oplus \Bbbk e$, где умножение задаётся по правилу:

$$[a\ {}_{(\lambda)}\ b] = [a, b] + \lambda\langle a|b\rangle e, \quad [a\ {}_{(\lambda)}\ e] = [e\ {}_{(\lambda)}\ e] = 0,$$

для всех $a$, $b \in \mathfrak{L}$, и $\partial e = 0$, т. е. одномерное пространство $\Bbbk e$ лежит в кручении.

## § 1.3. Модули, представления и обёртывающие

В данном параграфе мы приведём необходимые сведения, позволяющие сформулировать первую проблему данной диссертации.

Пусть $C$ есть конформная (супер)алгебра. *Левый конформный модуль $M$* над $C$ – это $\mathbb{Z}_2$-градуированный левый $H$-модуль $M = M_0 \oplus M_1$, снабжённый билинейным отображением

$(\cdot\ {}_{(\lambda)}\ \cdot)\colon C \times M \to M[\lambda]$, согласованным с градуировкой, т. е. $C_i\ {}_{(\lambda)}\ M_j \subset M_{(i+j)(\mathrm{mod}\ 2)}[\lambda]$, и удовлетворяющим аксиомам:

$$\text{(M1)} \qquad (\partial a\ {}_{(\lambda)}\ m) = -\lambda(a\ {}_{(\lambda)}\ m),$$

$$\text{(M2)} \qquad (a\ {}_{(\lambda)}\ \partial m) = (\partial + \lambda)(a\ {}_{(\lambda)}\ m),$$

для всех $a \in C$ и $m \in M$.

Понятие левого модуля можно легко переписать в терминах правого действия, а также обобщить до двустороннего случая. При этом получается, соответственно, *правый конформный модуль* и *конформный бимодуль*.

По аналогии с классическим случаем, понятие модуля можно ограничить на любой класс, учитывая конформную специфику. Так, пусть даны ассоциативная конформная (супер)алгебра $A$ и левый конформный модуль $M_A$ над $A$, как над конформной (супер)алгеброй. Скажем, что $M_A$ есть левый конформный модуль над $A$, как над ассоциативной конформной (супер)алгеброй, если он удовлетворяет следующей аксиоме:

$$\text{(MAL)} \qquad (a\ {}_{(\lambda)}\ (b\ {}_{(\mu)}\ m)) = ((a\ {}_{(\lambda)}\ b)\ {}_{(\lambda+\mu)}\ m),$$

для всех $a, b \in A$, $m \in M_A$. Тогда как для правого конформного модуля $M_A$ над ассоциативной конформной (супер)алгеброй $A$ дополнительная аксиома переписывается как

$$\text{(MAR)} \qquad (m\ {}_{(\lambda)}\ (b\ {}_{(\mu)}\ c)) = ((m\ {}_{(\lambda)}\ b)\ {}_{(\lambda+\mu)}\ c),$$

для всех $b, c \in A$, $m \in M_A$. Наконец, *конформным бимодулем* $M_A$ над ассоциативной конформной (супер)алгеброй $A$ назовём одновременно левый и правый модуль, дополнительно удовлетворяющий двусторонней аксиоме:

$$\text{(MA)} \qquad (a\ {}_{(\lambda)}\ (m\ {}_{(\mu)}\ c)) = ((a\ {}_{(\lambda)}\ m)\ {}_{(\lambda+\mu)}\ c),$$

для всех $a, c \in A$, $m \in M_A$.

Аналогично, пусть даны конформная (супер)алгебра Ли $L$ и левый конформный модуль $M_L$ над $L$, как над конформной (супер)алгеброй. Скажем, что $M_L$ есть конформный модуль над $L$, как над конформной (супер)алгеброй Ли, если он удовлетворяет следующей аксиоме:

$$\text{(ML)} \qquad (a\ {}_{(\lambda)}\ (b\ {}_{(\mu)}\ m)) - (-1)^{|a||b|}(b\ {}_{(\mu)}\ (a\ {}_{(\lambda)}\ m)) = ([a\ {}_{(\lambda)}\ b]\ {}_{(\lambda+\mu)}\ m),$$

для всех $a, b \in L_0 \cup L_1$, $m \in M_L$.

Понятие конформного подмодуля и фактормодуля определяется стандартным образом, с учётом $H$-модульной специфики.

Структура конформного модуля с некоторыми ограничениями продолжается на тензорное произведение. В самом деле, пусть $L$ есть конформная (супер)алгебра Ли $M_L^i$, $i = 1, \ldots, n$, — конформные $\mathbb{Z}_2$-градуированные модули над ней. Зададим на их тензорном произведении структуру левого $\mathbb{Z}_2$-градуированного $H$-модуля:

$$(M_L^1 \otimes \ldots \otimes M_L^n)_j = \sum (M_L^1)_{i_1} \otimes \ldots \otimes (M_L^n)_{i_n}, \ i_1 + \ldots + i_n \in 2\mathbb{Z}_+ + j,$$

где $j$, $i_1, \ldots, i_n \in \{0,\ 1\}$, и

$$\partial(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1 \otimes \ldots \otimes \partial m_i \otimes \ldots \otimes m_n,$$

для всех $m_i \in M_L^i$.

Тогда на пространстве $M_L^1 \otimes \ldots \otimes M_L^n$ будет задана структура левого конформного модуля над $L$ по следующему покомпонентному правилу:

$$a\ _{(\lambda)}\ (m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1 \otimes \ldots \otimes (a\ _{(\lambda)}\ m_i) \otimes \ldots \otimes m_n,$$

для всех $a \in L$, $m_i \in M_L^i$. Случаи правого и двустороннего модулей аналогичны. Стоит отметить, что, например, в случае ассоциативных конформных (супер)алгебр данная конструкция не сработает.

Наиболее простые примеры конформных модулей возникают из достаточно естественных конструкций. Так, в случае конформных (супер)алгебр можно ввести понятие *регулярного модуля* через действие конформной (супер)алгебры на самой себе. Тогда модульные аксиомы (M1), (M2) и т. д. выполнены автоматически, поскольку они суть аксиомы конформной (супер)алгебры рассматриваемого класса.

Далее мы описываем менее тривиальную конструкцию, которая имеет крайне важное значение в рамках данной диссертации.

Пусть $M$, $K$ есть два $H$-модуля. *Конформным гомоморфизмом* $\alpha$ из $M$ в $K$ назовём линейное отображение $M \to K[\lambda]$, $m \mapsto \alpha_\lambda(m)$, $m \in M$, удовлетворяющее условию $\alpha_\lambda \partial = (\partial + \lambda)\alpha_\lambda$.

Обозначим данное пространство как $\mathrm{Chom}(M, K)$. Если $M = K$, то мы получим пространство *конформных эндоморфизмов*, которое будем обозначать $\mathrm{Cend}\, M$. Заметим, что $\mathrm{Cend}\, M$ можно снабдить структурой $H$-модуля по правилу

$$(\partial\alpha)_\lambda = -\lambda\alpha_\lambda,$$

для всех $\alpha \in \mathrm{Cend}\, M$. Более того, если $M$ — конечнопорождённый $\mathbb{Z}_2$-градуированный $H$-

модуль, то $\operatorname{Cend} M$ есть ассоциативная конформная (супер)алгебра относительно следующего правила умножения:

$$(\alpha \,{}_{(\lambda)}\, \beta)_\mu = \alpha_\lambda \beta_{\mu-\lambda}, \tag{4}$$

для всех $\alpha$, $\beta \in \operatorname{Cend} M$. К сожалению, в общем случае данное правило умножения не удовлетворяет аксиоме локальности (C1). В самом деле, зафиксируем бесконечное семейство порождающих $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots\}$ для $H$-модуля $M$ и определим конформный эндоморфизм $\alpha$ по следующему правилу:

$$\alpha_\lambda \beta_i = \beta_i \lambda^i,$$

для всех $\beta_i \in B$. Тогда произведение двух таких конформных эндоморфизмов приведёт к следующему равенству:

$$(\alpha \,{}_{(\lambda)}\, \alpha)_\mu \beta_i = \alpha_\lambda(\alpha_{\mu-\lambda}\beta_i) = \beta_i \lambda^i (\mu - \lambda)^i,$$

для всех $\beta_i \in B$. Отсюда очевидно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер $n \leq i \in \mathbb{N}$, что $\alpha \,{}_{(i)}\, \alpha \neq 0$. Приходим к противоречию с локальностью.

Обойти данное противоречие можно, рассмотрев подпространство $\operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}} M$ *финитарных* конформных эндоморфизмов, то есть таких, что степени по $\lambda$ их образов от элементов множества порождающих $B$ равномерно ограничены. В явном виде данное пространство можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}} M = \{\alpha \in \operatorname{Cend} M \mid \exists n(\alpha) \in \mathbb{N} : \deg(\alpha_\lambda \beta_i) \leq n(\alpha)\}.$$

Ясно, что данное пространство замкнуто относительно правила умножения (4). Следовательно, $\operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}} M$ есть ассоциативная конформная (супер)алгебра, а $M$ есть конформный модуль над ней. Заметим, что определение $\operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}} M$ зависит от выбора системы порождающих $B$ в случае, когда $M$ есть бесконечнопорождённый $H$-модуль.

Следуя логике А. Ретаха [63], пространство $\operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}} M$ для свободного $\mathbb{Z}_2$-градуированного $H$-модуля $M = H \otimes V$ можно с точностью до изоморфизма представить как

$$\operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}} M \cong H \otimes (\operatorname{End} V)[x] \cong \Bbbk[\partial, x] \otimes \operatorname{End} V,$$

где $\operatorname{End} V$ есть пространство эндоморфизмов векторного пространства $V$. Тогда конформное действие явно запишется как

$$(f(\partial, x) \otimes \alpha)_\mu (h(\partial) \otimes u) = f(-\mu, \partial) h(\partial + \mu) \otimes \alpha(u), \tag{5}$$

где $f(\partial, x) \in \Bbbk[\partial, x]$, $h(\partial) \otimes u \in M$ и $\alpha \in \operatorname{End} V$. В то же время, правило умножения (4) запишется в следующем виде:

$$(f(\partial, x) \otimes \alpha) \ {}_{(\lambda)} \ (g(\partial, x) \otimes \beta) = f(-\lambda, x) g(\partial + \lambda, x + \lambda) \otimes \alpha\beta, \tag{6}$$

где $f(\partial, x),\ g(\partial, x) \in \Bbbk[\partial, x]$ и $\alpha,\ \beta \in \operatorname{End} V$.

Контрпример, приведённый на прошлой странице, явно показывает, что в случае бесконечнопорождённого $H$-модуля вложение $\operatorname{Cend_{fin}} M \subsetneq \operatorname{Cend} M$ является строгим. Однако, при рассмотрении конечнопорождённого $H$-модуля $M$, очевидно, достигается равенство. В таком случае мы будем придерживаться обозначения $\operatorname{Cend} M$.

**Пример 8.** Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ есть конечномерное $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство. Рассмотрим свободный $H$-модуль $M = H \otimes V = M_0 \oplus M_1$. Тогда пространство $\operatorname{Cend} M$ распадается на чётную и нечётную компоненты естественным образом:

$$(\operatorname{Cend} M)_0 = \operatorname{Cend} M_0 \oplus \operatorname{Cend} M_1, \quad (\operatorname{Cend} M)_1 = \operatorname{Chom}(M_0, M_1) \oplus \operatorname{Chom}(M_1, M_0).$$

Если $M$ есть $H$-модуль ранга $n + m$, где $n = \dim V_0$, $m = \dim V_1$, тогда будем обозначать $\operatorname{Cend} M$ как $\operatorname{Cend}_{n|m}$. В изоморфизме $\operatorname{Cend} M \cong \Bbbk[\partial, x] \otimes \operatorname{End} V$ пространство $\operatorname{End} V$, соответственно, превратится в матричную (супер)алгебру $M_{n|m}(\Bbbk)$ относительно ассоциативного умножения.

**Пример 9.** Приведём один из важных для данной работы примеров. Рассмотрим ассоциативную конформную (супер)алгебру $\operatorname{Cend}_{n|m} \cong H \otimes M_{n|m}(\Bbbk[x])$ и зафиксируем матрицу $Q(x) \in M_{n|m}(\Bbbk[x])$. Тогда пространство $Q(x) \operatorname{Cend}_{n|m}$ матриц, которые «делятся» на $Q(x)$, снова будет ассоциативной конформной (супер)алгеброй и подалгеброй (более того, правым идеалом) в $\operatorname{Cend}_{n|m}$.

В данном изоморфном представлении правило умножения (6) естественным образом можно переписать на $H$-порождающих в виде

$$(A(x) \ {}_{(\lambda)} \ B(x)) = A(x) B(x + \lambda), \tag{7}$$

где $A(x),\ B(x) \in M_{n|m}(\Bbbk[x])$. На всю алгебру продолжим по 3/2-линейности. Обозначим полученную ассоциативную конформную (супер)алгебру как $\operatorname{Cend}_{n|m,Q}$.

Данные примеры позволяют исчерпывающе описать структурную теорию простых и полупростых ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа. Её основы были заданы в работе трёх авторов [23] (для ассоциативных конформных алгебр конечного типа), где, в частности, было установлено, что $\operatorname{Cend}_{n,Q}$ изоморфна как конформная алгебра левому идеалу $M_n(\Bbbk[\partial, x]) Q(x - \partial) \triangleleft_l \operatorname{Cend}_n$. Изоморфизм задан по правилу $\theta$:

$Q(x)A(\partial, x) \to A(\partial, x)Q(x-\partial)$, для всех $A \in M_n(\Bbbk[\partial, x])$. Окончательный результат получен в работе П. С. Колесникова [48].

**Теорема** ([23], [48])**.** *Пусть $A$ есть ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа. Тогда:*

(1) *в $A$ существует нильпотентный радикал $R$;*

(2) *если $A$ простая, то она изоморфна либо* $\mathrm{Cur}_n$, *либо* $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, $\det Q \neq 0$*;*

(3) *если $A$ полупростая, то $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, где $A_i$, $i = \overline{1,k}$ изоморфны либо* $\mathrm{Cur}_n$, *либо* $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, $\det Q \neq 0$.

Соответственно, если $A$ есть ассоциативная конформная алгебра конечного типа, то в теореме останутся только алгебры вида $\mathrm{Cur}_n$. Стоит отметить также ещё один полезный результат, доказанный в [23]: с точностью до изоморфизма конформных алгебр можно считать, что матрица $Q(x)$, задающая $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, находится в канонической диагональной форме, т. е.,

$$Q(x) = \mathrm{diag}(f_1, \dots, f_n), \quad f_1|f_2|\dots|f_n.$$

Более того, если $\deg f_i > 0$ и $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, можно положить $f_i(0) = 0$, поскольку сдвиг $x \mapsto x - c$, $c \in \Bbbk$, есть автоморфизм $\mathrm{Cend}_n$.

Между представленными классами конформных (супер)алгебр (ассоциативных и лиевых) существует фундаментальная связь, берущая начало из классических конструкций. Так, если рассмотреть $\mathbb{Z}_2$-градуированную ассоциативную конформную алгебру $A = A_0 \oplus A_1$ и задать на ней коммутаторную скобку по правилу $[a \,{}_{(\lambda)}\, b] = (a \,{}_{(\lambda)}\, b) - (-1)^{|a||b|}(b \,{}_{(-\partial-\lambda)}\, a)$, $a$, $b \in A_0 \cup A_1$, то в результате получится конформная (супер)алгебра Ли, что впервые показано в [66]. Обозначим полученную таким образом конформную (супер)алгебру Ли $A^{(-)}$. Введём также удобное обозначение, позволяющее выразить $n$-произведение на $A^{(-)}$ более лаконично в виде

$$[a \,{}_{(n)}\, b] = (a \,{}_{(n)}\, b) - (-1)^{|a||b|}\{b \,{}_{(n)}\, a\},$$

где $\{a \,{}_{(n)}\, b\}$ есть соответствующий коэффициент при $\frac{\lambda^n}{n!}$ в выражении $(a \,{}_{(-\partial-\lambda)}\, b)$:

$$\{a \,{}_{(n)}\, b\} = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} (-1)^{n+s} \frac{\partial^s}{s!} (a \,{}_{(n+s)}\, b).$$

Как показано в работе В. Г. Каца [46], в конформных алгебрах выполнены эквивалентные аналоги аксиом (C2), (C3) относительно $n$-произведения $\{\cdot \,{}_{(n)}\, \cdot\}$:

(C2′) $$\{\partial a \,{}_{(n)}\, b\} = \partial\{a \,{}_{(n)}\, b\} + n\{a \,{}_{(n-1)}\, b\},$$

(C3′) $$\{a \,{}_{(n)}\, \partial b\} = -n\{a \,{}_{(n-1)}\, b\}$$

Более того, в ассоциативных конформных алгебрах выполнены эквивалентные аналоги аксиомы (A):

(A′) $$(a_{\ (n)}\ \{b_{\ (m)}\ c\}) = \{(a_{\ (n)}\ b)_{\ (m)}\ c\},$$

(A″) $$(\{a_{\ (n)}\ b\}_{\ (m)}\ c) = \sum_{s\in\mathbb{Z}_+}(-1)^s\binom{n}{s}(a_{\ (m+s)}\ (b_{\ (n-s)}\ c)).$$

На языке $\lambda$-произведений, они могут быть записаны как

(A′) $$(a_{\ (\lambda)}\ \{b_{\ (\mu)}\ c\}) = \{(a_{\ (\lambda)}\ b)_{\ (\mu)}\ c\},$$

(A″) $$(\{a_{\ (\lambda)}\ b\}_{\ (\mu)}\ c) = (a_{\ (\lambda+\mu)}\ (b_{\ (\lambda)}\ c)).$$

Ясно, что выполнены и следствия из данных тождеств для ассоциативных левых, правых модулей и бимодулей. Обозначим их (MAL), (MAR) и (MA) с одним или двумя символами $'$, соответственно.

Относительно приведённой конструкции рассмотрим ассоциативную конформную (супер)алгебру $\mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}}\, M$ над $\mathbb{Z}_2$-градуированным модулем $M$. Полученную конформную (супер)алгебру Ли $(\mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}}\, M)^{(-)}$ будем обозначать $\mathrm{gc}_{\mathrm{fin}}\, M$. Ясно, что $M$ будет конформным модулем над $\mathrm{gc}_{\mathrm{fin}}\, M$.

Если $M$ есть свободный $H$-модуль ранга $n+m$, где $n = \mathrm{rank}\, M_0$, $m = \mathrm{rank}\, M_1$, тогда будем обозначать $\mathrm{gc}\, M$ как $\mathrm{gc}_{n|m}$. Фиксируя векторную структуру, как в примере (9), мы можем явно выписать правило умножения на $\mathrm{gc}_{n|m}$ в удобном виде:

$$[A(x)_{\ (\lambda)}\ B(x)] = A(x)B(x+\lambda) - (-1)^{|A||B|}B(x)A(x-\partial-\lambda), \tag{8}$$

где $A(x),\ B(x) \in M_{n|m}(\Bbbk[x])_0 \cup M_{n|m}(\Bbbk[x])_1$. На всю алгебру продолжим данную операцию по $3/2$-линейности.

Пусть $L$ есть конформная (супер)алгебра Ли. *Представление* $L$ на $\mathbb{Z}_2$-градуированном $H$-модуле $M = M_0 \oplus M_1$ – это билинейное отображение $\rho_\lambda(\cdot\ ,\ \cdot)\colon L\times M \to M[\lambda]$, согласованное с градуировкой, т. е. $\rho_\lambda(L_i, M_j) \subset M_{(i+j)(\mathrm{mod}\ 2)}[\lambda]$ и удовлетворяющее аксиомам:

(R1) $$\rho_\lambda(\partial a, m) = -\lambda\rho_\lambda(a, m),$$

(R2) $$\rho_\lambda(a, \partial m) = (\partial+\lambda)\rho_\lambda(a, m),$$

(RL) $$\rho_\lambda(a, \rho_\mu(b, m)) - (-1)^{|a||b|}\rho_\mu(b, \rho_\lambda(a, m)) = \rho_{\lambda+\mu}([a_{\ (\lambda)}\ b], m),$$

для всех $a, b \in L_0 \cup L_1$ и $m \in M$. Очевидно, данное определение эквивалентно наличию у $M = M_0 \oplus M_1$ структуры конформного модуля над $L$. Однако, во второй главе данной диссертации нам будет удобнее пользоваться формулировкой в терминах билинейного отображения.

Заметим, что более привычное “классическое” определение представления, как гомоморфизма конформных (супер)алгебр $\rho\colon L \to \operatorname{gc} M$, $\rho(a) = \alpha$, для всех $a \in L$, в общем случае некорректно, поскольку, как отмечалось выше, в случае бесконечнопорождённого $H$-модуля $M$ пространство $\operatorname{gc} M$ нельзя наделить структурой конформной (супер)алгебры. Однако, в случае конечнопорожденного $H$-модуля $M$ мы будем прибегать именно к данному обозначению ввиду удобства.

Очевидно, любая конформная (супер)алгебра Ли $L$ имеет представление на самой себе регулярным действием $\rho(a)_\lambda = [a\,{}_{(\lambda)}\,\cdot]$, для всех $a \in L$.

Скажем, что конформная (супер)алгебра Ли $L$ имеет на $L$-модуле $M$ *представление конечного типа*, если $M$ есть конечнопорождённый свободный $H$-модуль, иными словами, если существует гомоморфизм конформных (супер)алгебр Ли $\rho\colon L \to \operatorname{gc}_{n|m}$ для некоторых $m$, $n \in \mathbb{N}$.

Представление конечного типа конформной (супер)алгебры Ли $L$ называется *точным*, если гомоморфизм $\rho$ является инъективным. Заметим, для того, чтобы представление было точным, необходимо, чтобы $L$ была $H$-модулем без кручения. Иначе, легко видеть,

$$0 = \rho(f(\partial)a) = f(\partial)\rho(a),$$

где $a \in \operatorname{tor}_H L$, т. е. $\exists f(\partial) \in H$: $f(\partial)a = 0$. Поскольку $\operatorname{gc}_{n|m}$ есть свободный $H$-модуль, то $\rho(a) = 0$. В частности, любая квадратичная конформная (супер)алгебра Ли является свободным $H$-модулем, следовательно, не содержит кручения.

Вопрос существования у всякой конформной (супер)алгебры Ли конечного типа и без кручения точного представления конечного типа является конформным аналогом теоремы Адо. В случае конформных алгебр Ли, как показано в работе П. С. Колесникова [53], достаточным условием является отщепление разрешимого радикала. К сожалению, в отличие от классического случая, конформный аналог теоремы Леви в общей постановке неверен.

Заметим, что отщепление разрешимого радикала не коррелирует со специальностью ГД-(супер)алгебры, соответствующей квадратичной конформной (супер)алгебре Ли. В самом деле, квадратичная конформная (супер)алгебра Ли, соответствующая исключительной ГД-алгебре из примера (2), имеет отщепляющийся разрешимый радикал. В то же время, как показано в [13], конформная алгебра Вирасоро имеет нерасщепляемое расширение, соответствующее двумерной алгебре Новикова $V = \Bbbk v + \Bbbk u$ с таблицей умножения:

$$v \circ v = v + u, \quad v \circ u = 0, \quad u \circ v = u, \quad u \circ u = 0.$$

Наделив $V$ структурой абелевой алгебры Ли, получим специальную ГД-алгебру. При этом соответствующая квадратичная конформная алгебра Ли $L(V)$ имеет неотщепляющийся разрешимый радикал $H \otimes \Bbbk u$.

Далее рассмотрим в некотором роде обратную задачу. Пусть дана конформная (супер)алгебра Ли $L$. Назовём $\mathbb{Z}_2$-градуированную ассоциативную конформную алгебру $A$ *ассоциативной конформной обёртывающей* для $L$, если существует сохраняющий градуировку гомоморфизм $\tau\colon L \to A^{(-)}$ конформных (супер)алгебр Ли, такой что $A$ порождается (как ассоциативная конформная (супер)алгебра) образом $L$. Обозначим данную пару как $(A, \tau)$.

Родственность задач возникает из параллелей с классическими результатами: на ассоциативной обёртывающей конформной алгебре можно задать структуру конформного модуля или, что эквивалентно, представления. С некоторыми ограничениями обратное тоже верно: по представлению конечного типа конформной алгебры Ли можно сконструировать ассоциативную обёртывающую алгебру.

Продолжая параллели с классическим случаем, мы хотим определить универсальный объект в классе ассоциативных обёртывающих алгебр. Однако, попытка воспроизвести универсальное свойство без учёта конформной специфики приведёт к очень вырожденному определению. В самом деле, пусть $L$ будет конформной алгеброй Ли и $(\mathcal{U}(L), \tau_U)$ будет универсальной обёртывающей. Универсальное свойство гласит, что для любой ассоциативной обёртывающей конформной алгебры $(A, \tau)$ существует дополняющий гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{U}(L) \to A$, такой что $\tau = \varphi \circ \tau_U\colon L \to A^{(-)}$.

Рассмотрим абелеву конформную алгебру Ли $L = H \otimes \Bbbk v$ ранга 1. В качестве ассоциативной обёртывающей возьмём $\mathrm{As\,Com\,Conf}\,(v, N) = A$ относительно некоторой функции локальности $N(v, v) = N$, гомоморфизм $\tau$ определим очевидным образом. Тогда дополняющего гомоморфизма $\varphi$ не существует при $N > n$, где $n$ есть граница ассоциативной локальности в $\mathcal{U}(L)$. Приходим к противоречию.

В работе [66] М. Ройтман привёл определение с дополнительными ограничениями, которым мы и пользуемся в данной диссертации. Пусть даны конформная алгебра Ли $L$, порождённая как $H$-модуль собственным подмножеством $B$, и функция $N\colon B \times B \to \mathbb{Z}_+$. Ассоциативную обёртывающую конформную алгебру $(\mathcal{U}(L; N), \tau_U)$ назовём *универсальной относительно функции локальности* $N$, если выполнено следующее *универсальное свойство*: для любой ассоциативной конформной обёртывающей алгебры $(A, \tau)$, такой что $N(\tau(a), \tau(b)) \leq N(a, b)$ для всех $a$, $b \in B$, существует дополняющий гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{U}(L) \to A$, такой что $\tau = \varphi \circ \tau_U\colon L \to A^{(-)}$.

В той же работе конструктивно доказывается существование $(\mathcal{U}(L, N), \tau_U)$ для любой конформной алгебры Ли $L$ и функции локальности $N$. Мы приведём данную конструкцию в конце §1.6 главы 1 данной диссертации. К сожалению, $\tau_U$ не обязан быть инъективным. Более того, существует конформная алгебра Ли $L$, такая что $\tau$ не является инъективным ни для какой пары $(A, \tau)$, т. е. $L$ невозможно вложить в ассоциативную конформную алгебру. Пример такой алгебры приведён в §3.2 работы М. Ройтмана [66].

Конструкция (универсальной) обёртывающей ассоциативной конформной (супер)алгебры является богатым источником примеров конформных (супер)алгебр Пуассона. В самом деле, зафиксируем конформную (супер)алгебру Ли $L$ и некоторую обёртывающую ассоциативную конформную (супер)алгебру $(A, \tau)$ с функцией локальности $N$. Тогда $A$ обладает естественной фильтрацией

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

как $H$-модуль. В самом деле, $A$ есть гомоморфный образ свободной ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{As\,Conf}(B, N)$ для подходящих порождающего множества $B$ и функции локальности $N$. Линейный базис данного пространства, как показано в работе М. Ройтмана [65], можно выбрать в виде

$$\partial^s(a_1\,{}_{(n_1)}\,(a_2\,{}_{(n_2)}\,\dots\,{}_{(n_{k-1})}\,(a_k\,{}_{(n_k)}\,a_{k+1})\dots)),$$

для всех $k,\ s \in \mathbb{Z}_+,\ a_i \in B,\ 0 \le n_i < N(a_i, a_{i+1})$. Пространство $\mathrm{As\,Conf}(B, N)$ допускает естественную фильтрацию степенями: $(\mathrm{As\,Conf}(B, N))_n$ состоит из линейных комбинаций базисных слов, для которых $k + 1 \le n$. Тогда ассоциативная конформная алгебра $A$ наследует данную фильтрацию, и $A_n$ есть гомоморфные образы компонент фильтрации на $\mathrm{As\,Conf}(B, N)$. Как показано в §6 работы [55], конформные умножения согласуются с фильтрацией, т. е.

$$(A_i\,{}_{(\lambda)}\,A_j) \subseteq A_{(i+j)}[\lambda], \quad [A_i\,{}_{(\lambda)}\,A_j] \subseteq A_{(i+j-1)}[\lambda],$$

и, следовательно, ассоциированный градуированный $H$-модуль $\mathrm{gr}\,A = \oplus_{i\in\mathbb{N}} A_i / A_{i-1}$ обладает корректно-определённой структурой (супер)алгебры Пуассона.

**Пример 10.** Рассмотрим ассоциативную конформную (супер)алгебру $\mathrm{Cend}_{n|m,Q}$ из примера 9 для $n = 1$, $m = 0$, $Q = x$. Таким образом мы получаем ассоциативную конформную *алгебру Вейля* $\mathrm{Cend}_{1,x} = H\{\underbrace{x\,{}_{(0)}\,(x\,{}_{(0)}\,(\dots(x\,{}_{(0)}}_{i}\,x)\dots) = x^{i+1},\ i \in \mathbb{Z}_+ |\ (x\,{}_{(1)}\,x) = x,\ (x\,{}_{(n)}\,x) = 0,\ n \ge 2\}$. Алгебра Вейля является универсальной обёртывающей ассоциативной алгеброй с ограничением на локальность $N = 2$ для алгебры Вирасоро Vir, см. §4.2 работы [18]. Очевидно, мы получаем компоненты фильтрации $A_n = H\{x^i \mid 1 \le i \le n\}$, а соответствующая конформная алгебра Пуассона $\mathrm{gr}\,\mathrm{Cend}_{1,x} \cong H \otimes x\Bbbk[x]$ имеет следующее правило умножения:

$$(x^i\,{}_{(\lambda)}\,x^j) = x^{i+j}, \quad [x^i\,{}_{(\lambda)}\,x^j] = (i\partial + (i+j)\lambda)x^{i+j-1},$$

для всех $i$, $j \in \mathbb{N}$.

В заключение параграфа отметим ещё один момент. В теории классических алгебр Ли хорошо известна теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта, утверждающая, что ассоциированная градуированная алгебра $\operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ (относительно естественной фильтрации) универсальной обёртывающей ассоциативной алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{L}$ изоморфна симметрической алгебре $S(\mathfrak{L})$. Более известно её следствие, описывающее базис $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$.

Исследуем конформный аналог данного утверждения. Зафиксируем конформную алгебру Ли $L$, порождённую как левый $H$-модуль множеством $B \subset L$. Тогда для $L$ существует универсальная ассоциативная обёртывающая алгебра $(\mathcal{U}(L, N), \tau_U)$ относительно функции локальности $N$. В качестве симметрической алгебры выступает свободная ассоциативная коммутативная конформная алгебра $\operatorname{As}\operatorname{Com}\operatorname{Conf}(B, N)$, которая в явном виде построена в работе М. Ройтмана [66]. На практике оказывается, что конформный аналог ПБВ-теоремы в общем случае неверен даже в случае конформных алгебр Ли конечного типа без кручения. Пример такой конформной алгебры можно найти в §4.2 работы [51].

Скажем, что конформная алгебра Ли $L$, порождённая как левый $H$-модуль множеством $B \subset L$, обладает *ПБВ-свойством* относительно $B$, если для функции локальности $N\colon B \times B \to \mathbb{Z}_+$ ассоциированная градуированная алгебра $\operatorname{gr}\mathcal{U}(L, N)$ изоморфна свободной ассоциативной коммутативной конформной алгебре $\operatorname{As}\operatorname{Com}\operatorname{Conf}(B, N)$, порождённой множеством $B$ относительно функции локальности $N$.

За примером таких алгебр обратимся к теореме, классифицирующей простые и полупростые конформные алгебры Ли конечного типа, которая приведена в конце §1.2. Как легко вывести из теоремы 6 в работе [66], для любой такой конформной алгебры Ли можно выбрать $H$-базис, относительно которого она будет обладать ПБВ-свойством:

**Теорема.** *Пусть $L$ есть конформная алгебра Ли с $H$-базисом $B$ одного из следующих видов:*

(i) *$L = Vir$, $B = \{v\}$;*

(ii) *$L = \operatorname{Cur}\mathfrak{L}$, $B = \{a_i\}_{i\in I}$, где $\mathfrak{L}$ есть алгебра Ли с базисом $\{a_i\}_{i\in I}$ над $\Bbbk$;*

(iii) *$L = \operatorname{Vir} \ltimes \operatorname{Cur}\mathfrak{L}$, $B = \{v\} \cup \{a_i\}_{i\in I}$.*

*Тогда $L$ обладает ПБВ-свойством относительно $B$ для границы ассоциативной локальности $N \geq 2$ в случаях (i) и (iii), и для $N \geq 1$ в случае (ii).*

## § 1.4. Когомологии

В данном параграфе мы приведём основные понятия когомологической теории ассоциативных конформных алгебр. Изложение основывается на работе Б. Бакалова, В. Г. Каца, А. Воронова [13], несколько несущественных отличий внесены под влиянием работы И. А. Долгунцевой [6]. Когомологии конформных алгебр Ли не встречаются явно при решении задач данной диссертации, поэтому мы не будем акцентировать на них внимание. Однако, стоит отметить один примечательный факт. Как показано, например, в главе 13 книги А. Картана и С. Эйленберга [29], для алгебры Ли $\mathfrak{L}$, действующей на модуле $\mathfrak{M}$, группы когомологий $\mathrm{H}^n(\mathfrak{L},\mathfrak{M})$ совпадают с соответствующими группами когомологий Хохшильда $\mathrm{H}^n(\mathcal{U}(\mathfrak{L}),\mathfrak{M})$ универсальной ассоциативной обёртывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$ с коэффициентами в том же модуле $\mathfrak{M}$ с индуцированной структурой $\mathcal{U}(\mathfrak{L})$-модуля. Для конформных алгебр данное соответствие нарушается, что следует из теоремы 5 данной диссертации и вычислений, проделанных в работе [10] трёх авторов.

Зафиксируем ассоциативную конформную алгебру $A$, конформный бимодуль $M_A$ над $A$, и определим комплекс Хохшильда $\mathrm{C}^*(A, M_A)$.

Назовём *$n$-коцепью с коэффициентами в $M_A$* линейное отображение $\varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}\colon A^{\otimes n} \to M_A[\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}]$, удовлетворяющее аксиомам:

(Ch1) $\varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(a_1,\ldots,\partial a_i,\ldots,a_n) = -\lambda_i\varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n}-1}(a_1,\ldots,a_n), \quad i = 1,\ldots,n-1,$

(Ch2) $\varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(a_1,\ldots,\partial a_n) = (\partial+\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(a_1,\ldots,a_n),$

для всех $a_1,\ldots,a_n \in A$, $i = \overline{1,n-1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим пространство всех $n$-коцепей ассоциативной конформной алгебры $A$ с коэффициентами в конформном бимодуле $M_A$ через $\mathrm{C}^n(A, M_A)$.

В рамках данного определения теряется смысл 0-коцепей. Пока лишь формально укажем, что, $\varphi \in \mathrm{C}^0(A, M_A)$ есть отображение $\Bbbk \to M_A/\partial M_A$. Данное соответствие будет установлено явно в параграфе, посвящённом переформулировке теории конформных алгебр на языке псевдотензорной категории $\mathcal{M}^*(H)$.

*Дифференциалом* назовём отображение $\delta_n\colon \mathrm{C}^n(A, M_A) \to \mathrm{C}^{n+1}(A, M_A)$, заданное правилом

$$
\begin{aligned}
(\delta_n\varphi)_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(a_1,\ldots,a_{n+1}) &= a_1\,{}_{(\lambda)}\,\varphi_{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(a_2,\ldots,a_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_i+\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_n}(a_1,\ldots,a_i\,{}_{(\lambda_i)}\,a_{i+1},\ldots,a_{n+1}) \\
&\quad + (-1)^{n+1}\varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}}(a_1,\ldots,a_n)\,{}_{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}\,a_{n+1},
\end{aligned}
$$

для всех $a_1,\ldots,a_{n+1} \in A$, $\varphi \in \mathrm{C}^n(A, M_A)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Непосредственной проверкой устанавливается, что дифференциал обладает свойством $\delta_n\delta_{n+1} = 0$ для всех $n$.

Назовём *$n$-коциклом* такую $n$-коцепь $\varphi \in \mathrm{C}^n(A, M_A)$, что $\delta_n\varphi = 0$. Назовём $n$-коцепь

$\varphi \in \mathrm{C}^n(A, M_A)$ *$n$-кограницей*, если существует $(n-1)$-коцепь $\psi \in \mathrm{C}^{n-1}(A, M_A)$, такая что $\varphi = \delta_{n-1}\psi$.

Обозначим пространство всех $n$-коциклов и $n$-кограниц ассоциативной конформной алгебры $A$ с коэффициентами в конформном бимодуле $M_A$ через $\mathrm{Z}^n(A, M_A)$ и $\mathrm{B}^n(A, M_A)$, соответственно. Основное свойство дифференциала гарантирует вложение векторных пространств $\mathrm{Z}^n(A, M_A) \supseteq \mathrm{B}^n(A, M_A)$. Следовательно, можно рассмотреть фактор-пространство $\mathrm{H}^n(A, M_A) = \mathrm{Z}^n(A, M_A)/\mathrm{B}^n(A, M_A)$, которое называется *$n$-й группой когомологий Хохшильда* конформной алгебры $A$ со значениями в бимодуле $M_A$.

В частности, в рамках данной диссертации мы будем особенно заинтересованы во второй группе когомологий Хохшильда. Остановимся на них подробней. Пространство 1-коцепей $\mathrm{C}^1(A, M_A)$ состоит из всех $H$-линейных отображений $\psi\colon A \to M_A$. Пространство 2-коциклов $\mathrm{Z}^2(A, M_A) = \operatorname{Ker}\delta_2 \subset \mathrm{C}^2(A, M_A)$ состоит из всех 3/2-линейных отображений $\varphi_\lambda\colon A \otimes A \to M_A$, таких что

$$a_{\ (\lambda)}\ \varphi_\mu(b, c) - \varphi_{\lambda+\mu}(a_{\ (\lambda)}\ b, c) + \varphi_\lambda(a, b_{\ (\mu)}\ c) - \varphi_\lambda(a, b)_{\ (\lambda+\mu)}\ c = 0, \tag{9}$$

для всех $a$, $b$, $c \in A$. Пространство 2-кограниц $\mathrm{B}^2(A, M_A) = \operatorname{Im}\delta_1 \subset \mathrm{C}^2(A, M_A)$ состоит из всех 2-коциклов, таких что существует 1-коцепь $\psi$, связанная с ним соотношением:

$$\varphi_\lambda(a, b) = a_{\ (\lambda)}\ \psi(b) - \psi(a_{\ (\lambda)}\ b) + \psi(a)_{\ (\lambda)}\ b, \tag{10}$$

для всех $a$, $b \in A$.

Заметим, что определение комплекса $\mathrm{C}^*(A, M_A)$, приведённое выше, отличается от изначального, данного в работе [13], где в качества $n$-коцепи $\gamma \in \mathrm{C}^n(A, M_A)$ выступает смежный класс 3/2-линейных отображений $\gamma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\colon A^{\otimes n} \to M_A[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ по модулю соотношения $\partial + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$. Эти определения эквивалентны, соответствие задаётся правилом:

$$\gamma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \longleftrightarrow \varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}} = \gamma_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},-\partial-\lambda_1-\ldots-\lambda_{n-1}}.$$

Когомологии Хохшильда возникают во многих приложениях. В частности, вторая группа когомологий Хохшильда играет ключевую роль при исследовании расширений ассоциативных конформных алгебр. Напомним, что *расширением* ассоциативной конформной алгебры $A$ называется пара $(E, \sigma)$, где $E$ есть ассоциативная конформная алгебра, а $\sigma\colon E \to A$ есть сюръективный гомоморфизм ассоциативных конформных алгебр. Ассоциативная конформная алгебра $A$ называется *отщепляемой* в расширении $(E, \sigma)$, если $E = \hat{A} \ltimes \operatorname{Ker}\sigma$, где $E \supseteq \hat{A}$ – подалгебра, изоморфная $A$. Расширение $(E, \sigma)$ называется *сингулярным*, если $(\operatorname{Ker}\sigma_{\ (\lambda)}\ \operatorname{Ker}\sigma) = 0$. Будем говорить, что два расширения $(E, \sigma)$ и $(E', \sigma')$ *эквивалент-*

*ны*, если существует изоморфизм ассоциативных конформных алгебр $\xi\colon E \to E'$, такой что $\sigma' \circ \xi = \sigma$.

Очевидно, ядро расширения есть подмодуль и, более того, идеал ассоциативной конформной алгебры $E \rhd \operatorname{Ker}\sigma$. Следовательно, имеет смысл рассмотреть понятие расширения с другой стороны и дать эквивалентный, более удобный, набор определений. Назовём *расширением* ассоциативной конформной алгебры $A$ с помощью конформного $A$-бимодуля $M_A$ такую ассоциативную конформную алгебру $E$, что она удовлетворяет короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow M_A \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

то есть $M_A \lhd E$, и существует естественный гомоморфизм $\pi$, такой что $A \cong \pi(E) \cong {}^{E}\!/_{M_A}$. Ассоциативная конформная алгебра $A$ называется *отщепляемой* в расширении $E$, если существует гомоморфизм $\rho\colon A \to E$, т. ч. $\pi \circ \rho = 1_A$, то есть $\rho$ является правым обратным к $\pi$. Расширение $E$ называется *сингулярным*, если $(M_A \,{}_{(\lambda)}\, M_A) = 0$. Будем говорить, что два расширения $E$ и $E'$ *эквивалентны*, если существует изоморфизм ассоциативных конформных алгебр $\xi\colon E \to E'$, такой что следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M_A}"] & E \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_A \arrow[r] & E' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Основной результат, который нам понадобится из данного параграфа, формулируется в следующей теореме.

**Теорема.** [6], [13] *Пусть $A$ есть ассоциативная конформная алгебра, $M_A$ — некоторый $A$-бимодуль. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных сингулярных расширений алгебры $A$ с ядром, изоморфным $M_A$, и элементами второй группы когомологий Хохшильда $\mathrm{H}^2(A, M_A)$.*

Рассмотрим 2-коцикл $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M_A)$. Он соответствует ассоциативной конформной алгебре $E = A \oplus M_A$ с определённым на ней новым 3/2-линейным отображением $(\cdot \,{}_{(\hat\lambda)}\, \cdot)\colon E \times E \to E[\lambda]$, заданным по правилу

$$(m \,{}_{(\hat\lambda)}\, m') = 0, \quad (a \,{}_{(\hat\lambda)}\, m) = (a \,{}_{(\lambda)}\, m), \quad (m \,{}_{(\hat\lambda)}\, a) = (m \,{}_{(\lambda)}\, a), \quad (a \,{}_{(\hat\lambda)}\, b) = (a \,{}_{(\lambda)}\, b) + \varphi_\lambda(a, b),$$

для всех $m,\ m' \in M_A,\ a,\ b \in A$. Если существует другой 2-коцикл $\varphi' \in \mathrm{Z}^2(A, M_A)$, такой что $\varphi - \varphi' = \delta_1\psi \in \mathrm{H}^2(A, M_A)$ для некоторой 1-коцепи $\psi \in C^1(A, M_A)$, то изоморфизм соответствующих расширений задаётся по формуле $\xi(a + m) = a + m + \psi(a)$.

Сформулируем естественные следствия из представленной теоремы.

**Теорема.** *Ассоциативная конформная алгебра $A$ отщепляема в сингулярном расширении $E$ с помощью конформного $A$-бимодуля $M_A$ тогда и только тогда, когда соответствующий коцикл $\varphi$ тривиален в* $\mathrm{H}^2(A, M_A)$.

**Следствие 1.** [6] *Пусть $A$ есть ассоциативная конформная алгебра, такая что* $\mathrm{H}^2(A, M_A) = 0$ *для любого конформного $A$-бимодуля $M_A$. Тогда $A$ отщепляется в любом расширении $E$ с нильпотентным ядром.*

## § 1.5. Псевдотензорный язык

В данном параграфе мы рассмотрим альтернативный подход к теории конформных алгебр, а также приведём всю необходимую иерархию конструкций и определений в рамках данного подхода. Изложение преимущественно основано на роботе Б. Бакалова, А. Де Андреа и В. Г. Каца [12]. Часть, посвящённая когомологической теории ассоциативных конформных алгебр опирается на работу И. А. Долгунцевой [6]. Рассмотрим $H = \Bbbk[\partial]$ как алгебру Хопфа с коумножением $\Delta$: $H \to H \otimes H$, коединицей $\varepsilon$: $H \to \Bbbk$ и антиподом $S$: $H \to H$, заданными на порождающем элементе, соответственно, как $\Delta(\partial) = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$, $\varepsilon(\partial) = 0$ и $S(\partial) = -\partial$. Поскольку $\Delta$ и $\varepsilon$ – гомоморфизмы алгебр, а $S$ – антигомоморфизм $H$, операции легко продолжаются на всё пространство $H$. Полагая $\Delta_0 = \mathrm{id}_H$, $\Delta_1 = \Delta$, индуктивно определим $\Delta_n = (\Delta \otimes \mathrm{id}_H^{\otimes(n-1)}) \circ \Delta_{n-1}$: $H \to H^{\otimes(n+1)}$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что данное определение работает корректно при $n = 1$, поскольку $\mathrm{id}_H^{\otimes 0} = 1 \in \Bbbk$ и $H \otimes \Bbbk \cong H$. Пусть $\sigma$: $H \otimes H \to H \otimes H$ есть отображение, переставляющее местами тензорные сомножители. Алгебра Хопфа называется кокоммутативной, если $\sigma \circ \Delta = \Delta$.

Рассмотрим обычную алгебру $\mathfrak{C}$ некоторого класса. Для неё все базовые определения могут быть выражены в терминах линейных пространств, полилинейных отображений, и их композиций через постулирование аксиом непосредственно или на языке коммутативных диаграмм. Заменим базовое поле на произвольную кокоммутативную алгебру Хопфа $H$, векторные пространства на класс $\mathcal{M}(H)$ левых $H$-модулей, а полилинейные отображения на $H^{\otimes n}$-линейные отображения

$$\theta : M_1 \otimes \ldots \otimes M_n \to H^{\otimes n} \otimes_H M,$$

где $M_1, \ldots, M_n$, $M \in \mathcal{M}(H)$, и правое действие $H$ на $H^{\otimes n}$ определено по правилу

$$(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n)h = (h_1 \otimes \ldots \otimes h_n)\Delta_{n-1}(h). \tag{11}$$

Композиция нескольких таких $H^{\otimes n}$-линейных отображений есть естественное продолжение до $H^{\otimes(m_1+\ldots+m_n)}$-линейного отображения

$$\theta : (H^{\otimes k_1} \otimes_H M_1) \otimes \ldots \otimes (H^{\otimes k_n} \otimes_H M_n) \to H^{\otimes(k_1+\ldots+k_n)} \otimes_H M,$$

где $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, заданного по следующему правилу:

$$\theta(1^{\otimes k_1} \otimes_H m_1, \ldots, 1^{\otimes k_n} \otimes_H m_n) = ((\Delta_{k_1} \otimes \ldots \otimes \Delta_{k_n}) \otimes_H \mathrm{id}_V)\theta(m_1, \ldots, m_n),$$

для всех $m_i \in M_i$, $i = \overline{1, n}$, далее по $H$-линейности.

Таким образом, мы пришли к понятию псевдотензорной категории $\mathcal{M}^*(H)$, над которой в терминах $H^{\otimes n}$-линейных отображений можно определять объекты. Назовём *псевдоалгеброй* левый $H$-модуль $C$, снабжённый $H^{\otimes 2}$-линейным отображением $(\cdot * \cdot)$: $C \otimes C \to H^{\otimes 2} \otimes_H C$. Такое $H^{\otimes 2}$-линейное отображение назовём *псевдопроизведением.* В частности, если рассмотреть в качестве алгебры Хопфа привычную нам алгебру полиномом $H = \Bbbk[\partial]$, то получится конформная алгебра $C$. Связь между $\lambda$-произведением и псевдопроизведением задана по следующей формуле:

$$a * b = (a \ _{(\lambda)}\ b)|_{\lambda=-\partial\otimes 1}, \tag{12}$$

для всех $a$, $b \in C$.

Классы конформных алгебр, которые встречаются в данной диссертации и удовлетворяют дополнительным тождествам, также можно описать на языке псевдопроизведений. Так, аксиома (A) *ассоциативности* перепишется в привычном виде:

$$a * (b * c) = (a * b) * c,$$

для всех $a$, $b$, $c \in C$. Здесь обе части равенства принадлежат пространству $H^{\otimes 3} \otimes_H C$ и получаются из тензора $a \otimes b \otimes c \in C^{\otimes 3}$ в результате применения, соответственно, операторов $*\circ(id_C \otimes *)$ и $*\circ(* \otimes id_C)$. Аналогично, аксиомы *коммутативности* (C), *кососимметричности* (L1), и *тождество Якоби* (L2) перепишутся, соответственно, как

(C) $\qquad a * b = (\sigma_{12} \otimes_H \mathrm{id}_C)(b * a),$

(L1) $\qquad [a * b] = -(\sigma_{12} \otimes_H \mathrm{id}_C)[b * a],$

(L2) $\qquad [a * [b * c]] - ((\sigma_{12} \otimes \mathrm{id}_H) \otimes_H \mathrm{id}_C)[b * [a * c]] = [[a * b] * c],$

для всех $a, b, c \in C$. Здесь $\sigma_{12}$: $H^{\otimes 2} \to H^{\otimes 2}$ – обычная транспозиция тензорных сомножителей.

**Пример 11.** Естественно первым примером взять адаптированную конструкцию алгебры петель. Пусть $(\mathfrak{C}, f)$ будет алгеброй одного из рассматриваемых многообразий. Тогда пространство $\mathrm{Cur}\,\mathfrak{C} = H \otimes \mathfrak{C}$, снабжённое псевдопроизведением

$$(h \otimes a) * (g \otimes b) = (h \otimes g) \otimes_H (1 \otimes f(a, b)),$$

для всех $h$, $g \in H$, $a$, $b \in \mathfrak{C}$, будет псевдоалгеброй. Кроме того, она удовлетворяет псевдотензорным аналогам тождеств, определяющих исходную алгебру $\mathfrak{C}$.

Далее, сработает и конструкция построения конформной алгебры Ли Каца — Муди $K(\mathfrak{L}) = (h \otimes \mathfrak{L}) \oplus \Bbbk e$: одномерного центрального расширения псевдоалгебры петель от некоторой алгебры Ли $\mathfrak{L}$, снабжённой билинейной симметрической инвариантной формой $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Формула (12) задаст псевдопроизведение:

$$a * b = (1 \otimes 1) \otimes_H (1 \otimes [a,\ b]) - (\partial \otimes 1) \otimes_H \langle a|b \rangle e.$$

Пусть $C \in \mathcal{M}^*(H)$ есть конформная алгебра, рассматриваемая как псевдоалгебра. *Левый конформный модуль* $M$ *над* $C$ — это левый $H$-модуль, снабжённый $H^{\otimes 2}$-линейной операцией $(\cdot *_M \cdot)\colon C \otimes M \to H^{\otimes 2} \otimes_H M$. Случаи правого конформного модуля и бимодуля аналогичны.

Аксиомы конформных модулей также естественным образом могут быть переписаны в терминах псевдопроизведения. Например, для конформного модуля $M_A$ над ассоциативной псевдоалгеброй $A$ получим:

$$\text{(MAL)} \qquad m *_M (b * c) = (m *_M b) * c,$$

$$\text{(MAR)} \qquad a * (b *_M m) = (a * b) *_M m,$$

$$\text{(MA)} \qquad a *_M (m *_M c) = (a *_M m) *_M c,$$

для всех $a$, $b$, $c \in A$, $m \in M_A$. Для конформного модуля $M_L$ над псевдоалгеброй Ли $L$ получим:

$$\text{(ML)} \qquad a *_M (b *_M m) - ((\sigma_{12} \otimes \mathrm{id}_H) \otimes_H \mathrm{id}_C)(b *_M (a *_M m)) = [a * b] *_M m,$$

для всех $a$, $b \in L$, $m \in M_L$.

Понятие представления псевдоалгебры переписывается естественным образом. Больше деталей и примеров можно найти в работе Б. Бакалова, А. Де Андреа и В. Г. Каца [12]. Мы же дальше сконцентрируем наше внимание на приложении псевдотензорного языка к наиболее актуальной для этого части данной диссертации: построим комплекс Хохшильда $\mathrm{C}^*(A, M_A)$ для ассоциативной конформной алгебры $A$ и конформного $A$-бимодуля $M_A$, рассмотренных как соответствующие структуры псевдотензорной категории $\mathcal{M}^*(H)$.

Зафиксируем ассоциативную конформную алгебру $A$ и конформный $A$-бимодуль $M_A$. Назовём *$n$-коцепью с коэффициентами в* $M_A$ $H^{\otimes n}$-линейное отображение $\varphi\colon A^{\otimes n} \to H^{\otimes n} \otimes_H$

$M_A$. Заметим, что пространство $n$-коцепей $\mathrm{C}^n(A, M_A)$ является также и левым $H$-модулем, где действие определено по правилу

$$(h\varphi)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = (\Delta_{n-1}(h) \otimes_H 1)\varphi(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n),$$

для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$, $h \in H$, $\varphi \in \mathrm{C}^n(A, M_A)$.

Напомним, что мы считаем по определению $A^{\otimes 0} = \Bbbk = H^{\otimes 0}$. Тогда 0-коцепь $\varphi \in \mathrm{C}^0(A, M_A)$ — это отображение

$$\varphi : \Bbbk \to \Bbbk \otimes_H M_A \cong {M_A}/{\partial M_A},$$

поскольку структура правого $H$-модуля на $M_A$ задаётся правилом $\alpha \cdot h = \alpha\varepsilon(h)$ для $\alpha \in \Bbbk$. Далее, 1-коцепь $\varphi \in \mathrm{C}^1(A, M_A)$ — это элемент пространства $\mathrm{Chom}(A, M_A)$ гомоморфизмов левых $H$-модулей

$$\varphi : A \to H \otimes_H M_A \cong M_A.$$

Заметим также, что формула (11) позволяет для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$ представить любую $n$-коцепь $\varphi \in \mathrm{C}^n(A, M_A)$ в следующем виде:

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{s_1, \ldots, s_{n-1} \in \mathbb{Z}_+} \left( \frac{\partial^{s_1}}{s_1!} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial^{s_{n-1}}}{s_{n-1}!} \otimes 1 \right) \otimes_H u_{s_1, \ldots, s_{n-1}},$$

где все $u_{s_1, \ldots, s_{n-1}} \in M_A$ определены однозначно.

Используя представление, данное выше, заметим, что соответствие между определением на $\lambda$-языке, данном в §1.4, и языке псевдоалгебр задаётся по следующей формуле, которая является обобщением равенства (12):

$$\varphi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}} = \varphi|_{\lambda_1 = -\partial_{\otimes 1}, \ldots, \lambda_{n-1} = -\partial_{\otimes_{n-1}}},$$

где $\partial_{\otimes i} = 1 \otimes \ldots \otimes \partial \otimes \ldots \otimes 1$, $i = \overline{1, n-1}$. В явном виде формула для $\varphi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}}$ может быть записана как

$$\varphi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{s_1, \ldots, s_{n-1} \in \mathbb{Z}_+} (-1)^{s_1 + \ldots + s_{n-1}} \left( \frac{\lambda_1^{s_1}}{s_1!} \ldots \frac{\lambda_{n-1}^{s_{n-1}}}{s_{n-1}!} \right) \otimes u_{s_1, \ldots, s_{n-1}},$$

для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\varphi \in \mathrm{C}^n(A, M_A)$.

*Дифференциалом* назовём отображение $\delta_n \colon \mathrm{C}^n(A, M_A) \to \mathrm{C}^{n+1}(A, M_A)$, заданное правилом

$$(\delta_n\varphi)(a_1, \ldots, a_{n+1}) = a_1 * \varphi(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi(a_1, \ldots, a_i * a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1}\varphi(a_1, \ldots, a_n) * a_{n+1},$$

для всех $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$, $\varphi \in \mathrm{C}^n(A, M_A)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Заметим, что под действием замены $\lambda_1 = -\partial_{\otimes 1}, \ldots, \lambda_{n-1} = -\partial_{\otimes_{n-1}}$ данное определение дифференциала совпадёт с данным в §1.4. Таким образом, все дальнейшие определения, такие как $n$-коцикл, $n$-кограница, $n$-я группа когомологий Хохшильда, а также структурные результаты с ней связанные, не отличаются от уже изложенных.

## § 1.6. Базисы Грёбнера — Ширшова

Изначально метод базисов Грёбнера — Ширшова для конформных алгебр был представлен в работе трёх авторов [17], а потом существенно разработан ими же в работе [18]. Там же сформулирована и доказана конформная лемма о композиции, тем самым подтверждена корректность метода. Однако, хотя с помощью данного подхода и были получены некоторые замечательные результаты, на практике он оказался сопряжён со слишком большими вычислительными трудностями, чтобы стать общепринятым. К существенной оптимизации пришёл П. С. Колесников в работе [54]. В данном параграфе мы изложим основы нового подхода, который видится весьма перспективным в приложениях к задачам о конформных и вертексных алгебрах.

Вкратце напомним основные определения и метод вычисления БГШ для ассоциативных алгебр. Изложение основано на работе Л. А. Бокутя [3], но несколько видоизменено в духе оригинальной работы М. Ньюмана [60]. Зафиксируем некоторый алфавит $B$, обозначим через $B^*$ множество всех слов в данном алфавите, включая пустое слово. Кроме того, обозначим через $\Bbbk\langle B\rangle$ свободную ассоциативную алгебру с единицей над полем $\Bbbk$. Назовём *переписывающим правилом* упорядоченную пару $(u, f)$, для некоторых $u \in B^*$, $f \in \Bbbk\langle B\rangle$. Пусть $\Sigma$ обозначает некоторое семейство таких переписывающих правил. Мы чаще будем обозначать правило $(u, f)$ как $u \to f$.

Заметим, что $\Sigma$ однозначно задаёт ориентированный граф $\mathcal{G}(B, \Sigma)$, в котором вершины есть элементы $\Bbbk\langle B\rangle$, а ориентированное ребро $g \to h$ из вершины $g$ в вершину $h$ есть только в том случае, если существуют переписывающее правило $u \to f \in \Sigma$ и ненулевой моном $cw$ в $g$, $c \in \Bbbk$, такие что
$$w = v_1 u v_2, \quad h = g - c v_1 (u - f) v_2,$$
для некоторых $v_1, v_2 \in B^*$. Иными словами, мы получаем $h$ из $g$, заменяя вхождение подслова $u$ в моном $cw$ на полином $f$.

Граф $\mathcal{G}(B, \Sigma)$ естественным образом распадается на компоненты связности (в неориентированном смысле), соответствующие классам эквивалентности в фактор-алгебре $\Bbbk\langle B \mid \Sigma\rangle = \Bbbk\langle B\rangle/\mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I} = (\Sigma)$ есть идеал, порождённый всеми полиномами вида $u - f$, где $u \to f \in \Sigma$.

Назовём *переписывающей системой* такой ориентированный граф $\mathcal{G}$, что в нём нет бесконечных ориентированных путей, включая ориентированные циклы. В переписывающей системе каждой вершине $g$ соответствует непустое множество $T(g)$ терминальных вершин, т. е. таких вершин, что существует ориентированный путь $g \to \ldots \to t$, но нет ребер $t \to h$ ни для какой вершины $h \in \mathcal{G}$.

Для того, чтобы граф $\mathcal{G}(B, \Sigma)$ был переписывающей системой, наиболее естественным будет задать на нём хороший порядок, гарантирующий обрыв любой цепочки переписываний. Зафиксируем на множестве слов $B^*$ мономиальный порядок $\preceq$, именно, если $u \preceq v$, то $wu \preceq wv$, $uw \preceq vw$ для всех $u$, $v$, $w \in B^*$. Выбранный порядок будет “хорошим”, если $\overline{f} \prec u$ для всех $u \to f$, где $\overline{f}$ есть старший моном в $f$ относительно порядка $\preceq$.

Назовём переписывающую систему $\mathcal{G}$ *конфлюэнтной*, если для любой вершины $g \in \mathcal{G}$ множество $T(g)$ состоит из единственной вершины $t$. Семейство переписывающих правил $\Sigma$ в свободной ассоциативной алгебре $\Bbbk\langle B\rangle$ называется *стандартным базисом* (или *базисом Грёбнера — Ширшова*), если граф $\mathcal{G}(B, \Sigma)$ является конфлюэнтной переписывающей системой.

Конфлюэнтность переписывающей системы $\mathcal{G}$ можно установить с помощью следующей леммы:

**Теорема** (Лемма о ромбе [60])**.** *Переписывающая система $\mathcal{G}$ является конфлюэнтной тогда и только тогда, когда для любой вершины $v$ и любых ребер $v \to v_1$, $v \to v_2$ найдутся вершина $w$ и ориентированные пути $v_1 \to \cdots \to w$, $v_2 \to \cdots \to w$.*

Проверка этого условия конфлюэнтности на переписывающих системах $\mathcal{G}(B, \Sigma)$ обычно производится при помощи техники *композиций*, предложенной в работе А. И. Ширшова [8].

Пусть даны $g_1$, $g_2 \in \Bbbk\langle B\rangle$ — унитальные полиномы, такие что $w = \overline{g_1} = v_1\overline{g_2}v_2$ для некоторых $v_1$, $v_2 \in B^*$. Тогда

$$g_1 - v_1 g_2 v_2 = (g_1, g_2)_w$$

назовём *композицией включения.* Если, в свою очередь, $w = v_1 u v_2 = \overline{g_1}v_2 = v_1\overline{g_2}$ для некоторых $v_1$, $v_2$, $u \in B^*$, то

$$\overline{g_1}v_2 - v_1\overline{g_2} = (g_1, g_2)_w$$

назовём *композицией пересечения.*

Пусть даны полином $f \in \Bbbk\langle B\rangle$, множество полиномов $\Sigma \subset \Bbbk\langle B\rangle$ и слово $w \in B^*$. Скажем, что $f$ *тривиален по модулю* $\Sigma$ и $w$, если $f$ представляется в форме

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} c_i v_i^1 s_i v_i^2,$$

где все $v_i^1$, $v_i^2 \in B^*$, $c_i \in \Bbbk$, $s_i \in \Sigma$ и $v_i^1\overline{s_i}v_i^2 \prec w$. Композиция элементов $g_1$ и $g_2$ называется *тривиальной*, если полином $(g_1, g_2)_w$ является тривиальным по модулю $\Sigma$ и $w$. Наконец, скажем, что слово $u \in B^*$ является *редуцированным* по модулю $\Sigma$, если $u \neq v_1\bar{s}v_2$ ни для каких $v_1$, $v_2 \in B^*$, $s \in \Sigma$.

Терминальные вершины переписывающей системы $\mathcal{G}(B, \Sigma)$ — это в точности линейные комбинации редуцированных по модулю $\Sigma$ слов. Композиции описывают те разветвления в переписывающей системе, построенной по семейству $\Sigma$, анализа которых достаточно для установления конфлюэнтности этой системы.

**Теорема.** ([3], [16]) *Семейство переписывающих правил $\Sigma$ в свободной ассоциативной алгебре $\Bbbk\langle B\rangle$ является базисом Грёбнера — Ширшова тогда и только тогда, когда каждая композиция $(g_1, g_2)_w$ любых элементов $g_1, g_2 \in \Sigma$ тривиальна.*

**Теорема.** ([3] Лемма о композиции) *Пусть даны свободная ассоциативная алгебра $\Bbbk\langle B\rangle$, порождённая множеством $B$, и семейство многочленов $\Sigma$ в $\Bbbk\langle B\rangle$, определяющая переписывающую систему относительно некоторого мономиального порядка $\preceq$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\Sigma$ есть базис Грёбнера — Ширшова;*

(ii) *Если $f \in (\Sigma)$, то $\overline{f} = v_1\bar{s}v_2$ для подходящих $v_1$, $v_2 \in B^*$, $s \in \Sigma$;*

(iii) *Множество редуцированных слов по модулю $\Sigma$ образуют линейный базис пространства $\Bbbk\langle B \mid \Sigma\rangle$.*

Если граф $\mathcal{G}(B\Sigma)$ является конфлюэнтной переписывающей системой, то задача о принадлежности двух вершин $g$, $h \in \Bbbk\langle B\rangle$ к одной компоненте связности, т. е. вопрос равенства в $\Bbbk\langle B \mid \Sigma\rangle$, сводится к проверке равенства терминальных вершин из $T(g)$ и $T(h)$. В самом деле, в конфлюэнтной переписывающей системе каждая компонента связности имеет единственную терминальную вершину, которая является линейной комбинацией редуцированных слов по модулю $\Sigma$. Такая терминальная вершина $t$ называется *нормальной формой* элемента в алгебре $\Bbbk\langle B \mid \Sigma\rangle$. Таким образом, для проверки равенства полиномов $g$, $h \in \Bbbk\langle B\rangle$ нам необходимо и достаточно вычислить и сравнить их нормальные формы.

Далее, пусть $\mathfrak{A}$ будет ассоциативной алгеброй с единицей, $\mathfrak{M}$ — бимодулем над $\mathfrak{A}$. Положим, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ порождёны подмножествами $B \subset \mathfrak{A}$ и $Y \subset \mathfrak{M}$ как алгебра и $\mathfrak{A}$-модуль, соответственно. Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма $\mathfrak{A} = {}^{\Bbbk\langle B\rangle}\!/_{\mathfrak{I}} = \Bbbk\langle B \mid \Sigma\rangle$, где $\mathfrak{I}$ есть идеал, порождённый соотношениями $\Sigma$. В то же время, $\mathfrak{M} = {}^{\mathfrak{A}\otimes\Bbbk Y\otimes\mathfrak{A}}\!/_{\mathfrak{I}'} = F(Y \mid \Theta)$, где $\mathfrak{I}'$ есть подмодуль, порождённый соотношениями $\Theta$. Элементы $\Theta$ можно рассматривать как некоммутативные полиномы от переменных из $B \cup Y$, линейные по $Y$.

Рассмотрим расщепляемое сингулярное расширение $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{M}$, т. е. такое, что для любых $a$, $a' \in \mathfrak{A}$, $m$, $m' \in \mathfrak{M}$ имеем $(a + m) \cdot (a' + m') = a \cdot a' + a \cdot m' + m \cdot a'$. Ясно, что данное пространство снова является ассоциативной алгеброй, которая будет фактором свободной ассоциативной алгебры $\Bbbk\langle B\cup Y\rangle$ по модулю идеала, порождённого соотношениями $\Sigma\cup\Theta$, а также соотношениями $S$, отражающими свойство сингулярности:

$$S=\{yb_1\dots b_nz \mid y,z\in Y,\, b_i\in B,\, n\in\mathbb{Z}_+\}.$$

Заметим, что если модуль односторонний, скажем, левый, то необходимо учесть, что $\mathfrak{M}\mathfrak{A}=0$, добавив в $S$ соотношения вида $yb$ для всех $y\in Y$, $b\in B$.

Положим, на $B\cup Y$ задан хороший порядок, так что мы можем задать переписывающую систему $\mathcal{G}(B\cup Y,\Sigma\cup\Theta\cup S)$. Как показано в работе двух авторов [47], на несколько отличающемся, но эквивалентном языке, для проверки конфлюэнтности системы достаточно рассмотреть композиции соотношений степени 0 или 1 по $Y$, т. е. в точности $\Sigma\cup\Theta$.

Пусть дана ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}=\Bbbk\langle B\mid\Sigma\rangle$ с БГШ $\Sigma$. Семейство переписывающих правил $\Theta$ в свободном модуле $\mathfrak{A}=F(Y)$, порождённом множеством $Y$, назовём *стандартным базисом* (или *базисом Грёбнера — Ширшова*), если граф $\mathcal{G}(B\cup Y,\Sigma\cup\Theta\cup S)$ является конфлюэнтной переписывающей системой, иными словами, если $\Sigma\cup\Theta\cup S$ является БГШ в ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{M}$.

В ранее упомянутой работе сформулирована и доказана лемма о композиции для ассоциативных модулей:

**Теорема.** ([47]) *Пусть даны ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}=\Bbbk\langle B\mid\Sigma\rangle$ с БГШ $\Sigma$, свободный $\mathfrak{A}$-бимодуль $F(Y)$, порождённый множеством $Y$, и семейство переписывающих правил $\Theta$ в $F(Y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\Theta$ есть базис Грёбнера — Ширшова в $F(Y)$;*

(2) *Если $f\in\mathfrak{A}\otimes\Bbbk\Theta\otimes\mathfrak{A}$, то либо $\overline{f}=v_1\bar{s}v_2y$ для подходящих $v_1$, $v_2\in B^*$, $s\in\Sigma$, $y\in Y$, либо $\overline{f}=v\overline{g}$ для подходящих $v\in B^*$, $g\in\Theta$;*

(3) *Множество редуцированных слов по модулю $\Sigma\cup\Theta$ образует линейный базис пространства $F(Y\mid\Theta)$.*

В рамках данной диссертации мы будем применять изложенную теорию к классу ассоциативных конформных алгебр, следовательно, нам необходимо научиться работать с ними в терминах левых модулей над ассоциативными алгебрами. Пусть $C$ есть конформная алгебра, тогда для любого $a\in C$ определим линейные операторы левого и правого конформного умножения:

$$L_n^a=(a\ {}_{(n)}\ \cdot),\quad R_n^a=\{\cdot\ {}_{(n)}\ a\}=\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}(-1)^{n+s}\frac{\partial^s}{s!}(\cdot\ {}_{(n+s)}\ a),$$

для всех $n\in\mathbb{Z}_+$.

Оператор правого умножения необходим для того, чтобы перевести идеалы конформной алгебры на язык левых модулей над ассоциативными алгебрами. Кроме того, нестандартный способ определения операторов $R_n^a$ выбран из соображений удобства. Во-первых, аксиома конформной ассоциативности (A$'$) влечёт перестановочность произвольных операторов левого и правого умножения. Во-вторых, на таком языке лаконично записывается умножение алгебры Ли $A^{(-)}$, построенной по произвольной ассоциативной конформной алгебре $A$. Напомним, что $n$-произведения на ней будет иметь вид

$$[a\ _{(n)}\ b] = (a\ _{(n)}\ b) - \{b\ _{(n)}\ a\} = (L_n^a - R_n^a)b,$$

для всех $a$, $b \in A$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $\operatorname{As}\operatorname{Conf}(B, N)$ есть свободная ассоциативная конформная алгебра, порождённая множеством $B$ относительно функции локальности $N\colon B \times B \to \mathbb{Z}_+$.

Напомним, $\operatorname{As}\operatorname{Conf}(B, N)$ — это ассоциативная конформная алгебра, порождённая множеством $B$, универсальная в классе всех ассоциативных конформных алгебр $A$, порождённых множеством $B$, на котором функция локальности $N_A$ мажорируется функцией $N$:

$$N_A(a, b) \leq N(a, b)$$

для всех $a$, $b \in B$. По определению, данная ассоциативная конформная алгебра удовлетворяет универсальному свойству: для любой ассоциативной конформной алгебры $A$ и любого отображения $\tau\colon B \to A$, такого что $N_A(\tau(a), \tau(b)) \leq N(a, b)$ для всех $a$, $b \in B$, существует единственный гомоморфизм конформных алгебр $\varphi\colon \operatorname{As}\operatorname{Conf}(B, N) \to C$, такой что $\tau(b) = \varphi(b)$ для всех $b \in B$.

Как показано в работе [65], свободная ассоциативная конформная алгебра $\operatorname{As}\operatorname{Conf}(B, N)$ есть свободный левый $H$-модуль с $H$-базисом

$$a_1\ _{(n_1)}\ (a_2\ _{(n_2)}\ \ldots (a_{k-1}\ _{(n_{k-1})}\ (a_k\ _{(n_k)}\ a_{k+1}))\ldots) = L_{n_1}^{a_1} \ldots L_{n_k}^{a_k} a_{k+1},$$

для всех $a_i \in B$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq n_i < N(a_i, a_{i+1})$.

Рассмотрим ассоциативную алгебру

$$\mathfrak{A}(B) = {}^{\operatorname{As}\langle \partial, L_n^a, R_n^a \mid a \in B,\ n \in \mathbb{Z}_+\rangle}\big/_{\mathfrak{I}},$$

где $\mathfrak{I}$ есть идеал, порождённый соотношениями

$$L_n^a \partial - \partial L_n^a - nL_{n-1}^a, \tag{13}$$

$$R_m^a \partial - \partial R_m^a - mR_{m-1}^a, \tag{14}$$

$$R_m^a L_n^b - L_n^b R_m^a, \tag{15}$$

для всех $a, b \in B$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда ассоциативную конформную алгебру $\mathrm{As\,Conf}(B, N)$ можно рассматривать, как левый $\mathfrak{A}(B)$-модуль. Действительно, при левом действии соотношения (13) — (15) выполнены автоматически, поскольку (13) задаёт на порождающих элементах $B$ аксиому (C3), (14) — аксиому (C2′), в то время как (15) — аксиому ассоциативности (A′).

Следовательно, конформная алгебра $\mathrm{As\,Conf}(B, N)$ есть гомоморфный образ свободного левого $\mathfrak{A}(B)$-модуля $F(B)$, порождённого множеством $B$. Нетрудно установить, что в ядре этого гомоморфизма лежат следующие соотношения:

$$L_m^a b, \quad m \geq N(a, b), \tag{16}$$

$$R_n^b a - \sum_{s=0}^{N(a,b)-n} (-1)^{n+s} \frac{\partial^s}{s!} L_{n+s}^a b, \tag{17}$$

для всех $a$, $b \in B$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Первое из них задаёт аксиому локальности (C1), а второе — взаимосвязь между операторами левого и правого конформного умножения. Следовательно, мы можем по гомоморфизму $F(B) \to \mathrm{As\,Conf}(B, N)$ построить дополняющий гомоморфизм $\psi\colon F(B, N) \to \mathrm{As\,Conf}(B, N)$, где $F(B, N)$ есть фактор-модуль свободного $\mathfrak{A}(B)$-модуля $F(B)$ по соотношениям (16) и (17).

Как показано в работе М. Ройтмана [65], на самом деле имеет место изоморфизм $\mathfrak{A}(B)$-модулей $F(B, N) \cong \mathrm{As\,Conf}(B, N)$. Аналогичный результат получен в работе П. С. Колесникова [54] на более привычном для данной работы языке левых модулей над ассоциативными алгебрами. В процессе доказательства П. С. Колесниковым вычислен БГШ ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{As\,Conf}(B, N)$ как $\mathfrak{A}(B)$-модуля, который, помимо соотношений (16) и (17), включает в себя серию соотношений

$$L_n^a L_m^b u + \sum_{s \geq 1} (-1)^s L_{n-s}^a L_{m+s}^b u, \tag{18}$$

для всех $a$, $b \in B$, $u \in F(B)$, $n \geq N(a, b)$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Продолжение работы М. Ройтмана, представленное в статье [66], позволяет явно описать конструкцию универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры относительно границы локальности $N$.

Пусть $L$ есть конформная алгебра Ли, порождённая множеством $B \subset L$ как левый $H$-

модуль, так что функция локальности $N\colon B\times B\to \mathbb{Z}_+$ ограничена константой $N\in\mathbb{Z}_+$. Рассмотрим алгебру коэффициентов $\operatorname{Coeff} L$. Известно, что множество $X=\{b(n)\mid b\in B,\ n\in\mathbb{Z}\}$ является линейным базисом алгебры Ли коэффициентов (см. утверждение 2 работы [66]). Рассмотрим ассоциативную алгебру $A={}^{\mathcal{U}(\operatorname{Coeff} L)}\!\big/_{\mathfrak{I}_N}$, где $\mathcal{U}(\operatorname{Coeff} L)$ есть универсальная ассоциативная обёртывающая алгебра, а $\mathfrak{I}_N\subset\mathcal{U}(\operatorname{Coeff} L)$ есть идеал, порождённый соотношениями локальности

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}(-1)^s\binom{N}{s}a(n-s)b(m+s),\quad a,\ b\in B,\quad n,\ m\in\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим пространство формальных степенных рядов $A[[z,z^{-1}]]$. Как показано в работе [45], формальные степенные ряды вида $\tilde{a}(z)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}a(n)z^{-n-1}$ порождают ассоциативную конформную алгебру локальности $N$, которая и будет искомой. В главе 3 мы приведём альтернативный подход, основанный на операторном методе.

Легко видеть, что подпространство $I\subset\operatorname{As}\operatorname{Conf}(B,N)$ является идеалом ассоциативной конформной алгебры $\operatorname{As}\operatorname{Conf}(B,N)$ тогда и только тогда, когда $I$ является левым $\mathfrak{A}(B)$-подмодулем левого модуля $\operatorname{As}\operatorname{Conf}(B,N)$ над ассоциативной алгеброй $\mathfrak{A}(B)$. Следовательно, если дано множество $\Sigma\subset\operatorname{As}\operatorname{Conf}(B,N)$ конформных полиномов, то идеал $(\Sigma)$, порождённый ими, можно рассматривать как $\mathfrak{A}(B)$-подмодуль. Таким образом, проблема равенства в ассоциативной конформной алгебре, заданной порождающими элементами и определяющими соотношениями может быть сведена к аналогичной проблеме в соответствующем модуле над обычной ассоциативной алгеброй.

# Глава 2. Точные представления квадратичных конформных алгебр Ли

В данной главе будут исследоваться вопросы, связанные с представлениями и универсальными обёртывающими конформных алгебр Ли конечного типа. Пусть дана квадратичная конформная (супер)алгебра Ли $L(V)$, построенная по специальной ГД-(супер)алгебре $V$. Мы покажем, что всякая такая $L(V)$ специальна, то есть инъективно вкладывается в некоторую ассоциативную конформную (супер)алгебру $A$. Ясно, что в таком случае $L(V)$ будет также инъективно вкладываться в свою универсальную обёртывающую ассоциативную конформную алгебру $\mathcal{U}(L(V), N)$ относительно некоторой границы локальности $N$. Как следствие, она инъективно вкладывается в конформную (супер)алгебру Пуассона $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}(L(V), N)$, что описано в §1.3. Применяя конструкцию деформации к присоединённому действию, мы получим в качестве следствия теорему, которая является первым основным результатом данной главы.

**Теорема 1.** *Пусть $V$ будет конечномерной специальной ГД-(супер)алгеброй. Тогда квадратичная конформная (супер)алгебра $L(V)$ имеет точное представление конечного типа.*

В первом параграфе данной главы будет сформулирован и доказан ряд утверждений, с помощью которых мы докажем теорему 1 в параграфе 2. Далее, мы рассмотрим аналогичную идею под другим углом, в результате чего будет построена ассоциативная конформная алгебра $A(V)$, являющейся обёртывающей для $L(V)$. Показав инъективность соответствующего вложения, мы получим в качестве следствия теорему, которая является вторым основным результатом данной главы.

**Теорема 2.** *Пусть $V$ будет специальной ГД-(супер)алгеброй. Тогда квадратичная конформная (супер)алгебра Ли $L(V)$ инъективно вкладывается в универсальную ассоциативную обёртывающую конформную (супер)алгебру $\mathcal{U}(L(V), N)$ с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$.*

Во третьем и четвёртом параграфах данной главы будет сформулирован и доказан ряд утверждений, с помощью которых мы докажем теорему 2. В пятом параграфе мы приведём интересные примеры, связанные с конструкцией обёртывающей $A(V)$. Так, в некоторых случаях может быть достигнут даже изоморфизм обёртывающих $A(V) \cong \mathcal{U}(L(V), N)$. Однако, как будет показано в другом примере, изоморфизм не всегда имеет место.

## § 2.1. Предварительные сведения для теоремы 1

Зафиксируем (супер)алгебру Пуассона $P_0 \oplus P_1 = (P, \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ с чётным дифференцированием $d$. Условимся, что в рамках данной главы применение оператора $d^n$ к $a$ будем записывать как $a^{(n)}$ для всех $a \in P$. Для малых порядков будем использовать обозначения $a'$, $a''$ и т. д. Рассмотрим левый $\mathbb{Z}_2$-градуированный $H$-модуль $L(P, d) = H \otimes P$ и снабдим его парой конформных $\lambda$-умножений по правилу

$$(a \,_{(\lambda)}\, b) = a \cdot b, \quad [a \,_{(\lambda)}\, b] = \{a, b\} + \partial(a' \cdot b) + \lambda(a \cdot b)',$$

для всех $a$, $b \in P_0 \cup P_1$.

**Лемма 2.1.1.** Пространство $L(P, d)$ является конформной (супер)алгеброй Пуассона.

*Доказательство.* Очевидно, что $(P, \cdot)$ есть конформная (супер)алгебра петель, а $(P, \{\cdot, \cdot\})$ есть квадратичная конформная (супер)алгебра Ли. Единственное, что нам осталось проверить, аксиому (P), представляющую собой конформный аналог правила Лейбница. С одной стороны,

$$\begin{aligned}
&[a \,_{(\lambda)}\, (b \,_{(\mu)}\, c)] - (-1)^{|a||b|}(b \,_{(\mu)}\, [a \,_{(\lambda)}\, c]) \\
&\quad = \{a, b \cdot c\} + \partial(a' \cdot b \cdot c) + \lambda(a \cdot b \cdot c)' - (-1)^{|a||b|}(b \cdot \{a, c\} + (\partial + \mu)(b \cdot a' \cdot c) + \lambda(b \cdot (a \cdot c)')) \\
&\qquad = \{a, b\} \cdot c - \mu(a' \cdot b \cdot c) + \lambda(a \cdot b' \cdot c),
\end{aligned}$$

для всех $a$, $b \in P_0 \cup P_1$, $c \in P$. С другой стороны,

$$([a \,_{(\lambda)}\, b] \,_{(\lambda+\mu)}\, c) = \{a, b\} \cdot c - (\lambda + \mu)(a' \cdot b \cdot c) + \lambda((a \cdot b)' \cdot c) = \{a, b\} \cdot c - \mu(a' \cdot b \cdot c) + \lambda(a \cdot b' \cdot c).$$

Что и требовалось. □

Пусть $L$ будет конформной (супер)алгеброй Ли с представлением $\rho$ на левом $\mathbb{Z}_2$-градуированном $H$-модуле $M$, $\varphi_\lambda$: $L \times M \to M[\lambda]$ будет 3/2-линейным отображением, удовлетворяющем следующему равенству:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\lambda+\mu}([a \,_{(\lambda)}\, b], m) &= \varphi_\lambda(a, \rho_\mu(b, m)) + \rho_\lambda(a, \varphi_\mu(b, m)) \\
&\quad - (-1)^{|a||b|}\varphi_\mu(b, \rho_\lambda(a, m)) - (-1)^{|a||b|}\rho_\mu(b, \varphi_\lambda(a, m)), \qquad (19)
\end{aligned}$$

для всех $a$, $b \in L_0 \cup L_1$, $m \in M$. Назовём *деформацией* представления $\rho$ такое представление $\rho^\varepsilon$ (супер)алгебры Ли $L$ на левом $\mathbb{Z}_2$-градуированном $H$-модуле $M \oplus M\varepsilon \cong \mathbb{k}[\varepsilon] \otimes M \big/ (\varepsilon^2)$, что

$$\rho^\varepsilon_\lambda(a, m) = \rho_\lambda(a, m) + \varepsilon\varphi_\lambda(a, m),$$

для всех $a \in L$, $m \in M$. Для того, чтобы некоторое 3/2-линейное отображение $\rho^\varepsilon$, полученное по описанной выше схеме ($\rho^\varepsilon = \rho + \varepsilon\varphi$: $L \times (M \oplus M\varepsilon) \to (M \oplus M\varepsilon)[\lambda]$), было деформацией, т. е. представлением конформной (супер)алгебры Ли $L$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (RL):

$$\rho^\varepsilon_\lambda(a, \rho^\varepsilon_\mu(b, m)) - (-1)^{|a||b|}\rho^\varepsilon_\mu(b, \rho^\varepsilon_\lambda(a, m)), = \rho^\varepsilon_{\lambda+\mu}([a\ _{(\lambda)}\ b], m)$$

для всех $a$, $b \in L_0 \cup L_1$, $m \in M$. Легко видеть, что оно распадается на три независимых части: одна из них – это в точности (RL) для представления $\rho$, вторая – условие (19), третья выражение при $\varepsilon^2$. Следовательно, все группы слагаемых тождественно нулевые в фактор-пространстве $M \oplus M\varepsilon$. Соотношение (19) является следствием тождества Якоби (L2) и в точности означает $\varphi \in \mathrm{Z}^1(L, \mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}}\, M)$.

**Лемма 2.1.2.** Пусть $P$ есть конформная (супер)алгебра Пуассона, $L \subset P$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированная подалгебра Ли. Тогда $L$ имеет регулярное представление на $P$, и 3/2-линейное отображение $\varphi_\lambda$: $L \times P \to P[\lambda]$, заданное правилом

$$\varphi_\lambda(a, m) = \lambda(a\ _{(\lambda)}\ m),$$

для всех $a \in L$, $m \in P$, удовлетворяет условию (19).

*Доказательство.* Первая часть утверждения очевидна, поскольку присоединённое действие $\mathrm{ad}_\lambda(a, m) = [a\ _{(\lambda)}\ m]$, $a \in L$, $m \in P$, удовлетворяет всем условиям.

Для доказательства второй части применим к правой части равенства (19) конформное правило Лейбница (P):

$$\lambda(a\ _{(\lambda)}\ [b\ _{(\mu)}\ m]) + \mu[a\ _{(\lambda)}\ (b\ _{(\mu)}\ m)] - (-1)^{|a||b|}\mu(b\ _{(\mu)}\ [a\ _{(\lambda)}\ m]) - (-1)^{|a||b|}\lambda[b\ _{(\mu)}\ (a\ _{(\lambda)}\ m)]$$
$$= \lambda([a\ _{(\lambda)}\ b]\ _{(\lambda+\mu)}\ m) + \mu([a\ _{(\lambda)}\ b]\ _{(\lambda+\mu)}\ m) = \varphi_{\lambda+\mu}([a\ _{(\lambda)}\ b], m).$$

□

Следствием данного утверждения мы получаем следующий факт:

**Лемма 2.1.3.** Пусть $P$ есть конформная (супер)алгебра Пуассона, $L \subset P$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированная подалгебра Ли. Тогда отображение $\hat{\mathrm{ad}} = \mathrm{ad} + \varphi$: $L \times P \to P[\lambda]$, полученное из регулярного представления ad на $P$ с помощью 3/2-линейного отображения $\varphi_\lambda(a, m) = \lambda(a\ _{(\lambda)}\ m)$ снова является представлением $L$ на $P$.

*Доказательство.* Повторяем рассуждения как для деформационного представления. Тождество Якоби (RL) для отображения $\hat{\mathrm{ad}}$ распадётся на три части. Первая, тождество Якоби для регулярного представления ad, очевидно, исчезает. Вторая, условие (19) для отображения $\varphi$, пропадает ввиду леммы 2.1.2. Наконец, оставшееся условие,

$$\lambda\mu(a_{\ (\lambda)}\ (b_{\ (\mu)}\ m)) = \lambda\mu(-1)^{|a||b|}(b_{\ (\mu)}\ (a_{\ (\lambda)}\ m)),$$

выполняется в $P$ ввиду коммутативности и ассоциативности $\lambda$-умножения $(\cdot_{\ (\lambda)}\ \cdot)$:

$$\begin{aligned}(a_{\ (\lambda)}\ (b_{\ (\mu)}\ m)) = ((a_{\ (\lambda)}\ b)_{\ (\lambda+\mu)}\ m) = (-1)^{|a||b|}((b_{\ (-\partial-\lambda)}\ a)_{\ (\lambda+\mu)}\ m) \\ = (-1)^{|a||b|}((b_{\ (\mu)}\ a)_{\ (\lambda+\mu)}\ c) = (-1)^{|a||b|}(b_{\ (\mu)}\ (a_{\ (\lambda)}\ c)).\end{aligned}$$

□

Ещё одно важное при исследовании конформной проблемы Адо следствие леммы 2.1.2 и теоремы 3 из работы [51] выливается в следующее утверждение.

**Лемма 2.1.4.** Пусть дана конформная (супер)алгебра Ли $L$ конечного типа. Если существуют конформная (супер)алгебра Пуассона $P$ и инъективное вложение $\tau\colon L \to P$, такие что $(\tau(a)_{\ (\lambda)}\ \tau(L)) \neq 0$ для всех $0 \neq a \in L$, то у $L$ есть точное представление конечного типа.

Заметим, в частности, что если $L$ удовлетворяет ПБВ-свойству относительно $H$-базиса $B$, то мы можем явно построить $P = \mathrm{gr}\,\mathcal{U}(L, N)$ для некоторой подходящей функции локальности $N$. Будучи свободной коммутативной конформной алгеброй, $P$ удовлетворяет условиям леммы 2.1.4. Отсюда следует, как показано в работе П. С. Колесникова [51], что конформный аналог ПБВ-теоремы мгновенно влечёт положительный ответ в конформной проблеме Адо.

## § 2.2. Доказательство теоремы 1

Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ — конечномерная специальная ГД-(супер)алгебра. Зафиксируем линейный базис $X = X_0 \cup X_1$ пространства $V$, где $X_i$ есть базис компоненты $V_i$, $i = 0, 1$. Рассмотрим свободную дифференциальную (супер)алгебру Пуассона с единицей $F = \mathrm{PoisDer}(X, d)$. Обобщая рассуждения из примера (1) на случай ГД-(супер)алгебр, мы получим универсальную обёртывающую (супер)алгебру Пуассона $P_d(V) \cong F/_{I_V}$, где $I_V$, напомним, есть дифференциальный идеал алгебры $F$, порождённый элементами $x \cdot d(y) - x \circ y$, для всех $x$, $y \in X$. Поскольку $V$ есть специальная ГД-(супер)алгебра, она инъективно вкладывается в $P_d(V)$.

На свободной дифференциальной (супер)алгебре Пуассона $F$ можно задать градуировку весами по следующему правилу, предложенному в работе трёх авторов [56]:

$$\begin{aligned} &\operatorname{wt} 1 = 0, && \operatorname{wt} x = -1 \text{ для всех } x \in X, \\ &\operatorname{wt}(a \cdot b) = \operatorname{wt} a + \operatorname{wt} b, && \operatorname{wt}\{a, b\} = \operatorname{wt} a + \operatorname{wt} b + 1, \\ &\operatorname{wt} d(a) = \operatorname{wt} a + 1, \end{aligned}$$

для всех $a, b \in V$. Следовательно, $F = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} F_k$. Поскольку соотношения вида (3) однородны относительно заданной функции веса, дифференциальный идеал $I_V$ согласован с градуировкой. Следовательно, (супер)алгебра Пуассона $P_d(V)$ унаследует градуировку как фактор-алгебра $F$ по идеалу $I_V$:

$$P_d(V) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} U_k,$$

где $U_k = {F_k}/{I_v \cap F_k}$. Заметим, что в работе трёх авторов [56] показано $V \cong U_{-1}$.

Из леммы 2.1.1 следует, что $L(P_d(V), d) = H \otimes P_d(V)$ есть конформная (супер)алгебра Пуассона. По лемме 2.1.3, квадратичная конформная алгебра Ли $L = L(V)$ имеет представление на $H$-модуле $M = L(P_d(V), d)$, заданное следующим образом:

$$\hat{\operatorname{ad}}_\lambda(a, m) = \{a, m\} + \partial(a' \cdot m) + \lambda((a \cdot m)' + a \cdot m),$$

для всех $a \in V$, $m \in M$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ определим пространство $M_{\leq n} = H \otimes \bigoplus_{k\leq n} U_k$. Ясно, что для всех $n \in \mathbb{Z}$ пространство $M_{\leq n}$ является конформным подмодулем $L$-модуля $M$.

Рассмотрим фактор-пространство $\overline{M} = {M_{\leq 0}}/{M_{\leq -2}} \cong H \otimes (U_{-1} \oplus U_0)$, которое также является $L$-модулем, соответствующим представлению

$$\rho_\lambda(a, m) = \begin{cases} \hat{\operatorname{ad}}_\lambda(a, m), & m \in U_0, \\ \operatorname{ad}_\lambda(a, m), & m \in U_{-1}, \end{cases}$$

для всех $a \in V$. Легко видеть, что представление $\rho$ точное. В самом деле, пусть $a = \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \partial^s a_s \in L(V)$, где $a_s \in V$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(a, 1) &= \hat{\operatorname{ad}}_\lambda(a, 1) = \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (-\lambda)^s \hat{\operatorname{ad}}_\lambda(a_s, 1) \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (-\lambda)^s(\{a_s, 1\} + \partial(a'_s \cdot 1) + \lambda(a'_s \cdot 1 + a_s \cdot 1' + a_s \cdot 1) = \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} (-\lambda)^s((\partial + \lambda)a'_s + \lambda a_s). \end{aligned}$$

Поскольку $L(V)$ есть свободный $H$-модуль, сумма в правой части будет нулевой только при всех $a_s = 0$. Однако, данное представление может быть бесконечного типа, поскольку $\dim U_0$ не обязана быть конечной.

Для любого $a \in V \cong U_{-1}$ построим отображение $l_a\colon U_0 \to U_{-1}$, действующее по правилу $m \mapsto a \cdot m$, для всех $m \in U_0$. Поскольку $\dim U_{-1} = \dim V < \infty$, пересечение всех $\ker l_a$, $a \in V$ образует подпространство конечной коразмерности. Рассмотрим подпространство $W = \bigcap_{a\in V} \ker l_a = \{m \in U_0 \mid V \cdot m = 0\}$. Для любого $m \in W$ мы имеем

$$\rho_\lambda(a, m) = \{a, m\} + \partial(a' \cdot m),$$

для всех $a \in V$. Убедимся, что $H \otimes W$ является конформным $L$-подмодулем $L$-модуля $\overline{M}$. В самом деле, пусть $b \in V$ есть произвольный элемент ГД-(супер)алгебры $V$. Тогда

$$b \cdot \{a, m\} = (-1)^{|a||b|}(\{a, b \cdot m\} + \{a, b\} \cdot m) = 0, \quad b \cdot (a' \cdot u) = (-1)^{|a||b|}(a' \cdot (b \cdot m)) = 0,$$

для всех $a \in V$, $m \in U_0$. Следовательно, $\rho_\lambda(a, m) \in (H \otimes W)[\lambda]$, дальше по 3/2-линейности.

Наконец, фактор-модуль

$$\overline{M}/W \cong H \otimes (U_{-1} \oplus U_0/W),$$

задаёт искомое точное представление конечного типа квадратичной конформной (супер)алгебры Ли $L(V)$, построенной по конечномерной специальной ГД-(супер)алгебре $V$.

## § 2.3. Предварительные сведения для теоремы 2

Пусть $V$ будет специальной (не обязательно конечномерной) ГД-(супер)алгеброй, $P = P_d(V)$ — дифференциальной пуассоновой обёртывающей $V$. Скажем, без ограничения общности, что $P$ содержит единицу 1 относительно ассоциативного коммутативного умножения (в противном случае присоединим её искусственно $P^\# = P \oplus \Bbbk 1$).

Определим на $P$ серию стандартных линейных операторов:

$$\mathrm{ad}_a : b \mapsto \{a, b\}, \quad L_a : b \mapsto a \cdot b, \quad \mathrm{id} = \mathrm{id}_P,$$

для всех $a$, $b \in P$. Продолжим данные операторы $H$-линейным образом на левый $H$-модуль $H \otimes P$.

Напомним, что пространство $\mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}} M$ для свободного $\mathbb{Z}_2$-градуированного $H$-модуля $M = H \otimes V$ можно с точностью до изоморфизма представить как

$$\mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}} M \cong H \otimes (\mathrm{End}\, V)[x] \cong \Bbbk[\partial, x] \otimes \mathrm{End}\, V,$$

где $\mathrm{End}\, V$ есть пространство эндоморфизмов векторного пространства $V$. Используя идею деформации присоединённого представления, сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 2.3.1.** Пусть $V$ есть специальная ГД-(супер)алгебра, $P = P_d(V)$ — дифференциальная обёртывающая алгебра Пуассона с единицей. Пусть $L(V)$ будет квадратичной конформной (супер)алгеброй Ли, построенной по $V$. Тогда $H$-линейный оператор

$$\tau : L(V) \to \mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}}\,(H \otimes P(V))^{(-)},$$

определённый на $H$-порождающих по следующему правилу:

$$\tau(a) = 1 \otimes \mathrm{ad}_a + x \otimes [d, L_a] - \partial \otimes (d + \mathrm{id})L_a, \qquad \text{для всех } a \in V, \tag{20}$$

есть инъективный гомоморфизм конформных (супер)алгебр Ли.

*Доказательство.* Во-первых, выведем правила перестановки введённых операторов в ассоциативной алгебре $\mathrm{End}\,P$. По модулю правила Лейбница (2) мы имеем:

$$L_b \,\mathrm{ad}_a\, c = b \cdot \{a, c\} = (-1)^{|a||b|}(\{a, b \cdot c\} - \{a, b\} \cdot c) = (-1)^{|a||b|}(\mathrm{ad}_a\, L_b - L_{\{a,b\}})c, \tag{21}$$

$$d\,\mathrm{ad}_a\, c = d\{a, c\} = \{a', c\} + \{a, c'\} = (\mathrm{ad}_{a'} + \mathrm{ad}_a\, d)c, \tag{22}$$

$$dL_b c = d(b \cdot c) = b' \cdot c + b \cdot c' = (L_{b'} + L_b d)c, \tag{23}$$

для всех $a$, $b \in P_0 \cup P_1$, $c \in P$. Тогда (20) перепишется как

$$\tau(a) = \mathrm{ad}_a + xL_{a'} - \partial(L_{a'} + L_a(d + \mathrm{id})), \tag{24}$$

для всех $a \in V$.

Вычислим $\tau(a)\ {}_{(\lambda)}\ \tau(b)$ для произвольных $a$, $b \in V_0 \cup V_1$:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}_a + xL_{a'} - \partial(L_{a'} + L_a(d + \mathrm{id})))\ {}_{(\lambda)}\ (\mathrm{ad}_b + xL_{b'} - \partial(L_{b'} + L_b(d + \mathrm{id})))\\
&\quad = (\mathrm{ad}_a + xL_{a'} + \lambda(L_{a'} + L_a(d + \mathrm{id})))(\mathrm{ad}_b + (x + \lambda)L_{b'} - (\partial + \lambda)(L_{b'} + L_b(d + \mathrm{id})))\\
&\quad\quad = (\mathrm{ad}_a + (x + \lambda)L_{a'} + \lambda L_a(d + \mathrm{id}))(\mathrm{ad}_b + (x - \partial)L_{b'} - (\partial + \lambda)L_b(d + \mathrm{id})).
\end{aligned} \tag{25}$$

Раскроем скобки, сгруппируем подобные по степеням $\lambda$ и перепишем выражения согласно порядка $\mathrm{ad} < L < d$ с помощью правил (21)–(23) и внутренних свойств операторов ad, $L$, $d$. Коэффициенты при $\lambda^0$ ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}_a\,\mathrm{ad}_b + (x - \partial)\,\mathrm{ad}_a\, L_{b'} - \partial\,\mathrm{ad}_a\, L_b(d + \mathrm{id})\\
&\qquad + xL_{a'}\,\mathrm{ad}_b + x(x - \partial)L_{a'}L_{b'} - x\partial L_{a'}L_b(d + \mathrm{id})\\
&\qquad = \mathrm{ad}_a\,\mathrm{ad}_b + (x - \partial)\,\mathrm{ad}_a\, L_{b'} - \partial\,\mathrm{ad}_a\, L_b(d + \mathrm{id})\\
&\qquad\quad + (-1)^{|a||b|}x(\mathrm{ad}_b\, L_{a'} - L_{\{b,a'\}}) + x(x - \partial)L_{a'\cdot b'} - x\partial L_{a'\cdot b}(d + \mathrm{id}).
\end{aligned} \tag{26}$$

При $\lambda$ мы получаем:

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{ad}_a L_b(d+\mathrm{id}) - xL_{a'}L_b(d+\mathrm{id}) + L_{a'}\operatorname{ad}_b + (x-\partial)L_{a'}L_{b'} - \partial L_{a'}L_b(d+\mathrm{id})& \\
+ L_a(d+\mathrm{id})\operatorname{ad}_b + (x-\partial)L_a(d+\mathrm{id})L_{b'} - \partial L_a(d+\mathrm{id})L_b(d+\mathrm{id})&,
\end{aligned}
$$

что после некоторых очевидных рутинных вычислений превращается в

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{ad}_a L_b(d+\mathrm{id}) - (x+\partial)L_{a'\cdot b}(d+\mathrm{id}) + (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_b(L_{a'} + L_a(d+\mathrm{id}))& \\
- (-1)^{|a||b|}L_{\{b,a\}'} + (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_{b'} L_a - (-1)^{|a||b|}L_{\{b,a\}}(d+\mathrm{id})& \\
+ (x-\partial)(L_{a\cdot b''} + L_{a'\cdot b'}) + (x-2\partial)L_{a\cdot b'}(d+\mathrm{id}) - \partial L_{a\cdot b}(d+\mathrm{id})^2&. \quad (27)
\end{aligned}
$$

При $\lambda^2$ стоит следующее выражение:

$$
-L_{a'}L_b(d+\mathrm{id}) - L_a(d+\mathrm{id})L_b(d+\mathrm{id}) = -L_{(a\cdot b)'}(d+\mathrm{id}) - L_{a\cdot b}(d+\mathrm{id})^2. \quad (28)
$$

Для вычисления $\tau(b)\ _{(-\partial-\lambda)}\ \tau(a)$ нам необходимо поменять местами $a$ и $b$, заменить $\lambda$ на $-\partial-\lambda$, и снова собрать подобные слагаемые по степеням $\lambda$ в изначальном выражении (25). При $\lambda^0$ мы получаем группу старых слагаемых с перестановкой $a \leftrightarrow b$:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ad}_b\operatorname{ad}_a + (x-\partial)\operatorname{ad}_b L_{a'} - \partial\operatorname{ad}_b L_a(d+\mathrm{id})& \\
+ (-1)^{|a||b|}x(\operatorname{ad}_a L_{b'} - L_{\{a,b'\}}) + x(x-\partial)L_{b'\cdot a'} - x\partial L_{b'\cdot a}(d+\mathrm{id})&,
\end{aligned}
$$

и группу новых слагаемых

$$
\begin{aligned}
-\partial(-\operatorname{ad}_b L_a(d+\mathrm{id}) - (x+\partial)L_{b'\cdot a}(d+\mathrm{id}) + (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_a(L_{b'} + L_b(d+\mathrm{id})) - (-1)^{|a||b|}L_{\{a,b\}'}& \\
+ (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_{a'} L_b - (-1)^{|a||b|}L_{\{a,b\}}(d+\mathrm{id})& \\
+ (x-\partial)(L_{b\cdot a''} + L_{b'\cdot a'}) + (x-2\partial)L_{b\cdot a'}(d+\mathrm{id})& \\
- \partial L_{b\cdot a}(d+\mathrm{id})^2) + \partial^2(-L_{(b\cdot a)'}(d+\mathrm{id}) - L_{b\cdot a}(d+\mathrm{id})^2)&.
\end{aligned}
$$

Приводим подобные слагаемые:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ad}_b\operatorname{ad}_a + (x-\partial)\operatorname{ad}_b L_{a'} + (-1)^{|a||b|}(x-\partial)\operatorname{ad}_a L_{b'} - (-1)^{|a||b|}xL_{\{a,b'\}} + (x-\partial)^2 L_{b'\cdot a'}& \\
- (-1)^{|a||b|}\partial\operatorname{ad}_a L_b(d+\mathrm{id}) + (-1)^{|a||b|}\partial L_{\{a,b\}'}& \\
- (-1)^{|a||b|}\partial\operatorname{ad}_{a'} L_b + (-1)^{|a||b|}\partial L_{\{a,b\}}(d+\mathrm{id})& \\
- \partial(x-\partial)L_{b\cdot a''} - \partial(x-\partial)L_{b\cdot a'}(d+\mathrm{id})&. \quad (29)
\end{aligned}
$$

При $\lambda$ мы получаем группу старых слагаемых с перестановкой $a \leftrightarrow b$:

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}_b L_a(d+\operatorname{id}) + (x+\partial)L_{b'\cdot a}(d+\operatorname{id}) - (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_a(L_{b'} + L_b(d+\operatorname{id})) + (-1)^{|a||b|}L_{\{a,b\}'}\\ - (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_{a'} L_b + (-1)^{|a||b|}L_{\{a,b\}}(d+\operatorname{id})\\ - (x-\partial)(L_{b\cdot a''} + L_{b'\cdot a'}) - (x-2\partial)L_{b\cdot a'}(d+\operatorname{id}) + \partial L_{b\cdot a}(d+\operatorname{id})^2,\end{aligned}$$

и группу новых слагаемых

$$2\partial(-L_{(b\cdot a)'}(d+\operatorname{id}) - L_{b\cdot a}(d+\operatorname{id})^2).$$

Приведём подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}_b L_a(d+\operatorname{id}) + (x-\partial)L_{b'\cdot a}(d+\operatorname{id}) - (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_a(L_{b'} + L_b(d+id)) + (-1)^{|a||b|}L_{\{a,b\}'}\\ - (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_{a'} L_b + (-1)^{|a||b|}L_{\{a,b\}}(d+\operatorname{id})\\ - (x-\partial)(L_{b\cdot a''} + L_{b'\cdot a'}) - xL_{b\cdot a'}(d+\operatorname{id}) - \partial L_{b\cdot a}(d+\operatorname{id})^2. \quad (30)\end{aligned}$$

Выражение при $\lambda^2$ совпадает с (28) с точностью до множителя $(-1)^{|a||b|}$, поскольку $a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a$ для любых $a$, $b \in P_0 \cup P_1$.

С другой стороны по (24) мы получаем для всех $a$, $b \in V_0 \cup V_1$,

$$\begin{aligned}\tau([a\,{}_{(\lambda)}\,b]) = \tau([a,b] + \partial(b\circ a) + \lambda(a\circ b + b\circ a))\\ = \operatorname{ad}_{\{a,b\}} + (x-\partial)L_{\{a,b\}'} - \partial L_{\{a,b\}}(d+\operatorname{id})\\ + \partial(\operatorname{ad}_{a'\cdot b} + (x-\partial)L_{(a'\cdot b)'} - \partial L_{a'\cdot b}(d+\operatorname{id}))\\ + \lambda(\operatorname{ad}_{(a\cdot b)'} + (x-\partial)L_{(a\cdot b)''} - \partial L_{(a\cdot b)'}(d+\operatorname{id})). \quad (31)\end{aligned}$$

Рассмотрим конформный линейный оператор для любых $a$, $b \in V$:

$$\tau(a)\,{}_{(\lambda)}\,\tau(b) - (-1)^{|a||b|}\tau(b)\,{}_{(-\partial-\lambda)}\,\tau(a) - \tau([a\,{}_{(\lambda)}\,b]) \in \operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}}(H\otimes P(V)).$$

Убедимся, что он является тождественно нулевым. Сравним коэффициенты при $\lambda$, полученные в выражениях (27), (30), (31). Исключая подобные слагаемые, мы получим

$$1\otimes((-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_b L_{a'} + (-1)^{|a||b|}\operatorname{ad}_{b'} L_a + \operatorname{ad}_a L_{b'} + \operatorname{ad}_{a'} L_b - \operatorname{ad}_{(a\cdot b)'}),$$

для всех $a$, $b \in V$. Тривиальность данного конформного оператора полностью определяется частью, лежащей в $\operatorname{End} P$, поскольку для любого $c \in P$

$$
\begin{aligned}
1 \otimes ((-1)^{|a||b|} \operatorname{ad}_b L_{a'} + (-1)^{|a||b|} \operatorname{ad}_{b'} L_a + \operatorname{ad}_a L_{b'} + \operatorname{ad}_{a'} L_b - \operatorname{ad}_{(a\cdot b)'})_\mu c \\
= (-1)^{|a||b|}\{b, a'\cdot c\} + (-1)^{|a||b|}\{b', a\cdot c\} + \{a, b'\cdot c\} + \{a', b\cdot c\} - \{a'\cdot b, c\} - \{a\cdot b', c\}.
\end{aligned}
$$

Применяем правило Лейбница (2) к правой части и получаем нуль, что и требовалось.

Выражение при $\lambda^0$ получается из (26), (29), (31). После исключения подобных слагаемых мы получим

$$
\operatorname{ad}_a \operatorname{ad}_b - (-1)^{|a||b|} \operatorname{ad}_b \operatorname{ad}_a - \operatorname{ad}_{\{a,b\}} + \partial \operatorname{ad}_{a'} L_b + (-1)^{|a||b|} \partial \operatorname{ad}_b L_{a'} - \partial \operatorname{ad}_{a'\cdot b}.
$$

Мы снова получаем тождественный нуль, поскольку первые три слагаемых — это в точности (супер)тождество Якоби в операторном виде, а последние три слагаемых — это правило Лейбница (2). Тем самым, $\tau$ действительно является гомоморфизмом конформных (супер)алгебр.

Исследуем вопрос инъективности. Положим существует $v \in L(V)$, такой что $\tau(v) = 0$. Пусть $v = \sum_{s\geq 0} \partial^s \otimes a_s$, где $a_s \in V$. Применив (5), мы получим

$$
\begin{aligned}
\tau(v)_\mu 1 &= \sum_{s\geq 0} \partial^s (\operatorname{ad}_{a_s} + (x-\partial) L_{a_s'} - \partial L_{a_s}(d + \mathrm{id}))_\mu 1 = \sum_{s\geq 0} (-\mu)^s ((\partial+\mu) L_{a_s'} + \mu L_{a_s}) 1 \\
&= \sum_{s\geq 0} (-\mu)^s \partial L_{a_s'} 1 - \sum_{s\geq 0} (-\mu)^{s+1} (L_{a_s'} + L_{a_s}) 1 = \sum_{s\geq 0} (-\mu)^s \partial a_s' - \sum_{s\geq 0} (-\mu)^{s+1} (a_s' + a_s)
\end{aligned}
$$

Положив все коэффициенты при $\mu^s$, $s \geq 0$ нулевыми, мы получим систему уравнений вида

$$
a_s' = 0, \quad a_s' + a_s = 0,
$$

для всех $s \geq 0$, единственное решение которой тождественно нулевое. Следовательно, $\tau(v) = 0$ влечёт $v = 0$, что и требовалось. □

## § 2.4. Доказательство теоремы 2

Поскольку $V$ есть специальная ГД-(супер)алгебра, существует унитальная дифференциальная обёртывающая алгебра Пуассона $P_d(V)$. Рассмотрим инъективный гомоморфизм конформных (супер)алгебр Ли

$$
\tau : L(V) \to \operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}} (H \otimes P_d(V))^{(-)},
$$

построенный в лемме 2.3.1. Возьмём образы $\tau(V)$ пространства $V$ и породим ими ассоциативную конформную (супер)алгебру $A(V) \subset \operatorname{Cend}_{\mathrm{fin}} (H \otimes P_d(V))$. По построению $A(V)$ является ассоциативной обёртывающей (супер)алгеброй для $L(V)$ относительно ограничения на ассоциативную локальность $N = 3$. В самом деле, при вычислении $\tau(a)\ {}_{(\lambda)}\ \tau(b)$ в лемме 2.3.1 мы получили полином степени не выше 2 по $\lambda$ со старшим коэффициентом (28):

$$-L_{(a\cdot b)'}(d+\mathrm{id}) - L_{a\cdot b}(d+\mathrm{id})^2,$$

для всех $a$, $b \in V$.

По универсальному свойству мы получаем, что существует сюръективный гомоморфизм ассоциативных конформных (супер)алгебр

$$\varphi : \mathcal{U}(L(V), N) \to A(V),$$

дополняющий канонический гомоморфизм $\tau_U : L(V) \to \mathcal{U}(L(V), N)$. Поскольку $\tau$ инъективен, таким будет и $\tau_U$. Следовательно, квадратичная конформная (супер)алгебра Ли $L(V)$ инъективно вкладывается в универсальную обёртывающую ассоциативную конформную (супер)алгебру с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$.

## § 2.5. Примеры к теореме 2

Сюръективный гомоморфизм $\varphi : \mathcal{U}(L(V), N) \to A(V)$, упомянутый в доказательстве теоремы 2, в общем случае неинъективен. Но иногда это так, и тогда мы получаем изоморфное описание универсальной обёртывающей ассоциативной конформной (супер)алгебры с ограничением на ассоциативную локальность $N = 3$.

**Пример 12.** Напомним, что ГД-алгебра $V = \Bbbk v$, с умножением $v \circ v = v$ соответствует конформной алгебре Вирасоро $L(V) = \mathrm{Vir} = Hv$ с $\lambda$-умножением, заданным на порождающем элементе $v$ по формуле

$$[v\ {}_{(\lambda)}\ v] = (\partial + 2\lambda)v.$$

Следовательно, ассоциативная конформная алгебра $A(V) \subset \mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}}\,(H \otimes P_d(V))$ порождается единственным конформным гомоморфизмом

$$\tau(v) = x \otimes \mathrm{id} - \partial \otimes (d + \mathrm{id})L_v.$$

Здесь $P_d(V) = \Bbbk[v]$ и $d = \frac{d}{dv}$. Более удобно представлять $P_d(V)$ как левый модуль, порождённый элементом $v$, над (ассоциативной) алгеброй Вейля $W = {}^{\Bbbk\langle d, p\rangle}\!\big/_{(dp - pd - 1)}$. Здесь $p$ обозначает оператор умножения $L_v$, а 1 обозначает $\mathrm{id}_{P_d(V)}$. Тогда $\varphi(v) = x - \partial(d+1)p$.

В работе [54] был описан $H$-линейный базис $\mathcal{U}(\mathrm{Vir}, 3)$ в следующем виде:

$$(L_0)^s v, \quad s \geq 0, \tag{32}$$

$$(L_0)^q (L_1)^l L_2 v, \quad q, l \geq 0. \tag{33}$$

Здесь оператор $L_n$ обозначает оператор $n$-умножения на $\mathcal{U}(\mathrm{Vir}, 3)$: $L_n^v = (v\ {}_{(n)}\ \cdot)$, $n \geq 0$.

Вычислим образы (32), (33) в $A(V)$. Во-первых, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\varphi(v)\ _{(\lambda)}\ \varphi(v) &= (x-\partial(d+1)p)\ _{(\lambda)}\ (x-\partial(d+1)p)\\ &= x(x-\partial(d+1)p)+\lambda(x-\partial((d+1)p)^2)+\lambda^2((d+1)p(1-(d+1)p)).\end{aligned}$$

Следовательно, $L_0^{\varphi(v)}=x$, $\varphi(v\ _{(0)}\ v)=x(x-\partial(d+1)p)$. Для произвольного $s\geq 0$ мы получаем

$$\varphi((L_0)^s v)=x^s(x-\partial(d+1)p),\quad s\geq 0. \tag{34}$$

Кроме того, $\varphi(v\ _{(2)}\ v)=2(d+1)p(1-(d+1)p)$. Заметим, что $\varphi(v\ _{(1)}\ v)$ линейно выражается через $\varphi(v)$ и $\varphi(v\ _{(2)}\ v)$ над $H$, что является прямым следствием определяющих соотношений в $\mathcal{U}(\mathrm{Vir},3)$.

Во-вторых, вычислим образы элементов (33), рассмотрев $\frac{1}{2}\varphi(v\ _{(\lambda)}\ (v\ _{(2)}\ v))$:

$$(x+\lambda(d+1)p)(d+1)p(1-(d+1)p)=x(d+1)p(1-(d+1)p)+\lambda((d+1)p)^2(1-(d+1)p).$$

Следовательно, применение оператора $L_1$ к $\varphi(v\ _{(2)}\ v)$ есть в точности умножение слева на $(d+1)p$, а применение оператора $L_0$ есть умножение слева на $x$. Получаем

$$\varphi((L_0)^q(L_1)^l L_2 v)=2x^q((d+1)p)^l(1-(d+1)p),\quad q,l\geq 0. \tag{35}$$

Наконец, допустим, что существует нетривиальная линейная комбинация

$$\sum_{s\geq 0}h_s(\partial)x^s(x-\partial(d+1)p)+\sum_{q,l\geq 0}h'_{q,l}(\partial)x^q((d+1)p)^l(1-(d+1)p)=0,$$

где $h_s(\partial),h'_{q,l}(\partial)\in H$. Применим выражение в левой части к элементу $1\in P_d(V)$. По модулю (34), (35) мы получим:

$$\begin{aligned}0&=\sum_{s\geq 0}h_s(-\mu)\partial^s(\partial+\mu(d+1)p)1+\sum_{q,l\geq 0}h'_{q,l}(-\mu)\partial^q((d+1)p)^l(1-(d+1)p)1\\ &=\sum_{s\geq 0}h_s(-\mu)(\partial^{s+1}+\mu\partial^s)+\sum_{s\geq 0}h_s(-\mu)\mu\partial^s v-\sum_{q,l\geq 0}h'_{q,l}(-\mu)\partial^q((d+1)p)^l v.\end{aligned} \tag{36}$$

Ясно, что в выражении $((d+1)p)^l v=\sum_{i=1}^{l+1}v^i c_i$ все коэффициенты $c_i$ есть целые положительные числа. В явном виде их можно записать по следующей формуле:

$$c_{l+1}=1,\quad c_i=\sum_{2\leq j_1\leq\cdots\leq j_{l+1-i}\leq 1+i}\ \prod_{k=1}^{l+1-i}j_i,\quad i=\overline{1,l}.$$

Поскольку мы работаем с элементами свободного $H$-модуля, первую группу слагаемых в правой части выражения (36) можно рассмотреть независимо от остальных. Перепишем её в следующем виде:

$$\sum_{s\geq 0} h_s(-\mu)(\partial^{s+1}+\mu\partial^s) = h_0(-\mu)\mu + \sum_{s\geq 0}(h_s(-\mu)\partial^{s+1} + h_{s+1}(-\mu)\mu\partial^{s+1}).$$

Отсюда легко получаем $h_s \equiv 0$. Таким образом, в (36) пропали первые две группы слагаемых. Теперь зафиксируем $q = q_1$, такой что найдётся $h'_{q_1,l}(-\mu) \neq 0$. Зафиксируем среди таких $l = l_{\max}$, тогда коэффициентом при $v^{1+l_{\max}}$ будет $h'_{q_1,l_{\max}} \equiv 0$. Лёгкая индукция по $l_{\max} - l$ приведёт к $h'_{q_1,l} \equiv 0$. Ввиду произвольности выбора $q_1$, получаем $h'_{q,l} \equiv 0$. Противоречие.

Таким образом мы получили, что для квадратичной конформной алгебры Ли $L(V) = \mathrm{Vir}$, построенной по ГД-алгебре $V = \Bbbk v$ с умножением $v \circ v = v$, существует изоморфизм обёртывающих ассоциативных конформных алгебр

$$\mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}}\,(H \otimes P_d(V)) \supset A(V) \cong \mathcal{U}(\mathrm{Vir}, 3).$$

Заметим также, что существует ещё одно эквивалентное представление для $\mathcal{U}(\mathrm{Vir}, 3)$, получаемое из регулярного действия

$$v \mapsto [v\;{}_{(\lambda)}\;\cdot] = x \otimes \mathrm{id} - \partial \otimes dp \in \mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}}\,(H \otimes P_d(V)).$$

Тогда $H$-линейный базис будет иметь вид

$$\begin{aligned} x^q \otimes (dp)^l(1-dp), &\quad q, l \geq 0,\\ x^{s+1} \otimes \mathrm{id} - x^s\partial \otimes dp, &\quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Все вычисления аналогичны.

Однако, относительно несложным примером можно показать, что изоморфизм зачастую недостижим даже если рассмотреть самую большую из возможных дифференциальных пуассоновых обёртывающих, универсальную.

**Пример 13.** Рассмотрим снова одномерную ГД-алгебру $V = \Bbbk v$, но с тривиальным умножением $v \circ v = 0$. Соответствующая квадратичная конформная алгебра Ли будет абелевой $L(V) = \mathrm{Cur}\, V \cong H \otimes V$. В первом случае возьмём самую простую дифференциальную пуассонову обёртывающую $P_d(V) = \Bbbk[v]$ с тривиальным дифференцированием $d \equiv 0$. Тогда образ гомоморфизма (20) $\tau(v) = -\partial \otimes L_v$. Однако, порождённая данным гомоморфизмом ассоциативная конформная алгебра $A(V) \subset \mathrm{Cend}_{\mathrm{fin}}\,(H \otimes P_d(V))$ не изоморфна универсальной обёртывающей. Для абелевой конформной алгебры Ли $L(V)$ универсальной обёртывающей ассоциативной алгеброй будет свободная ассоциативная коммутативная алгебра $\mathrm{As\,Com\,Conf}(v, 3)$. Её $H$-базис совпадает с описанным в (32), (33). Однако, инъективность гомоморфизма $\varphi$: $\mathrm{As}\,\mathrm{Com}\,\mathrm{Conf}(v,3) \to A(V)$ нарушается даже в простейших примерах:

$$\varphi(L_0 \dots L_0 L_1 \dots L_1 L_2 v) = -2\,\mathrm{ad}_v \dots \mathrm{ad}_v\, L_v \dots L_v = 0.$$

Что более интересно, даже если рассмотреть универсальную дифференциальную пуассонову обёртывающую алгебру для $V$, ядро гомоморфизма $\varphi$ всё равно не тривиально. В нашем случае пуассонова обёртывающая будет иметь вид

$$P_d(V) = {}^{(\mathrm{Pois}\langle v, v', v'', \dots\rangle^{\#})}\!\diagup_{I_V},$$

где $I_V$ есть дифференциальный идеал в алгебре Пуассона $\mathrm{Pois}\langle v, v', v'', \dots\rangle$, порождённый $v \cdot v'$. Дальнейшие вычисления будет удобно собрать в лемму.

**Лемма 2.5.1.** В дифференциальной алгебре Пуассона $P_d(V)$ выполнены следующие соотношения:

$$0 = \{v,\ \{v^{(k_1)},\ \{\dots\{v^{(k_{p-1})},\ v^{(k_p)}\}\dots\}\cdot v, \tag{37}$$

для всех $k_1, \dots, k_p \geq 0$.

*Доказательство.* Применим индукцию по $p$. Пусть $p = 0$. Следуя идеям, развитым в работе [20], вычислим некоторые композиции определяющих соотношений в алгебре $P_d(V)$. Во-первых, поскольку $I_V$ является дифференциальным идеалом, мы получаем

$$\{v^{(p)}, (v \cdot v')^{(q)}\} = 0,$$

для всех $p$, $q \geq 0$. Применим к полученному равенству правило Лейбница:

$$0 = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} \{v^{(p)},\ v^{(i)} \cdot v^{(q+1-i)}\} = \sum_{i \geq 0} \binom{n+1}{i} \{v^{(p)},\ v^{(i)}\} \cdot v^{(q+1-i)}, \quad p,\ q \geq 0. \tag{38}$$

Выберем $k \geq p$, умножим (38) на $\binom{k+1}{p}$ и просуммируем по $p = \overline{0,k}$, полагая каждый раз $q = k - p$:

$$0 = \sum_{p=0}^{k} \binom{k+1}{p} \sum_{i=0}^{k-p+1} \binom{k-p+1}{i} \{v^{(p)},\ v^{(i)}\} \cdot v^{(k+1-i-p)}.$$

Изменим порядок суммирования, рассмотрев диагональ $i+p = l$, $l = \overline{0, k+1}$. Тогда равенство выше превратится в

$$0 = \sum_{l=0}^{k+1} \sum_{\substack{i,p=0 \\ i+p=l}}^{k} \binom{k+1}{p} \binom{k-p+1}{i} \{v^{(p)},\ v^{(i)}\} \cdot v^{(k+1-l)} + \{v,\ v^{(k+1)}\} \cdot v, \tag{39}$$

где произведение биномиальных коэффициентов,

$$\binom{k+1}{p}\binom{k-p+1}{i} = \frac{(k+1)!(k+1-p)!}{p!(k+1-p)!i!(k+1-p-i)!} = \frac{(k+1)!}{p!i!(k+1-p-i)!},$$

симметрично по вхождению $i$ и $p$. Следовательно, зафиксировав некоторое $l \in \overline{0, k+1}$, мы замечаем, что соответствующий слой в (39) зануляется, поскольку скобка кососимметрична. Получаем $\{v, v^{(k+1)}\} \cdot v = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, как и требовалось.

Пусть утверждение верно для $p-1$. Обозначим $\{v^{(k_1)}, \{\ldots \{v^{(k_{p-2})}, v^{(k_{p-1})}\} \ldots\} = u$. Следовательно, $\{v, u\} \cdot v = 0$ по предположению индукции. Рассмотрим $\{v^{(n)}, \{v, u\} \cdot v\} = 0$, для $n \in \mathbb{Z}_+$ и применим правило Лейбница:

$$0 = \{v^{(n)}, \{v, u\} \cdot v\} = \{v^{(n)}, \{v, u\}\} \cdot v + \{v,\ u\} \cdot \{v^{(n)}, v\}.$$

Перепишем данное равенство с помощью тождества Якоби и кососимметричности скобки:

$$\begin{aligned} 0 &= \{\{v^{(n)}, v\}, u\} \cdot v + \{v, \{v^{(n)}, u\}\} \cdot v + \{u, v\} \cdot \{v, v^{(n)}\} \\ &= \{u, \{v, v^{(n)}\}\} \cdot v + \{u, v\} \cdot \{v, v^{(n)}\} + \{v, \{v^{(n)}, u\}\} \cdot v \\ &= \{u, \{v, v^{(n)}\} \cdot v\} + \{v, \{v^{(n)}, u\}\} \cdot v, \end{aligned}$$

где первое слагаемое равно нулю по уже доказанному. Тем самым,

$$\{v, \{v^{(n)}, u\}\} \cdot v = 0,$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, что и требовалось. $\square$

Из леммы 2.5.1 и тождества Лейбница (2) немедленно следует, что

$$\{v, f\} \cdot v = 0, \tag{40}$$

для любого $f \in P_d(V)$.

Порождающий элемент $\varphi(v)$ ассоциативной алгебры $A(V)$ задаётся конформным эндоморфизмом

$$\varphi(v) = \tau(v) = 1 \otimes \operatorname{ad}_v + (x - \partial) \otimes L_{v'} - \partial \otimes L_v(d + \mathrm{id})$$

свободного $H$-модуля $H \otimes P_d(V)$. Рассмотрим $H$-базисный элемент

$$u = v_{\ (0)}\ (v_{\ (2)}\ v) \in \mathcal{U}(L(V), 3).$$

Тогда $\varphi(u) \in A(V)$, по модулю соотношений (21) — (23), получается из $\tau(v)_{\ (\mu)}\ (\tau(v)_{\ (\lambda)}\ \tau(v))$ как коэффициент при $\frac{1}{2}\mu^0\lambda^2$. В результате

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \tau(v)_{\ (0)}\ (\tau(v)_{\ (2)}\ \tau(v)) = (\operatorname{ad}_v + xL_{v'})(-2L_vL_v(d + \mathrm{id})^2) \\ &= -2\operatorname{ad}_v L_vL_v(d + \mathrm{id})^2 - 2xL_{v'}L_vL_v(d + \mathrm{id})^2, \end{aligned}$$

где второе слагаемое зануляется в $A(V)$ ввиду $v \cdot v' = 0$. Напомним, что $A(V)$ действует на соответствующем конформном модуле $H \otimes P_d(V)$ точно. Подействуем конформным гомоморфизмом $\tau(v)\ _{(0)}\ (\tau(v)\ _{(2)}\ \tau(v))$ на произвольный элемент $f \in P_d(V)$:

$$\begin{aligned}\tau(v)\ _{(0)}\ (\tau(v)\ _{(2)}\ \tau(v))_\mu f &= -2\operatorname{ad}_v L_v L_v (d+\mathrm{id})^2 f \\ &= -2\{v,\ v^2(d+\mathrm{id})^2 f\} = -2\{v,\ f'' + 2f' + f\}\cdot v^2. \quad (41)\end{aligned}$$

По (40), (37) зануляет правую часть (41), следовательно, $\tau(v)\ _{(0)}\ (\tau(v)\ _{(2)}\ \tau(v)) = 0$ и гомоморфизм $\varphi\colon \mathrm{As}\,\mathrm{Com}\,\mathrm{Conf}(v,3) \to A(V)$ неинъективен.

# Глава 3. Базисы Грёбнера — Ширшова для универсальных ассоциативных конформных обёртывающих алгебр

В данной главе будут исследоваться вопросы, связанные с построением универсальных обёртывающих ассоциативных конформных алгебр с ограничением на ассоциативную локальность для конформных алгебр Ли. В отличие от предыдущей главы, все результаты будут получены в рамках методологии, связанной с теорией базисов Грёбнера — Ширшова (БГШ). В данной диссертации мы придерживаемся подхода, разработанного П. С. Колесниковым, и представленного в работе [54]. С подробным описанием данного метода можно ознакомиться в §1.6.

Напомним, конформной алгеброй Каца — Муди (см. пример 7) называется центральное расширение конформной алгебры петель, построенной по произвольной алгебре Ли, снабжённой билинейной симметрической инвариантной формой $\langle\cdot|\cdot\rangle$. В явном виде она может быть записана как $K(\mathfrak{L}) = (H \otimes \mathfrak{L}) \oplus \Bbbk e$, где умножение задаётся по правилу:

$$[a\ {}_{(\lambda)}\ b] = [a, b] + \lambda\langle a|b\rangle e, \quad [a\ {}_{(\lambda)}\ e] = [e\ {}_{(\lambda)}\ e] = 0,$$

для всех $a$, $b \in \mathfrak{L}$, и $\partial e = 0$, т. е. одномерное пространство $\Bbbk e$ лежит в кручении.

Основным техническим результатом данной главы является построение БГШ универсальной обертывающей ассоциативной конформной алгебры $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}), 3)$ для $K(\mathfrak{L})$ при любой алгебре Ли $\mathfrak{L}$. Подробная формулировка будет дана в конце первого параграфа данной главы после изложения ряда необходимой предварительной информации. Во втором параграфе данной главы будет приведено вычисление набора композиций, достаточного для описания БГШ $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}), 3)$. Наконец, третий параграф будет посвящён обсуждению следствий, полученных из леммы о композиции, а также сопутствующих результатов. Среди них — основной структурный результат данной главы, а именно выполнение ПБВ-свойства для конформных алгебр Каца — Муди.

## § 3.1. Алгебра операторов и определяющие соотношения универсальной ассоциативной обертывающей конформной алгебры

Как показано в §1.6, всякую ассоциативную конформную алгебру $A$, порождённую как левый $H$-модуль множеством $B$ относительно функции локальности $N\colon B \times B \to \mathbb{Z}_+$, можно построить как фактор-алгебру свободной ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{As\,Conf}(B,N)$.

Напомним вкратце наиболее удобное представление $\mathrm{As\,Conf}(B,N)$, описанное в §1.6 и разработанное в статье [54]. Зафиксируем алфавит $\{\partial, L_n^a, R_n^a \mid a\in B,\ n\in\mathbb{Z}_+\}$ и рассмотрим ассоциативную алгебру

$$\mathfrak{A}(B) = {}^{\mathrm{As}\langle \partial, L_n^a, R_n^a \mid a\in B,\ n\in\mathbb{Z}_+\rangle}\!\big/_{\mathfrak{I}},$$

где $\mathfrak{I}$ есть идеал, порождённый соотношениями

$$\begin{aligned} &L_n^a\partial - \partial L_n^a - nL_{n-1}^a,\\ &R_m^a\partial - \partial R_m^a - mR_{m-1}^a,\\ &R_m^aL_n^b - L_n^bR_m^a, \end{aligned}$$

для всех $a,\ b\in B$, $n,\ m\in\mathbb{Z}_+$. Построим свободный левый $\mathfrak{A}(B)$-модуль $F(B)$, порождённый множеством $B$, и рассмотрим фактор-модуль $F(B,N)$ по соотношениям

$$\begin{aligned} &L_m^ab, \quad m\ge N(a,b),\\ &R_n^ba - \sum_{s=0}^{N(a,b)-n}(-1)^{n+s}\frac{\partial^s}{s!}L_{n+s}^ab, \end{aligned}$$

для всех $a,\ b\in B$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Тогда $\mathrm{As\,Conf}(B,N)\cong F(B,N)$ как левый $\mathfrak{A}(B)$-модуль.

Пусть $L$ будет конформной алгеброй Ли, порождённой множеством $B$. Тогда, аналогично ассоциативному случаю, $L$ является фактор-алгеброй свободной алгебры Ли $\mathrm{Lie\,Conf}(B,N)$ с некоторой функцией локальности $N$ на $B$ по идеалу $\Sigma$, порождённому некоторым набором соотношений, выраженных в терминах лиевых $n$-произведений $[\cdot\ _{(n)}\ \cdot]$ и операции $\partial$ от переменных $B$. Подробное описание данного подхода приведено в работе М. Ройтмана [65].

Для данной функции локальности $N\colon B\times B\to\mathbb{Z}_+$ универсальная обёртывающая ассоциативная конформная алгебра $\mathcal{U}(L,N)$, порождённая множеством $B$ относительно границы ассоциативной локальности $N$, является фактор-алгеброй от $\mathrm{As\,Conf}(B,N)$ по модулю соотношений, полученных из $\Sigma$ согласно правилу

$$[a\ _{(n)}\ b] = (a\ _{(n)}\ b) - \{a\ _{(n)}\ b\},$$

для всех $a,\ b\in B$. Мы слегка модернизируем метод, описанный в §1.6, что позволит нам избавиться от соотношений (18).

Обозначим через $I_t$ кручение конформной алгебры Ли $L$ как $H$-модуля и допустим, что фактор-алгебра $L_f = {}^{L}\!\big/_{I_t}$ есть свободный $H$-модуль. Например, данное свойство верно для любой конформной алгебры Ли конечного типа. Пусть $B = B_f\cup B_t$, где $B_f$ есть $H$-базис пространства $L_f$, а $B_t$ есть $\Bbbk$-базис идеала $I_t$. Тогда структура $L$ полностью описывается соотношениями

$$\begin{aligned} &f_e(\partial)e = 0, \\ &[a_{\ (n)}\ b] = \sum_{x\in B_f} f_{a,b}^{n,x}(\partial)x + \sum_{e\in B_t} g_{a,b}^{n,e}(\partial)e, \end{aligned}$$

для всех $e \in B_t$, $a$, $b \in B_f$, и подходящих "структурных констант" $f_e(\partial)$, $f_{a,b}^{n,x}(\partial)$, $g_{a,b}^{n,e}(\partial) \in \Bbbk[\partial]$. Данные соотношения описывают свойство кручения на $I_t$, таблицу умножения на $L_f$ и структуру расширения

$$0 \to I_t \to L \to L_f \to 0.$$

Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathfrak{A}(B_f, L) = {}^{\mathfrak{A}(B_f)}\!/\!_{\mathfrak{I}}$, где $\mathfrak{I}$ есть идеал, порождённый соотношениями вида

$$L_n^a L_m^b - L_m^b L_n^a - \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \binom{n}{s} \sum_{x\in B_f} L_{n+m-s}^{f_{a,b}^{s,x}(\partial)x}, \tag{42}$$

для всех $a$, $b \in B_f$, $n$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Будем понимать операторы вида $L_n^{\partial x}$ как $-nL_{n-1}^x$, согласно аксиоме (C2) конформной алгебры. Очевидно, для данной функции локальности $N$: $B_f \times B_f \to \mathbb{Z}_+$ ассоциативная конформная алгебра $\mathcal{U}(L, N)$ является левым модулем над $\mathfrak{A}(B_f, L)$, поскольку новое соотношение (42) задаёт аксиому (ML) (или эквивалентную ей аксиому (RL)), выполненную на $\mathcal{U}(L, N)^{(-)}$ и отражающую её свойства как ассоциативной обёртывающей конформной алгебры.

Легко видеть, что, $\mathcal{U}(L, N)$ порождается как левый $\mathfrak{A}(B_f, L)$-модуль множеством $B$ по модулю следующих соотношений:

$$f_e(\partial)e, \tag{43}$$

$$L_n^a e, \quad R_n^a e, \tag{44}$$

$$R_n^a - L_n^a + [a_{\ (n)}\ b], \tag{45}$$

для всех $a$, $b \in B_f$, $e \in B_t$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для того, чтобы определить структуру $\mathcal{U}(L, N)$, нам необходимо вычислить все следствия из соотношений (13) — (17), (42) — (45) и задать тем самым конфлюэнтную систему переписывающих правил.

Пусть $\mathfrak{L}$ будет алгеброй Ли, снабжённой билинейной симметрической инвариантной формой $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Проделаем описанный выше процесс для конформной алгебры Каца — Муди $K(\mathfrak{L})$ и границы ассоциативной локальности $N = 3$. По построению, $B_f$ есть линейный базис пространства $\mathfrak{L}$. Следовательно, $B = B_f \cup \{e\}$ есть $H$-базис $K(\mathfrak{L})$. Тогда $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}), 3)$ есть левый модуль над ассоциативной алгеброй $\mathfrak{A}(B, K(\mathfrak{L}))$, порождённой множеством $\{\partial, L_n^a, R_n^a \mid a \in B_f,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ по модулю соотношений (13)–(15) и соотношения (42), которое в данном случае будет записываться как

$$L_n^a L_m^b - L_m^b L_n^a - L_{n+m}^{[a,b]}, \tag{46}$$

для всех $a, b \in B_f$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. В свою очередь, соотношения (16), (17), (44) и (45) перепишутся как

$$L_n^a b, \quad R_n^a b, \quad n \geq N = 3, \tag{47}$$

$$L_n^a e, \quad R_n^a e, \quad n \geq 0, \tag{48}$$

$$R_0^a b - L_0^b a + \partial L_1^b a - \frac{1}{2}\partial^2 L_2^b a, \qquad R_0^a b - L_0^a b + [a,b], \tag{49}$$

$$R_1^a b + L_1^b a - \partial L_2^b a, \qquad R_1^a b - L_1^a b + \langle a|b\rangle e, \tag{50}$$

$$R_2^a b - L_2^b a, \qquad R_2^a b - L_2^a b, \tag{51}$$

для всех $a$, $b \in B_f$. Для того, чтобы превратить данные соотношения в переписывающую систему, нам необходимо выбрать старшую часть согласно какого-либо мономиального порядка. Положим, на $B$ задан некоторый порядок $\leq$, причём, $e < B_f$. Индуцируем им порядок $\leq$ на алфавите $X = \{\partial, L_n^a, R_n^a \mid a \in B_f,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ по следующему правилу:

$$L_0^a < L_1^a < \partial < L_2^a < \ldots < R_0^b < R_1^b < \ldots,$$

причём

$$L_n^a < L_n^b, \quad R_n^a < R_n^b \text{ при } a < b,$$

для всех $a$, $b \in B_f$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Продолжим порядок $\leq$ на множество мономов $X^*$ по принципу главенства степени, затем лексикографически (порядок deglex). Для двух мономов $xa$, $yb \in \Bbbk\langle X\rangle B$, $x$, $y \in X^*$, $a$, $b \in B$, положим $xa \preceq yb$, если $(x,a) \leq (y,b)$ лексикографически.

Согласно данного порядка, определим во всех необходимых нам соотношениях старшие части. Переписывающие правила, возникающие из соотношений (49) — (51) имеют композиции включения. Распишем подробнее только первую из них, поскольку остальные очевидны.

$$R_0^a b \to L_0^a b - [a,b]; \quad R_0^a b \to L_0^b a - \partial L_1^b a + \frac{1}{2}\partial^2 L_2^b a \xrightarrow{(53)} 2L_0^b a - L_1^b \partial a + \frac{1}{2}\partial^2 L_2^b a$$
$$\xrightarrow{(64)} 2L_0^b a - L_1^b \partial a + \frac{1}{2}\partial L_1^a b + \frac{1}{2}\partial L_1^b a - \frac{1}{2}\partial(a|b)e \xrightarrow{(53),(59)} \frac{3}{2}L_0^b a - \frac{1}{2}L_1^b \partial a + \frac{1}{2}L_1^a \partial b - \frac{1}{2}L_0^a b.$$

В результате мы получим систему переписывающих правил следующего вида:

$$\partial L_0^a \to L_0^a \partial, \tag{52}$$

$$\partial L_1^a \to L_1^a \partial - L_0^a, \tag{53}$$

$$L_n^a \partial \to \partial L_n^a + n L_{n-1}^a, \quad n \geq 2, \tag{54}$$

$$R_m^a \partial \to \partial R_m^a + m R_{m-1}^a, \quad m \geq 0, \tag{55}$$

$$R_n^a L_m^b \to L_m^b R_n^a, \quad m,\ n \geq 0 \tag{56}$$

$$L_n^a L_m^b \to L_m^b L_n^a + L_{n+m}^{[a,b]}, \quad n,\ m \geq 0, \quad (n,a) >_{lex} (m,b), \tag{57}$$

$$L_n^a b \to 0, \quad R_n^a b \to 0, \quad n \geq N = 3, \tag{58}$$

$$L_n^a e \to 0, \quad R_n^a e \to 0, \quad \partial e \to 0, \quad n \geq 0, \tag{59}$$

$$R_0^a b \to L_0^a b - [a,b], \tag{60}$$

$$R_1^a b \to L_1^a b - \langle a|b\rangle e, \tag{61}$$

$$R_2^a b \to L_2^a b, \tag{62}$$

$$L_1^a \partial b \to L_1^b \partial a - 3L_0^b a + 3L_0^a b - 2[a,b], \quad a > b, \tag{63}$$

$$\partial L_2^a b \to L_1^a b + L_1^b a - \langle a|b\rangle e, \tag{64}$$

$$L_2^a b \to L_2^b a, \quad a > b. \tag{65}$$

Наконец, мы можем сформулировать основную теорему данной главы.

**Теорема 3.** *Пусть $K(\mathfrak{L})$ есть конформная алгебра Каца — Муди, построенная по алгебре Ли $\mathfrak{L}$ с билинейной симметрической инвариантной формой $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Пусть $B_f$ есть линейный базис $\mathfrak{L}$ с заданным на нём порядком $\leq$. Тогда базис Грёбнера — Ширшова универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3)$ состоит из переписывающих правил* (52)–(65) *и результатов их композиций ($a,\ b,\ c \in B_f$):*

$$L_1^a \partial^s b \to L_1^b \partial^s a - (s+2)L_0^b \partial^{s-1} a + (s+2)L_0^a \partial^{s-1} b - 2\partial^{s-1}[a,b], \quad s \geq 2, \quad a > b, \tag{66}$$

$$L_2^a L_2^b c \to 0, \quad a \leq b \leq c, \tag{67}$$

$$L_1^a L_2^b c \to L_1^b L_2^c a, \quad b \leq c < a, \tag{68}$$

$$L_1^a L_2^b c \to L_1^b L_2^a c, \quad b < a \leq c \tag{69}$$

$$L_1^a L_1^b c \to L_1^a L_1^c b + L_0^b L_2^a c - L_0^c L_2^a b + L_2^a[c,b] + L_2^b[c,a] + L_2^c[a,b], \quad a \leq c < b, \tag{70}$$

$$L_1^a L_1^b c \to L_1^c L_1^a b + L_0^b L_2^c a - L_0^c L_2^a b + L_2^a[c,b] + L_2^c[a,b], \quad c < a \leq b, \tag{71}$$

$$\begin{aligned} L_0^a L_1^b c \to{} & L_0^b L_1^a c + L_0^c L_1^b a + L_0^a L_1^c b - L_0^b L_1^c a - L_0^c L_1^a b \\ & + L_1^{[a,b]} c + L_1^{[b,c]} a + L_1^{[c,a]} b - L_1^a[b,c] - L_1^b[c,a] - L_1^c[a,b] + \langle a|[b,c]\rangle e, \quad c < b < a. \end{aligned} \tag{72, 73}$$

## § 3.2. Доказательство теоремы 3

На первом шаге мы выведем переписывающие правила (66) — (73). Рассмотрим пересечение правил (53) и (63). Индукцией по количеству итераций легко получить правило (66). Действительно, для $s \geq 2$ мы имеем:

$$\begin{aligned}
&\partial L_1^a \partial^s b \to L_1^a \partial^{s+1} b - L_0^a \partial^s b;\\
&\partial L_1^a \partial^s b \to \partial(L_1^b \partial^s a - (s+2)L_0^b \partial^{s-1} a + (s+2)L_0^a \partial^{s-1} b - 2\partial^{s-1}[a,b])\\
&\qquad \xrightarrow[(53)]{(52)} L_1^b \partial^{s+1} a - (s+3)L_0^b \partial^s a + (s+2)L_0^a \partial^s b - 2\partial^s [a,b].
\end{aligned}$$

Правило (67) получается из пересечения (54) для $n = 3$ и (64):

$$\begin{aligned}
&L_3^a \partial L_2^b c \to L_3^a (L_1^b c + L_1^c b - \langle b|c\rangle e) \xrightarrow[(58),(59)]{(57)} 0;\\
&L_3^a \partial L_2^b c \to \partial L_3^a L_2^b c + 3L_2^a L_2^b c.
\end{aligned}$$

Применение правил (57), (65) и (58) позволяет упорядочить порождающие нужным образом.

Остальные переписывающие правила получаются из пересечения (56) при $m = 1$ и (63) в зависимости от выбора параметра $n$. В самом деле, предварительно мы получаем:

$$\begin{aligned}
&R_n^a L_1^b \partial c \to L_1^b R_n^a \partial c \xrightarrow{(55)} L_1^b \partial R_n^a c + n L_1^b R_{n-1}^a c;\\
&R_n^a L_1^b \partial c \to R_n^a L_1^c \partial b - 3R_n^a L_0^c b + 3R_n^a L_0^b c - 2R_n^a [b,c]\\
&\qquad \xrightarrow{(56)} L_1^c R_n^a \partial b - 3L_0^c R_n^a b + 3L_0^b R_n^a c - 2R_n^a [b,c]\\
&\qquad \xrightarrow{(55)} L_1^c \partial R_n^a b + n L_1^c R_{n-1}^a b - 3L_0^c R_n^a b + 3L_0^b R_n^a c - 2R_n^a [b,c].
\end{aligned}$$

Вообще говоря, правило (63) применимо лишь в предположении $b > c$. Однако, выражение полученное в результате композиции,

$$L_1^b \partial R_n^a c + n L_1^b R_{n-1}^a c - L_1^c \partial R_n^a b - n L_1^c R_{n-1}^a b + 3L_0^c R_n^a b - 3L_0^b R_n^a c + 2R_n^a [b,c], \tag{74}$$

кососимметрично относительно перестановки элементов $b$ и $c$. Следовательно, можно положить, что соотношение (74) выполняется на $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}), 3)$ для любых $a$, $b$, $c \in B_f$.

Ввиду аксиомы локальности, выраженной в правиле (58), соотношение (74) и, следовательно, задающая его композиция тривиальны. Положим $n = 3$ и применим (58), (62), чтобы получить на $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}), 3)$ соотношение

$$L_1^b L_2^a c - L_1^c L_2^a b, \tag{75}$$

для любых $a$, $b$, $c \in B_f$. В зависимости от того, как соотносятся произвольные элементы $a$,

$b$, $c$ согласно изначального порядка $\leq$ на множестве $B_f$, мы получаем (68) и (69), применяя, где необходимо, соотношение (65).

Рассмотрим (74) для $n = 2$, разбив его предварительно на две части, представляющие разные ветви в графе, исходящие из вершины $R^a_n L^b_1 \partial c$:

$$(L^b_1 \partial R^a_2 c + 2L^b_1 R^a_1 c) - (L^c_1 \partial R^a_2 b + 2L^c_1 R^a_1 b - 3L^c_0 R^a_2 b + 3L^b_0 R^a_2 c - 2R^a_2[b, c]).$$

Тогда первая ветвь продолжится как

$$\begin{aligned} L^b_1 \partial R^a_2 c + 2L^b_1 R^a_1 c &\xrightarrow{(61),(62)} L^b_1 \partial L^a_2 c + 2L^b_1 L^a_1 c - 2\langle a|c\rangle L^b_1 e \\ &\xrightarrow{(59),(64)} L^b_1 L^a_1 c + L^b_1 L^c_1 a - \langle a|c\rangle L^b_1 e + 2L^b_1 L^a_1 c \\ &\xrightarrow[(65)]{(57),(59)} 3L^b_1 L^a_1 c + L^c_1 L^b_1 a + L^a_2[b, c]. \end{aligned}$$

С другой стороны получаем

$$\begin{aligned} &L^c_1 \partial R^a_2 b + 2L^c_1 R^a_1 b - 3L^c_0 R^a_2 b + 3L^b_0 R^a_2 c - 2R^a_2[b, c] \\ &\qquad \xrightarrow{(61),(62)} L^c_1 \partial L^a_2 b + 2L^c_1 L^a_1 b - 2\langle a|b\rangle L^c_1 e - 3L^c_0 L^a_2 b + 3L^b_0 L^a_2 c - 2L^a_2[b, c] \\ &\qquad \xrightarrow{(64),(59)} L^c_1 L^a_1 b + L^c_1 L^b_1 a - \langle a|b\rangle L^c_1 e + 2L^c_1 L^a_1 b - 3L^c_0 L^a_2 b + 3L^b_0 L^a_2 c - 2L^a_2[b, c] \\ &\qquad \xrightarrow{(59)} 3L^c_1 L^a_1 b + L^c_1 L^b_1 a - 3L^c_0 L^a_2 b + 3L^b_0 L^a_2 c - 2L^a_2[b, c]. \end{aligned}$$

Таким образом, разность приведённых ветвей даст следующее соотношение:

$$L^b_1 L^a_1 c - L^c_1 L^a_1 b - L^b_0 L^a_2 c + L^c_0 L^a_2 b + L^a_2[b, c], \tag{76}$$

для любых $a$, $b$, $c \in B_f$. Прежде чем выбрать в полученном соотношении старшую часть согласно порядку на $a$, $b$, $c$, перепишем (76) в более удобном виде. Для этого вычтем из (76) его же, но с переставленными элементами $a$ и $b$:

$$L^b_1 L^a_1 c - L^c_1 L^a_1 b - L^b_0 L^a_2 c + L^c_0 L^a_2 b + L^a_2[b, c] - L^a_1 L^b_1 c + L^c_1 L^b_1 a + L^a_0 L^b_2 c - L^c_0 L^b_2 a - L^b_2[a, c].$$

Применим к полученному выражению правила (57) для $n = m = 1$ и (65), чтобы получить окончательный вид:

$$-L^c_1 L^a_1 b + L^c_1 L^b_1 a - L^b_0 L^a_2 c + L^a_0 L^b_2 c + L^a_2[b, c] + L^b_2[c, a] + L^c_2[b, a]. \tag{77}$$

Теперь фиксируем порядок на $a$, $b$, $c \in B_f$ и, применяя при необходимости правила (57) для $n = m = 1$ и (65), выбираем старшую часть. Таким образом мы получим переписывающие правила (70) и (71).

Для $n = 1$, выполнив предварительно уже показанное разбиение,

$$(L_1^b\partial R_1^a c + L_1^b R_0^a c) - (L_1^c \partial R_1^a b + L_1^c R_0^a b - 3L_0^c R_1^a b + 3L_0^b R_1^a c - 2R_1^a[b,c]),$$

мы получим в первой ветви

$$\begin{aligned}
L_1^b\partial R_1^a c + 2L_1^b R_0^a c &\xrightarrow{(60),(61)} L_1^b\partial L_1^a c + L_1^b L_0^a c - L_1^b[a,c] \xrightarrow{(53)} L_1^b L_1^a \partial c - L_1^b L_0^a c + L_1^b L_0^a c - L_1^b[a,c] \\
&\xrightarrow{(63)} L_1^b L_1^c \partial a - 3L_1^b L_0^c a + 3L_1^b L_0^a c - 3L_1^b[a,c] \\
&\xrightarrow{(57)} L_1^c L_1^b \partial a + L_2^{[b,c]}\partial a - 3L_0^c L_1^b a - 3L_1^{[b,c]} a + 3L_0^a L_1^b c + 3L_1^{[b,a]} c - 3L_1^b[a,c] \\
&\xrightarrow[(64)]{(54)} L_1^c L_1^b \partial a + L_1^a[b,c] - \langle a|[b,c]\rangle e - 3L_0^c L_1^b a + 3L_0^a L_1^b c + 3L_1^{[b,a]} c - 3L_1^b[a,c].
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&L_1^c\partial R_1^a b + 2L_1^c R_0^a b - 3L_0^c R_1^a b + 3L_0^b R_1^a c - 2R_1^a[b,c] \\
&\quad\xrightarrow{(60),(61)} L_1^c\partial L_1^a b + L_1^c L_0^a b - L_1^c[a,b] - 3L_0^c L_1^a b + 3L_0^b L_1^a c - 2L_1^a[b,c] + 2\langle a|[b,c]\rangle e \\
&\quad\xrightarrow{(53)} L_1^c L_1^a \partial b - L_1^c[a,b] - 3L_0^c L_1^a b + 3L_0^b L_1^a c - 2L_1^a[b,c] + 2\langle a|[b,c]\rangle e \\
&\quad\xrightarrow{(63)} L_1^c L_1^b \partial a - 3L_1^c L_0^b a + 3L_1^c L_0^a b - 3L_1^c[a,b] - 3L_0^c L_1^a b + 3L_0^b L_1^a c - 2L_1^a[b,c] + 2\langle a|[b,c]\rangle e \\
&\quad\xrightarrow{(57)} L_1^c L_1^b \partial a - 3L_0^b L_1^c a - 3L_1^{[c,b]} a + 3L_0^a L_1^c b + 3L_1^{[c,a]} b - 3L_1^c[a,b] \\
&\qquad\qquad - 3L_0^c L_1^a b + 3L_0^b L_1^a c - 2L_1^a[b,c] + 2\langle a|[b,c]\rangle e.
\end{aligned}$$

После вычитания мы получим выражение,

$$\begin{aligned}
&L_1^a[b,c] - \langle a|[b,c]\rangle e - L_0^c L_1^b a + L_0^a L_1^b c + L_1^{[b,a]} c - L_1^b[a,c] + L_0^b L_1^c a \\
&\qquad + L_1^{[c,b]} a - L_0^a L_1^c b - L_1^{[c,a]} b + L_1^c[a,b] + L_0^c L_1^a b - L_0^b L_1^a c,
\end{aligned}$$

симметричное по $a$, $b$, $c \in B_f$. Следовательно, мы можем зафиксировать порядок $c < b < a$, что даст $L_0^a L_1^b c$ как старшую часть, а вместе с тем и переписывающее правило (73).

Мы получили семейство переписывающих правил, заявленных в теореме. Осталось проверить, что оно полное, то есть других нетривиальных композиций нет. Убедимся в этом на нескольких примерах. Во-первых, рассмотрим оставшийся случай $n = 0$ в выражении (74). Получим

$$L_1^b\partial R_1^a c - (L_1^c\partial R_1^a b - 3L_0^c R_1^a b + 3L_0^b R_1^a c - 2R_1^a[b,c]),$$

что перепишется как

$$\begin{aligned}
L_1^b\partial R_0^a c &\xrightarrow{(60)} L_1^b\partial L_0^a c - L_1^b\partial[a,c] \xrightarrow[(57)]{(52)} L_0^a L_1^b \partial c + L_1^{[b,a]}\partial c - L_1^b\partial[a,c] \\
&\xrightarrow{(63)} L_0^a L_1^c \partial b - 3L_0^a L_0^c b + 3L_0^a L_0^b c - 2L_0^a[b,c] + L_1^c\partial[b,a] - 3L_0^c[b,a] \\
&\qquad + 3L_0^{[b,a]} c - 2[[b,a],c] - L_1^{[a,c]}\partial b + 3L_0^{[a,c]} b - 3L_0^b[a,c] - 2[[a,c],b]
\end{aligned}$$

с одной стороны, и как

$$
\begin{aligned}
&L_1^c\partial R_0^a b - 3L_0^c R_0^a b + 3L_0^b R_0^a c - 2R_0^a[b,c] \\
&\quad\xrightarrow{(60)} L_1^c\partial L_0^a b - L_1^c\partial[a,b] - 3L_0^c L_0^a b + 3L_0^c[a,b] + 3L_0^b L_0^a c - 3L_0^b[a,c] - 2L_0^a[b,c] + 2[a,[b,c]] \\
&\quad\xrightarrow[(57)]{(52)} L_0^a L_1^c\partial b + L_1^{[c,a]}\partial b - L_1^c\partial[a,b] - 3L_0^c L_0^a b - 3L_0^{[c,a]} b + 3L_0^c[a,b] + 3L_0^a L_0^b c \\
&\qquad\qquad + 3L_0^{[b,a]} c - 3L_0^b[a,c] - 2L_0^a[b,c] + 2[a,[b,c]]
\end{aligned}
$$

с другой. Легко видеть, что разность полученных выражений занулится ввиду выполнения аксиомы кососимметричности и тождества Якоби на порождающих $a$, $b$, $c \in B_f$.

Далее рассмотрим несколько композиций степени четыре. В качестве начального примера рассмотрим композицию пересечения правил (53) и (68). Для всех $b \le c < a$, $a$, $b$, $c \in B_f$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&\partial L_1^a L_2^b c \to L_1^a \partial L_2^b c - L_0^a L_2^b c \xrightarrow{(64)} L_1^a L_1^b c + L_1^a L_1^c b - L_1^a\langle b|c\rangle e - L_0^a L_2^b c \\
&\qquad \xrightarrow{(57),(59)} L_1^b L_1^a c + L_2^{[a,b]} c + L_1^c L_1^a b + L_2^{[a,c]} b - L_0^a L_2^b c \\
&\partial L_1^a L_2^b c \to \partial L_1^b L_2^c a \xrightarrow{(53)} L_1^b \partial L_2^c a - L_0^b L_2^c a \xrightarrow{(64),(59)} L_1^b L_1^c a + L_1^b L_1^a c - L_0^b L_2^c a.
\end{aligned}
$$

Если $b \ne c$, то первая ветвь может быть переписана по правилу (71) в виде:

$$
\begin{aligned}
&L_1^b L_1^a c + L_2^{[a,b]} c + (L_1^b L_1^c a + L_0^a L_2^b c - L_0^b L_2^c a + L_2^c[b,a] + L_2^b[c,a]) + L_2^{[a,c]} b - L_0^a L_2^b c \\
&\xrightarrow{(65)} L_1^b L_1^a c + L_1^b L_1^c a - L_0^b L_2^c a.
\end{aligned}
$$

Результаты переписывания совпали, следовательно, композиция тривиальна.

В качестве более сложного примера возьмём композицию пересечения правил (56) для $m = 1$ и (70). Данная композиция будет достаточно показательной, но не перегруженной вычислениями. Получаем следующие выражения, для $a \le b < c$ и произвольного $d \in B_f$:

$$
\begin{aligned}
&R_n^d L_1^a L_1^b c \to L_1^a L_1^b R_n^d c; \\
&R_n^d L_1^a L_1^b c \to R_n^d L_1^a L_1^c b + R_n^d L_0^b L_2^a c - R_n^d L_0^c L_2^a b + R_n^d L_2^a[b,c] + R_n^d L_2^b[c,a] + R_n^d L_2^c[a,b] \\
&\qquad \xrightarrow{(56)} L_1^a L_1^c R_n^d b + L_0^b L_2^a R_n^d c - L_0^c L_2^a R_n^d b + L_2^a R_n^d[b,c] + L_2^b R_n^d[c,a] + L_2^c R_n^d[a,b].
\end{aligned}
$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, разобьём дальнейшую проверку на случаи. Для $n \ge 3$ разность выражений будет тривиальной ввиду локальности. Для $n = 2$ получаем

$$
\begin{aligned}
&-L_1^a L_1^b R_n^d c + L_1^a L_1^c R_n^d b + L_0^b L_2^a R_n^d c - L_0^c L_2^a R_n^d b + L_2^a R_n^d[b,c] + L_2^b R_n^d[c,a] + L_2^c R_n^d[a,b] \\
&\quad \xrightarrow{(62)} -L_1^a L_1^b L_2^d c + L_1^a L_1^c L_2^d b + L_0^b L_2^a L_2^d c - L_0^c L_2^a L_2^d b + L_2^a L_2^d[c,b] + L_2^b L_2^d[c,a] + L_2^c L_2^d[a,b] \\
&\quad \xrightarrow[(65),(67)]{(57),(58)} -L_1^a L_1^b L_2^d c + L_1^a L_1^c L_2^d b.
\end{aligned}
$$

Последнее выражение обращается в нуль по модулю соотношения (75), следовательно, и по модулю переписывающих правил (68), (69) при любом порядке $d$ относительно остальных порождающих.

Для $n = 1$ получаем

$$
\begin{aligned}
-L_1^a L_1^b R_1^d c &+ L_1^a L_1^c R_1^d b + L_0^b L_2^a R_1^d c - L_0^c L_2^a R_1^d b + L_2^a R_1^d [c,b] + L_2^b R_1^d [c,a] + L_2^c R_1^d [a,b] \\
&\xrightarrow[(59)]{(61)} -L_1^a L_1^b L_1^d c + L_1^a L_1^c L_1^d b + L_0^b L_2^a L_1^d c - L_0^c L_2^a L_1^d b + L_2^a L_1^d [c,b] + L_2^b L_1^d [c,a] + L_2^c L_1^d [a,b].
\end{aligned}
$$

Здесь и далее мы опускаем слагаемые, содержащие элемент кручения $e$, поскольку он всегда будет аннулироваться действием оператора $L$. Продолжим переписывать полученное выражение:

$$
\begin{aligned}
&-L_1^a L_1^b L_1^d c + L_1^a L_1^c L_1^d b + L_0^b L_2^a L_1^d c - L_0^c L_2^a L_1^d b + L_2^a L_1^d [c,b] + L_2^b L_1^d [c,a] + L_2^c L_1^d [a,b] \\
&\xrightarrow{(57),(76)} -L_1^a L_0^b L_2^d c + L_1^a L_0^c L_2^d b + L_1^a L_2^d [b,c] + L_0^b L_1^d L_2^a c + L_0^b L_3^{[a,d]} c - L_0^c L_1^d L_2^a b - L_0^c L_3^{[a,d]} b \\
&\qquad + L_1^d L_2^a [c,b] + L_3^{[a,d]} [c,b] + L_1^d L_2^b [c,a] + L_3^{[b,d]} [c,a] + L_1^d L_2^c [a,b] + L_3^{[c,d]} [a,b] \\
&\xrightarrow{(57),(58)} -L_0^b L_1^a L_2^d c - L_1^{[a,b]} L_2^d c + L_0^c L_1^a L_2^d b + L_1^{[a,c]} L_2^d b + L_1^a L_2^d [b,c] \\
&\qquad + L_0^b L_1^d L_2^a c - L_0^c L_1^d L_2^a b - L_1^d L_2^a [b,c] - L_1^d L_2^b [a,c] + L_1^d L_2^c [a,b].
\end{aligned}
$$

Последнее выражение обращается в нуль по модулю правила (65) и тождества (75), что и требовалось.

Наконец, случай $n = 0$. Сначала преобразуем полученные ветви отдельно. С одной стороны имеем

$$
L_1^a L_1^b R_0^d c \xrightarrow{(60)} L_1^a L_1^b L_0^d c - L_1^a L_1^b [d,c] \xrightarrow{(57)} L_0^d L_1^a L_1^b c + L_1^a L_1^{[b,d]} c + L_1^{[a,d]} L_1^b c - L_1^a L_1^b [d,c],
$$

с другой стороны,

$$
\begin{aligned}
&L_1^a L_1^c R_0^d b + L_0^b L_2^a R_0^d c - L_0^c L_2^a R_0^d b + L_2^a R_0^d [c,b] + L_2^b R_0^d [c,a] + L_2^c R_0^d [a,b] \\
&\xrightarrow{(60)} L_1^a L_1^c L_0^d b - L_1^a L_1^c [d,b] + L_0^b L_2^a L_0^d c - L_0^b L_2^a [d,c] - L_0^c L_2^a L_0^d b + L_0^c L_2^a [d,b] \\
&\qquad + L_2^a L_0^d [c,b] - L_2^a [d,[c,b]] + L_2^b L_0^d [c,a] - L_2^b [d,[c,a]] + L_2^c L_0^d [a,b] - L_2^c [d,[a,b]] \\
&\qquad L_0^d L_1^a L_1^c b + L_1^a L_1^{[c,d]} b + L_1^{[a,d]} L_1^c b - L_1^a L_1^c [d,b] + L_0^d L_0^b L_2^a c + L_0^{[b,d]} L_2^a c + L_0^b L_2^{[a,d]} c \\
&\xrightarrow{(57)} -L_0^b L_2^a [d,c] - L_0^d L_0^c L_2^a b - L_0^{[c,d]} L_2^a b - L_0^c L_2^{[a,d]} b + L_0^c L_2^a [d,b] + L_0^d L_2^a [c,b] + L_2^{[a,d]} [c,b] \\
&\qquad - L_2^a [d,[c,b]] + L_0^d L_2^b [c,a] + L_2^{[b,d]} [c,a] - L_2^b [d,[c,a]] + L_0^d L_2^c [a,b] + L_2^{[c,d]} [a,b] - L_2^c [d,[a,b]].
\end{aligned}
$$

Рассмотрим разность полученных выражений и воспользуемся тождеством Якоби для некоторых слагаемых:

$$L_2^a[d,[c,b]] = -L_2^a[c,[b,d]] - L_2^a[[c,d],b], \quad L_2^b[d,[c,a]] = -L_2^b[c,[a,d]] - L_2^b[[c,d],a],$$
$$L_2^c[d,[a,b]] = -L_2^c[a,[b,d]] - L_2^c[[a,d],b].$$

Затем разобьём слагаемые на четыре группы: в первую соберём все слова, начинающиеся на $L_0^d$, остальные слагаемые разделим по наличию, соответственно, скобок вида $[a,d]$, $[b,d]$ и $[c,d]$. Полученное выражение

$$\begin{aligned}
&L_0^d(L_1^aL_1^bc - L_1^aL_1^cb + L_0^cL_2^ab - L_0^bL_2^ac + L_2^a[b,c] + L_2^b[a,c] + L_2^c[b,a])\\
&\quad -(L_1^{[a,d]}L_1^cb - L_1^{[a,d]}L_1^bc + L_0^bL_2^{[a,d]}c - L_0^cL_2^{[a,d]}b + L_2^{[a,d]}[c,b] + L_2^b[c,[a,d]] + L_2^c[[a,d],b])\\
&\quad\quad -(L_1^aL_1^c[b,d] - L_1^aL_1^{[b,d]}c + L_0^{[b,d]}L_2^ac - L_0^cL_2^a[b,d] + L_2^a[c,[b,d]] + L_2^{[b,d]}[c,a] + L_2^c[a,[b,d]])\\
&\quad\quad\quad -(L_1^aL_1^{[c,d]}b - L_1^aL_1^b[c,d] + L_0^bL_2^a[c,d] - L_0^{[c,d]}L_2^ab + L_2^a[[c,d],b] + L_2^b[[c,d],a] + L_2^{[c,d]}[a,b]),
\end{aligned}$$

обращается в нуль по модулю соотношения (77). Тривиальность остальных композиций вычисляется аналогично.

## § 3.3. ПБВ-свойство для конформных алгебр Каца — Муди

Воспользуемся леммой о композиции, чтобы получить линейный базис универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3)$. Он будет состоять из всех редуцированных слов по модулю старших частей переписывающих правил, входящих в базис Грёбнера — Ширшова:

$$\begin{aligned}
&e,\\
&L_0^{a_1}\dots L_0^{a_n}L_1^{b_1}\dots L_1^{b_m}L_2^cu, \quad a_i\le a_{i+1},\ b_i\le b_{i+1}\le c\le u, \quad n,\ m\ge 0,\\
&L_0^{a_1}\dots L_0^{a_n}L_1^{b_1}\dots L_1^{b_m}\partial^sc, \quad a_i\le a_{i+1},\ b_i\le b_{i+1}\le c, \quad n,\ m\ge 0,\ s\ge 1,\\
&L_0^{a_1}\dots L_0^{a_n}L_1^{b_1}\dots L_1^{b_m}c, \quad a_i\le a_{i+1},\ b_i\le b_{i+1}\le c, \quad n\ge 0,\ m=0 \text{ или } m\ge 2,\\
&L_0^{a_1}\dots L_0^{a_n}L_1^bc, \quad a_i\le a_{i+1},\ a_n\le b \text{ или } b\le c, \quad n\ge 0,
\end{aligned} \tag{78}$$

где $a_i$, $b_i$, $c$, $u\in B_f$.

Заметим, что старшая часть переписывающих правил в теореме 3 не зависит ни от таблицы умножения алгебры Ли $\mathfrak{L}$, ни от билинейной формы $\langle\cdot|\cdot\rangle$. В частности, если $\mathfrak{L}$ — абелева алгебра Ли с тривиальной билинейной формой, т. е. $\langle a|b\rangle=0$ для всех $a$, $b\in\mathfrak{L}$, то $K(\mathfrak{L})$ является абелевой конформной алгеброй Ли и её универсальная обёртывающая ассоциативная конформная алгебра $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3)$ совпадает с одномерным расщепляющимся расширением

$$0 \to \Bbbk e \to \mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3) \to \mathrm{As\,Com\,Conf}(B_f,3) \to 0$$

свободной ассоциативной коммутативной конформной алгебры $\mathrm{As\,Com\,Conf}(B_f,3)$, порождённой как левый $H$-модуль линейным базисом $B_f$ алгебры Ли $\mathfrak{L}$ относительно границы ассоциативной локальности $N=3$. Следовательно, линейный базис $\mathrm{As\,Com\,Conf}(B_f,3)$ будет совпадать с описанным выше, за исключением элемента кручения $e$.

**Теорема.** *Пусть $B$ будет линейно упорядоченным множеством. Линейный базис свободной ассоциативной коммутативной конформной алгебры* $\mathrm{As\,Com\,Conf}(B,3)$, *порождённой множеством $B$ относительно границы локальности $N=3$, будет состоять из следующих конформных мономов:*

$$L_0^{a_1}\ldots L_0^{a_n}L_1^{b_1}\ldots L_1^{b_m}L_2^{c}u, \quad a_i\le a_{i+1},\ b_i\le b_{i+1}\le c\le u, \quad n,\ m\ge 0,$$
$$L_0^{a_1}\ldots L_0^{a_n}L_1^{b_1}\ldots L_1^{b_m}\partial^s c, \quad a_i\le a_{i+1},\ b_i\le b_{i+1}\le c, \quad n,\ m\ge 0,\ s\ge 1,$$
$$L_0^{a_1}\ldots L_0^{a_n}L_1^{b_1}\ldots L_1^{b_m}c, \quad a_i\le a_{i+1},\ b_i\le b_{i+1}\le c, \quad n\ge 0,\ m=0 \text{ или } m\ge 2,$$
$$L_0^{a_1}\ldots L_0^{a_n}L_1^{b}c, \quad a_i\le a_{i+1},\ a_n\le b \text{ или } b\le c, \quad n\ge 0,$$

*где $a_i$, $b_i$, $c$, $u\in B$.*

Естественная фильтрация на пространстве $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3)$ в явном виде будет задаваться следующим образом: компонента $(\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3))_n$ будет состоять из линейных комбинаций базисных слов (78), таких что суммарная степень вхождения букв вида $L_s^a$ не превосходит $n-1$.

Из сказанного выше получается, что для конформной алгебры Каца — Муди выполняется аналог теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта:

**Теорема 4.** *Для любой алгебры Ли $\mathfrak{L}$ с линейным базисом $B$ и любой билинейной симметрической формы $\langle\cdot|\cdot\rangle$ на $\mathfrak{L}$ имеет место следующий изоморфизм ассоциативных конформных алгебр:*

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}),3)\cong \mathrm{As\,Com\,Conf}(B,3)\oplus \Bbbk e.$$

В частности,

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{U}(\mathrm{Cur}\,\mathfrak{L},3)\cong \mathrm{As\,Com\,Conf}(B,3),$$

то есть конформная алгебра Ли $\mathrm{Cur}\,\mathfrak{L}$ обладает ПБВ-свойством относительно порождающего множества $B$ относительно границы локальности $N=3$, что совпадает с одним из случаев общей теоремы М. Ройтмана.

В заключение параграфа, несколько расширим результат теоремы 3. Если добавить к уже полученному БГШ правила

$$L_2^a b \to 0, \quad R_2^a b \to 0,$$

для всех $a$, $b \in B_f$, и посчитать новые композиции, то мы получим БГШ универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}), 2)$. Приведём лишь итоговый результат, поскольку все вычисления повторяют уже проделанные.

**Теорема.** *Пусть $K(\mathfrak{L})$ есть конформная алгебра Каца — Муди, построенная по алгебре Ли $\mathfrak{L}$ с билинейной симметрической инвариантной формой $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Тогда базис Грёбнера — Ширшова универсальной обёртывающей ассоциативной конформной алгебры $\mathcal{U}(K(\mathfrak{L}), 2)$ будет состоять из переписывающих правил* (52) — (57)*, объединённых со следующим набором:*

$$\begin{aligned}
&L_n^a b \to 0, \quad R_n^a b \to 0, \quad n \geq 2,\\
&R_0^a b \to L_0^a b - [a, b], \quad R_1^a b \to L_1^a b - \langle a|b\rangle e,\\
&L_1^a b \to -L_1^b a + \langle a|b\rangle e, \quad b < a, \quad L_1^a a \to \frac{1}{2}\langle a|a\rangle e,\\
&L_1^a \partial^s b \to 2L_0^a \partial^{s-1} - L_0^b \partial^{s-1} - \partial^{s-1}[a, b], \quad s \geq 1,\\
&L_1^a L_1^b c \to 0, \quad a \leq b < c,\\
&L_0^a L_1^b c \to L_0^c L_1^b a - L_0^b L_1^c a - L_1^a [b, c] - L_1^b [c, a] - L_1^c [a, b] + \langle a|[b, c]\rangle e, \quad b < c < a.
\end{aligned}$$

В частности, линейный базис $\mathrm{As\,Com\,Conf}(B, 2)$, где $B$ есть линейно упорядоченное множество, будет состоять из следующих мономов:

$$\begin{aligned}
&L_0^{a_1} \dots L_0^{a_n} \partial^s c, \quad a_i \leq a_{i+1}, \quad s \geq 0,\\
&L_0^{a_1} \dots L_0^{a_n} L_1^b c, \quad a_i \leq a_{i+1} \leq c, \ b < c,
\end{aligned}$$

где $a_i$, $b$, $c \in B$. Аналог теоремы 4 также верен и в случае $N = 2$.

# Глава 4. Когомологии конформных алгебр

В четвёртой главе данной диссертации будет исследоваться вопрос отщепления ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа в расширениях с нильпотентным ядром. Для этих целей мы будем использовать вариацию метода когомологий Хохшильда, разработанную И. А. Долгунцевой в работе [6]. Как показано в §1.4, классы эквивалентности таких расширений находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами второй группы когомологий Хохшильда.

В первых двух параграфах мы рассмотрим случай ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{Cend}_{1,x}$. Применяя операторный подход мы докажем первый из основных результатов данной главы.

**Теорема 5.** *Пусть $M$ будет произвольным бимодулем над ассоциативной конформной алгеброй $\mathrm{Cend}_{1,x}$. Тогда $\mathrm{H}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M) = 0$.*

В третьем и четвёртом параграфах мы рассмотрим более общий случай ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, x)$, $n > 1$. Мы воспользуемся методом поднятия идемпотента, предложенным для исследования аналогичных вопросов в классе унитальных ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа П. С. Колесниковым в работе [49]. Таким образом будет получен второй из основных результатов данной главы.

**Теорема 6.** *Пусть $M$ будет произвольным бимодулем над ассоциативной конформной алгеброй $A = \mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, x)$, $n > 1$. Тогда $\mathrm{H}^2(A, M) = 0$.*

Кажется вполне естественным объединить две предыдущие теоремы в общий результат для $n \geq 1$, однако мы не станем этого делать ввиду того, что общие рассуждения, предложенные в теореме 6, не применимы для $n = 1$: в алгебре $\mathrm{Cend}_{1,x}$ нет идемпотентов. Для доказательства в случае $n = 1$ был использован совершенно другой подход.

Наконец, в пятом параграфе данной главы будет приведен ряд примеров ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа, для которых найдётся нерасщепляемое расширение. Тем самым мы ограничим исследуемый класс с другой стороны. Объединив представленные результаты с уже имеющимися из работы И. А. Долгунцевой [7], мы получим третий основной результат данной главы, отражённый в следующей структурной теореме:

**Теорема 7.** *Полупростая ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа $A$ отщепляется в любом расширении с нильпотентным ядром тогда и только тогда, когда $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где каждый идеал $A_i$ изоморфен* $\mathrm{Cur}_n$, $\mathrm{Cend}_n$, *и не более чем одной копии* $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x)$.

## § 4.1. Предварительные сведения для теоремы 5

В данном параграфе мы представим две группы вспомогательных утверждений. На первом шаге мы проведём некоторую характеризацию 2-коциклов $\varphi \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$ для любого бимодуля $M$ над ассоциативной конформной алгеброй $\mathrm{Cend}_{1,x}$ и покажем, что любой 2-коцикл, удовлетворяющий некоторому дополнительному свойству, будет кограничным.

**Лемма 4.1.1.** Произвольный 2-коцикл $\varphi \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$ полностью определяется значениями элементов $\varphi_t(x, x)$ и $\varphi_0(x, x^l)$, $t$, $l \geq 1$.

*Доказательство.* Воспользуемся определением 2-коцикла:

$$x^k \ {}_{(n)} \ \varphi_m(x^l, x^q) + \varphi_n(x^k, x^l \ {}_{(m)} \ x^q) = \sum_{s\geq 0} \binom{n}{s} (\varphi_{m+s}(x^k \ {}_{(n-s)} \ x^l, x^q) + \varphi_{n-s}(x^k, x^l) \ {}_{(m+s)} \ x^q), \tag{79}$$

где $n$, $m \geq 0$, $k$, $l$, $q \geq 1$. При $n = 0$, $k = 1$ имеем:

$$\varphi_m(x^{l+1}, x^q) = x \ {}_{(0)} \ \varphi_m(x^l, x^q) + m! \binom{q}{m} \varphi_0(x, x^{l+q-m}) - \varphi_0(x, x^l) \ {}_{(n)} \ x^q, \tag{80}$$

для всех $m \geq 0$, $l$, $q \geq 1$. Из равенства (80) применением индукции можно выразить все значения 2-коцикла $\varphi \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$ через $\varphi_m(x, x^q)$, $m \geq 0$, $q \geq 1$.

Рассмотрим (79) при $m = 0$, $k = l = 1$:

$$x \ {}_{(n)} \ \varphi_0(x, x^q) + \varphi_n(x, x^{q+1}) = \varphi_n(x^2, x^q) + n\varphi_{n-1}(x, x^q) - \sum_{s\geq 0} \binom{n}{s} \varphi_{n-s}(x, x) \ {}_{(s)} \ x^q, \tag{81}$$

для всех $n \geq 0$, $q \geq 1$. Из (80) видно, что $\varphi_n(x^2, x^q) = x \ {}_{(0)} \ \varphi_n(x, x^q) + n!\binom{q}{n}\varphi_0(x, x^{q-n+1}) - \varphi_0(x, x) \ {}_{(n)} \ x^q$. Подставим получившееся выражение в (81):

$$\begin{aligned}\varphi_n(x, x^{q+1}) = x \ {}_{(0)} \ \varphi_n(x, x^q) + n! \binom{q}{n} \varphi_0(x, x^{q-n+1}) - \varphi_0(x, x) \ {}_{(n)} \ x^q \\ + n\varphi_{n-1}(x, x^q) - \sum_{s\geq 0} \binom{n}{s} \varphi_{n-s}(x, x) \ {}_{(s)} \ x^q - x \ {}_{(n)} \ \varphi_0(x, x^q),\end{aligned}$$

для всех $n \geq 0, q \geq 1$. Таким образом, $\varphi_n(x, x^{q+1})$ может быть выражено при помощи $\varphi_n(x, x^q)$, $\varphi_{n-1}(x, x^q)$, $\varphi_0(x, x^l)$, $l \geq 1$. Что и требовалось. $\square$

**Лемма 4.1.2.** Пусть $\varphi_1(x,x)=0$ и $\varphi_0(x,x^l)=0$ для всех $l\geq 1$. Тогда $\varphi=0$.

*Доказательство.* Ввиду леммы 4.1.1, достаточно установить, что из $\varphi_1(x,x)=0$ следует $\varphi_t(x,x)=0$ для всех $t\geq 1$.

Напомним, что $(x\ _{(m)}\ \cdot\ )=L^x_m=L_m\in\operatorname{End}M$, $\{\ \cdot\ _{(m)}\ x\}=R^x_m=R_m\in\operatorname{End}M$, $m\in\mathbb{Z}_+$. В рамках данной главы нам будет удобней определить оператор правого умножения более стандартным способом, а именно, $(\ \cdot\ _{(m)}\ x)=\hat{R}^x_m=\hat{R}_m\in\operatorname{End}M$, $\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}(-1)^{m+s}\frac{\partial^s}{s!}\hat{R}_m=R_m$. Для краткости будем обозначать $\varphi_m(x,x)=\varphi_m$, $\mathrm{id}_M=\mathrm{id}$.

Применяя тождества ассоциативности (MAL), (MAR), (MA), выпишем в новых обозначениях некоторые часто используемые в дальнейшем формулы:

$$L_nL_mu=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}((x\ _{(n-s)}\ x)\ _{(m+s)}\ u)=L_0L_{m+n}u+nL_{m+n-1}u, \tag{82}$$

$$\hat{R}_n\hat{R}_mu=\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\binom{m}{s}(u\ _{(m-s)}\ (x\ _{(n+s)}\ x))=\begin{cases}\hat{R}_mu, & n=1,\\ 0, & n>1,\end{cases} \tag{83}$$

$$\hat{R}_nL_mu=\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\binom{m}{s}(x\ _{(m-s)}\ (u\ _{(n+s)}\ x))=\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\binom{m}{s}L_{m-s}\hat{R}_{n+s}u, \tag{84}$$

для любых $u\in M$, $m$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Пользуясь тождеством для 2-коциклов (79) и соотношением (80), получим следующее равенство:

$$(x\ _{(1)}\ \varphi_m(x,x)-x\ _{(0)}\ \varphi_{m+1}(x,x))-\varphi_m(x\ _{(1)}\ x,x)$$
$$+(\varphi_1(x,x\ _{(n)}\ x)-\varphi_0(x,x\ _{(m+1)}\ x))-\varphi_1(x,x)\ _{(m)}\ x=0,$$

для всех $m\geq 0$. Приведём подобные и воспользуемся таблицей умножения на $\mathrm{Cend}_{1,x}$, а именно, $x\ _{(1)}\ x=0$, $x\ _{(m)}\ x=0$ при $m>1$. Получим равенства:

$$L_0\varphi_2=x\ _{(0)}\ \varphi_2=x\ _{(1)}\ \varphi_1-\varphi_1\ _{(1)}\ x=(L_1-\hat{R}_1)\varphi_1, \tag{85}$$

$$L_0\varphi_{m+1}=x\ _{(0)}\ \varphi_{m+1}=x\ _{(1)}\ \varphi_m-\varphi_m-\varphi_1\ _{(m)}\ x=(L_1-\mathrm{id})\varphi_m-\hat{R}_m\varphi_1,\quad m>1. \tag{86}$$

Из предположения $\varphi_1=0$ следует, что правая часть в (85) и последнее слагаемое в (86) равны нулю.

Допустим, $\varphi\neq 0$. Тогда найдется $\varphi_s\neq 0$ при некотором $s>1$. Выберем наименьшее такое $s$. Из (85) и (86) следует, что $L_0\varphi_s=0$. Кроме того, по определению коцепи существует $N>s$, такое что $\varphi_m=0$ при всех $m\geq N$.

Из (82) при $n=1$, $m=0$ имеем

$$L_0L_1=(L_1-\mathrm{id})L_0. \tag{87}$$

Применяя (87) к (86) $k$ раз ($k \geq 1$), получим

$$L_0^k \varphi_m = (L_1 - k\,\mathrm{id}) \dots (L_1 - \mathrm{id})\varphi_{m-k},$$

для всех $m \geq k + s$. Заметим также, что $L_0^k \varphi_m = 0$ при $m < k + s$.

Обозначим
$$\chi_k = \prod_{l=1}^{N-s-k} (L_1 - l\,\mathrm{id})\varphi_s,$$
для всех $k = \overline{0, N-s}$. В частности, $\chi_0 = L_0^{N-s}\varphi_N = 0$, $\chi_{N-s} = \varphi_s$. Кроме того, $L_0\chi_k = 0$ для всех $k = \overline{0, N-s}$.

Допустим, что $\chi_k = 0$ для некоторого $0 \leq k < N-s$. Тогда $\chi_k = (L_1-(N-s-k))\chi_{k+1} = 0$. Иными словами,
$$L_1\chi_{k+1} = (N-s-k)\chi_{k+1}, \tag{88}$$
для всех $k \geq 0$.

Соотношение конформной ассоциативности (MAR) влечёт следующие равенства:

$$0 = (x\ _{(2)}\ x)\ _{(0)}\ \chi_{k+1} = L_2L_0\chi_{k+1} - 2L_1L_1\chi_{k+1} + L_0L_2\chi_{k+1} = -2L_1L_1\chi_{k+1} + L_0L_2\chi_{k+1},$$
$$L_1L_1\chi_{k+1} = (x\ _{(1)}\ x)\ _{(1)}\ \chi_{k+1} + (x\ _{(0)}\ x)\ _{(2)}\ \chi_{k+1} = L_1\chi_{k+1} + L_0L_2\chi_{k+1},$$
для всех $k \geq 0$. Вычтем их и применим (88):

$$(N-s-k)^2\chi_{k+1} = 2(N-s-k)^2\chi_{k+1} + (N-s-k)\chi_{k+1}.$$

Таким образом, получаем $(N-s-k)(N-s-k+1)\chi_{k+1} = 0$. Поскольку $(N-s-k)(N-s-k+1) \neq 0$, $\chi_k = 0$ влечет $\chi_{k+1} = 0$.

Так как $\chi_0 = 0$, то, по индукции, $\chi_{N-s} = \chi_s = 0$, — противоречие. $\square$

**Лемма 4.1.3.** Рассмотрим некоторый коцикл $\varphi \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$. Допустим, существует $\psi_1 \in M$, такое что
$$\varphi_1(x,x) = x\ _{(1)}\ \psi_1 - \psi_1 + \psi_1\ _{(1)}\ x. \tag{89}$$
Тогда $\varphi \in \mathrm{B}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$.

*Доказательство.* Определим по индукции $\psi_l$, $l \geq 2$, соотношением

$$\psi_{l+1} = -\varphi_0(x, x^l) + x\ _{(0)}\ \psi_l + \psi_1\ _{(0)}\ x^l, \quad l \geq 1. \tag{90}$$

Построим 1-коцепь $\psi \in \mathrm{C}^1(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$ со значениями $\psi(x^l) = \psi_l$. Рассмотрим $\delta\psi = \varphi' \in \mathrm{B}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$. Тогда (89) влечёт $\varphi_1'(x,x) = \varphi_1(x,x)$, а из (90) следует $\varphi_0'(x, x^l) = \varphi_0(x, x^l)$.

Обозначим $\varphi - \varphi' = \pi \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$. Но тогда $\pi_1(x,x) = 0$ по условию, $\pi_0(x, x^l) = 0$ в силу выбора $\psi_l$. Из леммы 4.1.2 следует $\pi = 0$, т. е. $\varphi = \delta\psi$. $\square$

Вторая группа вспомогательных утверждений будет посвящена доказательству существования элемента $\psi$, требуемого в лемме 4.1.3.

**Лемма 4.1.4.** Если $\varphi \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$, то

$$L_0^m\varphi_{m+1} = (L_1 - m\,\mathrm{id})\ \dots\ (L_1 - 2\,\mathrm{id})L_1\varphi_1 - \sum_{s=1}^{m}(L_1 - m\,\mathrm{id})\ \dots\ (L_1 - (s+1)\,\mathrm{id})L_0^{s-1}R_s\varphi_1. \quad (91)$$

*Доказательство.* Индукцией по $m$. При $m = 1$ требуемое равенство $L_0\varphi_2 = (L_1 - R_1)\varphi_1$ есть в точности (85).

Пусть для $L_0^{m-1}\varphi_m$ формула (91) верна. Сначала преобразуем выражение $L_0^m\varphi_{m+1}$ с помощью (86) и (87):

$$L_0^m\varphi_{m+1} = L_0^{m-1}(L_0\varphi_{m+1}) = L_0^{m-1}((L_1 - \mathrm{id})\varphi_m - R_m\varphi_1) = (L_1 - m\,\mathrm{id})L_0^{m-1}\varphi_m - L_0^{m-1}R_m\varphi_1.$$

Далее, воспользуемся предположением индукции,

$$\begin{aligned} L_0^m\varphi_{m+1} = (L_1 - m\,\mathrm{id})\Big((L_1 - (m-1)\,\mathrm{id})\dots(L_1 - 2\,\mathrm{id})L_1\varphi_1 \\ - \sum_{s=1}^{m-1}(L_1 - (m-1)\,\mathrm{id})\dots(L_1 - (s+1)\,\mathrm{id})L_0^{s-1}R_s\varphi_1\Big) - L_0^{m-1}R_m\varphi_1 \\ = (L_1 - m\,\mathrm{id})\dots(L_1 - 2\,\mathrm{id})L_1\varphi_1 - \sum_{s=1}^{m}(L_1 - m\,\mathrm{id})\dots(L_1 - (s+1)\,\mathrm{id})L_0^{s-1}R_s\varphi_1, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Рассмотрим теперь произведения вида $L_0^{k-1}L_k$. Индукцией по $k$ покажем, что для них выполняется равенство

$$L_0^{k-1}L_k = L_1(L_1 - \mathrm{id})\dots(L_1 - (k-1)\,\mathrm{id}) \quad (92)$$

Из равенства (82) получим

$k = 2 : L_0L_2 = L_1^2 - L_1 = L_1(L_1 - \mathrm{id})$;

$k \to k+1 : L_1(L_1 - \mathrm{id})\dots(L_1 - k\,\mathrm{id}) = L_0^{k-1}L_k(L_1 - k\,\mathrm{id}) = L_0^{k-1}(L_0L_{k+1} + kL_k - kL_k) = L_0^kL_{k+1}$.

Теперь легко доказать следующий результат.

**Лемма 4.1.5.** Пусть $V \subset M$ — конечномерное подпространство, инвариантное относительно $L_1$. Тогда существует разложение в прямую сумму $L_1$-инвариантных подпространств $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, где $L_1v = lv$ для $v \in V_l$.

*Доказательство.* Поскольку $\dim V < \infty$, то существует конечное число базисных элементов

$v_1, \dots, v_n$. На основании формулы (92), для каждого $v_i$ имеем:

$$L_0^k L_{k+1} v_i = L_1(L_1 - \mathrm{id}) \dots (L_1 - k\,\mathrm{id}) v_i.$$

Для каждого $v_i$ левая часть равенства обращается в нуль при достаточно большом $k_i$ ввиду аксиомы локальности. Выберем $k = \max(k_1, \dots, k_n)$. Тогда многочлен $P_k = t(t-1)\dots(t-k)$ таков, что $P_k(L_1)V = 0$, т.е. $P_k(L_1)$ — аннулятор пространства $V$. Он не имеет кратных корней, следовательно, минимальный многочлен оператора $L_1$ на $V$ не имеет кратных корней, т. е. $L_1$ полупрост и все его собственные значения лежат в $\mathbb{Z}_+$.

Тогда существует искомое разложение $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \ \dots \ \oplus V_k$, где $L_1 v = lv$ для $v \in V_l$, $l = \overline{0, k}$, некоторые слагаемые которого, вообще говоря, могут быть нулевыми (как подпространства). $\square$

Рассмотрим подалгебру алгебры линейных преобразований $\mathrm{End}\, M$, порожденную операторами $L_1$ и $L_0^m \hat{R}_{m+1}$, $m \geq 0$:

$$\mathfrak{A} = \mathrm{As}\langle L_1, L_0^m \hat{R}_{m+1} \mid m \geq 0 \rangle.$$

**Лемма 4.1.6.** Для произвольного $u \in M$ построим $\mathfrak{A}$-модуль $W = \mathfrak{A}u = \{au \mid a \in \mathfrak{A}\}$. Тогда $\dim W < \infty$.

*Доказательство.* Нетрудно заметить, что $W$ содержится в линейной оболочке $W'$ элементов вида $L_0^s L_1^m \hat{R}_{n+s} u$, для всех $m$, $s \geq 0$, $n \geq 1$. Действительно, из формул (82), (83), (84) следует, что $W'$ замкнута относительно действий порождающих элементов алгебры $\mathfrak{A}$. Покажем, что $\dim W' < \infty$.

Для начала заметим, что в силу аксиомы локальности (C1) размерность пространства $V'$, порожденного $\hat{R}_{n+s} u$, $s \geq 0$, $n \geq 1$, конечна. Далее,

$$L_1^m = L_1 + F_m(L_0 L_2, \dots, L_0^{m-2} L_{m-1}) + L_0^{m-1} L_m,$$

где $F_m$ — линейная функция. Данное соотношение нетрудно показать индукцией по $m$ с использованием (82).

Следовательно, элементы вида $L_1^m V'$ порождают то же линейное пространство, что и $L_0^k L_{k+1} V'$. А оно конечномерно ввиду аксиомы локальности. Что и требовалось. $\square$

## § 4.2. Доказательство теоремы 5

Пусть $\varphi \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$, тогда его значение $\varphi_1 = \varphi_1(x,x) \in M$ удовлетворяет соотношению (91), где при достаточно больших $m$ левая часть обращается в нуль:

$$(L_1 - m\,\mathrm{id})\ \dots\ (L_1 - 2\,\mathrm{id})L_1\varphi_1 = \sum_{s=1}^{m}(L_1 - m\,\mathrm{id})\ \dots\ (L_1 - (s+1)\,\mathrm{id})L_0^{s-1}R_s\varphi_1. \tag{93}$$

Рассмотрим определенную выше алгебру $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{End}\,M$ и $\mathfrak{A}$-модуль $V = \mathfrak{A}\varphi_1$. Как показано выше, оператор $L_1$ разбивает пространство $V$ на конечное число инвариантных подпространств, из чего мы получаем представление

$$\varphi_1 = v_0 + \ldots + v_m,$$

где $L_1 v_l = l v_l$. Подставляя это разложение в формулу (93), получим в результате действия цепочки нильпотентных операторов в левой части лишь собственный вектор $v_1$:

$$(-1)^{m-1}(m-1)!v_1 = \sum_{s=1}^{m}(L_1 - m\,\mathrm{id})\ \dots\ (L_1 - (s+1)\,\mathrm{id})L_0^{s-1}R_s\varphi_1.$$

Освободим $v_1$ от константы и подействуем оператором $R_k$, $k \geq 2$. Получим

$$R_k v_1 = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot R_k(\sum_{s=2}^{m}(L_1 - m\,\mathrm{id})\ldots(L_1 - s\,\mathrm{id})L_0^{s-2}R_{s-1} + L_0^{m-1}R_m)\varphi_1,$$

для всех $m \geq 1$, $k \geq 2$. Из соотношений (83) и (84) непосредственно следует, что $R_k v_1 = 0$ при $k \geq 2$.

Найдём такой элемент $z \in V$, что $(L_1 - \mathrm{id})z = v_0 + v_2 + v_3 \cdots + v_m = \varphi_1 - v_1$. Такой обязательно есть, т. к. оператор $(L_1 - \mathrm{id})$ аннулирует собственное подпространство $V_1$ и невырожден на других $V_i$. Выберем 1-коцепь $\xi$, значением которой является $z$, т. е. $\xi(x) = z$. Обозначим $\varphi' = \varphi - \delta\xi \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Cend}_{1,x}, M)$. Полученный коцикл $\varphi'$ благодаря (83) и (84) обладает следующим свойством:

$$R_k\varphi_1' = R_k(\varphi_1 - (L_1 + R_1 - \mathrm{id})z) = R_k(\varphi_1 - (L_1 - \mathrm{id})z - R_1 z) = R_k(v_1 - R_1 z) = 0,$$

для всех $k \geq 2$.

Отсюда, без ограничения общности, можно положить

$$R_k\varphi_1 = 0, \quad k \geq 2. \tag{94}$$

Пользуясь (82), (83), (84), получаем $V = \mathfrak{A}\varphi_1 \subseteq \Bbbk[L_0, L_1]R_1\varphi_1$ (см. доказательство леммы 4.1.6). Из такого представления с помощью (84), (94) легко понять, что $R_k V = 0$ для всех $k \geq 2$.

Теперь, опираясь на этот результат, покажем существование такого $\psi_1$, что выполняется равенство $(L_1 + R_1 - \mathrm{id})\psi_1 = \varphi_1$.

Заметим, что в алгебре $\operatorname{End} V$ выполняется тождество

$$[L_s, R_1] = L_s R_1 - R_1 L_s = 0, \tag{95}$$

для всех $s \geq 0$. Это следует из (84) и $R_k V = 0$ при $k \geq 2$.

Также из (83) следует, что эндоморфизм $R_1$ действует на $M$ оператором проектирования, т. е. $R_1^2 = R_1$. По свойству проектора, пространство $V$ раскладывается в прямую сумму ядра $V^{(0)}$ и неподвижных элементов $V^{(1)}$, замкнутых, кроме того, относительно действия на них $L_1$, что следует из (95).

Ввиду имеющегося разложения $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \varphi_1^{(1)}$, нам необходимо показать существование таких $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}$, что:

$$\begin{gathered}(L_1 + R_1 - \mathrm{id})\psi^{(0)} = (L_1 - \mathrm{id})\psi^{(0)} = \varphi_1^{(0)},\\ (L_1 + R_1 - \mathrm{id})\psi^{(1)} = L_1\psi^{(1)} = \varphi_1^{(1)}.\end{gathered} \tag{96}$$

Вспомним, что рассматриваемое нами значение 2-коцикла $\varphi_1$ удовлетворяет (91) и (94), откуда получаем

$$\begin{aligned}0 &= (L_1 - m\,\mathrm{id}) \dots (L_1 - 2\,\mathrm{id})(L_1 - R_1)\varphi_1\\ &= (L_1 - m\,\mathrm{id}) \dots (L_1 - 2\,\mathrm{id})(L_1 - R_1)\varphi_1^{(0)} + (L_1 - m\,\mathrm{id}) \dots (L_1 - 2\,\mathrm{id})(L_1 - R_1)\varphi_1^{(1)}\\ &= (L_1 - m\,\mathrm{id}) \dots (L_1 - 2\,\mathrm{id})L_1\varphi_1^{(0)} + (L_1 - m\,\mathrm{id}) \dots (L_1 - 2\,\mathrm{id})(L_1 - \mathrm{id})\varphi_1^{(1)}.\end{aligned}$$

Ввиду того, что первое итоговое слагаемое есть элемент $V^{(0)}$, а второе слагаемое есть элемент $V^{(1)}$, их равенство нулю возможно в том и только том случае, когда каждое из них тождественно нулевое:

$$\begin{gathered}(L_1 - m\,\mathrm{id}) \dots (L_1 - 2\,\mathrm{id})L_1\varphi_1^{(0)} = 0,\\ (L_1 - m\,\mathrm{id}) \dots (L_1 - 2\,\mathrm{id})(L_1 - \mathrm{id})\varphi_1^{(1)} = 0.\end{gathered}$$

Поэтому $\varphi_1^{(0)} \in V_0 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$, а оператор $L_1 - \mathrm{id}$ невырожден на этом пространстве. Откуда следует, что найдется $\psi^{(0)} \in V$, такой что $(L_1 - \mathrm{id})\psi^{(0)} = \varphi_1^{(0)}$.

Аналогично, $\varphi_1^{(1)} \in V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, оператор $L_1$ невырожден на этом пространстве и, следовательно, найдется такой $\psi^{(1)} \in V$, что $L_1\psi^{(1)} = \varphi_1^{(1)}$.

Мы построили элемент $\psi_1 = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$, существование которого предполагается в лемме 4.1.3. Это полностью завершает доказательство теоремы.

## § 4.3. Доказательство теоремы 6

В ближайших двух параграфах будем обозначать $A = \mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(1,\dots,1,x)$, $n > 1$.

Следующими двумя утверждениями мы зададим рассматриваемую ассоциативную конформную алгебру $A$ на языке порождающих элементов и определяющих соотношений в наиболее удобной для дальнейших рассуждений форме. Часть рассуждений будет существенно опираться на метод БГШ, изложенный в §1.6.

Рассмотрим свободную ассоциативную конформную алгебру $\mathrm{As\,Conf}(B,N)$, порождённую множеством

$$B = \{e_{ij} \mid i = \overline{1,n-1}, j = \overline{1,n}\} \cup \{x_{kl} \mid k,l = \overline{1,n}\},$$

относительно функции локальности $N\colon B \times B \to \mathbb{Z}_+$, такой что

$$N(e_{ij}, e_{kl}) = 1, \quad N(e_{ij}, x_{kl}) = N(x_{ij}, e_{kl}) = N(e_{ij}, e_{kl}) = 2.$$

Тогда, пользуясь терминологией §1.6, ассоциативная конформная алгебра $A$ может быть построена как фактор-модуль от левого $\mathfrak{A}(B)$-модуля $\mathrm{As\,Conf}(B,N)$ по следующему множеству соотношений $\Sigma$:

$$L_0^{e_{ij}} e_{kl} - \delta_{jk} e_{il}, \quad L_1^{e_{ij}} e_{kl}, \tag{97}$$

$$L_0^{x_{ij}} e_{kl} - \delta_{jk} x_{il}, \quad L_1^{x_{ij}} e_{kl}, \tag{98}$$

$$L_0^{e_{ij}} x_{kl} - \delta_{jk} x_{il}, \quad L_1^{e_{ij}} x_{kl} - \delta_{jk} e_{il}, \tag{99}$$

$$L_1^{x_{ij}} x_{jl} - x_{il}. \tag{100}$$

$$L_0^{x_{ij}} x_{kl}, \quad L_1^{x_{ij}} x_{kl}, \quad j \neq k, \tag{101}$$

$$L_0^{x_{ij}} x_{jl} - L_0^{x_{ik}} x_{kl}. \tag{102}$$

В самом деле, существует сюръективный гомоморфизм $\psi\colon \mathrm{As\,Conf}(B, 2 \mid \Sigma) \to C$, действующий на порождающих как $e_{ij} \mapsto e_{ij}$, $x_{kl} \mapsto xe_{kl}$. В данной задаче нам будет удобнее применить оригинальный метод базисов Грёбнера —Ширшова для ассоциативных конформных алгебр, предложенный в работах [17], [18].

Определим порядок на множестве порождающих $B$ ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{As\,Conf}(B,2)$ по следующему правилу:

$$e_{ij} < x_{kl}, \quad e_{ij} < e_{kl} \text{ (или } x_{ij} < x_{kl}) \text{ если и только если } (ij) < (kl) \text{ лексикографически.}$$

Тогда множество Σ-редуцированных слов состоит из

$$\partial^s e_{ij}, \quad i=1,\dots,n-1,\ j=1,\dots,n,$$
$$\partial^s x_{kl}, \quad k,\ l=1,\dots,n,$$
$$\partial^s (L_0^{x_{k1}}(L_0^{x_{11}})^{t-1}x_{1l}), \quad k,\ l=1,\dots,n,$$

для всех $s\geq 0$, $t\geq 1$. Ясно, что их образы под действием гомоморфизма $\psi$ линейно независимы.

В качестве очевидного следствия получаем следующую характеризацию:

**Следствие.** *Ассоциативная конформная алгебра $A$ порождается множеством*

$$B=\{e_{ij}\mid i=\overline{1,n-1}, j=\overline{1,n}\}\cup\{x_{kl}\mid k,l=\overline{1,n}\},$$

*относительно следующих определяющих соотношений:*

$$e_{ij\ (\lambda)}\ e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}, \tag{103}$$
$$x_{ij\ (\lambda)}\ e_{kl}=\delta_{jk}x_{il}, \tag{104}$$
$$e_{ij\ (\lambda)}\ x_{kl}=\delta_{jk}(x_{il}+\lambda e_{il}), \tag{105}$$
$$x_{ij\ (1)}\ x_{jl}=x_{il}, \tag{106}$$
$$x_{ij\ (\lambda)}\ x_{kl}=0, \quad j\neq k, \tag{107}$$
$$x_{ij\ (0)}\ x_{jl}=x_{ik\ (0)}\ x_{kl}. \tag{108}$$

**Лемма 4.3.1.** Ассоциативная конформная алгебра $A$ порождается множеством

$$B'=\{e_{ij},e_{1n},x_{n1}\mid i,j=\overline{1,n-1}\},$$

относительно следующих определяющих соотношений:

$$e_{ij\ (\lambda)}\ e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}, \quad i,j,k,l=\overline{1,n-1}, \tag{109}$$
$$e_{1n\ (\lambda)}\ e_{ij}=0, \quad i,j=\overline{1,n-1}, \tag{110}$$
$$e_{11\ (\lambda)}\ e_{1n}=e_{1n}, \tag{111}$$
$$e_{ij\ (\lambda)}\ x_{n1}=0, \quad i,j=\overline{1,n-1}, \tag{112}$$
$$x_{n1\ (\lambda)}\ e_{11}=x_{n1}, \tag{113}$$
$$e_{1n\ (1)}\ x_{n1}=e_{11}, \quad e_{1n\ (m)}\ x_{n1}=0,\ m>1, \tag{114}$$

*Доказательство.* Поскольку $A$ простая, достаточно проверить, что если (109)–(114) выполняются, то элементы множества $B'$ вместе с

$$e_{in} = e_{i1\ (0)}\ e_{1n}, \quad i = \overline{2, n-1},$$
$$x_{nj} = x_{n1\ (0)}\ e_{1j}, \quad j = \overline{2, n},$$
$$x_{ij} = e_{in\ (0)}\ x_{nj}, \quad i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{1, n},$$

удовлетворяют соотношениям (103)–(108). Для примера проверим (106). Во-первых,

$$x_{n1\ (m)}\ e_{1l} = (x_{n1\ (0)}\ e_{11})\ _{(m)}\ e_{1l} = 0,$$

для всех $m > 0$, по (113) и (109). Далее, из аксиомы (A) конформной ассоциативности следует, что

$$\begin{aligned}
x_{ij\ (1)}\ x_{jl} &= (e_{i1\ (0)}\ e_{1n\ (0)}\ x_{n1\ (0)}\ e_{1j})\ _{(m)}\ (e_{j1\ (0)}\ e_{1n\ (0)}\ x_{n1\ (0)}\ e_{1l}) \\
&= (e_{i1\ (0)}\ e_{1n\ (0)}\ x_{n1\ (0)}\ e_{1j\ (0)}\ e_{j1})\ _{(m)}\ (e_{1n\ (0)}\ x_{n1\ (0)}\ e_{1l}) && (115)\\
&= (e_{i1\ (0)}\ e_{1n\ (0)}\ x_{n1})\ _{(m)}\ (e_{1n\ (0)}\ x_{n1\ (0)}\ e_{1l}) && (116)\\
&= (e_{i1\ (0)}\ e_{1n\ (0)}\ x_{n1\ (0)}\ e_{1n})\ _{(m)}\ (x_{n1\ (0)}\ e_{1l}) && (117)\\
&= (e_{i1\ (0)}\ e_{1n\ (0)}\ x_{n1})\ _{(0)} \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \binom{m}{s} ((e_{1n\ (s)}\ x_{n1})\ _{(m-s)}\ e_{1l}) && (118)\\
&= (e_{i1\ (0)}\ e_{1n\ (0)}\ x_{n1})\ _{(0)}\ ((e_{1n\ (m)}\ x_{n1})\ _{(0)}\ e_{1l}) = \begin{cases} x_{il}, & m = 1, \\ 0, & m > 1. \end{cases} && (119)
\end{aligned}$$

□

Пусть $M$ будет произвольным конформным бимодулем над $A$.

**Лемма 4.3.2.** Для любого 2-коцикла $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M)$ существует 2-коцикл $\varphi' \in \mathrm{Z}^2(A, M)$, такой что выполнены равенства

$$\varphi'_\lambda(u_{ij}, v_{kl}) = 0, \quad i, j, k, l = \overline{1, n-1},\ u, v \in \{e, x\}, \tag{120}$$

а также $\varphi - \varphi' \in \mathrm{B}^2(A, M)$.

*Доказательство.* Заметим, что подалгебра $A_0 \subset A$, порождённая элементами $u_{ij}$, $i$, $j = 1, \ldots, n-1$, $u, v \in \{e, x\}$, изоморфна $\mathrm{Cend}_{n-1}$. В самом деле, мы получим левый верхний блок порядка $n-1$ в $A$. Поскольку $M$ является конформным бимодулем и над $A_0$, ограничение $\varphi$ на $A_0$ снова будет коциклом. Обозначим $\varphi|_{A_0} \in \mathrm{Z}^2(A_0, M)$. В работе [7] установлено, что $\mathrm{H}^2(\mathrm{Cend}_{n-1}, M) = 0$, следовательно, существует $\tau|_{A_0} \in \mathrm{C}^1(A_0, M)$, такой что $\varphi|_{A_0} = \delta_1\tau|_{A_0}$.

Выберем произвольное продолжение $\tau_0$ до $H$-линейного отображения $\tau$: $A \to M$. Тогда $\varphi' = \varphi - \delta_1\tau$ будет требуемым коциклом. □

Напомним обозначение: для произвольной конформной алгебры $C$ и любых $a,\ b \in C$

$$\{a_{\ (\lambda)}\ b\} = (a_{\ (-\partial-\lambda)}\ b) = \sum_{n,s\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\frac{(-\partial)^s}{s!}(a_{\ (n+s)}\ b).$$

Аналогично, для любого $\varphi \in \mathrm{C}^2(C, M)$, положим

$$\varphi_\lambda\{a, b\} = \varphi_{-\partial-\lambda}(a, b) = \sum_{n,s\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\frac{(-\partial)^s}{s!}\varphi_{n+s}(a, b).$$

Заметим, что из аксиомы (M1) легко следует равенство

$$(\varphi_\lambda\{a, b\}_{\ (\mu)}\ c) = (\varphi_{\mu-\lambda}(a, b)_{\ (\mu)}\ c), \tag{121}$$

для любых $a,\ b,\ c \in C$. Кроме того, для любого 2-коцикла $\varphi \in \mathrm{Z}^2(C, M)$, применяя рассуждения, аналогичные проделанным в работе [46] для вывода тождества (A$'$), получим

$$\varphi_\lambda(a, \{b_{\ (\mu)}\ c\}) + a_{\ (\lambda)}\ \varphi_{-\partial-\mu}(b, c) = \varphi_{-\partial-\mu}(a_{\ (\lambda)}\ b, c) + \{\varphi_\lambda(a, b)_{\ (\mu)}\ c\}. \tag{122}$$

**Лемма 4.3.3.** Для любого 2-коцикла $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M)$ существует $\varphi' \in \mathrm{Z}^2(A, M)$, такой что выполнены равенства (120) и

$$\varphi'_\lambda(e_{1n}, e_{ij}) = 0, \quad i, j = \overline{1, n-1}, \tag{123}$$

$$\varphi'_\lambda(e_{11}, e_{1n}) = 0, \tag{124}$$

а также $\varphi - \varphi' \in \mathrm{B}^2(C, M)$.

*Доказательство.* Без ограничения общности мы можем предположить, что $\varphi$ удовлетворяет (120). Пусть $e = e_{11} + \cdots + e_{n-1n-1} \in A_0 \subset A$, где подалгебра $A_0$ определена в лемме 4.3.2. Определим 1-коцепь $\tau \in \mathrm{C}^1(A, M)$, такую что

$$\tau(e_{1n}) = \varphi_0(e_{11}, e_{1n}) - \{e_{11\ (0)}\ \varphi_0\{e_{1n}, e\}\},$$

и $\tau(a) = 0$ для всех остальных порождающих $a \in A$ как левого $H$-модуля. В частности, $\tau(A_0) = 0$, следовательно, $(\delta_1\tau)_\lambda(a, b) = 0$ для всех $a, b \in A_0$. Вычислим для всех $i, j = \overline{1, n-1}$,

$$(\delta_1\tau)_\lambda(e_{1n}, e_{ij}) = e_{1n\ (\lambda)}\ \tau(e_{ij}) - \tau(e_{1n}\lambda e_{ij}) + \tau(e_{1n})_{\ (\lambda)}\ e_{ij}.$$

Первые два слагаемых равны нулю по определению $\tau$ и соотношению (110). Далее, применяя последовательно (A″), (121) и (79), мы получим:

$$
\begin{aligned}
(\delta_1\tau)_\lambda(e_{1n}, e_{ij}) &= \varphi_\lambda(e_{11}, e_{1n})\;{}_{(\lambda)}\; e_{ij} - e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; (\varphi_0(e_{1n}, e)\;{}_{(0)}\; e_{ij}) \\
&= \varphi_\lambda(e_{11}, e_{1n}\;{}_{(0)}\; e_{ij}) + e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; \varphi_0(e_{1n}, e_{ij}) - \varphi_\lambda(e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; e_{1n}, e_{ij}) \\
&\quad - e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; (\varphi_0(e_{1n}, e\;{}_{(0)}\; e_{ij}) + e_{1n}\;{}_{(0)}\; \varphi_0(e, e_{ij}) - \varphi_0(e_{1n}\;{}_{(0)}\; e, e_{ij}),
\end{aligned}
$$

где по свойствам $\varphi$ и таблице умножения на порождающих $A$ в нуль обращаются все слагаемые, кроме третьего. Итого, $(\delta_1\tau)_\lambda(e_{1n}, e_{ij}) = -\varphi_\lambda(e_{1n}, e_{ij})$.

Аналогично, только используя вместо тождества 2-коцикла (79) новую вариацию (122), вычислим

$$
\begin{aligned}
(\delta_1\tau)_\lambda(e_{11}, e_{1n}) &= -\tau(e_{1n}) + e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; \tau(e_{1n}) \\
&= -\varphi_0\{e_{11}, e_{1n}\} + \{e_{11}\;{}_{(0)}\; \varphi_0\{e_{1n}, e\}\} + e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; \varphi_0\{e_{11}, e_{1n}\} - \{(e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; e_{11})\;{}_{(0)}\; \varphi_0\{e_{1n}, e\}\} \\
&= -\varphi_0\{e_{11}, e_{1n}\} + \varphi_0\{e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; e_{11}, e_{1n}\} + \{\varphi_\lambda(e_{11}, e_{11})\;{}_{(0)}\; e_{1n}\} - \varphi_\lambda(e_{11}, \{e_{11}\;{}_{(0)}\; e_{1n}\}) \\
&= -\varphi_0\{e_{11}, e_{1n}\}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\varphi' = \varphi + \delta_1\tau$ является искомым 2-коциклом. □

**Лемма 4.3.4.** Для любого 2-коцикла $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M)$ существует $\varphi' \in \mathrm{Z}^2(A, M)$, такой что выполнены равенства (120), (123), (124) и

$$\varphi'_\lambda(x_{n1}, e_{11}) = 0, \tag{125}$$

$$\varphi'_\lambda(e_{ij}, x_{n1}) = 0, \quad i, j = \overline{1, n-1}, \tag{126}$$

а также $\varphi - \varphi' \in \mathrm{B}^2(C, M)$.

*Доказательство.* Определим 1-коцепь $\tau \in \mathrm{C}^1(A, M)$, такую что

$$\tau(x_{n1}) = \varphi_0(x_{n1}, e_{11}) - \varphi_0(e, x_{n1})\;{}_{(0)}\; e_{11},$$

и $\tau(a) = 0$ для всех остальных порождающих $a \in A$ как левого $H$-модуля. В частности, $\tau(A_0) = 0$, следовательно, $(\delta_1\tau)_\lambda(a, b) = (\delta_1\tau)_\lambda(e_{1n}, b) = (\delta_1\tau)_\lambda(a, e_{1n}) = 0$ для всех $a$, $b \in A_0$. Аналогично рассуждениям леммы 4.3.3, мы вычисляем

$$
\begin{aligned}
(\delta_1\tau)_\lambda(x_{n1}, e_{11}) &= \tau(x_{n1})\;{}_{(\lambda)}\; e_{11} - \tau(x_{n1}) \\
&= (\varphi_0(x_{n1}, e_{11}) - \varphi_0(e, x_{n1})\;{}_{(0)}\; e_{11})\;{}_{(\lambda)}\; e_{11} - \varphi_0(x_{n1}, e_{11}) + \varphi_0(e, x_{n1})\;{}_{(0)}\; e_{11} \\
&= \varphi_0(x_{n1}, e_{11}\;{}_{(\lambda)}\; e_{11}) + x_{n1}\;{}_{(0)}\; \varphi_0(e_{11}, e_{11}) - \varphi_0(x_{n1}\;{}_{(0)}\; e_{11}, e_{11}) - \varphi_0(x_{n1}, e_{11}),
\end{aligned}
$$

и для всех $i,\ j = \overline{1, n-1}$,

$$\begin{aligned}(\delta_1\tau)_\lambda(e_{ij}x_{n1}) &= e_{ij\ (0)}\ \tau(x_{n1}) = e_{ij\ (\lambda)}\ \varphi_0(x_{n1}, e_{11}) - (e_{ij\ (\lambda)}\ \varphi_0(e, x_{n1}))\ _{(\lambda)}\ e_{11} \\ &= \varphi_\lambda(e_{ij\ (\lambda)}\ x_{n1}, e_{11}) + \varphi_\lambda(e_{ij}, x_{n1})\ _{(\lambda)}\ e_{11} - \varphi_\lambda(e_{ij}, x_{n1\ (0)}\ e_{11}) \\ &\quad - (\varphi_\lambda(e_{ij\ (\lambda)}\ e, x_{n1}) + \varphi_\lambda(e_{ij}, e)\ _{(\lambda)}\ x_{n1} - \varphi_\lambda(e_{ij}, e\ _{(0)}\ x_{n1}))\ _{(\lambda)}\ e_{11} \\ &= \ -\varphi_\lambda(e_{ij}, x_{n1}).\end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi' = \varphi + \delta_1\tau$ является искомым 2-коциклом. □

**Лемма 4.3.5.** Для любого 2-коцикла $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M)$ существует $\varphi' \in \mathrm{Z}^2(A, M)$, такой что выполнены равенства (120), (123), (124), (125), (126) и

$$\varphi'_\lambda(e_{1n}, x_{n1}) = \varphi'_0(e_{1n}, x_{n1}), \tag{127}$$

а также $\varphi - \varphi' \in \mathrm{B}^2(C, M)$.

*Доказательство.* Пусть дан 2-коцикл $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M)$. Рассмотрим множество $S$ всех 2-коциклов $\varphi' \in \mathrm{Z}^2(A, M)$, таких что $\varphi - \varphi' \in \mathrm{B}^2(A, M)$, и $\varphi'$ удовлетворяет равенствам (120), (123), (124), (125), (126). Из лемм 4.3.2 — 4.3.4 следует, что $S \neq \varnothing$. Без ограничения общности, положим $\varphi \in S$ и $m = \deg_\lambda \varphi_\lambda(e_{1n}, x_{n1})$ минимальна среди всех $\varphi' \in S$. Если $m = 0$, то $\varphi$ искомый. Если $m > 0$, то определим

$$\tau(x_{n1}) = \frac{1}{m} x_{n1\ (0)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1}),$$

и $\tau(a) = 0$ для всех остальных порождающих $a \in A$ как левого $H$-модуля. Используя тождество 2-коцикла (79), таблицу умножения на порождающих $A$ и свойства $\varphi \in S$, вычислим

$$\varphi_\mu(e_{1n}, x_{n1})\ _{(\lambda)}\ e_{11} = \varphi_\mu(e_{1n}, x_{n1\ (\lambda-\mu)}) + e_{1n\ (\mu)}\ \varphi_{\lambda-\mu}(x_{n1}, e_{11}) - \varphi_\lambda(e_{1n\ (\mu)}\ x_{n1}, e_{11}) = \varphi_\mu(e_{1n}, x_{n1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(\delta_1\tau)_\lambda(x_{n1}, e_{11}) &= \tau(x_{n1})\ _{(\lambda)}\ e_{11} - \tau(x_{n1}) \\ &= \frac{1}{m} x_{n1\ (0)}\ (\varphi_1(e_{1n}, x_{n1})\ _{(\lambda)}\ e_{11} - \varphi_1(e_{1n}, x_{n1})) = 0, \\ (\delta_1\tau)_\lambda(e_{ij}, x_{n1}) &= e_{ij\ (\lambda)}\ \tau(x_{n1}) = \frac{1}{m} e_{ij\ (\lambda)}\ (x_{n1\ (0)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1}) \\ &= \frac{1}{m}(e_{ij\ (\lambda)}\ x_{n1})\ _{(\lambda)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1}) = 0,\end{aligned}$$

для всех $i,\ j = \overline{1, n-1}$. Следовательно, 2-коцикл $\delta_1\tau$ удовлетворяет условиям (120), (123) — (126), и $\varphi' = \varphi - \delta_1\tau \in S$. Более того, коэффициент при старшей степени по $\lambda$ в $(\delta_1\tau)_\lambda(e_{1n}, x_{n1})$

совпадает с соответствующим коэффициентом в $\varphi_\lambda(e_{1n}, x_{n1})$. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
(\delta_1\tau)_\lambda(e_{1n}, x_{n1}) &= e_{1n\ (\lambda)}\ \tau(x_{n1}) \\
&= \frac{1}{m} e_{1n\ (\lambda)}\ (x_{n1\ (\lambda)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1})) = \frac{1}{m}(x_{11} + \lambda e_{11})\ _{(\lambda)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1}) \\
&= \frac{1}{m}((x\ _{(0)}\ e_{11})\ _{(\lambda)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1}) + \lambda e_{11\ (\lambda)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1})).
\end{aligned}
$$

Остановимся подробнее на втором слагаемом. Рассмотрим

$$
\begin{aligned}
e_{11\ (\lambda)}\ \varphi_\mu(e_{1n}, x_{n1}) &= \varphi_{\lambda+\mu}(e_{11\ (\lambda)}\ e_{1n}, x_{n1}) \\
&+ \varphi_\lambda(e_{11}, e_{1n})\ _{(\lambda+\mu)}\ x_{n1} - \varphi_\lambda(e_{11}, e_{1n\ (\mu)}\ x_{n1}) = \varphi_{\lambda+\mu}(e_{1n}, x_{n1}) \in M[\lambda, \mu].
\end{aligned}
$$

Тогда коэффициент при $\mu$ в получившемся выражении есть в точности $e_{11\ (\lambda)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1})$. Если $\varphi_\lambda(e_{1n}, x_{n1}) = \frac{\lambda^m}{m!}u_m + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}u_{m-1} + \ldots$, то

$$
e_{11\ (\lambda)}\ \varphi_1(e_{1n}, x_{n1}) = \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}u_m + \frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!}u_{m-1} + \ldots .
$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
(\delta_1\tau)_\lambda(e_{1n}, x_{n1}) &= \frac{1}{m}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}x\ _{(0)}\ u_m + \frac{1}{m}\frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!}x\ _{(0)}\ u_{m-1} + \ldots \\
&+ \frac{1}{m}\lambda\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}u_m + \frac{1}{m}\lambda\frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!}u_{m-1} + \ldots = \frac{\lambda^m}{m!}u_m + \ldots .
\end{aligned}
$$

Таким образом, для $\varphi' = \varphi - \delta_1\tau$ мы имеем

$$
\deg_\lambda \varphi'_\lambda(e_{1n,x_{n1}}) < m = \deg_\lambda \varphi_\lambda(e_{1n,x_{n1}}),
$$

что приводит к противоречию с выбором $\varphi$. $\square$

Наконец, приступим к доказательству теоремы 6. Выберем $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M)$. Согласно леммам 4.3.2–4.3.5, существует 2-коцикл $\varphi' \in \mathrm{Z}^2(A, M)$, такой что $\varphi - \varphi' \in \mathrm{B}^2(A, M)$ и выполнены соотношения (120), (123), (124), (125), (126), (127).

Рассмотрим расширение $E$, определённое с помощью 2-коцикла $\varphi'$, то есть элемент короткой точной последовательности

$$
0 \to M \to E \to A \to 0, \quad M\ _{(\lambda)}\ M = 0.
$$

Тогда $E = A \oplus M$ (как векторных пространств), и прообразы порождающих элементов из множества $B'$, описанного в лемме 4.3.1, удовлетворяют определяющим соотношениям (109)–(114). Следовательно, подалгебра ассоциативной конформной алгебры $E$, порождённая прообразами элементов из $B'$ в $E$, изоморфна $A$. Но тогда, согласно теории, данной в §1.4, расширение $E$ расщепляется и $\varphi' \in \mathrm{B}^2(A, M)$. Это влечёт $\varphi \in \mathrm{B}^2(A, M)$, что и требовалось.

## § 4.4. Примеры нерасщепляемых расширений и доказательство теоремы 7

В данном параграфе мы приведём примеры ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа, для которых существует нерасщепляемое сингулярное расширение с помощью подходящего бимодуля. Тем самым мы ограничим результаты предыдущих параграфов с другой стороны. Объединив полученные данные с результатами И. А. Долгунцевой [7], мы выведем главный результат данной главы в виде теоремы 7.

Приведём пример малой размерности, который внесёт ясность в доказательство следующего за ним утверждения.

**Пример 14.** Пусть $A = x\Bbbk[\partial, x] \oplus y\Bbbk[\partial, y] \cong \mathrm{Cend}_{1,x} \oplus \mathrm{Cend}_{1,y}$. Рассмотрим $M = z^2\Bbbk[\partial, z]$ как конформный бимодуль над $A$ относительно следующего действия:

$$\begin{aligned}
&xf(\partial, x)\ {}_{(\lambda)}\ z^2 g(\partial, z) = z^2(z+\lambda)f(-\lambda, z)g(\partial+\lambda, z+\lambda),\\
&z^2 g(\partial, z)\ {}_{(\lambda)}\ yf(\partial, y) = z^2(z+\lambda)g(-\lambda, z)f(\partial+\lambda, z+\lambda),\\
&yf(\partial, y)\ {}_{(\lambda)}\ z^2 g(\partial, z) = 0,\\
&z^2 g(\partial, z)\ {}_{(\lambda)}\ xf(\partial, x) = 0.
\end{aligned}$$

Определим 2-коцепь $\varphi \in \mathrm{C}^2(A, M)$ по следующему правилу:

$$\varphi_\lambda(xf(\partial, x), yg(\partial, y)) = z^2 f(-\lambda, z)g(\partial+\lambda, z+\lambda),$$

$$\varphi_\lambda(yf(\partial, x), xg(\partial, x)) = 0, \quad \varphi_\lambda(xf(\partial, x), xg(\partial, x)) = 0, \quad \varphi_\lambda(yf(\partial, y), yg(\partial, y)) = 0.$$

Несложной проверкой тождества (79) мы получаем, что $\varphi$ есть 2-коцикл. Тот же результат можно получить и из других соображений. Рассмотрим множество $E$ матриц из $\mathrm{Cend}_2$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} xf(\partial, x) & \frac{1}{2}xf(\partial, x) + \frac{1}{2}(x-\partial)g(\partial, x) + x(x-\partial)h(\partial, x) \\ 0 & (x-\partial)g(\partial, x), \end{pmatrix} \tag{128}$$

для всех $f$, $g$, $h \in \Bbbk[\partial, x]$. Подмножество $E$ является конформной подалгеброй в $\mathrm{Cend}_2$, изоморфной расширению $A$ с помощью бимодуля $M$ относительно 2-коцепи $\varphi$, что возможно лишь в том случае, когда $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M)$. В явном виде изоморфизм задаётся правилами

$$xf(\partial, x) \mapsto \begin{pmatrix} xf(\partial, x) & \frac{1}{2}xf(\partial, x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad yg(\partial, y) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(x-\partial)g(\partial, x) \\ 0 & (x-\partial)g(\partial, x) \end{pmatrix},$$

$$z^2 h(\partial, z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x(x-\partial)h(\partial, x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\varphi \notin \mathrm{B}^2(A, M)$. Допустим противное, пусть существует $\psi \in \mathrm{C}^1(A, M)$, такой что $\delta_1\psi = \varphi$. Положим

$$\psi(x) = z^2 f(\partial, z), \quad \psi(y) = z^2 g(\partial, z).$$

Тогда

$$z^2 = \varphi_\lambda(x, y) = (\delta_1\psi)_\lambda(x, y) = z^2(z+\lambda)g(\partial+\lambda, z+\lambda) + z^2(z+\lambda)f(-\lambda, z)z^2(z+\lambda)g(\partial+\lambda, z+\lambda),$$

то есть $z+\lambda$ делит 1 в кольце $\Bbbk[\partial, z, \lambda]$, противоречие. Следовательно,

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{Cend}_{1,x} \oplus \mathrm{Cend}_{1,y}, M) \neq 0.$$

**Лемма 4.4.1.** Пусть $A \cong \mathrm{Cend}_{n,Q} \oplus \mathrm{Cend}_{m,Q'}$, где $Q = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1, x}_{n})$, $Q' = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1, x}_{m})$. Тогда существует конформный $A$-бимодуль $M$, такой что $\mathrm{H}^2(A, M) \neq 0$. Кроме того, существует 2-коцикл $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M) \setminus \mathrm{B}^2(A, M)$, такой что расширение $A$ с помощью $M$ и $\varphi$ имеет точное представление конечного типа.

*Доказательство.* Пусть для определенности $n \leq m$. Рассмотрим левый $H$-модуль $M = M_{n,m}(\Bbbk[\partial, x])$, снабжённый структурой $A$-бимодуля по следующему правилу:

$$(Q(x)A(\partial, x) + Q'(x)B(\partial, x)) \;_{(\lambda)}\; X(\partial, x) = A(-\lambda, x)Q(x+\lambda)X(\partial+\lambda, x+\lambda),$$

$$X(\partial, x) \;_{(\lambda)}\; (Q(x)A(\partial, x) + Q'(x)B(\partial, x)) = X(-\lambda, x)Q'(x+\lambda)B(\partial+\lambda, x+\lambda),$$

для всех $X \in M$. Определим пару линейных отображений

$$\vdash\colon M_n(\Bbbk[\partial, x]) \to M_{n,m}(\Bbbk[\partial, x]), \quad \perp\colon M_m(\Bbbk[\partial, x]) \to M_{n,m}(\Bbbk[\partial, x])$$

по правилам

$$C^{\vdash} = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{\perp} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Иными словами, к матрице $C \in M_n(\Bbbk[\partial, x])$ добавляем $m-n$ нулевых столбцов, а у матрицы $B \in M_m(\Bbbk[\partial, x])$ удаляем $m-n$ нижних строк. Легко видеть, что выполнены соотношения

$$C^{\vdash}B = CB^{\perp}, \quad C_1C_2^{\vdash} = (C_1C_2)^{\vdash}, \quad B_1^{\perp}B_2 = (B_1B_2)^{\perp},$$

для всех $C$, $C_1$, $C_2 \in M_n(\Bbbk[\partial, x])$ и $B$, $B_1$, $B_2 \in M_m(\Bbbk[\partial, x])$.

Рассмотрим 2-коцепь $\varphi \in \mathrm{C}^2(A, M)$:

$$\varphi_\lambda(QC_1 + Q'B_1, QC_2 + Q'B_2) = C_1(-\lambda, x)B_2^\perp(\partial + \lambda, x + \lambda). \tag{129}$$

Проверим, что (129) удовлетворяет тождеству 2-коцикла (79). В самом деле, для всех $a_i = QC_i + Q'B_i$, $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} a_1\,{}_{(\lambda)}\,\varphi_\mu(a_2, a_3) &= (QC_1 + Q'B_1)\,{}_{(\lambda)}\,\varphi_\mu(QC_2 + Q'B_2, QC_3 + Q'B_3) \\ &= QC_1\,{}_{(\lambda)}\,C_2(-\mu, x)B_3^\perp(\partial + \mu, x + \mu) \\ &= C_1(-\lambda, x)Q(x + \lambda)C_2(-\mu, x + \lambda)B_3^\perp(\partial + \lambda + \mu, x + \lambda + \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda+\mu}(a_1\,{}_{(\lambda)}\,a_2, a_3) &= \varphi_{\lambda+\mu}(QC_1(-\lambda, x)Q(x + \lambda)C_2(\partial + \lambda, x + \lambda) \\ &\quad + Q'B_1(-\lambda, x)Q'(x + \lambda)B_2(\partial + \lambda, x + \lambda), QC_3 + Q'B_3) \\ &= C_1(-\lambda, x)Q(x + \lambda)C_2(-(\lambda + \mu) + \lambda, x + \lambda)B_3^\perp(\partial + \lambda + \mu, x + \lambda + \mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(a_1, a_2\,{}_{(\mu)}\,a_3) &= \varphi_\lambda(QC_1 + Q'B_1, QC_2(-\mu, x)Q(x + \mu)C_3(\partial + \mu, x + \mu) \\ &\quad + Q'B_2(-\mu, x)Q'(x + \mu)B_3(\partial + \mu, x + \mu)) \\ &= C_1(-\lambda, x)B_2^\perp(-\mu, x + \lambda)Q'(x + \lambda + \mu)B_3(\partial + \lambda + \mu, x + \lambda + \mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(a_1, a_2)\,{}_{(\lambda+\mu)}\,a_3 &= C_1(-\lambda, x)B_2^\perp(\partial + \lambda, x + \lambda)\,{}_{(\lambda+\mu)}\,QC_3 + Q'B_3 \\ &= C_1(-\lambda, x)B_2^\perp(-(\lambda + \mu) + \lambda, x + \lambda)Q'(x + \lambda + \mu)B_3(\partial + \lambda + \mu, x + \lambda + \mu), \end{aligned}$$

следовательно,

$$a_1\,{}_{(\lambda)}\,\varphi_\mu(a_2, a_3) - \varphi_{\lambda+\mu}(a_1\,{}_{(\lambda)}\,a_2, a_3) = \varphi_\lambda(a_1, a_2\,{}_{(\mu)}\,a_3) - \varphi_\lambda(a_1, a_2)\,{}_{(\lambda+\mu)}\,a_3 = 0.$$

Допустим, что $\varphi = \delta_1\psi \in \mathrm{B}^2(A, M)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{C}^1(A, M)$. Положим

$$\psi(Q) = \psi(QI_n) = X_1(\partial, x), \quad \psi(Q') = \psi(Q'I_m) = X_2(\partial, x),$$

где $I_n$, $I_m$ — единичные матрицы размера $n$ и $m$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} I_nI_m^\perp = \varphi_\lambda(Q, Q') &= Q\,{}_{(\lambda)}\,X_2 - \psi(Q\,{}_{(\lambda)}\,Q') + X_1\,{}_{(\lambda)}\,Q' \\ &= X_1(-\lambda, x)Q'(x + \lambda) + Q(x + \lambda)X_2(\partial + \lambda, x + \lambda). \end{aligned}$$

Но в последней строке выражения в правой части обязательно появляется общий множитель

$x+\lambda$, что приводит к противоречию. Следовательно,

$$\mathcal{H}^2(\mathrm{Cend}_{n,Q} \oplus \mathrm{Cend}_{m,Q'}, M) \neq 0.$$

Наконец, рассмотрим нерасщепляемое расширение

$$0 \to M \to E \to A \to 0$$

построенное с помощью полученного 2-коцикла $\varphi$. Ассоциативную конформную алгебру $E$ можно представить как подалгебру в $\mathrm{Cend}_{n+m}$, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} Q(x)C & \frac{1}{2}Q(x)C^{\vdash} + \frac{1}{2}B^{\perp}Q'(x-\partial) + Q(x)XQ'(x-\partial) \\ 0 & BQ'(x-\partial) \end{pmatrix},$$

для всех $C \in M_n(\Bbbk[\partial, x])$, $B \in M_m(\Bbbk[\partial, x])$, $X \in M_{n,m}(\Bbbk[\partial, x])$, где изоморфизм задаётся как

$$QC \mapsto \begin{pmatrix} Q(x)C & \frac{1}{2}Q(x)C^{\vdash} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q'B \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}B^{\perp}Q'(x-\partial) \\ 0 & BQ'(x-\partial), \end{pmatrix},$$

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & Q(x)XQ'(x-\partial) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

□

**Лемма 4.4.2.** Пусть $A = \mathrm{Cend}_{n,Q}$, $n \geq 1$, $Q = \mathrm{diag}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\det Q \neq 0$. Если $\deg f_n > 1$, то существует конформный $A$-бимодуль $M$, такой что $\mathrm{H}^2(A, M) \neq 0$.

*Доказательство.* Рассмотрим случай $n = 1$ и обозначим $f_1(x) = f(x)$, $\deg f = K$. Напомним, что, как показано в работе трёх авторов [23], линейный сдвиг является автоморфизмом $\mathrm{Cend}_1$. Следовательно, с точностью до изоморфизма, можем положить, что $f(x) = x^K + \alpha x^{K-2} + \ldots$, т. е. коэффициент при $x^{K-1}$ равен нулю.

Рассмотрим $M = \mathrm{Cend}_1$ как конформный $A$-бимодуль относительно следующего действия $(\cdot\, {}_{[\lambda]}\, \cdot)$:

$$fa\; {}_{[\lambda]}\; u = a\; {}_{(\lambda)}\; fu, \quad h\; {}_{[\lambda]}\; fa = u\; {}_{(\lambda)}\; fa, \tag{130}$$

для всех $a$, $u \in \mathrm{Cend}_1$, где $(\cdot\, {}_{(\lambda)}\, \cdot)$ есть регулярное действие подалгебры $A = \mathrm{Cend}_{1,f}$ на ассоциативной конформной алгебре $\mathrm{Cend}_1$. Это в самом деле есть бимодуль, поскольку правое действие является регулярным, а левое действие задаётся изоморфизмом из замечания после примера 9.

Определим 3/2-линейное отображение $\varphi$: $A \times A \to M[\lambda]$, заданное как

$$\varphi_\lambda(fa, fb) = a\; {}_{(\lambda)}\; b. \tag{131}$$

Несложной проверкой тождества (79) мы получаем, что $\varphi$ есть 2-коцикл. Тот же результат можно получить и из других соображений. Заметим, что множество $E$ матриц следующего вида:
$$E = \begin{pmatrix} f(x)a & f(x)a + f(x)uf(x-\partial) \\ 0 & af(x-\partial) \end{pmatrix},$$
для всех $a$, $u \in \Bbbk[\partial, x]$, является конформной подалгеброй в $\mathrm{Cend}_2$, изоморфной расширению $A$ с помощью бимодуля $M$ относительно 2-коцепи $\varphi$, что возможно лишь в том случае, когда $\varphi \in \mathrm{Z}^2(A, M)$. Элемент $u \in M$ при этом изоморфизме переходит в $f(x)uf(x-\partial)e_{12}$.

Покажем, что $\varphi \notin \mathrm{B}^2(A, M)$. Допустим противное, $\varphi = \delta_1\psi$ для некоторого $\psi \in \mathrm{C}^1(A, M)$. Определим $H$-линейное отображение $\tilde\psi : \mathrm{Cend}_1 \to \mathrm{Cend}_1$ по правилу $\tilde\psi(a) = \psi(fa)$, $a \in \mathrm{Cend}_1$. Тогда
$$\varphi_\lambda(fa, fb) = \tilde\psi(a) \,{}_{[\lambda]}\, fb - \tilde\psi(a \,{}_{(\lambda)}\, fb) + fa \,{}_{[\lambda]}\, \tilde\psi(b),$$
и соотношения (130), (131) влекут
$$\tilde\psi(a \,{}_{(n)}\, fb) = \tilde\psi(a) \,{}_{(n)}\, fb + a \,{}_{(n)}\, f\tilde\psi(b) - a \,{}_{(n)}\, b, \tag{132}$$
для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. В частности, для $a = b = 1$ мы имеем
$$\tilde\psi(1) \,{}_{(K)}\, f + 1 \,{}_{(K)}\, f\tilde\psi(1) = \tilde\psi(1 \,{}_{(K)}\, f) = K!\tilde\psi(1),$$
где $K = \deg f$. Положим
$$\tilde\psi(1) = \sum_{s\geq 0} a_s(x)(x-\partial)^s,$$
где $a_s(x) \in \Bbbk[x]$. Тогда
$$\begin{aligned} K!\sum_{s\geq 0} a_s(x)(x-\partial)^s &= \sum_{s\geq 0} a_s(x)(x-\partial)^s \,{}_{(K)}\, f(x) + 1 \,{}_{(K)}\, f(x)\sum_{s\geq 0} a_s(x)(x-\partial)^s \\ &= \sum_{s\geq 0} a_s(x)(x^s f(x))^{(K)} + \sum_{s\geq 0} (f(x)a_s(x))^{(K)}(x-\partial)^s. \end{aligned} \tag{133}$$
Сравнивая коэффициенты при $(x-\partial)^s$, $s \geq 0$ в левой и правой частях, мы получаем
$$K!a_0(x) = \sum_{s\geq 0} a_s(x)(x^s f(x))^{(K)} + (a_0(x)f(x))^{(K)}, \tag{134}$$
$$K!a_s(x) = (f(x)a_s(x))^{(K)}, \quad s \geq 1. \tag{135}$$
Из равенства (135) следует, что $\deg a_s = 0$ для всех $s \geq 1$. Для этого достаточно сравнить коэффициенты при всех степенях по $x$, начиная со старшей. Тогда из (134) получим
$$0 = \left(\sum_{s\geq 1} a_s x^s f(x) + a_0(x)f(x)\right)^{(K)} = \left(f(x)(\sum_{s\geq 1} a_s x^s + a_0(x))\right)^{(K)}.$$
Выражение в скобках есть либо полином степени не меньше $K$, что невозможно, либо тож-

дественный нуль. Следовательно,

$$a_0(x) = -\sum_{s\geq 1} a_s x^s.$$

Тем самым,

$$\tilde{\psi}(1) = \sum_{s\geq 1} a_s((x-\partial)^s - x^s),$$

где $a_s \in \Bbbk$. Осталось лишь заметить, что

$$\tilde{\psi}(u) = u\tilde{\psi}(1), \tag{136}$$

для всех $u \in \mathrm{Cend}_1$. Ввиду $H$-линейности, достаточно рассматривать лишь $u = u(x) \in \Bbbk[x]$. Докажем (136) индукцией по $\deg u$. База индукции тривиальна. Пусть для некоторого $u(x)$ выполнено (136). Тогда из равенства (132) для $a = u$, $b = 1$, $n = K-1$, мы получаем

$$K!\tilde{\psi}(xu(x)) = \tilde{\psi}(f^{(K-1)}(x)u(x)) \tag{137}$$

$$= u(x)\sum_{s\geq 1} a_s((x-\partial)^s - x^s)\ _{(K-1)}\ f(x) + u\ _{(K-1)}\ f(x)\sum_{s\geq 1} a_s((x-\partial)^s - x^s) \tag{138}$$

$$= u(x)\sum_{s\geq 1} a_s\Big((x^s f(x))^{(K-1)} - K!x^{s+1} + K!x(x-\partial)^s - (x^s f(x))^{(K-1)}\Big) \tag{139}$$

$$= K!xu(x)\tilde{\psi}(1), \tag{140}$$

что и требовалось. Из соотношения (136) следует, что $\tilde{\psi} \in \mathrm{B}^1(\mathrm{Cend}_1, M)$, где $\mathrm{Cend}_1$ рассматривается как модуль с регулярным действием. Напомним, что 0-коцепь есть элемент $\gamma \in {}^{M}\!/_{\partial M}$, а дифференциал 0-коцепи $\gamma$ есть 1-коцепь $\delta_0\gamma$, такая что $(\delta_0\gamma)(a) = a*\gamma - \gamma*a = (a\ _{(\lambda)}\ \gamma - \gamma\ _{(\lambda)}\ a)|_{\lambda=-\partial}$. Легко видеть, что ${}^{\mathrm{Cend}_1}\!/_{\partial\,\mathrm{Cend}_1} \cong \Bbbk[x] \ni \gamma(x) = \sum\limits_{s\geq 1} a_s x^s$ подойдёт. В самом деле, мы имеем

$$(\delta_0\gamma(x))(1) = (1\ _{(\lambda)}\ \gamma(x) - \gamma(x)\ _{(\lambda)}\ 1)|_{\lambda=-\partial} = \gamma(x+\lambda)|_{\lambda=-\partial} - \gamma(x) = \gamma(x-\partial) - \gamma(x) = \tilde{\psi}(1),$$

где $1 \in \mathrm{Cend}_1$. Но тогда из (132) получаем

$$0 = (\delta_1\tilde{\psi})(a, fb) = a\ _{(\lambda)}\ \tilde{\psi}(fb) - \tilde{\psi}(a\ _{(\lambda)}\ fb) + \tilde{\psi}(a)\ _{(\lambda)}\ fb = a\ _{(\lambda)}\ b = \varphi_\lambda(fa, fb) \neq 0,$$

для всех $a$, $b \in \mathrm{Cend}_1$. Противоречие.

Наконец, перейдём к общему случаю $n > 1$. Пусть $A = \mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\det Q \neq 0$, $\deg f_n > 1$. Аналогично случаю $n = 1$, рассмотрим $M = \mathrm{Cend}_n$ как $A$-бимодуль относительно правого регулярного действия и левого действия, индуцированного изоморфизмом из замечания после примера 9.

Построим расширение $0 \to M \to E \to A \to 0$ с помощью 2-коцикла

$$\varphi_\lambda(QC, QB) = C_{\ (\lambda)}\ B,$$

которое, с точностью до изоморфизма ассоциативных конформных алгебр, совпадает со следующей подалгеброй в $\mathrm{Cend}_{2n}$:

$$E = \begin{pmatrix} Q(x)C & Q(x)C + Q(x)XQ(x-\partial) \\ 0 & CQ(x-\partial) \end{pmatrix},$$

для всех $C$, $X \in \mathrm{Cend}_n$. Построенное расширение $E$ не расщепляется. В самом деле, $A$ содержит подалгебру $A' = e_{nn}Ae_{nn}$, изоморфную $\mathrm{Cend}_{1,f_n}$, а $M$ содержит $A'$-подмодуль $M' = e_{nn}Me_{nn}$. Данный подмодуль изоморфен $\mathrm{Cend}_1$ относительно действия (130) для $f = f_n$, а индуцированный им коцикл совпадает с (131). Если $E$ — расщепляемое расширение, то таким же будет и $E' = (e_{nn} + e_{2n\,2n})E(e_{nn} + e_{2n\,2n})$, но это противоречит уже доказанному. □

В леммах 4.4.1 и 4.4.2 были приведены ключевые примеры для теоремы 7. Далее мы переходим к исследованию задачи об отщеплении нильпотентного радикала у полупростых ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа.

**Лемма 4.4.3.** Пусть

$$0 \to M \to E \to A \to 0$$

есть короткая точная последовательность ассоциативных конформных алгебр, $M$ нильпотентна, а $A = A_0 \oplus A_1$, причём $\mathrm{H}^2(A_0, M) = 0$, $\mathrm{H}^2(A_1, M) = 0$, и в $A_1$ есть конформная единица. Тогда $\mathrm{H}^2(A, M) = 0$ и, что эквивалентно, $E \cong A \ltimes M$.

*Доказательство.* Если $\bar{e}$ есть конформная единица в $A_1$, то существует прообраз $e \in E$, который является конформным идемпотентом: $e_{\ (0)}\ e = e$, $e_{\ (n)}\ e = 0$ при $n > 0$, как показано в работе [6]. Следовательно, мы можем применить к $E$ конформный аналог разложения Пирса. Рассмотрим подалгебры $E_0 = \{a - e_{\ (0)}\ a - \{a_{\ (0)}\ e\} + e_{\ (0)}\ \{a_{\ (0)}\ e\} \mid a \in E\}$ и $E_1 = \{e_{\ (0)}\ \{a_{\ (0)}\ e\} \mid a \in E\}$. Они будут подалгебрами в $E$, причём $E_{0\ (\lambda)}\ E_1 = E_{1\ (\lambda)}\ E_0 = 0$, ввиду $e_{\ (n)}\ E_0 = E_{0\ (n)}\ e = 0$, для всех $n \geq 0$. Кроме того, как показано в работе [49], $E_i$ содержит прообраз $A_i$, $i = 0, 1$. Таким образом, из $\mathrm{H}^2(A_i, M) = 0$ следует, что $E_i$ содержит подалгебру, изоморфную $A_i$. Но тогда $E$ содержит подалгебру, изоморфную $A$, что и требовалось. □

Объединяя данную лемму с классификационной теоремой после примера 9 из §1.3, получим важное следствие.

**Следствие 2.** *Пусть $A$ есть ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа, $R$ — максимальный нильпотентный идеал в $A$, ${}^{A}\!/_{R} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, где*

*$A_i$ простые ассоциативные конформные алгебры. Допустим, $A_i$ изоморфны алгебрам вида* $\mathrm{Cur}_n$, $\mathrm{Cend}_n$, *и не более чем одной копии* $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x)$. *Тогда* $A \cong {}^{A}\!/_{R} \ltimes R$.

Напомним, что всякая полупростая ассоциативная конформная алгебра $A$ с точным представлением конечного типа есть прямая сумма простых, т. е. $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, где $A_i$, $i = \overline{1,k}$ изоморфны либо $\mathrm{Cur}_n$, либо $\mathrm{Cend}_{n,Q}$, $Q(x) = \mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n)$, $\det Q \neq 0$, $f_1 | f_2 | \ldots | f_n$.

Объединяя результаты теорем 5, 6, лемм 4.4.1, 4.4.2 и 4.4.3, следствия 2, с исследованиями И. А. Долгунцевой [7], мы получаем доказательство теоремы 7. Отметим, что данное утверждение является эквивалентным аналогом основной теоремы Веддербёрна для класса ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа.

# Заключение

В данной работе рассматривались задачи, связанные с конформными аналогами теорем Адо и Веддербёрна:

**Проблема.** (Адо, конформная) *Имеет ли всякая конформная алгебра Ли конечного типа, свободнопорождённая как $H$-модуль, точное представление на конечнопорождённом свободном $H$-модуле?*

**Проблема.** (Основная теорема Веддербёрна, конформная) *Описать условия, при которых ассоциативная конформная алгебра с точным представлением конечного типа $A$ изоморфно представляется полупрямым произведением своей полупростой подалгебры $S$ и нильпотентного радикала $R$: $A \cong S \ltimes R$.*

Во второй и третьей главе были предложены и исследованы методы для решения первой из поставленных проблем. В ряде случаев проблему удалось решить положительно, что продвигает нас к получению общего результата. Кроме того, в третьей главе исследовались методы отыскания базиса Грёбнера — Ширшова для конформных алгебр, что может быть полезным в дальнейших исследованиях само по себе.

В четвёртой главе был доказан ряд утверждений, которые полностью разрешают вторую из поставленных проблем. Для доказательства использовались как анализ внутренней структуры, так и переход к когомологической теории. Так, был применён конформный аналог когомологий Хохшильда, которые, аналогично классическому случаю, могут использоваться для описания расширений.

Все представленные результаты новые, апробировались на конференциях и опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

# Список литературы


[1] *Адо И. Д.* О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок // Изв. Каз. Ф. М. О. — 1935. — Т. 7, вып. 3. — С. 1—43.

[2] *Балинский А. А., Новиков С. П.* Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли // ДАН СССР. — 1985. — Т. 283, вып. 5. — С. 1036—1039.

[3] *Бокуть Л. А.*, Вложения в простые ассоциативные алгебры // Алгебра и логика. — 1976. — вып. 15. — С. 117—142.

[4] *Бокуть Л. А., Фонг Ю., Ке В.-Ф., Колесников П. С.* Базисы Грёбнера и Грёбнера–Ширшова в алгебре и конформные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 669—706.

[5] *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, вып. 4. — С. 13—30.

[6] *Долгунцева И. А.* Когомологии Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, вып. 6. — С. 688—706.

[7] *Долгунцева И. А.* Тривиальность второй группы когомологий конформных алгебр $\mathrm{Cend}_n$ и $\mathrm{Cur}_n$ // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, вып. 1. — С. 74—89.

[8] *Ширшов А. И.* Некоторые алгоритмические вопросы для $\varepsilon$-алгебр // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, вып. 1. — С. 132—137.

[9] *Ширшов А. И.* О базах свободных алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1962. — Т. 1. — С. 14—19.

[10] *Alhussein H., Kolesnikov P. S., Lopatkin V. E.* Morse matching method for conformal cohomologies // arXiv:2204.10837v3

[11] *Bai C., Meng D.* The classification of Novikov algebras in low dimensions // J. Phys. A, Math. Gen. — 2001. — Vol. 34, no. 8. — P. 1581—1594.

[12] *Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G.* Theory of finite pseudoalgebras // Adv. Math. — 2001. — Vol. 162. — P. 1—140.

[13] *Bakalov B., Kac V. G., Voronov A.* Cohomology of conformal algebras // Comm. Math. Phys. — 1999. — Vol. 200. — P. 561—589.

[14] *Beilinson A. A., Drinfeld V. G.* Chiral algebras // Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. — AMS, Providence, USA. — 2004. — Vol. 51.

[15] *Belavin A. A., Polyakov A. V., Zamolodchikov A. B.* Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nuclear Phys. — 1984. — Vol. 241. — P. 333—380.

[16] *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. — 1978. — Vol. 29. — P. 178—218.

[17] *Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F.* Grobner-Shirshov bases and composition lemma for associative conformal algebras: an example // Contemp. Math. — 2000. — Vol. 264, — P. 63—90.

[18] *Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F.* Composition-diamond lemma for associative conformal algebras // J. Algebra. — 2004. — Vol. 272. — P. 739—774.

[19] *Bokut L. A., Chen Y.-Q.* Gröbner-Shirshov bases and their calculation // Bull. Math. Sci. — 2014. — Vol. 4. — P. 325—395.

[20] *Bokut L. A., Chen Y.-Q., Zhang Z.* Gröbner–Shirshov bases method for Gelfand–Dorfman–Novikov algebras // J. Algebra Appl. — 2017. — Vol. 16, no. 1. — 1750001.

[21] *Bokut L. A., Chen Y.-Q., Zhang Z.* Free Gelfand–Dorfman–Novikov superalgebras and a Poincaré–Birkhoff–Witt type theorem // Int. J. Algebra Comput. — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 481—505.

[22] *Borcherds R. E.* Vertex algebras, Kac–Moody algebras, and the monster // Proc. Natl. Acad. Sci., USA. — 1986. — Vol. 83. — P. 3068—3071.

[23] *Boyallian C., Kac V. G., Liberati J.-I.* On the classification of subalgebras of $\mathrm{Cend}_N$ and $\mathrm{gc}_N$ // J. Algebra. — 2003. — Vol. 260. — P. 32—63.

[24] *Boyallian C., Kac V. G., Liberati J.-I.* Classification of finite irreducible modules over the Lie conformal superalgebra $\mathrm{CK}_6$ // Commun. Math. Phys. — 2013. — Vol. 317. — P. 503—546.

[25] *Boyallian C., Liberati J.-I.* Classification of irreducible representations over finite simple Lie conformal superalgebras // Groups, Algebras and Applications. Proceedings of XVIII Latin American Algebra Colloquium (São Pedro, Brazil, August 3–8, 2009). Contemporary Mathematics. — AMS, Providence, USA. — 2011. — Vol. 537. — P. 85—121.

[26] *Bremner M. R., Dotsenko V. V.* Algebraic operads: An algorithmic companion // CRC Press, Boca Raton, Florida, USA. — 2016.

[27] *Buchberger B.* An algorithm for finding a basis for the residue class ring of a zero-dimensional polynomial ideal // PhD thesis (German). University of Insbruck, Austria. — 1965.

[28] *Burde D., de Graaf W.* Classification of Novikov algebras // Appl. Algebra Eng. Commun. Comput. — 2013. — Vol. 24, no. 1. — P. 1—15.

[29] *Cartan H., Eilenberg S.* Homological Algebra // Princeton University Press, Princeton, NJ, USA. — 1956.

[30] *Cheng S.-J., Kac V. G.* Conformal modules // Asian J. Math. — 1997. — Vol. 1. — P. 181—193.

[31] *Cheng S.-J., Kac V. G.* A new $N = 6$ superconformal algebra // Commun. Math. Phys. — 1997. — Vol. 186. — P. 219—231.

[32] *Cheng S.-J., Kac V. G., Wakimoto M.* Extensions of conformal modules // Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics. Proceedings of the 38-th Taniguchi Symposium (Kyoto, Japan, December 9–13, 1996). Progress in Mathematics. — Birkhauser, Boston. — 1998. — Vol. 160. — P. 79—129.

[33] *Cheng S.-J., Kac V. G., Wakimoto M.* Extensions of Neveu-Schwarz conformal modules // J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 41. — P. 2271—2294.

[34] *Dzhumadil'daev A. S., Löfwall C.* Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities // Homology, Homotopy Appl. — 2002. Vol. 4, no. 2. — P. 165–190.

[35] *D'Andrea A, Kac V. G.* Structure theory of finite conformal algebras // Sel. Math. New Ser. — 1998. — Vol. 4. — P. 377—418.

[36] *Fattori D., Kac V. G.* Classification of finite simple Lie conformal superalgebras // J. Algebra. — 2002. — Vol. 258. — P. 23—59.

[37] *Fattori D., Kac V. G., Retakh A.* Structure theory of finite Lie conformal superalgebras // Proceedings of the conference Lie Theory and its Applications in Physics V. — World Scientific Publication, River Edge, New Jersey, USA. — 2004. — P. 27—63.

[38] *Frenkel E., Ben-Zvi D.* Vertex algebras and algebraic curves // Mathematical Surveys and Monograps. — AMS, Providence, USA. — 2001. — Vol. 88.

[39] *Frenkel E., Kac V. G., Radul A., Wang W.* $W_{1+\infty}$ and $W(\mathrm{gl}_N)$with central charge // N. Comm. Math. Phys. — 1995. — Vol. 170. — P. 337—357.

[40] *Frenkel I. B., Lepowsky J., Meurman A.* Vertex operator algebras and the Monster // Pure and Applied Mathematics. — Academic, Boston, Massachusetts. — 1998. — Vol. 134.

[41] *Golenishcheva-Kutuzova M., Kac V. G.* $\Gamma$-conformal algebras, J. Math. Phys. — 1998. — Vol. 39. — P. 2290—2305.

[42] *Hochschild G.* On the cohomology groups of an associative algebra // Ann. Math. — 1945. — Vol. 46. — P. 58—67.

[43] *Hochschild G.* On the cohomology theory for associative algebras // Ann. Math. — 1946. — Vol. 47. — P. 568—579.

[44] *Hong Y., Wu Z.* Simplicity of quadratic Lie conformal algebras // Comm. Algebra. — 2017. — Vol. 45, no. 1. — P. 141—150.

[45] *Kac V. G.* Vertex algebras for beginners (Second ed.) // University Lecture Series. — AMS, Providence, USA. — 1998. — Vol. 10.

[46] *Kac, V. G.* Formal distribution algebras and conformal algebras // Proceedings of the 12th International Congress of Mathematical Physics (ICMP 97). — International Press, Cambridge, UK. — 1999. — P. 80—97.

[47] *Kang S.-J., Lee K.-H.* Gröbner—Shirshov bases for representation theory // J. Korean Math. Soc. — 2000. — Vol. 37. — P. 55—72.

[48] *Kolesnikov P. S.* Associative conformal algebras with finite faithful representation // Adv. Math. — 2006. — Vol. 20. — P. 602—637.

[49] *Kolesnikov P. S.* On the Wedderburn principal theorem in conformal algebras // J. Algebra Appl. — 2007. — Vol. 6. — P. 119—134.

[50] *Kolesnikov P. S.* Conformal algebras in the context of linear algebraic groups // Generalized Lie Theory in Mathematics, Physics and Beyond. — Springer Verl., Berlin, Heidelberg. — 2009. — P. 235—246.

[51] *Kolesnikov P. S.* On finite representations of conformal algebras // J. Algebra. — 2011. — Vol. 331. — P. 169—193.

[52] *Kolesnikov P. S.* Graded associative conformal algebras of finite type // Algebras and Repr. Theory. — 2013. — Vol. 16, no. 6. — P. 1521—1539.

[53] *Kolesnikov P. S.* The Ado theorem for finite Lie conformal algebras with Levi decomposition // J. Algebra Appl. — 2016. — Vol. 15. — 1650130.

[54] *Kolesnikov P. S.* Gröbner–Shirshov bases for associative conformal algebras with arbitrary locality function // Proceedings of the 3rd International Congress in Algebra and Combinatorics. — World Scientific. — 2020. — P. 255—267.

[55] *Kolesnikov P. S.* Universal enveloping Poisson conformal algebras // Int. J. of Alg. and Comp. — 2020. — Vol. 30, no. 5. — P. 1015—1034.

[56] *Kolesnikov P. S., Sartayev B., Orazgaliev A.* Gelfand–Dorfman algebras, derived identities, and the Manin product of operads // J. Algebra. — 2019. — Vol. 539. — P. 260—284.

[57] *Martinez C., Zelmanov E.* Irreducible representations of the exceptional Cheng–Kac superalgebra // Trans. Am. Math. Soc. — 2014. — Vol. 366. — P. 5853—5876.

[58] *Mikhalev A. A., Shestakov I. P.* PBW-pairs of varieties of linear algebras // Comm. Algebra. — 2014. — Vol. 42. — P. 667—687.

[59] *Mostovoy J., Perez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P.* Hopf algebras in non-associative Lie theory // Bull. Math. Sci. — 2014. — Vol. 4. — P. 129–173.

[60] *Newman M. H. A.* On theories with a combinatorial definition of 'equivalence' // Ann. Math. — 1942. — Vol. 43. — P. 223—243.

[61] *Ni L., Chen Y.-Q.* A new Composition-Diamond lemma for associative conformal algebras // J. Algebra App. — 2017. — Vol. 16, no. 5. — P. — 1750094.

[62] *Primc M.* Vertex algebras generated by Lie algebras // J. Pure Appl. Algebra — 1999. — Vol. 135, no. 3. — P. 253–293.

[63] *Retakh A.* Associative conformal algebras of linear growth // J. Algebra. — 2001. — Vol. 237. — P. 769—788.

[64] *Retakh A.* Unital associative pseudoalgebras and their representations // J. Algebra. — 2004. — Vol. 277. — P. 769—805.

[65] *Roitman M.* On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. — 1999. — Vol. 217. — P. 496—527.

[66] *Roitman M.* Universal enveloping conformal algebras // Sel. Math. / New Ser. — 2000. — Vol. 6. — P. 319—345.

[67] *Wightman A. S.* Quantum field theory in terms of vacuum expectation values // — Phys. Rev. — 1956. Vol. 101. — P. 860—866.

[68] *Wilson K.* OPE and anomalous dimensions in the Thirring model // Phys. Rev. D. — 1970. — Vol. 2. — P. 1473—1477.

[69] *Xu X.* On simple Novikov algebras and their irreducible modules // J. Algebra. — 1996. Vol. 185, no. 3. — P. 905—934.

[70] *Xu X.* Quadratic conformal superalgebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 231. — P. 1—38.

[71] *Xu X.* Classification of simple Novikov algebras and their irreducible modules of characteristic 0 // J. Algebra. — 2001. — Vol. 246, no. 2. — P. 673—707.

[72] *Xu X.* Gel'fand–Dorfman bialgebras // Southeast Asian Bull. Math. — 2003. — Vol. 27. — P. 561—574.

[73] *Zelmanov, E.* On the structure of conformal algebras // Proceedings of the International Conference on Combinatorial and Computational Algebra (May 24–29, 1999, Hong Kong, China). — Contemporary Mathematics, AMS, Providence, USA. — 2000. — Vol. 264. — P. 139–153.

[74] *Zelmanov, E.* Idempotents in conformal algebras // Proceedings of the 3rd International Algebra Conference (Tainan, Taiwan, June 16–July 1, 2002). — Klüwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands. — 2003. — P. 257–266.

# Работы автора по теме диссертации


[75] *Колесников П. С., Козлов Р. А.* Теорема Молина–Веддербёрна для ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа // Алгебра и логика. — 2017. — Т. 56, вып. 5. — С. 639—641.

[76] *Козлов Р. А.* Когомологии Хохшильда ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{Cend}_{1,x}$ // Алгебра и логика. — 2019. — Т. 58, вып. 1. — С. 52—68.

[77] *Kolesnikov P. S., Kozlov R. A.* On the Hochschild cohomologies of associative conformal algebras with a finite faithful representation // Commun. Math. Phys. — 2019. — Vol. 369, no. 1. — P. 351—370.

[78] *Kolesnikov P. S., Kozlov R. A., Panasenko A. S.* Quadratic Lie conformal superalgebras related to Novikov superalgebras // J. Noncommut. Geom. — 2021. — Vol. 15, no. 4. — P. 1485—1500.

[79] *Kolesnikov P. S., Kozlov R. A.* Standard bases for the universal associative conformal envelopes of Kac–Moody conformal algebras // Algebr. Represent. Theor. — 2022. — Vol. 25. — P. 847—867.

[80] *Козлов Р. А.* Квадратичные конформные (супер)алгебры Ли, связанные с (супер)алгебрами Новикова // Материалы международной школы-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". — МГУ, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва. — 2020. — С. 38—39.

[81] *Козлов Р. А.* Универсальные ассоциативные обёртывающие с ограничением на локальность 3 для квадратичных конформных алгебр, построенных по специальным алгебрам Гельфанда — Дорфман// Материалы второй конференции математических центров России. — МГУ, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва. — 2022. — С. 12.

[82] *Kolesnikov P. S., Kozlov R. A.* On the Hochschild cohomologies of associative conformal algebras // Proceedings of the international conference "Mal'tsev meeting 2018". — Sobolev Institute of Mathematics, Syberian Branch of the RAS, Novosibirsk. — 2018. — С. 176.