Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

На правах рукописи

Корнев Руслан Александрович

Вычислимая сводимость метрик на вещественных числах

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Морозов Андрей Сергеевич

Новосибирск — 2021

Содержание

Введение **2**

1 Предварительные сведения **12**

2 Построение метрик ниже ρ_R по слабой сводимости **16**

2.1 Эквивалентность выпуклых метрик 16

2.2 Основные результаты 17

3 Построение метрик выше ρ_R по слабой сводимости **28**

3.1 Основная конструкция 28

3.1.1 Требования 28

3.1.2 Стратегия для требования $\mathcal{R}_{ie}$ в изоляции 30

3.1.3 Взаимодействие стратегий 32

3.1.4 Конструкция 33

3.1.5 Верификация 34

3.2 Вложение частичных порядков и решёток в структуру степеней 38

3.2.1 Обобщённая конструкция 38

3.2.2 Вложение дистрибутивных решёток 42

4 Полурешётка степеней вычислимых метрик **45**

4.1 $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ образует нижнюю полурешётку 46

4.2 Построение метрики строго под данной метрикой 47

4.2.1 Вычислимый случай 47

4.2.2 Общий случай 52

4.2.3 Дискретные пространства 53

4.3 Степени без общей верхней грани 54

4.4 Аналитическая часть конструкции $\widehat{\rho}$ 56

4.4.1 Элементарная деформация 56

4.4.2 Построение последовательности деформированных метрик 62

4.5 Конструкция $\widehat{\rho}$ 65

4.5.1 Конструкция 66

4.5.2 Верификация 66

Заключение **71**

Список литературы **72**

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. В диссертации исследуются некоторые вопросы теории вычислимых метрических пространств. Для формализации понятия вычислимости на несчётной структуре используется подход TTE-теории Крайца и Вайрауха [35, 60, 36, 61, 62].

Интуитивно конструктивные результаты в анализе встречались и до того, как было дано формальное определение алгоритма: например, как хорошо известно, теорема Банаха о неподвижной точке [10] вместе с доказательством существования искомой точки даёт конструктивный способ её получения. Э. Борель [15] в 1912 г. определял вычислимые вещественные числа как такие числа α, для которых по всякому данному n можно *получить* рациональное приближение α с точностью $1/n$. Разумеется, речь шла о некоем алгоритмическом процессе получения приближения; формального определения процесса *получения* Борель не мог дать, но он отмечал, что такой процесс должен быть конечным, надёжным и однозначным. Борель рассуждает о существенно различных способах представления чисел (с помощью десятичных или цепных дробей), а также замечает, что неравенство двух вычислимых вещественных чисел можно обнаружить за конечное время, но равенство, вообще говоря, нельзя. Борель также вводит неформальное понятие вычислимой вещественной функции: он называет функцию f вычислимой, если всякое вычислимое вещественное число α она переводит в вычислимое. По всей видимости, алгоритм вычисления по всё более точным аппроксимациям α аппроксимаций для $f(\alpha)$ должен быть равномерным по таким последовательностям аппроксимаций α, т. к. Борель приходит к выводу, что вычислимая функция должна быть непрерывной в каждой вычислимой точке.

Точкой возникновения вычислимого анализа можно считать работы А. Тьюринга [58, 59], в которых было дано строгое определение вычислимого вещественного числа: вещественное число r называется *вычислимым*, если десятичное разложение r вычислимо на машине Тьюринга (a-машине в оригинальной статье). В [59] было показано, что это определение эквивалентно тому, что существует вычислимое представление r в виде вложенных отрезков, т. е. существует вычислимая последовательность вложенных рациональных отрезков $[a_n, b_n]$, содержащих r и таких, что $b_n - a_n < 2^{-n}$. Тем не менее, с помощью простого диагонального аргумента Тьюринг показал, что равномерный переход от представления с помощью вложенных отрезков к десятичному представлению невозможен. Позднее К. Крайцем и К. Вайраухом [36] было доказано, что различия между этими представлениями имеют, в сущности, топологический характер (далее мы поясним, что это означает). Кроме того, используя диагональный аргумент, похожий на упомянутый выше аргумент Тьюринга, они показали, что операции сложения и умножения не являются вычислимыми (и даже непрерывными) относительно десятичного представления вещественных чисел, а значит, возникает необходимость разработать инструмент, который позволил бы сравнивать различные представления между собой и искать среди них наиболее оптимальное.

Такой инструмент был получен в [60, 35] с помощью обобщения классической теории нумераций (см. [4, 1, 21, 49]) на несчётный случай, используя вместо ω пространство Бэра ω^ω или пространство Кантора 2^ω в качестве базисного пространства, теорию вычислимости на котором можно распространять на другие пространства посредством представлений. В дальнейшем мы будем работать только с пространством Бэра. *Представлением* множества X мощности не более чем континуум называют произвольную частичную сюръекцию из ω^ω на X. Частично вычислимыми функциями в пространстве Бэра естественно считать тьюринговы функционалы. Понятие *вычислимой сводимости* представлений теперь вводится так же, как и в счётном случае для нумераций: говорим, что $\delta_1 \leq_c \delta_2$, где δ_1, δ_2 — представления множества X, если существует тьюрингов функционал Φ, такой что $\delta_1(f) = \delta_2(\Phi(f))$ для всех $f \in \mathrm{dom}(\delta_1)$. Будем также говорить, что $\delta_1 \leq_t \delta_2$ (δ_1 *непрерывно сводится к* δ_2), если существует непрерывный частичный функционал $\Phi\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ с указанным выше свойством. Частичная функция $F\colon X \to Y$ называется (δ_X, δ_Y)-*вычислимой*, где δ_X, δ_Y — представления множеств X и Y, если $F(\delta_X(f)) = \delta_Y(\Phi(f))$ для $f \in \mathrm{dom}(F\delta_X)$.

Легко видеть, что $\leq_c$ и $\leq_t$ являются предпорядками на множестве всех представлений X. Можно определить операции $\wedge$ и $\vee$ на c-степенях представлений X, согласованные с индуцированным порядком на степенях, относительно которых этот порядок образует решётку.

В работе [35] (см. также [62]) сравниваются по вычислимой и непрерывной сводимостям следующие представления вещественных чисел:

1. ρ — *представление Коши,* использующее быстро сходящиеся последовательности рациональных чисел, т. е. $\rho(f) = x$ для $f \in \omega^\omega$ и $x \in \mathbf{R}$, если последовательность $q_{f(n)}$ рациональных чисел, перечисляемая функцией f, сходится к x и $|q_{f(n)} - q_{f(m)}| \leqslant 2^{-n}$ при $m > n$;

2. δ — представление через вложенные рациональные отрезки;

3. $\rho_<$ — представление через левое дедекиндово сечение, т. е. $\rho_<(f) = x$, если $\{q_{f(i)} \mid i \in \omega\} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$;

4. $\rho_>$ — представление через правое дедекиндово сечение;

5. δ_C — представление с помощью сходящихся последовательностей, т. е. $\delta_C(f) = x$, если $q_{f(i)} \to x$;

6. δ_{dec} — десятичное представление;

7. δ_{cf} — представление с помощью цепных дробей.

Авторам этой работы удалось доказать, что для этих представлений выполнены следующие соотношения:

1. $\rho \equiv_c \delta \equiv_c \rho_< \wedge \rho_>$;

2. $\rho_<$ и $\rho_>$ не сравнимы относительно $\leq_t$;

3. $\rho_<, \rho_> \not\leq_t \rho$;

4. $\rho_<, \rho_> \leq_c \delta_C$, но $\delta_C \not\leq_t \rho_<, \rho_>$;

5. $\delta_{\mathrm{dec}} \leq_c \rho$, но $\rho \not\leq_t \delta_{\mathrm{dec}}$;

6. $\delta_{\mathrm{cf}} \leq_c \delta_{\mathrm{dec}}$, но $\delta_{\mathrm{dec}} \not\leq_t \delta_{\mathrm{cf}}$.

Тем не менее, как было замечено Р. Робинсоном [48] и К. Ко [34], класс вычислимых вещественных чисел $\mathbf{R}_c$ инвариантен относительно выбора представлений $\rho, \delta_{\mathrm{dec}}$ и δ_{cf}, т. е. вещественное число x вычислимо тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих эквивалентных условий: x обладает вычислимым именем Коши; левое и правое дедекиндовы сечения x вычислимо перечислимы; представление x в виде цепной дроби вычислимо. Ко [34] также доказал, что для фиксированного числа x левое дедекиндово сечение x T-эквивалентно разложению x в цепную дробь, т. е. $\delta_<^{-1}(x) \equiv_T \delta_{\mathrm{cf}}^{-1}(x)$.

Вещественное число x называется *вычислимо перечислимым,* если x имеет вычислимое $\rho_<$-представление, т. е. левое дедекиндово сечение x вычислимо перечислимо. Хорошо известно, что класс вычислимых чисел является собственным подклассом класса в. п. вещественных чисел. Пример невычислимого в. п. числа был построен Э. Шпекером [57] в 1949 г. и может быть сформулирован следующим образом. Для произвольного множества $A \subseteq \omega$ обозначим $x_A = \sum_{n \in A} 2^{-n}$. Легко видеть, что все числа вида x_A, где A — в. п. множество, являются вычислимо перечислимыми. Вместе с этим, число x_A вычислимо тогда и только тогда, когда множество A вычислимо. Дальнейшие результаты о классах сложности вещественных чисел могут быть найдены в [9, 65, 66]. Аналоги m-, tt- и T-сводимостей для вещественных чисел исследовались в работе Ко [33].

Пусть δ — представление множества X. *Финальной топологией* относительно представления δ называется топология τ_δ на X, задаваемая требованием непрерывности отображения δ (как частичного отображения из ω^ω в X). Представление δ называется *допустимым*, если на X можно задать топологию τ, такую что T_0-пространство (X, τ) сепарабельно, а δ t-эквивалентно *стандартному представлению* (X, τ), при котором элементы $x \in X$ кодируются последовательностями базисных окрестностей, в которых они содержатся. Известно [35], что финальная топология допустимого представления δ совпадает с топологией τ, упомянутой выше. Финальная топология представления Коши ρ вещественных чисел совпадает с обычной топологией $\mathbf{R}$. Финальной топологией представления δ_C является антидискретная топология: ни один начальный сегмент (ненормированно) сходящейся последовательности не даёт никакой информации о том, куда эта последовательность сходится. Таким образом, δ_C не является допустимым. Финальной топологией десятичного представления δ_{dec} является обычная топология, но это представление также не допустимо. По этим причинам именно представление Коши оказывается оптимальным для изучения вычислимости на $\mathbf{R}$ с точки зрения вычислимого анализа.

Легко обобщить определения представления Коши ρ и "наивного" представления δ_C на случай произвольного полного сепарабельного метрического пространства X. В. Браттка и П. Гертлинг [11] доказали, что, хотя представление δ_C не допустимо, оно обладает одним важным свойством допустимых представлений: функция $F\colon X \to X$ непрерывна тогда и только тогда, когда она (δ_C, δ_C)-непрерывна. Кроме того, в [11] доказывается, что всякое допустимое представление можно (быть может, несколько сузив область определения) сделать открытым. Также этими авторами было установлено, что для достаточно большого и естественного класса топологических пространств (X, τ) с допустимым представлением δ множество $\{x \in X \mid \delta^{-1}(x) \text{ бесконечно}\}$ является плотным в X множеством второй категории, таким образом, "достаточно много" элементов $x \in X$ имеют бесконечное количество имён. Данная теорема является обобщением известного результата о несуществовании допустимого инъективного представления пространства вещественных чисел [62].

Представление δ допустимо, если и только если оно непрерывно и выполнено $\zeta \leq_t \delta$ для любой непрерывной частичной функции $\zeta\colon \omega^\omega \to (X, \tau_\delta)$; таким образом, всякая непрерывная функция ζ реализуется непрерывным функционалом относительно δ (см. [35, 52]). Браттка и Гертлинг [11] и М. Шрёдер [52] используют это свойство в качестве определения допустимого представления. При этом оказывается, что класс пространств, имеющих допустимые представления в новом смысле, расширяется: такими представлениями могут обладать несепарабельные пространства. Справедлив следующий критерий [52]: топологическое пространство

(X, τ) обладает допустимым представлением тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет аксиоме T_0 и имеет счётную псевдобазу. Под *псевдобазой* здесь понимается семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств X, таких что для любых $x \in X$, $O \in \tau$ и последовательности $x_n \to x$ существуют $B \in \mathfrak{B}$ и $n_0 \in \omega$, такие что $\{x\} \cup \{y_n \mid n \geqslant n_0\} \subseteq B \subseteq O$. Кроме того, класс допустимо представимых пространств замкнут относительно прямых произведений. Понятно, что допустимые представления тесно связаны с секвенциальной сходимостью. Шрёдер [51, 53, 54] исследует допустимые представления пространств со сходимостью (см. [19, 23, 20]). Он устанавливает критерий допустимой представимости *пространства со слабыми пределами,* схожий с критерием допустимой представимости топологического пространства, и доказывает, что для пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ со слабыми пределами с допустимыми представлениями $\delta_{\mathcal{X}}$ и $\delta_{\mathcal{Y}}$, соответственно, $(\delta_{\mathcal{X}}, \delta_{\mathcal{Y}})$-реализуемость функции $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ эквивалентна её секвенциальной непрерывности.

С. Банах и С. Мазур (см. [39]) изучали вычислимые функции, определённые на вычислимых вещественных числах. Функция $f\colon \mathbf{R}_c \to \mathbf{R}_c$ называется *вычислимой по Банаху-Мазуру,* если f переводит вычислимые последовательности в вычислимые последовательности. Одним из основных результатов [39] является доказательство того, что всякая такая функция обязана быть непрерывной на $\mathbf{R}_c$. Функция $f\colon \mathbf{R}_c \to \mathbf{R}_c$ называется *конструктивной,* или *вычислимой по Маркову,* если существует алгоритм, равномерно по индексу числа $x \in \mathbf{R}_c$ выдающий индекс $f(x)$. Понятие вычислимой вещественной функции в такой постановке исследовалось представителями русской конструктивной школы, возглавлявшейся А. А. Марковым (см. [5, 6, 7, 2, 3]). Г. С. Цейтин [6] доказал, что всякая (всюду определённая) конструктивная функция является конструктивно непрерывной, т. е. имеет конструктивный модуль непрерывности, на $\mathbf{R}_c$. О. Абертом [8] был построен пример функции $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такой что ограничение $f \upharpoonright \mathbf{R}_c$ конструктивно, но f не является непрерывной на $\mathbf{R}$. Всякая конструктивная функция вычислима по Банаху-Мазуру [5]; тот факт, что обратная импликация неверна, был доказан в 2005 г. Гертлингом [27].

А. Гжегорчик [24] начал изучать понятие вычислимой функции вещественной переменной в современной постановке: он называл функцию $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ вычислимой, если существует *вычислимый функционал* второго порядка, выдающий для всякого числа x по каждой быстро сходящейся последовательности рациональных приближений x некоторую быстро сходящуюся последовательность приближений для $f(x)$. Гжегорчик [25] выводит несколько полезных эквивалентных определений вычислимой вещественной функции, одно из которых говорит, что вычислимость функции f эквивалентна её представимости с помощью вычислимой функции первого порядка, действующей на рациональных интервалах и монотонной относительно включения. Похожее определение будет впоследствии использоваться Вайраухом в [60] для построения TTE-теории вычислимости на ω^ω.

Исследование вычислимых метрических пространств в общем смысле было впервые предпринято в работах Д. Лакомба [38], Н. А. Шанина [7], Г. С. Цейтина [6] и Я. Московакиса [46], причём последние три автора рассматривают это понятие в "конструктивной" постановке в духе конструктивной школы. Лакомб [37] также инициировал исследование в. п. подмножеств вещественных чисел. Для ознакомления с дальнейшими результатами о вычислимых метрических пространствах и их в. п. и ко-в. п. подмножествах мы отсылаем читателя к книгам [47, 62], обзорам [12, 30] и статьям [36, 61, 14, 64, 13, 28, 29, 41]. Отдельно отметим работу Дж. Миллера [44], в которой вводится понятие *сводимости по представлению* точек вычислимых метрических пространств. Степени по этой сводимости называются *непрерывными* степенями по той причине, что каждая такая степень содержит элемент $f \in C[0,1]$ (можно показать, что f можно выбрать аналитической). Оказывается, что непрерывные степени образуют промежуточную структуру между тьюринговыми степенями и e-степенями. Из существования *нетотальной,* т. е. отличной от любой тьюринговой, непрерывной степени следует, что существует непрерывная функция $f \in C[0,1]$ без тьюринговой степени.

М. Б. Пур-Эль и Дж. И. Ричардс [47] изучали вычислимость на банаховых пространствах с помощью понятия *структуры вычислимости,* вводимого аксиоматически. Неформально говоря, структура вычислимости $\mathcal{I}$ в пространстве $\mathcal{B}$ — это семейство вычислимых последовательностей, замкнутое относительно линейных комбинаций, пределов и норм. В том случае, когда структура вычислимости содержит последовательность $\{e_n\}_{n\in\omega}$, линейная оболочка которой всюду плотна в $\mathcal{B}$, пространство $(\mathcal{B},\mathcal{I})$ называется *эффективно сепарабельным.* Понятно, что в этом случае можно считать, что $\mathcal{B}$ представлено представлением Коши относительно $\{e_n\}_{n\in\omega}$. Среди множества вопросов, рассматриваемых в книге, также исследуется единственность структуры вычислимости в эффективно сепарабельном банаховом пространстве с точностью до изометрии. Доказывается, что в гильбертовом пространстве такая структура единственна, но в пространстве ℓ^1 существует структура, неизометричная стандартной. Аналог понятия структуры вычислимости для произвольного метрического пространства был введён Т. Мори, Ё. Цудзи и М. Ясуги в [45]; дальнейшие результаты в этом направлении см., например, в [64, 28].

А. Г. Мельников [41] вводит понятие *вычислимо категоричного* польского пространства $\mathcal{M} = (M,d)$: $\mathcal{M}$ называется вычислимо категоричным, если все *вычислимые структуры* (т. е. счётные всюду плотные подмножества) в нём вычислимо изометричны, т. е. для всякой пары вычислимых структур найдётся изометрия пространства $\mathcal{M}$ на себя, вычислимая относительно представлений Коши, индуцированных этими структурами. Это эквивалентно существованию эффективной процедуры, позволяющей равномерно по номеру точки в одной структуре получить имя Коши её изометричного образа в другой структуре. Вычислимую категоричность можно рассматривать относительно различных сигнатур: например, для того чтобы дать определение вычислимо категоричного банахова пространства, естественно под вычислимой структурой считать структуру, относительно которой сложение и умножение на скаляр вычислимы, а от изометрий требовать сохранения этих операций, т. е. линейности; при этом мы получим определение, аналогичное рассмотренному выше свойству единственности структуры вычислимости с точностью до изометрии в смысле Пур-Эль–Ричардса. Мельников обобщает результаты из [47], доказав, что гильбертово пространство вычислимо категорично, но ℓ^1 не вычислимо категорично, в сигнатуре метрического пространства. Также он получает результаты о вычислимой категоричности пространств Кантора и Урысона, а кроме того, доказывает, что пространство $C[0,1]$ не вычислимо категорично. В работе [43] Мельников и К. М. Нг показывают, что $C[0,1]$ имеет бесконечную вычислимую размерность и не является вычислимо категоричным как банахово пространство и как банахова алгебра. Отвечая на вопрос, поставленный в [41], и обобщая результат Пур-Эль и Ричардса, Т. Макниколл [40] доказывает, что среди пространств ℓ^p при вычислимом $p \geq 1$ лишь пространство ℓ^2 является вычислимо категоричным; тем не менее, все пространства ℓ^p являются Δ^0_2-категоричными.

Цели и задачи исследования. В рамках настоящей диссертации исследуются представления Коши польских пространств, порождённые одной и той же плотной подструктурой и различными метриками, совместимыми с топологией этого пространства. Пусть $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$ — польское пространство с выделенным счётным плотным подмножеством W и нумерацией ν множества W. Тогда всякая полная метрика ρ на $\mathbf{X}$ индуцирует представление Коши δ_ρ пространства $\mathbf{X}$. Мы говорим, что метрика ρ_1 вычислимо сводится к метрике ρ_2 ($\rho_1 \leq_c \rho_2$), если $\delta_{\rho_1} \leq_c \delta_{\rho_2}$, т. е. равномерно для каждого элемента $x \in X$ по каждому δ_{ρ_1}-имени для x можно вычислить некоторое δ_{ρ_2}-имя для x. Будем также говорить, что ρ_1 слабо сводится к ρ_2, $\rho_1 \leq_{ch} \rho_2$, если для каждого $x \in X$ по всякому δ_{ρ_1}-имени для x можно вычислить некоторое δ_{ρ_2}-имя для образа точки x относительно некоторого гомеоморфизма $\mathbf{X}$ на себя, т. е. если существует хотя бы один $(\delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2})$-вычислимый автогомеоморфизм пространства $\mathbf{X}$. Нетрудно убедиться в том, что введённые упорядочения являются предпорядками на множестве полных метрик на $\mathbf{X}$.

Целью данной работы является исследование структурных свойств упорядочений степеней вычислимых метрик на польском пространстве $\mathbf{X}$ по вычислимой сводимости и слабой сводимости.

Основными задачами исследования можно назвать следующие:

1. Построение различных вычислимых метрик на вещественной прямой, не сравнимых друг с другом относительно слабой сводимости $\leq_{ch}$ и сводимых к стандартной метрике ρ_R пространства вещественных чисел $\mathbf{R}$.

2. Построение вычислимых метрик на вещественной прямой, не сравнимых друг с другом относительно слабой сводимости и находящихся выше метрики ρ_R.

3. Построение "минимальной пары" вычислимых метрик над ρ_R относительно сводимости $\leq_c$, т. е. таких вычислимых метрик $\rho_1, \rho_2 \geq_c \rho_R$, что ρ_1 и ρ_2 не сравнимы относительно $\leq_c$ и для любой вычислимой метрики ρ на $\mathbf{R}$ из $\rho \leq_c \rho_1, \rho_2$ следует $\rho \leq_c \rho_R$.

4. Доказательство вложимости любого счётного частичного порядка в полурешётку степеней вычислимых метрик на произвольном польском пространстве $\mathbf{X}$ по вычислимой сводимости ниже степени любой метрики, относительно которой существует вычислимая предельная точка.

5. Доказательство того, что нижняя полурешётка степеней вычислимых метрик на $\mathbf{X}$ не является направленным вверх порядком и не является верхней полурешёткой в случае, если существует вычислимая метрика на $\mathbf{X}$, относительно которой существует вычислимая предельная точка.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Доказано, что все выпуклые метрики на $\mathbf{R}$ лежат в одной степени по вычислимой сводимости.

2. Построена бесконечная последовательность вычислимых метрик на вещественной прямой, не сравнимых друг с другом относительно слабой сводимости и вычислимо сводимых к стандартной метрике на $\mathbf{R}$.

3. Построена бесконечная последовательность вычислимых метрик на вещественной прямой, не сравнимых друг с другом относительно слабой сводимости и находящихся выше стандартной метрики на $\mathbf{R}$ относительно вычислимой сводимости.

4. Доказано, что любой счётный частичный порядок вложим в упорядочение степеней вычислимых метрик на $\mathbf{R}$ по слабой сводимости выше степени стандартной метрики.

5. Доказано, что счётная безатомная булева алгебра вложима в упорядочение степеней вычислимых метрик на $\mathbf{R}$ по вычислимой сводимости выше степени стандартной метрики с сохранением точных верхних и нижних граней.

6. Доказано, что любой счётный частичный порядок вложим в полурешётку степеней вычислимых метрик на произвольном польском пространстве $\mathbf{X}$ по вычислимой сводимости ниже степени любой метрики, относительно которой существует вычислимая предельная точка.

7. Доказано, что нижняя полурешётка степеней вычислимых метрик на $\mathbf{X}$ не является направленным вверх порядком и не является верхней полурешёткой в случае, если существует вычислимая метрика на $\mathbf{X}$, относительно которой существует вычислимая предельная точка.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер, её результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях в области вычислимого анализа.

Методология и методы исследований. В работе используются методы теории вычислимости и вычислимого анализа. В частности, используется метод приоритета с конечными нарушениями.

Апробация работы. По основным результатам диссертации были сделаны доклады на следующих международных конференциях: МНСК «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2015 г.), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2016, 2019 и 2020 гг.), Workshop on Aspects of Computation (Сингапур, 2017 г.), Logic Colloquium (Лидс, Великобритания, 2016 г.; Удине, Италия, 2018 г.), Computability and Complexity in Analysis (Кохель-ам-Зее, Германия, 2018 г.), Computability in Europe (Гент, Бельгия (дистанционно), 2021 г.). Кроме того, результаты работы докладывались на научных семинарах «Теория вычислимости» и «Конструктивные модели» Новосибирского государственного университета и Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и на семинаре кафедры алгебры и математической логики Казанского федерального университета.

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [67]–[76], из них [67]–[69] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 76 наименований. Объём диссертации — 78 страниц.

Я хочу поблагодарить своего научного руководителя, д. ф.-м. н., профессора Андрея Сергеевича Морозова за постановку задач, полезные обсуждения, поддержку, доброжелательность и оптимизм. Также я благодарю Николая Алексеевича Баженова и Марса Мансуровича Ямалеева за ценные беседы и дискуссии.

Глава 1. Предварительные сведения

Определение 1.1. *Пространством Бэра* называют множество ω^ω всех счётных последовательностей натуральных чисел с топологией произведения счётного количества копий ω с дискретной топологией.

Определение 1.2. *Нумерацией* множества X называют произвольную частичную сюръекцию $\nu\colon \omega \to X$. *Представлением* множества X называют произвольную частичную сюръекцию $\delta\colon \omega^\omega \to X$.

Для последовательности $f = (f(0), f(1), \ldots) \in \omega^\omega$ её n-й хвост будем обозначать через $f \downharpoonright n = (f(n), f(n{+}1), \ldots)$. Также для $n, m, k \in \omega$ будем использовать следующие обозначения для последовательностей:

$$\bar{n} = (n, n, \ldots) \in \omega^\omega,\ \ m^k\bar{n} = (\underbrace{m, \ldots, m}_{k}, n, n, \ldots) \in \omega^\omega.$$

Зафиксируем стандартную канторовскую функцию кодирования пар $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \omega^2 \to \omega$ и её левую и правую проекции $\langle\cdot\rangle_0$ и $\langle\cdot\rangle_1$. Функция кодирования пар стандартным образом продолжается до биекции $\langle\cdot\rangle\colon \omega^{<\omega} \to \omega$. Для $f_0, f_1 \in \omega^\omega$ определим $\langle f_0, f_1\rangle = f \in \omega^\omega$ следующим образом:

$$f(2n) = f_0(n), f(2n+1) = f_1(n).$$

Для $n_0, \ldots, n_k \in \omega$ и $f \in \omega^\omega$ определим $\langle n_0, \ldots, n_k, f\rangle = f \in \omega^\omega$ следующим образом:

$$f(0) = n_0, \ldots, f(k) = n_k, f(k+1+i) = f(i).$$

Зафиксируем гёделевскую нумерацию $\nu_{\mathbb{Q}}$ множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и будем обозначать $q_n = \nu_{\mathbb{Q}}n$. Под *пространством вещественных чисел* будем понимать топологическое пространство $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \tau_{\mathbf{R}}, \mathbb{Q}, \nu_{\mathbb{Q}})$, где $\tau_{\mathbf{R}}$ — стандартная топология на $\mathbb{R}$, с выделенным всюду плотным множеством $\mathbb{Q}$ и его нумерацией $\nu_{\mathbb{Q}}$. Стандартную метрику на $\mathbf{R}$ будем обозначать через $\rho_R(x, y) = |x - y|$.

Основные понятия теории вычислимости можно найти в [50, 56]. Следуя [18], для обозначения частично вычислимых функций мы будем использовать заглавные греческие буквы Φ, а соответствующие use-функции будем обозначать строчными буквами φ. Таким образом, Φ_e^Y обозначает e-ую частично вычислимую функцию с оракулом Y, $\Phi_{e,s}^Y(n)$ есть результат вычисления $\Phi_e^Y(n)$ за s машинных шагов, а $\varphi_{e,s}^Y(n)$ — use-функция этого вычисления (напомним, что её значение равно $x+1$ для наибольшего x, вопрос о принадлежности которого к Y

был задан во время вычисления $\Phi^Y_{e,s}(n)$, если это вычисление сходится, и 0, если $\Phi^Y_{e,s}(n)\uparrow$). Оракульная функция Φ^Y_e индуцирует частичное отображение $\Phi_e\colon \omega^\omega\to\omega^\omega$, называемое *вычислимым* (или *тьюринговым*) функционалом, когда в качестве оракулов берутся элементы $f\in\omega^\omega$. Тогда, аналогично, $\Phi_{e,s}(f)(n)$ есть результат вычисления $\Phi_e(f)(n)$ за s машинных шагов с use-функцией $\varphi_{e,s}(f)(n)$.

Определение 1.3. Пусть $\delta_X\colon \omega^\omega\to X$, $\delta_Y\colon\omega^\omega\to Y$ — представления множеств X и Y. Частичный функционал $\Psi\colon\omega^\omega\to\omega^\omega$ называется (δ_X,δ_Y)-*реализацией* частичной функции $F\colon X\to Y$, если

$$F\circ\delta_X(f)=\delta_Y\circ\Psi(f)\ \text{для}\ f\in\mathrm{dom}(F\circ\delta_X);$$

при этом мы будем использовать обозначение $(\delta_X,\delta_Y)(\Psi)=F$. Функция F называется (δ_X,δ_Y)-*вычислимой*, если существует вычислимая (δ_X,δ_Y)-реализация Φ_z для F, т. е. F реализуется функционалом Тьюринга.

Определение 1.4. Пусть $\nu_1\colon\omega\to X_1,\dots,\nu_k\colon\omega\to X_k$ — нумерации множеств $X_1\dots,X_k$. Частичная функция $\Phi\colon\omega^{k+1}\to\omega$ называется $(\nu_1,\dots,\nu_k,\delta)$-*реализацией* частичной функции $F\colon X_1\times\ldots\times X_k\to Y$, если, как только $(\nu_1n_1,\dots,\nu_kn_k)\in\mathrm{dom}(F)$, то $g(m)=\Phi(n_1,\dots n_k,m)\downarrow$ для всех m и $\delta(g)=F(x)$. F называется $(\nu_1,\dots,\nu_k,\delta)$-*вычислимой*, если у неё есть вычислимая $(\nu_1,\dots,\nu_k,\delta)$-реализация.

В книге Вайрауха [62] содержится общее определение вычислимой функции $F\colon X_1\times\ldots\times X_k\to Y$, где каждое из множеств X_i,Y снабжено либо нумерацией, либо представлением. Нам не понадобится это определение во всей его полноте, мы ограничимся описанными выше частными случаями.

Определение 1.5 ([62])**.** Пусть δ, δ' — представления множества X. Говорят, что δ *вычислимо сводится* к δ' ($\delta\le_c\delta'$), если существует тьюрингов функционал Φ_z, такой что

$$\delta(f)=\delta'\circ\Phi_z(f)\ \text{для}\ f\in\mathrm{dom}(\delta),$$

или, эквивалентно, если тождественное отображение id_X (δ,δ')-вычислимо.

Бинарное отношение $\le_c$ является предпорядком на множестве всех представлений X. Введём стандартным образом отношение эквивалентности $\equiv_c$, полагая $\delta\equiv_c\delta'$, если $\delta\le_c\delta'$ и $\delta'\le_c\delta$. Класс эквивалентности δ по отношению $\equiv_c$ будем называть *c-степенью* δ и обозначать $\deg_c(\delta)$. Получившийся частичный порядок будем обозначать через $\mathcal{D}_c(X)$.

Определение 1.6 ([62]). Пусть δ_1, δ_2 — представления множества X. Определим представления $\delta_1 \wedge \delta_2 \colon \omega^\omega \to X$, $\delta_1 \vee \delta_2 \colon \omega^\omega \to X$ следующим образом:

$$(\delta_1 \wedge \delta_2)(f) = x \Leftrightarrow \big(f = \langle f_1, f_2 \rangle \ \&\ \delta_1(f_1) = x \ \&\ \delta_2(f_2) = x\big),$$
$$(\delta_1 \vee \delta_2)(f) = x \Leftrightarrow \big((f = \langle 0, 1, f' \rangle \,\&\, \delta_1(f') = x) \vee (f = \langle 0, 1, 1, f' \rangle \,\&\, \delta_2(f') = x)\big).$$

Легко видеть (см. [62]), что для любого представления δ множества X верно $\delta \leq_c (\delta_1 \wedge \delta_2) \Leftrightarrow (\delta \leq_c \delta_1 \wedge \delta \leq_c \delta_2)$ и $(\delta_1 \vee \delta_2) \leq_c \delta \Leftrightarrow (\delta_1 \leq_c \delta \wedge \delta_2 \leq_c \delta)$. Таким образом, $\mathcal{D}_c(X)$ образует решётку относительно этих операций.

Определение 1.7. Пусть (X, ρ, W, ν) — полное сепарабельное метрическое пространство с выделенным счётным всюду плотным подмножеством W с нумерацией $\nu \colon \omega \to W$. Элементы множества W будем иногда называть *специальными точками*. Везде будет предполагаться, что нумерация ν всюду определена. Будем использовать обозначение $w_n = \nu n$. *Именем Коши* точки $x \in X$ называется элемент $f \in \omega^\omega$, такой что

$$w_{f(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ и } \rho\big(w_{f(n)}, w_{f(m)}\big) \leq 2^{-n} \text{ для } m > n.$$

Определим *представление Коши* $\delta_{(X,\rho,W,\nu)} \colon \omega^\omega \to X$, полагая $\delta_{(X,\rho,W,\nu)}(f) = x$, если f является именем Коши для x. Когда X, W и ν однозначно восстанавливаются из контекста, мы будем обозначать представление Коши через δ_ρ или просто через ρ.

Замечание 1.1. Если f — имя Коши точки x, то $\rho(w_{f(n)}, x) \leq 2^{-n}$ для всех n.

Замечание 1.2. Требование $\rho(w_{f(n)}, w_{f(m)}) \leqslant 2^{-n}$ для $m > n$ в определении имени Коши можно заменить на требование $\rho(w_{f(n)}, x) < 2^{-n}$ для всех n, получив в итоге эквивалентное определение имени Коши. Нам будет удобно пользоваться таким определением в главе 4.

Определение 1.8. Пространство (X, ρ, W, ν) называется *вычислимым,* и метрика ρ на нём называется *вычислимой,* если расстояние $\rho(w_n, w_m)$ является вычислимым вещественным числом, вычислимым равномерно по n и m, т. е. если существует вычислимая функция $g \colon \omega^3 \to \omega$, такая что $|q_{g(n,m,k)} - \rho(w_n, w_m)| < 2^{-k}$ для всех $n, m, k \in \omega$. Это эквивалентно тому, что $\rho \restriction W^2$ является $(\nu, \nu, \delta_{\mathbf{R}})$-вычислимой функцией, где $\delta_{\mathbf{R}}$ — стандартное представление Коши пространства вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Пусть $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$ — польское пространство с выделенным счётным плотным подмножеством W и нумерацией ν множества W. Через $M(\mathbf{X})$ будем обозначать множество всех полных метрик на X, совместимых с топологией τ. Определим сводимость на элементах множества $M(\mathbf{X})$ следующим образом.

Определение 1.9. Для $\rho, \rho' \in M(\mathbf{X})$ будем говорить, что ρ c-сводится к ρ', и обозначать это через $\rho \leq_c \rho'$, если $\delta_{(X,\rho,W,\nu)} \leq_c \delta_{(X,\rho',W,\nu)}$. Понятно, что $\leq_c$ является предпорядком на $M(\mathbf{X})$. Факторизуя по отношению эквивалентности $\equiv_c$, получаем частичный порядок $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ c-степеней метрик на $\mathbf{X}$. Упорядочение c-степеней вычислимых метрик на $\mathbf{X}$ будем обозначать через $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$.

Сводимость $\rho \leq_c \rho'$ означает, что тождественный гомеоморфизм id_X является (ρ, ρ')-вычислимым. Можно ослабить это свойство, потребовав, чтобы хотя бы один автогомеоморфизм пространства X был (ρ, ρ')-вычислимым. Это приводит нас к другому понятию сводимости метрик.

Определение 1.10. Для метрик $\rho, \rho' \in M(\mathbf{X})$ будем говорить, что ρ *слабо сводится к* ρ' ($\rho \leq_{ch} \rho'$), если существует (ρ, ρ')-вычислимый сюръективный гомеоморфизм пространства X на себя.

Очевидно, $\leq_{ch}$ является отношением предпорядка на $M(\mathbf{X})$ и из $\rho \leq_c \rho'$ следует $\rho \leq_{ch} \rho'$. Частичные порядки ch-степеней метрик будем обозначать через $\mathcal{M}_{ch}(\mathbf{X})$ и $\mathcal{CM}_{ch}(\mathbf{X})$, соответственно.

Докажем простое достаточное условие c-сводимости метрик. Другая его форма также содержится в [17, лемма 3.1.3].

Лемма 1.1. *Если существуют константы $r, M > 0$, такие что*

$$\forall x, y \in X \ \big(\rho(x, y) \leqslant r \Rightarrow \rho'(x, y) \leqslant M \cdot \rho(x, y)\big),$$

то $\rho \leq_c \rho'$.

Доказательство. Пусть $k, l \in \omega$ таковы, что $r \geqslant 2^{-l}, M \leqslant 2^k$; выберем $N = \max(k, l)$. Для $g = \big(g(0), g(1), \dots\big) \in \omega^\omega$ положим $\Phi(g) = g \downharpoonleft N$. Рассмотрим произвольное ρ-имя Коши f произвольного элемента $x \in X$. Покажем, что $\Phi(f)$ есть ρ'-имя для x. Понятно, что последовательность $w_{\Phi(f)(n)}$ сходится к x в метрике ρ'. Остаётся проверить, что для $m > n$ выполнено неравенство $\rho'(w_{\Phi(f)(n)}, w_{\Phi(f)(m)}) \leqslant 2^{-n}$. Имеем:

$$\rho\big(w_{\Phi(f)(n)}, w_{\Phi(f)(m)}\big) = \rho\big(w_{f(N+n)}, w_{f(N+m)}\big) \leqslant 2^{-N-n} \leqslant 2^{-N} \leqslant 2^{-l} \leqslant r,$$

и потому верна следующая оценка на расстояние ρ' между этими точками:

$$\rho'\big(w_{\Phi(f)(n)}, w_{\Phi(f)(m)}\big) \leqslant M \cdot \rho\big(w_{\Phi(f)(n)}, w_{\Phi(f)(m)}\big) \leqslant M \cdot 2^{-N-n} \leqslant 2^{k-N-n} \leqslant 2^{-n},$$

поэтому $\rho'(\Phi(f)) = x$. Таким образом, Φ переводит всякое ρ-имя в ρ'-имя для той же точки, и $\rho \leq_c \rho'$ посредством Φ. $\square$

Глава 2. Построение метрик ниже ρ_R по слабой сводимости

В этой главе исследуется упорядочение $\mathcal{CM}_{ch}(\mathbf{R})$ вычислимых метрик на вещественной прямой $\mathbf{R}$. Основным результатом этой главы является теорема 2.4 о существовании бесконечной антицепи вычислимых метрик, не сравнимых друг с другом относительно $\leq_{ch}$ и c-сводимых к стандартной метрике ρ_R на $\mathbf{R}$.

2.1 Эквивалентность выпуклых метрик

Выпуклым метрическим пространством (пространством с выпуклой метрикой) называется пространство (X, ρ), для любых различных точек x, y которого всегда найдётся отличная от них точка $z \in X$ со свойством

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y).$$

Метрическим сегментом между точками x, y в метрическом пространстве (X, ρ) называется образ отрезка $[0, \rho(x, y)]$ (со стандартной метрикой) относительно изометрии

$$\lambda\colon [0, \rho(x, y)] \to X, \quad \lambda(0) = x, \ \lambda(\rho(x, y)) = y.$$

По теореме Менгера [31, стр. 35], на вещественной прямой с выпуклой полной метрикой любые две точки $x < y$ можно соединить метрическим сегментом. Очевидно, что этот сегмент определён единственным образом и совпадает с отрезком $[x, y]$. Поэтому всякая выпуклая метрика ρ на $\mathbf{R}$ согласуется со стандартным упорядочением $\mathbf{R}$ в том смысле, что

$$x < z < y \Leftrightarrow (\rho(x, z) < \rho(x, y) \ \&\ \rho(z, y) < \rho(x, y))$$

для любых $x, y, z \in \mathbf{R}$, $x < y$. Пользуясь этим фактом, можно доказать эквивалентность вычислимых выпуклых метрик относительно сводимости $\leq_c$.

Теорема 2.1. *Пусть ρ, ρ' — выпуклые вычислимые метрики на $\mathbf{R}$. Тогда $\rho \equiv_c \rho'$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathbf{R}$ и произвольное ρ-имя Коши f для x. Обозначим $q_{f(n)} = x_n$. Имеем $\rho(x_n, x) \to 0$ и $\rho(x_n, x_m) \leqslant 2^{-n}$ для $m > n$. Покажем, что по f можно эффективным образом построить некоторое ρ'-имя g для x. Идея состоит в следующем: будем выбирать две последовательности точек y_n, z_n таких, что x_n и x находятся между y_n и z_n. В силу выпуклости ρ это эквивалентно тому, что

$$\rho(x_n, y_n), \rho(x_n, z_n), \rho(x, y_n), \rho(x, z_n) < \rho(y_n, z_n).$$

Поскольку ρ' также выпукла, то аналогичные соотношения будут верны и в этой метрике. Отсюда можно будет выбрать последовательность, быстро сходящуюся к x в метрике ρ'.

Начнём перечислять все рациональные числа и искать среди них $y_0 < z_0, y_1 < z_1, \dots$ со свойствами

$$2^{-n} < \rho(x_n, y_n) < 2^{-n+1},$$
$$2^{-n} < \rho(x_n, z_n) < 2^{-n+1},$$
$$\rho(x_n, y_n), \rho(x_n, z_n) < \rho(y_n, z_n).$$

Напомним, что последнее соотношение означает $y_n < x_n < z_n$, а из первых двух соотношений следует, что

$$\rho(x, y_n) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y_n) \leqslant 2^{-n} + \rho(x_n, y_n) < \rho(x_n, z_n) + \rho(x_n, y_n) = \rho(z_n, y_n);$$

последнее равенство верно в силу того, что $[z_n, y_n]$ образует метрический сегмент в $(\mathbf{R}, \rho)$. Аналогично, $\rho(x, z_n) < \rho(z_n, y_n)$, поэтому $y_n < x < z_n$. Пусть y_{n_0}, z_{n_0} — первая пара, найденная в этом пересчёте. Если $y_{n_0}, z_{n_0}, \dots, y_{n_k}, z_{n_k}$ уже найдены, пусть $y_{n_{k+1}}, z_{n_{k+1}}$ — первая найденная пара с $n_{k+1} > n_k$.

Параллельно с поиском новых пар вычисляем расстояния $\rho'(y_{n_k}, z_{n_k})$ для уже найденных. Для каждого m, как только мы видим, что $\rho'(y_{n_k}, z_{n_k}) < 2^{-m-1}$ для некоторого k, положим $q_{g(m)} = y_{n_k}$. Поскольку $y_{n_k} < x < z_{n_k}$, то $\rho'(x, q_{g(m)}) < \rho'(y_{n_k}, z_{n_k}) < 2^{-m-1}$, и для всякого $m' > m$ имеем $\rho'(q_{g(m)}, q_{g(m')}) \leqslant \rho'(q_{g(m)}, x) + \rho'(x, q_{g(m')}) < 2^{-m-1} + 2^{-m'-1} < 2^{-m}$. Значит, $\rho'(g) = x$.

Поскольку $x_n \to x$, нам удастся построить описанные выше последовательности y_{n_k}, z_{n_k}. Процедура построения этих последовательностей и вычисления g эффективна относительно f. Поэтому $\rho \leq_c \rho'$. Аналогично, $\rho' \leq_c \rho$. □

2.2 Основные результаты

Мы увидели, что все выпуклые вычислимые метрики на вещественной прямой c-эквивалентны стандартной метрике ρ_R. Построить вычислимую метрику, не эквивалентную ρ_R, можно с помощью диагонального процесса, взяв за основу ρ_R и нарушая её выпуклость на счётном количестве интервалов, проводя на них диагональный процесс относительно всех тьюринговых функционалов. Проиллюстрируем наш метод, построив две вычислимые метрики ρ_0, ρ_1, такие что $\rho_0 \not\leq_c \rho_1$, но $\rho_0 \equiv_{ch} \rho_1$; таким образом, мы покажем, что сводимости $\leq_c$ и $\leq_{ch}$ различаются на вычислимых вещественных метриках.

Теорема 2.2. *Существуют вычислимые метрики ρ_0, ρ_1 на $\mathbf{R}$, такие что $\rho_0, \rho_1 \leq_c \rho_R$, $\rho_0 \nleq_c \rho_1$ и $\rho_0 \equiv_{ch} \rho_1$.*

Доказательство. Построим метрики $\rho_0 \nleq_c \rho_1$, удовлетворяя следующие требования для $e \in \omega$:

$\mathcal{R}_e$: Функционал Φ_e не c-сводит ρ_0 к ρ_1.

Опишем стратегию для требования $\mathcal{R}_e$ в изоляции. Для того, чтобы выполнить это требование, нам нужно найти хотя бы одно ρ_0-имя f для какой-нибудь точки $x \in \mathbf{R}$, такое что $\Phi_e(f)$ не является ρ_1-именем для x.

Зафиксируем замкнутые отрезки $I_k = [4k, 4k+2] \subseteq \mathbf{R}$. Требованию $\mathcal{R}_e$ выделим отрезок I_e. Пусть $q_a = 4k$ — середина этого отрезка. Заметим, что элемент $\bar{a} = (a, a, \dots) \in \omega^\omega$ является именем для рационального числа q_a в любой метрике. Вычислим $\Phi_e(\bar{a})(0)$. Если это вычисление расходится, то понятно, что функционал Φ_e не может сводить ρ_0 к ρ_1, поскольку его значение на ρ_0-имени $\bar{a}$ не определено. Если же $\Phi_e(\bar{a})(0) \downarrow = u$, возможны два варианта:

1. $\rho_R(q_u, q_a) > 1$. В этом случае можем положить $\rho_0 = \rho_1 = \rho_R$. В частности, $\rho_1(q_u, q_a) = \rho_R(q_u, q_a) > 1$. Тогда в силу замечания 1.1 $\Phi_e(\bar{a})$ не будет являться ρ_1-именем для q_a, и изолированное требование $\mathcal{R}_e$ выполнено.

2. $\rho_R(q_u, q_a) \leqslant 1$. Обозначим $p = \varphi_e(\bar{a})(0)$. Выберем произвольный отрезок $[q_c, q_d] \subseteq I_i$ с серединой q_t, не содержащий точек q_a и q_u и такой, что $\rho_R(q_a, q_t) \leqslant 2^{-p+1}$. Определим отображение $\Gamma_e \colon [q_c, q_d] \to \mathbf{R}$ правилом $\Gamma_e(x) = \left(1 - \frac{|x-q_t|}{|q_c-q_d|}\right)$. Доопределим Γ_e нулём вне отрезка $[q_c, q_d]$. Положим $\rho_0 = \rho_R$, $\rho_1(x, y) = \rho_R(x, y) + |\Gamma_e(x) - \Gamma_e(y)|$ для $x, y \in \mathbf{R}$. Видим, что элемент
$$a^p\bar{t} = (\underbrace{a, \dots, a}_{p}, t, t, \dots) \in \omega^\omega$$
является ρ_0-именем для q_t, т. к. $\rho_0(q_a, q_t) \leqslant 2^{-p+1}$. С другой стороны, $\rho_1(q_u, q_t) = \rho_R(q_u, q_t) + |\Gamma_e(q_u) - \Gamma_e(q_t)| > \Gamma_e(q_t) = 1$. Поскольку $u = \Phi_e(\bar{a})(0) = \Phi_e(a^p\bar{t})(0)$ в силу выбора p и use-принципа, это означает, что $\Phi_e(a^p\bar{t})$ не является ρ_1-именем для q_t, а значит, Φ_e не сводит ρ_0 к ρ_1.

Выполняем каждое требование на своём отрезке. В итоге имеем $\rho_1(x, y) = \rho_R(x, y) + |\gamma(x) - \gamma(y)|$ для функции γ, определённой как $\gamma(x) = \sum_e \Gamma_e(x)$, где сумма берётся по всем e, таким что отображение Γ_e было определено в конструкции. Понятно, что, поскольку отрезки I_e отделены друг от друга, то для каждого x найдётся не более одного e, такого что $\gamma(x) = \Gamma_e(x) > 0$. Отсюда легко видеть, что отображение γ корректно определено и непрерывно.

Таким образом, если $\rho_R(x_n, x) \to 0$, то и $\rho_1(x_n, x) \to 0$ для любой последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ и точки x. С другой стороны, поскольку $\rho_1(x, y) \geqslant \rho_R(x, y)$ для всех x, y, то всякая сходящаяся в метрике ρ_1 последовательность сходится и в метрике ρ_R к той же точке, и метрики ρ_1 и ρ_R индуцируют одну и ту же топологию на $\mathbf{R}$. По этой же причине метрика ρ_1 полна. В силу леммы 1.1 имеем $\rho_1 \leq_c \rho_R$.

Для того, чтобы метрики ρ_0 и ρ_1 были ch-эквивалентными, делаем следующее. Всякий раз, когда в конструкции определяется отображение Γ_e с носителем $[q_c, q_d] \subseteq I_e$, копируем это отображение со сдвигом носителя на 2 вправо, т. е. определяем отображение Γ'_e с носителем $[q_c{+}2, q_d{+}2] \subseteq [4e{+}2, 4e{+}4]$, и присоединяем это отображение к метрике ρ_0. В итоге, метрика ρ_0 будет иметь вид $\rho_0(x, y) = \rho_R(x, y) + |\gamma'(x) - \gamma'(y)|$, где $\gamma'(x) = \sum_e \Gamma'_e(x)$. Понятно, что отображение $F(x) = x + 2$ является (ρ_1, ρ_0)-вычислимой изометрией между пространствами $(\mathbf{R}, \rho_1)$ и $(\mathbf{R}, \rho_0)$. Аналогично, функция $F^{-1}(x) = x - 2$ будет (ρ_0, ρ_1)-вычислимой. Отсюда $\rho_0 \equiv_{ch} \rho_1$. Нетрудно видеть, что операция копирования не нарушает никаких требований $\mathcal{R}_e$. Действительно, пусть для требования $\mathcal{R}_e$ имеет место второй из рассмотренных выше случаев. Поскольку метрика ρ_0 совпадает с ρ_R на отрезке I_e, т. е. $\rho_0(x, y) = \rho_R(x, y)$ для всех $x, y \in I_e$, то понятно, что $a^p\bar{t}$ по-прежнему будет являться ρ_0-именем для q_t. Рассуждая как ранее, убеждаемся, что Φ_e не сводит ρ_0 к ρ_1. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Покажем, наконец, как сделать метрики ρ_0 и ρ_1 вычислимыми. Для этого на каждом этапе s конструкции мы будем фиксировать конечное множество рациональных точек A_s, расстояния между которыми будет запрещено менять после этого этапа. Более точно, множества A_s будут обладать следующими свойствами: Множества A_s образуют возрастающую последовательность со свойствами:

1. $\Gamma(x) = 0$ для всех $x \in A_s$ и всех отображений Γ, определённых после шага s,
2. $A_s \subseteq A_t$ для $s \leqslant t$,
3. $\bigcup_{i\in\omega} A_s = \mathbb{Q}$.

Иными словами, множества A_s будут постепенно “замощать” прямую $\mathbf{R}$ так, что любое рациональное число попадёт в A_s на каком-нибудь шаге. Таким образом, как только рациональные числа x, y попадут в A_s, мы будем знать *точное* значение расстояния $\rho_1(x, y)$. Перейдём к описанию конструкции.

Конструкция. *Этап 0.* Положим $A_0 = \varnothing$.

Этап $s + 1$. Положим $A_{s+1} = A_s \cup \{q_s\}$. Работаем с требованием $\mathcal{R}_e$, $e = \langle s + 1\rangle_0$, если оно ещё не выполнено. Вычислим $\Phi_{e,s+1}(\bar{a})(0)$, где q_a — середина отрезка I_e. Если $\Phi_{e,s+1}(\bar{a})(0) \downarrow=$

u и $\rho_R(q_u, q_a) \leqslant 1$, выберем произвольный отрезок $[q_c, q_d] \subseteq I_i$ с серединой q_t, такой что $[q_c, q_d] \cap (A_{s+1} \cup \{q_a, q_u\}) = \varnothing$ и $\rho_R(q_a, q_t) \leqslant 2^{-\varphi_e(\bar{a})(0)+1}$. Определим отображение Γ_e с носителем $[q_c, q_d]$, как описано в стратегии. Определим отображение Γ'_e с носителем $[q_c + 2, q_d + 2]$.

Верификация. Пусть требование $\mathcal{R}_e$ не выполнено, т. е. Φ_e сводит ρ_0 к ρ_1. Тогда на некотором шаге s мы обнаружим, что $\Phi_e(\bar{a})(0) \downarrow= u$. Если $\rho_R(q_u, q_a) > 1$, то и $\rho_1(q_u, q_a) > 1$, и мы видим, что Φ_e не может сводить ρ_0 к ρ_1. Если же $\rho_0(q_u, q_a) \leqslant 1$, то в соответствии с конструкцией мы определяем отображение Γ_e. В обозначениях из стратегии для $\mathcal{R}_e$, получаем, что $a^p\bar{t}$ является ρ_0-именем для q_t, таким что $\Phi_e(a^p\bar{t})(0) = \Phi_e(\bar{a})(0) = u$. Поскольку $\rho_1(q_u, q_t) = \rho_R(q_u, q_t) + |\gamma(q_u) - \gamma(q_t)| \geqslant \rho_R(q_u, q_t) + |\Gamma_e(q_u) - \Gamma_e(q_t)| \geqslant \rho_R(q_u, q_t) + \Gamma_e(q_t) = \rho_R(q_u, q_t) + 1 > 1$, мы снова получаем, что Φ_e не может сводить ρ_0 к ρ_1.

Из конструкции видно, что, если мы определяем отображение Γ на шаге s, то носитель Γ не содержит точек из A_s. Значит, для всех $x, y \in A_s$ имеет место равенство $\rho_1(x, y) = \rho_R(x, y) + \left|\sum_e (\Gamma_e(x) - \Gamma_e(y))\right|$, где сумма берётся по отображениям Γ_e, определённым до шага s. Значит, $\rho_1(x, y)$ может быть вычислено равномерно по x и y, и метрика ρ_1 вычислима. Рассуждая аналогично, заключаем, что метрика ρ_0 вычислима. □

Теорема 2.3. *Существует вычислимая метрика $\rho <_{ch} \rho_R$.*

Доказательство. Пользуемся техникой из предыдущей теоремы. Искомая метрика ρ будет иметь вид $\rho(x, y) = \rho_R(x, y) + |\gamma(x) - \gamma(y)|$ для функции $\gamma(x) = \sum_n \Gamma_n(x)$, где $\Gamma_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — функция-“пик” из доказательства предыдущей теоремы. Лемма 1.1 сразу даёт нам $\rho \leq_c \rho_R$. Более того, легко видеть, что $\rho \leq_c \rho_R$ посредством тождественного функционала $\mathrm{id}_{\omega^\omega}$, т. е. всякое ρ-имя является также и ρ_R-именем. Для того, чтобы показать, что $\rho_R \not\leq_{ch} \rho$, будем выполнять следующие требования:

$\mathcal{R}_e :$ Φ_e не может быть (ρ_R, ρ)-реализацией никакого автогомеоморфизма $\mathbf{R}$.

Нам понадобится следующая техническая лемма, являющаюся прямым следствием [62, теор. 3.1.8, п. 5].

Лемма 2.1. *Пусть δ_X, δ'_X — представления пространства X, δ_Y, δ'_Y — представления пространства Y, такие что $\delta'_X \leq_c \delta_X$ посредством тождественного функционала $\mathrm{id}_{\omega^\omega}$ и $\delta_Y \leq_c \delta'_Y$ посредством $\mathrm{id}_{\omega^\omega}$. Пусть для частичной функции $F \colon X \to Y$ верно $(\delta_X, \delta_Y)(\Phi_e) = F$. Тогда $(\delta'_X, \delta'_Y)(\Phi_e) = F$. Иными словами, каждая (δ_X, δ_Y)-вычислимая функция (δ'_X, δ'_Y)-вычислима посредством того же функционала.*

Чтобы сделать ρ вычислимой, действуем как в доказательстве предыдущей теоремы: на каждом шаге s фиксируем конечное множество рациональных чисел A_s, расстояние между которыми не будет меняться после этого шага. Обсудим теперь, как выполнить требования $\mathcal{R}_e$. Предположим, что метрика ρ уже построена, и рассмотрим произвольную функцию F, (ρ_R, ρ)-вычислимую посредством функционала Φ_e. Из леммы 2.1, где $X = Y = \mathbf{R}$, ρ_R выступает в роли $\delta_X = \delta'_Y$, а ρ — в роли δ_Y, получаем, что функция F также (ρ_R, ρ_R)-вычислима посредством Φ. Таким образом, для того чтобы показать несуществование (ρ_R, ρ)-вычислимого гомеоморфизма, нам будет достаточно проводить диагональный процесс относительно тьюринговых функционалов, являющихся (ρ_R, ρ_R)-реализациями гомеоморфизмов. По определению, $(\rho_R, \rho)(\Phi_e) = F$ означает, что для всякого f из $\rho_R(f) = x$ следует $\rho(\Phi_e(f)) = F(x)$. Поэтому для выполнения требования $\mathcal{R}_e$ достаточно предъявить хотя бы одно ρ_R-имя f, такое что $\Phi_e(f)$ не является ρ-именем для $\rho_R(\Phi_e(f))$. Поэтому требования $\mathcal{R}_e$ можно переписать в следующем виде.

$\mathcal{R}_e$: Если $(\rho_R, \rho_R)(\Phi_e) = F$ есть автогомеоморфизм $\mathbf{R}$, то найдётся ρ_R-имя Коши f такое, что $\Phi_e(f)$ не является ρ-именем.

Опишем стратегию для $\mathcal{R}_e$ в изоляции. Выделим требованию $\mathcal{R}_e$ свой отдельный отрезок I_e в $\mathbf{R}$. Предположим, что Φ_e является (ρ_R, ρ_R)-реализацией некоторой функции $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Вспомним, что элемент $\bar{a} \in \omega^\omega$ является ρ_R-именем для рационального числа q_a. Мы будем искать $a \in \omega$, для которого вычисление $\Phi_e(\bar{a})(0)$ когда-нибудь завершится и рациональное число с номером $\Phi_e(\bar{a})(0)$ попадёт в I_e. Пусть $p = \varphi_e(\bar{a})(0)$. Выберем рациональное число q_b, такое что $\rho_R(q_a, q_b) \leqslant 2^{-p+1}$. Тогда $a^p\bar{b}$ будет являться ρ_R-именем для q_b, таким что $\Phi_e(a^p\bar{b})(0) = \Phi_e(\bar{a})(0)$. Кроме того, $\Phi_e(\bar{a})$ и $\Phi_e(a^p\bar{b})$ суть ρ_R-имена соответственно для $F(q_a)$ и $F(q_b)$. Если F — действительно гомеоморфизм, то $F(q_a) \neq F(q_b)$, и это можно проверить за конечное время, используя имена $\bar{a}$, $a^p\bar{b}$. Выберем отрезок K_e, находящийся между $F(q_a)$ и $F(q_b)$; тогда прообразы всех элементов этого отрезка будут лежать между q_a и q_b. В частности, если $F(x) \in K_e$, то должно существовать ρ_R-имя f для x, имеющее вид

$$f = (\underbrace{a, \ldots, a}_{p}, f(p), f(p+1), \ldots).$$

Теперь нам остаётся определить "пик" Γ с носителем K_e и положить $\rho(y, z) = \rho_R(y, z) + \big|\Gamma(y) - \Gamma(z)\big|$ для $y, z \in \mathbf{R}$. Тогда найдутся подходящие x и f, для которых $F(x) \in K_e$ расположено достаточно далеко от $q_{\Phi_e(\bar{a})(0)} = q_{\Phi_e(f)(0)}$ в метрике ρ. Таким образом, $\Phi_e(f)$ не может быть ρ-именем Коши для $F(x)$, и требование $\mathcal{R}_e$ выполнено.

Приступим к формальному описанию нашей конструкции. Для $k \in \omega$ и $g \in \omega^\omega$ обозначим

$$[g]_k = [q_{g(k)} - 2^{-k}, q_{g(k)} + 2^{-k}].$$

Если g — некоторое ρ_R-имя, то по определению имени Коши для всякого k отрезок $[g]_k$ содержит элемент $\rho_R(g)$. Скажем, что $\Phi_e(g)$ и $\Phi_e(h)$ (k,s)-*разделимы*, если

$$[\Phi_e(g)]_k \cap [\Phi_e(h)]_k = \varnothing,$$

причём вычисления $\Phi_e(g)(k), \Phi_e(h)(k)$ завершаются не более чем за s машинных шагов. Если $\rho_R(g) = y$, $\rho_R(h) = z$ и $(\rho_R, \rho_R)(\Phi_e) = F$, то $F(y) \neq F(z)$ равносильно (k,s)-разделимости $\Phi_e(g)$ и $\Phi_e(h)$ для некоторых k, s. Понятно, что разделимость можно проверить эффективно, зная g и h.

Зафиксируем вычислимую последовательность отрезков $(I_e)_{e\in\omega}$, $I_e = [4e, 4e+2] \subseteq \mathbf{R}$.

Конструкция. *Этап 0.* Положим $A_0 = \varnothing$.

Этап $s+1$. Положим $A_{s+1} = A_s \cup \{q_s\}$. Выполним следующие шаги.

1. Проверим, найдётся ли $a \leqslant s+1$, такое что $\Phi_{e,s+1}(\bar{a})(0) \downarrow = u$ и $q_u \in I_e$. Если такого a не найдётся, перейдём на этап $s+2$. В ином случае, обозначим $p = \varphi_e(\bar{a})(0)$.

2. Найдём $b \leqslant s+1$, такое что $|q_a - q_b| \leqslant 2^{-p+1}$, $\Phi_e(\bar{a})$ и $\Phi_e(a^p\bar{b})$ $(m, s+1)$-разделимы для некоторого $m \leqslant s+1$ и $q_{\Phi_e(a^p\bar{b})(m)} \in I_e$. Если такого b не найдётся, перейдём на шаг $s+2$.

3. Выберем наименьшее $\langle c, d\rangle$, для которого отрезок $K_e = [q_c, q_d]$ *лежит между* отрезками $[\Phi_e(\bar{a})]_m$ и $[\Phi_e(a^p\bar{b})]_m$ и не содержит q_u и чисел из A_{s+1}. Определим “пик” Γ_e с носителем K_e.

Верификация. Рассуждая как в доказательстве предыдущей теоремы, заключаем, что метрика ρ, определяемая как $\rho(x,y) = \rho_R(x,y) + |\gamma(x) - \gamma(y)|$ для функции $\gamma(x) = \sum_e \Gamma_e(x)$, полна и индуцирует обычную топологию на $\mathbf{R}$, а кроме того, $\rho \leqslant_c \rho_R$ посредством тождественного функционала $\mathrm{id}_{\omega^\omega}$.

Покажем, что из того, что, если $(\rho_R, \rho_R)(\Phi_e) = F$ — автогомеоморфизм $\mathbf{R}$, следует, что найдётся подходящая рациональная точка q_a, такая что $q_{\Phi_e(\bar{a})(0)} \in I_e$.

Лемма 2.2. *Пусть* $(\rho_R, \rho_R)(\Phi_e) = F$ — *автогомеоморфизм* $\mathbf{R}$. *Тогда для всякого отрезка* $I \subset \mathbf{R}$ *длины* L *и* $k \geqslant \log_2(L) - 1$ *найдётся* $a \in \omega$, *такое что* $q_{\Phi_e(\bar{a})(k)} \in I$.

Доказательство. Поскольку F — гомеоморфизм, то $F(\mathbb{Q})$ всюду плотно в $\mathbf{R}$. Тогда из того, что отрезки вида $[\Phi_e(\bar{a})]_k$ имеют ненулевую длину и содержат $F(q_a)$, следует, что для любого $k \in \omega$

$$\bigcup_{a\in\omega} [\Phi_e(\bar{a})]_k = \mathbf{R}.$$

Пусть $t \in I$ — середина отрезка I. По доказанному, для некоторого $a \in \omega$ $t \in [\Phi_e(\bar{a})]_k$. Тогда $|t - q_{\Phi_e(\bar{a})(k)}| \leqslant 2^{-k}$ и если $L \geqslant 2^{-k+1}$, то $q_{\Phi_e(\bar{a})(k)} \in I$. $\square$

Лемма 2.3. *Требование $\mathcal{R}_e$ будет выполнено для любого e.*

Доказательство. Сначала докажем лемму в предположении, что $(\rho_R, \rho_R)(\Phi_e) = F$ есть автогомеоморфизм пространства $\mathbf{R}$. Прежде всего заметим, что мы выделяем требованию $\mathcal{R}_e$ бесконечное число этапов конструкции, а значит, рано или поздно все вычисления в процедуре выполнения $\mathcal{R}_e$ завершатся. Из предыдущей леммы следует существование a, для которого $q_{\Phi_e(\bar{a})(0)} = q_u \in I_e$. Из биективности F получаем

$$\rho_R(\Phi_e(\bar{a})) \neq \rho_R(\Phi_e(a^p\bar{b})),$$

а значит, найдутся шаг s и число $m \leqslant s$, для которых $\Phi_e(\bar{a})$ и $\Phi_e(a^p\bar{b})$ (m,s)-разделимы. Кроме того, т. к. F непрерывна, то число b можно выбрать со свойством $q_{\Phi_e(a^p\bar{b})(m)} \in I_e$.

Итак, $\rho_R(\Phi_e(\bar{a})) = F(q_a)$ и $\rho_R(\Phi_e(a^p\bar{b})) = F(q_b)$. По построению, отрезок K_e лежит между $F(q_a)$ и $F(q_b)$. Пусть t — середина отрезка K_e. По теореме о промежуточном значении, существует x, лежащее между q_a и q_b и такое, что $F(x) = t$. Для этого x верно

$$|q_a - x| \leqslant |q_a - q_b| \leqslant 2^{-p+1}.$$

Поэтому существует ρ_R-имя f для x вида

$$f = (\underbrace{a, \ldots, a}_{p}, f(p), f(p+1), \ldots),$$

и $\Phi_e(f)(0) = \Phi_e(\bar{a})(0) = u$. Понятно, что $\gamma(q_u) = 0$. По определению отображения Γ_e, имеем

$$\rho(q_{\Phi_e(f)(0)}, t) = \rho(q_u, t) = \rho_R(q_u, t) + |\gamma(q_u) - \gamma(t)| > |\gamma(q_u) - \gamma(t)| = \Gamma_e(t) = 1,$$

и $\Phi_e(f)$ не является ρ-именем для $F(x) = t$. Требование $\mathcal{R}_e$ выполнено.

Если же какое-то из вычислений, фигурирующих в процедуре, не завершится с ростом s, или никогда не найдётся $a \in \omega$ с $q_{\Phi_e(\bar{a})(0)} \in I_e$, или $\Phi_e(\bar{a})$ и $\Phi_e(a^p\bar{b})$ не (m,s)-разделимы ни для каких m, s, или никакое такое $q_{\Phi_e(a^p\bar{b})(m)}$ не попадает в I_e, тогда ясно, что Φ_e не может быть (ρ_R, ρ_R)-реализацией биективной функции. В этом случае требование $\mathcal{R}_e$ также выполнено. □

Остаётся показать, что не существует (ρ_R, ρ)-вычислимого автогомеоморфизма $\mathbf{R}$. Пусть это не так и $(\rho_R, \rho)(\Phi_e) = F$ является таковым. По построению, $\rho \leq_c \rho_R$ посредством $\mathrm{id}_{\omega^\omega}$. Применяя лемму 2.1, получаем $F = (\rho_R, \rho_R)(\Phi_e)$. Но тогда в силу того, что требование $\mathcal{R}_e$ выполнено, заключаем, что Φ_e не может быть (ρ_R, ρ)-реализацией F. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Конструкция теоремы 2.3 может быть обобщена для построения бесконечного количества вычислимых ch-неэквивалентных метрик. При этом возникнут конфликты требований, которые придётся разрешать методом приоритета с конечными нарушениями.

Теорема 2.4. *Существует последовательность $(\rho_i)_{i\in\omega}$ вычислимых метрик, не сравнимых между собой по ch-сводимости и c-сводимых к ρ_R.*

Доказательство. Строим метрики ρ_i тем же методом, как и ранее. В ходе конструкции удовлетворяем требования

$\mathcal{R}_{eij}$: Если $(\rho_i, \rho_R)(\Phi_e)$ — автогомеоморфизм $\mathbf{R}$, то найдётся ρ_i-имя Коши f такое, что $\Phi_e(f)$ не является ρ_j-именем.

Зафиксируем нумерацию всех требований:

$$(\mathcal{R}_n)_{n\in\omega} = \{\mathcal{R}_{eij} \mid e, i, j \in \omega,\ i \neq j\}.$$

Всякое требование вида $\mathcal{R}_{eij}$ будем называть *ij-требованием.*

Метрика ρ_i имеет вид $\rho_i(x, y) = \rho_R(x, y) + |\gamma_i(x) - \gamma_i(y)|$ для функции $\gamma_i(x) = \sum_n \Gamma_n(x)$, где сумма берётся по таким n, что отображение Γ_n определено в ходе конструкции для выполнения требования $\mathcal{R}_n$ вида $\mathcal{R}_{eji}$ *(индексы именно в таком порядке)*. Через $\gamma_{i,s}$ будем обозначать сумму отображений Γ_n, входящих в γ_i и построенных до шага s. С помощью отображения $\gamma_{i,s}$ определим метрику $\rho_{i,s}$.

К этапу s будет построено множество A_s рациональных чисел, все расстояния ρ_i между которыми не будут изменяться начиная с этого шага.

Понятно, что $\rho_i \leq_c \rho_R$ посредством $\mathrm{id}_{\omega^\omega}$ для всех i. Используя этот факт и рассуждая как ранее, приходим к выводу, что из выполнения требования $\mathcal{R}_{eij}$ будет следовать, что функционал Φ_e не может ch-сводить ρ_i к ρ_j.

Конфликты требований. Предположим, мы успешно выполнили требование $\mathcal{R}_{eij}$ на шаге s конструкции. По аналогии с предыдущей теоремой, для этого нам было нужно:

1. найти пару рациональных чисел q_a, q_b, достаточно близких друг к другу в метрике ρ_i
2. определить "пик" Γ_n с носителем K_n.

Свидетелем того, что требование $\mathcal{R}_{eij}$ выполнено, служит ρ_i-имя f вида

$$f = (a, \ldots, a, f(p), f(p+1), \ldots).$$

Предположим теперь, что на шаге $t > s$ для выполнения некоторого ki-требования мы переопределили метрику ρ_i так, что никакое f указанного вида больше не является именем Коши для точек из K_n в этой метрике. Так нарушается выполненное ранее требование $\mathcal{R}_{eij}$.

Итак, возможны конфликты разнотипных требований, происходящие следующим образом: выполнение ki-требования противоречит выполненному ранее ij-требованию. Конфликты мы будем разрешать с помощью *приоритета* требований. Будем считать, что $\mathcal{R}_m$ *имеет больший приоритет,* чем $\mathcal{R}_n$, если $m < n$. Поскольку теперь выполненные требования могут быть нарушены другими требованиями, введём для них *метки.* Если мы выполним ij-требование $\mathcal{R}_n$ на шаге s, ему присваивается метка. Эта метка может быть впоследствии снята выполнением какого-либо требования с большим приоритетом. Кроме того, перед тем как запустить процедуру выполнения $\mathcal{R}_n$, мы должны будем проверить, не противоречит ли оно какому-нибудь требованию с большим приоритетом, носящему на шаге s метку.

Зафиксируем отрезки $I_k = [4k, 4k+2] \subseteq \mathbf{R}$. Требованию $\mathcal{R}_n$ будут отведены отрезки I_k с $n = \langle k\rangle_0$; будем говорить, что такие отрезки *принадлежат* требованию $\mathcal{R}_n$. На этапе s конструкции мы будем работать с требованием $\mathcal{R}_n$ с $n = \langle s\rangle_0$.

Пусть отрезок I_e принадлежит требованию $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{eij}$. (n, e, s)-*диагональю* назовём пару рациональных точек (q_a, q_b), где $a, b \leqslant s$, для которых верно:

1. $\Phi_{e,s}(\bar{a})(0) \downarrow= u$,
2. $\rho_{i,s}(q_a, x) \leq 2^{-p+1}$ для всех $q_a \leqslant x \leqslant q_b$, где $\varphi_e(\bar{a})(0) = p$,
3. $\Phi_e(\bar{a})$ и $\Phi_e(a^p\bar{b})$ (m, s)-разделимы, $m \leq s$,
4. $q_u \in I_e$, $q_{\Phi_n(a^p\bar{b})(m)} \in I_e$.

Заметим, что пункт 2 проверяется эффективно в силу определения метрики $\rho_{i,s}$.

Всякое $\mathcal{R}$-требование теперь имеет бесконечное количество принадлежащих ему отрезков. Укажем, с каким из них нам надлежит работать на этапе s. Во-первых, нужно, чтобы на этом отрезке мы ещё не работали. Во-вторых, мы хотим, чтобы этот отрезок не содержал диагоналей отмеченных требований с большим приоритетом (тогда наше требование не будет с ними конфликтовать). Этим мотивировано следующее определение.

Отрезок I_e, принадлежащий ij-требованию $\mathcal{R}_n$, назовём *свободным* на этапе s, если к этому этапу на нём не была успешно завершена процедура выполнения $\mathcal{R}_n$, а также $q_a, q_b \notin I_e$ для всякой (m, d, t)-диагонали (a, b), где $t < s$, $m < n$ и jr-требование $\mathcal{R}_m$ носит метку.

Так как на любом этапе найдётся лишь конечное число диагоналей для отмеченных требований с большим приоритетом (таких требований может быть не больше чем n) и само $\mathcal{R}_n$

могло быть выполнено конечное количество раз, то свободный отрезок всегда существует и может быть найден эффективно.

Конструкция. *Шаг 0.* Положим $A_0 = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Положим $A_{s+1} = A_s \cup \{q_s\}$. Если требование $\mathcal{R}_n$ с $n = \langle s \rangle_0$ носит метку, то перейдём на шаг $s+2$. В ином случае, пусть это требование имеет вид $\mathcal{R}_{eij}$. Найдём принадлежащий $\mathcal{R}_n$ свободный отрезок с наименьшим номером e. Найдём (n, e, s)-диагональ. Если такая диагональ (q_a, q_b) нашлась, найдём наименьшее $\langle c, d \rangle$, такое что отрезок $K_e = [q_c, q_d]$ находится между отрезками $[\Phi_e(\bar{a})]_m$ и $[\Phi_e(a^p\bar{b})]_m$ и не содержит q_u и чисел из A_s. Определим отображение Γ_e с носителем K_e. Снимем метки со всех требований с меньшим приоритетом.

Верификация. Из конструкции и определения свободного отрезка видно, что всякому ij-требованию запрещено конфликтовать с jr-требованиями с большим приоритетом и разрешено отменять выполнение требований с меньшим приоритетом; таким образом, наши представления о приоритете требований корректно реализованы.

Лемма 2.4. *Метка может быть присвоена требованию и снята с него лишь конечное число раз.*

Доказательство. Метка с ij-требования $\mathcal{R}_n$ может быть снята только в результате выполнения требования с большим приоритетом. Утверждение леммы теперь доказывается индукцией по n. При $n = 0$ достаточно заметить, что для $\mathcal{R}_0$ не существует требований с меньшим номером, поэтому оно может получить метку не более одного раза. Пусть $n > 0$. По индукционной гипотезе, существует этап конструкции, после которого перестанут присваиваться метки требованиям $\mathcal{R}_m$, $m < n$. После этого этапа процедуры выполнения $\mathcal{R}_m$ вызываться не будут, метка с $\mathcal{R}_n$ не сможет быть снята, и $\mathcal{R}_n$ сможет вновь получить её не более чем один раз. □

Очевидно, для любого требования на каждом шаге найдётся свободный принадлежащий ему отрезок. Повторяя рассуждения из лемм 2.2 и 2.3, мы приходим к выводу, что если $(\rho_i, \rho_R)(\Phi_e)$ есть автогомеоморфизм $\mathbf{R}$, то выполнение требования $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{eij}$ означает, что Φ_e не может ch-сводить $\rho_{i,s}$ к $\rho_{j,s}$. Пусть s — номер этапа, после которого не будет сниматься метка с требования $\mathcal{R}_n$, e — номер первого свободного на этапе s отрезка, принадлежащего $\mathcal{R}_n$. Легко видеть, что процедура выполнения $\mathcal{R}_n$ отныне будет всегда работать на этом отрезке. Если процедура когда-нибудь завершится, то $\mathcal{R}_n$ будет выполнено навсегда. Если процедура никогда не завершится, это означает, что Φ_e не может быть (ρ_i, ρ_R)-реализацией никакого гомеоморфизма, а следовательно, и (ρ_i, ρ_j)-реализацией гомеоморфизма. В этом случае $\mathcal{R}_n$ снова выполнено.

Из требований $\mathcal{R}_{eij}$, $i \neq j$, вытекает утверждение теоремы. $\square$

Глава 3. Построение метрик выше ρ_R по слабой сводимости

В данной главе мы показываем, что ch-степень метрики ρ_R не является максимальной в $\mathcal{CM}_{ch}(\mathbf{R})$. Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Существует бесконечная последовательность вычислимых метрик $\rho_i >_c \rho_R$, $i \in \omega$, таких что $\rho_i \,|_{ch}\, \rho_j$ для всех $i \neq j$.*

Параграф 3.1 содержит доказательство теоремы 3.1. В параграфе 3.2 мы анализируем это доказательство и получаем несколько более сильных результатов. Комбинируя метрики ρ_i друг с другом, мы показываем, что упорядочение $(P(\omega), \subseteq)$ подмножеств ω изоморфно вкладывается в упорядочение ch-степеней вещественных метрик. Отсюда следует, что $\mathcal{M}_{ch}(\mathbf{R})$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$. Кроме того, любой счётный частичный порядок изоморфно вкладывается в упорядочение ch-степеней вычислимых метрик $\mathcal{CM}_{ch}(\mathbf{R})$. Ещё один результат касается структуры $\mathcal{CM}_c(\mathbf{R})$ c-степеней вычислимых метрик на $\mathbf{R}$: мы показываем, что счётная безатомная булева алгебра вкладывается в эту структуру с сохранением точных верхних и нижних граней.

Напомним определение модуля непрерывности функции. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) суть метрические пространства, A — подмножество X. *Модулем равномерной непрерывности* функции $F\colon A \to Y$ называется функция $\mathrm{mod}\colon \omega \to \omega$, такая что для всех $x, y \in A$ и $n \in \omega$

$$\rho_X(x, y) \leqslant 2^{-\mathrm{mod}(n)} \;\Rightarrow\; \rho_Y(F(x), F(y)) \leqslant 2^{-n}.$$

Мы также будем предполагать, что $\mathrm{mod}(n+1) \geqslant \mathrm{mod}(n) \geqslant n$. Будем для краткости использовать термин “модуль непрерывности” вместо “модуль равномерной непрерывности”. Очевидно, функция F имеет модуль равномерной непрерывности тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна. Некоторые сведения о модулях непрерывности вычислимых функций можно найти в статьях [32] и [63].

3.1 Основная конструкция

3.1.1 Требования

Выполняем следующие требования для $i, e \in \omega$:

$\mathcal{R}_{ie}$: $\rho_i \not\leq_{ch} \rho_j$ посредством Φ_e для всех $j \neq i$,

$\mathcal{S}$: $\rho_R \leq_c \rho_i$ для всех i.

Заметим, что в требовании $\mathcal{R}_{ie}$ мы диагонализируем против всех метрик ρ_j для $j \neq i$ одновременно. Поскольку из сводимости $\leq_c$ следует сводимость $\leq_{ch}$, выполнение всех требований $\mathcal{R}_{ie}$ и $\mathcal{S}$ будет означать, что для всех $i \neq j$

$$\deg_{ch}(\rho_R) < \deg_{ch}(\rho_i) \mid \deg_{ch}(\rho_j)$$

и

$$\deg_c(\rho_R) < \deg_c(\rho_i) \mid \deg_c(\rho_j).$$

Для того чтобы сделать метрики ρ_i вычислимыми, действуем как ранее: во время конструкции строим возрастающую последовательность конечных множеств A_s рациональных чисел, таких что расстояния между точками из A_s не будут изменяться после шага s. Более формально, множества A_s будут иметь следующие свойства:

1. Для всех i пространство (A_s, ρ_i) является конечным подпространством пространства $(\mathbf{R}, \rho_i)$,
2. $A_s \subseteq A_t$ для $s \leqslant t$,
3. $\bigcup_{i \in \omega} A_s = \mathbb{Q}$.

Это даёт нам метод вычисления $\rho_i(q, r)$ равномерно по $q, r \in \mathbb{Q}$ для всех i: для того чтобы вычислить это расстояние, достаточно дождаться шага s, на котором $q, r \in A_s$.

Для выполнения требования $\mathcal{R}_{ie}$ достаточно показать для всех $j \neq i$, что если Φ_e вычисляет автогомеоморфизм F пространства вещественных чисел относительно ρ_i и ρ_j, то существуют $x \in \mathbf{R}$ и некоторое ρ_i-имя f для x, такие что $\Phi_e(f)$ не является ρ_j-именем для $F(x)$, придя таким образом к противоречию. Такое имя f мы построим, делая некоторые вещественные числа близкими друг к другу в метрике ρ_i, контролируя при этом, что Φ_e-“образы” этих чисел далеки друг от друга во всех метриках ρ_j. Покажем в деталях, как этот метод работает.

Опишем, как устроены элементарные деформации, которые мы будем присоединять к метрикам ρ_i для выполнения $\mathcal{R}$-требований. Зафиксируем цилиндрическую систему координат (x, r, θ) в $\mathbf{R}^3$. Рассмотрим элемент $a \in \mathbf{R}$ и замкнутый отрезок J справа от a. Разделим J на 6 равных подотрезков $J^k = [b_k, b_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, 5$. Определим отображение $\Gamma \colon J \to \mathbf{R}^3$ следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma(b_0) = (b_0, 0, 0), & \Gamma(b_3) = (a, h, \frac{s}{s+1}\pi), & \Gamma(b_6) = (b_6, 0, 0), \\
\Gamma(b_1) = (b_0, 2, \frac{s}{s+1}\pi), & \Gamma(b_4) = (a, 2.5, \frac{s}{s+1}\pi), & \\
\Gamma(b_2) = (a + 0.25, 2, \frac{s}{s+1}\pi), & \Gamma(b_5) = (b_6, 2.5, \frac{s}{s+1}\pi), &
\end{array}$$

предполагая, что Γ линейно на каждом подотрезке J^k. Здесь $h < 2$ — это некоторое вещественное число, а s — этап, на котором Γ вводится в конструкцию.

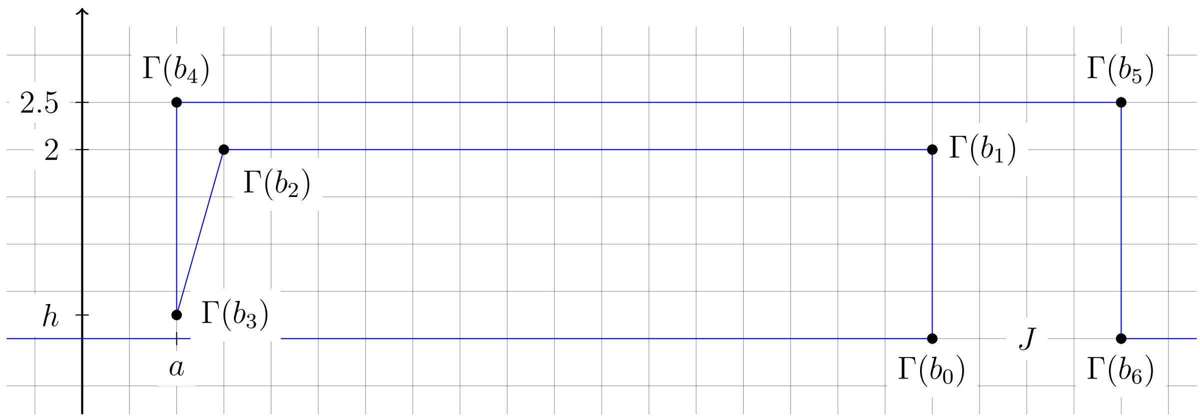

Рис. 1: Отображение $\Gamma_{a,J,h,s}$ в плоскости $\theta = \frac{s}{s+1}\pi$.

Мы можем продолжить Γ до отображения $\gamma\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, положив $\gamma(x) = (x, 0, 0)$ для $x \notin J$. Определим метрику ρ на $\mathbf{R}$ как $\rho(x, y) = \|\Gamma(x) - \Gamma(y)\|_{\mathbf{R}^3}$. Понятно, что ρ — вычислимая метрика, если a, h и концевые точки J суть вычислимые вещественные числа. Видим, что в этой метрике расстояние $\rho(a, b_3) = h$, и, выбирая достаточно малые h, мы можем делать точки a и b_3 произвольно близкими. Параметры отображения Γ мы будем указывать с помощью нижних индексов. Например, мы можем писать $\Gamma_{a,J,h,s}$, имея в виду, что Γ введено в конструкцию на шаге s для того, чтобы сделать расстояние $\rho(a, b_3)$ равным h, где b_3 — середина отрезка J. Некоторые (или все) из этих индексов мы будем опускать для удобства обозначения.

Зафиксируем точки $\mathbf{a}_i = 10i \in \mathbf{R}$ и отрезки $J_i = [10i + 4, 10i + 6] \subset \mathbf{R}$ (таким образом, J_i находится между $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_{i+1}$). Точки $\mathbf{a}_i$ будут играть роль свидетелей для наших требований, а отрезки J_i будут служить носителями отображений Γ, определяемых в конструкции.

3.1.2 Стратегия для требования $\mathcal{R}_{ie}$ в изоляции

Метрика ρ_i будет иметь форму

$$\rho_i(x, y) = \|\gamma_i(x) - \gamma_i(y)\|_{\mathbf{R}^3},$$

где отображение $\gamma_i\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ строится по шагам. На шаге 0 положим $\gamma_{i,0} = 0$, так что $\rho_{i,0} = \rho_R$. Предположим сначала, что $\rho_j = \rho_R$ для $j \neq i$. Выберем двух последователей $\mathbf{a}_k = q_a < \mathbf{a}_l = q_b$. Прежде всего мы хотим убедиться, что, в случае если Φ_e действительно является (ρ_i, ρ_R)-реализацией инъективного отображения $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, то $F(q_a) \neq F(q_b)$. В силу замечания 1.1, для этого достаточно дождаться $\Phi_e(\bar{a})(0) \downarrow= u$ и $\Phi_e(\bar{b})(0) \downarrow= v$ и проверить, верно ли, что $\rho_R(q_u, q_v) > 2$. Если это так, то для того, чтобы диагонализировать против Φ_e, нам нужно показать, что найдутся $f \in \omega^\omega$ и $x \in \mathbf{R}$, такие что $\rho_i(f) = x$, но $\Phi_e(f)$ не является ρ_R-именем для $F(x)$; в силу замечания 1.1, для этого достаточно показать, что $\Phi_e(f) = \Phi_e(\bar{a})(0) = u$, но $\rho_R(q_u, F(x)) > 1$. Такие f и x строятся следующим образом. Предположим, что мы находимся на шаге s конструкции и верно $\Phi_{e,s}(\bar{a})(0) \downarrow= u$, $\Phi_{e,s}(\bar{b})(0) \downarrow= v$, $\rho_R(q_u, q_v) > 2$. Выберем отрезок J_m справа от обоих последователей и определим отображение $\Gamma_{q_a, J_m, 2^{-p+1}, s}$, где $p = \varphi_{e,s}(\bar{a})(0)$. Определим

$$\gamma_{i,s}(x) = \gamma_{i,s-1}(x) \uplus \Gamma_s(x) = \begin{cases} \Gamma_s(x), & x \in J_m \\ \gamma_{i,s-1}(x), & x \notin J_m \end{cases}$$

и положим $\rho_{i,s}(x, y) = \|\gamma_{i,s}(x) - \gamma_{i,s}(y)\|$ для $x, y \in \mathbf{R}$. (См. рис. 3 ниже для иллюстрации идеи того, как мы добавляем Γ_s к γ_{s-1}.)

Покажем, что Φ_e не может быть $(\rho_{i,s}, \rho_R)$-реализацией никакого автогомеоморфизма $\mathbf{R}$. Действительно, пусть, напротив, функционал Φ_e реализует сюръективное гомеоморфное отображение $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Тогда F строго монотонно. Пусть q_d — середина отрезка J_m. Заметим, что $\rho_{i,s}(q_a, q_d) = 2^{-p+1}$, так что $a^p\bar{d}$ есть $\rho_{i,s}$-имя точки q_d, такое что $\Phi_e(a^p\bar{d})(0) = \Phi_e(\bar{a})(0) = u$. С другой стороны, $q_a < q_b < q_d$ в силу выбора J_i, так что должно выполняться соотношение

$$F(q_a) < F(q_b) < F(q_d) \text{ или } F(q_a) > F(q_b) > F(q_d).$$

Предположим, что $F(q_a) < F(q_b) < F(q_d)$, другой случай рассматривается аналогично. Поскольку $\rho_R(q_u, q_v) > 2$ и $\rho_R(q_v, F(q_b)) \leqslant 1$, то

$$\rho_R(q_u, F(q_b)) \geqslant |\rho_R(q_u, q_v) - \rho_R(q_v, F(q_b))| > 1,$$

и $q_u < F(q_b) < F(q_d)$. Поэтому имеем $\rho_R(q_u, F(q_d)) > \rho_R(q_u, F(q_b)) > 1$, что означает, что $\Phi_e(a^p\bar{d})$ не может быть именем Коши для $F(q_d)$.

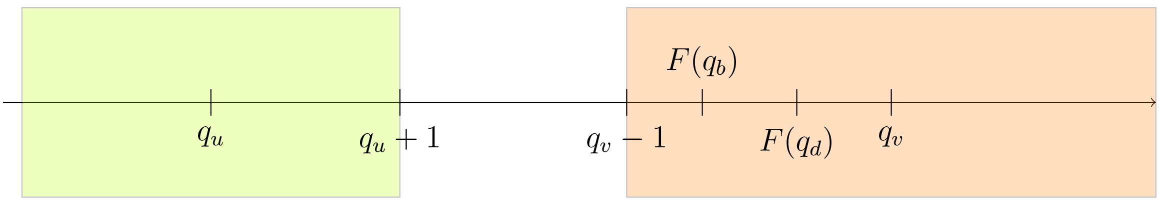

Рис. 2: q_u не может находиться достаточно близко к $F(q_d)$. Случай $F(q_a) < F(q_b) < F(q_d)$

Рассуждая похожим образом, мы покажем, что Φ_e не может ch-сводить ρ_i к ρ_j, когда мы вернёмся к настоящим метрикам ρ_j вместо ρ_R.

Предположим теперь, что $\Phi_e(\bar{a})(0)\downarrow= u$ и $\Phi_e(\bar{b})(0)\downarrow= v$, но $\rho_R(q_u, q_v) \leqslant 2$. В этом случае мы просто переопределяем второго последователя, полагая его равным $\mathbf{a}_{l+1}$, и повторяем стратегию. Если F действительно является автогомеоморфизмом вещественной прямой, этот процесс рано или поздно завершится, поскольку расстояние между $F(q_a)$ и $F(q_b)$ должно увеличиваться с ростом расстояния между q_a и q_b. Если этот процесс никогда не остановится, то F не может быть автогомеоморфизмом $\mathbf{R}$, и требование $\mathcal{R}_{ie}$ удовлетворено автоматически без усилий с нашей стороны. Похожим образом, если $\Phi_e(\bar{a})(0)\uparrow$ или $\Phi_e(\bar{b})(0)\uparrow$, то Φ_e заведомо не может быть реализацией всюду определённой функции, и требование $\mathcal{R}_{ie}$ удовлетворено.

Следует заметить, что единственной ролью второго последователя q_b является предоставление нам информации о том, что расстояние между $F(q_a)$ и $F(q_d)$ достаточно большое, даже не зная самого q_d, что позволяет нам диагонализировать против Φ_e, всегда выбирая при этом свежие отрезки J_m из ещё не задействованной в конструкции области в $\mathbf{R}$. Поэтому мы всегда можем вычислить модуль непрерывности отображения Γ_{J_m} равномерно по m, что в итоге позволит нам увидеть, что метрика ρ_R c-сводится ко всем метрикам ρ_i, и тем самым требование $\mathcal{S}$ удовлетворено.

3.1.3 Взаимодействие стратегий

Если вернуться к реальной картине событий, то метрики ρ_j не будут всё время выглядеть как ρ_R, а будут изменяться под действием своих собственных отображений Γ, которые, в свою очередь, могут сделать точки q_u и $F(q_d)$ близкими в метрике ρ_j, повреждая таким образом требование $\mathcal{R}_{ie}$. Мы разрешаем эти проблемы использованием приоритета требований так, чтобы часть вещественной прямой, использованная в конструкции на данный момент, была запрещена к изменению стратегиями для требований с меньшим приоритетом. Таким образом мы сможем проследить, чтобы расстояние между q_u и $F(q_d)$ оставалось достаточно большим и могло быть нарушено только требованием с большим приоритетом. Зафиксируем нумерацию $(\mathcal{R}_n)_{n\in\omega}$ требований $\mathcal{R}_{ie}$, $i, e \in \omega$. Требование $\mathcal{R}_n$ имеет больший приоритет, чем $\mathcal{R}_m$, если $n < m$.

Когда требование действует на каком-то шаге, оно инициализирует все требования с меньшим приоритетом, отменяя их текущих свидетелей и заставляя их выбрать своих свидетелей заново. Напомним, что каждому требованию нужно выбрать двоих свидетелей. Если $\mathcal{R}_n$ не имеет свидетелей в данный момент, назначим в качестве первого свидетеля *свежее большое* число (т. е. превосходящее все числа, использованные в конструкции до сих пор) $\mathbf{a}_k = q_a$. Как только $\Phi_e(\bar{a})(0)\downarrow= u$, мы можем назначить в качестве второго свидетеля число $\mathbf{a}_l = \mathbf{a}_{k+1} = q_b$

и запретить к изменению область, использованную в конструкции на данный момент, инициализировав все требования с меньшим приоритетом. Это будет означать, что никакое более слабое, чем $\mathcal{R}_n$, требование с этих пор не сможет приблизить к q_u никакую точку ближе, чем нам нужно. Следующим шагом убеждаемся, что расстояние между q_u и q_v будет достаточно большим, где $v = \Phi_e(\bar{b})(0)$, когда это вычисление остановится. Если это расстояние недостаточно большое, переопределим второго свидетеля, взяв в качестве него число $\mathbf{a}_{l+1}$, и повторим процесс. Как только будет получено достаточно большое расстояние между образами двоих свидетелей, стратегия наконец остановится, и мы определим отображение Γ_{q_a,J_m}, где J_m — свежий отрезок, т. е., находящийся справа от всех чисел, использованных до сих пор в конструкции.

Пока требование $\mathcal{R}_n$ ищет подходящего второго свидетеля, требование с меньшим приоритетом может успешно завершить свою стратегию и определить отображение Γ_s. Если после этого требование $\mathcal{R}_n$ всё-таки найдёт второго свидетеля с требуемыми свойствами и также завершит свою стратегию, определив отображение Γ_t, то Γ_t должно будет "соединить" свежий интервал J_m с первым свидетелем q_a требования $\mathcal{R}_n$ через ту область, где Γ_s соединяем свой отрезок со своим свидетелем. Для того, чтобы образы отображений Γ_s и Γ_t не пересекались друг с другом, мы помещаем их в различные области $\mathbf{R}^3$: вспомним, что $\Gamma_s(x) = (y, r, \theta) \in \mathbf{R}^3$, где угловая координата $\theta = \frac{s}{s+1}\pi$ уникальна для каждого Γ_s. Таким образом, образы различных отображений Γ не пересекаются друг с другом, а потому отображения $\gamma_i \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ инъективны.

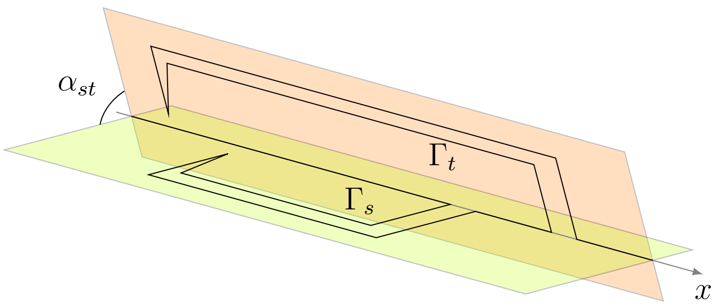

Рис. 3: Склеиваем отображения Γ_s и Γ_t. $\alpha_{st} = |\frac{s}{s+1} - \frac{t}{t+1}|\pi$ — угол между плоскостями, содержащими образы отображений Γ_s и Γ_t.

3.1.4 Конструкция

Этап $s = 0$. Положим $A_0 = \varnothing$, $\gamma_{i,0}(x) = (x, 0, 0)$ для всех i.

Этап $s+1$. Положим $A_{s+1} = A_s \cup \{q_s\}$. Пусть $n = \langle s+1 \rangle_1$. Работаем с требованием $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{ie}$, если оно не выполнено в данный момент. Пусть $\mathbf{a}_k = q_a$ — первый свидетель $\mathcal{R}_n$ (если у $\mathcal{R}_n$ нет первого свидетеля, назначим в качестве него свежее большое число $\mathbf{a}_k = 10k$). Если у $\mathcal{R}_n$ нет второго свидетеля, идём на подэтап 0. Иначе, идём на подэтап 1.

Подэтап 0. Рассмотрим два возможных случая:

1. $\Phi_{e,s+1}(\bar{a})(0)\uparrow$. В этом случае завершим этап $s+1$.

2. $\Phi_{e,s+1}(\bar{a})(0)\downarrow = u$. Говорим, что $\mathcal{R}_n$ *действует на подэтапе* 0. Инициализируем все требования с меньшим приоритетом. Определим $C_n = \min(-2, q_u - 2)$ и $D_n = \max(q_u + 2, D) + 1$, где D — правый конец наиболее правого отрезка J, использованного в конструкции до сих пор. Назначим второго свидетеля $\mathbf{a}_l = \mathbf{a}_{k+1}$ и пройдём на подэтап 1.

Подэтап 1. $\mathcal{R}_n$ назначило второго свидетеля $\mathbf{a}_l = q_b$. Найдём первую из следующих возможностей, имеющую место в данный момент:

1. Если $\Phi_{e,s+1}(\bar{b})(0)\uparrow$, завершим этап $s+1$.

2. Если $\Phi_{e,s+1}(\bar{b})(0)\downarrow = v$ и ($q_v < C_n$ или $q_v > D_n$), говорим, что $\mathcal{R}_n$ действует на подэтапе 1. Инициализируем все требования с меньшим приоритетом. Выберем свежий отрезок J_m и определим отображение $\Gamma_{q_a, J_m, 2^{-p+1}, s+1}$, где $p = \varphi_{e,s+1}(\bar{a})(0)$. Завершим этап $s+1$.

3. Иначе (т. е. когда $\Phi_{e,s+1}(\bar{b})(0)\downarrow$, но второе условие не выполнено), переопределим второго свидетеля, выбрав число $\mathbf{a}_{l+1}$, и завершим этап $s+1$.

В конце этапа, если $\mathcal{R}_n$ действовало на подэтапе 1, положим $\gamma_{i,s+1} = \gamma_{i,s} \uplus \Gamma_{s+1}$, иначе положим $\gamma_{i,s+1} = \gamma_{i,s}$. Положим $\gamma_{j,s+1} = \gamma_{j,s}$ для $j \neq i$.

3.1.5 Верификация

Нам нужно показать, что метрики ρ_i являются вычислимыми и индуцируют стандартную топологию на $\mathbf{R}$, а также доказать, что все требования выполнены. Для последнего нам понадобится стандартный метод приоритета с конечными нарушениями.

Прежде всего отметим, что поточечный предел $\gamma_i(x) = \lim_s \gamma_{i,s}(x)$ существует для любого i, т. к. для каждого $x \in \mathbf{R}$ найдётся не более чем один шаг s, такой что $\gamma_{i,s+1}(x) \neq \gamma_{i,s}(x)$. Также легко видеть, что метрики ρ_i вычислимы: для того, чтобы вычислить $\rho_i(q_m, q_n)$, достаточно дождаться этапа $s = \max(m, n) + 1$, на котором оба числа q_m и q_n содержатся в множестве A_s. Начиная с этого шага, расстояния между этими точками не будут изменяться, поэтому

$$\rho_i(q_m, q_n) = \rho_{i,s}(q_m, q_n) = \|\gamma_{i,s}(q_m) - \gamma_{i,s}(q_n)\|_{\mathbf{R}^3}$$

есть вычислимое вещественное число, как видно из конструкции.

Лемма 3.1. *Для всякого i, каждый ρ_i-шар ограничен в $(\mathbf{R}, \rho_R)$. Более точно, для любых $x, y, \varepsilon \in \mathbf{R}$ верно следующее: $\rho_i(x, y) \leqslant \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\min(x - \varepsilon, -\varepsilon) \leqslant y < \max(x + 1 + \varepsilon, D)$, где D — правый конец наиболее правого отрезка J, такого что отображение $\Gamma_{z,J}$ с $z < x + 1 + \varepsilon$ было определено в конструкции метрики ρ_i (т. е. на некотором шаге s мы определили $\gamma_{i,s+1} = \gamma_{i,s} \uplus \Gamma_{z,J}$).*

Доказательство. Зафиксируем $i \in \omega$ и $x, y \in \mathbf{R}$. Имеем $\gamma_i(x) = (x', r_0, \theta_0), \gamma_i(y) = (y', r_1, \theta_1) \in \mathbf{R}^3$ и $\rho_i(x, y) = \|\gamma_i(x) - \gamma_i(y)\|_{\mathbf{R}^3} \geqslant |x' - y'|$, поэтому $\rho_i(x, y) \leqslant \varepsilon$ только если $|x' - y'| \leqslant \varepsilon$. Разобьём доказательство на несколько случаев.

1. $x, y < 0$. Тогда $x' = x$ и $y' = y$, т. к. множество отрицательных вещественных чисел не задействовано в конструкции, поэтому $|x' - y'| = |x - y| \leqslant \varepsilon$, если и только если $x - \varepsilon \leqslant y \leqslant x + \varepsilon$.

2. $x < 0$ и $y \geqslant 0$. Нужно рассмотреть следующие два подслучая.

   (a) $y' \geqslant y$. Тогда $|x' - y'| = |x - y'| \geqslant |x - y|$ и поэтому $|x' - y'| \leqslant \varepsilon$ только если $|x - y| \leqslant \varepsilon$.

   (b) $y' < y$. Заметим, что $y' \neq y$, только если $\gamma_i(y) = \Gamma_{z,J}(y) = (y', r_1, \theta_1)$ для отображения $\Gamma_{z,J}$, определённого в конструкции, такого, что $y \in J$. По определению $\Gamma_{z,J}$ имеем $z \leqslant y'$, поэтому $|x' - y'| = |x - y'| \leqslant \varepsilon$ только когда $z \leqslant x + \varepsilon$.

3. $x \geqslant 0$ и $y < 0$. Рассуждаем так же, как и в предыдущем случае. Если $x' \geqslant x$, то $|x' - y'| = |x' - y| \leqslant \varepsilon$ только если $|x - y| \leqslant \varepsilon$. Если $x' < x$, заметим, что в силу выбора свидетеля $\mathbf{a}_k$ число x' должно быть больше или равно нуля, поэтому соотношение $|x' - y| \leqslant \varepsilon$ верно только в случае $y \geqslant -\varepsilon$.

4. $x, y \geqslant 0$. Снова разбиваем доказательство на подслучаи.

   (a) $x' \leqslant x$ и $y' \geqslant y$. Тогда $|x' - y'| \leqslant \varepsilon$ только если $y \leqslant y' \leqslant x' + \varepsilon \leqslant x + \varepsilon$.

   (b) $x' \leqslant x$ и $y' < y$. Тогда $y \in J$ для отрезка J, использованного в конструкции для определения отображения $\Gamma_{z,J}$, и $|x' - y'| \leqslant \varepsilon$ только если $z \leqslant x' + \varepsilon \leqslant x + \varepsilon$.

   (c) $x' > x$. В этом случае, очевидно, x принадлежит отрезку J_*, использованному в конструкции; более точно, $x \in J_*^4$ или $x \in J_*^5$, где $J_*^0, \ldots, J_*^5$ — разбиение J_* на

6 подотрезков, каждый длины $1/3$. Поэтому $x' \leqslant x + 2/3 < x + 1$ и, как в двух предыдущих подслучаях, $|x' - y'| < \varepsilon$ только если $y \leqslant x' + \varepsilon < x + 1 + \varepsilon$ или $y \in J$, где отображение $\Gamma_{z,J}$ таково, что $z \leqslant x' + \varepsilon < x + 1 + \varepsilon$.

Собрав все эти оценки в одну, мы получаем неравенство из утверждения леммы. Поскольку найдётся лишь конечное число свидетелей $z < x + 1 + \varepsilon$, лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Для любого i метрика ρ_i полна и индуцирует стандартную топологию на* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Зафиксируем $i \in \omega$. Мы уже отмечали, что отображение $\gamma_i\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ инъективно; легко понять, что оно непрерывно. Чтобы показать, что ρ_i и ρ_R индуцируют одну и ту же топологию на $\mathbf{R}$, заметим сначала, что тождественное отображение $\mathrm{id}\colon (\mathbf{R}, \rho_R) \to (\mathbf{R}, \rho_i)$ непрерывно в силу непрерывности γ_i, так что любое открытое в $(\mathbf{R}, \rho_i)$ множество открыто в $(\mathbf{R}, \rho_R)$. С другой стороны, нетрудно видеть, что для любого $x \in \mathbf{R}$ найдётся $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ открытый ρ_i-шар $B(x, \varepsilon)$ совпадает с открытым интервалом в $\mathbf{R}$. Поэтому каждое множество, открытое в $(\mathbf{R}, \rho_R)$, открыто в $(\mathbf{R}, \rho_i)$, и индуцированные топологии совпадают.

Осталось показать, что ρ_i полна. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ в $(\mathbf{R}, \rho_i)$. Существует $\varepsilon > 0$, такое что $\rho_i(x_0, x_n) < \varepsilon$ для всех n. Поскольку ρ_i-шары ограничены в метрике $(\mathbf{R}, \rho_R)$, то существует подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$, сходящаяся в $(\mathbf{R}, \rho_R)$. По доказанному выше, эта последовательность сходится и в $(\mathbf{R}, \rho_i)$, а значит, и сама $(x_n)_{n\in\omega}$ сходится в $(\mathbf{R}, \rho_i)$. □

Лемма 3.3. *$\rho_R \leq_c \rho_i$ для всех i.*

Доказательство. Понятно, что всякое определённое в конструкции отображение Γ_{J_m} равномерно непрерывно. Более того, модуль непрерывности Γ_{J_m} вычислим равномерно по m. Точнее говоря, существует вычислимая функция $\mathrm{mod}\colon \omega^2 \to \omega$, такая что для каждого m унарная функция $\mathrm{mod}_m(n) = \mathrm{mod}(m, n)$ есть модуль непрерывности отображения Γ_{J_m}, если Γ_{J_m} было определено в конструкции, и совпадает с тождественной функцией id_ω, иначе.

Действительно, по данному m мы можем ответить на вопрос, был ли J_m использован в конструкции для определения отображения Γ_{J_m}: это может произойти не позднее шага t, на котором множество $A_t \cap J_m$ становится непустым. Если J_m не был использован, положим $\mathrm{mod}(m, n) = n$ для всех n. Иначе, если Γ_{J_m} было определено, мы можем узнать параметры a, p и s отображения $\Gamma_{J_m} = \Gamma_{q_a, J_m, 2^{-p+1}, s}$. Используя тот факт, что Γ_{J_m} кусочно линейно, можем положить

$$\mathrm{mod}(m, n) = \max_{k=0,\ldots,5} \mathrm{mod}(m, n, k),$$

где $\mathrm{mod}(m,n,k)$ — модуль непрерывности линейной функции $\Gamma_{J_m} \restriction J_m^k$, который можно вычислить, зная q_a, J_m и 2^{-p+1}.

Строим тьюрингов функционал Φ, осуществляющий сведение ρ_R к ρ_i. Пусть $f \in \omega^\omega$ — некоторое ρ_R-имя для точки x. Мы хотим преобразовать f в ρ_i-имя $\Phi(f)$ для x. Рассмотрим две возможные ситуации:

1. $\rho_R(q_{f(0)}, J_m) < 1$ для отрезка J_m, использованного в конструкции для определения отображения Γ_{J_m}. В этом случае используем модуль непрерывности Γ_{J_m} для того, чтобы построить подпоследовательность последовательности $(q_{f(n)})_{n\in\omega}$, быстро сходящуюся к x в метрике ρ_i.

2. Иначе. В этом случае мы знаем, что x лежит в области в $\mathbf{R}$, на которой конструкция не осуществляла никаких построений. В этой области ρ_i локально совпадает с ρ_R и f также является ρ_i-именем для x.

Функционал $\Phi\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ может быть определён следующим образом:

$$\Phi(f) = \begin{cases} f \circ \mathrm{mod}_m, & \text{если найдётся } m\text{, такое что } \rho_R(q_{f(0)}, J_m) < 1, \\ f, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, Φ является тьюринговым функционалом, и если $\rho_R(f) = x$, то $\rho_i(\Phi(f)) = x$ для всех i. □

Лемма 3.4. *Любое требование инициализируется лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим по индукции этап конструкции, после которого требование $\mathcal{R}_n$ не инициализируется. После этого этапа оно может действовать и инициализировать $\mathcal{R}_{n+1}$ самое большее два раза. □

Лемма 3.5. *Если $i \neq j$, то $\rho_i \not\leq_{ch} \rho_j$.*

Доказательство. Предположим, что $\rho_i \leq_{ch} \rho_j$ посредством функционала Φ_e. Сначала заметим, что для каждого $a \in \omega$ $\Phi_e(\bar{a})(0)\downarrow$. Мы знаем, что ρ_j-шары ограничены относительно стандартной метрики. Поскольку Phi_e вычисляет автогомеоморфизм F пространства $\mathbf{R}$, мы докажем, что Φ_e *неограничен*, т. е.

$$\forall b_0\, \exists b_1\, \forall b\; \big((q_{b_0} > 0\,\&\, q_b > q_{b_1}) \Rightarrow\; q_{\Phi_e(\bar{b})(0)} \notin [-q_{b_0}, q_{b_0}]\big).$$

Действительно, зафиксируем b_0 и рассмотрим замкнутый отрезок $[-q_{b_0}, q_{b_0}]$. В силу компактности, этот отрезок содержится в некотором ρ_j-шаре $B(x,\varepsilon)$. Рассмотрим замкнутый шар $B = B[x, 1+\varepsilon]$. По леммам 3.1 и 3.2 этот шар компактен, а значит, множество $F^{-1}(B)$ также компактно. Рассмотрим верхнюю грань q_{b_1} множества $F^{-1}(B)$, тогда $F(q_b) \notin B$ для всех $q_b > q_{b_1}$, поэтому для всех $y \in [-q_{b_0}, q_{b_0}]$

$$F(q_b) \notin B \;\Rightarrow\; \rho_j(F(q_b), y) \geqslant |\rho_j(F(q_b), x) - \rho_j(x, y)| > 1 + \varepsilon - \varepsilon = 1,$$
$$\rho_j(y, q_{\Phi_e(\bar{b})(0)}) \geqslant |\rho_j(y, F(q_b)) - \rho_j(F(q_b), q_{\Phi_e(\bar{b})(0)})| > 1 - 1 = 0,$$

что означает, что $q_{\Phi_e(\bar{b})(0)} \neq y$, и наше утверждение доказано.

По предыдущей лемме существует этап s, после которого требование $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{ie}$ не инициализируется и его первый свидетель q_a более не меняется. Пусть $s_0 > s$ — этап, на котором $\mathcal{R}_n$ действует на подэтапе 0 и назначает второго свидетеля q_b. $\mathcal{R}_n$-стратегия посещает лишь подэтап 1 после этапа s_0, поэтому величины C_n и D_n не меняются, начиная с этого этапа. Поскольку Φ_e неограничен, на некотором шаге $s_1 \geqslant s_0$ второй свидетель требования $\mathcal{R}_n$ будет достаточно большим для того, чтобы это требование подействовало на подэтапе 1, определяя отображение $\Gamma_{q_a,J}$. Рассмотрим середину q_d отрезка J. Из определения $\Gamma_{q_a,J}$ имеем $\rho_i(q_a, q_d) = 2^{-p+1}$, где $p = \varphi_{e,s_1}(\bar{a})(0)$, поэтому $a^p\bar{d}$ является ρ_i-именем для q_d, таким что $\Phi_e(a^p\bar{d})(0) = \Phi_e(\bar{a})(0) = u$. Осталось показать, что $\Phi_e(a^p\bar{d})$ не является ρ_j-именем для $F(q_d)$, т. е. $\rho_j(q_u, F(q_d)) > 1$.

Заметим, что после шага s_0 никакое требование, кроме $\mathcal{R}_{ie}$, не может определить отображения Γ_z с $z < D_n$: все требования с большим приоритетом не действуют после шага s, а на шаге s_0 мы инициализируем все требования с меньшим приоритетом, заставляя их выбрать новых первых свидетелей, больших чем D_n. Отсюда по лемме 3.1 заключаем, что для всех $j \neq i$ верно

$$\rho_j(x, q_u) \leqslant 1 \;\Rightarrow\; C_n + 1 \leqslant x < D_n - 1.$$

На этапе s_1 имеем $\Phi_{e,s_1}(\bar{b})(0) \downarrow= v$, $q_v \notin [C_n, D_n]$. Поскольку $\rho_j(q_v, F(q_b)) \leqslant 1$ и никакое требование не может определить отображения Γ_z с $z < D_n$, легко видеть, что $F(q_b) \notin [C_n + 1, D_n - 1]$. Т. к. $q_a < q_b < q_d$ и F монотонно, получаем $F(q_d) \notin [C_n + 1, D_n - 1]$, поэтому $\rho_j(F(q_d), q_u) > 1$, и мы приходим к противоречию. □

3.2 Вложение частичных порядков и решёток в структуру степеней

3.2.1 Обобщённая конструкция

Зафиксируем множество $A \subseteq \omega$. Определим отображение $\gamma_A \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ по шагам. Положим $\gamma_{A,0}(x) = (x, 0, 0)$. На шаге $s+1$ конструкции из теоремы 3.1, если мы полагаем $\gamma_{i,s+1} = \gamma_{i,s} \uplus \Gamma$ для какого-то $i \in A$, положим также $\gamma_{A,s+1} = \gamma_{A,s} \uplus \Gamma$, иначе положим $\gamma_{A,s+1} = \gamma_{A,s}$. Другими словами, γ_A включает в себя все отображения Γ, определённые в конструкциях метрик ρ_i для всех $i \in A$:

$$\gamma_A(x) = \biguplus_{i \in A} \gamma_i(x) = \begin{cases} \Gamma_{J_m}(x), & \text{если } x \in J_m \text{ для отрезка } J_m, \text{ использованного в} \\ & \text{конструкции } \rho_i \text{ для } i \in A, \\ (x, 0, 0), & \text{если } x \text{ не лежит ни в каком отрезке } J_m, \text{ использованном в} \\ & \text{конструкции } \rho_i \text{ для } i \in A. \end{cases}$$

Определим метрику $\rho_A(x, y) = \|\gamma_A(x) - \gamma_A(y)\|_{\mathbf{R}^3}$ на $\mathbf{R}$.

Лемма 3.6. *Метрика ρ_A вычислима тогда и только тогда, когда множество A вычислимо.*

Доказательство. Импликация “если” тривиальна. Для доказательства импликации “только если” предположим, что метрика ρ_A вычислима. Мы хотим показать, что множество A вычислимо. Зафиксируем e, такое что $\Phi_e = \mathrm{id}_{\omega^\omega}$. В частности, Φ_e является (ρ_R, ρ_R)-реализацией тождественного отображения $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$. Используя этот факт и доказательство леммы 3.5 (Φ_e неограничен), видим, что для каждого i найдётся этап s конструкции из теоремы 3.1, на котором требование $\mathcal{R}_{ie}$ действует на подэтапе 1, определяя отображение $\Gamma_{q_a, J}$. Для того чтобы определить, верно ли, что $i \in A$, дождёмся этого шага s. Пусть q_d — середина отрезка J. Теперь $i \in A$, если и только если $\rho_A(q_a, q_d) < 2$. □

Легко проверить, что леммы 3.1 и 3.2 выполнены для всех метрик ρ_A, $A \subseteq \omega$. Если $A = \omega - \{i\}$, будем для удобства писать $\rho_{\neq i}$ вместо $\rho_{\omega - \{i\}}$. Заметим, что доказательство леммы 3.5 на самом деле даёт нам, что $\rho_i \nleq_{ch} \rho_{\neq i}$, как показано ниже.

Лемма 3.7. *Для всякого i, $\rho_i \nleq_{ch} \rho_{\neq i}$.*

Доказательство. Используем обозначения леммы 3.5. Если функционал Φ_e ch-сводит ρ_i к $\rho_{\neq i}$, то он неограничен. Тогда требование $\mathcal{R}_n$ подействует на этапах s_0 и s_1 и таким образом будет выполнено. Запрет на изменение области $[C_n, D_n]$ после этапа s_0 равномерен для всей конструкции, поэтому оставшаяся часть доказательства не зависит от j и верна для $\rho_{\neq i}$ вместо ρ_j. Поэтому $\rho_{\neq i}(q_u, F(q_d)) > 1$, и имя $a^p\bar{d}$ точно так же, как и раньше, нельзя посредством Φ_e преобразовать в подходящее $\rho_{\neq i}$-имя для образа q_d, что и требовалось. □

Лемма 3.8. *Если $A \subseteq B$, то $\rho_A \leq_c \rho_B$.*

Доказательство. Зафиксируем множества $A \subseteq B$. Рассмотрим произвольное ρ_A-имя f для произвольного $x \in \mathbf{R}$. Мы будем пытаться угадать расположение всех элементов последовательности $q_{f(n)}$, зная лишь позицию первого элемента $q_{f(0)}$, и получим с помощью этого некоторое ρ_B-имя для x. Из определения имени Коши, выбора свидетелей $\mathbf{a}_k$ и отрезков J_m и определения отображения $\Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m}$ (см. рис. 1) мы видим, что выполняется одна и только одна из следующих возможностей:

1. $\rho_R(q_{f(0)}, J_m) < 1$ для отрезка J_m, использованного в конструкции метрики ρ_A для определения отображения $\Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m}$ и:

   (a) $q_{f(0)} \in J_m$ и найдутся $n \in \omega$ и $p \neq m$, такие что $q_{f(n)} \in J_p$. Эта ситуация возможна лишь тогда, когда J_p был использован в конструкции ρ_A для определения отображения Γ_{J_p} и угол между плоскостями, содержащими образы отображений $\Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m}$ и Γ_{J_p}, достаточно маленький, чтобы элемент $q_{f(n)}$ "спрыгнул" на J_p (см. рис. 3).

   (b) $q_{f(0)} \in J_m$ и найдётся $n \in \omega$, такое что $\rho_R(q_{f(n)}, \mathbf{a}_k) < 1.25$, т. е. $q_{f(n)}$ "спрыгивает" близко к $\mathbf{a}_k$.

   (c) Элементы $q_{f(n)}$ не "спрыгивают" с отрезка J_m, т. е. $\rho_R(q_{f(n)}, J_m) < 2$ для всех n.

   Поскольку $A \subseteq B$, а значит, каждое отображение Γ, определённое в конструкции ρ_A, также определено в конструкции ρ_B, во всех этих подслучаях мы можем быть уверены, что $\gamma_A(q_{f(n)}) = \gamma_B(q_{f(n)})$ для всех n, поэтому f также является ρ_B-именем для x.

2. $\rho_R(q_{f(0)}, \mathbf{a}_k) < 1.25$ для свидетеля $\mathbf{a}_k$, использованного в конструкции ρ_A для определения отображения $\Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m}$. В этом случае, так же как и ранее, возможна ситуация, в которой некоторые элементы $(q_{f(n)})_{n\in\omega}$ могут спрыгнуть на J_m, но тем не менее даже в таком случае верно $\gamma_A(q_{f(n)}) = \gamma_B(q_{f(n)})$ для всех n, поэтому f также является ρ_B-именем для x.

3. Иначе, т. е. $\rho_R(q_{f(0)}, \mathbf{a}_k) \geqslant 1.25$ и $\rho_R(q_{f(0)}, J_m) \geqslant 1$ для всех последователей $\mathbf{a}_k$ и интервалов J_m, использованных в конструкции ρ_A. Тогда все элементы $q_{f(n)}$ лежат в области в $\mathbf{R}$ не задействованной в конструции ρ_A, т. е. $\gamma_A(q_{f(n)}) = (q_{f(n)}, 0, 0)$, поэтому f является ρ_R-именем. Как и в лемме 3.3, отсюда мы можем получить ρ_B-имя для x с помощью функции $\mathrm{mod}(m, n)$.

Теперь легко видеть, что функционал Φ из доказательства леммы 3.3 сводит ρ_A к ρ_B. Здесь мы снова используем соглашение $\mathrm{mod}_m(n) \geqslant n$, поэтому всякий раз, когда $\rho_B(f) = x$, также будет верно $\rho_B(f \circ \mathrm{mod}_m) = x$. □

Напомним [56], что последовательность множеств $A_i \subseteq \omega$ называется *вычислимо независимой*, если для любого i $A_i \not\leqslant_T \bigoplus_{j\neq i} A_j$. Из существования вычислимо независимой последовательности множеств следует, что любой счётный частичный порядок вкладывается в упорядочение тьюринговых степеней. С помощью конструкции Фридберга–Мучника можно получить вычилсимо независимую последовательность в. п. множеств и вложить любой счётный частичный порядок в упорядочение в. п. тьюринговых степеней. Метрики ρ_i из теоремы 3.1 обладают свойством, похожим на вычислимую независимость множеств, в том смысле, что для всех $i \neq j$ верно $\rho_j \leq_{ch} \rho_{\neq i}$ и $\rho_i \not\leq_{ch} \rho_{\neq i}$. Используя этот факт, в теореме 3.2 мы докажем, что любой счётный частичный порядок может быть вложен в ch-степени вычислимых метрик.

Лемма 3.9. *Если $A \not\subseteq B$, то $\rho_A \not\leq_{ch} \rho_B$.*

Доказательство. Возьмём произвольное $i \in A - B$. Предположим, что $\rho_A \leq_{ch} \rho_B$. Тогда $\rho_i \leq_c \rho_A \leq_{ch} \rho_B \leq_c \rho_{\neq i}$, и мы приходим к противоречию. □

Теорема 3.2. *Верны следующие утверждения:*

1. *Упорядочение $(P(\omega), \subseteq)$ множества всех подмножеств ω вложимо в упорядочение ch-степеней вещественных метрик выше ρ_R.*

2. *Существует в точности $2^{\aleph_0}$ различных ch-степеней метрик.*

3. *Существует в точности $2^{\aleph_0}$ различных c-степеней метрик.*

4. *Любой счётный частичный порядок вложим в упорядочение ch-степеней вычислимых метрик над ρ_R.*

Доказательство. (1) следует из лемм 3.8 и 3.9.

(2): По (1), существует по крайней мере $2^{\aleph_0}$ ch-степеней метрик. С другой стороны, существует в точности континуум различных непрерывных вещественных функций двух переменных, в частности, множество всех метрик на вещественной прямой имеет мощность в точности континуум.

(3): Всякая c-степень содержится в некоторой ch-степени, так что существует как минимум $2^{\aleph_0}$ c-степеней метрик.

(4): Рассмотрим вычислимый счётно-универсальный частичный порядок $\mathcal{P} = (\omega, \leqslant_P)$ [55]. Т. к. $\mathcal{P}$ вычислим, то множества $A_i = \{k \in \omega \mid k \leqslant_P i\}$ равномерно вычислимы и метрики ρ_{A_i} вычислимы. Тогда для всех $i, j \in \omega$

$$i \leqslant_P j \;\Leftrightarrow\; A_i \subseteq A_j \;\Leftrightarrow\; \rho_{A_i} \leq_{ch} \rho_{A_j}.$$ □

3.2.2 Вложение дистрибутивных решёток

Ещё одно свойство нашей обобщённой конструкции состоит в том, что отображение $A \mapsto \rho_A$ сохраняет точные верхние и нижние грани множеств A и B в упорядочении $(P(\omega), \subseteq)$ для вычислимых множеств A и B, иначе говоря, существует изоморфное вложение решётки вычислимых подмножеств ω в упорядочение c-степеней метрик. Более формально, имеет место следующий результат.

Лемма 3.10. *Если $A, B \subseteq \omega$ — вычислимые множества, то $\deg_c(\rho_{A\cup B}) = \deg_c(\rho_A) \vee \deg_c(\rho_B)$ и $\deg_c(\rho_{A\cap B}) = \deg_c(\rho_A) \wedge \deg_c(\rho_B)$ в решётке c-степеней представлений $\mathbf{R}$. (Напомним, что в данном случае символом ρ мы обозначаем представление Коши для метрики ρ)*

Доказательство. Очевидно, $\rho_{A\cap B} \leq_c \rho_A \leq_c \rho_{A\cup B}$ (аналогично для ρ_B).

Покажем, что c-степень $\rho_{A\cup B}$ является наименьшей верхней гранью степеней ρ_A и ρ_B. Для этого рассмотрим произвольное представление δ для $\mathbf{R}$ и функционалы Φ_e и Φ_z, c-сводящие ρ_A и ρ_B к δ, соответственно. Построим тьюрингов функционал Φ, сводящий $\rho_{A\cup B}$ к δ. Пусть f — $\rho_{A\cup B}$-имя для точки x. Докажем, что по f можно эффективным образом построить некоторое ρ_A-имя или ρ_B-имя и затем, с помощью соответственно Φ_e или Φ_z, по этому имени получить δ-имя для x.

Рассмотрим следующие три ситуации:

1. $\rho_R(q_{f(0)}, J_m) < 1$ для отрезка J_m, использованного в конструкции $\rho_{A\cup B}$ для определения отображения $\Gamma_{\mathbf{a}_k, J_m}$, и:

   (a) $q_{f(0)} \in J_m$ и найдутся $n \in \omega$ и $p \neq m$, такие что $q_{f(n)} \in J_p$.

   (b) $q_{f(0)} \in J_m$ и найдётся $n \in \omega$, такое что $\rho_R(q_{f(n)}, \mathbf{a}_k) < 1.25$.

   (c) $\rho_R(q_{f(n)}, J_m) < 2$ для всех n.

2. $\rho_R(q_{f(0)}, \mathbf{a}_k) < 1.25$ для свидетеля $\mathbf{a}_k$, использованного в конструкции $\rho_{A\cup B}$ для определения отображения $\Gamma_{\mathbf{a}_k, J_m}$.

3. $\rho_R(q_{f(0)}, \mathbf{a}_k) \geqslant 1.25$ и $\rho_R(q_{f(0)}, J_m) \geqslant 1$ для всех свидетелей $\mathbf{a}_k$ и отрезков J_m, использованных в конструкции $\rho_{A\cup B}$.

Рассмотрим первый случай подробнее. Поскольку метрика $\rho_{A\cup B}$ индуцирует стандартную топологию на $\mathbf{R}$ и последовательность $(q_{f(n)})_{n\in\omega}$ сходится в этой метрике, понятно, что прыжки между отрезками (случай (1a)) рано или поздно должны прекратиться, т. е.,

$$\exists N, p \forall n, l \left(n \geqslant N \; \& \; l \neq p \Rightarrow q_{f(n)} \notin J_l\right).$$

Эти N и p могут быть найдены эффективно следующим образом. Рассмотрим шаг s, такой что $\Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m} = \Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m,s}$. Вспомним, что угол между плоскостями, содержащими образы отображений $\Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m,s}$ и $\Gamma_{J_l,t}$, равен $\alpha_{st} = |\frac{t}{t+1} - \frac{s}{s+1}|\pi$, и для фиксированного s его величина принимает минимальное значение при $t = s+1$. Отсюда понятно, что

$$\rho_{A\cup B}(J_m, J_l) = \inf_{x\in J_m, y\in J_l} \|\Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m,s}(x) - \Gamma_{J_l,t}(y)\|_{\mathbf{R}^3} \geqslant M_s = 2\sin\left(\tfrac{s+1}{s+2} - \tfrac{s}{s+1}\right)\pi.$$

Зафиксируем N_0, такое что $2^{-N_0} < M_s$. Если $q_{f(N_0)} \in J_m$, то и $q_{f(n)} \in J_m$ для всех $n > N_0$ из неравенства выше, и мы можем завершить алгоритм, выдав значения $N = N_0$ и $p = m$. Если $q_{f(N_0)} \in J_l$, где $l \neq m$, то для некоторого t отображение $\Gamma_{J_l,t}$ должно быть определено в конструкции, и мы можем повторить процесс для J_l, т. е. найти $N_1 > N_0$ со свойством $2^{-N_1} < M_t$, тогда при $n > N_1$ элементы $q_{f(n)}$ не смогут спрыгнуть с отрезка J_l при условии $q_{f(N_1)} \in J_l$, и так далее. Этот процесс рано или поздно завершится, и в конце мы получим подходящие N и p.

Во втором случае, похожим образом, мы всегда можем понять, было ли отображение$\Gamma_{\mathbf{a}_k,J_m}$ определено в конструкции ρ_A или ρ_B. Тогда $\rho_A(f) = x$ или $\rho_B(f) = x$, соответственно, и $\delta(\Phi_e(f)) = x$ или $\delta(\Phi_z(f)) = x$, соответственно.

Наконец, в третьем случае $\rho_A(f) = \rho_B(f) = x$, поэтому $\delta(\Phi_e(f)) = x$.

Мы показали, что по всякому $\rho_{A\cup B}$-имени можно получить некоторое δ-имя для того же самого элемента эффективным образом, значит, $\rho_{A\cup B} \leq_c \delta$.

Похожим образом можно доказать, что c-степень $\rho_{A\cap B}$ есть наибольшая нижняя грань c-степеней ρ_A и ρ_B. Предположим, что δ — представление $\mathbf{R}$, c-сводимое к ρ_A и ρ_B посредством функционалов Φ_e и Φ_z, соответственно. По данному δ-имени для точки x с помощью функционалов Φ_e и Φ_z строим ρ_A-имя f и ρ_B-имя g для x. Покажем, что по этим именам можно построить и $\rho_{A\cap B}$-имя для x. Рассмотрим следующие ситуации:

1. $\rho_R(q_{f(0)}, J_m) < 1$, где J_m был использован в конструкции ρ_A. В этом случае ждём окончания описанных ранее “прыжков” для некоторых $N, p \in \omega$. Очевидно, отрезок J_p должен быть использован в конструкции ρ_A для определения отображения $\Gamma_{\mathbf{a}_{k'},J_p}$. Возможны следующие подслучаи:

   (a) $\Gamma_{\mathbf{a}_{k'},J_p}$ также было определено в конструкции ρ_B. Тогда $f \upharpoonright N$ является $\rho_{A\cap B}$-именем для x.

   (b) $\Gamma_{\mathbf{a}_{k'},J_p}$ не было определено в конструкции ρ_B. В этом случае заметим, что x лежит в области, не использованной в конструкции ρ_B, а потому g является одновременно ρ_B-и $\rho_{A\cap B}$-именем для x.

2. $\rho_R(q_{f(0)}, \mathbf{a}_k) < 1.25$, где $\mathbf{a}_k$ был использован в конструкции ρ_A. Снова возможны два подслучая:

   (a) $\mathbf{a}_k$ был также использован в конструкции ρ_B. Тогда f является $\rho_{A\cap B}$-именем для x.

   (b) $\mathbf{a}_k$ не был использован в конструкции ρ_B. Снова делаем вывод, что x принадлежит области, не деформированной конструкцией ρ_B, и g является $\rho_{A\cap B}$-именем для x.

3. $q_{f(0)}$ лежит в области, не использованной в конструкции ρ_A. В этом случае f является одновременно ρ_A-и $\rho_{A\cap B}$-именем для x.

Отсюда заключаем, что $\rho_{A\cap B}$-имя для x может быть получено эффективно из любого δ-имени, поэтому $\delta \leq_c \rho_{A\cap B}$, и лемма доказана. □

В качестве немедленного следствия получаем результат о вложимости счётной безатомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в структуру c-степеней вычислимых метрик с сохранением точных верхних и нижних граней. Похожим образом это было проделано для степеней Мучника в работе Биннса и Симпсона [16].

Теорема 3.3. *Следующие решётки вложимы в упорядочение c-степеней вычислимых метрик над ρ_R с сохранением точных верхних и нижних граней:*

1. *Булева алгебра вычислимых подмножеств ω;*

2. $\mathfrak{A}$*, счётная безатомная булева алгебра;*

3. *Любая счётная дистрибутивная решётка.*

Доказательство. (1): следует из предыдущей леммы.

(2): $\mathfrak{A}$ изоморфно вкладывается в булеву алгебру вычислимых подмножеств ω (фольклор; см. также [16], Теорема 4.7).

(3): всякая счётная дистрибутивная решётка вкладывается в $\mathfrak{A}$, см. например [16], Лемма 4.10. □

Глава 4. Полурешётка степеней вычислимых метрик

В данной главе мы исследуем свойства упорядочения $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ c-степеней вычислимых метрик на произвольном польском пространстве $\mathbf{X}$. В параграфе 4.1 мы показываем, что $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ образует нижнюю полурешётку относительно естественной операции: c-степень поточечного максимума двух метрик является точной нижней грань степеней этих метрик. Более того, $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ канонически вкладывается в решётку $\mathcal{D}_c(X)$ с сохранением точных нижних граней. В параграфе 4.2 по данной вычислимой метрике ρ на $\mathbf{X}$, относительно которой существует вычислимая предельная точка в $\mathbf{X}$, мы строим вычислимую метрику $\rho' \in M(\mathbf{X})$ со свойством $\rho' <_c \rho$. Таким образом, если в пространстве (X, ρ) есть вычислимая предельная точка, то степень $\deg_c(\rho)$ не является минимальной в $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$. Этот результат можно релятивизовать, получив, что, если пространство $\mathbf{X}$ содержит хотя бы одну предельную точку, то упорядочение $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ c-степеней всех метрик из $M(\mathbf{X})$ не содержит минимальных элементов и имеет мощность $2^{\aleph_0}$. Когда $\mathbf{X}$ не содержит предельных точек, т. е.дискретно, $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ содержит наименьший элемент (в частности, когда $\mathbf{X}$ конечно, $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ состоит из одной степени). В трёх последующих параграфах доказывается теорема 4.4, утверждающая, что, если $\rho \in M(\mathbf{X})$ — вычислимая метрика, относительно которой существует вычислимая предельная точка в $\mathbf{X}$, то существует вычислимая метрика $\widehat{\rho} \in M(\mathbf{X})$, такая что $\rho \not\leq_c d$ или $\widehat{\rho} \not\leq_c d$ для любой вычислимой метрики $d \in M(\mathbf{X})$. Таким образом, множество $\{\deg_c(\rho), \deg_c(\widehat{\rho})\}$ не имеет верхней грани в $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$, и упорядочение $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ не является направленным вверх. В параграфе 4.3 мы формулируем эту теорему, разбиваем доказательство на серию требований и разрабатываем стратегии для этих требований. Всякое требование выполняется с помощью небольшой деформации пространства (X, ρ). В параграфе 4.4 мы аналитически обосновываем, что каждая такая деформация сохраняет топологию $\mathbf{X}$. На самом деле, метрика на деформированном пространстве может быть выражена явными формулами через расстояния в метрике ρ, что позднее позволит нам показать, что эта деформированная метрика вычислима. Различные элементарные деформации можно собрать вместе, получив в результате метрику $\widehat{\rho}$, удовлетворяющую всем требованиям. В последнем параграфе мы записываем формальную конструкцию $\widehat{\rho}$ и показываем, что $\widehat{\rho}$ действительно вычислима и имеет все нужные нам свойства.

На протяжении этой главы мы пользуемся другим определением имени Коши в сепарабельном пространстве (X, ρ, W, ν).

Определение 4.1. Именем Коши точки $x \in X$ будем называть всякий элемент $f \in \omega^\omega$, такой что $\rho(w_{f(n)}, x) < 2^{-n}$ для всех n.

Из замечания 1.2 следует, что это определение представления Коши c-эквивалентно исходному, данному в главе 1.

Будем использовать следующие стандартные обозначения для открытых и замкнутых шаров в метрическом пространстве (X, ρ):

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\},\ B_\rho[x, \varepsilon] = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}.$$

Шары B_1 и B_2 (каждый может быть открытым или замкнутым) с центрами x_1 и x_2 и радиусами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, соответственно, называются *формально непересекающимися,* если $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Из это свойства следует, что $B_\rho[x_1, \varepsilon_1] \cap B_\rho[x_2, \varepsilon_2] = \varnothing$. Шар $B[x_1, \varepsilon_1]$ *формально содержится в* $B(x_2, \varepsilon_2)$, если $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Из этого свойства следует, что $B[x_1, \varepsilon_1] \subseteq B(x_2, \varepsilon_2)$. Обычно эти понятия определяют только для *рациональных* шаров в вычислимых метрических пространствах, т. е., шаров с центром в специальной точке и рациональным радиусом. Однако нам будет удобнее использовать эти понятия для произвольных шаров.

4.1 $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ образует нижнюю полурешётку

Пусть нам дано польское пространство $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$. Для произвольных метрик $\rho_1, \rho_2 \in M(\mathbf{X})$ положим $\rho(x, y) = \max(\rho_1(x, y), \rho_2(x, y))$. Известно, что ρ удовлетворяет аксиомам метрики; легко видеть, что ρ индуцирует топологию τ и полна. Из леммы 1.1 следует, что $\rho \leq_c \rho_1, \rho_2$. Поэтому упорядочение $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ направлено вниз. Мы покажем, что $\deg_c(\rho)$ является точной нижней гранью степеней $\deg_c(\rho_1)$ и $\deg_c(\rho_2)$ в случае, если хотя бы одна из метрик ρ_1, ρ_2 вычислима; в частности, отсюда следует, что $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ образует нижнюю полурешётку. Более того, $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ вкладывается в $\mathcal{D}_c(X)$ с сохранением точных нижних граней.

Предложение 4.1. *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in M(\mathbf{X})$ и метрика ρ_1 вычислима. Положим $\rho(x, y) = \max(\rho_1(x, y), \rho_2(x, y))$. Тогда $\deg_c(\delta_\rho) = \deg_c(\delta_{\rho_1}) \wedge \deg_c(\delta_{\rho_2})$ в решётке $\mathcal{D}_c(X)$.*

Доказательство. По лемме 1.1, $\delta_\rho \leq_c \delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}$. Требуется показать, что для любого представления δ множества X, такого что $\delta \leq_c \delta_{\rho_1}, \delta_{\rho_2}$, также будет верно $\delta \leq_c \delta_\rho$. Рассмотрим произвольное представление δ, c-сводимое к δ_{ρ_1} и δ_{ρ_2} (скажем, посредством функционалов Φ_e и Φ_z соответственно). Пусть $\delta(g) = x$ для каких-то $g \in \omega^\omega$, $x \in X$. Тогда $f_1 = \Phi_e(g)$ и $f_2 = \Phi_z(g)$ суть соответственно δ_{ρ_1}- и δ_{ρ_2}-имена для x. Покажем, что f_1 и f_2 могут быть эффективно преобразованы в некоторое ρ-имя f для x, отсюда будет следовать, что $\delta \leq_c \delta_\rho$.

Определим f следующим образом. Для $n \in \omega$ положим $f(n) = f_2(m)$, где $m \geqslant n$ таково, что $\rho_1(w_{f_2(m)}, w_{f_1(k)}) < 2^{-n-1}$ для некоторого $k > n$. Так как $w_{f_1(k)} \to x$ и $w_{f_2(k)} \to x$, такое m всегда найдётся. Имеем $\rho_2(w_{f(n)}, x) = \rho_2(w_{f_2(m)}, x) < 2^{-m} \leqslant 2^{-n}$ и $\rho_1(w_{f(n)}, x) \leqslant \rho_1(w_{f_2(m)}, w_{f_1(k)}) + \rho_1(w_{f_1(k)}, x) < 2^{-n-1} + 2^{-k} \leqslant 2^{-n}$. Поэтому $\rho(w_{f(n)}, x) < 2^{-n}$ для всех n, и f является ρ-именем для x. Поскольку ρ_1 вычислима, f строится эффективно по f_1 и f_2. Таким образом, $\delta \leq_c \delta_\rho$. □

Следствие 4.1. *$\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ образует нижнюю полурешётку. Порядковое вложение $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ в $\mathcal{D}_c(X)$, определяемое правилом $\rho \mapsto \delta_\rho$, является полурешёточным вложением.*

Доказательство. Если метрики ρ_1 и ρ_2 вычислимы, то $\max(\rho_1, \rho_2)$ также вычислима. Далее пользуемся предыдущим предложением. □

Следствие 4.2. *Степень всякой вычислимой метрики имеет в упорядочении $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ точную нижнюю грань с любой другой степенью.*

4.2 Построение метрики строго под данной метрикой

4.2.1 Вычислимый случай

В этом подпараграфе мы докажем теорему, утверждающую, что, если нам даны вычислимая метрика ρ и ρ-вычислимая предельная точка в $\mathbf{X}$, то мы можем построить вычислимую метрику $\rho' <_c \rho$. Доказательство получается прямым обобщением конструкции теоремы 2.3 на случай произвольного метрического пространства с хотя бы одной вычислимой предельной точкой.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$ — польское пространство, а $\rho \in M(\mathbf{X})$ — вычислимая метрика такая, что пространство (X, ρ, W, ν) содержит вычислимую предельную точку. Тогда существует вычислимая метрика $\rho' \in M(\mathbf{X})$ со свойством $\rho' <_c \rho$. В частности, $\deg_c(\rho)$ не является минимальной в $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$.*

Доказательство. Зафиксируем вычислимую метрику $\rho \in M(\mathbf{X})$ и предельную точку $\lambda \in X$, имеющую вычислимое ρ-имя. Сначала мы покажем, что существует вычислимая последовательность, сходящаяся к λ и состоящая из различных точек.

Лемма 4.1. *Существует вычислимый элемент $f \in \omega^\omega$ со свойствами:*

1. *$\rho(f) = \lambda$;*

2. *$\rho(w_{f(n+1)}, \lambda) < \rho(w_{f(n)}, \lambda)$ для всех $n \in \omega$.*

Доказательство. Пусть g — вычислимое ρ-имя для λ. В качестве $w_{f(0)}$ возьмём любую специальную точку, не равную λ; чтобы эффективно получить такую точку, достаточно потребовать, чтобы $\rho(w_{f(0)}, g(k)) > 2^{-k+1}$ для какого-либо k. Аналогично, в качестве $w_{f(n+1)}$ возьмём любую специальную точку, не равную λ и такую, что $\rho(w_{f(n+1)}, g(k_n)) < 2^{-k_n}$, где k_n таково, что $\rho(w_{f(n)}, g(k_n)) > 2^{-k_n+1}$. Тогда $\rho(w_{f(n)}, \lambda) \geqslant |\rho(w_{f(n)}, g(k_n)) - \rho(g(k_n), \lambda)| > 2^{-k_n+1} - 2^{-k_n} = 2^{-k_n} > \rho(w_{f(n+1)}, \lambda)$. □

Построим метрику ρ', удовлетворяя следующие требования:

$\mathcal{R}_e$: Φ_e не сводит ρ к ρ',

$\mathcal{S}$: $\rho' \leq_c \rho$.

Так же как и в теореме 2.3, требование $\mathcal{S}$ будет удовлетворено в силу леммы 1.1: мы построим ρ' таким образом, что $\rho'(x, y) \geqslant \rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Стратегия для изолированного требования $\mathcal{R}_e$ основывается на следующем простом следствии use-принципа. Для $e, k \in \omega$ и $f \in \omega^\omega$ обозначим

$$C_\rho^{e,f,k} = \bigcap_{i=0}^{\varphi_e(f)(k+1)-1} B_\rho(w_{f(i)}, 2^{-i}).$$

Лемма 4.2. *Пусть $\rho, \rho' \in M(\mathbf{X})$, Φ_e c-сводит ρ к ρ' и $\rho(f) = y$ для некоторых $f \in \omega^\omega, y \in X$. Тогда $C_\rho^{e,f,k} \subseteq B_{\rho'}(y, 2^{-k})$ для всех $k \in \omega$.*

Доказательство. Т. к. $C_\rho^{e,f,k}$ открыто, то вместе с любым элементом $x \in C_\rho^{e,f,k}$ оно содержит последовательность $(w_{g(n)})_{n\in\omega}$ специальных точек, сходящуюся к x. Можем предполагать, что эта последовательность сходится достаточно быстро, так что

$$g' = \big(f(0), \ldots, f(\varphi_e(f)(k+1) - 1), g(0), g(1), \ldots\big)$$

является ρ-именем для x. В силу use-принципа, $\Phi_e(f)(k+1) = \Phi_e(g')(k+1)$, поскольку f и g' совпадают на начальном сегменте длины $\varphi_e(f)(k+1)$. Т. к. Φ_e сводит ρ к ρ', то $\rho'(\Phi_e(f)) = y$ и $\rho'(\Phi_e(g')) = x$, поэтому

$$\rho'(x, y) \leqslant \rho'(x, w_{\Phi_e(f)(k+1)}) + \rho'(w_{\Phi_e(f)(k+1)}, y) =$$
$$= \rho'(x, w_{\Phi_e(g')(k+1)}) + \rho'(w_{\Phi_e(f)(k+1)}, y) < 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k}. \qquad \square$$

Пусть f — имя для λ, построенное в лемме 4.1. Определим вычислимую функцию $\widehat{f}$ следующим образом: выберем рациональное число $q_{\widehat{f}(n)} = r$ так, что

$$r < \min\big(\rho(w_{f(n)}, w_{f(n+1)}), \rho(w_{f(n)}, w_{f(n-1)})\big)/2.$$

Шары $B_\rho[w_{f(n)}, q_{\widehat{f}(n)}]$ попарно формально не пересекаются и не содержат λ. Положим $f_0(n) = f(2n)$ и $f_1(n) = f(2n{+}1)$. Заметим, что f_0, f_1 также суть вычислимые ρ-имена для λ. Наконец, положим $f_2(n) = \widehat{f}(2n+1)$.

В силу леммы 4.2, для того, чтобы выполнить $\mathcal{R}_e$, достаточно показать, что существует хотя бы одна точка $x_e \in C_\rho^{e,f_0,k} - B_{\rho'}(\lambda, 2^{-k})$ для какого-нибудь $k \in \omega$; можем выбрать $k = e$. Действуем следующим образом. Когда $\Phi_e(f_0)(k+1)\downarrow$, выберем произвольную точку $x_e \neq \lambda$ в $C_\rho^{e,f_0,e}$; это возможно, т. к. $C_\rho^{e,f_0,e}$ — открытая окрестность предельной точки λ. Пусть $r > 0$ таково, что $\rho(x_e, \lambda) > r$. Определим функцию-"пик" $\Gamma_e \colon X \to [0,1]$ следующим образом:

$$\Gamma_e(x) = \begin{cases} 2^{-e} \cdot \frac{r - \rho(x, x_e)}{r}, & \text{если } x \in B_\rho(x_e, r), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим метрику $\rho_e(x,y) = \rho(x,y) + |\Gamma_e(x) - \Gamma_e(y)|$. Легко видеть, что функция Γ_e непрерывна, а метрика ρ_e вычислима и индуцирует ту же топологию на X, что и ρ. Имеем $\rho_e(x_e, \lambda) = \rho(x_e, \lambda) + \Gamma_e(x_e) > 2^{-e}$, таким образом, метрика ρ_e удовлетворяет требованию $\mathcal{R}_e$.

Чтобы выполнить все требования $\mathcal{R}_e$, мы должны назначить свидетелей x_e каждому из требований $\mathcal{R}_e$, выбрать радиусы r_e и выполнить диагонализационный процесс для всех e. Свидетелей x_e и радиусы r_e будем выбирать с помощью функций f_1 и f_2. В итоге, метрика ρ' будет иметь вид

$$\rho'(x,y) = \rho(x,y) + \sum_{e \in \omega} \bigl|\Gamma_e(x) - \Gamma_e(y)\bigr|.$$

Легко проверить аксиомы метрики для ρ'. Заметим, что, поскольку шары $B_\rho[x_e, r_e]$ попарно не пересекаются, то для каждого $x \in X$ существует не более чем одно $e = e_x$, для которого $\Gamma_{e_x}(x) \neq 0$; в частности, ρ' корректно определена. Если $\Gamma_e(x) = 0$ для всех e, будет удобно считать, что $e_x = e$ для всех e. Таким образом, ρ' может быть выражена в следующем виде:

$$\rho'(x,y) = \begin{cases} \rho(x,y) + \bigl|\Gamma_{e_x}(x) - \Gamma_{e_y}(y)\bigr|, & \text{если } e_x = e_y, \\ \rho(x,y) + \Gamma_{e_x}(x) + \Gamma_{e_y}(y), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Покажем, что метрика ρ' полна и индуцирует топологию τ на X. Поскольку $\rho'(x,y) \geqslant \rho(x,y)$ для всех x, y, то любая последовательность, сходящаяся в (X, ρ'), сходится и в (X, ρ) к тому же пределу. По этой же причине и в силу полноты ρ, ρ' также полна. Предположим теперь, что последовательность x_n сходится к точке x в метрике ρ. Если $x \neq \lambda$, то нетрудно видеть, что $e_{x_n} = e_x$ для достаточно больших n. Т. к. Γ_{e_x} непрерывна, то $\rho'(x_n, x) \to 0$ по (4.1). Если $x = \lambda$, заметим, что в силу выбора шаров $B_\rho[x_e, r_e]$ верно $\Gamma_e(\lambda) = 0$ для всех e. Т. к.

$x_e \to \lambda$ и высота 2^{-e} пика Γ_e стремится к 0 с ростом e, понятно, что $\Gamma_{e_{x_n}}(x_n) \to 0$. По (4.1), $\rho'(x_n, x) \to 0$.

Как и в других конструкциях подобного типа, на каждом шаге s мы фиксируем конечное множество $A_s \subseteq W$. Множества A_s образуют возрастающую последовательность со свойствами:

1. $\Gamma(x) = 0$ для всех $x \in A_s$ и всех отображений Γ, определённых после шага s ,
2. $A_s \subseteq A_t$ для $s \leqslant t$,
3. $\bigcup_{i \in \omega} A_s = W$.

Это гарантирует, что метрика ρ' вычислима, поскольку для всякого w_n мы сможем вычислить e_{w_n} следующим образом. Перейдём на шаг n. Тогда $\Gamma(w_n) = 0$ для всех Γ, определённых после этого шага. Пусть $\Gamma_{e_1}, \ldots, \Gamma_{e_k}$ — все пики, определённые к данному моменту. Поскольку их носители $B_\rho[x_{e_1}, r_{e_1}], \ldots, B_\rho[x_{e_k}, r_{e_k}]$ попарно не пересекаются, мы можем эффективным образом выделить i со свойством $w_n \notin B_\rho[x_{e_j}, r_{e_j}]$, $j \neq i$. Тогда $e_{w_n} = e_i$, и число $\Gamma_{e_{w_n}}(w_n)$ вычисляется равномерно по n, по определению Γ_{e_i}. Если никакой пик Γ ещё не был определён, тогда $\Gamma(w_n) = 0$ для всех Γ, которые когда-либо появятся в конструкции. Применяя формулу (4.1), мы видим, что расстояние $\rho'(w_n, w_m)$ вычислимо равномерно по n, m.

Элемент $w_{f_1(i)}$ называется *свежим* на шаге s, если $i > j$ для всех $w_{f_1(j)}$, появившихся в конструкции до сих пор.

Конструкция. *Этап 0.* Положим $A_0 = \varnothing$.
Этап $s+1$. Положим $A_{s+1} = A_s \cup \{w_s\}$. Работаем с требованием $\mathcal{R}_e$, $e = \langle s+1 \rangle_0$, если это требование ещё не выполнено. Вычислим $\Phi_{e,s+1}(f_0)(e)$. Если это вычисление остановилось, выберем свежий элемент $x_e = w_{f_1(i)} \in C_\rho^{e,f_0,e}$ со свойством $\rho(x_e, y) > 0$ для всех $y \in A_{s+1}$. Выберем рациональное число r_e, такое что $0 < r_e \leqslant q_{f_2(i)}$ и $\rho(x_e, y) > r_e$ для всех $y \in A_{s+1}$. Определим функцию $\Gamma_e \colon X \to [0,1]$:

$$\Gamma_e(x) = \begin{cases} 2^{-e} \cdot \frac{r_e - \rho(x, x_e)}{r_e}, & \text{если } x \in B_\rho(x_e, r_e), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Верификация. Выше было показано, что метрика ρ', определяемая как $\rho'(x,y) = \rho(x,y) + \sum_e \left|\Gamma_e(x) - \Gamma_e(y)\right|$, где сумма берётся по всем e, таким что функция Γ_e определена в конструкции, является полной и индуцирует топологию τ на X. По лемме 1.1, $\rho' \leq_c \rho$.

Чтобы показать, что все требования $\mathcal{R}_e$ удовлетворены, рассмотрим две возможности. Если $\Phi_e(f_0)(e) \uparrow$, то понятно, что Φ_e не может сводить ρ к ρ'. Иначе, найдётся шаг s, на котором мы обнаружим, что $\Phi_e(f_0)(e) \downarrow$, выберем элемент $x_e \in C_\rho^{e,f_0,e}$ и определим отображение

Γ_e такое, что $\Gamma_e(x_e) = 2^{-e}$. Т. к. $\Gamma(\lambda) = 0$ для всех Γ, то $\rho'(x_e, \lambda) = \rho(x_e, \lambda) + 2^{-e} > 2^{-e}$, и $x_e \notin B_{\rho'}(\lambda, 2^{-e})$. Лемма 4.2 гарантирует, что Φ_e не сводит ρ to ρ'.

На шаге s мы выбрали радиус r_e так, что $B_\rho(x_e, r_e) \cap A_s = \varnothing$. Таким образом, $\Gamma(x) = 0$ для всех $x \in A_s$ и всех отображений Γ, определённых после шага s. Выше мы показали, что это даёт нам способ вычисления $\rho'(w_n, w_m)$ равномерно по n и m. □

Теорема 4.2. *В условиях предыдущей теоремы, упорядочение $(P(\omega), \subseteq)$ подмножеств ω (анти-)изоморфно вложимо в $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ под $\deg_c(\rho)$.*

Доказательство. Для всякого множества $A \subseteq \omega$ построим метрику $\rho_A \leq_c \rho$ таким образом, что, для всех $A, B \subseteq \omega$, $A \subseteq B$ если и только если $\rho_B \leq_c \rho_A$; отсюда будет следовать вложимость из формулировки теоремы. Первым шагом в доказательстве будет построение метрик $\rho_{\{i\}}$ для $i \in \omega$, удовлетворяющих следующим требованиям:

$\mathcal{R}_{ie}$: Φ_e не сводит $\rho_{\{j\}}$ к $\rho_{\{i\}}$, для всех $j \neq i$.

Отметим, что в требовании $\mathcal{R}_{ie}$ говорится, что Φ_e не сводит сразу бесконечное количество метрик $\rho_{\{j\}}$ к $\rho_{\{i\}}$. Пусть f_0, f_1, f_2 — вычислимые функции из доказательства теоремы 4.1. Конструкция устроена таким же образом, как и раньше. Для того, чтобы выполнить требование $\mathcal{R}_{ie}$, действуем следующим образом. Пусть $n = \langle i, e\rangle$. Когда $\Phi_e(f_0)(n)\downarrow$, мы выбираем свежий элемент $x_n = w_{f_1(k)} \in C^{e,f_0,n}_\rho$ и определяем пик Γ_n высоты 2^{-n}. Метрика $\rho_{\{i\}}$ имеет форму $\rho_{\{i\}}(x,y) = \rho(x,y) + \sum_n \big|\Gamma_n(x) - \Gamma_n(y)\big|$, где сумма берётся по $n = \langle i, e\rangle$, таким что отображение Γ_n определено в конструкции. Пусть x_n — свидитель требования $\mathcal{R}_{ie}$. Поскольку носители различных пиков не пересекаются, понятно, что $\Gamma_m(x_n) = 0$ для всех $m = \langle j, e'\rangle$ при $j \neq i$, а потому $\rho_{\{j\}}(x_n, \lambda) = \rho(x_n, \lambda)$ и $x_n \in C^{e,f_0,n}_{\rho_{\{j\}}} - B_{\rho_{\{i\}}}(\lambda, 2^{-n})$. Ключевой момент состоит в следующем. По определению f_1 и f_2, точки $w_{f_0(n)}$ не затрагиваются в конструкции в том смысле, что $\Gamma(w_{f_0(n)}) = 0$ для всех Γ, а значит, f_0 является именем для λ во всех метриках $\rho_{\{k\}}$. По лемме 4.2, Φ_e не может сводить $\rho_{\{j\}}$ к $\rho_{\{i\}}$, и требование $\mathcal{R}_{ie}$ выполнено.

Для произвольного множества $A \subseteq \omega$ положим

$$\rho_A(x,y) = \rho(x,y) + \sum_{n=\langle i,e\rangle,\ i\in A} \big|\Gamma_n(x) - \Gamma_n(y)\big|.$$

Легко видеть, что для $A \subseteq B$ выполняется $\rho_A(x,y) \leqslant \rho_B(x,y)$ для всех x, y, поэтому $\rho_B \leq_c \rho_A$. С другой стороны, пусть $A \nsubseteq B$. Зафиксируем произвольное $i \in A - B$. Пусть x_n — свидетель требования вида $\mathcal{R}_{ie}$. Рассуждая как выше, мы приходим к выводу, что $\rho_B(x_n, \lambda) = \rho(x_n, \lambda)$, значит, $x_n \in C^{e,f_0,n}_{\rho_B} - B_{\rho_A}(\lambda, 2^{-n})$, и Φ_e не сводит ρ_B to ρ_A. □

Следствие 4.3. *Любой счётный частичный порядок изоморфно вложим в* $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ *под* $\deg_c(\rho)$. *В частности,* $|\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})| = \aleph_0$.

Доказательство. Заметим, что метрика ρ_A из доказательства предыдущей теоремы вычислима, когда вычислимо множество A: действительно, чтобы вычислить $\rho_A(w_j, w_k)$, воспользуемся формулой (4.1), имея в виду, что величина $\Gamma_n(x)$ не входит в выражение для $\rho_A(x, y)$, если n имеет вид $n = \langle i, e\rangle$ для $i \notin A$. Теперь мы можем вложить вычислимый счётно-универсальный частичный порядок в $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$, как было сделано в теореме 3.2. $\square$

Доказательства двух изложенных выше теорем опираются на существование ρ-вычислимой предельной точки в $\mathbf{X}$. Легко заметить, что в следующих случаях такая точка всегда существует.

Следствие 4.4. *Если существует предельная специальная точка* $\lambda \in W$, *то* $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ *не содержит минимальных элементов.*

Доказательство. Пусть $\lambda = w_n$. Тогда $\bar{n} = (n, n, \ldots)$ является вычислимым ρ-именем для λ в любой метрике ρ, и мы можем использовать конструкцию теоремы 4.1. $\square$

Следствие 4.5. *Если* $\mathbf{X}$ *не содержит изолированных точек, то* $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ *не содержит минимальных элементов.*

4.2.2 Общий случай

Определение 4.2. Вспомним, что метрика ρ пространства (X, ρ, W, ν) называется вычислимой, если $\rho \restriction W^2$ является $(\nu, \nu, \delta_{\mathbf{R}})$-вычислимой функцией. Более общо, для тьюринговой степени $\mathbf{d}$, будем называть метрику ρ $\mathbf{d}$-вычислимой, если $\rho \restriction W^2$ имеет $(\nu, \nu, \delta_{\mathbf{R}})$-реализацию g с $\deg_T(g) = \mathbf{d}$.

Прямая релятивизация результатов предыдущего подпараграфа даёт нам следующую теорему.

Теорема 4.3. *Пусть польское пространство* $\mathbf{X}$ *содержит хотя бы одну предельную точку* λ. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Для любой метрики* $\rho \in M(\mathbf{X})$ *существует другая метрика* $\rho' \in M(\mathbf{X})$ *со свойством* $\rho' <_c \rho$. *Более того, если* ρ $\mathbf{d}$*-вычислима и точка* λ *имеет* $\mathbf{e}$*-вычислимое* ρ*-имя, где* $\mathbf{d}$ *и* $\mathbf{e}$ *— тьюринговы степени, то* ρ' *является* $\mathbf{d} \cup \mathbf{e}$*-вычислимой.*

2. $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ *не содержит минимальных элементов.*

3. $(P(\omega), \subseteq)$ *изоморфно вложимо в* $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ *под любой степенью.*

4. $|\mathcal{M}_c(\mathbf{X})| = 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Утверждения легко проверяются. Последнее утверждение следует из того факта, что на сепарабельном пространстве $\mathbf{X}$ можно определить в точности $2^{\aleph_0}$ различных метрик. □

4.2.3 Дискретные пространства

Мы показали, что $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$ не содержит минимальных элементов, если в $\mathbf{X}$ есть хотя бы одна предельная точка. Что может быть сказано в случае, когда $\mathbf{X}$ не содержит предельных точек, т. е. дискретно? Есть две различные возможности: $\mathbf{X}$ — конечное пространство или $\mathbf{X}$ бесконечно, а потому, будучи сепарабельным, счётно. Заметим, что в любом дискретном пространстве $\mathbf{X}$ единственным всюду плотным множеством является само X.

Предложение 4.2. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, \tau, X, \nu)$ *— польское пространство, где* X *— конечное множество, а* $\nu\colon \omega \to X$ *— его произвольная нумерация. Тогда* $|\mathcal{M}_c(\mathbf{X})| = 1$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные метрики $\rho_1, \rho_2 \in M(\mathbf{X})$. Найдутся $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, такие что $\rho_i(x, y) > \varepsilon_i$ для всех $x \neq y \in X$ и $i = 1, 2$. По лемме 1.1, метрика ρ_i c-эквивалентна метрике $\rho_i' = \frac{1}{\varepsilon_i}\rho_i$. В этой метрике выполнено $\rho_i'(x, y) > 1$ для $x \neq y \in X$. По определению имени Коши, всякий раз, когда $\rho_1'(f) = x \in X$, то $\nu f(n) = x$ для всех n (т. е. f “перечисляет” последовательность, состоящую из одной точки x), а значит, и $\rho_2'(f) = x$. Аналогично, всякое ρ_2'-имя также является и ρ_1'-именем для той же самой точки. Поэтому $\rho_1 \equiv_c \rho_1' \equiv_c \rho_2' \equiv_c \rho_2$. □

Предложение 4.3. *Пусть* $\mathbf{X} = (X, \tau, X, \nu)$ *— дискретное польское пространство, где* X *— счётное множество, а* $\nu\colon \omega \to X$ *— его произвольная нумерация. Пусть* ρ *— стандартная дискретная метрика на* X*, определённая правилом* $\rho(x, y) = 1$ *для* $x \neq y$*. Тогда* $\deg_c(\rho)$ *есть наименьшая степень в* $\mathcal{M}_c(\mathbf{X})$.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего предложения, имеем: если $\rho(f) = x$, то $\nu f(n) = x$ для всех n, поэтому $\rho'(f) = x$ в любой метрике $\rho' \in M(\mathbf{X})$. □

Пусть $\mathbf{X} = (X, \tau, X, \nu)$ — счётное дискретное польское пространство. Без ограничения общности можем предполагать, что $X = \omega$. Отождествляя натуральное число n с вещественным числом n, мы можем считать, что ω есть подпространство метрического пространства $(\mathbf{R}, \rho_R)$. Конструкция теоремы 3.2 даёт нам $2^{\aleph_0}$ попарно c-неэквивалентных метрик на $\mathbf{X}$. Детали легко проверяются и оставляются читателю. Как следствие, получаем следующее.

Предложение 4.4. *Для польского пространства* $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1. $|\mathcal{M}_c(\mathbf{X})| = 2^{\aleph_0}$,
2. $|\mathcal{M}_c(\mathbf{X})| > 1$,
3. X *бесконечно.*

4.3 Степени без общей верхней грани

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— польское пространство,* ρ *— метрика на* $\mathbf{X}$ *и* $\lambda \in X$ *— предельная точка, имеющая вычислимое* ρ*-имя. Существует вычислимая метрика* $\widehat{\rho} \in M(\mathbf{X})$*, такая что для любой вычислимой метрики* $d \in M(\mathbf{X})$ *выполнено* $\rho \not\leq_c d$ *или* $\widehat{\rho} \not\leq_c d$.

Перечислим некоторые простые следствия этой теоремы.

Следствие 4.6. $\mathcal{CM}_c(\mathbf{X})$ *не является направленным вверх частичным порядком, не является верхней полурешёткой и не содержит наибольшего элемента.*

Следствие 4.7. *Если существует предельная специальная точка* $\lambda \in W$*, то*

$$\mathcal{CM}_c(\mathbf{X}) \models \forall \mathbf{a} \, \exists \mathbf{b} \, \forall \mathbf{c} \, (\mathbf{a} \not\leq \mathbf{c} \vee \mathbf{b} \not\leq \mathbf{c}).$$

Следствие 4.8. *Если* $\mathbf{X}$ *не содержит изолированных точек, то*

$$\mathcal{CM}_c(\mathbf{X}) \models \forall \mathbf{a} \, \exists \mathbf{b} \, \forall \mathbf{c} \, (\mathbf{a} \not\leq \mathbf{c} \vee \mathbf{b} \not\leq \mathbf{c}).$$

Опишем идею доказательства теоремы. Аналоигчно тому, как это было сделано в [42], мы можем перечислить все возможные вычислимые метрики на $\mathbf{X}$ следующим образом. По определению, для любой вычислимой метрики d на $\mathbf{X}$ существует вычислимая функция $\Phi_e \colon \omega^3 \to \omega$, такая что

$$d(w_i, w_j) = d_e(w_i, w_j) = \lim_{k \to \infty} q_{\Phi_e(i,j,k)}.$$

Поскольку множество W плотно в X, d полностью определяется значениями, которые она принимает на W. Таким образом, обычная нумерация всех частично вычислимых функций $(\Phi_e)_{e \in \omega}$ трёх переменных даёт нам список всех возможных частичных функций $d_e \colon X^2 \to \mathbf{R}$, которые потенциально моугт быть вычислимыми метриками на $\mathbf{X}$. Этот список исчерпывает все возможные вычислимые метрики на $\mathbf{X}$, но функция $e \mapsto d_e$ не является нумерацией класса всех вычислимых метрик на $\mathbf{X}$, поскольку список также включает в себя “неправильные”, или “мусорные”, функции.

Мы построим метрику $\widehat{\rho}$, удовлетворяя следующие требования для $e, z, z' \in \omega$:

$\mathcal{R}_{ezz'}$: Если d_e является метрикой на $\mathbf{X}$ и $\rho \leq_c d_e$ посредством Φ_z, то $\widehat{\rho} \nleq_c d_e$ посредством $\Phi_{z'}$.

Метрика $\widehat{\rho}$ будет формально определена как поточечный предел последовательности метрик ρ_s, определяемых в ходе конструкции. Как обычно, на шаге s конструкции мы фиксируем конечное множество $A_s \subseteq W$. Множества A_s будут иметь следующие свойства:

1. $\rho_s(z,v) = \rho_{s+1}(z,v) = \ldots = \widehat{\rho}(z,v)$ для всех $z, v \in A_s$,

2. $A_s \subseteq A_t$ для $s \leqslant t$,

3. $\bigcup_{i\in\omega} A_s = W$.

Это гарантирует, что метрика $\widehat{\rho}$ вычислима: для того, чтобы вычислить (индекс алгоритма для вычисления расстояния) $\widehat{\rho}(w_i, w_j)$, достаточно дождаться шага s, на котором $w_i, w_j \in A_s$. В ходе конструкции мы будем контролировать, что все метрики ρ_s вычислимы.

Стратегия для требования $\mathcal{R}_{ezz'}$ в изоляции так же, как и раньше, основывается на лемме 4.2. Зафиксируем вычислимое ρ-имя f_λ для точки λ. Для того, чтобы выполнить требование $\mathcal{R}_{ezz'}$, выберем специальную точку $y = w_b \neq \lambda$. Мы верим, что d_e — метрика, индуцирующая топологию τ на X, и Φ_z сводит ρ к d_e. Тогда расстояние $d_e(y,\lambda)$ является ненулевым вычислимым вещественным числом, поскольку $\Phi_z(f_\lambda)$ — вычислимое d_e-имя для λ. Значит, на некотором шаге конструкции мы найдём $k \in \omega$, такое что $d_e(y,\lambda) > 2^{-k+1}$. Если окажется, что такого k не найдётся в ходе всей конструкции, это будет означать, что либо d_e — мусорная функция, не являющаяся метрикой на $\mathbf{X}$, либо $\Phi_z(f_\lambda)$ не является d_e-именем λ, т. е. Φ_z не сводит ρ к d_e. В этом случае ничего делать не нужно, и $\mathcal{R}_{ezz'}$ автоматически выполнено. Однако, если подходящее k обнаружено на каком-то шаге, нам нужно действовать. Вычислим $\Phi_z(f_\lambda)(k+1)$. Когда $\Phi_z(f_\lambda)(k+1)\downarrow$, выберем элемент x в $C_\rho^{z,f_\lambda,k} - \{\lambda\}$. По лемме 4.2, если Φ_z на самом деле сводит ρ к d_e, то $d_e(x,\lambda) < 2^{-k}$. Предположим, что требование $\mathcal{R}_{ezz'}$ не выполнено, т. е. $\Phi_{z'}$ c-сводит $\widehat{\rho}$ к d_e. Тогда $\Phi_{z'}(\bar{b})(k+1)\downarrow$, где $\bar{b} = (b, b, \ldots)$ — имя для точки y. Предположим также, что метрика $\widehat{\rho}$ построена нами таким образом, что $\widehat{\rho}(x,y) < 2^{-\varphi_{z'}(\bar{b})(k+1)+1}$. Тогда $x \in C_{\widehat{\rho}}^{z',\bar{b},k}$. Снова применяя лемму 4.2, мы видим, что $d_e(x,y) < 2^{-k}$. Вместе с $d_e(x,\lambda) < 2^{-k}$ это означает, что $d_e(y,\lambda) < 2^{-k+1}$, и мы приходим к противоречию с выбором k. Таким образом, требование $\mathcal{R}_{ezz'}$ выполнено. Резюмируя, мы пришли к противоречию, увидев, что x находится слишком близко к обеим точкам λ и y в метрике d_e, исходя из предположения, что x находится близко к этим точкам соответственно в метриках ρ и $\widehat{\rho}$, и предполагая, что ρ и $\widehat{\rho}$ c-сводятся к d_e.

Таким образом, для того, чтобы выполнить требование $\mathcal{R}_{ezz'}$, нам нужно обеспечить, что $\widehat{\rho}(x,y) < 2^{-\varphi_{z'}(\bar{b})(k+1)+1}$. Мы добьёмся этого с помощью деформации небольшой окрестности x

в (X,ρ), делая x ближе к y и сохраняя структуру пространства за пределами этой окрестности. Т. к. λ — предельная точка, мы можем назначить каждому требованию $\mathcal{R}_n$, $n = \langle e, z, z' \rangle$, свою специальную точку y_n, дождаться описанных в $\mathcal{R}_n$-стратегии вычислений и выбрать вторую точку x_n близко к λ, которая также будет специально зарезервирована для $\mathcal{R}_n$. Тот факт, что пространство деформируется лишь в небольшой окрестности точки x_n, позволит нам выполнять каждое требование $\mathcal{R}_n$ в своей отдельной области, и таким образом, требования не будут мешать друг другу. В результате, конструкция будет проходить без нарушения уже выполненных требований. Последующие параграфы полностью посвящены доказательству теоремы 4.4. В следующем параграфе мы опишем аналитическую часть конструкции. Сначала мы расскажем, как устроена элементарная деформация, делающая x_n и y_n близкими друг к другу, а затем покажем, как эти деформации комбинируются между собой и собираются в одну конструкцию, давая в итоге метрику $\widehat{\rho}$. В параграфе 4.5 мы делаем эти результаты эффективными и излагаем формальную конструкцию для метрики $\widehat{\rho}$.

4.4 Аналитическая часть конструкции $\widehat{\rho}$

В этом параграфе мы предполагаем, что $\mathbf{X} = (X, \tau, W, \nu)$ — произвольное польское пространство и $\rho \in M(\mathbf{X})$ — произвольная метрика на $\mathbf{X}$. В первом подпараграфе строится "элементарная деформация" пространства (X,ρ), дающая в результате метрику ρ_1. Основная цель этого подпараграфа — доказать, что $\rho_1 \in M(\mathbf{X})$, т. е. ρ_1 полна и индуцирует топологию τ. Во втором подпараграфе мы строим счётную последовательность метрик ρ_i, $i > 0$, каждый последующий член которой получен из предыдущего с помощью элементарной деформации, и определяем метрику $\widehat{\rho}$ как поточечный предел ρ_i. Основной целью второго подпараграфа будет доказательство того, что $\widehat{\rho} \in M(\mathbf{X})$.

4.4.1 Элементарная деформация

Пусть нам даны точки $x, y \in X$ и вещественные числа $r, h > 0$, такие что $\rho(x,y) > r$. Мы построим метрику ρ_1 на $\mathbf{X}$ так, что $\rho_1(x,y) = h$ и $\rho_1(z,v) = \rho(z,v)$ для $z, v \notin B_\rho(x,r)$. Для этого мы вложим пространство (X,ρ,W) в банахово пространство ℓ^∞, воспользовавшись известной конструкцией вложения Фреше (опубликовано в [22], современное изложение см. в [26]). Напомним, что ℓ^∞ — пространство счётных последовательностей вещественных чисел, снабжённое метрикой $\|(x_n)_{n\in\omega}\| = \sup_{n\in\omega}|x_n|$. Вложение Фреше F определяется следующим образом. Для $x \in X$, определим последовательность $F(x) \in \ell^\infty$ по правилу

$$(F(x))_i = \rho(x, w_i) - \rho(w_i, w_0).$$

Будем использовать сокращённую запись $x_{(i)}$ для $(F(x))_i$. Нетрудно видеть [26], что отображение $F\colon (X,\rho)\to\ell^\infty$ корректно определено и является изометрией.

Деформация устроена следующим образом. Определим отображение $\Gamma\colon B_\rho(x,r)\to\ell^\infty$ правилом

$$\Gamma(z)=\left(\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\,h\right)^\frown\left(F(y)-\tfrac{\rho(x,z)}{r}(F(y)-F(z))\right),$$

где $\alpha^\frown\beta$ — конкатенация вещественного числа α и последовательности $\beta=(\beta_0,\beta_1,\ldots)\in\mathbf{R}^\omega$ вещественных чисел:

$$\alpha^\frown\beta=(\alpha,\beta_0,\beta_1,\ldots).$$

Мы можем продолжить Γ до отображения $\gamma\colon X\to\ell^\infty$, положив $\gamma(z)=0^\frown F(z)$ для $z\notin B_\rho(x,r)$. Нетрудно понять, что отображение γ корректно определено, т. е. $\gamma(x)$ является ограниченной последовательностью вещественных чисел для всякого $x\in X$. Также нетрудно видеть, что отображение γ инъективно.

Можно получить явные формулы, выражающие расстояние $\|\gamma(z)-\gamma(v)\|$ для $z,v\in X$ в терминах метрики ρ. По симметрии будем предполагать, что $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,v)$. Предположим сначала, что $\rho(x,z)<r$ и $\rho(x,v)\geqslant r$. Имеем

$$\begin{aligned}\|\gamma(z)-\gamma(v)\|&=\|\Gamma(z)-(0^\frown F(v))\|\\&=\max\Big(\big|(\Gamma(z))_0-0\big|,\ \sup_k\big|(\Gamma(z))_{k+1}-(F(v))_k\big|\Big)\\&=\max\Big(\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\,h,\ \sup_k\big|y_{(k)}-\tfrac{\rho(x,z)}{r}(y_{(k)}-z_{(k)})-v_{(k)}\big|\Big).\end{aligned}$$

Вычислим выражение E_k под знаком sup:

$$\begin{aligned}E_k&=\big|y_{(k)}-\tfrac{\rho(x,z)}{r}(y_{(k)}-z_{(k)})-v_{(k)}\big|\\&=\Big|\rho(y,w_k)-\tfrac{\rho(x,z)}{r}\big(\rho(y,w_k)-\rho(z,w_k)\big)-\rho(v,w_k)\Big|\\&=\Big|\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\rho(y,w_k)+\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,w_k)-\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\rho(v,w_k)-\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(v,w_k)\Big|\\&\leqslant\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\big|\rho(y,w_k)-\rho(v,w_k)\big|+\tfrac{\rho(x,z)}{r}\big|\rho(z,w_k)-\rho(v,w_k)\big|\\&\leqslant\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\rho(y,v)+\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,v).\end{aligned}$$

Выберем последовательность специальных точек w_{k_n}, сходящуюся к v. Тогда для E_{k_n} выполнено

$$E_{k_n}=\Big|\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\rho(y,w_{k_n})+\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,w_{k_n})-\rho(v,w_{k_n})\Big|\to\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\rho(y,v)+\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,v),$$

следовательно, $\sup_k E_k=\frac{r-\rho(x,z)}{r}\rho(y,v)+\frac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,v)$ и

$$\|\gamma(z)-\gamma(v)\|=\max\big(\tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\,h,\ \tfrac{r-\rho(x,z)}{r}\rho(y,v)+\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,v)\big).\tag{4.2}$$

Предположим теперь, что $\rho(x,v) < r$ (а значит, $\rho(x,z) < r$).

$$\|\gamma(z) - \gamma(v)\| = \|\Gamma(z) - \Gamma(v)\| = \max\Big(\big|\tfrac{r-\rho(x,z)}{r} - \tfrac{r-\rho(x,v)}{r}\big|\, h,$$
$$\sup_k \big|y_{(k)} - \tfrac{\rho(x,z)}{r}(y_{(k)} - z_{(k)}) - y_{(k)} + \tfrac{\rho(x,v)}{r}(y_{(k)} - v_{(k)})\big|\Big).$$

Оценим выражение E'_k под знаком супремума:

$$\begin{aligned}
E'_k &= \Big|y_{(k)} - \tfrac{\rho(x,z)}{r}(y_{(k)} - z_{(k)}) - y_{(k)} + \tfrac{\rho(x,v)}{r}(y_{(k)} - v_{(k)})\Big| \\
&= \Big|\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,w_k) - \tfrac{\rho(x,v)}{r}\rho(v,w_k) + \tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\rho(y,w_k)\Big| \\
&= \Big|\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,w_k) + \tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\rho(y,w_k) - \tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(v,w_k) - \tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\rho(v,w_k)\Big| \\
&\leqslant \tfrac{\rho(x,z)}{r}\big|\rho(z,w_k) - \rho(v,w_k)\big| + \tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\big|\rho(v,w_k) - \rho(y,w_k)\big| \\
&\leqslant \tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,v) + \tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\rho(v,y).
\end{aligned}$$

Выбирая $w_{k_n} \to v$, видим, что

$$E'_{k_n} = \Big|\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,w_k) - \tfrac{\rho(x,v)}{r}\rho(v,w_k) + \tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\rho(y,w_k)\Big| \to \tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,v) + \tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\rho(v,y),$$

поэтому $\sup_k E'_k = \frac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,v) + \frac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\rho(v,y)$ и

$$\|\gamma(z) - \gamma(v)\| = \max\big(\tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\, h,\ \tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z,v) + \tfrac{\rho(x,v)-\rho(x,z)}{r}\rho(v,y)\big). \tag{4.3}$$

Если $\rho(x,z), \rho(x,v) \geqslant r$, то

$$\|\gamma(z) - \gamma(v)\| = \|F(z) - F(v)\| = \rho(z,v). \tag{4.4}$$

Т. к. отображение γ инъективно, то $\rho_1(z,v) = \|\gamma(z) - \gamma(v)\|$ является корректно определённой метрикой на X. Это и есть нужная нам деформированная метрика. Расстояние $\rho_1(z,v)$ для произвольных точек $z, v \in X$ рассчитывается по формулам (4.2)–(4.4). Теперь докажем основной результат этого подпараграфа.

Предложение 4.5. *Метрика ρ_1 индуцирует топологию τ и полна.*

Доказательство. Чтобы показать, что ρ_1 индуцирует τ, нужно проверить, что

$$\rho_1(z_n, z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ если и только если } \rho(z_n, z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

для любой последовательности $(z_n)_{n\in\omega}$ и любой точки z в X. Зафиксируем последовательность $z_0, z_1, \ldots$ и точку $z \in X$.

Покажем, что импликация “если” верна. Пусть $\rho(z_n, z) \to 0$. Нужно показать, что $\rho_1(z_n, z) \to 0$. Рассмотрим три различных случая.

Случай 1. $\rho(x,z) < r$. Обозначим $B = B_\rho(z, r - \rho(x,z))$, тогда $B \subseteq B_\rho(x,r)$. Существует $N \geqslant 0$, такое что N-й хвост $(z_n)_{n\geqslant N}$ нашей последовательности содержится в B. Разобьём $(z_n)_{n\geqslant N}$ на две подпоследовательности $(z_i)_{i\in I}$ и $(z_j)_{j\in J}$ так, что $\rho(x,z_i) \leqslant \rho(x,z)$ для $i \in I$ и $\rho(x,z_j) > \rho(x,z)$ для $j \in J$ (всякий раз, когда в этом доказательстве мы разбиваем последовательность на две подпоследовательности таким образом, без ограничения общности будем предполагать, что оба множества I и J бесконечны). По (4.3), для $i \in I$ верно

$$\rho_1(z_i,z) = \max\bigl(\tfrac{\rho(x,z)-\rho(x,z_i)}{r}\,h,\ \tfrac{\rho(x,z_i)}{r}\rho(z,z_i) + \tfrac{\rho(x,z)-\rho(x,z_i)}{r}\rho(z,y)\bigr) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

поскольку $\rho(z_i,z) \to 0$. Похожим образом, $\rho_1(z_j,z) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ для $j \in J$. Т. к. $(z_i)_{i\in I}$ и $(z_j)_{j\in J}$ образуют разбиение $(z_n)_{n\geqslant N}$, то и $\rho_1(z_n,z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Случай 2. $\rho(x,z) > r$. Снова найдётся открытая окрестность B точки z, такая что $\rho(x,v) > r$ для $v \in B$. Существует $N \geqslant 0$, такое что $(z_n)_{n\geqslant N} \subseteq B$. По (4.4), для $n \geqslant N$ верно $\rho_1(z_n,z) = \rho(z_n,z) \to 0$.

Случай 3. $\rho(x,z) = r$. Тогда $(z_n)_{n\in\omega}$ разбивается на подпоследовательности $(z_i)_{i\in I}$ и $(z_j)_{j\in J}$ так, что $\rho(x,z_i) < r$ для $i \in I$ и $\rho(x,z_j) \geqslant r$ для $j \in J$. По (4.4), $\rho_1(z_j,z) = \rho(z_j,z) \to 0$. По (4.2),

$$\rho_1(z_i,z) = \max\bigl(\tfrac{r-\rho(x,z_i)}{r}\,h,\ \tfrac{\rho(x,z_i)}{r}\rho(z,z_i) + \tfrac{r-\rho(x,z_i)}{r}\rho(y,z)\bigr) \to 0,$$

т. к. $\rho(x,z_i) \to \rho(x,z) = r$ и $\rho(z,z_i) \to 0$. Значит, $\rho_1(z_n,z) \to 0$.

Для доказательства того, что иимпликация “только если” также верна, предположим, что $\rho_1(z_n,z) \to 0$. Рассмотрим те же самые три случая, что и ранее.

Случай 1. $\rho(x,z) < r$. Тогда $B = B_{\rho_1}(z, \frac{r-\rho(x,z)}{r}h) \subseteq B_\rho(x,r)$: действительно, если $\rho(x,v) \geqslant r$, то $\rho_1(z,v) \geqslant \frac{r-\rho(x,z)}{r}h$ по (4.2). Найдётся $N \geqslant 0$, такое что $(z_n)_{n\geqslant N} \subseteq B$. Разобьём $(z_n)_{n\geqslant N}$ на две последовательности $(z_i)_{i\in I}$ и $(z_j)_{j\in J}$ так, что $\rho(x,z_i) \leqslant \rho(x,z)$ для $i \in I$ и $\rho(x,z_j) > \rho(x,z)$ для $j \in J$. Тогда расстояния $\rho_1(z_i,z)$ и $\rho_1(z_j,z)$ вычисляются по формуле (4.3). Т. к. $\rho_1(z_n,z) \to 0$, из этих формул следует, что $\bigl|\frac{\rho(x,z_n)-\rho(x,z)}{r}\bigr|h \to 0$, поэтому $\rho(x,z_n) \to \rho(x,z)$. Значит, если $z = x$, то $\rho(z_n,z) \to 0$ немедленно. Если же $z \neq x$, то по (4.3) имеем

$$\tfrac{\rho(x,z_i)}{r}\rho(z_i,z) \leqslant \tfrac{\rho(x,z_i)}{r}\rho(z_i,z) + \tfrac{\rho(x,z)-\rho(x,z_i)}{r}\rho(z,y) \leqslant \rho_1(z_i,z) \to 0$$

и

$$\tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z_j,z) \leqslant \tfrac{\rho(x,z)}{r}\rho(z_j,z) + \tfrac{\rho(x,z_j)-\rho(x,z)}{r}\rho(z,y) \leqslant \rho_1(z_j,z) \to 0.$$

Второе выражение означает, что $\rho(z_j,z) \to 0$. Рассмотрим теперь первое выражение. Т. к. $\rho(x,z_i) \to \rho(x,z)$ и $z \neq x$, то существуют $\varepsilon > 0$ и $i_0 \in I$, такие что $\rho(x,z_i) > \varepsilon$ для всех $i \geqslant i_0$. Для $i \geqslant i_0$ мы имеем

$$\tfrac{\varepsilon}{r}\rho(z_i,z) < \tfrac{\rho(x,z_i)}{r}\rho(z_i,z) \to 0,$$

откуда следует, что $\rho(z_i, z) \to 0$. В результате, $(z_n)_{n\in\omega}$ сходится к z в метрике ρ.

Случай 2. $\rho(x, z) > r$. Сначала покажем, что шар $B_\rho[x, r]$ замкнут в пространстве (X, ρ_1). Предположим, что точка $v \notin B_\rho(x, r)$ принадлежит замыканию $B_\rho[x, r]$ в (X, ρ_1), т. е. существует последовательность $(v_n)_{n\in\omega} \subseteq B_\rho[x, r]$, сходящаяся к v в метрике ρ_1. Покажем, что $\rho(v_n, v) \to 0$, откуда будет следовать, что $v \in B_\rho[x, r]$. Как обычно, разобьём $(v_n)_{n\in\omega}$ на последовательности $(v_i)_{i\in I}$ и $(v_j)_{j\in J}$ так, что $\rho(x, v_i) < \rho(x, v)$ для $i \in I$ и $\rho(x, v_j) = \rho(x, v)$ для $j \in J$. Тогда расстояния $\rho_1(v_i, v)$ и $\rho_1(v_j, v)$ рассчитываются по формулам (4.2) и (4.4), соответственно. По (4.4), $\rho(v_j, v) = \rho_1(v_j, v) \to 0$. По (4.2),

$$\tfrac{r-\rho(x,v_i)}{r} h \leqslant \rho_1(v_i, v) \to 0,$$

т. е. $\rho(x, v_i) \to r$. Снова по (4.2),

$$\tfrac{\rho(x,v_i)}{r}\rho(v_i, v) \leqslant \tfrac{\rho(x,v_i)}{r}\rho(v_i, v) + \tfrac{r-\rho(x,v_i)}{r}\rho(y, v) \leqslant \rho_1(v_i, v) \to 0,$$

что означает, что $\rho(v_i, v) \to 0$, поэтому $\rho(v_n, v) \to 0$, и $v \in B_\rho[x, r]$.

Предположим теперь, что $\rho(x, z) > r$. Т. к. $B_\rho[x, r]$ замкнут в (X, ρ_1), существует открытая окрестность U точки z в (X, ρ_1), такая что $U \cap B_\rho[x, r] = \varnothing$. Существует $N \geqslant 0$, такое что $z_n \in U$ для всех $n \geqslant N$. По (4.4), для $n \geqslant N$ верно $\rho(z_n, z) = \rho_1(z_n, z) \to 0$.

Случай 3. $\rho(x, z) = r$. Разобьём $(z_n)_{n\in\omega}$ на последовательности $(z_i)_{i\in I}$ и $(z_j)_{j\in J}$ так, что $\rho(x, z_i) < r$ для $i \in I$ и $\rho(x, z_j) \geqslant r$ для $j \in J$. В той же манере, что и раньше, нетрудно показать, что $\rho(z_n, z) \to 0$. Заключаем, что ρ и ρ_1 индуцируют одну и ту же топологию на X.

Чтобы показать, что ρ_1 полна, зафиксируем фундаментальную последовательность $(z_n)_{n\in\omega}$ в (X, ρ_1). Рассмотрим следующие два случая.

Предположим сначала, что $\forall n\, \exists k_n \geqslant n\ \rho(z_{k_n}, x) \geqslant r$. Тогда $\rho_1(z_{k_n}, z_{k_p}) = \rho(z_{k_n}, z_{k_p})$ для всех $n, p \in \omega$, значит, $(z_{k_n})_{n\in\omega}$ фундаментальна $(X, \rho) \Rightarrow$ она сходится в $(X, \rho) \Rightarrow$ она сходится в $(X, \rho') \Rightarrow (z_n)_{n\in\omega}$ сходится в (X, ρ').

Предположим теперь, что $\exists N\, \forall n \geqslant N\ \rho(z_n, x) < r$. Т. к. $(z_n)_{n\in\omega}$ фундаментальна в (X, ρ_1), то по (4.3) мы имеем

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon > N\, \forall n, p > N_\varepsilon\ \ \left|\tfrac{\rho(x,z_n)-\rho(x,z_p)}{r}\right| h \leqslant \rho_1(z_n, z_p) < \varepsilon,$$

что означает, что последовательность $(\rho(x, z_n))_{n\in\omega}$ фундаментальна в $\mathbf{R}$, а значит, она имеет предел $L \in \mathbf{R}$. Если $L = 0$, то $\rho(z_n, x) \to 0$, т. е. $(z_n)_{n\in\omega}$ сходится в (X, ρ). Предположим, что $L > 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{L\varepsilon}{2r}$. Выберем $N'_\varepsilon > N$, такое что $\forall n > N'_\varepsilon$

$\rho(x, z_n) > \frac{L}{2}$ и $\forall n, p > N'_\varepsilon$ $\rho_1(z_n, z_p) < \delta$. Рассмотрим произвольные $n, p > N'_\varepsilon$. Будем считать, что $\rho(x, z_p) \leqslant \rho(x, z_n)$, другой случай рассматривается аналогично. По (4.3),

$$\tfrac{L}{2r}\rho(z_n, z_p) < \tfrac{\rho(x,z_n)}{r}\rho(z_n, z_p) \leqslant \rho_1(z_n, z_p) < \delta,$$

поэтому $\rho(z_n, z_p) < \frac{2r\delta}{L} = \varepsilon$. Мы показали, что $(z_n)_{n\in\omega}$ фундаментальна в (X, ρ). Как и выше, из этого мы можем заключить, что $(z_n)_{n\in\omega}$ сходится в (X, ρ'). □

Пусть $z \in X$ таково, что $z \neq y$ и $\rho(x, z) > r$. Тогда для каждого $v \in B_\rho[x, r]$ верно:

$$\begin{aligned}\rho_1(z, v) &= \max\bigl(\tfrac{r-\rho(x,v)}{r}\,h,\ \tfrac{\rho(x,v)}{r}\rho(z, v) + \tfrac{r-\rho(x,v)}{r}\rho(y, z)\bigr)\\ &\geqslant \tfrac{\rho(x,v)}{r}\rho(z, v) + \tfrac{r-\rho(x,v)}{r}\rho(y, z)\\ &\geqslant \min(\rho(z, v), \rho(z, y))\\ &\geqslant \min(\rho(x, z) - r, \rho(z, y)).\end{aligned}$$

Определим функцию $\Delta\colon X \to \mathbf{R}$ правилом $\Delta(z) = \min(\rho(x, z) - r, \rho(z, y))$. Тогда для всех $z \notin B_\rho[x, r] \cup \{y\}$ верно $\Delta(z) > 0$ и $B_{\rho_1}(z, \Delta(z)) \cap B_\rho[x, r] = \varnothing$, как показано выше. Более того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.6. *Пусть $z \notin B_\rho[x, r] \cup \{y\}$. Тогда тождественное отображение id_X индуцирует изометрию шара $B_\rho(z, \Delta(z))$ на шар $B_{\rho_1}(z, \Delta(z))$. В частности, $B_\rho(z, \Delta(z)) = B_{\rho_1}(z, \Delta(z))$.*

Доказательство. Зафиксируем $z \notin B_\rho[x, r] \cup \{y\}$ и обозначим $\Delta = \Delta(z)$. Ясно, что шары $B_\rho(z, \Delta)$ и $B_\rho[x, r]$ не пересекаются. По (4.4), $\rho_1(z, v) = \rho(z, v)$ для всех $v \in B_\rho(z, \Delta)$. Значит, $B_\rho(z, \Delta) \subseteq B_{\rho_1}(z, \Delta)$ и $\mathrm{id}_X \restriction B_\rho(z, \Delta)$ изометрично отображает $B_\rho(z, \Delta)$ в $B_{\rho_1}(z, \Delta)$. Для того чтобы показать, что эта изометрия сюръективна, предположим, что найдётся $v \in B_{\rho_1}(z, \Delta) - B_\rho(z, \Delta)$. Тогда $\rho_1(z, v) \neq \rho(z, v)$, а значит, по (4.4), точка v должна содержаться в шаре $B_\rho(x, r)$, но мы показали, что $B_{\rho_1}(z, \Delta) \cap B_\rho[x, r] = \varnothing$. □

Следующее предложение тривиально.

Предложение 4.7. *Пусть (Y, ρ_Y) и (Z, ρ_Z) суть метрические пространства и $F\colon B_{\rho_Y}(y_0, \varepsilon_0) \to B_{\rho_Z}(F(y_0), \varepsilon_0)$ — сюръективная изометрия. Тогда для любого шара $B_{\rho_Y}[y_1, \varepsilon_1]$, формально содержащегося в $B_{\rho_Y}(y_0, \varepsilon_0)$, F отображает $B_{\rho_Y}[y_1, \varepsilon_1]$ на $B_{\rho_Z}[F(y_1), \varepsilon_1]$. Это же верно и для открытого шара $B_{\rho_Y}(y_1, \varepsilon_1)$.*

4.4.2 Построение последовательности деформированных метрик

В этом подпараграфе мы строим счётную последовательность метрик на $\mathbf{X}$, каждый последующий член которой получается из предыдущего с помощью некоторой элементарной деформации, следующим образом. Предположим, что $\mathbf{X}$ содержит хотя бы одну предельную точку λ. Пусть нам изначально дана метрика $\rho = \rho_0 \in M(\mathbf{X})$. Существуют две последовательности $(x_n)_{n\in\omega}$ и $(y_n)_{n\in\omega}$, сходящиеся к λ и такие что:

1. $x_n \neq x_m$ и $y_n \neq y_m$ для $n \neq m$,

2. $x_n \neq y_m$, $x_n \neq \lambda$ и $y_m \neq \lambda$ для всех n, m.

Для каждого n существует вещественное число $\widehat{r}_n > 0$, такое что шары $B_{\rho_0}[x_n, \widehat{r}_n] \cap \{y_k\}_{k\in\omega} = \varnothing$ и $B_{\rho_0}[x_n, \widehat{r}_n]$ попарно формально не пересекаются. Понятно, что $\lambda \notin B_{\rho_0}[x_n, \widehat{r}_n]$ для всех n и $\widehat{r}_n \to 0$. Зафиксируем последовательность $(h_n)_{n\in\omega}$ положительных целых чисел, сходящуюся к 0.

Положим $r_0 = \widehat{r}_0$. Определим функцию $\Delta_0\colon X \to \mathbf{R}$ правилом

$$\Delta_0(z) = \min(\rho_0(x_0, z) - r_0, \rho_0(z, y_0)).$$

Предположим, что метрики $\rho_0, \dots, \rho_n$, вещественные числа $r_0, \dots, r_n$ и отображения $\Delta_0, \dots, \Delta_n$ уже определены. Определим отображение $\Gamma_{n+1}\colon B_{\rho_n}(x_n, r_n) \to \ell^\infty$ по правилу

$$\Gamma_{n+1}(z) = \left(\tfrac{r_n - \rho_n(x_n,z)}{r_n}\, h_n\right) ^\frown \left(F_n(y_n) - \tfrac{\rho_n(x_n,z)}{r_n}(F_n(y_n) - F_n(z))\right),$$

где F_n — вложение Фреше пространства (X, ρ_n, W) в ℓ^∞, т. е. F_n имеет вид

$$(F_n(z))_i = \rho_n(z, w_i) - \rho_n(w_i, w_0).$$

Продолжим Γ_{n+1} до отображения $\gamma_{n+1}\colon X \to \ell^\infty$, полагая $\gamma_{n+1}(z) = 0 ^\frown F_n(z)$ для $z \notin B_{\rho_n}(x_n, r_n)$. Определим метрику $\rho_{n+1}(z, v) = \|\gamma_{n+1}(z) - \gamma_{n+1}(v)\|$. Выберем вещественное число r_{n+1}, такое что

$$0 < r_{n+1} < \min(\widehat{r}_{n+1}, \Delta_0(x_{n+1}), \dots, \Delta_n(x_{n+1}))$$

(мы покажем, что такое число существует). Определим функцию $\Delta_{n+1}\colon X \to \mathbf{R}$ правилом

$$\Delta_{n+1}(z) = \min(\rho_{n+1}(x_{n+1}, z) - r_{n+1}, \rho_{n+1}(z, y_{n+1})).$$

Предложение 4.8. *Для всех $n \in \omega$ метрика ρ_n, вещественное число r_n и функция Δ_n корректно определены и следующие утверждения верны:*

1. *ρ_n — полная метрика, индуцирующая топологию τ на X;*

2. *$r_n > 0$;*

3. *$\rho_n(z,v) = \rho_{n-1}(z,v)$ для всех $z, v \notin B_{\rho_{n-1}}(x_{n-1}, r_{n-1})$;*

4. *Тождественное отображение id_X индуцирует последовательность сюръективных изометрий $B_{\rho_0}[x_n, r_n] \to B_{\rho_1}[x_n, r_n] \to \ldots \to B_{\rho_n}[x_n, r_n]$.*

Доказательство. Рассуждаем по индукции. Ясно, что утверждение предложения выполнено при $n = 0$.

Предположим, что утверждение доказано для $0, \ldots, n$. Покажем, что оно также верно для $n+1$. По (4) и предложению 4.7, имеем $B_{\rho_i}(x_i, r_i) = B_{\rho_0}(x_i, r_i)$ для $i < n$. По определению r_i, имеем $x_n, y_n \notin B_{\rho_0}(x_i, r_i)$, значит,

$$\rho_n(x_n, y_n) = \rho_{n-1}(x_n, y_n) = \ldots = \rho_0(x_n, y_n) > \widehat{r}_n > r_n.$$

Поскольку $r_n > 0$, из предложения 4.5 следует, что ρ_{n+1} — полная метрика, индуцирующая топологию τ. По (4.4) имеем $\rho_{n+1}(z,v) = \rho_n(z,v)$ для всех $z, v \notin B_{\rho_n}(x_n, r_n)$.

Рассмотрим теперь точку x_{n+1}. Для всех $i \leqslant n$, т. к. $B_{\rho_i}[x_i, r_i] = B_{\rho_0}[x_i, r_i]$ и $\rho_0(x_{n+1}, x_i) > \widehat{r}_i > r_i$, то $x_{n+1} \notin B_{\rho_i}[x_i, r_i]$, поэтому $\Delta_i(x_{n+1}) > 0$. Следовательно,

$$\min(\widehat{r}_{n+1}, \Delta_0(x_{n+1}), \ldots, \Delta_n(x_{n+1})) > 0,$$

и число r_{n+1} корректно определено.

Из предложений 4.6 и 4.7 видно, что, поскольку $r_{n+1} < \Delta_0(x_{n+1})$, то id_X индуцирует изометрию шара $B_{\rho_0}[x_{n+1}, r_{n+1}]$ на шар $B_{\rho_1}[x_{n+1}, r_{n+1}]$. Похожим образом, для каждого $0 < i \leqslant n$ id_X индуцирует изометрию шара $B_{\rho_i}[x_{n+1}, r_{n+1}]$ на $B_{\rho_{i+1}}[x_{n+1}, r_{n+1}]$. $\square$

Из предложения 4.8 следует, что при построении ρ_{n+1} мы работаем внутри шара $B_{\rho_0}(x_n, r_n)$ и не изменяем расстояния $\rho_n(z,v)$ для $z, v \notin B_{\rho_0}(x_n, r_n)$. Поскольку шары $B_{\rho_0}(x_n, r_n)$ попарно не пересекаются, то для всякой пары точек $z, v \in X$ найдётся не более двух чисел $n \in \omega$, таких что $\rho_n(z,v) \neq \rho_{n+1}(z,v)$. Положим $\widehat{\rho}(z,v) = \lim_n \rho_n(z,v)$X, т. е. определим $\widehat{\rho}$ как поточечный предел метрик ρ_n. Нетрудно проверить, что $\widehat{\rho}$ является метрикой на X.

Напомним, что $x_n \to \lambda$, $y_n \to \lambda$ и $r_n < \widehat{r}_n \to 0$.

Предложение 4.9. *Метрика $\widehat{\rho}$ полна и индуцирует топологию τ на X.*

Доказательство. Для того чтобы показать, что $\widehat{\rho}$ индуцирует τ, нам нужно показать, что внутри всякого открытого ρ-шара содержится открытый $\widehat{\rho}$-шар и наоборот. Расмотрим сначала шары с центрами $z \neq \lambda$. Зафиксируем такое z. Существует $n_0 \in \omega$, такое что $z \notin D_{n_0}$, где

$$D_m = \bigcup_{n \geqslant m} \big(B_{\rho_0}[x_n, r_n] \cup \{y_n\}\big).$$

Заметим, что из предыдущего предложения следует, что $D_m = \bigcup_{n \geqslant m}\big(B_{\rho_m}[x_n, r_n] \cup \{y_n\}\big)$. Найдётся $\varepsilon > 0$, такое что $\rho_{n_0}(x_n, z) > r_n + \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Действительно, в противном случае для каждого $k > 0$ существует $m_k \geqslant n_0$, такое что $\rho_{n_0}(x_{m_k}, z) \leqslant r_{m_k} + 1/k$. Если $m_k \not\to \infty$, то существует $m^* \geqslant n_0$, такое что $m^* = m_k$ для бесконечно многих k. Тогда понятно, что $\rho_{n_0}(x_{m^*}, z) \leqslant r_{m^*}$, т. е. $z \in B_{\rho_{n_0}}[x_{m^*}, r_{m^*}] \subseteq D_{n_0}$, и мы приходим к противоречию. Значит, $m_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Для любого $\delta > 0$ существует k, такое что $\rho_{n_0}(x_{m_k}, z) \leqslant r_{m_k} + 1/k < \delta/2$ и $\rho_{n_0}(x_{m_k}, \lambda) < \delta/2$. Следовательно, $\rho_{n_0}(z, \lambda) < \delta$ для всех $\delta > 0$, т. е. $z = \lambda$, что противоречит выбору z.

Для $n > m \geqslant n_0$ выполнено $x_n, z \notin B_{\rho_0}(x_m, r_m) = B_{\rho_m}(x_m, r_m)$. Поэтому

$$\rho_n(x_n, z) = \rho_{n-1}(x_n, z) = \ldots = \rho_{n_0}(x_n, z) > r_n + \varepsilon.$$

По аналогичным причинам, $\rho_n(y_n, z) = \rho_{n_0}(y_n, z) > \varepsilon$. Ясно, что $\rho_{n_0}(x_{n_0}, z) > r_{n_0} + \varepsilon$ и $\rho_{n_0}(y_{n_0}, z) > \varepsilon$. Следовательно, $\Delta_n(z) > \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Применяя предложения 4.6 и 4.7, видим, что id_X индуцирует последовательность сюръективных изометрий

$$B_{\rho_{n_0}}(z, \varepsilon) \to B_{\rho_{n_0+1}}(z, \varepsilon) \to \ldots \to B_{\rho_n}(z, \varepsilon) \to \ldots$$

Значит, $B_{\rho_{n_0}}(z, \varepsilon) \subseteq B_{\widehat{\rho}}(z, \varepsilon)$. С другой стороны, предположим, что найдётся $v \in B_{\widehat{\rho}}(z, \varepsilon) - B_{\rho_{n_0}}(z, \varepsilon)$. Существует $n \geqslant n_0$, такое что $\widehat{\rho}(z, v) = \rho_n(z, v)$, но тогда $v \in B_{\rho_n}(z, \varepsilon) - B_{\rho_{n_0}}(z, \varepsilon)$, чего не может быть. Итак, id_X индуцирует изометрию шара $B_{\rho_{n_0}}(z, \varepsilon)$ на шар $B_{\widehat{\rho}}(z, \varepsilon)$. Из предложения 4.7 следует, что $B_{\rho_{n_0}}(z, \varepsilon') = B_{\widehat{\rho}}(z, \varepsilon')$ для любого $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Т. к. ρ_{n_0} и ρ_0 индуцируют одну и ту же топологию, это означает, что каждая ρ_0-окрестность точки z содержит некоторую $\widehat{\rho}$-окрестность z и наоборот.

Рассмотрим теперь случай $z = \lambda$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим шар $B_{\widehat{\rho}}(\lambda, \varepsilon)$. Существует $n_0 > 0$, такое что для всех $n \geqslant n_0$ шары $B_{\rho_0}[x_n, r_n]$ формально содержатся в шаре $B_{\rho_0}(\lambda, \varepsilon/3)$, $\rho_0(y_n, \lambda) < \varepsilon/3$ и $h_n < \varepsilon/3$. Выберем δ, такое что $0 < \delta < \varepsilon/3$ и $B_{\rho_0}(\lambda, \delta) \cap \big(\bigcup_{k<n_0} B_{\rho_0}[x_k, r_k]\big) = \varnothing$. Для каждого $v \in B_{\rho_0}(\lambda, \delta)$ верно либо $\widehat{\rho}(v, \lambda) = \rho_0(v, \lambda) < \delta < \varepsilon$, либо

$v \in B_{\rho_n}(x_n, r_n)$ для некоторого $n \geqslant n_0$. Во втором случае имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}(v, \lambda) &= \rho_{n+1}(v, \lambda) \\
&\leqslant \rho_{n+1}(v, y_n) + \rho_{n+1}(y_n, \lambda) \\
&= \rho_{n+1}(v, y_n) + \rho_0(y_n, \lambda) \\
&< \rho_{n+1}(v, y_n) + \varepsilon/3 \\
&= \max\bigl(\tfrac{r_n - \rho_n(x_n, v)}{r_n} h_n, \tfrac{\rho_n(x_n, v)}{r_n} \rho_n(v, y_n) + \tfrac{r_n - \rho_n(x_n, v)}{r_n} \rho_n(y_n, y_n)\bigr) + \varepsilon/3 \\
&< \max(h_n, \rho_n(v, y_n)) + \varepsilon/3 \\
&= \max(h_n, \rho_0(v, y_n)) + \varepsilon/3 \\
&\leqslant \max(h_n, \rho_0(v, x_n) + \rho_0(x_n, \lambda) + \rho_0(\lambda, y_n)) + \varepsilon/3 \\
&\leqslant \max(h_n, r_n + \rho_0(x_n, \lambda) + \rho_0(\lambda, y_n)) + \varepsilon/3 \\
&\leqslant \max(\varepsilon/3, \varepsilon/3 + \varepsilon/3) + \varepsilon/3 \\
&= 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что $B_{\rho_0}(\lambda, \delta) \subseteq B_{\widehat{\rho}}(\lambda, \varepsilon)$.

Осталось показать, что всякий шар $B_{\rho_0}(\lambda, \varepsilon)$ содержит некоторый $\widehat{\rho}$-шар. Зафиксируем шар $B_{\rho_0}(\lambda, \varepsilon)$. Выберем $n_0 > 0$, такое что шары $B_{\rho_0}[x_n, r_n]$ формально содержатся в шаре $B_{\rho_0}(\lambda, \varepsilon)$ для всех $n \geqslant n_0$. С помощью функций Δ_k выберем ненулевое $\delta < \varepsilon$, такое что $B_{\rho_{n_0}}(\lambda, \delta) = B_{\rho_0}(\lambda, \delta)$ и $B_{\rho_0}(\lambda, \delta) \cap \bigl(\bigcup_{k<n_0} B_{\rho_0}[x_k, r_k]\bigr) = \varnothing$. Для любого $z \in B_{\widehat{\rho}}(\lambda, \delta)$ верно либо $z \notin B_{\rho_0}(x_n, r_n)$ для всех $n \in \omega$, в случае чего $\rho_0(\lambda, z) = \widehat{\rho}(\lambda, z) < \delta < \varepsilon$, либо $z \in B_{\rho_0}(x_{n_1}, r_{n_1})$ для некоторого n_1. Если $n_1 < n_0$, тогда $\widehat{\rho}(\lambda, z) = \rho_{n_1+1}(\lambda, z) = \rho_{n_0}(\lambda, z) \geqslant \delta$ в силу выбора δ. Значит, $n_1 \geqslant n_0$, и $z \in B_{\rho_0}(x_{n_1}, r_{n_1}) \subseteq B_{\rho_0}(\lambda, \varepsilon)$. Заключаем, что $B_{\widehat{\rho}}(\lambda, \delta) \subseteq B_{\rho_0}(\lambda, \varepsilon)$, и $\widehat{\rho}$ индуцирует ту же топологию, что и ρ_0.

Покажем, что $\widehat{\rho}$ полна. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $(z_i)_{i\in\omega}$ в $(X, \widehat{\rho})$. Тогда либо $\rho_0(z_i, \lambda) \to 0$, в случае чего $\widehat{\rho}(z_i, \lambda) \to 0$, либо найдутся $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $(z_{i_k})_{k\in\omega}$ последовательности $(z_i)_{i\in\omega}$, такие что $\rho_0(z_{i_k}, \lambda) > \varepsilon$ для всех k. Существует $n_0 \in \omega$, для которого $\widehat{\rho}(z_{i_k}, z_{i_l}) = \rho_{n_0}(z_{i_k}, z_{i_l})$ для всех k, l. Т. к. $(z_{i_k})_{k\in\omega}$ фундаментальна в $(X, \widehat{\rho})$, то $(z_{i_k})_{k\in\omega}$ фундаментальна и в (X, ρ_{n_0}), тогда она сходится в (X, ρ_{n_0}), а потому она сходится и в $(X, \widehat{\rho})$. В результате, последовательность $(z_i)_{i\in\omega}$ сходится в $(X, \widehat{\rho})$. □

4.5 Конструкция $\widehat{\rho}$

В этом параграфе мы завершаем доказательство теоремы 4.4. Пусть $\rho \in M(\mathbf{X})$ — вычислимая метрика, а λ — вычислимая предельная точка в (X, ρ). Зафиксируем вычислимое ρ-имя f_λ

для точки λ. Мы эффективизируем конструкцию, описанную в подпараграфе 4.4.2, и строим вычислимую метрику $\widehat{\rho}$, удовлетворяющую всем требованиям $\mathcal{R}_{ezz'}$.

Шаг s конструкции будем называть *активным*, если $s = 0$ или некоторое требование действует на этом шаге (см. определение в конструкции). Если требование действует на шаге s, мы определяем на этом шаге новую метрику ρ_s и функцию $\Delta_s\colon X \to \mathbf{R}$. Пусть f_0, f_1, f_2 — вычислимые функции из доказательства теоремы 4.1. Элемент вида $x = w_{f_1(i)}$ называется *свежим*, если $i > j$ для всех элементов $w_{f_1(j)}$, упомянутых в конструкции до сих пор.

4.5.1 Конструкция

Этап 0. Положим $A_0 = \varnothing$, $\rho_0 = \rho$.

Этап s+1. Положим $A_{s+1} = A_s \cup \{w_s\}$. Работаем с требованием $\mathcal{R}_{ezz'}$, $\langle e, z, z'\rangle = \langle s+1\rangle_0 = n$, если это требование ещё не удовлетворено. Зафиксируем точку $y = w_b$, где $b = f_0(n)$. Вычислим расстояние $d_e(y,\lambda)$ с точностью 2^{-s}, используя не более $s+1$ машинных шагов. Если выяснилось, что $d_e(y,\lambda) > 0$, зафиксируем некоторое k, такое что $d_e(y,\lambda) > 2^{-k+1}$. Вычислим $\Phi_{z,s+1}(f_\lambda)(k{+}1)$ и $\Phi_{z',s+1}(\bar{b})(k{+}1)$. Если эти вычисления остановились, мы говорим, что $\mathcal{R}_{ezz'}$ *действует на этапе* $s+1$. Выберем свежий элемент $x = w_{f_1(i)}$, такой что $x \in C_{\rho_0}^{z,f_\lambda,k}$ и $\rho_0(x,w) > 0$ для всех $w \in A_{s+1}$. Пусть S_{s+1} — множество всех активных шагов, строго меньших $s+1$, и s' — последний активный шаг до $s+1$. Выберем рациональное число r, такое что

$$0 < r < \min\bigl(q_{f_2(i)}, \min_{t\in S_{s+1}} \Delta_t(x)\bigr)$$

и $B_{\rho_{s'}}(x,r) \cap A_{s+1} = \varnothing$. Определим отображение $\Gamma_{s+1}\colon B_{\rho_{s'}}(x,r) \to \ell^\infty$ правилом

$$\Gamma_{s+1}(z) = \bigl(\tfrac{r-\rho_{s'}(x,z)}{r}\, h\bigr) \frown \bigl(F_{s'}(y) - \tfrac{\rho_{s'}(x,z)}{r}(F_{s'}(y) - F_{s'}(z))\bigr),$$

где $h < 2^{-\varphi_{z',s+1}(\bar{b})(k+1)+1}$ — ненулевое рациональное число, а $F_{s'}$ — вложение Фреше пространства $(X, \rho_{s'}, W)$ в ℓ^∞. Продолжим Γ_{s+1} до отображения $\gamma_{s+1}\colon X \to \ell^\infty$, полагая $\gamma_{s+1}(z) = 0 \frown F_{s'}(z)$ для $z \notin B_{\rho_{s'}}(x,r)$. Положим $\rho_{s+1}(z,v) = \|\gamma_{s+1}(z) - \gamma_{s+1}(v)\|$. Положим $\Delta_{s+1}(z) = \min(\rho_{s+1}(x,z) - r, \rho_{s+1}(z,y))$.

4.5.2 Верификация

Пусть S — множество всех активных шагов в конструкции. Для $s \in S$ обозначим через x_s элемент x, выбранный на шаге s, r_s — число r, выбранное на шаге s, и y_s — элемент $y = w_{f_0(n)}$, выбранный для требования $\mathcal{R}_{ezz'}$, с которым мы работаем на шаге s. Поскольку $w_{f_1(n)} \to \lambda$ и $C_{\rho_0}^{z,f_\lambda,k}$ — открытая окрестность λ, мы видим, что подходящий элемент x_s всегда существует.

Рассуждая как в доказательстве предложения 4.8 (и учитывая свойства функций f_0, f_1 и f_2), а также помня, что $x_s \notin A_s$, мы видим, что подходящее число $r_s > 0$ также существует. Применяя предложение 4.8, получаем, что для всех $s \in S$ метрика ρ_s корректно определена, полна и индуцирует топологию τ. Из предложения 4.9 следует, что

$$\widehat{\rho}(z, v) = \lim_{s \in S} \rho_s(z, v)$$

есть полная метрика, индуцирующая топологию τ. Теперь нам нужно доказать, что $(\rho_s)_{s \in S}$ — вычислимая последовательность вычислимых метрик. Легко видеть, что множество S вычислимо: для того, чтобы понять, верно ли, что $s \in S$, рассуждаем следующим образом. Проверим, верно ли, что $d_e(y, \lambda) > 0$, используя не более s машинных шагов; это расстояние можно вычислить, используя Φ_e, Φ_z и вычислимое имя f_λ для λ. Если видим, что $d_e(y, \lambda) > 0$, то конструкция фиксирует некоторое k, такое что $d_e(y, \lambda) > 2^{-k+1}$, и мы проверяем, верно ли, что $\Phi_{z,s+1}(f_\lambda)(k+1) \downarrow$ и $\Phi_{z',s+1}(\bar{b})(k+1) \downarrow$, где $w_b = y$. Если это так, то $s \in S$.

Для $n \in \omega$ через s_n обозначим n-й активный шаг в строго возрастающем порядке.

Лемма 4.3. *Существует вычислимая функция g, такая что $\rho_{s_n} = d_{g(n)}$ для $n \in \omega$.*

Доказательство. Сначала мы покажем, что существует частично вычислимая функция $\psi\colon \omega^8 \to \omega$, такая что если $d_{e_0} = d$ — вычислимая метрика на $\mathbf{X}$, $w_a = x$ и $w_b = y$ — специальные точки, $q_i = r$ и $q_j = h$ — рациональные числа, такие что $d(x, y) > r$, и метрика d' получена из d с помощью элементарной деформации $\Gamma\colon B_d(x, r) \to \ell^\infty$, определённой обычным образом:

$$\Gamma(z) = \left(\tfrac{r - d(x,z)}{r}\, h\right) ^\frown \left(F(y) - \tfrac{d(x,z)}{r}(F(y) - F(z))\right),$$

то для всех $l, m, k \in \omega$ мы имеем $\psi(e_0, a, b, i, j, l, m, k) \downarrow$ и

$$|d'(w_l, w_m) - \psi(e_0, a, b, i, j, l, m, k)| < 2^{-k}.$$

То, что функция ψ с такими свойствами существует, очевидно следует из формул (4.2)–(4.4). На всякий случай мы проясним некоторые формальные детали. Мы приведём алгоритм вычисления расстояния d' с любой точностью, и из этого будет видно, что ψ существует. Зафиксируем e_0, a, b, i и j с указанными выше свойствами. Обозначим $z = w_l, v = w_m$. Расстояние $d'(z, v)$ может быть вычислено с точностью $\varepsilon < r$ следующим образом. Вычислим рациональные ε-аппроксимации D_1 и D_2 расстояний $d(x, z)$ и $d(x, v)$ соответственно. Возможны следующие случаи:

1. $D_1 \geqslant r + \varepsilon$ и

(a) $D_2 \geqslant r + \varepsilon$,

(b) $D_2 < r - \varepsilon$,

(c) $r - \varepsilon \leqslant D_2 < r + \varepsilon$,

2. $D_1 < r - \varepsilon$ с такими же подслучаями,

3. $r - \varepsilon \leqslant D_1 < r + \varepsilon$ с такими же подслучаями.

В случае (1a) мы знаем, что $d(x, z) \geqslant r$ и $d(x, v) \geqslant r$, поэтому $d'(z, v) = d(z, v)$ в соответствии с формулой (4.4). Похожим образом, в случае (1b) мы знаем, что $d(x, z) \geqslant r$ и $d(x, v) < r$, а значит, расстояние $d'(z, v)$ может быть вычислено по формуле (4.2). Случай (1c) немного сложнее, т. к. мы больше не знаем, какую из формул (4.2) и (4.4) нужно применять. Однако, поскольку (4.2) и (4.4) дают один и тот же результат при $d(x, v) = r$, мы можем воспользоваться любой из этих формул и получить достаточно точное приближение для $d'(z, v)$. Опишем, как вычислить $d'(z, v)$ с точностью ε. Обозначим через

$$\tilde{d}(z, v) = \max\bigl(\tfrac{r - d(x,v)}{r}\, h,\ \tfrac{d(x,v)}{r} d(z, v) + \tfrac{r - d(x,v)}{r} d(y, z)\bigr)$$

значение $d'(z, v)$, даваемое формулой (4.2). Прежде всего заметим, что

$$\bigl|\tfrac{d(x,v)}{r} d(z, v) + \tfrac{r - d(x,v)}{r} d(y, z) - d(z, v)\bigr| \leqslant \bigl|\tfrac{r - d(x,v)}{r}\bigr| d(z, v) + \bigl|\tfrac{r - d(x,v)}{r}\bigr| d(y, z).$$

Пусть число $N \in \omega$ таково, что

$$d(z, v) < N,\ d(y, z) < N \text{ и } h < N.$$

Вычислим $d(x, v)$ с точностью $\frac{\varepsilon r}{8N}$, обозначим через D_3 соответствующее приближённое значение. Если всё ещё верно

$$r - \tfrac{\varepsilon r}{8N} \leqslant D_3 < r + \tfrac{\varepsilon r}{8N},$$

т. е. мы всё ещё не уверены, верно ли, что $d(x, v) < r$, то

$$\bigl|\tfrac{d(x,v) - r}{r}\bigr| d(z, v) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{4},\ \bigl|\tfrac{d(x,v) - r}{r}\bigr| d(y, z) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{4} \text{ и } \bigl|\tfrac{d(x,v) - r}{r}\bigr| h \leqslant \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Теперь мы можем посчитать приближённое значение D_4 расстояния $d(z, v)$ с точностью $\varepsilon/8$ и проверить, верно ли, что $D_4 > \varepsilon + \varepsilon/8$. Если это не так, то $d(z, v) \leqslant \varepsilon + \varepsilon/4$ и

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(z, v) &= \max\bigl(\tfrac{r - d(x,v)}{r} h,\ \tfrac{d(x,v)}{r} d(z, v) + \tfrac{r - d(x,v)}{r} d(y, z)\bigr)\\
&= \max\bigl(\tfrac{r - d(x,v)}{r} h,\ \tfrac{d(x,v) - r}{r} d(z, v) + d(z, v) + \tfrac{r - d(x,v)}{r} d(y, z)\bigr)\\
&\leqslant \max\bigl(\tfrac{\varepsilon}{4},\ \varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4}\bigr) < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Видим, что $d(z,v) < 2\varepsilon$ и $\tilde{d}(z,v) < 2\varepsilon$, поэтому мы можем выдать ε в качестве приближённого значения $d'(z,v)$ с точностью ε. Если $D_4 > \varepsilon + \varepsilon/8$, то $\tilde{d}(z,v) = \frac{d(x,v)}{r} d(z,v) + \frac{r-d(x,v)}{r} d(y,z)$ и $\left|\tilde{d}(z,v) - d(z,v)\right| \leqslant \varepsilon/2$, так что мы можем указать D_4 в качестве приближённого значения $d'(z,v)$ с точностью ε.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Применяя s-m-n-теорему к функции ψ, мы получаем вычислимую функцию $g' \colon \omega^5 \to \omega$, такую что для всех e_0, c, a, i, j с указанными выше свойствами выполнено $d' = d_{g'(e_0,c,a,i,j)}$.

Теперь легко получить функцию g из утверждения леммы. В качестве $g(0)$ возьмём индекс ρ_0. Пусть значения $g(0), \ldots, g(n)$ уже определены. Чтобы вычислить $g(n+1)$, перейдём на шаг s_{n+1}. Ясно, что элементы $x = w_a$ и $y = w_b$ выбираются на шаге s_{n+1} эффективным образом. Т. к. $\rho_{s_0}, \ldots, \rho_{s_n}$ — вычислимые метрики, то $\Delta_{s_0}(x), \ldots, \Delta_{s_n}(x)$ суть вычислимые вещественные числа. Значит, рациональные числа $r = q_i$ и $h = q_j$ также выбираются эффективно. Полагая $g(n+1) = g'(g(n), a, b, i, j)$, мы видим, что $\rho_{s_{n+1}} = d_{g(n+1)}$. □

Лемма 4.4. *Метрика $\widehat{\rho}$ вычислима.*

Доказательство. Мы покажем, что для всех $n, m \in \omega$ имеет место равенство $\widehat{\rho}(w_n, w_m) = \rho_s(w_n, w_m)$ для наименьшего активного шага $s > \max(n, m)$. Из этого следует, что расстояние $\widehat{\rho}(w_n, w_m)$ вычислимо равномерно по m, n.

Пусть s — выбранный выше шаг. Тогда $w_n, w_m \in A_s$. Точка x и рациональное число r выбираются на шаге s так, чтобы $w_n, w_m \notin B_{\rho_{s'}}(x, r)$, где s' — предыдущий активный шаг. По предложению 4.8 имеем $\rho_s(w_n, w_m) = \rho_{s'}(w_n, w_m)$. Повторяя это рассуждение для всех последующих активных шагов, видим, что это расстояние больше не изменится, т. е. $\widehat{\rho}(w_n, w_m) = \rho_s(w_n, w_m)$. □

Лемма 4.5. *Всякое требование $\mathcal{R}_{ezz'}$ выполнится.*

Доказательство. Предположим, что какое-то требование $\mathcal{R}_{ezz'}$ не выполнено, т. е. найдутся вычислимая метрика $d_e \in M(\mathbf{X})$ и тьюринговы функционалы Φ_z и $\Phi_{z'}$, сводящие ρ и $\widehat{\rho}$ к d_e, соответственно. Пусть $n = \langle e, z, z' \rangle$. На некотором шаге s_0 мы обнаруживаем, что $d_e(y, \lambda) > 0$, где $y = w_{f_0(n)} = w_b$, и фиксируем k со свойством $d_e(y, \lambda) > 2^{-k+1}$. На некотором шаге $s_1 \geqslant s_0$ мы обнаруживаем, что $\Phi_{z,s_1}(f_\lambda)(k+1) \downarrow$ и $\Phi_{z',s_1}(\bar{b})(k+1) \downarrow$. На этом шаге мы выбираем специальную точку $x \in C_\rho^{z,f_\lambda,k}$ и определяем метрику ρ_{s_1} так, что $\rho_{s_1}(x, y) = h < 2^{-\varphi_{z',s_1}(\bar{b})(k+1)+1}$. Из предложений 4.6 и 4.8 следует, что расстояние $\rho_{s_1}(x, y)$ не будет изменяться после шага s_1, поэтому $\widehat{\rho}(x, y) = \rho_{s_1}(x, y) = h$ и $x \in C_{\widehat{\rho}}^{z',\bar{b},k}$. Применяя лемму 4.2, мы видим, что $d_e(x, \lambda) < 2^{-k}$

и $d_e(x,y) < 2^{-k}$, значит, $d_e(y,\lambda) < 2^{-k+1}$, что противоречит выбору k. Значит, либо d_e не является подходящей метрикой на X, или Φ_z не сводит ρ к d_e, или $\Phi_{z'}$ не сводит $\widehat{\rho}$ к d_e, что означает, что требование $\mathcal{R}_{ezz'}$ выполнено. $\square$

Теорема 4.4 полностью доказана.

Заключение

В диссертации исследовались упорядочения степеней вычислимых метрик на польском пространстве $\mathbf{X}$ по вычислимой и слабой сводимостям. Были получены следующие результаты:

1. Доказано, что все выпуклые метрики на $\mathbf{R}$ лежат в одной степени по вычислимой сводимости. Результат опубликован в [67].

2. Построена бесконечная последовательность вычислимых метрик на вещественной прямой, не сравнимых друг с другом относительно слабой сводимости и вычислимо сводимых к стандартной метрике на $\mathbf{R}$. Результат опубликован в [67].

3. Построена бесконечная последовательность вычислимых метрик на вещественной прямой, не сравнимых друг с другом относительно слабой сводимости и находящихся выше стандартной метрики на $\mathbf{R}$ относительно вычислимой сводимости. Результат опубликован в [68].

4. Доказано, что любой счётный частичный порядок вложим в упорядочение степеней вычислимых метрик на $\mathbf{R}$ по слабой сводимости выше степени стандартной метрики. Результат опубликован в [68].

5. Доказано, что счётная безатомная булева алгебра вложима в упорядочение степеней вычислимых метрик на $\mathbf{R}$ по вычислимой сводимости выше степени стандартной метрики с сохранением точных верхних и нижних граней. Результат опубликован в [68].

6. Доказано, что любой счётный частичный порядок вложим в полурешётку степеней вычислимых метрик на произвольном польском пространстве $\mathbf{X}$ по вычислимой сводимости ниже степени любой метрики, относительно которой существует вычислимая предельная точка. Результат опубликован в [69].

7. Доказано, что нижняя полурешётка степеней вычислимых метрик на $\mathbf{X}$ не является направленным вверх порядком и не является верхней полурешёткой в случае, если существует вычислимая метрика на $\mathbf{X}$, относительно которой существует вычислимая предельная точка. Результат опубликован в [69].

Полученные результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях в области вычислимого анализа для изучения представлений топологических пространств.

Список литературы

[1] Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М. : Наука, 1977.

[2] Заславский И. Д. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций // Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический анализ, Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 67. М.–Л. : Изд-во АН СССР. С. 385–457.

[3] Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М. : Наука, 1973.

[4] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М. : Наука, 1965.

[5] Марков А. А. О конструктивных функциях // Проблемы конструктивного направления в математике. 1, Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1958. Т. 52. М.–Л. : Изд-во АН СССР. С. 315–348.

[6] Цейтин Г. С. Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах // Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический анализ, Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 67. М.–Л. : Изд-во АН СССР. С. 295–361.

[7] Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства // Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический анализ, Сборник работ. Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 67. М.–Л. : Изд-во АН СССР. С. 15–294.

[8] Aberth O. Computable analysis. New York : McGraw-Hill, 1980.

[9] Ambos-Spies K., Weihrauch K., Zheng X. Weakly computable real numbers // Journal of Complexity. 2000. V. 16, N 4. P. 676–690.

[10] Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. 1922. V. 3. P. 133–181.

[11] Brattka V., Hertling P. Topological Properties of Real Number Representations // Theoret. Comput. Sci. 2002. V. 284, N 2. P. 241–257.

[12] Brattka V., Hertling P., Weihrauch K. A Tutorial on Computable Analysis // New Computational Paradigms. New York : Springer, 2008. P. 425–491.

[13] Brattka V., Presser G. Computability on subsets of metric spaces // Theoret. Comput. Sci. 2003. V. 305, N 1–3. P. 43–76.

[14] Brattka V., Weihrauch K. Computability on subsets of Euclidean space I: closed and compact subsets // Theoret. Comput. Sci. 1999. V. 219, N 1–2. P. 65–93.

[15] Borel É. Le calcul des intégrales définies // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1912. Série 6, tome 8. P. 159–210.

[16] Binns S., Simpson S. Embeddings into the Medvedev and Muchnik lattices of Π^0_1 classes // Archive for Mathematical Logic. 2004. V. 43, N 3. P. 399–414.

[17] Dillhage R. Computable Functional Analysis: Compact Operators on Computable Banach Spaces and Computable Best Approximation. Dissertation. Fakultät für Mathematik und Informatik, FernUniversität in Hagen, 2012.

[18] Downey R., Hirschfeldt D. Algorithmic Randomness and Complexity. New York : Springer, 2010.

[19] Dudley R. M. On sequential convergence // Transactions of the American Mathematical Society. 1964. V. 112, N 3. P. 483–507.

[20] Engelking R. General Topology. Berlin : Heldermann, 1989.

[21] Ershov Yu. L. Theory of numberings // E. R. Griffor. Handbook of computability theory (Stud. Logic Found. Math., 140). Amsterdam : Elsevier, 1999. P. 473–503.

[22] Fréchet M. Les dimensions d'un ensemble abstrait // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 145–168.

[23] Fréchet M. Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits // Bull. Sci. Math. 1918. V. 42. P. 138–156.

[24] Grzegorczyk A. Computable functionals // Fund. Math. 1955. V. 42, N 1. P. 168–202.

[25] Grzegorczyk A. On the definitions of computable real continuous functions // Fund. Math. 1957. V. 44, N 1. P. 61–71.

[26] Heinonen J. Geometric embeddings of metric spaces. Jyväskylä : University of Jyväskylä, 2003.

[27] Hertling P. A Banach-Mazur computable but not Markov computable function on the computable real numbers // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. V. 132, N 2–3. P. 227–246.

[28] Iljazović Z. Isometries and Computability Structures // Journal of Universal Computer Science. 2010. V. 16, N 18. P. 2569–2596.

[29] Iljazović Z. Co-c. e. spheres and cells in computable metric spaces // Log. Methods Comput. Sci. 2011. V. 7, N 3. P. 1–21.

[30] Iljazović Z., Kihara T. Computability of Subsets of Metric Spaces. Preprint.

[31] Khamsi M. A., Kirk W. A. An introduction to metric spaces and fixed point theory. New York : John Wiley & Sons, 2001.

[32] Ko K., Friedman H. Computational complexity of real functions // Theoret. Comput. Sci. 1982. V. 20, N 3. P. 323–352.

[33] Ko K. Reducibilities on real numbers // Theoret. Comput. Sci. 1984. V. 31, N 1–2. P. 101–123.

[34] Ko K. On the continued fraction representation of computable real numbers // Theoret. Comput. Sci. 1986. V. 47. P. 299–313.

[35] Kreitz Ch., Weihrauch K. Theory of representations // Theoret. Comput. Sci. 1985. V. 38. P. 35–53.

[36] Kreitz Ch., Weihrauch K. Representations of the real numbers and of the open subsets of the set of real numbers // Ann. Pure Appl. Logic. 1987. V. 35. P. 247–260.

[37] Lacombe D. Les ensembles récursivement ouverts ou fermés, et leurs applications à l'analyse récursive // Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris). 1957. vol. 245. P. 1040–1043.

[38] Lacombe D. Quelques procédés de définition en topologie récursive // Constructivity in mathematics. Proceedings of the colloquium held at Amsterdam, 1957. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1959. P. 129–158.

[39] Mazur S. Computable Analysis. Rozprawy Matematyczne, vol. 33. Warsaw, 1963.

[40] McNicholl T. Computable copies of ℓ^p // Computability. 2017. V. 6, N 4. P. 391–408.

[41] Melnikov A. G. Computably Isometric Spaces // J. Symb. Log. 2013. V. 78, N 4. P. 1055–1085.

[42] Melnikov A. G., Nies A. The classification problem for compact computable metric spaces // The Nature of Computation. Logic, Algorithms, Applications. Heidelberg : Springer, 2013. P. 320–328.

[43] Melnikov A. G., Ng K. M. Computable structures and operations on the space of continuous functions // Fund. Math. 2016. V. 233. P. 101–141.

[44] Miller J. Degrees of unsolvability of continuous functions // J. Symb. Log. 2004. V. 69, N 2. P. 555–584.

[45] Mori T., Tsujii Y., Yasugi M. Computability structures on metric spaces // Combinatorics, Complexity and Logic. Proc. DMTCS'96. Berlin : Springer, 1996. P. 351–362.

[46] Moschovakis Y. N. Recursive metric spaces // Fund. Math. 1964. V. 55. P. 215–238.

[47] Pour-El M. B., Richards J. I. Computability in Analysis and Physics. Berlin : Springer-Verlag, 1989.

[48] Robinson R. Review of R. Peter's book, 'Rekursive Funktionen' // J. Symbolic Logic. 1951. V. 16. P. 280–282.

[49] Rogers H. Gödel numberings of partial recursive functions // J. Symb. Log. 1958. V. 23. N 3. P. 331-341.

[50] Rogers H. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. New York : McGraw-Hill, 1967.

[51] Schröder M. Admissible Representations of Limit Spaces // Computability and Complexity in analysis 2000. Lecture Notes in Computer Science. Berlin : Springer, 2001. P. 273–295.

[52] Schröder M. Extended admissibility // Theoret. Comput. Sci. 2002. V. 284, N 2. P. 519–538.

[53] Schröder M. A Natural Weak Limit Space with Admissible Representation which is not a Limit Space // Electron. Notes Theor. Comput. Sci. 2002. V. 66, N 1. P. 165–175.

[54] Schröder M. Admissible representations for continuous computations. Dissertation. University of Hagen, 2003.

[55] Shore R. The Turing degrees: An introduction // Forcing, Iterated Ultrapowers, and Turing Degrees. World Scientific, 2015. P. 39–121.

[56] Soare R. Recursively Enumerable Sets and Degrees: A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets. Springer Science and Business Media, 1987.

[57] Specker E. Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis // J. Symb. Log. 1949. V. 14, N 3. P. 145–158.

[58] Turing A. M. On computable numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem" // Proc. London Math. Soc. 1936. V. 42, N 2. P. 230–265.

[59] Turing A. M. On computable numbers, with an application to the "Entscheidungsproblem". A correction // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43, N 2. P. 544–546.

[60] Weihrauch K. Type 2 recursion theory // Theor. Comput. Sci. 1985. V. 38. P. 17–33.

[61] Weihrauch K. Computability on Computable Metric Spaces // Theor. Comput. Sci. 1993. V. 113, N 2. P. 191-210.

[62] Weihrauch K. Computable Analysis. An Introduction. Berlin/Heidelberg : Springer-Verlag, 2000.

[63] Weihrauch K., Zheng X. Effectiveness of the global modulus of continuity on metric spaces // Theoret. Comput. Sci. 1999. V. 219, N 1–2. P. 439–450.

[64] Yasugi M., Mori T., Tsujii Y. Effective properties of sets and functions in metric spaces with computability structure // Theoret. Comput. Sci. 1999. V. 219, N 1–2. P. 467–486.

[65] Zheng X. Recursive approximability of real numbers // Mathematical Logic Quarterly. 2002. V. 48, S1. P. 131–156.

[66] Zheng X. A computability theory of real numbers // Proceedings of the Second conference on Computability in Europe: Logical approaches to computational barriers (CiE'06). Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. P. 584–594.

Работы автора по теме диссертации

[67] Корнев Р. Сводимость вычислимых метрик на вещественной прямой // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, N 4. С. 453–476.

[68] Kornev R. Computable metrics above the standard real metric // Sib. Electron. Math. Rep. 2021. V. 18. P. 377–392.

[69] Корнев Р. А. Полурешетка степеней вычислимых метрик // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, N 5. С. 1013–1038.

[70] Корнев Р. А. О вычислимых представлениях Коши стандартной топологии на **R** // Материалы 53-й международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. Новосибирск : НГУ, 2015. С. 9.

[71] Kornev R. Reducibilities of computable metrics on the real line // Мальцевские чтения 2016. Тезисы докладов. Новосибирск, 2016. С. 62.

[72] Kornev R. Reducibilities of computable metrics on the real line // Bull. Symb. Logic. 2017. V. 23, N 2. P. 247.

[73] Kornev R. Computable metrics above the standard real metric // Logic Colloquium 2018. Programme and abstracts. Udine, 2018. P. 97-98.

[74] Kornev R. Computable metrics above the standard real metric // Fifteenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis 2018. Program and abstracts. 2018. P. 49.

[75] Kornev R. Embeddings of partial orderings into reducibility of real metrics // Мальцевские чтения 2019. Тезисы докладов. Новосибирск, 2019. С. 93.

[76] Kornev R. On a semilattice of degrees of computable metrics // Мальцевские чтения 2020. Тезисы докладов. Новосибирск, 2020. С. 130.