

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Дудкин Федор Анатольевич

Групповые и алгоритмические свойства
обобщённых групп Баумслэга–Солитера

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Научный консультант

д.ф.-м.н., профессор

Н. С. Романовский

Новосибирск – 2022

Оглавление

Введение	4
1 Обозначения и предварительные результаты	20
1.1 Определения	20
1.2 Обозначения и соглашения	27
1.3 Используемые результаты	28
2 Группы Баумслага–Солитера и их связь с GBS группами	30
2.1 Абстрактный соизмеритель групп Баумслага–Солитера	30
2.2 Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага–Солитера	47
2.3 Вложение групп Баумслага–Солитера в GBS группы	54
3 Централизаторная размерность и универсальная эквивалентность GBS групп	59
3.1 Централизаторная размерность при $\Delta(G) \not\subseteq \{\pm 1\}$	59
3.2 Централизаторная размерность GBS групп, представленных деревьями с метками	62
3.3 Централизаторная размерность при $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$	80
3.4 Универсальная эквивалентность GBS групп	99
4 Классы GBS групп	106
4.1 \mathcal{F}_π -аппроксимируемые GBS группы	106
4.2 Группы n -узлов, действующие на деревьях	108

4.3	Подгруппы конечного индекса небольших GBS групп	114
5	Проблемы изоморфизма и вложения GBS групп	121
5.1	Проблема вложения GBS групп	121
5.2	Допустимые скольжения мобильных рёбер	142
5.3	Проблема изоморфизма GBS групп с одним мобильным ребром	152
	Заключение	163
	Литература	165

Введение

Постановка задачи. Часто интерес к той или иной конечно порождённой группе обусловлен тем, что она вкладывается в группу автоморфизмов некоторой важной системы \mathcal{A} (векторного пространства, графа, другой группы и т.д.). Если удаётся описать такие группы и изучить их свойства, это приводит к более полному пониманию свойств самой системы \mathcal{A} .

Конечно порождённая группа, которая действует на дереве так, что все вершинные и рёберные стабилизаторы – бесконечные циклические группы, называется *обобщённой группой Баумслага–Солитера* (GBS группа). Обобщённые группы Баумслага–Солитера являются основным объектом изучения настоящей диссертации.

По теореме Басса-Серра, всякая GBS группа G представляется в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группы графа групп \mathbb{A} [83], вершинные и рёберные группы которого бесконечные циклические. Вложения рёберных групп в вершинные в этом случае удобно задавать целыми ненулевыми числами — образами порождающих рёберных групп в вершинных группах (последние отождествляем с \mathbb{Z}). Такие целые числа называются метками на рёбрах. Поэтому всякой GBS группе G можно сопоставить граф с метками \mathbb{A} . Такой граф с метками соответствует действию группы G на дереве и задаёт копредставление группы G .

В диссертации изучаются теоретико групповые и алгоритмические свойства GBS групп и их зависимость от соответствующих графов с метками.

Наряду с классическими алгоритмическими проблемами теории групп — проблемой изоморфизма и проблемой вложения — мы исследуем универсальную эквивалентность GBS групп. Универсально эквивалентные группы имеют одинаковую

c -размерность, т. е. максимальную длину цепей строго вложенных централизаторов. Поэтому описание централизаторов элементов и подмножеств весьма полезно для изучения универсальной эквивалентности. Кроме того, такое описание играет важную роль для решения уравнений в группах. В диссертации получено полное описание централизаторов и централизаторной размерности GBS групп.

Оказалось, что GBS группы могут обладать весьма различными свойствами в зависимости от графа с метками. Поэтому естественной представляется следующая задача: для данного класса групп \mathcal{K} описать такие графы с метками, которые задают GBS группы, принадлежащие классу \mathcal{K} . В диссертации получены результаты подобного типа для \mathcal{F}_π -аппроксимируемых групп и групп n -узлов. В 2015 году Ж.Левитт [68] описал все небольшие GBS группы и поставил вопрос об описании подгрупп конечного индекса в них. Эти подгруппы тоже являются GBS группами, и их полное описание получено в диссертации.

Особую роль в комбинаторной и геометрической теории групп играют группы Баумслага–Солитера. Г. Баумслаг и Д. Солитер [23] впервые предложили серию примеров групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются:

$$BS(m, n) = \langle a, t \mid t^{-1}a^m t = a^n \rangle.$$

Оказалось, что среди этих групп есть бесконечная серия нехопфовых групп. Кроме того, группы Баумслага–Солитера оказались интересными и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т.д.

Группа $BS(m, n)$ может действовать на дереве левых смежных по подгруппе $\langle a \rangle$ так, что стабилизаторы вершин и рёбер этого действия — бесконечные циклические группы. Поэтому группы Баумслага–Солитера и их подгруппы конечного индекса являются GBS группами. Изучение свойств и структуры групп Баумслага–Солитера и связь этих групп с обобщёнными группами Баумслага–Солитера — одна из задач диссертации.

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Обобщённые группы Баумслага–Солитера впервые появляются как самостоятельный класс групп в 1990 году в работе П. Крофоллера [64]. Несмотря на то, что термин «обоб-

щённые группы Баумслэга–Солитера» в этой работе ещё не используется, установлены два важных свойства: нециклические GBS группы – в точности такие конечно порождённые группы кохомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую группу; GBS группы когерентны (всякая конечно порождённая подгруппа допускает конечное копредставление). Термин «обобщённые группы Баумслэга–Солитера» находит активное употребление (и GBS группы начинают активно изучаться) с начала 2000-х годов.

Существенное внимание GBS группам было уделено именно с точки зрения их геометрических свойств, действия на различных объектах и гомологических свойств.

Так, в 2011 году Д. Робинсон [77] описал структуру мультипликатора Шура (вторая группа целочисленных гомологий) произвольной GBS группы и предложил некоторые приложения к центральным расширениям.

Д. Дегрис и Н. Петросян [40] в 2015 году изучают кохомологические размерности Брэдона групп, действующих на $CAT(0)$ пространствах, и получают описание таких размерностей для GBS групп. В этом же году появляется работа Дж. Гандини, С. Мейнерта и Х. Рупинга [52] в которой доказано, что гипотеза Фаррелла–Джонса справедлива для графов групп с абелевыми вершинными группами, в частности для GBS групп.

В 2017 году Н. Браунло, А. Манди, Д. Паск, Дж. Спилберг и А. Томас [26] изучали действие GBS групп на границах соответствующих деревьев Басса–Серра. Они установили критерий топологической свободы этого действия. Кроме того, авторы описали C^* -алгебры, ассоциированные с GBS группами.

А. Дэльгадо, Д. Робинсон и М. Тимм [39] в 2018 году исследуют связь между трёхмерными многообразиями и GBS группами. Они классифицируют GBS группы, которые являются фундаментальными группами компактных ориентируемых трёхмерных многообразий.

В 2019 году К. Гийбо, М. Моран и К. Тирель [56] исследуют геометрическое (собственное, кокомпактное изометриями) действие GBS групп на «хороших» метрических пространствах и устанавливают, что всякая GBS группа допускает Z -структуру. Через год первые два автора вместе с К. Шривом [57] обобщают полу-

ченные результаты для более широкого класса графов групп.

Исследование Ф. Фурнье-Фачио [51], опубликованное в 2021 году, посвящено устойчивости метрических приближений счётных групп относительно групп наделённых ультраметрикой (стабильность). Основным примером такой устойчивости является p -адический аналог устойчивости Улама. Получены некоторые достаточные условия стабильности групп Баумслага–Солитера и GBS групп относительно семейства почти про- π -групп.

Обобщённые группы Баумслага–Солитера, как и группы Баумслага–Солитера, служат богатым источником примеров и контрпримеров. В 2003 году М. Форестер [49] находит среди GBS групп два JSJ разложения, которые дают отрицательный ответ на вопрос И. Рипса и Ж. Зелы [79] о связи двух JSJ разложений одной группы некоторыми типами преобразований.

Существенная часть исследований GBS групп находится в классическом русле теории групп — изучаются структурные и комбинаторные свойства GBS групп $\pi_1(\mathbb{A})$ в зависимости от графа с метками \mathbb{A} .

Так, в 2007 году Ж. Левитт [67] исследует автоморфизмы GBS групп и показывает, что числа Редемейстера гомоморфизмов GBS групп, как правило, бесконечны. Позже, в 2015 году, Ж. Левитт [68] предлагает алгоритм, который по дереву с метками вычисляет ранг (что удаётся сделать не так уж и часто) соответствующей GBS группы, и доказывает, что ранг подгруппы конечного индекса GBS группы не может быть меньше ранга самой группы.

В 2011 году А. Дэльгадо, Д. Робинсон и М. Тимм [36] описали GBS группы, которые не имеют факторгрупп, отличных от \mathbb{Z} , и построили естественные примеры геометрических гомоморфизмов.

А. Дэльгадо, Д. Робинсон и М. Тимм [37] в 2014 году показывают, как можно сконструировать граф с метками любой разрешимой GBS группы.

С. Мейнерт [71] в 2015 году продолжает изучать автоморфизмы GBS групп. Он доказывает, что если GBS группа не содержит разрешимую группу Баумслага–Солитера, то её автоморфизмы можно изучать с помощью теории трейн-треков.

В 2016 году Дж. Баттон и П. Крофоллер [31] исследуют SQ -универсальность

GBS групп и доказывают, что всякая обобщённая группа Баумслэга–Солитера либо SQ -универсальна, либо изоморфна разрешимой группе Баумслэга–Солитера, либо бесконечная циклическая группа. Это подчёркивает богатство класса GBS групп.

А. Дэльгадо, Д. Робинсон и М. Тимм [38] в 2017 году изучают центры и циклические радикалы GBS групп. Авторы находят критерии их нетривиальности и предлагают алгоритм вычисления центра и циклического радикала. Кроме того, для каждого графа с метками унимодулярной GBS группы строится такое минимальное покрытие, что метки вокруг каждой вершины постоянны по модулю.

Так как GBS группы можно получить, используя свободные конструкции, то естественно обсуждать различные классические алгоритмические проблемы для GBS групп. В 2015 году Б. Бикер [24] исследовал проблему кратной сопряжённости для графов абелевых групп и доказал, в частности, что она разрешима для GBS групп.

Проблеме изоморфизма GBS групп посвящена серия работ. В 2002 году М. Форестер [48] доказывает важный критерий изоморфизма GBS групп. Этот критерий, как и теорема о преобразованиях Титце, помогает лучше понять классы изоморфных GBS групп, но не решает проблему изоморфизма. В 2006 году М. Форестер [50] продолжает изучать проблему изоморфизма GBS групп и решает её для таких GBS групп, у которых образ модулярного гомоморфизма не содержит целых чисел, отличных от единицы.

В 2008 году М. Клэй и М. Форестер [32] делают новую попытку систематического изучения проблемы изоморфизма GBS групп. Они предлагают алгоритм, проверяющий, верно ли, что данная GBS группа представляется конечным числом редуцированных графов с метками (в этом случае решение проблемы изоморфизма тривиально), и решают проблему изоморфизма для GBS групп, которые можно представить графами с метками, содержащими не более одного ребра вне максимального поддерева. В следующем году М. Клэй [33] изучает разнообразие графов с метками, задающих одну GBS группу, и доказывает, что деформационное пространство G -деревьев стягиваемо.

М. Клэй и М. Форестер [34] в 2009 году модифицируют результат М. Форестера

[48] 2002 года. Они предлагают специальные виды преобразований редуцированных графов с метками: скольжения, индукции и \mathcal{A}^\pm -движения. Оказывается, любые два редуцированных графа с метками представляют изоморфные GBS группы тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность графов с метками, соединяющая два данных графа. Причём все графы с метками в этой последовательности редуцированы, а соседние связаны скольжениями, индукциями или \mathcal{A}^\pm -движениями.

Особое место при изучении GBS групп занимает вопрос об их связи с группами Баумслага–Солитера. В 2001 году К. Вайт [92] использует название \mathbb{Z} графы для графов с метками, показывает, что все неразрешимые группы Баумслага–Солитера квазиизометричны, и доказывает, что либо GBS группа изоморфна разрешимой группе Баумслага–Солитера, либо является почти $F_n \times \mathbb{Z}$ группой, либо квазиизометрична неразрешимой группе Баумслага–Солитера. Таким образом подчёркивается тесная связь GBS групп и групп Баумслага–Солитера.

В 2015 году у Ж. Левитта выходит статья [69], в которой он тщательно изучает отношения между GBS группами и группами Баумслага–Солитера. Он описывает все GBS группы, которые могут быть факторгруппами групп Баумслага–Солитера, и указывает, какие GBS группы можно гомоморфно отобразить на нехопфовы группы Баумслага–Солитера. Также в этой работе Ж. Левитт изучает гомоморфизмы GBS групп и получает обобщение результата Д. Кочлуковой [63] об инъективных эпиморфизмах групп Баумслага–Солитера.

Обобщённые группы Баумслага–Солитера привлекают внимание и более широкого круга исследователей. В 2013 году в Сент-Андрусе прошла конференция «Groups St Andrews», на которой Д. Робинсон сделал часовой доклад о GBS группах. В своем докладе [78] он дал обзор недавних результатов о GBS группах, сформулировал ряд открытых проблем и гипотез. Ещё раньше, в 2010 году, Д. Робинсон [76] опубликовал обзор результатов о GBS группах, в котором отмечал, что эти группы обладают интересными теоретико-групповыми и алгоритмическими свойствами, а также имеют тесную связь с алгебраической топологией.

Абстрактный соизмеритель $Comm(G)$ группы G описывает богатство классов изо-

морфизмов подгрупп конечного индекса группы G . Несмотря на то, что для конечных групп $Comm(G)$ является тривиальной группой, для бесконечных групп, как правило, она содержит гораздо больше информации о группе G , чем группа $Aut(G)$. Например, $Aut(\mathbb{Z}^n) \cong GL_n(\mathbb{Z})$, в то время, как $Comm(\mathbb{Z}^n) \cong GL_n(\mathbb{Q})$. Менее очевидный и очень интересный факт заключается в том, что $Comm(G)$ существенно определяет возможные структуры топологических групп, содержащих G как открытую подгруппу.

Абстрактный соизмеритель точно описан лишь для нескольких классов групп. Для группы MCG_g классов отображений поверхностей Н. Иванов [60] нашёл $Comm(MCG_g)$. Б. Фарб и М. Хэндэль [47] доказали, что $Comm(Out(F_n)) \cong Out(F_n)$ для $n \geq 4$. К. Лейнингер и Д. Маргалит [65] нашли абстрактный соизмеритель группы кос B_n на $n \geq 4$ нитях. Для группы Ноттингема абстрактный соизмеритель подсчитал М. Ершов [45]. О. В. Богопольский [27] описал устройство $Comm(BS(1, n))$.

Для изучения абстрактного соизмерителя групп Баумслга–Солитера необходимо знать описание и свойства подгрупп конечного индекса этих групп. Такое описание было получено в кандидатской диссертации автора [42]. Кроме того, необходимо получить описание групп автоморфизмов этих подгрупп. Описание автоморфизмов самих групп Баумслга–Солитера может быть найдено в [35].

Поиск неприводимых представлений групп – важная задача теории групп. Если для группы G имеется описание неприводимых представлений, то это даёт не только понимание её групповой структуры, но и позволяет эффективнее производить вычисления в группе G . Д. Маклаури [70] описал неприводимые представления группы $BS(m, n)$ с помощью алгебраической геометрии. Пусть $\varphi: BS(m, n) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ – произвольное неприводимое представление и \mathbb{A} замыкание группы $\langle \varphi(a) \rangle$ в топологии Зарисского, а \mathbb{G} – замыкание всего образа $\varphi(BS(m, n))$. Решающее значение в работе Д. Маклаури имеет теорема о том, что группа \mathbb{A} является нормальной подгруппой группы \mathbb{G} .

Пусть p и q – взаимно простые целые числа, не равные 0, 1 и -1 , группа G является GBS группой и $\Delta: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$ – модулярный гомоморфизм. Понятно, что если $BS(p, q) \leq G$, то $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$. Обратно, если $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то в группе G разрешимо урав-

нение $x^{-1}y^p x = y^q$, при $y \neq 1$. Однако, неясно, верно ли, что в этом случае группа $BS(p, q)$ является подгруппой группы G . В 2007 году Ж. Левитт [67] среди прочих замечаний пишет, что, скорее всего, неверно то, что группа G содержит $BS(p, q)$, даже если $\frac{p}{q} \neq \pm 1$ принадлежит $\Delta(G)$. Позже [69], изучая GBS факторгруппы и подгруппы групп Баумслага–Солитера, Ж. Левитт решает этот вопрос. Он доказывает, что если $\pm 1 \neq \frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то в группе G есть подгруппа $BS(p, q)$. Основным инструментом доказательства – теория накрытий, предложенная Х. Бассом в 1993 году [22]. Эта проблема одновременно и независимо решена автором представленной диссертации. Кроме того, что работы были опубликованы почти одновременно, о независимости говорит ещё и тот факт, что в рамках диссертации не только доказано наличие вложения, но и предложены конкретные образы порождающих.

Работы [63, 69, 92] показывают, что свойства GBS групп сильно зависят от образа модулярного гомоморфизма. Теперь становится ясно, что образ модулярного гомоморфизма, в свою очередь, соответствует наличию в GBS группах подгрупп, изоморфных группам Баумслага–Солитера. Так проясняется связь GBS групп и их подгрупп Баумслага–Солитера.

Решения проблемы изоморфизма, полученные ранее, были найдены при существенных ограничениях на образ модулярного гомоморфизма или на структуру графа с метками. Такие ограничения, как правило, приводили к тому, что допустимые скольжения поддавались описанию, и это позволяло решить проблему изоморфизма. Тем не менее последовательности скольжений могут быть устроены весьма сложно. До настоящего времени не было ясно, можно ли с помощью скольжения одного ребра получить ту или иную метку на этом ребре. В диссертации без ограничений на структуру графа с метками мы получаем исчерпывающее описание допустимых скольжений одного ребра.

Основная сложность в описании множества всех графов с метками, которые задают данную GBS группу, заключается в том, что в последовательности преобразований, соединяющих два данных графа с метками из этого множества, скольжения различных рёбер могут чередоваться, каждый раз внося существенные изменения в структуру графа с метками. Это создаёт непреодолимые сложности для попыток

получить некоторое разумное описание такого множества графов с метками. Тем не менее, если мы предположим, что только на одном ребре метки могут неограниченно расти, то с помощью описания меток на таком ребре удаётся получить желаемое описание множества всех графов с метками, представляющих данную GBS группу, которое не только доказывает разрешимость проблемы изоморфизма в этом случае, но и позволяет предложить алгоритм для решения этой проблемы.

Ещё одна классическая алгоритмическая проблема теории групп — проблема вложения. Для GBS групп, представленных графами с метками, её можно сформулировать так: определить алгоритмически, когда два данных графа с метками \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 задают GBS группы G_1 и G_2 так, что G_1 вкладывается в G_2 .

Проблема вложения для групп Баумслэга–Солитера изучалась с двух позиций. С одной стороны, для простых p и q все графы с метками, фундаментальные группы которых вкладываются в $BS(p, q)$, были описаны в [41]. Более того, для взаимно простых p и q , таких, что $p \neq \pm 1$ и $q \neq \pm 1$, графы с метками, соответствующие подгруппам конечного индекса групп $BS(p, q)$, были описаны в [42]. С другой стороны, для взаимно простых целых p и q , отличных от 0, 1 и -1 , было доказано [69], [95], что $BS(p, q)$ вкладывается в GBS группу G тогда и только тогда, когда $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$.

Теория накрытий Х. Басса [22] является удобным инструментом для изучения подгрупп GBS групп. Даже несмотря на технические сложности, связанные с применением основных результатов этой теории, она помогает изучать алгоритмическую разрешимость проблемы вложения для графов групп. Более того, теория позволяет не только доказывать наличие вложения, но и строить конкретные отображения.

А. Мясников и П. Шумяцкий [74] в 2004 году предложили называть централизаторной размерностью группы G максимальную длину цепочки вложенных централизаторов в группе G (обозн. $cdim(G)$). Если такого числа не существует, то полагают $cdim(G) = \infty$. В [43] А. Дункан, И. Казачков и В. Н. Ремесленников доказывают, что для каждого $m \geq 1$ класс групп данной централизаторной размерности m аксиоматизируется универсальной формулой логики первого порядка. Поэтому описание централизаторной размерности GBS групп может способствовать изучению универсальной теории GBS групп и решению вопроса об их универсальной эквивалентно-

сти.

Более того, в [43] А. Дункан, И. Казачков и В. Н. Ремесленников отмечают, что понятие централизаторной размерности совпадает с понятием высоты решётки централизаторов, предложенным Р. Шмидтом в 1970 году [81]. Решётки централизаторов изучались для различных групп большим числом авторов, например [11, 20, 25, 28, 46, 59, 62, 66, 82, 89, 90, 91].

Группа G называется аппроксимируемой группами из некоторого класса \mathcal{K} (или \mathcal{K} -аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса \mathcal{K} , образ элемента g относительно которого отличен от единицы. В случае, когда \mathcal{K} совпадает с классом \mathcal{F} всех конечных групп, такая группа называется финитно аппроксимируемой. Если π – непустое множество простых чисел, и $\mathcal{K} = \mathcal{F}_\pi$ – класс всех конечных π -групп, то группа G называется \mathcal{F}_π -аппроксимируемой.

В 1957 году К. Грюнберг [55], обсуждая идею аппроксимируемости различными классами групп (классом конечных, разрешимых, нильпотентных, p -групп и т.д.), предложил к рассмотрению понятие корневого класса групп \mathcal{K} . Это понятие выделяет общие важные свойства рассматриваемых классов и является довольно широким. В частности, классы всех конечных групп, конечных p -групп, разрешимых групп и всех групп без кручения являются корневыми. В 2021 году Е. В. Соколов [87] изучает аппроксимируемость GBS групп корневыми классами групп и получает критерии аппроксимируемости GBS групп нильпотентными, нильпотентами без кручения и свободными группами.

Для группы $BS(m, n)$ доказано в 1972 году [72], что такая группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m = \pm 1$, или $n = \pm 1$, или $m = \pm n$. В [92] доказано, что квазиизометричные GBS группы одновременно финитно аппроксимируемы или нет.

В 2008 году Д. Молдаванский и О. Иванова установили [7] критерий \mathcal{F}_π -аппроксимируемости разрешимых групп Баумслага–Солитера.

Так как \mathcal{F}_π -аппроксимируемые группы являются финитно аппроксимируемыми, то для описания \mathcal{F}_π -аппроксимируемых GBS групп надо знать, какие из них финитно

аппроксимируемы. В 2015 году Ж. Левитт описал [69] все финитно аппроксимируемые GBS группы. Оказалось, что GBS группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфна $BS(1, n)$ или $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$. В диссертации изучается вопрос \mathcal{F}_π -аппроксимируемости GBS групп.

Вообще, вопросами аппроксимируемости свободных конструкций занималось большое число алгебраистов. Особое место в этой деятельности занимают работы специалистов из Иваново, например [1, 2, 3, 4, 21, 73, 84, 85, 86, 88].

Группа n -узла — это фундаментальная группа $\pi_1(S^{n+2} - K^n, a)$ дополнения n -узла K^n в $n + 2$ -мерной сфере S^{n+2} . Начиная с 1-узла, можно построить копредставление Виртингера группы узла с соотношениями вида $x_i^w = x_j$, где x_i, x_j — порождающие, а w — некоторое слово. Базовые свойства групп узлов можно найти в монографиях А. Каваучи и Ю. Кузьмина [12, 61].

Обратно, если группа G задана копредставлением, как ответить на вопрос: будет ли это группа подходящего n -узла? В общем случае ответ неизвестен. Однако, можно использовать некоторые свойства групп узлов для того, чтобы найти необходимые условия. Например, всякая группа узла является нормальным замыканием одного элемента потому, что в копредставлении Виртингера все порождающие сопряжены. Аналогично можно понять, что абелианизация G/G' является бесконечной циклической группой. Кроме того, $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$ [64].

М. Кервер доказал, что если конечно порождённая группа G удовлетворяет всем этим условиям, то G является группой n -узла для всякого $n \geq 3$. Эти замечания оказываются чрезвычайно полезны для изучения GBS групп, которые являются группами n -узлов для $n = 1$ и $n \geq 3$.

Особое направление в теории групп на стыке с математической логикой — изучение универсальных и экзистенциальных свойств групп. Напомним, что универсальная (экзистенциальная) теория группы G — это множество $\forall (\exists)$ -формул, истинных на группе G , обозначается $Th_\forall(G)$ ($Th_\exists(G)$). Две группы называются универсально (экзистенциально) эквивалентными, если их универсальные (экзистенциальные) теории совпадают. Заметим, что универсальная эквивалентность равносильна экзистенциальной эквивалентности. Понятие универсальной (экзистенциальной) эквива-

лентности является ослаблением понятия изоморфизма.

Для групп универсальную эквивалентность исследовали: Ю. Гуревич, А. Коко-рин в 1963 году [6] — для абелевых упорядоченных групп; Е. Тимошенко в 1968 году [18] — для сплетений групп и в 2010 году [19] — для частично коммутативных метабелевых групп; М. Касальс-Руис и И. Казачков в 2012 году [10] — для групп Баумслага–Солитера; А. Мищенко, Е. И. Тимошенко в 2011 году [14] — для частично коммутативных нильпотентных групп; А. Г. Мясников, Н. С. Романовский в 2011 году [16] — для жёстких разрешимых групп; Е. Бунина, Г. Калеева в 2016 году [5] — для линейных групп над полями и Г. Калеева в 2019 году [8] — для линейных групп над локальными кольцами с $1/2$. В диссертации представлены первые результаты об универсальной эквивалентности обобщённых групп Баумслага–Солитера.

Таким образом, мы видим, что несмотря на то, что класс GBS групп был определён не так давно, большое количество специалистов изучают эти группы с разных сторон. Это показывает, что обобщённые группы Баумслага–Солитера представляют существенный интерес для современных исследователей. Несмотря на это, много актуальных вопросов для GBS групп остаются открытыми. Поэтому стоит уделять больше усилий изучению GBS групп и их свойств.

Цель и основные результаты диссертации. Цель диссертации состоит в разработке методов изучения теоретико групповых и алгоритмических свойств обобщённых групп Баумслага–Солитера. Основные результаты диссертации таковы:

1. Описана структура абстрактного соизмерителя групп Баумслага–Солитера с взаимно простыми параметрами. Описаны неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага–Солитера с взаимно простыми параметрами. Найден критерий вложимости групп Баумслага–Солитера с взаимно простыми параметрами в GBS группу. Вложения построены явно. Тем самым получен ответ на вопрос Ж. Левитта 2007 года [93, 94, 95].

2. Для произвольной GBS группы описана централизаторная размерность. Указан алгоритм для вычисления s -размерности GBS групп. Найден критерий универсальной эквивалентности GBS групп, представленных деревьями с метками. Построен алгоритм проверки универсальной эквивалентности таких GBS групп

[96, 98, 99, 102].

3. Указан критерий \mathcal{F}_π -аппроксимируемости GBS групп. Описаны все группы n -узлов, которые действуют на деревьях с бесконечными циклическими стабилизаторами вершин и рёбер. Явно описаны подгруппы конечного индекса небольших GBS групп и изучены их свойства. Тем самым получен ответ на вопрос Ж. Левитта 2015 года [103, 104, 105].

4. Указан критерий вложения произвольной GBS группы в GBS группу, представленную конечным числом редуцированных графов с метками. Описан алгоритм проверки вложимости и построения вложения. Для GBS групп G , заданных графом с метками с одним мобильным ребром, указан алгоритм проверки изоморфизма произвольной GBS группы и группы G [97, 100, 101].

Результаты диссертации опубликованы в работах [93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук. Все основные результаты, кроме третьего, получены автором лично. Результат работы [104] получен в неразделимом соавторстве с А. С. Мамонтовым с решающим вкладом автора диссертации.

Новизна, теоретическая и практическая значимость результатов. Из работы П. С. Новикова [17] 1952 года следует, что в классе конечно определенных групп проблема изоморфизма алгоритмически неразрешима. Поэтому особый интерес представляет задача поиска интересных больших классов конечно определенных групп, для которых проблема изоморфизма разрешима. В последнее время были предприняты существенные усилия для решения проблемы изоморфизма GBS групп, однако, пока они не увенчались успехом. По определению всякая GBS группа может быть получена с помощью свободных конструкций из бесконечных циклических групп. Поэтому интуитивно GBS группы воспринимаются как вполне понятный объект для изучения. Эти соображения показывают, что класс GBS групп является значимым объектом в теории групп, и важно изучать алгоритмические и групповые свойства групп этого класса.

В диссертации получены результаты о структуре и свойствах GBS групп и их

связи с группами Баумслэга–Солитера. Все основные результаты диссертации являются новыми, что подтверждается публикациями автора в рецензируемых научных журналах и докладами на конференциях.

Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны в первую очередь специалистам по теории групп, теории алгоритмов и алгоритмической сложности. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические алгебраические методы и некоторые специальные методы комбинаторной и геометрической теории групп: задание групп с помощью копредставлений и преобразования Титце; элементы теории Басса–Серра; теория накрытий Х. Басса – для описания подгрупп данной GBS группы; специальные преобразования графов с метками; базовые факты матричной алгебры – для описания решения возникающих систем линейных уравнений; некоторые базовые свойства универсальных теорий.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на секционных докладах следующих конференций: международная конференция «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 2012, 2014 гг.), международная научная конференция «XI Белорусская математическая конференция» (г. Минск, Республика Беларусь, 5–9 ноября 2012 г.), международная конференция по теории групп, посвященная 70-летию В. Д. Мазурова (г. Новосибирск, 16–20 июля 2013 г.), международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (б.о. Эрлагол, Республика Алтай, 2013, 2017, 2019 гг.), международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (г. Минск, Республика Беларусь, 14–18 сентября 2015 г.), международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (г. Тула, 25–30 мая 2015 г.), международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (п. Эльбрус, Кабардино-Балкарская Республика, 17–22 мая 2017 г.), школа-конференция по теории групп, посвящённая 65-летию А. А. Махнева (г. Геленджик, 13-20 мая 2018 г.), международная конференция, посвящённая 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (г.

Москва, 28–31 мая 2019 г.).

Кроме того, по результатам диссертации были подготовлены следующие пленарные доклады: «Некоторые алгоритмические вопросы для групп, действующих на деревьях» на международной научной конференции «Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости» (г. Иваново, 2–5 декабря 2015 г.), «Алгоритмические проблемы для обобщённых групп Баумслэга–Солитера» на международной конференции «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 21–25 ноября 2016 г.), «Централизованная размерность обобщённых групп Баумслэга–Солитера» на всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов» (г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.), «Обобщённые группы Баумслэга–Солитера: свойства, результаты, проблемы» на международной конференции «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 20–24 сентября 2021 г.).

Результаты работы были доложены на семинарах «Геометрическая теория групп», «Эварист Галуа», «Теория групп» и «Алгебра и логика» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и НГУ.

Структура и объем диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь состоят из параграфов. Основные результаты диссертации называются теоремами. Все утверждения — предложения, леммы, следствия, замечания и теоремы — имеют тройную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер параграфа, третье — номер утверждения. Рисунки и формулы имеют двойную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер рисунка или формулы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 173 страницах, библиография содержит 105 наименований. В диссертации имеется 37 рисунков.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному консультанту Николаю Семёновичу Романовскому за интерес к результатам диссертации и за тот пример высокой математической культуры и эффективности, которым он являлся для автора на протяжении многих лет; своему наставнику и учителю Валерию Авдеевичу Чуркину за постоянное плодотворное обсуждение идей и результатов диссертации; своему соавтору Андрею Сергеевичу Мамонтову за содействие в исследова-

ниях; сотрудникам лаборатории алгебры Института математики им. С. Л. Соболева и кафедры алгебры и математической логики НГУ за прекрасную творческую атмосферу, в которой стала возможна подготовка диссертации. Отдельную благодарность автор выражает своей ученице Елизавете Алексеевне Шапориной за неизменную поддержку и сотрудничество.

Глава 1

Обозначения и предварительные результаты

1.1 Определения

Граф A — это множество вершин $V(A)$, множество рёбер $E(A)$, отображения $\partial_0, \partial_1: E(A) \rightarrow V(A)$ — начало и конец ребра, и инверсия $\bar{\cdot}: E(A) \rightarrow E(A)$ такая, что $\partial_0(\bar{e}) = \partial_1(e)$, $\partial_1(\bar{e}) = \partial_0(e)$, $\bar{\bar{e}} = e$, $\bar{e} \neq e$. Назовём множество рёбер

$$St_A(a) = \partial_0^{-1}(a) = \{e \in E(A) \mid \partial_0 e = a\}$$

звездой вершины a . Рёберный путь длины k $\gamma = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ — это такая последовательность рёбер, что $\partial_0(e_{i+1}) = \partial_1(e_i)$ для $i = 1, 2, \dots, k-1$. Петля — это такое ребро $e \in E(A)$, что $\partial_0(e) = \partial_1(e)$.

Если A — дерево, то для любых двух вершин u, v существует единственный кратчайший путь с началом u и концом v . Этот путь будем называть *геодезическим* и обозначать $u - v$.

Конечно порождённая группа G , которая действует на дереве так, что все вершинные и рёберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы, называется *обобщённой группой Баумслага–Солитера* (GBS группа). По теореме Басса–Серра группа G представляется в виде $\pi_1(\mathbb{A})$ — фундаментальной группы графа групп \mathbb{A} [83], вершинные и рёберные группы которого бесконечные циклические.

Всякой *GBS* группе G можно сопоставить *граф с метками* $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где A – конечный связный граф, а $\lambda: E(A) \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – метки на ребрах графа A . Метка $\lambda_e = \lambda(e)$, написанная на ребре e с началом в вершине v , определяет вложение $\alpha_e: e \mapsto v^{\lambda(e)}$ циклической рёберной группы $\langle e \rangle$ в циклическую вершинную группу $\langle v \rangle$.

Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{A})$ *графа с метками* $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ задаётся порождающими и определяющими соотношениями. Обозначим через \bar{A} граф, полученный из A отождествлением e и \bar{e} . Максимальное поддерево T графа \bar{A} задаёт копредставление группы $\pi_1(\mathbb{A})$

$$\left\langle \begin{array}{l} g_v, v \in V(\bar{A}), \\ t_e, e \in E(\bar{A}) \setminus E(T) \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_{\partial_0(e)}^{\lambda(e)} = g_{\partial_1(e)}^{\lambda(\bar{e})}, e \in E(T), \\ t_e^{-1} g_{\partial_0(e)}^{\lambda(e)} t_e = g_{\partial_1(e)}^{\lambda(\bar{e})}, e \in E(\bar{A}) \setminus E(T) \end{array} \right\rangle.$$

Если A – дерево, то $\pi_1(\mathbb{A})$ имеет копредставление

$$\left\langle g_v, v \in V(\bar{A}) \middle| g_{\partial_0(e)}^{\lambda(e)} = g_{\partial_1(e)}^{\lambda(\bar{e})}, e \in E(T) \right\rangle. \quad (1.1)$$

Для взаимно простых целых чисел p и q обозначим $T(p, q) = \langle x, y | x^p = y^q \rangle$ группу торического узла. Понятно, что группа $T(p, q)$ является *GBS* группой (соответствующий граф с метками изображён на рис. 1.1).

Если граф с метками \mathbb{B} состоит из одной вершины и одного геометрического ребра с метками p и q , то $\pi_1(\mathbb{B}) \cong BS(p, q)$. Поэтому всякая группа Баумслэга–Солитера является *GBS* группой (см. рис.1.1).

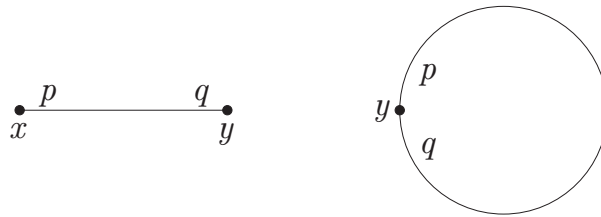


Рис. 1.1: Графы с метками групп $T(p, q)$ и $BS(p, q)$.

Группа $\pi_1(\mathbb{A})$ задаётся копредставлением, зависящим от выбора максимального поддерева T в графе A . Однако группы $\pi_1(\mathbb{A}, T_1)$ и $\pi_1(\mathbb{A}, T_2)$ изоморфны, см., например, [27].

Если B – связный подграф графа A , то можно выбрать максимальные поддеревья T_A и T_B графов A и B так, что $T_B \subseteq T_A$. Такой выбор максимальных поддеревьев будем называть *согласованным*.

Замечание 1.1.1. Если B – связный подграф графа A и $T_B \subseteq T_A$, то тождественный на порождающих гомоморфизм $\pi_1(\mathbb{B}, T_B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{A}, T_A)$ является вложением.

Доказательство. Индукция по числу рёбер вне B с использованием классических результатов о вложениях для свободного произведения с объединением и HNN расширения (см., например, [13]). \square

Если B_1, B_2 – два пересекающихся подграфа графа A , то выбрать максимальное поддерево T_A , согласованное с B_1 и B_2 , не всегда возможно. В этом случае надо подробнее остановиться на вложении $\pi_1(\mathbb{B}_1)$ и $\pi_1(\mathbb{B}_2)$ в $\pi_1(\mathbb{A})$. Для этого рассмотрим определение фундаментальной группы графа групп [27]. Для графов с метками оно эквивалентно уже данному определению.

Пусть \mathbb{A} – граф с метками, тогда

$$F(\mathbb{A}) = (*_{v \in V(A)} \langle v \rangle * F(t_e, e \in E(A))) / N,$$

где N – нормальное замыкание $t_e^{-1} \cdot g_{\partial_0(e)}^{\lambda(e)} \cdot t_e \cdot g_{\partial_1(e)}^{-\lambda(\bar{e})}, t_e \cdot t_{\bar{e}}, e \in E(A)$.

Пусть $v \in V(A)$, тогда $\pi_1(\mathbb{A}, v)$ – подгруппа группы $F(\mathbb{A})$, состоящая из элементов вида $g_0 \cdot t_{e_1} \cdot g_1 \cdot t_{e_2} \cdots \cdots t_{e_n} \cdot g_n$, где e_1, e_2, \dots, e_n – цикл в A с началом и концом v , $g_0 \in \langle v \rangle, g_i \in G_{\partial_1(e_i)}$.

Замечание 1.1.2. ([27, Теорема 16.5]) Для каждой $v \in V(A)$ обозначим элемент $t_{e_1} \cdot t_{e_2} \cdots \cdots t_{e_n}$ через γ_v , здесь e_1, e_2, \dots, e_n – кратчайший путь в T_A , соединяющий P и v , $\gamma_P = 1$. Тогда отображение на порождающих

$$v \mapsto \gamma_v \cdot v \cdot \gamma_v^{-1}, v \in V(A), t_e \mapsto \gamma_{\partial_0(e)} \cdot t_e \cdot \gamma_{\partial_1(e)}^{-1}, e \in E(A)$$

продолжается до изоморфизма $\varphi_P: \pi_1(\mathbb{A}, T_A) \rightarrow \pi_1(\mathbb{A}, P)$.

Если B_1, B_2 – два пересекающихся подграфа графа A , то можно взять $P \in B_1 \cap B_2$, тогда $\pi_1(\mathbb{B}_1, P)$ и $\pi_1(\mathbb{B}_2, P)$ естественно вкладываются в $\pi_1(\mathbb{A}, P)$. Будем понимать $\pi_1(\mathbb{B}_1)$ и $\pi_1(\mathbb{B}_2)$ как образы $\pi_1(\mathbb{B}_1, P)$ и $\pi_1(\mathbb{B}_2, P)$ в $\pi_1(\mathbb{A}, T_A)$ относительно φ_P .

В соответствии с [48] будем называть элемент группы $\pi_1(\mathbb{A})$ *эллиптическим*, если он сопряжён с элементом из $\langle a \rangle$, для некоторой $a \in V(A)$, иначе элемент называется *гиперболическим*. Эллиптический элемент будем называть *вершинным*, если он лежит в $\langle a \rangle$, для некоторой $a \in V(A)$.

Если группа G действует на дереве T и $g \in G$, то обозначим через $\overset{\circ}{g}$ (см. [27]) максимальное поддерево дерева T , которое g стабилизирует поточечно. Элемент g гиперболический тогда и только тогда, когда $\overset{\circ}{g} = \emptyset$.

Определим *модулярный гомоморфизм* $\Delta: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$. Для данного $g \in G$ выберем произвольный нетривиальный эллиптический элемент $a \in G$. Тогда для некоторых целых m и n , не равных 0, выполняется равенство $g^{-1}a^m g = a^n$. В этом случае полагаем $\Delta(g) = \frac{m}{n}$. Несложно доказать, что такое определение корректно. Модулярный гомоморфизм играет важную роль в исследовании *GBS* групп.

Если два графа с метками \mathbb{A} и \mathbb{B} определяют изоморфные *GBS* группы $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$, и группа $\pi_1(\mathbb{A})$ не изоморфна \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2 или группе бутылки Клейна $\langle a, b | a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$, то существует конечная последовательность *расширений* и *схлопываний* (см. рис. 1.2), соединяющая \mathbb{A} и \mathbb{B} [48]. Граф с метками называется *редуцированным*, если он не допускает схлопываний (метка ± 1 может появиться только на петле).

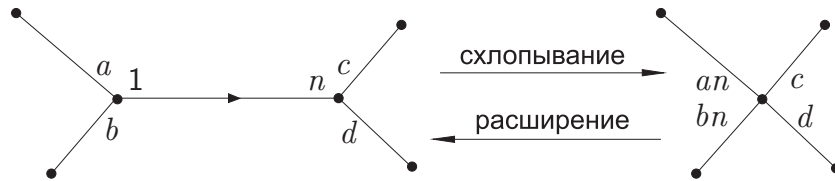


Рис. 1.2: Схлопывание и расширение.

Пусть G – некоторая группа, и M – некоторое её подмножество. Обозначим через $C(M)$ централизатор множества M в группе G :

$$C(M) = \{g \in G | g^{-1}mg = m, \text{ для всех } m \in M\}.$$

Предположим, что в группе G существует строго убывающая цепочка централиза-

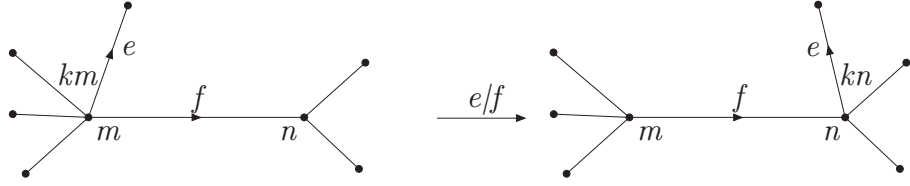


Рис. 1.3: Скольжение e/f .

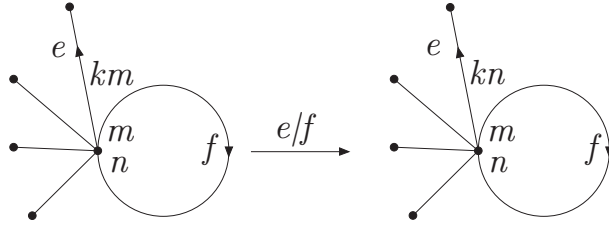


Рис. 1.4: Скольжение e/f .

торов $C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_d$ длины d , т.е. содержащая ровно d знаков включения, но не существует такой цепочки длины $d + 1$. Тогда *централизаторная размерность* $cdim(G)$ равна d . Если такого числа d не существует, то полагают $cdim(G) = \infty$. Более полные сведения о централизаторных размерностях групп можно найти в [74].

Обозначим через $\Omega(G)$ множество изоморфизмов подгрупп конечного индекса группы G . Два таких изоморфизма $\varphi_1: H_1 \rightarrow H'_1$ и $\varphi_2: H_2 \rightarrow H'_2$ назовём *эквивалентными* (пишем $\varphi_1 \sim \varphi_2$), если существует такая подгруппа конечного индекса H группы G , что оба изоморфизма определены на H и $\varphi_1|_H = \varphi_2|_H$.

Для двух данных изоморфизмов φ_1 и φ_2 из $\Omega(G)$ определим их произведение $\varphi_1\varphi_2: \varphi_1^{-1}(H'_1 \cap H_2) \rightarrow \varphi_2(H'_1 \cap H_2)$ — изоморфизм из $\Omega(G)$. Фактор множество $\Omega(G)/\sim$ наследует умножение $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ и является группой относительно такой операции. Будем называть такую группу *абстрактным соизмерителем группы G* или, для краткости, *соизмерителем группы G* и обозначать $Com(G)$.

Два элемента $g, h \in G$ называются *соизмеримыми*, если $g^k = h^l$ для $k, l \neq 0$. Множество $Com_G(g)$ элементов x таких, что xgx^{-1} соизмерим с g , называется *соизмерителем элемента g в группе G* .

Группа называется *хорфовой*, если всякий её гомоморфизм на себя имеет тривиальное ядро, т.е. является автоморфизмом.



Рис. 1.5: Индукция.

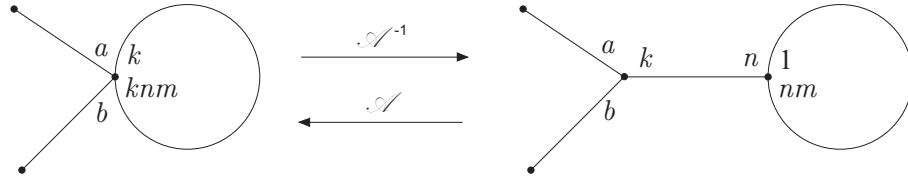


Рис. 1.6: \mathcal{A} и \mathcal{A}^{-1} движения.

Пусть группа G является свободным произведением групп A и B с объединёнными подгруппами $K \subseteq A$ и $L \subseteq B$. Последовательность $c_1, c_2, \dots, c_n, n \geq 0$, элементов из G называется *приведённой* [13], если:

- 1) каждое c_i лежит в одном из множителей A или B ;
- 2) последовательные c_i, c_{i+1} лежат в разных множителях;
- 3) если $n > 1$, то никакое c_i не лежит ни в K , ни в L ;
- 4) если $n = 1$, то $c_1 \neq 1$.

Там же доказано, что любой элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$ — произведения элементов некоторой приведённой последовательности c_1, c_2, \dots, c_n , и если $n \geq 1$, то $g \neq 1$ в группе G . Число n называется *длиной* элемента g относительно данного разложения группы G в свободное произведение с объединением и обозначается $|g|$. Заметим, что если $g \in B *_{K=L} C$ представлен приведённой последовательностью, то $|g \cdot h| = |g|$ для всех $h \in K = L$.

Последовательность $c_1, c_2, \dots, c_n, n \geq 0$ называется *циклически приведённой*, если любая её циклическая перестановка приведена. Любой элемент $g \in G$ может быть записан в приведённом виде $g = u \cdot v \cdot u^{-1}$, где $v = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$, для подходящей циклически приведённой последовательности c_1, c_2, \dots, c_n .

Предположим, что группа

$$G^* = \langle G, t \mid t^{-1}at = \varphi(a), a \in A \rangle$$

является HNN -расширением с базой G , проходной буквой t и связанными подгруппами A, B . Пусть $g_0, g_1, \dots, g_n \in G$ и $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}, i = 1, 2, \dots, n$. Последовательность $g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_n, (n \geq 0)$ называется *приведённой*, если в ней не встречаются подряд t^{-1}, g_i, t , где $g_i \in A$ и t, g_j, t^{-1} , где $g_j \in B$.

В группе G^* есть *правая (левая) нормальная форма элемента*, будем сокращённо называть её ПНФ (ЛНФ). Если слово $w \in G^*$ приведено, то через $|w|_t$ будем обозначать число вхождений t, t^{-1} в запись w и называть это t -длиной слова w [13].

Два представления $\varphi_1: H \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ и $\varphi_2: H \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ называют *эквивалентными*, если найдётся матрица $C \in GL_n(\mathbb{C})$ такая, что для любого $g \in G$ выполнено равенство $C^{-1}\varphi_1(g)C = \varphi_2(g)$.

Напомним, что *универсальная (экзистенциальная) теория* группы G – это множество \forall (\exists)-формул, истинных на группе G , обозначается $Th_{\forall}(G)$ ($Th_{\exists}(G)$). Две группы называются *универсально (экзистенциально) эквивалентными*, если их универсальные (экзистенциальные) теории совпадают. Заметим, что универсальная эквивалентность равносильна экзистенциальной эквивалентности. Понятие универсальной (экзистенциальной) эквивалентности является ослаблением понятия изоморфизма.

Пусть $\mathbb{A} = (A, \lambda), \mathbb{B} = (B, \mu)$ – графы с меткам, тогда набор

$$(\phi, (\sigma_a)_{a \in V(A)})$$

называется *морфизмом* $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ графов с метками, если:

1) $\phi: A \rightarrow B$ морфизм графов;

2) для всякого ребра $e \in E(A)$, соединяющего вершины a и b , выполнено соотношение

$$\frac{\sigma_a \cdot \lambda_e}{\mu_{\phi(e)}} = \frac{\sigma_b \cdot \lambda_{\bar{e}}}{\mu_{\phi(\bar{e})}},$$

и $\mu_{\phi(e)}$ делит $\sigma_a \cdot \lambda_e$.

Пусть $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ – морфизм графов с метками. Назовём пару (a, f) , $a \in V(A)$ и $f \in E(B)$ *допустимой*, если $\phi(a) = \partial_0(f) = b$. Для допустимой пары (a, f) обозначим через $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ребра из прообраза ϕ с началом в вершине a . Для допустимых

пар оказываются важными следующие условия (см. рис. 1.7):

$$\lambda_i = \frac{\mu_f}{(\sigma_a, \mu_f)}, \text{ для } i = 1, \dots, k, \text{ и } k \leq (\sigma_a, \mu_f). \quad (1.2)$$

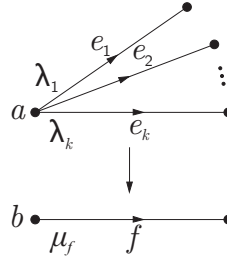


Рис. 1.7: Допустимая пара (a, f) .

Морфизм $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ графов с метками назовём *погружением*, если:

- 1) Все $\sigma_a, a \in V(A)$ не равны 0;
- 2) Соотношения (1.2) выполнены для всякой допустимой пары.

Погружение $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ графов с метками индуцирует вложение обобщённых групп Баумслага-Солитера $\pi_1(\mathbb{A}) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{B})$.

Группа G называется *аппроксимируемой группами из некоторого класса \mathcal{K}* (или *\mathcal{K} -аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса \mathcal{K} , образ элемента g относительно которого отличен от единицы. В случае, когда \mathcal{K} совпадает с классом \mathcal{F} всех конечных групп, такая группа называется *финитно аппроксимируемой*. Если π – непустое множество простых чисел, и $\mathcal{K} = \mathcal{F}_\pi$ – класс всех конечных π -групп, то группа G называется *\mathcal{F}_π -аппроксимируемой*.

Группа n -узла – это фундаментальная группа $\pi_1(S^{n+2} - K^n, a)$ n -узла K^n в $(n+2)$ -мерной сфере S^{n+2} .

1.2 Обозначения и соглашения

Буквами G, H, \dots обозначаются *GBS* группы.

$\Omega(G)$ – множество изоморфизмов подгрупп конечного индекса группы G ;

$BS(p, q) = \langle a, t | t^{-1}a^p t = a^q \rangle$ – группа Баумслага–Солитера;

$C(M)$ — централизатор множества M в группе G ;

$diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — диагональная $(n \times n)$ матрица;

$Comm(G)$ — абстрактный соизмеритель группы G ;

$\langle\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle\rangle_G$ — нормальное замыкание элементов g_1, g_2, \dots, g_n в группе G ;

$[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ — коммутатор элементов g и h в группе G ;

(m, n) — наибольший общий делитель m и n ;

$R(\mathbb{A})$ — множество редуцированных графов с метками, фундаментальная группа которых изоморфна $\pi_1(\mathbb{A})$;

$R(G)$ — множество редуцированных графов с метками, фундаментальная группа которых изоморфна G .

Далее будем считать, что p и q — взаимно простые целые числа (пишем $p \perp q$), не равные $0, 1, -1$.

Если не оговорено противное, то мы используем левую запись для отображений, т. е. $f: x \mapsto f(x)$. При этом композиция определяется следующим образом: $(fg)(x) = f(g(x))$.

Для удобства в дальнейшем будем обозначать через v как вершину графа A , так и соответствующий порождающий g_v фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{A})$.

1.3 Используемые результаты

Лемма 1.3.1. ([13, Лемма Бриттона]) Если последовательность $g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_n$ приведена и $n \geq 1$, то $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_n} g_n \neq 1$ в G^* .

В 2008 Д. И. Молдаванский и О. А. Иванова установили критерий \mathcal{F}_π -аппроксимируемости разрешимых групп Баумслэга–Солитера.

Утверждение 1.3.2. ([7, Теорема 1]) Пусть π — произвольное множество простых чисел. Группа $BS(1, k)$ \mathcal{F}_π -аппроксимируема тогда и только тогда, когда существует π -число $s > 1$, взаимно простое с k , порядок по модулю которого числа k также является π -числом.

В 2014 Ж. Левитт описал все финитно аппроксимируемые GBS группы.

Утверждение 1.3.3. ([69, Следствие 7.7]) *GBS группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфна $BS(1, n)$ или $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$.*

М. Кервер получил необходимые условия на группу G , чтобы она была группой узла.

Утверждение 1.3.4. ([61, Теорема 14.1.1]). *Пусть G – группа n -узла для некоторого $n \geq 1$. Тогда:*

- 1) G имеет конечное копредставление;
- 2) $G/G' \cong \mathbb{Z}$;
- 3) $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$;
- 4) G является нормальным замыканием одного элемента.

Для $n \geq 3$ эти условия становятся достаточными.

Утверждение 1.3.5. ([61, Теорема 14.1.2]). *Если группа G удовлетворяет условиям 1) – 4) утверждения 1.3.4, то G является группой n -узла для всех $n \geq 3$.*

С помощью следствия 4.6 и утверждения 2.7 [22] по аналогии с утверждением 2 [41] можно доказать следующее замечание.

Замечание 1.3.6. *Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} – графы с метками. Тогда $\pi_1(\mathbb{A})$ вкладывается в $\pi_1(\mathbb{B})$ тогда и только тогда, когда существует такой граф с метками \mathbb{C} , что $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{C})$ и \mathbb{C} погружается в \mathbb{B} .*

При изучении проблемы изоморфизма мы будем опираться на следующий интересный и важный результат.

Теорема 1.3.7. [34, Теорема 1.1] *Пусть G – GBS группа, и $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in R(G)$. Тогда существует такая последовательность скользжений, индукций и $\mathcal{A}^{\pm 1}$ движений, соединяющая \mathbb{A} и \mathbb{B} , что все промежуточные графы с метками редуцированы.*

Глава 2

Группы Баумслага–Солитера и их связь с GBS группами

2.1 Абстрактный соизмеритель групп Баумслага–Солитера

Основная цель этого параграфа описать абстрактный соизмеритель группы $BS(p, q)$ (теорема 2.1.2). Для того, чтобы получить описание $Comm(BS(p, q))$ нам потребуется найти копредставление подгрупп конечного индекса групп $BS(p, q)$ (теорема 2.1.1).

В этом параграфе мы используем правую запись для отображений, т. е. $f: x \mapsto (x)f$. Поэтому композиция определяется следующим образом: $(x)(fg) = ((x)f)g$.

Пусть B_m — граф-цикл с вершинами c_1, c_2, \dots, c_m и ребрами e_1, e_2, \dots, e_m . Поставим в соответствие вершинам и ребрам графа B_m бесконечные циклические группы C_1, C_2, \dots, C_m и E_1, E_2, \dots, E_m соответственно. Пусть $\alpha_{e_i}: b_i \mapsto c_i^q$ и $\omega_{e_i}: b_i \mapsto c_{i+1}^p$ — вложения рёберной группы $E_i = \langle b_i \rangle$ в вершинные группы $C_{i+1} = \langle c_{i+1} \rangle$ и $C_i = \langle c_i \rangle$ вершин c_{i+1} и c_i , инцидентных ребру e_i . Эти вложения обозначены на рис. 2.1 метками p и q на началах и концах рёбер e_i . Построен граф групп \mathbb{B}_m . Обозначим через $H_m = \pi_1(\mathbb{B}_m)$ фундаментальную группу графа групп \mathbb{B}_m .

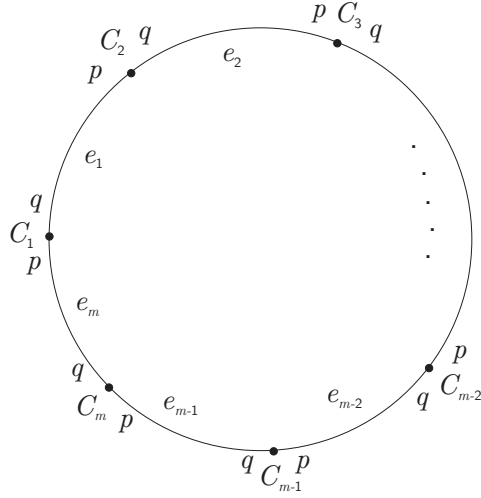


Рис. 2.1: Граф групп \mathbb{B}_m .

По определению фундаментальной группы графа групп,

$$H_m \cong \langle c_1, c_2, \dots, c_m, d \mid d^{-1}c_1^p d = c_m^q, c_i^q = c_{i+1}^p, i = 1, 2, \dots, m-1 \rangle. \quad (2.1)$$

Заметим, что группа $BS(p, q)$ изоморфна H_1 . В [42] доказано, что всякая подгруппа конечного индекса группы $BS(p, q)$ изоморфна некоторой группе H_m . Так как автоморфизм подгруппы конечного индекса является изоморфизмом, то для описания $Comm(BS(p, q))$ нужно знать $Aut(H_m)$. Группу $Aut(H_1) = Aut(BS(p, q))$ описал Д. Коллинз [35].

Теорема 2.1.1. *Группа $Aut(H_m)$ имеет копредставление*

$$\langle S, A, I \mid I^2 = 1, [S, I] = 1, A^I = A^{-1}, A^q = S^{-1}A^p S, \\ [S^m, A]^q = S^{-1}[S^m, A]^p S, [[S^m, A], S^{-k}AS^k] = 1, k = 0, 1, \dots, m-1 \rangle.$$

Обозначим через $\mathbb{Q}_{p,q}$ подгруппу рациональных чисел $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}, mn \perp pq\}$ относительно умножения. В группе $Aut(H_m)$ есть подгруппа индекса 2, порождённая элементами A и S , обозначим её через L_m . Мы докажем, что если $m \mid n$, то группа L_m вкладывается в L_n . Кроме того, будет задано действие группы $\mathbb{Q}_{p,q}$ автоморфизмами на прямом пределе групп L_m и доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.2. $Comm(BS(p, q)) \cong \varinjlim L_m \rtimes \mathbb{Q}_{p,q}$.

Несложно заметить, что соизмеритель данной группы G и её произвольной подгруппы конечного индекса H совпадают. Поэтому верно следующее следствие.

Следствие 2.1.3. Для всякого натурального k

$$Comm(\pi_1(\mathbb{B}_k)) \cong Comm(H_k) \cong \varinjlim L_m \rtimes \mathbb{Q}_{p,q}.$$

В работе [27] О. В. Богопольский доказал, что

$$Comm(BS(1, n)) \cong \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & r \\ 0 & s \end{array} \right), \text{ где } s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, r \in \mathbb{Q} \right\}. \quad (2.2)$$

В формулировке теоремы 2.1.2 требование $p, q \notin \{1, -1\}$ существенно, иначе представленное доказательство теоремы 2.1.1 будет неверно. Это означает, что теорема 2.1.2 не обобщает формулу (2.2). Однако форма записи результата теоремы 2.1.2 подходит и для записи результата О. В. Богопольского и может служить единой формой записи для $Comm(BS(p, q))$.

Замечание 2.1.4. Теорема 2.1.2 при $p = 1, q = n$ эквивалентна формуле (2.2).

Заметим, что H_m — HNN-расширение с базой $\langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$, проходной буквой d и связанными подгруппами $\langle c_1^p \rangle$ и $\langle c_m^q \rangle$.

Лемма 2.1.5. Пусть $\varepsilon = \pm 1$. Тогда c_i^q и $c_j^{\varepsilon p}$ сопряжены в H_m тогда и только тогда, когда $\varepsilon = 1$ и $j = i + 1$ или $i = m, j = 1$. Порождающие c_1, c_2, \dots, c_m попарно не сопряжены.

Доказательство. Если $\varepsilon = 1$ и $j = i + 1$ или $i = m, j = 1$, то одно из определяющих соотношений и есть нужная сопряжённость.

Обратно, пусть $c_i^{-q} w^{-1} c_j^{\varepsilon p} w = 1$, где w — приведённое слово в H_m . Если $j = 1$, то из соотношения $c_1^{\varepsilon p} = d c_m^{\varepsilon q} d^{-1}$ следует, что $c_i^{-q} w_0^{-1} c_m^{\varepsilon q} w_0 = 1$, где $w_0 = d^{-1} w$.

Если $w_0 \in \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$, то равенство $w_0^{-1} c_m^{\varepsilon q} w_0 = c_i^q$ возможно, только если $m = i, \varepsilon = 1$ (см. [13]). Если $w_0 \notin \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$, то по лемме 1.3.1 в слове $c_i^{-q} w_0^{-1} c_m^{\varepsilon q} w_0$

есть либо подслово $d^{-1}c_1^{\alpha p}d$, либо подслово $dc_m^{\beta q}d^{-1}$. Значит, $w_0 = c_m^\gamma d^{-1}w_1$, и исходное равенство эквивалентно $c_i^{-q}w_1^{-1}c_1^{\varepsilon q}w_1 = 1$. Рассуждая аналогично, мы придём к случаю $w_i \in \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$ и получим требуемое. При $j \neq 1$ доказательство даже проще, сразу замечаем, что $w \in \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$.

Вторая часть леммы доказывается тем же способом ещё проще. \square

Лемма 2.1.6. *Для $1 \leq i \leq m$ централизаторы элементов $c_1^{p^m}$ и $c_1^{q^{i-1}}$ в H_m порождают $c_1, dc_m d^{-1}, dc_{m-1} d^{-1}, \dots, dc_1 d^{-1}$ и c_1, c_2, \dots, c_i соответственно.*

Доказательство. Так как $c_1^{p^m} = dc_m^{q^{m-1}}d^{-1} = \dots = dc_1^{q^m}d^{-1}$, то $\langle c_1, dc_m d^{-1}, dc_{m-1} d^{-1}, \dots, dc_1 d^{-1} \rangle \subseteq C(c_1^{p^m})$. Обратно, пусть $z \in C(c_1^{p^m})$. Произвольный элемент в H_m имеет вид $z = u_0 d^{\varepsilon_1} u_1 \dots d^{\varepsilon_k} u_k$, где $u_i \in \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$. Получаем:

$$u_k^{-1} d^{-\varepsilon_k} \dots u_1^{-1} d^{-\varepsilon_1} u_0^{-1} c_1^{p^m} u_0 d^{\varepsilon_1} u_1 \dots d^{\varepsilon_k} u_k c_1^{-p^m} = 1.$$

По лемме 1.3.1 это равенство возможно, только если $u_0 = u_0(c_1), \varepsilon_1 = 1$. Далее аналогично $u_1 = u_1(c_1, c_2, \dots, c_m), \varepsilon_2 = -1$, и так далее. Значит, $\varepsilon_i = (-1)^{i+1}, u_{2i} = u_{2i}(c_1), u_{2i+1} = u_{2i+1}(c_1, c_2, \dots, c_m)$. Это значит, что $z = z(c_1, dc_m d^{-1}, dc_{m-1} d^{-1}, \dots, dc_1 d^{-1})$. Вторая часть леммы доказывается аналогично. \square

Назовём действие группы G на дереве T *локально ручным* (см. [54]), если из того, что ребра e и f имеют общую вершину v и $Stab_G e \subset Stab_G f$, следует, что существует такой $g \in Stab_G v$, что $(e)g = f$.

Предложение 2.1.7. *Пусть $\varphi \in Aut(H_m)$, тогда для подходящих $k \in \mathbb{Z}, \delta \in \{\pm 1\}, h_i \in H_m, 1 \leq i \leq m$ верны равенства $(c_i)\varphi = h_i^{-1} c_{i+k(\text{mod } m)}^\delta h_i, 1 \leq i \leq m$.*

Доказательство. Относительно порождающих a, t группа $BS(p, q)$ имеет граф Кэли $CaуBS(p, q)$. На множестве вершин введём отношение эквивалентности: пусть $g, h \in BS(p, q)$, тогда $g \sim h$, если $gh^{-1} \in \langle a \rangle$. Если в фактор-графе $CaуBS(p, q)/\sim$ удалить петли, то получится T – дерево правых смежных классов $BS(p, q)$ по подгруппе $\langle a \rangle$, рис. 2.2.

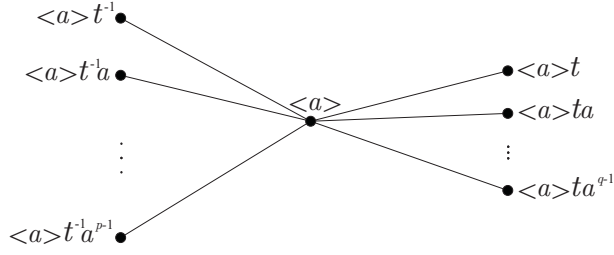


Рис. 2.2: Окружность вершины $\langle a \rangle$ в дереве T .



Рис. 2.3: Фундаментальная область T_F

Гомоморфизм $\eta: H_m \rightarrow BS(p, q)$, заданный на порождающих так, что $\eta: c_i \mapsto t^{-i}at^i, d \mapsto t^m$, является вложением [42]. Поэтому H_m действует на дереве T . Фундаментальной областью этого действия является поддерево T_F (рис. 2.3), стабилизаторы вершин при этом действии циклические.

Изучая орбиты этого действия, несложно понять, что заданное действие H_m на T локально ручное. Так как p и q не равны 1 и -1, то это действие ещё и собственное, т. е. стабилизаторы рёбер – собственные подгруппы стабилизаторов вершин, инцидентных им. Тогда по теореме А [54] $Aut(H_m)$ тоже действует на дереве T . Причём если $g \in H_m$, то $\hat{g} \in Inn(H_m)$ действует на T так же, как g .

Пусть $\varphi \in Aut(H_m)$. Так как g и h сопряжены тогда и только тогда, когда $(g)\varphi$ и $(h)\varphi$ сопряжены, то по лемме 2.1.5 $(c_1)\varphi, (c_2)\varphi, \dots, (c_m)\varphi$ попарно не сопряжены. Кроме того, $(c_1)\varphi, (c_2)\varphi, \dots, (c_m)\varphi$ порождают стабилизаторы вершин $(\langle a \rangle t)\varphi, (\langle a \rangle t^2)\varphi, \dots, (\langle a \rangle t^m)\varphi$ соответственно. Это значит, что существует такая подстановка $\pi \in S_m$, что $(c_i)\varphi = h_i^{-1}c_{(i)\pi}^{\delta_i}h_i$, где $\delta_i = \pm 1$, а $h_i \in H_m$. Так как $((c_i)\varphi)^q = ((c_{i+1})\varphi)^p, i = 1, 2, \dots, m-1$ и $((c_m)\varphi)^q = ((d)\varphi)^{-1}((c_1)\varphi)^p(d)\varphi$, то $c_{(i)\pi}^{q\delta_i}$ и $c_{(i+1)\pi}^{p\delta_{i+1}}$ сопряжены. По лемме 2.1.5 получаем, что $(i+1)\pi = (i)\pi + 1 \pmod{m}$ и все δ_i равны либо 1, либо -1. Положим $k = (1)\pi - 1$ и $\delta = \delta_i$, тогда $(i)\pi = k + i \pmod{m}$. \square

Обозначим через S, I автоморфизмы H_m , заданные на порождающих так:

$$S: \begin{cases} d & \mapsto d, \\ c_1 & \mapsto c_2, \\ c_2 & \mapsto c_3, \\ \vdots & \vdots \\ c_{m-1} & \mapsto c_m, \\ c_m & \mapsto d^{-1}c_1d, \end{cases} \quad I: \begin{cases} d & \mapsto d, \\ c_1 & \mapsto c_1^{-1}, \\ c_2 & \mapsto c_2^{-1}, \\ \vdots & \vdots \\ c_{m-1} & \mapsto c_{m-1}^{-1}, \\ c_m & \mapsto c_m^{-1}. \end{cases}$$

Для некоторых $u_2, u_3, \dots, u_m, v \in H_m$ через ψ обозначим гомоморфизм из H_m в H_m , заданный на порождающих так:

$$\psi: \begin{cases} d & \mapsto \psi(d), \\ c_1 & \mapsto c_1, \\ c_2 & \mapsto u_2^{-1}c_2u_2, \\ \vdots & \vdots \\ c_{m-1} & \mapsto u_{m-1}^{-1}c_{m-1}u_{m-1}, \\ c_m & \mapsto u_m^{-1}c_mu_m. \end{cases}$$

Пусть $\delta \in \{\pm 1\}$. Определим $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ так: если $\delta = 1$, то $\varepsilon = 0$, если $\delta = -1$, то $\varepsilon = 1$.

Утверждение 2.1.8. Пусть $\varphi \in \text{Aut}(H_m)$, тогда для подходящих $w, u_2, u_3, \dots, u_m \in H_m$ и для k, δ из предложения 2.1.7 верно равенство $\widehat{w}I^\varepsilon S^{-k}\varphi = \psi$ (здесь $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$).

Доказательство. Чтобы найти нужные $w, u_2, u_3, \dots, u_m \in H_m$, применим обе части равенства $\widehat{w}I^\varepsilon S^{-k}\varphi = \psi$ к элементам c_i и сравним результаты. Пусть $w_0 = (w)(I^\varepsilon S^{-k}\varphi)$, тогда

$$(c_i)(\widehat{w}I^\varepsilon S^{-k}\varphi) = (w^{-1}c_iw)(I^\varepsilon S^{-k}\varphi) = w_0^{-1}((c_i)(I^\varepsilon S^{-k}\varphi))w_0 = w_0^{-1}((c_i^\delta)(S^{-k}\varphi))w_0.$$

Если $i > k$, то

$$w_0^{-1}((c_i^\delta)(S^{-k}\varphi))w_0 = w_0^{-1}((c_{i-k}^\delta)\varphi)w_0 = w_0^{-1}h_{i-k}^{-1}c_i h_{i-k}w_0.$$

Если $i \leq k$, то

$$\begin{aligned} w_0^{-1}((c_i^\delta)(S^{-k}\varphi))w_0 &= w_0^{-1}((dc_{i-k(\text{mod } m)}^\delta d^{-1})\varphi)w_0 = \\ &= w_0^{-1}((d)\varphi)h_{i-k(\text{mod } m)}^{-1}c_i h_{i-k(\text{mod } m)}((d)\varphi)^{-1}w_0. \end{aligned}$$

С другой стороны, $(c_i)\psi = u_i^{-1}c_iu_i$ при $2 \leq i \leq m$ и $(c_1)\psi = c_1$. Поэтому при $i = 1$ получаем $h_{1-k(\bmod m)}((d)\varphi)^{-1}w_0 = 1$, откуда $w_0 = ((d)\varphi)h_{1-k(\bmod m)}^{-1}$ и, следовательно, $w = (w_0)(\varphi^{-1}S^kI^\varepsilon)$.

Осталось найти $u_2, u_3, \dots, u_m \in H_m$. При $i > k$ получаем $u_i = h_{i-k}w_0$, а если $i \leq k$, то $u_i = h_{i-k(\bmod m)}((d)\varphi)^{-1}w_0$. \square

Утверждение 2.1.9. Для подходящих $l \in \mathbb{Z}, v \in \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$ верно равенство $(d)\psi = c_1^l dv$ и $u_i \in \langle c_1, c_2, \dots, c_i \rangle, 2 \leq i \leq m$.

Доказательство. Так как в H_m выполнено равенство $c_1^{q^{i-1}} = c_i^{p^{i-1}}$, то после действия ψ на обе части получим $c_1^{q^{i-1}} = u_i^{-1}c_i^{p^{i-1}}u_i = u_i^{-1}c_1^{q^{i-1}}u_i$. Значит, $u_i \in C(c_1^{q^{i-1}})$, и по лемме 2.1.6 получаем $u_i \in \langle c_1, c_2, \dots, c_i \rangle$.

Исследуем $(d)\psi$. Так как $d^{-1}c_1^{p^m}d = c_1^{q^m}$, то $((d)\psi)^{-1}c_1^{p^m}(d)\psi = c_1^{q^m} = d^{-1}c_1^{p^m}d$, следовательно $(d)\psi d^{-1} \in C(c_1^{p^m})$. По лемме 2.1.6 $(d)\psi d^{-1} \in \langle c_1, dc_m d^{-1}, dc_{m-1} d^{-1} \dots, dc_1 d^{-1} \rangle$.

Пусть d -длина $(d)\psi$ равна n , а d -длина $(d)\psi^{-1}$ равна m . В силу того, что $(d)\psi$ и $(d)\psi^{-1}$ приведены, и $(c_i)\psi^{-1}$ зависит только от c_1, c_2, \dots, c_m , то d -длина $((d)\psi)\psi^{-1}$ равна $nm = 1$. Следовательно, d -длина $(d)\psi$ равна 1. Так как $(d)\psi = vd$, то это возможно, только если $(d)\psi = c_1^k dv(c_1, c_2, \dots, c_m)$. \square

Обозначим через $C_i, i = 1, 2, \dots, m$ и T внутренние автоморфизмы, соответствующие сопряжениям порождающими, а через $A_i, i = 1, 2, \dots, m$ – автоморфизмы, заданные на порождающих так:

$$A_i: \begin{cases} d \mapsto dc_i, \\ c_j \mapsto c_j, & \text{при } j \leq i, \\ c_j \mapsto c_i^{-1}c_jc_i, & \text{при } j > i. \end{cases}$$

Предложение 2.1.10. Группа $\text{Aut}(H_m)$ порождается автоморфизмами $S, I, T, A_i, C_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Доказательство. Используя предложение 2.1.7 и утверждения 2.1.8 и 2.1.9, достаточно выразить ψ через указанные автоморфизмы. Так как $c_i^q = c_{i+1}^p$, то $u_i^{-1}c_i^q u_i =$

$u_{i+1}^{-1}c_{i+1}^p u_{i+1} = u_{i+1}^{-1}c_i^q u_{i+1}$. Следовательно, $u_i u_{i+1}^{-1} \in C(c_i^q) = \langle c_i, c_{i+1} \rangle$. Отсюда получаем, что $u_i = w_i w_{i-1} \dots w_2$, где $w_i \in \langle c_{i-1}, c_i \rangle$.

Автоморфизм ψ отправляет равенство $c_m^q = d^{-1}c_1^p d$ в $u_m^{-1}c_m^q u_m = v^{-1}d^{-1}c_1^p d v = v^{-1}c_m^q v$. Следовательно, $u_m v^{-1} \in C(c_m^q) = \langle c_m, d^{-1}c_1 d \rangle$. Так как d -длина $u_m v^{-1}$ нулевая, то $u_m w^{-1} = c_m^{-r}$. Значит, $v = c_m^r u_m$.

В итоге получилось, что

$$\psi: \begin{cases} d & \mapsto c_1^k d c_m^r w_m \dots w_2, \\ c_1 & \mapsto c_1, \\ c_2 & \mapsto w_2^{-1} c_2 w_2, \\ \vdots & \vdots \\ c_{m-1} & \mapsto w_2^{-1} \dots w_{m-1}^{-1} c_{m-1} w_{m-1} \dots w_2, \\ c_m & \mapsto w_2^{-1} \dots w_m^{-1} c_m w_m \dots w_2. \end{cases}$$

Так как ψ – автоморфизм, то $c_2 = \gamma_2(c_1, u_2^{-1}c_2 u_2, \dots, u_m^{-1}c_m u_m, c_1^k d c_m^r u_m)$. Так как d -длина c_2 нулевая, то слово γ_2 не зависит от $c_1^k d c_m^r u_m$ и является элементом свободного произведения с объединением циклических групп $\langle c_i \rangle, 1 \leq i \leq m$. Поэтому $c_2 = \gamma_2(c_1, w_2^{-1}c_2 w_2) = \gamma_2(c_1, u_2^{-1}c_2 u_2)$. Применяя теорему о нормальной форме [13], можно видеть, что w_2 может быть выбрано так: $w_2 = c_1^{k_1}$. Аналогично, $w_i = c_{i-1}^{k_{i-1}}, 3 \leq i \leq m$.

Таким образом,

$$\psi: \begin{cases} d & \mapsto c_1^k d c_m^r c_{m-1}^{k_{m-1}} \dots c_1^{k_1}, \\ c_i & \mapsto c_1^{-k_1} \dots c_{i-1}^{-k_{i-1}} c_i c_{i-1}^{k_{i-1}} \dots c_1^{k_1}, 2 \leq i \leq m. \end{cases}$$

Это значит, что $\psi = A_1^{k_1+k} C_1^{-k} A_2^{k_2} \dots A_{m-1}^{k_{m-1}} A_m^r$. □

Доказательство теоремы 2.1.1. Установим определяющие соотношения в группе $Aut(H_m)$. Исследуя действие на порождающих левой и правой части равенств, можно доказать, что верны следующие соотношения:

$$C_i^q = C_{i+1}^p, 1 \leq i \leq m-1, \quad (2.3)$$

$$C_m^q = T^{-1} C_1^p T, \quad (2.4)$$

$$C_j^{A_i} = C_j^{C_i}, 1 \leq i < j \leq m, \quad (2.5)$$

$$[C_j, A_i] = 1, 1 \leq j \leq i \leq m, \quad (2.6)$$

$$T^{A_i} = TC_i, 1 \leq i \leq m, \quad (2.7)$$

$$A_m^q = C_1^{-p} A_1^p, \quad (2.8)$$

$$A_i^q = A_{i+1}^p, 1 \leq i \leq m-1, \quad (2.9)$$

$$[I, T] = 1, \quad (2.10)$$

$$I^2 = 1, \quad (2.11)$$

$$A_i^I = A_i^{-1}, 1 \leq i \leq m, \quad (2.12)$$

$$C_i^I = C_i^{-1}, 1 \leq i \leq m, \quad (2.13)$$

$$S^m = T, \quad (2.14)$$

$$A_i^S = A_{i+1}, 1 \leq i \leq m-1, \quad (2.15)$$

$$A_m^S = A_1 C_1^{-1}, \quad (2.16)$$

$$[I, S] = 1, \quad (2.17)$$

$$C_i^S = C_{i+1}, 1 \leq i \leq m-1, \quad (2.18)$$

$$C_m^S = C_1^T, \quad (2.19)$$

$$[S, T] = 1. \quad (2.20)$$

Из этих соотношений следует, что всякий автоморфизм имеет вид $S^k I^\epsilon \Phi \Psi$, где Ψ – внутренний, а $\Phi = \Phi(A_1, A_2, \dots, A_m)$, здесь $\epsilon \in \{0, 1\}, k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Покажем, что соотношений (2.3)-(2.20) достаточно для описания $Aut(H_m)$. Пусть есть новое соотношение, тогда оно имеет вид $S^k I^\epsilon \Phi \Psi = 1$. Применяя этот автоморфизм к c_1 , получаем равенство $c_1 = u^{-1} c_{k+1}^{\pm 1} u$ для некоторого $u \in H_m$. Отсюда следует, что $k = 0, \epsilon = 0$. Таким образом, соотношение принимает вид $\Phi \Psi = 1$, где $\Psi = \hat{v}$. Применяя его к c_1 , получаем $c_1 = v^{-1} c_1 v$, откуда $v = c_1^l$. Применим соотношение к d , получим $d = c_1^{-l} d w c_1^l$. Это эквивалентно $d^{-1} c_1^l d = w c_1^l$. Так как d -длина слова справа равна 0, то l делится на p , и $l = pl'$. Равенство примет вид $c_m^{ql'} = w c_1^{pl'}$. Следовательно, $w = c_m^{ql'} c_1^{-pl'}$, значит, $\Phi = A_1^{-pl'} A_m^{ql'}$. Поэтому соотношение имеет вид $A_1^{-pl'} A_m^{ql'} C_1^{pl'} = 1$ и является следствием соотношений (2.6) и (2.8).

Упростим систему соотношений. Из (2.15) следует, что $A_i = S^{-1} A_{i-1} S, 2 \leq i \leq m$, а из (2.18) получаем $C_i = S^{-1} C_{i-1} S, 2 \leq i \leq m$, наконец из (2.14) следует, что $T = S^m$. Используя преобразования Тице, исключим эти порождающие и переобозначим $A = A_1$ и $C = C_1$. Получится следующая система соотношений:

$$C^q = S^{-1} C^p S, \quad (2.21)$$

$$[C, S^{-k} A S^k] = 1, 0 \leq k \leq m-1, \quad (2.22)$$

$$[S^{-k} C S^k, A C^{-1}] = 1, 1 \leq k \leq m-1, \quad (2.23)$$

$$[S^m, A] = C, \quad (2.24)$$

$$A^q = S^{-1}A^pS, \quad (2.25)$$

$$[I, S^m] = 1, \quad (2.26)$$

$$I^2 = 1, \quad (2.27)$$

$$A^I = A^{-1}, \quad (2.28)$$

$$C^I = C^{-1}, \quad (2.29)$$

$$[I, S] = 1. \quad (2.30)$$

Соотношения (2.21)-(2.30) получены из (2.3), (2.6), (2.5), (2.7), (2.9)-(2.13) и (2.17) соответственно. Соотношения (2.15), (2.18) и (2.14) уходят ввиду преобразований Титце; (2.4) следует из (2.21) и (2.14); (2.16) следует из (2.24); (2.19) следует из (2.14); (2.20) следует из (2.14).

Осталось заметить, что (2.8) следует из (2.22), (2.24) и (2.25), так как $S^{1-m}A^qS^{m-1} = (S^{-m}A^{-1}S^m)^{-p} = ([S^m, A]A^{-1})^{-p} = (CA^{-1})^{-p} = C^{-p}A^p$.

Преобразуем систему соотношений далее: (2.23) следует из (2.24) и (2.22). Это видно, если сопрячь (2.22) с помощью S^m . Ввиду (2.24) имеем $S^{-m}AS^m = AC^{-1}$. Получаем

$$[S^{k-m}CS^{-k+m}, AC^{-1}] = 1, 1 \leq m - k \leq m.$$

Кроме того, (2.26) следствие (2.30), а (2.29) следует из (2.28), (2.30) и (2.22) ввиду

$$C^I = S^{-m}AS^mA^{-1} = ([S^m, A]A^{-1})^{-1}A^{-1} = C^{-1}.$$

Чтобы завершить доказательство, осталось исключить C и соотношение (2.24). \square

Следствие 2.1.11. *Группа внешних автоморфизмов группы H_m является полупрямым произведением циклической группы порядка 2 и метабелевой группы порядка $m \cdot (q^m - p^m)$.*

Доказательство. Ввиду того, что группа внутренних автоморфизмов порождена элементами S^m и $[S^m, A]$, из копредставления $Aut(H_m)$ получаем копредставление

$$Out(H_m) = \langle S, A, I \mid S^m = I^2 = [S, I] = 1, A^I = A^{-1}, A^q = S^{-1}A^pS \rangle.$$

В $Out(H_m)$ имеется подгруппа H индекса 2, порождённая S и A . На этой подгруппе действует инволюция I . Поэтому $Out(H_m) \cong H \rtimes \mathbb{Z}_2$. Причём H имеет копредставление $\langle S, A \mid S^m = 1, A^q = S^{-1}A^pS \rangle$. Несложно видеть, что порядок A равен $q^m - p^m$ и взаимно прост с p . Поэтому $A = A^{\alpha p} = SA^{\alpha q}S^{-1}$, где α – обратный к p по модулю $q^m - p^m$. Следовательно, H – метабелева нужного порядка. \square

В работе [42] доказано, что всякая подгруппа индекса n группы $BS(p, q)$ имеет вид

$$H_{n,m}^s = \langle a^l, t^m a^s \rangle,$$

где $n = lm$, $l, m \in \mathbb{N}$, $l \perp pq$ и s – целое число от 0 до $l - 1$. Там же доказано, что $H_{n,m}^s \cong H_m$, а H_m и H_r изоморфны тогда и только тогда, когда $m = r$.

Из доказательства леммы 3 [42] следует, что изоморфизм между $\langle a^l, t^m \rangle$ и $\langle a^l, t^m a^s \rangle$ может быть установлен по правилу

$$a^l \mapsto a^l, t^m \mapsto t^m a^{s+sil}, \quad (2.31)$$

где i – такое целое число, что $1+il$ делится на q^{m-1} . Так же из доказательства теоремы 2 [42] следует, что отображение $a^l \mapsto a^k, t^m \mapsto t^m$ продолжается до изоморфизма подгрупп $H_{lm,m}^0$ и $H_{km,m}^0$. Это позволяет сконструировать канонический изоморфизм $\varphi_{k,l,m,s,r}$ групп $H_{km,m}^s$ и $H_{lm,m}^r$ по правилу

$$\varphi_{k,l,m,s,r}: a^k \mapsto a^l, t^m a^s \mapsto t^m a^r.$$

Таким образом, всякий изоморфизм из $\Omega(BS(p, q))$ может быть представлен в виде композиции подходящего канонического изоморфизма и автоморфизма некоторой подгруппы конечного индекса. Ранее мы описали $Aut(H_m)$ и, следовательно, знаем группу автоморфизмов произвольной подгруппы конечного индекса. Для дальнейшего нужно понять, как автоморфизмы A, S, I действуют на порождающих подгрупп $H_{n,m}^s$ в каждом конкретном случае, а для этого надо установить изоморфизм между H_m и $H_{n,m}^s$.

Лемма 2.1.12. Пусть $l, m \in \mathbb{N}, l \perp pq, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, x, y – такие целые числа, что $1 + lq^{m-j}x = yp^j$ и $w(u, v) = u^{q^j}y^{-1}u^{-lp^{m-j}x}v$ – слово на буквах u и v , тогда в группе $BS(p, q)$ верно равенство

$$w(a^l, t^m a^{s+sil}) = t^{-j} a^l t^j,$$

для любого $s \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ и i как в (2.31).

Доказательство. Докажем сначала равенство при $s = 0$ с помощью цепочки эквивалентных равенств:

$$\begin{aligned} t^{-j} a^l t^j &= a^{lq^j} y t^{-m} a^{-l^2 p^{m-j} x} t^m, \\ a^l &= t^j a^{lq^j} y t^{-m} a^{-l^2 p^{m-j} x} t^{m-j}, \\ a^l &= t^j a^{lq^j} y t^{-j} a^{-l^2 q^{m-j} x}, \\ a^l &= t^j a^{lq^j} y t^{-j} a^{l-lyp^j}. \end{aligned}$$

При $s \neq 0$ получим $w(a^l, t^m a^{s+sil}) = a^{-s-sil} w(a^l, t^m) a^{s+sil} = a^{-s-sil} t^{-j} a^l t^j a^{s+sil} = t^{-j} a^l t^j$, так как $s + sil$ делится на q^{m-1} и, следовательно, a^{s+sil} централизует $t^{-j} a^l t^j$ при $j = 0, 1, \dots, m-1$. \square

В доказательстве теоремы 2 [42] был установлен изоморфизм $\varphi_m^l: H_m \mapsto H_{lm,m}^0$, заданный на порождающих так: $d \mapsto t^m, c_j \mapsto t^{1-j} a^l t^{j-1}, j = 1, 2, \dots, m$. Если теперь к образу применить изоморфизм (2.31) и учесть лемму 2.1.12, то получим изоморфизм H_m и $H_{lm,m}^s$, заданный на порождающих так:

$$d \mapsto t^m a^{s+sil}, c_j \mapsto t^{1-j} a^l t^{j-1}, j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.32)$$

Так как при различных параметрах подгруппы $H_{lm,m}^s$ различны как подмножества в группе $BS(p, q)$, то для каждой подгруппы $H_{lm,m}^s$ автоморфизмы A, S, I , вообще говоря, различные отображения. Поэтому имеет смысл рассматривать различные отображения $A_{lm,m}^s, S_{lm,m}^s, I_{lm,m}^s$. При возможных параметрах l, s, m и целом i , как в (2.31), ввиду изоморфизма (2.32) и описания $Aut(H_m)$ получаем

$$\begin{aligned} A_{lm,m}^s: a^l &\mapsto a^l, t^m a^{s+sil} \mapsto t^m a^{s+sil+l}, \\ I_{lm,m}^s: a^l &\mapsto a^{-l}, t^m a^{s+sil} \mapsto t^m a^{s+sil}, \end{aligned}$$

$$S_{lm,m}^s: a^l \mapsto t^{-1}a^l t, t^m a^{s+sil} \mapsto t^m a^{s+sil}.$$

Таким образом, $\text{Com}(BS(p, q))$ порождается набором классов эквивалентности изоморфизмов $\varphi_{k,l,m,s,r}, A_{lm,m}^s, I_{lm,m}^s, S_{lm,m}^s$ при всех допустимых параметрах. Конечно, это множество избыточно.

Определим на порождающих следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned} \tau_k &: a \mapsto a^k, & t &\mapsto t, & \text{при } k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, k \perp pq, \\ \varphi_m &: a \mapsto a, & t^m &\mapsto t^m a, & \text{при } m \in \mathbb{N}, \\ \sigma &: a \mapsto t^{-1} a t, & t &\mapsto t. \end{aligned}$$

Предложение 2.1.13. *Абстрактный соизмеритель группы $BS(p, q)$ порождается классами эквивалентности изоморфизмов $\tau_k, \varphi_m, \sigma$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, k \perp pq, m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Обозначим через $[\varphi]$ класс эквивалентности изоморфизма φ .

Заметим, что $[\varphi_{k,l,m,s,r}] = [\varphi_m^{-s} \tau_k^{-1} \tau_l \varphi_m^r]$, так как эти изоморфизмы совпадают на подгруппе $H_{km,m}^s$. Так же $[I_{lm,m}^s] = [\varphi_m^{-s-sil} \tau_{-1} \varphi_m^{s+sil}]$, $[A_{lm,m}^s] = [\varphi_m^l]$, $[S_{lm,m}^s] = [\varphi_m^{-s-sil} \sigma \varphi_m^{s+sil}]$ ввиду совпадения на подгруппе $\langle a^l, t^m a^{s+sil} \rangle$, равной $H_{lm,m}^s$, и леммы 2.1.12 в последнем случае. \square

Обозначим через M_k подгруппу группы $\text{Com}(BS(p, q))$, порождённую классами $[\varphi_k]$ и $[\sigma]$.

Лемма 2.1.14. *Пусть $k, m \in \mathbb{N}$ и $k|m$, тогда M_k является подгруппой группы M_m .*

Доказательство. Обозначим через α_m и β_m такие целые числа, что $1 = \alpha_m p^m + \beta_m q^m$. Нужно доказать, что $[\varphi_k] \in M_m$. Для этого заметим, что $\varphi_k: a \mapsto a, t^m \mapsto (t^k a)^{\frac{m}{k}} = (t^k a^{\alpha_m p^m + \beta_m q^m})^{\frac{m}{k}}$. Все элементы $a^{\alpha_m p^m}$ можно "протащить" через степени t в конец слова, а $a^{\beta_m q^m}$ – в начало. В итоге получим равенство $(t^k a)^{\frac{m}{k}} = a^{x_{m,k}} t^m a^{y_{m,k}}$, где $x_{m,k} = \beta_m p^k \frac{q^m - p^m}{q^k - p^k}$ и $y_{m,k} = \alpha_m p^k \frac{q^m - p^m}{q^k - p^k}$.

Можно проверить, что коммутатор $[\sigma^m, \varphi_m]$ действует следующим образом: $a \mapsto a, t^m \mapsto a^{-1} t^m a$. Следовательно, $\varphi_k \sim \varphi_m^{x_{m,k} + y_{m,k}} [\sigma^m, \varphi_m]^{x_{m,k}}$. \square

Из теоремы 2.1.1 следует, что подгруппа $L_m = \langle A, S \rangle$ группы $Aut(H_m)$ имеет копредставление

$$\begin{aligned} \langle A, S \mid A^q = S^{-1}A^pS, [S^m, A]^q = S^{-1}[S^m, A]^pS, \\ [[S^m, A], S^{-k}AS^k] = 1, k = 0, 1, \dots, m-1 \rangle. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Зная копредставление L_m , можно проверить, что L_m допускает представление $\eta: L_m \mapsto GL_2(\mathbb{Q})$, заданное на порождающих так:

$$\eta: A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S \mapsto \begin{pmatrix} \frac{p}{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.1.15. *Группа L_m не имеет кручения для всех натуральных m .*

Доказательство. Предположим, в группе L_m существует элемент конечного порядка n , обозначим его через g и считаем его приведённым словом в L_m . Пусть $g = S^x g_A$, где $g_A \in \langle\langle A \rangle\rangle$. Тогда $g^n = S^{nx} g'_A = 1$, следовательно, сумма степеней S в слове g равна 0. В группе L_m есть нормальная подгруппа $Inn(H_m)$, порождённая автоморфизмами S^m и $[S^m, A]$. Получаем, для подходящих целых y, α_i, β_i

$$g = A^y \prod_{i=1}^r S^{-\alpha_i m} [S^m, A]^{\beta_i} S^{\alpha_i m},$$

тогда

$$\eta: g^n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & ny + n \sum_{i=1}^r \beta_i \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha_i m} \left(\frac{p^m - q^m}{p^m}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}.$$

Так как $n \neq 0$, то $y + \sum_{i=1}^r \beta_i \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha_i m} \left(\frac{p^m - q^m}{p^m}\right) = 0$. Второе слагаемое – число дробное, так как $p^m - q^m$ взаимно просто с pq и g – приведено, а y – целое. Следовательно, $y = 0$.

Значит, $g \in Inn(H_m)$. При этом $Inn(H_m) \cong H_m$ в силу того, что в группе H_m нет центра. При этом сама группа H_m является HNN -расширением свободного произведения с объединением конечного числа бесконечных циклических групп, следовательно, не имеет кручения. Противоречие. \square

Лемма 2.1.16. *Группы L_m и M_m изоморфны для всех натуральных m .*

Доказательство. Заметим, что представители φ_m и σ являются автоморфизмами группы $H_{m,m}^0 = \langle a, t^m \rangle \cong H_m$, так как $H_{m,m}^0$ нормальная в $BS(p, q)$ (см. [42]). Причём их действие совпадает с действием порождающих A и S группы автоморфизмов группы $H_{m,m}^0$.

Таким образом, для установления изоморфизма нужно доказать, что нет двух эквивалентных автоморфизмов из L_m . Пусть это не так, тогда существуют такие $g \in L_m$ и подгруппа H конечного индекса в группе $H_{m,m}^0$, что $g|_H \equiv id$. Можно даже считать, что H нормальна в $BS(p, q)$. Так как $g|_H \equiv id$, то g – корректно определенный элемент конечной группы $Aut(H_{m,m}^0/H)$, следовательно, имеет конечный порядок, но это невозможно, так как группа L_k не имеет кручения. Противоречие. \square

Обозначим через M прямой предел групп M_k . По лемме 2.1.14 группа M определена корректно. По лемме 2.1.16 $M \cong \varinjlim L_k$.

Лемма 2.1.17. *Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, $k \perp pq$, тогда сопряжение с помощью τ_k является автоморфизмом группы M .*

Доказательство. Прежде всего заметим, что при всех допустимых m и k в группе $Comm(BS(p, q))$ выполнены равенства:

$$[\tau_k^{-1}\varphi_m\tau_k] = [\varphi_m^k], \quad [\tau_k^{-1}\sigma\tau_k] = [\sigma].$$

Это следует из того, что изоморфизмы $\varphi_m\tau_k$ и $\tau_k\varphi_m^k$ совпадают на подгруппе $H_{m,m}^0$, порождённой элементами a и t^m . А изоморфизмы $\tau_k\sigma$ и $\sigma\tau_k$ совпадают на всей группе $BS(p, q)$.

Обозначим через $\widehat{\tau}_k$ сопряжение с помощью τ_k . Чтобы понять, что $Im\widehat{\tau}_k = M$, докажем, что $\varphi_n \in Im\widehat{\tau}_k$ для всех натуральных n . Для этого надо заметить, что для всех натуральных r верно, что

$$[\varphi_n^{p^{(r-1)n}}] = [\varphi_{nr}^{\frac{q^{nr}-p^{nr}}{q^n-p^n}}].$$

Это следует из того, что представители совпадают на подгруппе $H_{nr,nr}^0$, ввиду равенства

$$\left(t^n a^{p^{(r-1)n}}\right)^r = t^{nr} a^{\frac{q^{nr}-p^{nr}}{q^n-p^n}}$$

в группе Баумслага–Солитера (см. доказательство леммы 2.1.14).

Докажем, что существует такое r_0 , что $\frac{q^{nr_0}-p^{nr_0}}{q^n-p^n}$ делится на k . Обозначим через n_r дробь $\sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{n \cdot i}$, тогда $\frac{q^{nr}-p^{nr}}{q^n-p^n} = p^{n(r-1)} \cdot n_r$. При этом числитель n_r делится на k одновременно с $\frac{q^{nr}-p^{nr}}{q^n-p^n}$, а знаменатель взаимно прост с k . Пусть для всех $r \in \mathbb{N}$ числитель n_r не делится на k . Тогда существуют такие r_1 и r_2 , что k делит $n_{r_1} - n_{r_2} = \left(\frac{q}{p}\right)^{nr_2} \cdot n_{r_1-r_2}$. Учитывая взаимную простоту k и pq , видим, что числитель $n_{r_1-r_2}$ делится на k , противоречие. Следовательно, существует натуральное r_0 , при котором k делит $\frac{q^{nr_0}-p^{nr_0}}{q^n-p^n}$. Значит, $[\varphi_n^{p^{(r_0-1)n}}] = [\varphi_{nr_0}^{kC}] \in \text{Im} \widehat{\tau}_k$. А так как $k \perp p$, и $[\varphi_n^{p^{(r_0-1)n}}]$ и $[\varphi_n^k]$ лежат в $\text{Im} \widehat{\tau}_k$, то туда попадет и φ_n .

Осталось доказать, что $\text{Ker} \widehat{\tau}_k = \{1\}$. Пусть это не так, тогда существует такой класс $[\delta] \neq [id]$, что $\widehat{\tau}_k([\delta]) = [id]$. Тогда существует такое натуральное m , что $[\delta] \in M_m$. Обозначим через $w = w(A, S)$ элемент группы L_m , соответствующий $[\delta]$ при установленном изоморфизме.

Получаем, что в группе L_m элемент $w = w(A, S)$ не равен единице, а $w_k = w(A^k, S)$ равен единице. Рассуждая как в лемме 2.1.15, получаем $w \in \langle\langle A \rangle\rangle$. Аналогично для подходящих целых y, α_i, β_i :

$$w_k = A^{ky} \prod_{i=1}^r S^{-\alpha_i m} [S^m, A^k]^{\beta_i} S^{\alpha_i m},$$

и

$$\eta: w_k \mapsto \begin{pmatrix} 1 & ky + k \sum_{i=1}^r \beta_i \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha_i m} \left(\frac{p^m - q^m}{p^m}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Так как ky – целое, а $p^m - q^m$ взаимно просто с pq , то $y = 0$. Значит $w \in \langle\langle [S^m, A] \rangle\rangle$. Из соотношений группы L_k следует, что $[S^m, A^k] = (S^{-m} A^{-1} S^m)^k A^k = ([S^m, A] A^{-1})^k A^k = [S^m, A]^k$. Можно рассматривать $\langle\langle [S^m, A] \rangle\rangle$ как нормальное замыкание c_1 в группе H_m ввиду установленного изоморфизма между $\text{Inn}(H_m)$ и H_m . Как уже было замечено, в H_m есть нормальная форма элемента, можно считать, что $w \neq 1$ – приведённое слово в H_m . Тогда ввиду леммы 1.3.1 и взаимной простоты k и pq получаем, что w_k тоже приведено и не равно 1. \square

Доказательство теоремы 2.1.2. Ввиду леммы 2.1.14 можно корректно определить группу M как прямой предел групп M_k . Из леммы 2.1.16 следует, что $M \cong \varinjlim L_k$. А лемма 2.1.17 указывает необходимый изоморфизм. \square

Доказательство замечания 2.1.4. Правая часть (2.2) изоморфна $\mathbb{Q}^+ \rtimes \mathbb{Q}^*$, здесь действие \mathbb{Q}^* на \mathbb{Q}^+ — умножение. Кроме того, $\mathbb{Q}^* \cong \mathbb{Q}_{1,n} \times \langle n \rangle$. Ещё заметим, что $\mathbb{Q}^+ \rtimes \langle n \rangle \cong BS(1, n)$, при действии $\langle n \rangle$ на \mathbb{Q}^+ умножением. Получаем, что (2.2) эквивалентно

$$\text{Comm}(BS(1, n)) \cong BS(1, n) \rtimes \mathbb{Q}_{1,n}. \quad (2.34)$$

Положим $p = 1, q = n$ в копредставлении (2.33) группы L_m . Можно заметить, что из соотношения $SA^nS^{-1} = A$ следует, что $[S^m, A] = A^{1-n^m}$, а из этого равенства следуют остальные соотношения группы. Таким образом, при $p = 1, q = n$ группа L_m при всех m изоморфна $BS(1, n)$, следовательно, и прямой предел $\varinjlim L_m$ тоже изоморфен $BS(1, n)$. \square

2.2 Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага–Солитера

Д. Маклаури [70] использовал алгебраическую геометрию для поиска неприводимых представлений группы $BS(p, q)$. Пусть $\varphi: BS(p, q) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ — произвольное неприводимое представление, и \mathbf{A} — замыкание группы $\langle \varphi(a) \rangle$ в топологии Зарисского, а \mathbf{G} — замыкание всего образа $\varphi(BS(p, q))$. Решающее значение в работе Маклаури имеет теорема 3.2 о том, что группа \mathbf{A} является нормальной подгруппой группы \mathbf{G} .

В данном параграфе будут найдены все неприводимые представления произвольной подгруппы конечного индекса группы $BS(p, q)$ и установлен критерий их эквивалентности. При этом будут использованы только стандартные факты линейной алгебры и теории чисел.

В этом параграфе для группы H_m (2.1) удобнее использовать следующее копредставление:

$$H_m \cong \langle a_1, a_2, \dots, a_m, d \mid a_i^p = a_{i+1}^q, i = 1, 2, \dots, m-1, d^{-1}a_m^p d = a_1^q \rangle.$$

Определим для некоторых $\mu, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $s \in \mathbb{N}$ следующие $(n \times n)$ матрицы:

$$R_{m-i} = \begin{pmatrix} \mu^{s^i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^{s^{i+m}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{s^{i+(n-1)m}} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

здесь $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Теорема 2.2.1. Пусть H – подгруппа конечного индекса группы $BS(p, q)$, изоморфная H_m , и $\varphi: H \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ – неприводимое представление. Тогда существуют:

- 1) натуральное число $l \perp pq$, которое не делит $q^{km} - p^{km}$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$ и делит $q^{nm} - p^{nm}$;
- 2) натуральное число s такое, что $q \equiv ps \pmod{l}$;
- 3) комплексное число λ , не равное нулю;
- 4) комплексное число μ – примитивный корень из 1 степени l ,

такие, что в подходящем базисе $\varphi(a_i) = R_i$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $\varphi(d) = S$.

Если параметры l, s, λ, μ удовлетворяют условиям 1)–4), то гомоморфизм $\varphi: H \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ такой, что $\varphi(a_i) = R_i$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $\varphi(d) = S$ является неприводимым представлением.

Замечание 2.2.2. Пусть φ_1 и φ_2 – неприводимые представления группы H_m , соответствующие параметрам $l_1, s_1, \lambda_1, \mu_1$ и $l_2, s_2, \lambda_2, \mu_2$ соответственно. Представления φ_1 и φ_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $l_1 = l_2 = l$, $s_1 \equiv s_2 \equiv s \pmod{l}$, $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ для некоторого $0 \leq k \leq n-1$.

Пусть H – подгруппа конечного индекса группы $BS(p, q)$, изоморфная H_m , и $\varphi: H \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ – неприводимое представление группы H . Обозначим $A_i = \varphi(a_i)$ при $i = 1, 2, \dots, m$, $D = \varphi(d)$ и $G = \varphi(H_m)$. Наша цель – доказать, что в подходящем базисе $A_i = R_i$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $D = S$. Отождествляем вектор v из n мерного векторного пространства V над полем комплексных чисел со столбцом высоты n над комплексными числами. Действие линейных операторов – левое (т.е. $A: v \mapsto Av$).

Лемма 2.2.3. Собственные числа всех матриц A_i при $i = 1, 2, \dots, m$ являются корнями из 1 степени $s \perp pq$.

Доказательство. Из соотношений группы H_m следует, что $D^{-1}A_i^{p^m}D = A_i^{q^m}$ для $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, $SpA_i^{p^m} = SpA_i^{q^m}$. Пусть $SpA_i = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, тогда $SpA_i^{p^m} = \{\lambda_1^{p^m}, \lambda_2^{p^m}, \dots, \lambda_n^{p^m}\} = \{\lambda_1^{q^m}, \lambda_2^{q^m}, \dots, \lambda_n^{q^m}\} = SpA_i^{q^m}$. Значит, есть такая перестановка $\sigma_i \in \mathbb{S}_n$, что $\lambda_j^{p^m} = \lambda_{\sigma_i(j)}^{q^m}$ при $j = 1, 2, \dots, n$. Если k_i – порядок перестановки σ_i , то $\lambda_j^{p^{k_i m}} = \lambda_j^{q^{k_i m}}$. Следовательно, λ_j – корень из 1 степени $c_i = p^{k_i m} - q^{k_i m} \perp pq$. Положим $c = \text{НОК}(c_1, c_2, \dots, c_m)$. \square

Лемма 2.2.4. *Если v – собственный вектор оператора A_i^p (A_i^q), то v – собственный вектор оператора A_i .*

Доказательство. Докажем лемму для A_i^p , для A_i^q аналогично. Пусть J_i – жорданова форма матрицы A_i , а C – матрица перехода к жорданову базису матрицы A_i . Тогда $J_i = C^{-1}A_iC$. Так как v – собственный вектор A_i^p , то $A_i^p v = \gamma^p v$ для некоторого $\gamma \in SpA_i$. Значит $v \in \text{Ker}(A_i^p - \gamma^p E) = \text{Ker}C(J_i^p - \gamma^p E)C^{-1}$. Это равносильно тому, что $Cv \in \text{Ker}(J_i^p - \gamma^p E)$. Докажем, что $\text{Ker}(J_i^p - \gamma^p E) = \text{Ker}(J_i - \gamma E)$. Это будет означать, что $v \in \text{Ker}(A_i - \gamma E)$ и, следовательно, v собственный вектор A_i .

Матрица J_i – блочно диагональная матрица с жордановыми клетками вида K_γ по диагонали, следовательно, J_i^p – тоже блочно диагональная матрица с блоками вида K_γ^p по диагонали. Нулевые столбцы в матрице $J_i - \gamma E$ являются первыми столбцами клеток K_γ . У матрицы $J_i^p - \gamma^p E$ эти столбцы тоже будут нулевыми. Покажем, что других нет. Во-первых, если $\gamma \neq \mu$, то в $K_\mu^p - \gamma^p E$ нет нулевых столбцов, так как $\gamma^p \neq \mu^p$. Это следует из того, что γ и μ – различные корни из 1 степени $c \perp pq$. Во-вторых, в $K_\gamma^p - \gamma^p E$ единственный нулевой столбец первый потому, что в остальных есть число $p\gamma^{p-1} \neq 0$ (т.к. $|\gamma| = 1$).

Кроме того, несложно видеть, что ненулевые столбцы в матрицах $J_i - \gamma E$ и $J_i^p - \gamma^p E$ линейно независимы. Осталось заметить, что $\text{Ker}(J_i - \gamma E)$ порождается векторами жорданова базиса, соответствующими нулевым столбцам. \square

Фиксируем собственный вектор w оператора A_m с собственным числом μ . По лемме 2.2.3 μ – корень из 1, обозначим через l порядок числа μ , тогда μ – примитивный корень из 1 степени l и $l \perp pq$.

Следствие 2.2.5. Если $w \in V \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{C}$ такие, как описано выше, то $A_{m-i}w = \mu^{s^i}w$, где s – такое натуральное число, что q сравнимо с ps по модулю l . Кроме того, комплексные числа μ^{s^i} , $i = 0, 1, \dots, m-1$ являются примитивными корнями из 1 степени l .

Доказательство. Если $A_m w = \mu w$, то $A_m^{q^i} w = \mu^{q^i} w$. Тогда, используя соотношения H_m , получаем $A_{m-i}^{p^i} w = \mu^{q^i} w$. Отсюда, по лемме 2.2.4, получаем $A_{m-i} v = \mu^{s^i} v$. Предположим, что для некоторого i число μ^{s^i} не является примитивным корнем из 1 степени l , тогда получим, что $s^i \not\equiv 1 \pmod{l}$. Однако из определения s видно, что в кольце вычетов по модулю l число s является обратимым элементом, следовательно, $s \perp l$. Противоречие. \square

Лемма 2.2.6. Если $A_i v = \lambda v$, λ – примитивный корень из 1 степени l , и $v \neq 0$, то $A_i D v = \lambda^{s^m} D v$ и $D v \neq 0$.

Доказательство. Равенство $A_i v = \lambda v$ влечёт $A_i^{q^m} v = \lambda^{q^m} v$. Умножим на D слева и применим соотношения H_m , получим $\lambda^{q^m} D v = D A_i^{q^m} v = A_i^{p^m} D v$. По лемме 2.2.4 получаем $A_i D v = \lambda^{s^m} D v$. Наконец, так как определитель D не равен нулю, получаем требуемое. \square

Лемма 2.2.7. Векторное пространство V имеет базис v_1, v_2, \dots, v_n собственных векторов матрицы A_m , на котором D действует так: $D v_i = v_{i+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $D v_n = \lambda v_1$ для некоторого комплексного числа $\lambda \neq 0$. Числа $\mu^{s^{im}}$ и $\mu^{s^{jm}}$ различны при $0 \leq i \neq j \leq n-1$ и $\mu = \mu^{s^{nm}}$.

Доказательство. Пусть $w \in V \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{C}$ такие, как описано выше. Построим подпространство W векторного пространства V с помощью следующей процедуры. Положим $W_1 = \langle w \rangle$. Если $D w \notin W_1$, то $W_2 = \langle w, D w \rangle$. Если построено W_i и $D^i w \notin W_i$, то $W_{i+1} = \langle w, D w, \dots, D^i w \rangle$. Если же $D^i w \in W_i$, то $W = W_i$, и процедура заканчивается.

Ввиду того, что $\dim V = n < \infty$, мы построим W не более чем за n шагов. Из способа построения W , леммы 2.2.6 и следствия 2.2.5 следует, что W инвариантно относительно G . Ввиду того, что W содержит ненулевой вектор, и φ неприводимо, получаем $W = V$.

По лемме 2.2.6 вектор $D^n w$ – собственный для A_m с собственным числом $\mu^{s^{mn}}$. Так как $D^n w \in W_n$, то $D^n w = \alpha_0 w + \alpha_1 Dw + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1} w$. Это возможно только в том случае, когда среди векторов $w, Dw, \dots, D^{n-1} w$ есть такие, у которых собственные числа равны $\mu^{s^{mn}}$. Пусть r – такое минимальное число, что $\mu^{s^{mn}} = \mu^{s^{mr}}$, тогда $D^n w = \alpha_r D^r w + \alpha_{r+1} D^{r+1} w + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1} w$ и все векторы $D^i w$ при $r \leq i \leq n-1$, входящие в разложение вектора $D^n w$ с коэффициентами, не равными нулю, являются собственными векторами оператора A_m с собственными числами $\mu^{s^{rm}}$.

Если $r \neq 0$, то подпространство $\langle D^r w, D^{r+1} w, \dots, D^{n-1} w \rangle$ инвариантно относительно G (ввиду разложения вектора $D^n w$, представленного выше), следовательно, $r = 0$.

Если $D^n w \in \langle w \rangle$, то получаем требуемое, иначе $D^n w = \alpha_0 w + \alpha_1 Dw + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1} w$ и все векторы $D^i w$, входящие в разложение с коэффициентами, не равными нулю, являются собственными для A_m с собственным числом μ . Пусть k – такое минимальное целое положительное число, что $A_m D^k w = \mu \cdot D^k w$. Ввиду действия D на базисе $w, Dw, \dots, D^{n-1} w$ и леммы 2.2.6 несложно видеть, что $n = k \cdot t$, и в этом базисе матрица A_m диагональная с числами

$$\underbrace{\mu, \mu^{s^m}, \dots, \mu^{s^{(k-1)m}}}_k, \underbrace{\mu, \mu^{s^m}, \dots, \mu^{s^{(k-1)m}}}_k, \dots, \underbrace{\mu, \mu^{s^m}, \dots, \mu^{s^{(k-1)m}}}_k \quad (2.36)$$

по диагонали.

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ – координаты вектора x в базисе $w, Dw, \dots, D^{n-1} w$. Используя (2.36), следствие 2.2.5 и знание о действии D на базисе, нетрудно убедиться, что подпространство, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 = x_{k+1} = \dots = x_{(t-1)k+1}, \\ x_2 = x_{k+2} = \dots = x_{(t-1)k+2}, \\ \dots \\ x_k = x_{2k} = \dots = x_{tk}, \end{cases}$$

инвариантно относительно G и является собственным. Противоречие. Значит, $D^n w \in \langle w \rangle$, и $\mu^{s^{nm}} = \mu$.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $\mu^{s^{im}} = \mu^{s^{jm}}$. Это эквивалентно тому, что $s^{im} \equiv s^{jm} \pmod{l}$. Получаем $s^{(i-j)m} \equiv 1 \pmod{l}$. Значит, можно считать, что

$\mu = \mu^{s^{rm}}$ для некоторого целого r , $0 < r < n$. Теперь можно использовать первую часть доказательства этой леммы и получить противоречие. \square

Следствие 2.2.8. Матрицы A_i при $i = 1, 2, \dots, t$ имеют порядок l . В базисе собственных векторов матрицы A_m матрицы A_i и D имеют вид (2.35).

Доказательство. Следует из следствия 2.2.5, леммы 2.2.6 и леммы 2.2.7. \square

Лемма 2.2.9. Представление H_m матрицами (2.35) неприводимо тогда и только тогда, когда l не делит $q^{km} - p^{km}$ для всех $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Доказательство. Если представление неприводимо, то по лемме 2.2.7 имеем $\mu \neq \mu^{s^{im}}$ при $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Это эквивалентно тому, что $1 \not\equiv s^{im} \pmod{l}$, следовательно, $p^{im} \not\equiv q^{im} \pmod{l}$.

В обратную сторону. Если $U \subset V$ – собственное инвариантное подпространство относительно G , то для сужений $A_i|_U$ и $D|_U$ верны все доказанные утверждения. В частности, если $k = \dim(U)$, то на U есть базис $u, Du, \dots, D^{k-1}u$ для некоторого u – собственного вектора A_m с собственным числом $\mu^{s^{im}}$. Тогда $\mu^{s^{im+km}} = \mu^{s^{im}}$, значит, $s^{im} \equiv s^{im+km} \pmod{l}$. В итоге получается $p^{km} \equiv q^{km} \pmod{l}$ для некоторого целого k , $0 < k < n$. Противоречие. \square

Доказательство теоремы 2.2.1. Если $\varphi: H \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ – неприводимое представление, то существование нужных констант и базиса следует из следствий 2.2.5, 2.2.8 и лемм 2.2.7, 2.2.9. Если же l, s, λ, μ удовлетворяют условиям 1)–4), то гомоморфизм $\varphi: H \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, заданный на порождающих $\varphi(a_i) = R_i$ при $i = 1, 2, \dots, t$ и $\varphi(d) = S$, является неприводимым представлением ввиду леммы 2.2.9 и проверки соотношений группы H_m на матрицах R_i и S . \square

Ввиду доказанной теоремы при фиксированных n, p, q и t каждое неприводимое представление соответствует набору параметров l, s, λ, μ .

Доказательство замечания 2.2.2. Пусть φ_1 эквивалентно φ_2 . Обозначим $\varphi_1(d) = D_1$, $\varphi_2(d) = D_2$, $\varphi_1(a_i) = A_i$ и $\varphi_2(a_i) = B_i$ при $i = 1, 2, \dots, t$. Тогда существует невырожденная матрица C такая, что

$$C^{-1}D_1C = D_2, C^{-1}A_iC = B_i, i = 1, 2, \dots, t. \quad (2.37)$$

Так как A_i и B_i сопряжены, то их порядки равны. Из следствия 2.2.8 получается, что $l_1 = l_2 = l$ и, следовательно, $s_1 \equiv s_2 \equiv s \pmod{l}$.

Из равенств (2.37) следует, что жордановы формы матриц A_m и B_m совпадают, но эти матрицы уже диагональны, следовательно, существует подстановка σ на множестве $\{0, 1, \dots, n-1\}$ такая, что

$$\begin{aligned} C^{-1}A_m C &= \text{diag}\{\mu_1^{s^{(\sigma 0) \cdot m}}, \mu_1^{s^{(\sigma 1) \cdot m}}, \dots, \mu_1^{s^{(\sigma(n-1)) \cdot m}}\} = \\ &= \text{diag}\{\mu_2, \mu_2^{s^m}, \dots, \mu_2^{s^{(n-1)m}}\} = B_m. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Получаем $\mu_2 = \mu_1^{s^{(0\sigma) \cdot m}}$ или $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ при $k = \sigma 0$. Наконец, из (2.37) следует, что $\det(D_1) = \det(D_2)$ и, следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Получили требуемое.

Пусть $l_1 = l_2 = l$, $s_1 \equiv s_2 \equiv s \pmod{l}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ для некоторого $0 \leq k \leq n-1$. Найдём невырожденную матрицу C , удовлетворяющую (2.37). Из равенства $\mu_2 = \mu_1^{s^{km}}$ следует, что

$$\mu_2^{s^{i+j \cdot m}} = \left(\mu_1^{s^{k \cdot m}}\right)^{s^{i+j \cdot m}} = \mu_1^{s^{i+(j+k)m}}, \quad 0 \leq j \leq n-1, 0 \leq i \leq m-1. \quad (2.39)$$

Значит, равенства $C^{-1}A_{m-i}C = B_{m-i}$, $0 \leq i \leq m-1$ равносильны

$$\begin{aligned} C^{-1} \text{diag}\{\mu_1^{s^i}, \mu_1^{s^{i+m}}, \dots, \mu_1^{s^{i+(n-1)m}}\} C &= \\ = \text{diag}\{\underbrace{\mu_1^{s^{i+km}}, \mu_1^{s^{i+(k+1)m}}, \dots, \mu_1^{s^{i+(n-1)m}}}_{n-k}, \underbrace{\mu_1^{s^i}, \mu_1^{s^{i+m}}, \dots, \mu_1^{s^{i+(k-1)m}}}_k\}, \quad 0 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

Это значит, что на диагональных матрицах сопряжение матрицей C индуцирует циклический сдвиг на k элементов.

Обозначим за T матрицу, которая получается из матрицы S , см. (2.35), при $\lambda = 1$. Можно убедиться, что сопряжение диагональной матрицы с помощью T даёт циклический сдвиг диагонали на 1 элемент. Учитывая равенства (2.39), несложно проверить, что для любых ненулевых комплексных чисел x_1, x_2, \dots, x_n выполнено равенство

$$\left(\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) T^k\right)^{-1} \cdot A_i \cdot \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) T^k = B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

По условию, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Можно проверить, что матрица

$$C = \text{diag}\{\underbrace{\lambda, \lambda, \dots, \lambda}_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-k}\} T^k$$

удовлетворяет равенству $C^{-1}D_1C = D_2$. Это можно сделать прямыми вычислениями, помня, что $D_1 = \text{diag}(\lambda, 1, 1, \dots, 1)T$, $D_2 = \text{diag}(\lambda, 1, 1, \dots, 1)T$, и используя равенство $T^{-1}\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)T = \text{diag}(a_2, a_3, \dots, a_n, a_1)$. \square

Пример 2.2.10. Из замечания следует, что при данных p, q, m, n неприводимое представление с точностью до эквивалентности довольно жестко задаётся числами l и λ . Приведем пример неэквивалентных представлений, у которых l и λ совпадают.

Пусть $p = 2, q = 3, m = 2, n = 3, \lambda = 1$. Из теоремы 2.2.1 следует, что l должно не делить $q^{1 \cdot m} - p^{1 \cdot m} = 5$ и $q^{2 \cdot m} - p^{2 \cdot m} = 13 \cdot 5$ и делить $q^{3 \cdot m} - p^{3 \cdot m} = 19 \cdot 7 \cdot 5$. Можно взять $l = 7 \perp 2 \cdot 3 = 6$. Тогда s найдём из сравнения $3 \equiv 2 \cdot s \pmod{7}$, получим $s = 5$. Положим $\mu_1 = e^{2\pi \cdot \frac{2}{7} \cdot i}$ – примитивный корень из 1 степени 7. Этот набор параметров определяет неприводимое представление.

По замечанию 2.2.2 представлениям, эквивалентным данному, будут соответствовать ещё 2 примитивных корня $\mu_2 = \mu_1^{s^{1 \cdot m}} = \mu_1^{5^2} = \mu_1^{25} = \mu_1^4 = e^{2\pi \cdot \frac{1}{7} \cdot i}$ и $\mu_3 = \mu_1^{s^{2 \cdot m}} = \mu_1^{5^4} = \mu_1^{625} = \mu_1^2 = e^{2\pi \cdot \frac{4}{7} \cdot i}$. Однако, числа $e^{2\pi \cdot \frac{3}{7} \cdot i}$, $e^{2\pi \cdot \frac{5}{7} \cdot i}$ и $e^{2\pi \cdot \frac{6}{7} \cdot i}$ тоже являются примитивными корнями из 1 степени 7, им соответствуют другие, не эквивалентные данному, представления.

2.3 Вложение групп Баумслага–Солитера в GBS группы

Заметим, что если $BS(p, q) \subseteq G$, то $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$. Обратно, если $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то в группе G разрешимо уравнение $x^{-1}y^p x = y^q$ при $y \neq 1$. Однако неясно, верно ли, что в этом случае группа $BS(p, q)$ вкладывается в группу G . В 2007 году Ж. Левитт [67] среди прочих замечаний пишет, что скорее всего неверно то, что группа G содержит $BS(p, q)$, если $\frac{p}{q} \neq \pm 1$ принадлежит $\Delta(G)$. В этом параграфе мы докажем, что это не так.

Теорема 2.3.1. *Группа Баумслага–Солитера $BS(p, q)$ вкладывается в группу G тогда и только тогда, когда $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$.*

В этом параграфе нам будет удобно пользоваться альтернативным определением *модулярного гомоморфизма*. Пусть $G = \pi_1(\mathbb{A})$. Фиксируем вершину v_0 графа A и максимальное поддерево T . Каждому элементу $g \in G$ можно поставить в соответствие такой цикл $\gamma_g = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, что $\partial_0(e_1) = \partial_1(e_n) = v_0$. Для этого нужно рассмотреть g как слово от порождающих группы G и читать это слово. Начать можно с любого ребра $e_1 \in E(T)$, $\partial_0(e_1) = v_0$. Если при чтении встречается элемент из стабилизатора вершины v , то составленный ранее рёберный путь (e_1, e_2, \dots, e_k) надо дополнить до пути $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_l)$ так, чтобы $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_l \in E(T)$ и $\partial_1(e_l) = v$. Если при чтении встретился символ $t_f^{\pm 1}$, то новая часть пути имеет вид $(e_{k+1}, \dots, e_l, f(\bar{f}))$, где $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_l \in E(T)$, $f \in E(A \setminus T)$. После прочтения слова надо по ребрам дерева T вернуться в начальную вершину v_0 . Такой способ задания цикла γ_g согласован с определением фундаментальной группы графа групп, см. параграф 1.1. Несложно понять, что

$$\Delta(g) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(\bar{e}_i)}{\lambda(e_i)}. \quad (2.40)$$

Так же для данного рёберного пути $\gamma = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ будем обозначать через $\Delta(\gamma) = \Delta(e_1, e_2, \dots, e_n)$ произведение, как в (2.40).

Лемма 2.3.2. *Если $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, то существует $\mathbb{A}_1 = (A_1, \lambda_1)$ — такой граф с метками, что $G \cong \pi_1(\mathbb{A}_1)$ и в A_1 есть такой цикл $\gamma = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, что $\Delta(\gamma) = \frac{p}{q}$, и для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ метки $\lambda(e_i)$ и $\lambda(\bar{e}_{i-1})$ обе не равны 1.*

Доказательство. В силу того, что $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$ в графе A найдется такой цикл e_1, e_2, \dots, e_s , что $\Delta(e_1, e_2, \dots, e_s) = \frac{p}{q}$. Если в нем есть вершина с нужными свойствами, то доказывать нечего. Если нет, то рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть найдется такое ребро e_i , что $\lambda(e_i) = \lambda(\bar{e}_{i-1}) = 1$ или $\lambda(e_i) = \lambda(\bar{e}_i) = 1$, тогда используем скольжение ребра \bar{e}_{i-1} по ребру e_i . Далее будем рассматривать цикл $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_s$.

Случай 2. Для каждого i либо $\lambda(e_i) = 1$, либо $\lambda(\bar{e}_{i-1}) = 1$, и нет рёбер с обоими метками, равными 1. Из того, что цикл замкнут легко понять, что либо для всех i $\lambda(e_i) = 1$, либо для всех i $\lambda(\bar{e}_{i-1}) = 1$. Однако это невозможно из-за условия $\Delta(e_1, e_2, \dots, e_s) = \frac{p}{q}$ потому, что $p \neq 1$, $q \neq 1$. \square

Доказательство теоремы 2.3.1. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Используя лемму 2.3.2, мы будем искать вложение группы $BS(p, q)$ в \mathbb{A}_0 – цикл с метками, построенный на ребрах e_1, e_2, \dots, e_n . При этом будем считать, что a_i – начало ребра e_i , и a_1 – вершина с соседними метками, не равными единице.

Среди рёбер e_1, e_2, \dots, e_n есть рёбра (не менее 1), не лежащие в максимальном поддереве графа \mathbb{A}_0 , обозначим соответствующие им порождающие группы $\pi_1(\mathbb{A}_0)$ через t_1, t_2, \dots, t_k .

Обозначим через s – такое минимальное натуральное число, что в $\pi_1(\mathbb{A}_0)$ выполнено равенство

$$t_k^{-1} \dots t_2^{-1} t_1^{-1} a_1^{sp} t_1 t_2 \dots t_k = a_1^{sq}. \quad (2.41)$$

Тогда если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выполнено $t_k^{-1} \dots t_2^{-1} t_1^{-1} a_1^{mp} t_1 t_2 \dots t_k = a_1^{mq}$, то s делит m .

Так как в $\pi_1(\mathbb{A}_0)$ выполняется (2.41), то отображения

$$\varphi_h: \begin{cases} a \mapsto a_1^s, \\ t \mapsto t_1 t_2 \dots t_k h, \quad h \in C(a_1^{sq}), \end{cases}$$

задают гомоморфизмы $BS(p, q) \rightarrow \pi_1(\mathbb{A}_0)$. Обозначим через $g = t_1 t_2 \dots t_k$. Из (2.41) видно, что a_1 и $g^{-1} a_1 g \in C(a_1^{sq})$, значит, $[a_1, g] \in C(a_1^{sq})$.

Докажем от противного, что $\varphi_{[a_1, g]}$ является вложением. Пусть это не так, тогда найдётся приведённое слово $w = w(a, t) \neq 1$ в $BS(p, q)$ такое, что $w(a_1^s, g[a_1, g]) = 1$ в $\pi_1(\mathbb{A}_0)$.

Тогда $\Delta(w(a_1^s, g[a_1, g])) = 1$, а, с другой стороны, $\Delta(w(a, t)) = \left(\frac{p}{q}\right)^k$, где k – сумма показателей степеней, с которыми t входит в запись слова $w(a, t)$. Значит, $k = 0$ и $w(a, t) = u(t^{-i} a t^i | i \in \mathbb{Z})$, т.е. $w(a, t)$ лежит в нормальном замыкании элемента a . Следовательно, $u(x_i | i \in \mathbb{Z}) = 1$, где $x_i = (g[a_1, g])^{-i} a_1^s (g[a_1, g])^i$.

Итак, по предположению, существуют такие целые числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и i_1, \dots, i_m , что $i_{j-1} \neq i_j$, и

$$(t^{-i_1} a^{\alpha_1} t^{i_1}) (t^{-i_2} a^{\alpha_2} t^{i_2}) \dots (t^{-i_m} a^{\alpha_m} t^{i_m}) \neq 1 \quad (2.42)$$

в группе $BS(p, q)$, но при этом

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_m}^{\alpha_m} = 1 \quad (2.43)$$

в группе $\pi_1(\mathbb{A}_0)$.

Докажем, что из (2.43) следует, что найдется такое j , что $p|\alpha_j$ или $q|\alpha_j$, и это будет противоречить приведённости слова w в группе $BS(p, q)$. Для этого будем воспринимать $\pi_1(\mathbb{A}_0)$ как группу, построенную из бесконечных циклических групп с помощью свободных произведений с объединением и HNN -расширений.

Исследуем структуру элемента из (2.43) на стыке x_{i_j} и $x_{i_{j+1}}$. Если $i_j - i_{j+1} > 0$, то на стыке получаем $(g[a_1, g])^{i_j - i_{j+1}} = (ga_1^{-1}g^{-1}a_1g)(ga_1^{-1}g^{-1}a_1g) \dots (ga_1^{-1}g^{-1}a_1g)$ – приведённое слово в $\pi_1(\mathbb{A}_0)$, как в HNN -расширении. Это обеспечивается выбором a_1 из леммы. Случай $i_j - i_{j+1} > 0$ аналогичен рассмотренному.

Но ввиду равенства (2.43) левая часть не может быть приведена, значит, сокращения должны начаться в середине какого-то x_{i_j} .

Если $i_{j-1} > i_j$, и $i_{j+1} < i_j$, то

$$x_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{i_j}^{\alpha_j} x_{i_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = \dots (ga_1^{-1}g^{-1}a_1g)a_1^{\alpha_j}(ga_1^{-1}g^{-1}a_1g) \dots,$$

сокращений нет.

Если $i_{j-1} < i_j$, и $i_{j+1} > i_j$, то

$$x_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{i_j}^{\alpha_j} x_{i_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} = \dots (ga_1^{-1}g^{-1}a_1g)^{-1} a_1^{s\alpha_j} (ga_1^{-1}g^{-1}a_1g)^{-1} \dots,$$

сокращений нет.

Значит, сокращения начнутся, только если $(i_{j-1} > i_j, \text{ и } i_{j+1} > i_j)$ или $(i_{j-1} < i_j, \text{ и } i_{j+1} < i_j)$. Рассмотрим подробно первый случай, второй проверяется аналогично.

Если $i_{j-1} > i_j$, и $i_{j+1} > i_j$, то

$$\begin{aligned} x_{i_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} x_{i_j}^{\alpha_j} x_{i_{j+1}}^{\alpha_{j+1}} &= \dots (g[a_1, g])a_1^{s\alpha_j} ([a_1, g]^{-1}g^{-1}) \dots = \\ &= \dots ga_1^{-1}g^{-1}a_1 \underline{ga_1^{s\alpha_j} g^{-1}a_1^{-1}ga_1g^{-1}} \dots, \end{aligned} \quad (2.44)$$

сокращения могут начаться только в месте подчеркивания. Пусть t_1 соответствует ребру e_r , тогда для некоторого рационального δ верно равенство

$$t_1 t_2 \dots t_k a_1^{s\alpha_j} t_k^{-1} \dots t_2^{-1} t_1^{-1} = a_r^{s\alpha_j \cdot \delta},$$

продолжим равенство (2.44):

$$= \dots ga_1^{-1}g^{-1}a_1a_r^{s\alpha_j\cdot\delta}a_1^{-1}ga_1g^{-1} \dots$$

Если $a_r^{s\alpha_j\cdot\delta}$ не является степенью a_1 , то дальнейшее сокращение невозможно, так как $(t_1t_2\dots t_k)^{-1}a_1a_r^{s\alpha_j\cdot\delta}a_1^{-1}t_1t_2\dots t_k$ не удовлетворяет лемме 1.3.1. Поэтому $a_r^{s\alpha_j\cdot\delta}$ является степенью a_1 , значит, мы использовали все соотношения по циклу e_1, e_2, \dots, e_n , и из второго определения модулярного гомоморфизма следует, что

$$t_1t_2\dots t_ka_1^{s\alpha_j}(t_1t_2\dots t_k)^{-1} = a_1^{s\alpha_j\cdot\frac{p}{q}}.$$

Следовательно, $q|s\alpha_j$.

Пусть $m = \frac{s\alpha_j}{q}$, тогда $g^{-1}a_1^{mp}g = a_1^{mq}$. Как замечено ранее, это влечёт $s|m$, а это значит, что $q|\alpha_j$. Так как предполагалось, что $i_{j-1} > i_j$, и $i_{j+1} > i_j$, то в записи левой части (2.42) получаем подслово $ta^{\alpha_j}t^{-1}$, что противоречит приведённости w . \square

Глава 3

Централизаторная размерность и универсальная эквивалентность GBS групп

3.1 Централизаторная размерность при $\Delta(G) \not\subseteq \{\pm 1\}$

В этом параграфе мы опишем централизаторную размерность всех GBS групп, у которых $\Delta(G) \not\subseteq \{\pm 1\}$. В этом случае либо $\frac{p}{q} \in \Delta(G)$, и тогда, по теореме 3.1.1, $cdim(G) = \infty$, либо $\Delta(G) = \langle n \rangle$, $n \neq \pm 1$. В последнем случае описание централизаторной размерности даёт теорема 3.1.2.

Теорема 3.1.1. *Если в группе G разрешимо уравнение $x^{-1}y^p x = y^q$ при $y \neq 1$, то централизаторная размерность группы G бесконечна.*

Теорема 3.1.2. *Пусть $\Delta(G) = \langle n \rangle$, $n \neq \pm 1$. Если $G \not\cong BS(1, n)$, то централизаторная размерность группы G бесконечна. Централизаторная размерность группы $BS(1, n)$ равна 3.*

Обозначим через $R_m(p, q)$, $m \geq 1$ итерированное свободное произведение циклических групп с объединёнными циклическими подгруппами:

$$R_m = R_m(p, q) = \langle a_1 \rangle_{a_1^q = a_2^p} * \langle a_2 \rangle_{a_2^q = a_3^p} \dots * \langle a_m \rangle_{a_{m-1}^q = a_m^p}$$

Лемма 3.1.3. Для всех $m \geq 1$ группа $R_m(p, q)$ изоморфно вкладывается в группу $BS(p, q)$.

Доказательство. Обозначим $a_i = t^{-i}at^i, i \in \mathbb{Z}$ в группе $BS(p, q)$. Группа $BS(p, q)$ может быть задана копредставлением

$$BS(p, q) = \langle a_i, i \in \mathbb{Z}, t | a_{i+1} = t^{-1}a_it, a_{i+1}^p = a_i^q, i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Значит, $BS(p, q)$ является расширением нормальной подгруппы $N = \langle a_i, i \in \mathbb{Z} \rangle$ с помощью автоморфизма $t: a_i \mapsto a_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$. Ясно, что

$$N = \dots *_{a_{-1}^q = a_0^p} \langle a_0 \rangle *_{a_0^q = a_1^p} \langle a_1 \rangle *_{a_1^q = a_2^p} \dots *_{a_{m-1}^q = a_m^p} \langle a_m \rangle *_{a_m^q = a_{m+1}^p} \langle a_{m+1} \rangle \dots$$

Поэтому $R_m(p, q) \hookrightarrow N \hookrightarrow BS(p, q)$. □

Для всякого $1 \leq l \leq m-1$ обозначим через A_l и B_l подгруппы группы R_m такие, что $A_l = \langle a_1, \dots, a_l \rangle, B_l = \langle a_{l+1}, \dots, a_m \rangle$. Тогда несложно понять, что

$$R_m \cong A_l *_{a_l^q = a_{l+1}^p} B_l. \quad (3.1)$$

Лемма 3.1.4. Пусть $0 \leq k \leq m-1$. Централлизатор элемента $a_1^{q^k}$ в группе R_m совпадает с подгруппой $\langle a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \rangle$.

Доказательство. Так как $a_1^{q^k} = a_2^{q^{k-1}p} = \dots = a_{k+1}^{p^k}$, то $\langle a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \rangle \subseteq C_{R_m}(a_1^{q^k})$. Обратно, пусть $1 \neq z = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_s \in C_{R_m}(a_1^{q^k})$ и c_1, c_2, \dots, c_s – приведённая последовательность элементов группы R_m , соответствующая разложению (3.1) для $l = k+1$, тогда

$$z^{-1}a_1^{-q^k}za_1^{q^k} = c_s^{-1} \dots c_2^{-1} \cdot c_1^{-1} \cdot a_1^{-q^k} \cdot c_1 \cdot c_2 \dots c_s \cdot a_1^{q^k} = 1. \quad (3.2)$$

Из этого равенства следует, что последовательность

$$c_s^{-1}, \dots, c_2^{-1}, c_1^{-1}, a_1^{-q^k}, c_1, c_2, \dots, c_s, a_1^{q^k}$$

не приведена. Из равенства $a_1^{q^k} = a_{k+1}^{p^k}$ и взаимной простоты p^k и q следует, что $a_1^{q^k} \in A_{k+1}$, но $a_1^{q^k} \notin B_{k+1}$. Отсюда получаем $c_1 \in A_{k+1}$. Так как $a_1^{q^k} \in Z(A_{k+1})$, то равенство (3.1) можно переписать так:

$$c_s^{-1} \dots c_2^{-1} \cdot a_1^{-q^k} \cdot c_2 \dots c_s \cdot a_1^{q^k} = 1.$$

Рассуждая аналогично, получим $z \in A_{k+1}$. □

Лемма 3.1.5. $cdim(R_m) \geq m - 1$.

Доказательство. Следует из леммы 3.1.4 и того факта, что $R_k \supset R_{k-1}$, $1 \leq k \leq m$. \square

Доказательство теоремы 3.1.1. В лемме 2.2 [74] доказано, что если $H \leq G$, то $cdim(H) \leq cdim(G)$. По теореме 2.3.1, $BS(p, q) \hookrightarrow G$. Поэтому $R_m \hookrightarrow BS(p, q) \hookrightarrow G$ для всех $m \geq 1$. Следовательно, $cdim(G) \geq cdim(R_m) \geq m - 1$ для всех $m \geq 1$. \square

Лемма 3.1.6. Пусть $\Delta(G) = \langle n \rangle$, $n \neq \pm 1$. Если найдутся $t, a \in G$, a – эллиптический и $k \geq 2$ такие, что $t^{-1} \cdot a^k \cdot t = a^{k \cdot n}$, и для всякого $|l| < k$ слово $t^{-1} \cdot a^l \cdot t$ приведено в G , то $cdim(G) = \infty$.

Доказательство. Обозначим через a_i элемент $t^{-i} \cdot a \cdot t^i$. Тогда $C_G(a^{k \cdot n^s}) \supseteq \langle a, a_1, \dots, a_s \rangle$, но $a_{s+1} \notin C_G(a^{k \cdot n^s})$. В противном случае

$$t^{-s-1} \cdot a^{-1} \cdot t^{s+1} \cdot a^{-k \cdot n^s} \cdot t^{-s-1} \cdot a \cdot t^{s+1} \cdot a^{k \cdot n^s} = 1,$$

но после применения условия леммы s раз мы видим, что

$$t^{-s-1} \cdot a^{-1} \cdot t \cdot a^{-k} \cdot t^{-1} \cdot a \cdot t^{s+1} \cdot a^{k \cdot n^s} = 1.$$

Это равенство невозможно, так как левая часть приведена и, следовательно, не равна 1 по лемме 1.3.1. \square

Доказательство теоремы 3.1.2. Пусть $G \not\cong BS(1, n)$, и G представлена редуцированным графом с метками \mathbb{A} .

Если число вершин в A больше одной, то условия леммы 3.1.6 выполнены. В качестве t надо взять любое слово на порождающих второго типа с условием $\Delta(t) = n$, а в качестве a подходящую вершину графа A . Такая вершина должна существовать, иначе для всех $v \in V(A)$ $t^{-1} \cdot v \cdot t = v^n$, значит, они все лежат в вершинной группе с началом первой буквы t , следовательно, для двух разных вершин выполнено $v = u^r$, что противоречит редуцированности графа с метками \mathbb{A} .

Если в A одна вершина a , а число рёбер графа A больше единицы, то обозначим два различных ребра и соответствующие порождающие второго типа t, r . Можно

считать, что $\Delta(t) = m = n^p \neq \pm 1, \Delta(r) = s = n^d$. Обозначим $b = a^q$ минимальную степень a , для которой $t^{-1}bt = b^m$, тогда $C_G(b^{m^k \cdot s}) \supseteq C_G(b^{m^l \cdot s})$ при $k \geq l$. При этом $t^{-k} \cdot r^{-1} \cdot t^k \cdot a \cdot t^{-k} \cdot r \cdot t^k$ лежит в $C_G(b^{m^k \cdot s})$ и не лежит в $C_G(b^{m^l \cdot s})$.

Если в A одна вершина a и одно ребро t , но $G \not\cong BS(1, n)$, то $G \cong BS(k, kn), k \neq \pm 1$. В этом случае лемма 3.1.6 применима.

Осталось только доказать, что $cdim(BS(1, n)) = 3$. Заметим, что группа

$$BS(1, n) = \langle a, t \mid t^{-1} \cdot a \cdot t = a^n \rangle$$

изоморфна подгруппе M группы T верхнетреугольных невырожденных рациональных 2×2 матриц с 1 на месте (1,1). Изоморфизм

$$\varphi: a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Поэтому $cdim(BS(1, n)) = cdim(M) \leq cdim(T)$ по лемме 2.2 [74]. Так как всякая матрица в T задаётся парой рациональных чисел (одно из которых не равно 0), и централизатор набора элементов T задаётся системой линейных уравнений, то $cdim(T) \leq 3$ (максимальное количество вложенных подпространств). Поэтому $cdim(BS(1, n)) \leq 3$, а так как $BS(1, n)$ неабелева, и централизаторная размерность не может быть равна 2 [43], то $cdim(BS(1, n)) = 3$. \square

3.2 Централизаторная размерность GBS групп, представленных деревьями с метками

Если \mathbb{A} — дерево с метками, то замечание 3.2.27 даёт описание решётки централизаторов группы $\pi_1(\mathbb{A})$, а в теореме 3.2.1 содержится полная информация о возможных значениях централизаторной размерности $\pi_1(\mathbb{A})$.

Теорема 3.2.1. *Пусть \mathbb{A} — редуцированное дерево с метками, $\pi_1(\mathbb{A}) = G$, тогда $cdim(G) \leq 2 \cdot |V(A)| - 1$, число $cdim(G)$ нечётное. Для любого нечётного числа l от 3 до $2 \cdot n - 1$ найдется редуцированное дерево с метками \mathbb{B} на n вершинах такое, что $cdim(\pi_1(\mathbb{B})) = l$.*

Если не оговорено противное, будем в этом параграфе считать, что \mathbb{A} — редуцированное дерево с метками, $G = \pi_1(\mathbb{A})$ — соответствующая GBS группа.

Если e — ребро дерева A , то группа G имеет следующее представление:

$$G \cong B *_{K=L} C,$$

где $B = \pi_1(\mathbb{A}_1)$, $C = \pi_1(\mathbb{A}_2)$, $K \cong L \cong \mathbb{Z}$ так, что A_1 и A_2 — две компоненты графа A без ребра e . Такое представление будем называть e -разложением группы G . Далее в этом параграфе запись $G = B *_{K=L} C$ будет означать, что данное разложение является e -разложением для подходящего ребра e . Если элемент $g \in G$ представлен приведённой (циклически приведённой) последовательностью относительно e -разложения группы G , то будем коротко писать, что g e -приведён (e -циклически приведён).

После умножения двух e -приведённых элементов $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$ и $h = h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_m$ получается элемент $g \cdot h$, который можно представить e -приведённой последовательностью $c_1, \dots, c_{l-1}, c'_l, h_{n-l+1}, \dots, h_m$, где $c_{l+1} \cdot \dots \cdot c_n \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_{n-l} = b \in K = L$ и $c'_l = c_l \cdot b$. В этом случае будем говорить, что в слове $c_1 \cdot \dots \cdot c_n \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_m$ произошло $n - l$ сокращений.

Будем писать, что $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \in G$, при $n \geq 2$, $c_i = a_i^{\alpha_i}$, $a_i \in V(A)$ приведён, если $c_i, c_{i+1}, i = 1, \dots, k - 1$ не лежат в $\langle a \rangle$, $a \in V(A)$. Аналогично пишем, что $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \in G$, $n \geq 1$, $c_i = a_i^{\alpha_i}$, $a_i \in V(A)$ циклически приведён, если $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$ приведён, и c_1, c_n не лежат в $\langle a \rangle$, $a \in V(A)$. Заметим, что приведённый элемент $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$ равен 1, только если $n = 1$ и $c_1 = 1$.

Высказывания $g = c_1 \cdot \dots \cdot c_n \in G$ приведён (циклически приведён) и e -приведён (e -циклически приведён) имеют разный смысл. Второе употребляется только относительно фиксированного разложения G в свободное произведение с объединением. Мы будем использовать оба понятия в этом параграфе. Это удобнее, чем опираться на одно из них.

Лемма 3.2.2. *Вершинные элементы g и h группы G коммутируют тогда и только тогда, когда $h = a^k$ и $g = a^l$ для некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$, $a \in V(A)$.*

Доказательство. Достаточность очевидна, докажем необходимость. Предположим противное. Пусть $a, b \in V(A)$ — такие вершины A , что $g \in \langle a \rangle, h \in \langle b \rangle$. Обозначим

через t последнюю по счёту (от вершины a) вершину пути $a - b$ такую, что $g = t^m$. Обозначим через e последнее ребро геодезической $b - t$ и рассмотрим e -разложение группы G . По построению (см. рис. 3.1), $g = t^m \notin K = L, g \in \pi_1(\mathbb{A}_2), h \in \pi_1(\mathbb{A}_1), h \notin \pi_1(\mathbb{A}_2)$, тогда элемент $h^{-1} \cdot g^{-1} \cdot h \cdot g$ e -приведён и не может быть равен 1. Противоречие. \square

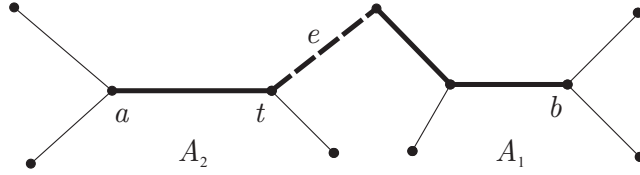


Рис. 3.1: e -разложение в лемме 3.2.2.

Утверждение 3.2.3. Пусть T — поддереву A , тогда

$$Z(\pi_1(\mathbb{T})) = \bigcap_{a \in V(T)} \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Включение \supseteq очевидно. Докажем включение \subseteq . Пусть $g = c_1 c_2 \dots c_n \in Z(\pi_1(\mathbb{T}))$ приведён, тогда для каждого $a \in V(T)$

$$c_n^{-1} \dots c_2^{-1} c_1^{-1} a^{-1} c_1 c_2 \dots c_n a = 1.$$

Равенство возможно, только если элемент $c_1^{-1} a^{-1} c_1$ лежит в $\langle a \rangle$ и равен степени a . Так как $\Delta(G) = \{1\}$, то $c_1^{-1} a^{-1} c_1 = a^{-1}$. Рассуждая аналогично, получим $[c_j, a] = 1, 1 \leq j \leq n$. Теперь утверждение следует из леммы 3.2.2. \square

Если T_1 и T_2 — поддеревья дерева A , то через $\langle T_1, T_2 \rangle$ обозначим минимальное поддерево, содержащее T_1 и T_2 .

Утверждение 3.2.4. $Z(\pi_1(\mathbb{T}_1)) \cap Z(\pi_1(\mathbb{T}_2)) = Z(\pi_1(\langle \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \rangle))$.

Доказательство. Включение \supseteq очевидно. Включение \subseteq может быть доказано с помощью утверждения 3.2.3, аналогично лемме 3.2.2. \square

Пусть $h \in G$ — гиперболический элемент. Обозначим через S_h такое минимальное поддерево, что $h \in \pi_1(S_h)$.

Следствие 3.2.5. Пусть $g \in G$ — гиперболический элемент, и $a \in C_G(g)$ — эллиптический элемент, тогда $a \in Z(\pi_1(S_g))$.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 3.2.3. □

Даже если T_1 — собственное поддерево T_2 , то $Z(\pi_1(T_2))$ может быть равен $Z(\pi_1(T_1))$. Например, дерево групп $\mathbb{R}(k, s)$, см. рис. 3.2, устроено так, что $Z(\pi_1(A)) = Z(\pi_1(\mathbb{R}(k, s))) = \langle v_1^{3^{k-1}} \rangle = \langle v_k^{2^{k-1}} \rangle$, где $A = \langle v_i, 1 \leq i \leq k \rangle$. Манипулируя параметрами k и s , можно менять число поддеревьев с совпадающими центрами соответствующих фундаментальных групп и число поддеревьев, центры фундаментальных групп которых попарно различны. Этим мы воспользуемся позже для доказательства основной теоремы.

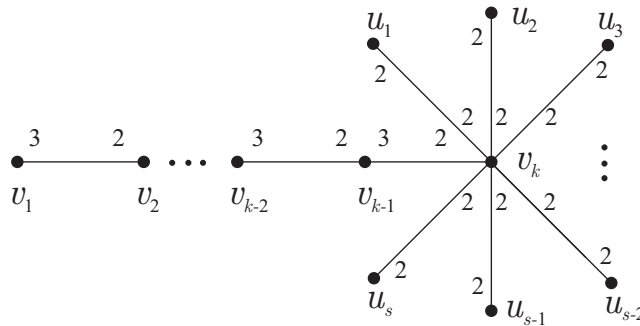


Рис. 3.2: Дерево групп $\mathbb{R}(k, s)$.

Пусть T — поддерево A , тогда из утверждения 3.2.3 следует, что $Z(\pi_1(T)) \cong \langle g \rangle$ циклический для подходящего вершинного элемента $g \in G$. Обозначим через T_g максимальное поддерево A такое, что

$$Z(\pi_1(T_g)) = \langle g \rangle.$$

Всякое такое поддерево будем называть Z -максимальным.

Утверждение 3.2.6. Определение T_g корректно, T_g является наибольшим поддеревом с указанным условием.

Доказательство. Если есть два максимальных поддерева T_1 и T_2 , то

$$\langle g \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{T}_1)) = Z(\pi_1(\mathbb{T}_2)).$$

Поэтому, $g \in Z(\pi_1(\mathbb{T}_1)) \cap Z(\pi_1(\mathbb{T}_2)) = Z(\pi_1(\langle \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \rangle))$ и $\langle \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \rangle \supset \mathbb{T}_1$. По утверждению 3.2.4, $Z(\pi_1(\langle \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \rangle)) \subseteq Z(\pi_1(\mathbb{T}_1)) = \langle g \rangle$. Следовательно, $Z(\pi_1(\langle \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \rangle)) = \langle g \rangle$. Так как $\langle T_1, T_2 \rangle \supset T_1$, то получаем противоречие. \square

Замечание 3.2.7. Пусть X — множество центров всех фундаментальных групп поддереьев групп дерева A , а Y — множество всех Z -максимальных поддереьев дерева A . отображение

$$\mathcal{I}: X \rightarrow Y,$$

$$\mathcal{I}: Z(\pi_1(\mathbb{T})) = \langle g \rangle \mapsto T_g$$

является биекцией.

Замечание 3.2.8. Всякое Z -максимальное поддерево T_g порождено такими вершинами a , для которых найдется $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $g = a^k$.

Доказательство. По утверждению 3.2.3, всякая вершина T_g в некоторой степени равна g . Обратное, если a — такая вершина, что $g = a^k$ для подходящего k , то, рассуждая как в лемме 3.2.2, можно понять, что $g \in Z(\pi_1(\langle T_g, a \rangle))$. По утверждению 3.2.4, $Z(\pi_1(\langle T_g, a \rangle)) = Z(\pi_1(T_g)) \cap Z(\pi_1(a)) \subseteq Z(\pi_1(T_g)) = \langle g \rangle$. Поэтому $Z(\pi_1(\langle T_g, a \rangle)) = \langle g \rangle$. Ввиду максимальнойности T_g получаем $a \in V(T_g)$. \square

Лемма 3.2.9. Пусть r — гиперболический e -циклически приведённый элемент группы $G = B *_{K=L} C$, $|r| > 1$. Положим

$$g = r^s b, h = r^k c, k \neq 0, s \neq 0, b, c \in K = L.$$

Если $[g, h] = 1$, то найдутся e -циклически приведённый $r_1 \in G$, $b_1, c_1 \in C_{K=L}(r_1)$ и целые $s_1 \neq 0, k_1 \neq 0$ такие, что

$$g = r_1^{s_1} b_1, h = r_1^{k_1} c_1.$$

Доказательство. Если $s = k$, то $g = r^s b = h c^{-1} b$. После обозначения $r_1 = h$, $s_1 = k_1 = 1$, $c_1 = 1$, $b_1 = c^{-1} b$ получаем требуемое, так как

$$1 = [g, h] = [r_1 b_1, r_1 c_1] = [b_1, r_1].$$

Если $s \neq k$, то без потери общности можно считать, что $s > k$ (иначе меняем g на h). Так же можно считать, что $s > 0$ (иначе меняем r на r^{-1}). Запишем равенство $[r^s b, r^k c] = 1$ более подробно:

$$b^{-1} \cdot r^{-s} \cdot c^{-1} \cdot r^{s-k} \cdot b \cdot r^k \cdot c = 1.$$

Если $k > 0$, то в подслове $r^{s-k} \cdot b \cdot r^k$ сокращения невозможны, так как r e -циклически приведён, и $b \in K = L$. Значит, сокращения начинаются в подслове $r^{-s} \cdot c^{-1} \cdot r^{s-k}$. Значит, $r^{-1} \cdot c^{-1} \cdot r = c_0 \in K = L$, и так как $K = L \cong \mathbb{Z}$, то $[r, c] = 1$ потому, что $\Delta(G) = \{1\}$ и аналогично $[r, b] = 1$.

Если $k < 0$, и нет полного сокращения подслова $r^{-1} \cdot c^{-1} \cdot r$ или $r \cdot b \cdot r^{-1}$ (если хоть одно такое сокращение есть, то действуем как выше), то $s - k = 1$, следовательно, $k = s - 1 \geq 0$, противоречие. \square

Утверждение 3.2.10. Пусть гиперболические элементы g и h группы G перестановочны, тогда найдутся e -циклически приведённый $r \in G$, $w \in G$ и $b, c \in L = K$ для подходящего e -рёберного разложения $G = B *_{K=L} C$ такие, что $|r| > 1$,

$$g = w^{-1}(r^s b)w, h = w^{-1}(r^k c)w, k \neq 0, s \neq 0$$

и $b, c \in C_{K=L}(r)$.

Доказательство. Сначала покажем что $E(S_g \cap S_h) \neq \emptyset$. Если $E(S_g \cap S_h) = \emptyset$, то либо $V(S_g \cap S_h) = \emptyset$, либо $V(S_g \cap S_h) \neq \emptyset$.

В первом случае g и h лежат в разных сомножителях подходящего f -разложения G и, следовательно, не могут быть перестановочны.

Во втором случае $V(S_g \cap S_h) = \{v\}$. Выберем ребро f с началом v так, чтобы $g \in D$, где D — компонента f -разложения $G = D *_{M=R} F$. Пусть $h = h_1 \cdot h_2 \dots h_n$, $n \geq 2$ e -приведён, тогда равенство $[g, h] = 1$ примет вид:

$$g^{-1} \cdot h_n^{-1} \dots h_1^{-1} \cdot g \cdot h_1 \dots h_{n-1} \cdot h_n = 1.$$

Если $h_1 \notin D$ и $h_n^{-1} \notin D$, то левая часть равенства e -приведена и не может быть равна 1. Если $h_1 \notin D$ и $h_n^{-1} \in D$, то $g^{-1} \cdot h_n^{-1} \in D$, но $g^{-1} \cdot h_n^{-1} \notin F$, так как $g \notin \langle v \rangle$.

Если $h_1 \in D$, то $h_1 \in \langle v \rangle$. Заметим, что $h_1^{-1} \cdot g \cdot h_1 \notin M = R \cong \mathbb{Z}$, иначе $h_1^{-1} \cdot g \cdot h_1 \in \langle v \rangle$ и, следовательно, $g \in \langle v \rangle$, противоречие.

Поэтому $E(S_g \cap S_h) \neq \emptyset$. Пусть $e \in E(S_g \cap S_h)$ и $G = B *_{K=L} C$ e -разложение. Пусть $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \in G$, $n \geq 2$ e -приведён, $h = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_m \in G$, $m \geq 2$ e -приведён. Пусть $g = x^{-1}ux$, u e -циклически приведён, и $h = x^{-1}vx$, v e -приведён. Так как $[u, v] = 1 \Leftrightarrow [g, h] = 1$, то, сопрягая подходящим элементом, считаем, что g e -циклически приведён и $|g| > 1$. В частности, $|g|$ чётно. Без потери общности (с точностью до обращения g) можно считать, что $c_1 \in B$, $c_n \in C$. Рассмотрим варианты для h . С точностью до сопряжения получаем два варианта записи равенства $[g, h] = 1$:

Сокращения в слове $c_1 \dots c_n t_1 \dots t_m c_n^{-1} \dots c_1^{-1} t_m^{-1} \dots t_1^{-1} = 1$ могут быть только на стыке c_1^{-1} и t_m^{-1} в случае $t_1 \in B, t_m \in B$ (для случая $t_1 \in C, t_m \in C$ аналогично). Такой вариант невозможен, так как в этом случае количество сокращений не превосходит m , а для равенства 1 необходимо $n + m$ сокращений.

Сокращения в слове $c_1 \dots c_n t_1 \dots t_m c_n^{-1} \dots c_1^{-1} t_m^{-1} \dots t_1^{-1} = 1$ начинаются только в середине, на стыке $t_m c_n^{-1}$ в случае $t_1 \in B, t_m \in C$ (для случая $t_1 \in C, t_m \in B$ аналогично). При таком сокращении либо g^{-1} , либо h целиком сократится. Пусть $m \geq n$, тогда $h = t_1 \dots t_m = t_1 \dots t'_{m-n} \cdot g = h_1 \cdot g$, где $t'_{m-n} = t_{m-n} \cdot d$, для некоторого $d \in K = L$. При этом $[h, g] = 1 \Leftrightarrow [h_1, g] = 1$. Это даёт возможность доказывать утверждение по индукции по $m + n$.

База индукции. Так как $n, m \geq 2$, то $n + m = 4$ — минимальный вариант. Имеем

$$c_1 c_2 t_1 t_2 c_2^{-1} c_1^{-1} t_2^{-1} t_1^{-1} = 1.$$

Если $t_1 \in B, t_2 \in C$, то сокращения начинаются на стыке t_2 и c_2^{-1} и продолжаются до конца. Получается, $g = h \cdot b$, $b \in K = L$ и b лежит в $C_{K=L}(r)$ по лемме 3.2.9. Случай $t_1 \in C, t_2 \in B$ аналогичен.

Шаг индукции. Рассуждая как раньше, получим $h = h_1 \cdot g$ при $m \geq n$. Если $|h_1| > 1$, то для пары h_1, g применимо индукционное предположение. Элементы g и h_1 имеют вид

$$g = w^{-1}(r^s b)w, h_1 = w^{-1}(r^k c)w.$$

Тогда $h = h_1 \cdot g = w^{-1}(r^{k+s}cb)w$ и $k+s \neq 0$, так как иначе h сопряжён с эллиптическим элементом. Применение леммы 3.2.9 завершает доказательство в этом случае.

Если $|h_1| = 1$, то $[g, h_1] = 1$ только в том случае, если $h_1 \in C_{K=L}(g)$, тогда $h = g \cdot b, b \in C_{K=L}(g)$. \square

Лемма 3.2.11. Пусть u, v – гиперболические элементы группы G такие, что $|u| > |v| > 1$ относительно разложения $G = B *_{K=L} C$. Причём сокращений в словах $u \cdot v$ и $v \cdot u$ нет и

$$v \cdot u = c_1 \cdot u \cdot v$$

для некоторого $c_1 \in K = L$. Тогда $u = w^q \cdot a_1, v = w^p \cdot a_2$ для подходящих $a_i \in C_{K=L}(w), i = 1, 2$.

Доказательство. Индукция по остатку от деления $|u|$ на $|v|$.

База индукции. Пусть $|v|$ делит $|u|$. Из условия $v \cdot u = c_1 \cdot u \cdot v$ следует, что $u = u_1 \cdot v$. После сокращения получаем, что $u_1 = u_2 \cdot v$ и так далее. Получим $u = a \cdot v^k$ для подходящего $a \in K = L$. Подставим в исходное равенство, получим

$$v \cdot a \cdot v^k \cdot v^{-1} \cdot v^{-k} \cdot a^{-1} \cdot v^{-k} = c_1,$$

при этом

$$\underline{v \cdot a \cdot v^{-1}} \cdot a^{-1} = c_1.$$

Сокращения могут начаться только в подчеркнутом подслове, значит, $v \cdot a \cdot v^{-1} \in K = L$. Ввиду того, что $\Delta(G) = 1$, получаем $v \cdot a \cdot v^{-1} = a$.

Шаг индукции. Как и раньше, заметим, что u заканчивается на степень v . Пусть $u = h \cdot v^k$, причём $|u| = k \cdot |v| + |h|$ и $|h| < |v|$. После подстановки в равенство получим $v \cdot h = c_1 \cdot h \cdot v$, значит, можно воспользоваться индукционным предположением $v = w^p \cdot a_2, h = w^q \cdot a_1, a_i \in C_{K=L}(w)$, тогда $u = h \cdot v^k = w^{q+kp} \cdot a_1 \cdot a_2^k$. \square

Лемма 3.2.12. Пусть r_1, r_2 e -циклически приведены в группе $G = B *_{K=L} C$, $|r_1|, |r_2| > 1$. Если

$$r_1^s \cdot b_1 = r_2^k \cdot b_2, b_i \in C_{K=L}(r_i), i = 1, 2, k \neq 0, s \neq 0,$$

и r_1, r_2 не представляются в виде

$$r_i = h_i^{m_i} \cdot a_i, a_i \in C_{K=L}(h_i), i = 1, 2,$$

то $k = s$ и $r_1 = r_2 \cdot b, b \in C_{K=L}(r_2)$.

Доказательство. Если $|r_1| = |r_2|$, то $k = s$, тогда и из равенства сразу получаем $r_1 = r_2 \cdot b$ и, как в доказательстве базы индукции леммы 3.2.11, можно понять, что $b \in C_{K=L}(r_2)$.

Пусть $|r_1| > |r_2|$, тогда $s < k$. Из равенства $r_1^s \cdot b_1 = r_2^k \cdot b_2$ следует, что $r_1 = r_2^q \cdot u$, где u — начало r_2 , то есть $r_2 = u \cdot r_3$. Подставляя в исходное равенство, получим

$$u \cdot (r_2^q \cdot u)^{s-1} \cdot b_1 = r_2^{k-q} \cdot b_2.$$

Сократив слева на u , видим, что r_3 тоже начинается на u . Сокращая u сколько возможно, получим $r_2 = u^p \cdot v, |v| < |u|$. Заметим, что правая часть исходного равенства заканчивается на $u \cdot v \cdot b_2$, а левая — на $v \cdot u \cdot b_1$. Значит,

$$c \cdot u \cdot v \cdot b_2 = v \cdot u \cdot b_1.$$

Обозначив $c_1 = b_1^{-1} \cdot c \cdot b_2$, попадаем в условия леммы 3.2.11 и получаем противоречие, значит, $|r_1| = |r_2|$. \square

Следствие 3.2.13. Пусть $g \in G = B *_{K=L} C$ — гиперболический элемент, тогда

$$C_G(g) = w^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times \langle b \rangle) \cdot w,$$

где r e -циклически приведён, $|r| > 1$, r не представляется в виде $h^m \cdot a, a \in C_{K=L}(h)$ и $\langle b \rangle = C_{K=L}(r)$.

Доказательство. Пусть $h \in C_G(g)$ — гиперболический элемент, тогда по утверждению 3.2.10

$$g = w^{-1}(r^s \cdot b_0)w, h = w^{-1}(r^k \cdot c)w, k \neq 0, s \neq 0, b_0, c \in C_G(r).$$

Тогда $C_G(g) = w^{-1} \cdot C_G(r^s \cdot b_0) \cdot w$. Можно считать, что r не представляется в виде $h_1^m \cdot a, a \in C_{K=L}(h_1)$, иначе можно взять h_1 в качестве r . Если $h \in C_G(r^s \cdot b_0)$, тогда по утверждению 3.2.10 $r^s \cdot b_0 = r_1^{s_1} \cdot b_1$ и $h = r_1^{s_2} \cdot b_2, b_1, b_2 \in C_{K=L}(r_1)$ по лемме 3.2.12 $r_1 = r \cdot b_3, b_3 \in C_{K=L}(r)$, значит, $h \in \langle r \rangle \times \langle b \rangle$, обратное включение очевидно. \square

Лемма 3.2.14. Пусть g — вершинный элемент группы G , тогда $C_G(g) = \pi_1(\mathbb{T}_h)$ для подходящего Z -максимального поддерева T_h .

Доказательство. Пусть V_g — множество вершин a , для которых найдется k такое число, что $a^k = g$, обозначим через T дерево на этих вершинах. Пусть $Z(\pi_1(\mathbb{T})) = \langle h \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{T}_h)) \supseteq \langle g \rangle$. Тогда по замечанию 3.2.8 $T \subseteq T_h$ (равенство может не быть, так как $\langle g \rangle$ может не быть центром фундаментальной группы никакого поддерева). Получаем $g = h^k$ и $\pi_1(\mathbb{T}_h) \subseteq C_G(g)$.

Обратно, пусть $g' = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \in C_G(g)$ приведён. Тогда по следствию 3.2.5 получим $[c_i, g] = 1$ и по лемме 3.2.2 c_i совпадает со степенью некоторой вершины из V_g , значит, $g' \in \pi_1(\mathbb{T}) \subseteq \pi_1(\mathbb{T}_h)$. \square

Мы изучили централизаторы элементов в $\pi_1(\mathbb{A})$. Теперь опишем централизаторы конечных наборов элементов.

Лемма 3.2.15. Пусть g_1, g_2 — гиперболические элементы группы G . Тогда $C_G(g_1, g_2) = C_G(g_1) \cap C_G(g_2)$ равен либо $C_G(g_1) = C_G(g_2)$, либо $w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T})) \cdot w$ для подходящего Z -максимального поддерева T , $w \in G$.

Доказательство. Из следствия 3.2.13 видим, что

$$C_G(g_i) = w_i^{-1} (\langle r_i \rangle \times \langle b_i \rangle) w_i, i = 1, 2.$$

Если централизаторы пересекаются, то найдутся $s, t, k, l \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$w_1^{-1} (r_1^s \cdot b_1^t) w_1 = w_2^{-1} (r_2^k \cdot b_2^l) w_2.$$

Из [13] следует, что e -циклически приведённые элементы сопряжены тогда и только тогда, когда один может быть получен из другого циклической перестановкой с точностью до сопряжения на элемент из объединяемой части. Значит, для некоторой циклической перестановки $r_3 = v \cdot u = u^{-1} \cdot r_2 \cdot u$ элемента $r_2 = u \cdot v$ и $c \in K = L$ имеем равенство

$$r_1^s b_1^t = c^{-1} \cdot r_3^k \cdot b_2^l \cdot c.$$

Если $r_4 = c^{-1} \cdot r_3 \cdot c$, то r_4 представлен e -циклически приведённой последовательностью (после подпрвления первого и последнего множителя r_3 с помощью c^{-1} и c

соответственно), и

$$r_1^s b_1^t = r_4^k \cdot b_2^l.$$

Если $k \neq 0, s \neq 0$, то по лемме 3.2.12 $k = s$ и $r_1 = r_4 \cdot b, b \in C_{K=L}(r_1)$, тогда

$$r_1 = r_4 \cdot b = (u \cdot c)^{-1} \cdot r_2 \cdot (u \cdot c) \cdot b$$

и

$$C_G(g_1) = (u \cdot c \cdot w_1)^{-1} \cdot (\langle r_2 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \cdot (u \cdot c \cdot w_1).$$

Если $r_2^s \cdot b_2^t = w^{-1} \cdot (r_2^k \cdot b_2^l) \cdot w$, то, как показано выше, $k = s$, и можно установить, что $t = l$. Поэтому $w \in C_G(r_2^s \cdot b_2^t)$, и по утверждению 3.2.10 получаем $w = r_2^p \cdot b_2^q$. Если вместо w рассмотреть $u \cdot c \cdot w_1 \cdot w_2^{-1}$, то получаем $C_G(g_1) = C_G(g_2)$.

Если $k = s = 0$, то $C_G(g_1) \cap C_G(g_2)$ содержит только элементы вида $w_1^{-1} b_1^t w_1 = w_2^{-1} b_2^l w_2$ для некоторых $t, l \in \mathbb{Z}$. По лемме 3.2.14 $C_G(b_1^t)$ равен $w^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}) \cdot w$ для подходящих Z -максимального поддерева T и $w \in G$. \square

Лемма 3.2.16. Пусть $g \in G$ гиперболический элемент, T — Z -максимальное поддерево дерева A , тогда $C_G(g) \cap u^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}) \cdot u$ равно либо $C_G(g) = w^{-1} (\langle r \rangle \times \langle b \rangle) w$, либо $v^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_1)) \cdot v$ для подходящего Z -максимального поддерева T_1 и $v \in G$.

Доказательство. По следствию 3.2.13 $C_G(g) = w^{-1} (\langle r \rangle \times \langle b \rangle) w$. С точностью до сопряжения можно считать $u = 1$. Тогда пересечение примет вид:

$$w^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times \langle b \rangle) \cdot w \cap \pi_1(\mathbb{T}).$$

Рассмотрим случай $w \in \pi_1(\mathbb{T})$. Пусть в пересечении лежит $r^k \cdot b^s \in \pi_1(\mathbb{T})$. Так как r e -циклически приведено, то либо $r \in \pi_1(\mathbb{T})$, либо $k = 0$.

Если $r \in \pi_1(\mathbb{T})$, то $S_r \subseteq T$. Поэтому $\langle b \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{S}_r))$ лежит в $\pi_1(\mathbb{T})$, и лемма доказана.

Если $k = 0$, то пересечение сопряжено со степенью b . Найдём такое минимальное s , что $b^s \in \pi_1(\mathbb{T})$. Такое s характеризуется тем, что $T_{b^s} \cap T$ непусто. Тогда искомого пересечение равно $w^{-1} \cdot \langle b^s \rangle \cdot w = w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_{b^s})) \cdot w$.

Остался случай $w \notin \pi_1(\mathbb{T})$, тогда $w^{-1} \cdot r^k \cdot b^s \cdot w$ e -приведено и может лежать в $\pi_1(\mathbb{T})$ только в случае $k = 0$. Для каждого s можно найти такой префикс u_s , что

$w = u_s \cdot v_s$ и $w^{-1} \cdot b^s \cdot w = v_s^{-1} \cdot b^s \cdot v_s$ — e -приведено. Найдём минимальное s такое, что $v_s^{-1} \cdot b^s \cdot v_s \in \pi_1(\mathbb{T})$. Тогда пересечение равно $v_s^{-1} \cdot \langle b^s \rangle \cdot v_s = v_s^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_{b^s})) \cdot v_s$. \square

Лемма 3.2.17. Пусть T_1, T_2 — \mathbb{Z} -максимальные поддеревья, $v, w \in G$, тогда

$$v^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_1) \cdot v \cap w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_2)) \cdot w = u^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{S})) \cdot u$$

для подходящего \mathbb{Z} -максимального поддерева $S \supseteq T_2$, $u \in G$.

Доказательство. Рассмотрим пересечение $Z(\pi_1(\mathbb{T}_2)) \cap u^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_1) \cdot u$ для $u \notin \pi_1(\mathbb{T}_1)$. Пусть a — порождающий циклической группы $Z(\pi_1(\mathbb{T}_2)) \cong \mathbb{Z}$, значит, $u^{-1} \cdot g \cdot u \in Z(\pi_1(\mathbb{T}_2))$ и, следовательно, $g = u \cdot a^l \cdot u^{-1} \in \pi_1(\mathbb{T}_1)$ для подходящего l . Такое включение возможно, только если $a^l \in C_G(u)$, тогда по следствию 3.2.5 $a^l \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_u))$ и $g = a^l$. Тогда

$$Z(\pi_1(\mathbb{T}_2)) \cap u^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_1) \cdot u = \langle a^l \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{S}))$$

для \mathbb{Z} -максимального поддерева $S = \langle S_u, T_2 \rangle$. \square

Лемма 3.2.18. Пусть g_1, g_2 — эллиптические элементы группы G , сопряжённые с вершинными элементами h_1 и h_2 $T = T_{h_1}, S = T_{h_2}$ — \mathbb{Z} -максимальные поддеревья, тогда $C_G(g_1) \cap C_G(g_2) = w^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}) \cdot w \cap u^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{S}) \cdot u$ равно либо $v^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{R}) \cdot v$, где $R = T \cap S$, либо $v^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{P})) \cdot v$ для подходящего \mathbb{Z} -максимального поддерева P , $v \in G$.

Доказательство. С точностью до сопряжения можно считать $u = 1$. По лемме 3.2.14 пересечение равно

$$w^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}) \cdot w \cap \pi_1(\mathbb{S}).$$

Если $w = v_1 \cdot v_2$ так, что $v_1 \in \pi_1(\mathbb{T}), v_2 \in \pi_1(\mathbb{S})$, тогда пересечение примет вид:

$$v_2^{-1} \cdot (\pi_1(\mathbb{T}) \cap \pi_1(\mathbb{S})) \cdot v_2.$$

Если $T \cap S = R \neq \emptyset$, то пересечение равно $v_2^{-1} \cdot (\pi_1(\mathbb{R})) \cdot v_2$.

Если $T \cap S = \emptyset$, то $g \in \pi_1(\mathbb{T}) \cap \pi_1(\mathbb{S})$ только в том случае, когда g — вершинный элемент, и по лемме 3.2.2 получаем $h_1 = a^k, g = a^l = b^s, h_2 = b^m$ для подходящих вершин $a \in V(T)$ и $b \in V(S)$. Значит, $g \in Z(\langle a \rangle) \cap Z(\langle b \rangle)$ и по утверждению 3.2.4 $g \in Z(\pi_1(\mathbb{P}))$, где P минимальное \mathbb{Z} -максимальное поддерево, содержащее a и b .

Остался случай, когда w нельзя представить в виде $w = v_1 \cdot v_2$ так, что $v_1 \in \pi_1(\mathbb{T}), v_2 \in \pi_1(\mathbb{S})$. Тем не менее, $w = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3$ так, что w_1 и w_3 — максимальные подслова с условием $w_1 \in \pi_1(\mathbb{T}), w_3 \in \pi_1(\mathbb{S})$ и $w_2 \cdot w_3 \notin \pi_1(\mathbb{T}), w_1 \cdot w_2 \notin \pi_1(\mathbb{S})$. Пусть $h_1 \in \pi_1(\mathbb{T}), h_2 \in \pi_1(\mathbb{S})$ такие, что

$$g = w^{-1} \cdot h_1 \cdot w = h_2 \in w^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}) \cdot w \cap \pi_1(\mathbb{S}),$$

тогда

$$w_3^{-1} \cdot w_2^{-1} \cdot (w_1^{-1} \cdot h_1 \cdot w_1) \cdot w_2 \cdot (w_3 \cdot h_2^{-1}) = 1.$$

Последнее равенство выполнено, только если $h_3 = w_1^{-1} \cdot h_1 \cdot w_1$ — вершинный элемент. Тогда опять из равенства следует, что $h_3 \in C_G(w_2)$, и по следствию 3.2.5 получаем $h_3 \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_{w_2}))$. Кроме того, несложно понять, что $h_3 \in \pi_1(\mathbb{T})$ и $h_3 \in \pi_1(\mathbb{S})$. Значит, исходное пересечение равно

$$w_3^{-1} \cdot (Z(\pi_1(\mathbb{S}_{w_2})) \cap \pi_1(\mathbb{T}) \cap \pi_1(\mathbb{S})) \cdot w_3.$$

Теперь доказательство леммы следует из леммы 3.2.17. □

Лемма 3.2.19. Пусть g — гиперболический элемент группы G , T — \mathbb{Z} -максимальное поддерево, $v \in G$, тогда

$$C_G(g) \cap v^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T})) \cdot v = v^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{S})) \cdot v$$

для подходящего \mathbb{Z} -максимального поддерева $S \supset T$.

Доказательство. Рассмотрим пересечение $Z(\pi_1(\mathbb{T})) \cap v \cdot C_G(g) \cdot v^{-1}$. Для подходящего $w \in G$

$$v \cdot C_G(g) \cdot v^{-1} = w^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times \langle b \rangle) \cdot w,$$

причём $Z(\pi_1(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$. Пусть $w^{-1}r^kbw \in Z(\pi_1(\mathbb{T}))$, тогда $|w^{-1}r^kbw| = 1$, и ввиду приведённости получаем $k = 0$, тогда $|w^{-1}b^lw| = 1$, т.е. $w^{-1}b^lw = c$, причём b^l и c — вершинные элементы. Так как $\Delta(G) = \{1\}$, то $b^l \in C_G(w)$ и, значит, $b^l \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_w)) = Z(\pi_1(\mathbb{S}_1))$ для подходящего \mathbb{Z} -максимального поддерева S_1 .

Кроме того, $Z(\pi_1(\mathbb{T})) \cap Z(\pi_1(\mathbb{S}_1)) = Z(\pi_1(\langle \mathbb{T}, \mathbb{S}_1 \rangle))$ по предложению 3.2.4. □

Лемма 3.2.20. Пусть T_a и T_b — \mathbb{Z} -максимальные поддеревья, $v, w \in G$, тогда

$$v^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) \cdot v \cap w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_b)) \cdot w = u^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T})) \cdot u,$$

где T — \mathbb{Z} -максимальное поддерево, содержащее T_a и T_b , $u \in G$.

Доказательство. Рассмотрим пересечение $Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) \cap u^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_b)) \cdot u$, где $u = w \cdot v^{-1}$. По определению, $Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) = \langle a \rangle$, $Z(\pi_1(\mathbb{T}_b)) = \langle b \rangle$, тогда $a^k = u^{-1} b^l u$. Из того, что a^k и b^l вершинные элементы и $\Delta(G) = \{1\}$, следует, что $a^k = b^l$ и $b^l \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_u))$. Таким образом, элемент $c = a^k = b^l$ попадает в пересечение, если он лежит в

$$Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) \cap Z(\pi_1(\mathbb{T}_b)) \cap Z(\pi_1(\mathbb{S}_u)) = Z(\pi_1(\langle \mathbb{T}_a, \mathbb{T}_b, \mathbb{S}_u \rangle)) = Z(\pi_1(\mathbb{T})).$$

Обратное включение очевидно. □

Мы доказали, что централизаторы в группе G бывают трех типов:

$$v^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}) \cdot v, T \text{ — } \mathbb{Z}\text{-максимальное поддерево,} \quad (3.3)$$

$$w^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times \langle b \rangle) \cdot w, \quad (3.4)$$

$$u^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{S})) \cdot u, S \text{ — } \mathbb{Z}\text{-максимальное поддерево.} \quad (3.5)$$

Для описания решётки централизаторов группы G нужно знать, когда один централизатор содержится в другом.

Утверждение 3.2.21. Пусть T_a, T_b — \mathbb{Z} -максимальные поддеревья, тогда $w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) \cdot w \supset v^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_b)) \cdot v$ тогда и только тогда, когда $T_a \subset T_b, b \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_{wv^{-1}}))$.

Доказательство. Включение имеет вид $u^{-1} \cdot \langle a \rangle \cdot u \supset \langle b \rangle$ и равносильно равенству $b = u^{-1} a^k u$ для подходящего целого k . Из этого равенства следует, что $b = a^k \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_u))$. Значит, исходное включение имеет вид $Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) \supset Z(\pi_1(\mathbb{T}_b))$. Если $v \in V(T_a)$, то по замечанию 3.2.8 $v^l = a$, значит, $a^k = v^{kl} = b$, следовательно, $v \in V(T_b)$. Поэтому $T_a \subset T_b$. Обратное включение центров очевидно. □

Замечание 3.2.22. Пусть g_1, g_2 — гиперболические элементы группы G , тогда по лемме 3.2.15 $C_G(g_1) \supseteq C_G(g_2)$, если и только если $C_G(g_1) = C_G(g_2)$.

Утверждение 3.2.23. Пусть g — гиперболический элемент группы G , T_a — Z -максимальное поддерево, тогда

$$C_G(g) = w^1(\langle r \rangle \times \langle b \rangle)w \supset v^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) \cdot v$$

тогда и только тогда, когда $a \in Z(\pi_1(\langle \mathbb{S}_r, \mathbb{S}_{vw^{-1}} \rangle))$.

Доказательство. Рассмотрим сопряжённое включение

$$vw^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times \langle b \rangle) \cdot wv^{-1} \supset Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) = \langle a \rangle.$$

Оно эквивалентно равенству $vw^{-1}r^k b^l wv^{-1} = a$. После e -приведения левая часть имеет вид $u^{-1}r_1^k b^l u$, где r_1 получается из r циклической перестановкой, следовательно, из сравнения длин получаем $k = 0$. Равенство примет вид $vw^{-1}b^l wv^{-1} = a$, поэтому $a = b^l \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_{vw^{-1}}))$. Кроме того, $b \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_r))$ и, следовательно, $a \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_r))$. Обратное включение очевидно. \square

Утверждение 3.2.24. Пусть T_1, T_2 — Z -поддерева, и $v_1, v_2 \in G$ такие, что элемент $v_2 v_1^{-1}$ приведён в G , и никакой префикс v_i не лежит в $\pi_1(\mathbb{T}_i), i = 1, 2$. Тогда $v_1^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_1) \cdot v_1 \supset v_2^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_2) \cdot v_2$ тогда и только тогда, когда $T_1 \supset \langle T_2, S_{v_2 v_1^{-1}} \rangle$.

Доказательство. Следует из того, что

$$\pi_1(\mathbb{T}_1) \supset (v_2 v_1^{-1})^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_2) \cdot (v_2 v_1^{-1})$$

только в случае, когда $T_1 \supset \langle T_2, S_{v_2 v_1^{-1}} \rangle$. \square

Утверждение 3.2.25. Пусть T — Z -максимальное поддерево, g — гиперболический элемент группы G , тогда $v^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}) \cdot v \supset C_G(g) = w^{-1}(\langle r \rangle \times \langle b \rangle)w$ тогда и только тогда, когда $T \supseteq \langle S_r, S_{vw^{-1}} \rangle$.

Доказательство. Из эквивалентного включения

$$\pi_1(\mathbb{T}) \supset vw^{-1}(\langle r \rangle \times \langle b \rangle)wv^{-1}$$

следует, что $vw^{-1}r^k wv^{-1} \in \pi_1(\mathbb{T})$ для всякого $k \in \mathbb{Z}$. Так как r e -циклически приведён, то после сокращений слово $vw^{-1}r^k wv^{-1}$ примет вид $u^{-1}r_1^k u$, где $wv^{-1} = u_1 \cdot u$, u_1 — максимальной длины префикс, сокращающийся с частью слова r^k , а r_1 — циклическая перестановка r . После сокращений слово $u^{-1}r_1^k u$ e -приведено и лежит в $\pi_1(\mathbb{T})$. Следовательно, $T \supseteq S_{u^{-1}r_1^k u}$, и поэтому $T \supseteq S_r = S_{r_1}$ и $T \supseteq S_{wv^{-1}}$. Последнее включение выполнено потому, что wv^{-1} отличается от u только на элемент из S_r . Доказательство в обратную сторону легко следует из того, что $b \in \pi_1(S_r)$. \square

Утверждение 3.2.26. Пусть T_1, T_a — Z -максимальные поддеревья, и $v, w \in G$ такие, что wv^{-1} приведён в G , и никакой префикс wv^{-1} не лежит в $\pi_1(\mathbb{T}_1)$, тогда $w^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_1) \cdot w \supset v^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{T}_a)) \cdot v$ тогда и только тогда, когда $T_1 \cap T_a \neq 0$ и $a \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_{wv^{-1}}))$.

Доказательство. Эквивалентное включение

$$vw^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_1) \cdot wv^{-1} \supset Z(\pi_1(\mathbb{T}_a))$$

равносильно $a \in vw^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{T}_1) \cdot wv^{-1}$. Тогда $a = (wv^{-1})^{-1} \cdot g \cdot wv^{-1}$, и правая часть приведена. Такое равенство возможно, только если g — вершинный. Следовательно, $a = g = b^k \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_{wv^{-1}}))$ для подходящего $b \in V(T_1)$. По замечанию 3.2.8 $b \in V(T_a)$ и, следовательно, $T_1 \cap T_a \neq 0$. Доказательство в обратную сторону легко следует из уже доказанного. \square

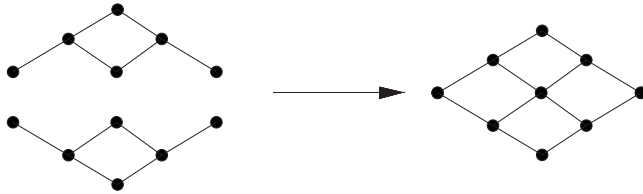


Рис. 3.3: Объединение решеток \mathfrak{T} и $\check{\mathfrak{T}}$.

Замечание 3.2.27. Решётка централизаторов группы $\pi_1(\mathbb{A})$ описана в утверждениях 3.2.21, 3.2.23–3.2.26. С точностью до сопряжения централизаторы типа (3.3) и (3.5) образуют в ней подрешётку, которая изоморфна объединению решётки Z -максимальных поддеревьев \mathfrak{T} и двойственной к ней $\check{\mathfrak{T}}$ с отождествленными минимальными и максимальными элементами, см. рис. 3.3.

Теперь у нас достаточно информации для вычисления централизаторной размерности группы G .

Доказательство теоремы 3.2.1. Всякая цепочка централизаторов

$$C_1 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_d$$

состоит из централизаторов трех типов. Причём централизаторы типа (3.3) не могут иметь больший номер, чем централизаторы типа (3.4) или (3.5), аналогично все централизаторы типа (3.4) стоят "левее" каждого централизатора типа (3.5). Кроме того, два подряд централизатора типа (3.4) встретиться также не могут. Надо ещё заметить, что если C_i типа (3.4), то он не типа (3.5) и не типа (3.3), при этом если $a \in V(A)$, то $C_G(a) = \langle a \rangle$ имеет и тип (3.3), и тип (3.5). Однако кроме подгрупп, сопряжённых вершинным подгруппам, никакие централизаторы таким свойством не обладают.

Выше доказано, что цепочки вложенных централизаторов типа (3.3) и (3.5) соответствуют цепочкам вложенных Z -максимальных поддеревьев дерева A , следовательно, они конечны.

Итак, всякая максимальная цепочка централизаторов имеет вид:

$$(3.3) \supset \cdots \supset (3.3) \supset (3.4) \supset (3.5) \supset \cdots \supset (3.5)$$

либо

$$(3.3) \supset \cdots \supset (3.3) \supset (3.5) \supset \cdots \supset (3.5).$$

В последнем случае первый централизатор типа (3.5) может быть также централизатором типа (3.3).

Самая длинная цепочка централизаторов типа (3.3) не длиннее максимальной цепочки вложенных друг в друга Z -максимальных поддеревьев. В свою очередь, последняя цепочка содержит не более $|V(A)|$ элементов. Аналогично с цепочками централизаторов типа (3.5), только убывание в цепочке в этом случае будет соответствовать возрастанию Z -максимальных поддеревьев. Осталось заметить, что если в цепочке централизаторов типа (3.3) последний элемент имеет тип (3.5), то реализована цепочка второго вида (без централизатора типа (3.4)), и она состоит из не более чем $2 \cdot |V(A)| - 1$.

Если же в цепочке встретился централизатор типа (3.4), то централизаторов типа (3.3) не более $|V(A)| - 1$, так как \mathbb{Z} не содержит $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Аналогично в этом случае централизаторов типа (3.3) не более $|V(A)| - 1$, так как централизатор типа (3.4) не содержит подгруппу, сопряжённую вершинной группе. В итоге получаем, что длина цепочки первого вида не превосходит $2 \cdot (|V(A)| - 1) + 1 = 2 \cdot |V(A)| - 1$.

Теперь построим примеры. Фиксируем $n \geq 2$ и рассмотрим дерево с метками $\mathbb{R}(k, s)$ (см. рис. 3.2) на $k + s = n$ вершинах. Из доказательства первой части ясно, что $cdim(\pi_1(\mathbb{A}))$ нечётна. Найдём максимальную по длине цепочку вложенных Z -максимальных поддеревьев. Для этого сначала заметим, что если Z -максимальное поддерево T содержит ребро, соединяющее u_i и v_k для некоторого $i = 1, \dots, s$, то все вершины u_1, u_2, \dots, u_s попадают в T . Обозначим через T_i поддерево $R(k, s)$, порождённое вершинами $v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_s$.

Заметим, что цепочка вложенных поддеревьев

$$T_1 \supset T_2 \supset \dots \supset T_{k-1} \supset \langle v_k \rangle$$

является максимальной цепочкой вложенных Z -максимальных поддеревьев. Значит, она описывает цепочку централизаторов максимальной длины.

Ей соответствуют две цепочки централизаторов. Цепочка централизаторов типа (3.3)

$$\pi_1(\mathbb{T}_1) \supset \pi_1(\mathbb{T}_2) \supset \dots \supset \pi_1(\mathbb{T}_{k-1}) \supset \pi_1(\langle v_k \rangle) = \langle v_k \rangle$$

и цепочка централизаторов типа (3.5)

$$\begin{array}{ccccccc} Z(\pi_1(\langle v_k \rangle)) & \supset & Z(\pi_1(\mathbb{T}_{k-1})) & \supset & \dots & \supset & Z(\pi_1(\mathbb{T}_2)) & \supset & Z(\pi_1(R(k, s))) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ \langle v_k \rangle & \supset & \langle v_k^2 \rangle & \supset & \dots & \supset & \langle v_k^{2^{k-2}} \rangle & \supset & \langle v_k^{2^{k-1}} \rangle. \end{array}$$

Причём минимальный элемент первой цепочки совпадает с максимальным элементом второй цепочки. Значит, $cdim(\pi_1(\mathbb{R}(k, s))) = 2k - 1$ и не зависит от s .

Заметим, что $cdim(G) = 1$ только в том случае, когда группа G абелева, а редуцированный граф с метками на $n \geq 2$ вершинах имеет неабелеву фундаментальную группу. \square

3.3 Центризаторная размерность при $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$

В данном параграфе мы завершаем полное описание центризаторной размерности GBS групп и предлагаем способ её вычисления. Основная часть параграфа касается вычисления центризаторной размерности GBS групп с тривиальными модулями (т.е. таких GBS групп G , для которых $\Delta(G) = \{1\}$). В [68] Ж. Левитт замечает, что GBS группа G унимодулярна (т.е. $\Delta(G) = \{\pm 1\}$) в том и только в том случае, когда она содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную $F_n \times \mathbb{Z}$. Поэтому из результатов работы [74] сразу следует, что унимодулярные GBS группы обладают конечной центризаторной размерностью. Однако такой подход не даёт ни точных оценок, ни примеров, ни способа вычисления центризаторной размерности GBS групп.

В этом параграфе обозначим подгруппу, порождённую вершинными элементами, через E , она совпадает с $\pi_1(\mathbb{T})$, где T — максимальное поддереву дерева A . Как в прошлом параграфе, для $g \in E$ обозначим через S_g минимальное поддереву дерева T такое, что $g \in \pi_1(S_g)$.

Если не оговорено противное, будем в этом параграфе считать, что \mathbb{A} — редуцированный граф с метками, $G = \pi_1(\mathbb{A})$ — соответствующая GBS группа, и $\Delta(G) = \{1\}$.

Пусть $a = v^k, v \in V(A)$ — вершинный элемент $\pi_1(\mathbb{A})$, определим подграф B_a графа A по индукции:

1) $V(B_a) = \{v\}, E(B_a) = \emptyset$;

2) Пусть $R = \{e \in E(A) \mid \partial_0(e) \in V(B_a)\} \setminus E(B_a)$, тогда $a = v^k = r^{-1} \cdot \partial_0(e)^{l(e)} \cdot r$. Если $\lambda_e \mid l(e), e \in R$, то добавляем e к $E(B_a)$ и $\partial_1(e)$ к $V(B_a)$. Так действуем до тех пор, пока следующий шаг не добавит новых рёбер.

Заметим, что если мы добавляем ребро e , то $\partial_0(e)^{l(e)} = \partial_1(e)^{l(e) \cdot \frac{\lambda_e}{\lambda_e}}$ при $e \in T_A$ или $\partial_0(e)^{l(e)} = t^\epsilon \cdot \partial_1(e)^{l(e) \cdot \frac{\lambda_e}{\lambda_e}} \cdot t^{-\epsilon}$ при $e \notin T_A$. Кроме того, отметим, что если для некоторой вершины w получаем, что, с одной стороны, $a = r_1^{-1} \cdot w^m \cdot r_1$, а с другой стороны, $a = r_2^{-1} \cdot w^n \cdot r_2$, то $m = n$, так как $\Delta(G) = \{1\}$. Поэтому подграф B_a определен корректно.

Утверждение 3.3.1. Пусть $u, v \in V(A)$ и максимальные поддеревья A и B_{v^k} со-

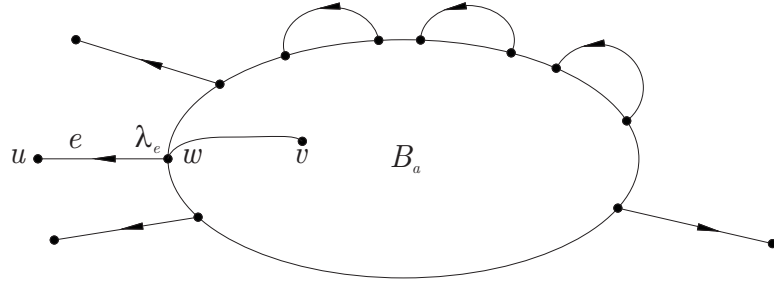


Рис. 3.4: Построение графа B_a .

гласованы. Если $g^{-1} \cdot v^k \cdot g = u^l$, то $u \in V(B_{v^k})$ и $g \in C_G(v^k)$.

Доказательство. Индукция по числу проходных символов в приведённой записи g .

База индукции. Если $g \in E$, то равенство $g^{-1} \cdot v^k \cdot g = u^l$ возможно только в том случае, когда $v^k \in Z(\pi_1(\mathbb{S}_g))$ (можно рассуждать, как в доказательстве леммы 3.2.2). Тогда $g^{-1} \cdot v^k \cdot g = v^k = u^l$, следовательно, по лемме 3.2.2 и утверждению 3.2.3, v^k лежит в пересечении вершинных групп геодезического пути, соединяющего u и v в T_A . При этом этот путь лежит в B_a по определению.

Шаг индукции. Пусть $g = a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot a_n$, $a_0 \in E$, t – первый проходной символ в приведённой записи g . Тогда

$$a_n^{-1} \cdot t^{-\varepsilon_n} \cdot \dots \cdot t^{-\varepsilon_1} \cdot a_0^{-1} \cdot v^k \cdot a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot a_n = u^l.$$

Пусть e – ребро, соответствующее порождающему t . Обозначим начало e через w . Тогда $a_0^{-1} \cdot v^k \cdot a_0 = w^m$, иначе левая часть приведена. По предположению индукции, $w \in V(B_a)$. По определению B_a получаем равенство $a = v^k = w^n$, тогда $m = n$ из-за того, что $\Delta(G) = \{1\}$. Поэтому $a_0 \in C_G(v^k)$.

В левой части равенства должны продолжаться сокращения, следовательно, $t^{-\varepsilon_1} \cdot v^k \cdot t^{\varepsilon_1} = u^l$, $e \in E(B_a)$ и $t^{-\varepsilon_1} \cdot v^k \cdot t^{\varepsilon_1} = \partial_1(e)^s$. Поэтому $\partial_1(e) \in V(B_a)$, и так как максимальные поддеревья согласованы, то $v^k = \partial_1(e)^p$, $p = s$ и $t \in C_G(v^k)$. Тогда, по индукционному предположению, получаем необходимое. \square

Утверждение 3.3.2. Если a – вершинный элемент, и максимальные поддеревья T_{B_a} , T_A согласованы, то $C_G(a) = \pi_1(\mathbb{B}_a) \leq \pi_1(\mathbb{A})$.

Доказательство. Докажем, что $\pi_1(\mathbb{B}_a) \subseteq C_G(a)$. Порождающий w первого типа группы $\pi_1(\mathbb{B}_a)$ соответствует вершине A в графе B_a , поэтому $w^k = a$ и, следовательно,

$[w, a] = 1$. Пусть $t \in \pi_1(\mathbb{B}_a)$ — порождающий второго типа, тогда ввиду согласованности максимальных поддеревьев t является порождающим второго типа и в $\pi_1(\mathbb{A})$, и так как $\partial_0(e), \partial_1(e) \in T_{B_a}$, то $a = \partial_0(e)^k = \partial_1(e)^l$ и $t^{-1} \cdot \partial_0(e)^m \cdot t = \partial_1(e)^n$. Так как $e \in B_a$, то $m|k$. В этом случае $t^{-1} \cdot a \cdot t = t^{-1} \cdot \partial_0(e)^k \cdot t = t^{-1} \cdot \partial_0(e)^{m \cdot s} \cdot t = \partial_1(e)^{n \cdot s} = t^{-1} \cdot \partial_1(e)^l \cdot t$. Поэтому $l = n \cdot s$ и $t \in C_G(a)$.

Докажем, что $C_G(a) \subseteq \pi_1(\mathbb{B}_a)$. Индукция по числу проходных символов в приведённой записи $g \in C_G(a)$.

База индукции. Если $g \in E$, то можно считать, что A — дерево, и $C_G(a) = \pi_1(\mathbb{B}_a)$, по лемме 3.2.14.

Шаг индукции. Если $g = a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot a_n \in C_G(a)$ — приведённая запись g , $a_0 \in E$, t — первый проходной символ в этой записи, то

$$a_n^{-1} \cdot t^{-\varepsilon_n} \cdot \dots \cdot t^{-\varepsilon_1} \cdot a_0^{-1} \cdot v^k \cdot a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot a_n = v^k.$$

Рассуждая как в доказательстве утверждения 3.3.1, получим $a_0^{-1} \cdot v^k \cdot a_0 = u^l$ для $u = \partial_0(e)$ и e — ребро, соответствующее символу t . Тогда, по утверждению 3.3.1, ввиду согласованности максимальных поддеревьев $u \in V(B_a)$ и $a_0 \in C_G(a)$. По предположению индукции, $a_0 \in \pi_1(\mathbb{B}_a)$. Далее, как в утверждении 3.3.1, $t^{-\varepsilon} \cdot v^k \cdot t^{\varepsilon} = \partial_1(e)^s$ и $e \in E(B_a)$. Поэтому $t \in \pi_1(\mathbb{B}_a)$. \square

Следствие 3.3.3. *Центр $\pi_1(\mathbb{B}_a)$ содержит a .*

Замечание 3.3.4. *Центр $\pi_1(\mathbb{B}_{v^k})$ совпадает с $\langle v^m \rangle$ для некоторого m — делителя k . При этом $B_{v^m} = B_{v^k}$.*

Доказательство. Из утверждения 3.2.3 и следствия 3.3.3 имеем

$$\langle v^k \rangle \leq Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v^k})) \leq Z(\pi_1(\mathbb{T}_{B_{v^k}})) = \bigcap_{w \in V(B_{v^k})} \langle w \rangle \leq \langle v \rangle.$$

Поэтому $Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v^k})) = \langle v^m \rangle$, $m|k$ и, следовательно, $B_{v^m} \subseteq B_{v^k}$, исходя из определения. Рассматривая порождающие первого и второго типа группы $\pi_1(\mathbb{B}_{v^k})$ и используя $v^m \in Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v^k}))$, можно, как в утверждении 3.3.2 (в сторону $C_G(a) \subseteq \pi_1(\mathbb{B}_a)$), доказать, что $\pi_1(\mathbb{B}_{v^k}) \leq \pi_1(\mathbb{B}_{v^m})$. Тогда из того, что \mathbb{A} редуцирован, следует, что $B_{v^k} \subseteq B_{v^m}$. Поэтому $B_{v^k} = B_{v^m}$. \square

Замечание 3.3.4 позволяет считать, что для всякого подграфа B_a можно выбрать вершинный элемент c так, что $Z(\pi_1(\mathbb{B}_a)) = Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)) = \langle c \rangle$. При этом из определения ясно, что B_c – максимальный (и даже наибольший) подграф с данным центром. Всегда далее будем считать, что $Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)) = \langle c \rangle$, и подграфы B_c называть Z -максимальными подграфами. Последнее хорошо согласуется с утверждением 3.2.6 и замечанием 3.2.7 о Z -максимальных поддеревьях.

Лемма 3.3.5. *Пусть g не сопряжён с элементом из E , тогда можно выбрать g_0 – циклическую перестановку g так, чтобы $C_E(g_0) = Z(\pi_1(\mathbb{B}_a))$ для подходящего вершинного элемента a .*

Доказательство. Так как g не сопряжён с элементом из E , то существует приведённая циклическая перестановка g_0 элемента g вида:

$$g_0 = a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot t^{\varepsilon_n}.$$

Если $h \in C_E(g_0)$, то

$$a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot h \cdot t^{-\varepsilon_n} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot a_1^{-1} \cdot t^{-\varepsilon_1} \cdot a_0^{-1} \cdot h^{-1} = 1.$$

Поэтому $h \in \langle v \rangle$, где v – начало ребра, соответствующего символу t . Следовательно, $C_E(g_0) = \langle v^k \rangle$. При этом $g_0 \in C_G(v^k) = \pi_1(\mathbb{B}_{v^k})$, по утверждению 3.3.2. С другой стороны, по замечанию 3.3.4, для подходящего $m|k$ получаем $\langle v^m \rangle \cong Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v^k})) = Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v^m}))$ и $g_0 \in \pi_1(\mathbb{B}_{v^m})$. Поэтому $v^m \in C_E(g_0) = \langle v^k \rangle$ и, следовательно, $k = m$ и $C_E(g_0) = Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v^m}))$. \square

Лемма 3.3.6. *Если $g \in E$ не эллиптический элемент, то*

$$C_G(g) = C_E(g) = w^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times Z(\pi_1(\mathbb{T}_a))) \cdot w.$$

Доказательство. Если $h \in C_G(g)$, то $g \in C_E(h)$, и если h не сопряжён в E , то по лемме 3.3.5 g – эллиптический, что противоречит условиям. Поэтому каждый элемент $h \in C_G(g)$ сопряжён в E и имеет вид $h = u^{-1} \cdot a \cdot u$. При этом если $u \notin E$, то из равенства

$$u^{-1} \cdot a^{-1} \cdot u \cdot g \cdot u^{-1} \cdot a \cdot u = g$$

следует, что g – эллиптический. Это противоречит условию леммы, поэтому $u \in E$. Значит, $C_G(g) \subseteq E$ и $C_G(g) = C_E(g)$. Теперь заключение утверждения следует из следствий 3.2.5 и 3.2.13. \square

Лемма 3.3.7. Пусть G – GBS группа, $\Delta(G) = \{1\}$, $g, h \in G$ не сопряжены с элементами из E , $[g, h] = 1$, тогда существуют приведённый $w \in G$ и циклически приведённый $r \in G$ такие, что $g = w \cdot g_1 \cdot w^{-1}$, $h = w \cdot h_1 \cdot w^{-1}$ и $g_1 = r^k \cdot a$, $h_1 = r^l \cdot b$ для подходящих $a, b \in C_E(r)$.

Доказательство. Если у g и h нет общих проходных символов, то сопрягаем их так, чтобы

$$h = b_0 \cdot t^{\delta_1} \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_{m-1} \cdot t^{\delta_m}, g = a_0$$

и $a_0, b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$ не содержат t . Тогда g и h коммутируют только в том случае, если

$$b_0 \cdot t^{\delta_1} \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_{m-1} \cdot t^{\delta_m} \cdot a_0 \cdot t^{-\delta_m} \cdot b_{m-1}^{-1} \cdot \dots \cdot b_1^{-1} \cdot t^{-\delta_1} \cdot b_0^{-1} = a_0.$$

Поэтому $g = a_0$ – вершинный элемент и лежит в $C_E(h)$. В этом случае можно взять $g = h^0 \cdot a_0$ и $h = h^1 \cdot 1$.

Пусть g и h имеют общий символ t . Сопрягая одновременно g и h , если необходимо, можем получить

$$h = b_0 \cdot t^{\delta_1} \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_{m-1} \cdot t^{\delta_m}, g = a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot a_n,$$

здесь g – циклически приведён. Запишем коммутирование g и h так:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot a_1 \dots a_{n-1} \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot a_n \cdot b_0 \cdot t^{\delta_1} \cdot b_1 \dots b_{m-1} \cdot t^{\delta_m} &= \\ = b_0 \cdot t^{\delta_1} \cdot b_1 \dots b_{m-1} \cdot t^{\delta_m} a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} \cdot a_1 \dots a_{n-1} \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot a_n. & \end{aligned} \quad (3.6)$$

Случай 1. Сокращения в (3.6) полные. Тогда $g \cdot h = a \in H$, $m = n$, и $\varepsilon_i = -\delta_{n+1-i}$. Кроме того, $[g, h] = [a \cdot h^{-1}, h] = [h^{-1}, a] = 1$, и из доказанного в начале следует, что $a \in C_E(h)$. Положив $h = h$, $g = h^{-1} \cdot a$ получаем необходимое.

Случай 2. Сокращения в (3.6) есть, но они неполные. В этом случае $t^{\delta_m} \cdot a_0 \cdot t^{\varepsilon_1}$ сокращается и, следовательно, a_0 – вершинный элемент, и $\delta_m = -\varepsilon_1$. Из того, что сокращения в (3.6) неполные, следует, что в слове $g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} = 1$ есть сокращения

на стыке h и g^{-1} . Значит, $t^{\delta_m} \cdot a_n^{-1} \cdot t^{-\varepsilon_n}$ сокращается, a_n – вершинный, и $\delta_m = \varepsilon_n = -\varepsilon_1$. Поэтому $\varepsilon_1 = -\varepsilon_n$ и

$$t^{\varepsilon_n} \cdot a_n \cdot a_0 \cdot t^{\varepsilon_1} = t^{\delta_m} \cdot a_n \cdot t^{-\varepsilon_n} \cdot t^{\varepsilon_n} \cdot a_0 \cdot t^{\varepsilon_1}$$

сокращается, противоречие с циклической приведённостью g .

Случай 3. Сокращений в (3.6) нет. Тогда в левой части равенства $h^{-1} \cdot g^{-1} \cdot h \cdot g = 1$ сокращения начинаются только посередине, и их $n + m$. Пусть $|g|_t \geq |h|_t$, тогда $g = g_1 \cdot g_2$ в приведённой записи так, что $|h^{-1} \cdot g_1|_t = 0$. Поэтому $g_1 = h \cdot a$ и $g = h \cdot a \cdot g_2 = h \cdot g_3$, где $g_3 = a \cdot g_2$, и сокращений в $h \cdot g_3$ нет. При этом $[h, g] = 1$ в том и только в том случае, когда $[g_3, h] = 1$. Рассуждая таким образом с помощью индукции по $\min\{|g|_t, |h|_t\}$, можно предполагать, что $g_3 = w \cdot g'_3 \cdot w^{-1}$, $h = w \cdot h' \cdot w^{-1}$ и $g'_3 = r^k \cdot a$, $h' = r^l \cdot b$, где $a, b \in C_E(r)$. В этом случае получим $g = h \cdot g_3 = w \cdot h' \cdot g'_3 \cdot w^{-1}$ и $h' \cdot g'_3 = r^l \cdot b \cdot r^k \cdot a = r^{k+l} \cdot b \cdot a$ и $b \cdot a \in C_E(r)$. \square

Теперь мы переходим к описанию централизаторов наборов элементов при $\Delta(G) = \{1\}$.

Лемма 3.3.8. *Произведение $b \cdot a$ двух эллиптических элементов a, b эллиптическое в том и только в том случае, когда a, b стабилизируют одну вершину.*

Доказательство. Если a, b стабилизируют одну вершину, то доказательство очевидно. Пусть a, b и $b \cdot a$ эллиптические, но $\overset{\circ}{a} \cap \overset{\circ}{b} = \emptyset$. Пусть $b \cdot a$ стабилизирует вершину V . Пусть $Q \in \overset{\circ}{a}, R \in \overset{\circ}{b}$ – такие вершины, что $Q - R$ геодезическая, соединяющая $\overset{\circ}{a}$ и $\overset{\circ}{b}$ (см. рис. 3.5). Пусть вершина V не лежит на $Q - R$ и расположена ближе к $\overset{\circ}{a}$, чем к $\overset{\circ}{b}$. Обозначим через P вершину $\overset{\circ}{a}$, ближайшую к V . Длины геодезических $P - Q$ и $R - Q$ обозначим соответственно через y и x .

По теореме 2.1 [27], геодезические $P - V$ и $P - aV$ имеют одну длину z , и $V - P - aV$ – геодезическая длины $2z$. Из этой теоремы также получается, что $R - Q - P - aV$ и $R - bQ - bP - baV = V$ – геодезические одинаковой длины, и длина $aV - R - baV = V$ имеет длину $2z + 2x + 2y$. Следовательно, $x = y = 0$. Получаем противоречие с тем, что $\overset{\circ}{a} \cap \overset{\circ}{b} = \emptyset$.

В остальных случаях доказательство аналогично. \square

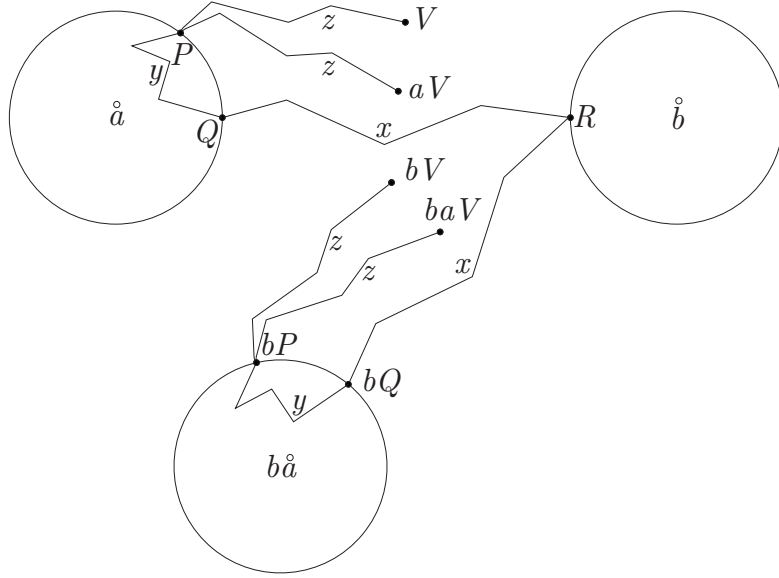


Рис. 3.5: Действие эллиптических элементов a и b .

Лемма 3.3.9. Пусть g_1 и g_2 не эллиптические элементы, тогда $C_G(g_1, g_2)$ либо равен $C_G(g_1) = C_G(g_2)$, либо сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_c))$ для подходящего c .

Доказательство. Из лемм 3.3.5 – 3.3.7 имеем $C_G(g_i) = w_i^{-1} \cdot (\langle r_i \rangle \times \langle a_i \rangle) \cdot w_i$, где $\langle a_i \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{B}_{a_i})) = C_E(r_i)$, и можно считать, что r_i не представим в виде $h^k \cdot u$, $u \in C_E(h)$, $|k| \geq 2$. Тогда элемент из $C_G(g_1, g_2)$ должен иметь вид:

$$w_1^{-1} \cdot r_1^{k_1} \cdot a_1^{l_1} \cdot w_1 = w_2^{-1} \cdot r_2^{k_2} \cdot a_2^{l_2} \cdot w_2,$$

эквивалентно

$$r_1^{k_1} \cdot a_1^{l_1} = w^{-1} \cdot r_2^{k_2} \cdot a_2^{l_2} \cdot w$$

для $w = w_2 \cdot w_1^{-1}$.

Если $r_1 \notin E$, то и $r_2 \notin E$. С точностью до сопряжения можно считать, что r_1 циклически приведено и заканчивается на t^ε . В [13] доказано, что в этом случае $r_1^{k_1} \cdot a_1^{l_1}$ может быть получен из $r_2^{k_2} \cdot a_2^{l_2}$ циклической перестановкой, заканчивающейся на t^ε , с точностью до сопряжения вершинным элементом h таким, что $t^\varepsilon \cdot h \cdot t^{-\varepsilon}$ сократимо. Поэтому

$$r_1^{k_1} \cdot a_1^{l_1} = r_3^{k_2} \cdot a_2^{l_2},$$

где r_3 – циклическая перестановка r_2 , сопряжённая h так, что $C_E(r_3) = C_E(r_2)$.

Если $|r_1| = |r_3|$, то $|k_1| = |k_2|$. Пусть $k_1 = k_2 > 0$, тогда из ПНФ имеем $r_1 = r_3 \cdot u, u \in E$.

Если $k_1 = k_2 = 1$, то $\langle a_1 \rangle = C_E(r_3 \cdot u), \langle a_2 \rangle = C_E(r_3)$. Кроме того, $a_1 \in C_E(u)$ и $a_1 \in C_E(r_3) = C_E(r_2)$. Из симметрии $a_2 \in C_E(r_1)$ и, следовательно, $C_E(r_1) = C_E(r_3)$

Если $k_1 = k_2 > 1$, то $u \cdot (r_3 \cdot u)^{k_1-1} \cdot a_1^{l_1} = r_3^{k_2-1} \cdot a_2^{l_2}$, тогда $r_3^{-1} \cdot u \cdot r_3 = v$ и по утверждению 3.3.1 $u = v \in C_E(r_3)$. Далее, как в предыдущем случае, получаем $C_G(r_1) = C_G(r_3)$.

Если $|r_1| > |r_3| \neq 0$, то $r_1 = r_3^m \cdot r'_3$, где $r_3 = r'_3 \cdot r''_3$. В этом случае $(r_3^m \cdot r'_3)^{k_1} \cdot a_1^{l_1} = r_3^{k_2} \cdot a_2^{l_2}$, тогда $r'_3 \cdot (r_3^m \cdot r'_3)^{k_1-1} \cdot a_1^{l_1} = r_3^{k_2-m} \cdot a_2^{l_2}$. Поэтому, сравнивая начальные сегменты левой и правой части равенства в ПНФ, получаем $r_3 = r'_3 \cdot r''_3 = r''_3 \cdot r'_3 \cdot u$. Кроме того, при $k_1 > 2$ получаем

$$r'_3 \cdot u \cdot (r''_3 \cdot r'_3 \cdot u)^{m-1} \cdot r'_3 \cdot (r_3^m \cdot r'_3)^{k_1-2} \cdot a_1^{l_1} = (r'_3 \cdot r''_3)^{k_2-m-1} \cdot a_2^{l_2}.$$

Опять сравнивая левые сегменты в ПНФ, получаем $u \cdot r''_3 \cdot r'_3 = r''_3 \cdot r'_3 \cdot v$. Так как $u, v \in E$, то из последнего равенства вытекает, что они эллиптические, и из утверждения 3.3.1 следует, что $u = v \in C_E(r_1), C_E(r_3)$. Поэтому, сократив на $u = v$, если необходимо, можно считать, что $u = 1$. По лемме 3.3.7, получаем $r'_3 = r^{k_0} \cdot w^{l_0}$ и $r''_3 = r^{k_3} \cdot w^{l_3}$, что противоречит неизвлекаемости корня.

Если $|r_1| = |r_3| = 0$, то мы в E , и можно использовать леммы 3.2.15 и 3.3.6, возникает последний случай. \square

Таким образом, имеется три типа централизаторов:

$$u^{-1} \cdot (\langle r \rangle \times Z(\pi_1(\mathbb{B}_a))) \cdot u, \quad (3.7)$$

$$v^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{B}_b) \cdot v, \quad (3.8)$$

$$w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)) \cdot w. \quad (3.9)$$

для подходящих Z -максимальных подграфов B_a, B_b и B_c .

Лемма 3.3.10. Пусть $g_1 \in G$ – не эллиптический, а $g_2 \in G$ – эллиптический. Тогда $C_G(g_1, g_2)$ либо равен $C_G(g_1)$ и имеет тип (3.7), либо сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_c))$ для такого c , что $\mathbb{B}_c \supseteq \mathbb{B}_a$.

Доказательство. По утверждению 3.3.2 и леммам 3.3.6 и 3.3.7, можно считать, что

$$C_G(g_1) = w_1^{-1} \cdot (\langle r_1 \rangle \times Z(\pi_1(\mathbb{B}_a))) \cdot w_1, C_G(g_2) = w_2^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{B}_b) \cdot w_2.$$

Пусть $g \in C_G(g_1, g_2)$, тогда $w_2 \cdot g \cdot w_2^{-1} \in \pi_1(\mathbb{B}_b)$, с другой стороны,

$$w_2 \cdot g \cdot w_2^{-1} = w_2 \cdot w_1^{-1} \cdot r_1^k \cdot a^l \cdot w_1 \cdot w_2^{-1}.$$

После приведения правой части последнего равенства получим $w \cdot r^k \cdot a^l \cdot w^{-1}$. Здесь w получается из $w_2 \cdot w_1^{-1}$ путем приведения сначала внутри слова $w_2 \cdot w_1^{-1}$, а потом, если нужно, сокращением со словом $r_1^k \cdot a^l$. При этом ввиду циклической приведённости можно считать, что r получается из r_1 циклической перестановкой так, что r заканчивается на t^ε (этого можно добиться путём подбора w).

Пусть $k \neq 0$. Приведённое слово $w^{-1} \cdot r^k \cdot a^l \cdot w$ лежит в $\pi_1(\mathbb{B}_b)$, только если $r \in \pi_1(\mathbb{B}_b)$. Тогда по лемме 3.3.5

$$\langle b \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{B}_b)) \subseteq C_E(r) = Z(\pi_1(\mathbb{B}_a)) = \langle a \rangle,$$

значит, $b = a^k$ и, следовательно, $B_b \supseteq B_a$ (в противном случае найдём $v \in B_a \setminus B_b$ так, что $v^p = a^q$, но нет таких m, n , что $v^n = b^m$. Это противоречит лемме 3.2.2 и тому, что b централизует $v \in B_a$). Поэтому $C_G(g_1) \subseteq C_G(g_2)$.

Пусть $k = 0$, тогда для подходящего $l \neq 0$ (возьмем l минимальным) $w^{-1} \cdot a^l \cdot w \in \pi_1(\mathbb{B}_b)$. Пусть после сокращений $w^{-1} \cdot a^l \cdot w$ примет вид $w_0^{-1} \cdot a^l \cdot w_0 \in \pi_1(\mathbb{B}_b)$, тогда $w_0 \in \pi_1(\mathbb{B}_b)$ и $a^l = d^k$ для подходящего элемента $d \in V(\mathbb{B}_b)$.

Докажем, что в этом случае $C_G(g_1, g_2)$ сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_c))$. Если $g \in C_G(g_1, g_2)$, то мы показали, что g сопряжён с a^l . Пусть $\langle c \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{B}_{a^l}))$, тогда по замечанию 3.3.4 $c = a^k, k|l$. С другой стороны, $\mathbb{B}_{a^k} \supseteq \mathbb{B}_a$. Выбрав $c = a^k$, получаем требуемое. \square

Замечание 3.3.11. Из замечания 1.1.2 ясно, что изоморфизм φ_P зависит от выбора P . Несложно понять, что φ_P отличается от φ_Q сопряжением на $t_{e_1} \cdot t_{e_2} \cdots t_{e_m}$, где e_1, e_2, \dots, e_m – кратчайший путь в T_A , соединяющий P и Q . Поэтому $\pi_1(\mathbb{B}_1)$ и $\pi_1(\mathbb{B}_2)$ определены с точностью до сопряжения.

Замечание 3.3.12. Если B_1, B_2 – два непересекающихся подграфа графа A , то можно выбрать максимальное поддерево T_A так, что оно согласовано и с T_{B_1} , и с T_{B_2} . В этом случае $\pi_1(\mathbb{B}_1)$ и $\pi_1(\mathbb{B}_2)$ можно определить как образы при тождественном вложении.

Лемма 3.3.13. Если $P \in B_a \cap B_b$, то $\pi_1(\mathbb{B}_a, P) \cap \pi_1(\mathbb{B}_b, P) = \pi_1(\mathbb{B}, P)$, где B – это компонента связности $B_a \cap B_b$, содержащая P .

Доказательство. Следует из определения $\pi_1(\mathbb{B}, P)$ непосредственно. \square

Лемма 3.3.14. Пусть g_1, g_2 – эллиптические элементы, g_1 сопряжён с вершинным a , g_2 сопряжён с вершинным b . Тогда $C_G(g_1, g_2)$ либо сопряжён с $\pi_1(\mathbb{B})$, где B – некоторая компонента связности $B_a \cap B_b$, либо сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_c))$ для подходящего вершинного c .

Доказательство. Если $g \in C_G(g_1, g_2)$, то из утверждения 3.3.2 следует, что с точностью до сопряжения $g \in \pi_1(\mathbb{B}_a) \cap w^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{B}_b) \cdot w$. Разобьём $w = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ в приведённой записи так, что $r_1 \in \pi_1(\mathbb{B}_b)$, $r_3 \in \pi_1(\mathbb{B}_a)$, а r_2 – слово минимальной длины такое, что $r_2 \notin \pi_1(\mathbb{B}_b) \cap \pi_1(\mathbb{B}_a)$.

Если $r_2 = 1$ и $B_a \cap B_b \neq \emptyset$, то по лемме 3.3.13 $C_G(g_1, g_2)$ сопряжён с $\pi_1(\mathbb{B}_a) \cap \pi_1(\mathbb{B}_b) = \pi_1(\mathbb{B})$, где B – некоторая компонента связности $B_a \cap B_b$.

Если $r_2 = 1$ и $B_a \cap B_b = \emptyset$, то $\pi_1(\mathbb{B}_a)$ и $\pi_1(\mathbb{B}_b)$ определены по замечанию 3.3.12 как естественные подгруппы $\pi_1(\mathbb{A})$. При этом $g \in \pi_1(\mathbb{B}_a) \cap \pi_1(\mathbb{B}_b)$, только если $g = h_1 = h_2$ для $h_1 \in \pi_1(\mathbb{B}_a), h_2 \in \pi_1(\mathbb{B}_b)$. Это равенство невозможно, если h_1 и h_2 не эллиптические (чтобы понять это, представим $G \geq G_1 = A * B$ с объединением по $C \cong \mathbb{Z}$ так, что $\pi_1(\mathbb{B}_a) \hookrightarrow A, \pi_1(\mathbb{B}_b) \hookrightarrow B$. Элемент $g \in \pi_1(\mathbb{B}_a) \cap \pi_1(\mathbb{B}_b)$ должен лежать в объединяемой циклической части – вершинной группе). Значит, можно считать, что $h_i = s_i^{-1} \cdot v_i^{k_i} \cdot s_i, i = 1, 2$. Тогда по утверждению 3.3.1 из этого равенства следует, что $v_2 \in V(B_{v_1^{k_1}})$ и $v_1^{k_1} = v_2^{k_2}$. Если $\langle v_1^{k_1} \rangle \subset Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v_1^{k_1}})) = \langle v_1^{l_1} \rangle$, то $v_1^{l_1} \in \pi_1(\mathbb{B}_a) \cap \pi_1(\mathbb{B}_b)$. Это противоречит тому, что это пересечение порождается $v_1^{k_1}$. Значит, подгруппа $\langle v_1^{k_1} \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v_1^{k_1}}))$ сопряжена с $\pi_1(\mathbb{B}_a) \cap \pi_1(\mathbb{B}_b)$ и $v_1^{k_1} = c$

Если $r_2 \neq 1$, то $g = h_1 = r_2^{-1} \cdot h_2 \cdot r_2$. Этот случай разбирается аналогично. \square

Лемма 3.3.15. Пусть g – не эллиптический, и $C_G(g)$ имеет тип (3.7). Тогда пересечение $C_G(g) \cap w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)) \cdot w$ сопряжено с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_b))$ так, что $B_b \supseteq B_c, B_b \supseteq B_a$.

Доказательство. По леммам 3.3.5 – 3.3.7 элемент h из пересечения с точностью до сопряжения принадлежит $\langle r \rangle \times \langle a \rangle \cap w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)) \cdot w = \langle r \rangle \times \langle a \rangle \cap w^{-1} \cdot \langle c \rangle \cdot w$. Значит, $h = r^k \cdot a^l \in w^{-1} \cdot \langle c \rangle \cdot w$. Следовательно, h – эллиптический, и $k = 0$. Получается $h = a^l = w^{-1} \cdot c \cdot w$. По утверждению 3.3.1 $a \in V(B_{c^m}), c \in V(B_{a^l})$. Следовательно, $c^m = a^l \in C_E(w)$. Пусть m, l – минимальная пара, удовлетворяющая этому равенству (это корректное условие, так как все такие пары пропорциональны), положим $b = c^m = a^l$. Заметим, что $Z(\pi_1(\mathbb{B}_b)) = \langle b \rangle$, иначе найдется $k|l, k < l$ как в замечании 3.3.4 такое, что $a^k \in Z(\pi_1(\mathbb{B}_b))$, в частности, $a^k = c^s$, что противоречит минимальности. \square

Лемма 3.3.16. Пересечение $w_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_a)) \cdot w_1 \cap w_2^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_b)) \cdot w_2$ сопряжено с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_c))$ так, что $B_c \supseteq B_a, B_c \supseteq B_b$.

Доказательство. Как в лемме 3.3.15. \square

Лемма 3.3.17. Пусть g – эллиптический элемент, тогда пересечение $C_G(g) \cap w^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)) \cdot w$ сопряжено с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_a))$ так, что $B_a \supseteq B_c$ и $B_a \cap B_b \neq \emptyset$.

Доказательство. С точностью до сопряжения h из пересечения лежит в $\pi_1(\mathbb{B}) \cap w_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)) \cdot w_1$. Следовательно, h – эллиптический элемент из $\pi_1(\mathbb{B})$. Сопрягая h , если необходимо, получим $h = v^k = w_2^{-1} \cdot c^l \cdot w_2$ для подходящей $v \in V(B)$ и минимальной пары k, l . Рассуждая как в доказательстве леммы 3.3.15, можно понять, что $h = v^k = c^l \in C_G(w_2)$, и $\langle v^k \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{B}_{v^k}))$. Положим $a = v^k = c^l$, получим $B_a \supseteq B_c$ и $v \in V(B_a \cap B)$. \square

Таким образом, пересечение централизаторов описаны, и доказано, что централизатор конечного числа элементов всегда имеет тип (3.7), (3.8) или (3.9).

Теперь мы переходим к описанию вложения централизаторов наборов элементов при $\Delta(G) = \{1\}$.

Утверждение 3.3.18. Пусть $g_1, g_2 \in G$ – не эллиптические элементы, $h_1, h_2 \in G$ – эллиптические элементы, B_{c_1}, B_{c_2} – некоторые Z -максимальные подграфы. Если $C_G(g_i) = w_i^{-1} \cdot (\langle r_i \rangle \times Z(\pi_1(\mathbb{B}_{a_i}))) \cdot w_i$, $C_G(h_i) = u_i^{-1} \cdot \pi_1(\mathbb{B}_{b_i}) \cdot u_i$, $v_i^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_i})) \cdot v_i$, $i = 1, 2$ – централизаторы типа (3.7), (3.8) и (3.9) соответственно, тогда:

- 1) $C_G(g_1) \not\supseteq C_G(g_2)$;
- 2) Если $C_G(g_1) \supseteq C_G(h_1)$, то $B_{b_1} = \{b_1\}$;
- 3) Если $C_G(g_1) \supseteq v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1$, то $B_{c_1} \supseteq B_{a_1}$;
- 4) Если $C_G(h_1) \supseteq C_G(g_1)$, то $r_1 \in \pi_1(\mathbb{B}_{b_1})$, $B_{a_1} \subseteq B_{b_1}$;
- 5) Если $C_G(h_1) \supseteq C_G(h_2)$, то $B_{b_1} \supseteq B_{b_2}$;
- 6) Если $C_G(h_1) \supseteq v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1$, то $B_{b_1} \cap B_{c_1} \neq \emptyset$;
- 7) $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \not\supseteq C_G(g_1)$;
- 8) $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \not\supseteq C_G(h_1)$;
- 9) Если $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \supseteq v_2^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_2})) \cdot v_2$, то $B_{c_2} \supseteq B_{c_1}$.

Доказательство. 1) Пусть $C_G(g_1) \supseteq C_G(g_2)$, тогда $C_G(g_2) = C_G(g_1, g_2)$ и по лемме 3.3.9 $C_G(g_2)$ либо равен $C_G(g_1) = C_G(g_2)$, что недопустимо строгим включением, либо циклический. Последнее невозможно, так как, по леммам 3.3.6 и 3.3.7, $C_G(g_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) Пусть $C_G(g_1) \supseteq C_G(h_1)$, тогда $C_G(h_1) = C_G(g_1, h)$ и по лемме 3.3.10 $C_G(h_1)$ либо равен $C_G(g_1)$, что недопустимо строгим включением, либо циклический. Так как \mathbb{A} – редуцированный граф с метками, то последнее возможно только в том случае, когда $B_{b_1} = \{b_1\}$.

3) Пусть $C_G(g_1) \supseteq v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1$, тогда $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 = v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \cap C_G(g_1)$ и по лемме 3.3.15 последний сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_d))$ так, что $B_d \supseteq B_{c_1}$, $B_d \supseteq B_{a_1}$. Получается, что центры $\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})$ и $\pi_1(\mathbb{B}_d)$ сопряжены, поэтому c_1 и d сопряжены, и из утверждения 3.3.1 следует, что $c_1 = d$. Откуда получаем $B_{c_1} \supseteq B_{a_1}$.

4) Пусть $C_G(h_1) \supseteq C_G(g_1)$, тогда $C_G(g_1) = C_G(g_1, h_1)$ и по лемме 3.3.10 последний либо равен $C_G(g_1)$, и тогда $r_1 \in \pi_1(\mathbb{B}_{b_1})$. В этом случае $C_E(r_1) = \langle a_1 \rangle = Z(\pi_1(\mathbb{B}_{a_1})) \supseteq Z(\pi_1(\mathbb{B}_{b_1}))$ и, следовательно, $B_{b_1} \supseteq B_{a_1}$. Либо $C_G(g_1) = C_G(g_1, h_1)$ сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_d))$ и, следовательно, циклический. Это невозможно, так как по леммам 3.3.6 и 3.3.7, $C_G(g_1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

5) Пусть $C_G(h_1) \supseteq C_G(h_2)$, тогда $C_G(h_2) = C_G(h_1, h_2)$ и по лемме 3.3.14 последний

либо сопряжён с $\pi_1(\mathbb{B})$, где B – некоторая компонента связности $B_{b_1} \cap B_{b_2}$, тогда $B = B_{b_2}$ и $B_{b_1} \supset B = B_{b_2}$, либо циклический, тогда $B_{b_2} = \{b_2\} \subset B_{b_1}$.

6) Пусть $C_G(h_1) \supset v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1$, тогда $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 = v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \cap C_G(h_1)$ и по лемме 3.3.17 последний сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_d))$ так, что $B_d \supseteq B_{c_1}$, $B_d \cap B_{b_1} \neq \emptyset$. Значит, $Z(\pi_1(\mathbb{B}_d))$ сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1}))$, следовательно, $c_1 = d$ и $B_{b_1} \cap B_{c_1} \neq \emptyset$.

7) Пусть $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \supset C_G(g_1)$, тогда $C_G(g_1) = C_G(g_1) \cap v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1$ и по лемме 3.3.15 $C_G(g_1)$ циклический. Последнее невозможно так как по леммам 3.3.6 и 3.3.7 $C_G(g_1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

8) Пусть $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \supset C_G(h_1)$, тогда $C_G(h_1) = C_G(h_1) \cap v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1$ и по лемме 3.3.17 $C_G(h_1)$ циклический. Поэтому $B_{b_1} = \{b_1\}$, $b_1 \in V(A)$ и $Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1}))$ сопряжён с $\langle b_1 \rangle$. Значит, $c_1 = b_1$ по утверждению 3.3.1 и $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 = C_G(h_1)$, что противоречит строгости включения.

9) Пусть $v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \supset v_2^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_2})) \cdot v_2$, тогда $v_2^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_2})) \cdot v_2 = v_1^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \cdot v_1 \cap v_2^{-1} \cdot Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_2})) \cdot v_2$ и по лемме 3.3.16 последний сопряжён с $Z(\pi_1(\mathbb{B}_c))$. Поэтому, как раньше, $c_2 = c$ и $Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_1})) \supset Z(\pi_1(\mathbb{B}_{c_2}))$, следовательно, $B_{c_2} \supset B_{c_1}$. \square

Замечание 3.3.19. В цепочке $C_G(A_1) \supset C_G(A_2) \supset \dots \supset C_G(A_n)$, где A_i – конечные наборы элементов из G , первые k , $0 \leq k \leq n$ централизаторов должны быть типа (3.8), потом один может быть типа (3.7), и оставшиеся должны быть типа (3.9).

Замечание 3.3.20. Каждая строго убывающая цепочка централизаторов типа (3.8) соответствует строго убывающей цепочке Z -максимальных подграфов

$$\begin{aligned} C_G(A_1) &\supset C_G(A_2) \supset \dots \supset C_G(A_n) \\ B_{b_1} &\supset B_{b_2} \supset \dots \supset B_{b_n}. \end{aligned}$$

Замечание 3.3.21. Каждая строго убывающая цепочка централизаторов типа (3.9) соответствует строго возрастающей цепочке строго вложенных Z -максимальных подграфов

$$\begin{aligned} C_G(C_1) &\supset C_G(C_2) \supset \dots \supset C_G(C_l) \\ B_{c_1} &\subset B_{c_2} \subset \dots \subset B_{c_l}. \end{aligned}$$

Теперь мы готовы дать полное описание централизаторной размерности группы G при $\Delta(G) = \{1\}$.

Утверждение 3.3.22. Пусть \mathbb{A} – редуцированный граф с метками, $\pi_1(\mathbb{A})$ неабелева, $\Delta(\pi_1(\mathbb{A})) = \{1\}$, и $b_1(A) = n$. Тогда $cdim(\pi_1(\mathbb{A}))$ нечётна, и

$$3 \leq cdim(\pi_1(\mathbb{A})) \leq 2 \cdot |E(A)| + 1.$$

Кроме того, для всякого нечётного k , $3 \leq k \leq 2 \cdot t + 1$ найдется граф с метками $\mathbb{B}_{m,n}$ с t ребрами такой, что $b_1(B_{m,n}) = n \leq t$, $\Delta(\pi_1(\mathbb{B}_{m,n})) = \{1\}$ и $cdim(\pi_1(\mathbb{B}_{m,n})) = k$.

Доказательство. По замечанию 3.3.19, всякая цепочка централизаторов имеет вид:

$$(3.8) \supset (3.8) \supset \cdots \supset (3.8) \supset (3.7) \supset (3.9) \supset (3.9) \supset \cdots \supset (3.9)$$

или

$$(3.8) \supset (3.8) \supset \cdots \supset (3.8) \supset (3.9) \supset (3.9) \supset \cdots \supset (3.9).$$

Конечность таких цепочек следует из замечаний 3.3.20 и 3.3.21.

Пусть максимальная цепочка имеет вид $(3.8) \supset (3.8) \supset \cdots \supset (3.8) \supset (3.9) \supset (3.9) \supset \cdots \supset (3.9)$, тогда по замечанию 3.3.20 подцепочка централизаторов типа (3.8) в ней соответствует максимальной убывающей цепочке Z -максимальных подграфов. Из-за максимальной цепочки подграфов последний Z -максимальный подграф в цепочке состоит из одной вершины (используем редуцированность). Поэтому последний централизатор типа (3.8) имеет и тип (3.9). Пусть в самой длинной цепочке Z -максимальных подграфов s графов, тогда $s \leq |E(A)| + 1$. Аналогично, по замечанию 3.3.21 в максимальной цепочке централизаторов типа (3.9) s элементов. Так как один элемент общий, то централизаторная размерность равна $2 \cdot s - 1 \leq 2 \cdot |E(A)| + 2 - 1$.

В случае, когда максимальная цепочка имеет вид $(3.8) \supset (3.8) \supset \cdots \supset (3.8) \supset (3.7) \supset (3.9) \supset (3.9) \supset \cdots \supset (3.9)$, можно действовать аналогично. Только надо заметить, что централизатор типа (3.6) не содержится в \mathbb{Z} и не содержит вершинную группу, так как, по пункту 3 утверждения 3.3.18, $B_{c_1} \supseteq B_{a_1}$, $\langle a_1 \rangle = C_E(r)$, r – не эллиптический. Поэтому $C_E(r)$ не может совпадать с $\langle v \rangle$, $v \in V(A)$. Поэтому

максимальная длина подцепочек централизаторов типа (3.8) и (3.9) равна $s - 1$. Следовательно, $cdim(\pi_1(\mathbb{A})) = 2 \cdot (s - 1) + 1 = 2 \cdot s - 1 \leq 2 \cdot |E(A)| + 1$.

Осталось привести примеры графов с метками $\mathbb{B}_{m,n}$. Идея в том, что цепочка Z -максимальных подграфов должна иметь длину $l, 2 \leq l \leq m + 1$, тогда $k = 2 \cdot l - 1$, и получаем требуемое.

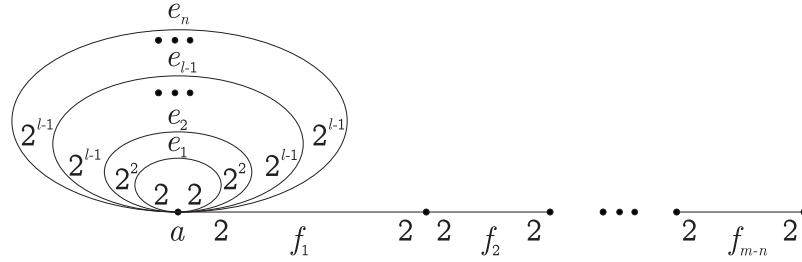


Рис. 3.6: Граф с метками $\mathbb{B}_{m,n}$, при $l \leq n$.

В случае $l \leq n$ (см. рис. 3.6) Z -максимальные подграфы, образующие нужную максимальную цепочку $T_i = \langle e_1, \dots, e_i, f_1, \dots, f_{n-m} \rangle$ и $Z(\pi_1(\mathbb{T}_i)) = \langle a^{2^i} \rangle, i = 1, 2, \dots, l - 1, n$

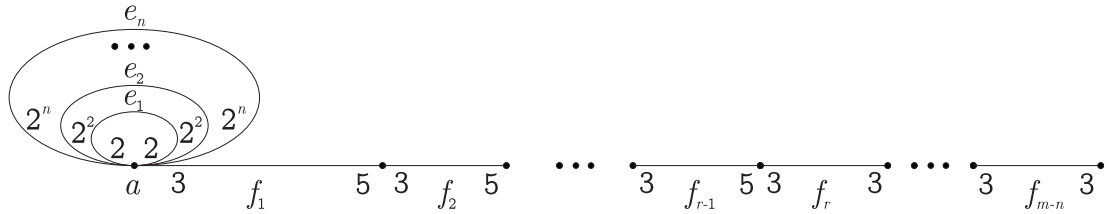


Рис. 3.7: Граф с метками $\mathbb{B}_{m,n}$, при $m \geq l = n + r > n$.

В случае $m \geq l = n + r > n$ (см. рис. 3.7) Z -максимальные подграфы, образующие нужную максимальную цепочку $T_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle, S_j = \langle T_n, f_1, \dots, f_j \rangle$ и $Z(\pi_1(\mathbb{T}_i)) = \langle a^{2^i} \rangle, i = 1, 2, \dots, n, Z(\pi_1(\mathbb{S}_j)) = \langle a^{2^n \cdot 3^j} \rangle, j = 1, \dots, r - 1, m - n$. \square

Используя графы с метками, построенные при доказательстве утверждения 3.3.22, можно доказать следующее замечание.

Замечание 3.3.23. Пусть A – конечный связный граф. Для любого нечётного $k, 3 \leq k \leq 2 \cdot |E(A)| + 1$ можно подобрать расстановку меток на ребрах A так, что $cdim(\pi_1(\mathbb{A})) = k$.

Наконец, мы дадим полное описание централизаторной размерности группы G при $\Delta(G) = \{\pm 1\}$. В этом случае $\text{Ker}\Delta = G_1$ является GBS группой и подгруппой индекса 2 в группе G . Обозначим через \mathbb{A}_1 граф с метками, как на рис. 3.8. Пусть в группе $G \cong \pi_1(\mathbb{A})$ порождающий второго типа t такой, что $\Delta(t) = -1$ и соотношения второго типа в $\pi_1(\mathbb{A})$ имеют вид:

$$t_i^{-1} \cdot b_i^{\alpha_i} \cdot t_i = a_i^{\beta_i}, i = 1, 2, \dots, b_1(A) - 1, t^{-1} \cdot b^{\alpha} \cdot t = a^{\beta}.$$

При этом $\Delta(t_i) = -1$ при $1 \leq i \leq k$, $\Delta(t_j) = 1$ при $k + 1 \leq j \leq b_1(A) - 1$. Тогда в группе $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ каждому порождающему первого типа v группы G соответствуют два порождающих первого типа v, v' . Каждому ребру $e \in E(T_A)$ соответствует два ребра e, e' в максимальном поддереве $T(A_1)$. Кроме того, в $T(A_1)$ есть выделенное ребро f , соединяющее a и b' с теми же метками, что и на ребре t в графе A , других рёбер в $T(A_1)$ нет. Каждому ребру $t_i, i = 1, 2, \dots, b_1(A) - 1$ вне максимального поддерева в A соответствует два ребра $s_i, r_i, i = 1, 2, \dots, b_1(A) - 1$ вне максимального поддерева в A_1 , причём s_i соединяет b_i и a'_i , r_i соединяет a_i и b'_i для $1 \leq i \leq k$, s_j соединяет b_j и a_j , r_j соединяет a'_j и b'_j для $k + 1 \leq j \leq b_1(A) - 1$. Кроме того, есть ещё одно ребро t' вне максимального поддерева в A_1 , соединяющее b и a' .

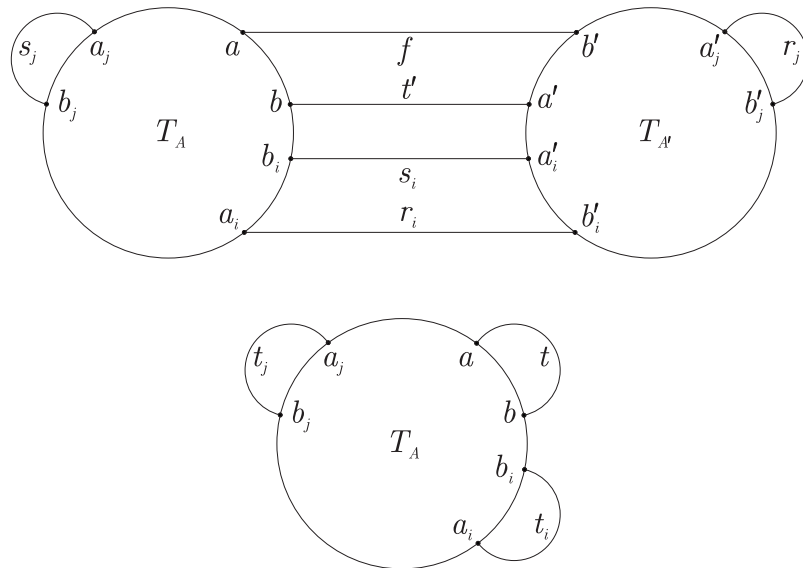


Рис. 3.8: Графы с метками: \mathbb{A}_1 сверху и \mathbb{A} снизу.

При этом метки на соответствующих ребрах расставлены так, как в \mathbb{A} . Поэтому

соотношения первого типа в $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ имеют вид:

$$u^\lambda = v^\mu, (u')^\lambda = (v')^\mu$$

для всех соотношений первого типа $u^\lambda = v^\mu$ в $\pi_1(\mathbb{A})$ и ещё соотношение $a^\beta = (b')^\alpha$.

Соотношения второго типа в $\pi_1(\mathbb{A}_1)$:

$$\begin{aligned} s_i^{-1} (a'_i)^{\beta_i} s_i &= b_i^{\alpha_i}, & i = 1, 2, \dots, k, \\ r_i^{-1} (b'_i)^{\alpha_i} r_i &= a_i^{\beta_i}, & i = 1, 2, \dots, k, \\ s_j^{-1} b_j^{\alpha_j} s_j &= a_j^{\beta_j}, & j = k+1, \dots, b_1(A) - 1 \\ r_j^{-1} (b'_j)^{\alpha_j} r_j &= (a'_j)^{\beta_j}, & j = k+1, \dots, b_1(A) - 1, \\ (t')^{-1} b^\alpha t' &= (a')^\beta. \end{aligned}$$

Построенный граф A_1 является двулистным накрытием A .

Утверждение 3.3.24. *Группа G_1 изоморфна $\pi_1(\mathbb{A}_1)$.*

Доказательство. Устроим отображение на множестве порождающих $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ в G по правилу:

$$\begin{aligned} s_i &\mapsto t^{-1} \cdot t_i^{-1}, & i = 1, 2, \dots, k, \\ r_i &\mapsto t^{-1} \cdot t_i, & i = 1, 2, \dots, k, \\ s_j &\mapsto t_i, & j = k+1, \dots, b_1(A) - 1, \\ \varphi: r_j &\mapsto t^{-1} \cdot t_j \cdot t, & j = k+1, \dots, b_1(A) - 1, \\ v &\mapsto v, & v \in V(T_A), \\ v' &\mapsto t^{-1} \cdot v \cdot t, & v \in V(T_A), \\ t' &\mapsto t^2. \end{aligned}$$

Это отображение продолжается до гомоморфизма ввиду того, что соотношения $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ переходят в единицу в G . Докажем, что $G_1 = \text{Im}\varphi$.

Несложно видеть, что $\Delta(\varphi(g)) = 1$ для всех g , порождающих $\pi_1(\mathbb{A}_1)$, поэтому $G_1 \supseteq \text{Im}\varphi$. Кроме того, можно заметить, что $\text{Im}\varphi$ – подгруппа индекса 2 в G с представителями смежных классов 1 и t , поэтому $G_1 = \text{Im}\varphi$.

Покажем, что $\text{Ker}\varphi = \{1\}$. Пусть приведённый элемент g лежит в $\text{Ker}\varphi$. Если $g \neq 1$, то либо $\varphi(g)$ лежит в E и сократим, либо по лемме 1.3.1 в $\varphi(g)$ есть подслово типа $t_i^{-1} \cdot a \cdot t_i = b$. Несложно понять, что в обоих случаях аналогичные сокращения должны быть в слове g в группе $\pi_1(\mathbb{A}_1)$, что противоречит приведённости. \square

Утверждение 3.3.25. *Максимальные цепочки Z -максимальных подграфов в \mathbb{A}_1 имеют ту же длину, что и в \mathbb{A} .*

Доказательство. Покажем, что если $B_c - Z$ максимальный подграф \mathbb{A}_1 , и есть пара $v, v' \in V(B_c)$, то $w \in V(B_c)$ в том и только в том случае, когда $w' \in V(B_c)$.

По определению B_c , найдутся целые числа k, k' такие, что $v^k = c = (v')^{k'}$, из утверждения 3.3.24 следует, что $k = k'$. Пусть $w \in V(B_c)$, тогда $w^l = c = v^k = (v')^k$. Так как $w^l = v^k$, то $(w')^l = (v')^k$. Поэтому $w^l = c = (w')^l$. Значит, $w' \in V(B_c)$. Обратно аналогично.

Значит всякий Z максимальный подграф либо не имеет пары v, v' вершин (следовательно, число его вершин не более $|V(A)|$), либо содержит $B \cup B'$ для подходящего Z максимального подграфа B графа с метками \mathbb{A} . Таким образом, максимальная цепочка вложенных Z максимальных подграфов имеет ту же длину, что и в \mathbb{A} . \square

Следствие 3.3.26. *Централизаторная размерность $\pi_1(\mathbb{A}_1)$ равна централизаторной размерности $\pi_1(\mathbb{A})$.*

Замечание 3.3.27. *Пусть $G - GBS$ группа, $\Delta(G) = \{\pm 1\}$. Если $g \in G, \Delta(g) = -1$, то $C_G(g) = \langle r \rangle$, где $g = r^m$, m нечётно, и корень из r не извлекается.*

Доказательство. Как в лемме 3.3.7, можно доказать, что $C_G(g) = \langle r \rangle \times C_E(r)$. Но $C_E(g) = \{1\}$, так как в $C_E(g)$ лежат вершинные элементы, но $\Delta(g) = -1$. \square

Теорема 3.3.28. *Пусть \mathbb{A} – редуцированный граф с метками, группа $\pi_1(\mathbb{A})$ неабелева, $\Delta(\pi_1(\mathbb{A})) = \{\pm 1\}$ и $b_1(A) = n$. Тогда $cdim(\pi_1(\mathbb{A}))$ нечётна, и*

$$3 \leq cdim(\pi_1(\mathbb{A})) \leq 2 \cdot |E(A)| + 3.$$

Кроме того, для всякого нечётного $k, 3 \leq k \leq 2 \cdot t + 3$ найдется граф с метками $\mathbb{B}_{m,n}$ с t ребрами такой, что $1 \leq b_1(B_{m,n}) = n \leq t, \Delta(\pi_1(\mathbb{B}_{m,n})) = \{1\}$, и $cdim(\pi_1(\mathbb{B}_{m,n})) = k$.

Доказательство. В $G = \pi_1(\mathbb{A})$ нет центра, поэтому есть такая цепочка централизаторов

$$G = C_G(1) \supset C_G(g_1) \supset \cdots \supset C_G(g_1, \dots, g_{2s+1}) \supset \{1\} = C_G(t, g_1, \dots, g_{2s+1})$$

длины $2 \cdot s + 3$, где s – длина самой длинной цепочки Z максимальных подграфов в \mathbb{A}_1 . Пусть имеется более длинная цепочка

$$G = C_G(1) \supset C_1 \supset \cdots \supset C_k \supset \{id\} = C_G(t, h_1, \dots, h_r).$$

Пусть $C_1, \dots, C_l \not\subseteq G_1$, тогда найдется $g \in C_i, 1 \leq i \leq l$ такой, что $\Delta(g) = -1$. Так как $g \in C_i = C_G(g_1, \dots, g_{i-1}, g)$, и $C_G(g) = \langle r \rangle$, по замечанию 3.3.27, то $g_i \in \langle r \rangle$. Однако $C_G(g^m)$ либо равен $\langle r \rangle$ при нечётном m , либо $\langle r \rangle \times \langle a \rangle$ при чётном m (здесь a порождает $C_E(r^2)$). Поэтому $l \leq 2$, и длина всей цепочки не более 4.

Пусть длина цепочки равна 4. Если длина цепочки Z максимальных поддеревьев в \mathbb{A} больше либо равна 2, то мы умеем строить цепочку централизаторов длины $2 \cdot 2 + 1$ и, следовательно, 4 не максимальна. Предположим, что длина цепочки Z максимальных поддеревьев в \mathbb{A} равна 1. Так как \mathbb{A} редуцирован, то $|V(\mathbb{A})| = 1$. Кроме того, на ребрах должны стоять метки, равные 1 или -1 . Значит, $\pi_1(\mathbb{A})$ содержит подгруппу H индекса 2, изоморфную $F_n \times \mathbb{Z}$. Эта подгруппа H соответствует двулистному накрытию (как на рис. 3.8). Если $n \geq 2$, то $cdim(H) = 3$, и цепочка централизаторов, построенная в начале доказательства, имеет длину 5. Если $n = 1$, то H абелева, и $cdim(G)$ не может быть равна 4.

Поэтому длина цепочки не превосходит 3. Но 3 — это минимальная централизаторная размерность неабелевой группы, противоречия с максимальностью. Поэтому $l = 0$.

Примеры аналогичны рис. 3.6 и 3.7, только на одном из рёбер вне максимального поддерева надо поменять знак одной метки. \square

Замечание 3.3.29. *Существует алгоритм, который по данному графу с метками \mathbb{A} вычисляет $cdim(\pi_1(\mathbb{A}))$.*

Доказательство. Сначала надо вычислить $\Delta(\pi_1(\mathbb{A}))$. Если $\Delta(\pi_1(\mathbb{A})) \not\subseteq \{\pm 1\}$, то по теореме 3.1.2 либо $cdim(\pi_1(\mathbb{A})) = \infty$, либо $\pi_1(\mathbb{A}) \cong BS(1, n)$, $cdim(\pi_1(\mathbb{A})) = 3$.

Если $\Delta(\pi_1(\mathbb{A})) \subseteq \{\pm 1\}$, то, стартуя с произвольной вершины, можно найти цепочку вложенных Z максимальных подграфов. После этого, как в утверждениях 3.3.22 и 3.3.28, можно вычислить $cdim(\pi_1(\mathbb{A}))$. \square

3.4 Универсальная эквивалентность GBS групп

В данном параграфе мы описываем эквивалентность GBS групп, представленных деревьями с метками, с точки зрения их универсальных (экзистенциальных) теорий.

В этом параграфе удобно использовать следующую терминологию. Если $g, h \in G$, и e — ребро дерева A такое, что g и h не попадают в одну компоненту e -разложения, то назовём элементы g и h *e -отделимыми*. Элементы $g, h \in G$ будем называть *отделимыми*, если существует ребро e такое, что g и h e -отделимы. Всякий элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k$ так, что соседние элементы u_i, u_{i+1} отделимы. Назовём такую запись *приведённой* (считаем 1 приведённой записью). Такая запись не единственна, но $g = 1$ тогда и только тогда, когда всякая приведённая запись g равна 1. В этом параграфе удобно для данной приведённой записи $g = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k$ называть k *длиной* g и обозначать $|g|$ (длину 1 доопределим нулем). Тогда $g = 1$ тогда и только тогда, когда $|g| = 0$.

Теорема 3.4.1. Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — деревья с метками, и соответствующие GBS группы $G = \pi_1(\mathbb{A})$, $H = \pi_1(\mathbb{B})$ неабелевы. Тогда группы G и H универсально (экзистенциально) эквивалентны тогда и только тогда, когда G вкладывается в H , и H вкладывается в G .

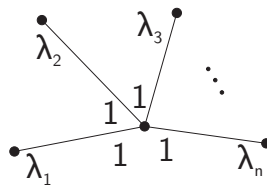


Рис. 3.9: Граф с метками $\mathbb{C}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$, обозначим через $\mathbb{C}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ дерево с метками как на рис. 3.9.

Лемма 3.4.2. Пусть \mathbb{A} — дерево с метками, $\pi_1(\mathbb{A}) = G$, и $cdim(G) = 3$. Тогда для подходящих $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$ $G \cong \pi_1(\mathbb{C}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.

Для таких деревьев с метками критерий вложения проверить очень просто.

Теорема 3.4.3. Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{C}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mathbb{B} = \mathbb{C}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $m \geq 2, n \geq 2$, и \mathbb{B} не изоморфна фундаментальной группе бутылки Клейна. Тогда $\pi_1(\mathbb{A})$ вкладывается в $\pi_1(\mathbb{B})$ тогда и только тогда, когда для всякого $1 \leq i \leq n$ найдется $1 \leq j \leq m$ такое, что λ_i делит μ_j .

Доказательство теоремы 3.4.1. Так как универсальная эквивалентность эквивалентна экзистенциальной, то мы будем доказывать теорему для экзистенциальной эквивалентности.

Если G вкладывается в H , и H вкладывается в G , то группы G и H экзистенциально эквивалентны.

Пусть G и H экзистенциально эквивалентны. Если группы G и H представлены нередуцированными деревьями, то можно их редуцировать. Далее считаем, что деревья с метками \mathbb{A} и \mathbb{B} редуцированы.

Так как G и H универсально эквивалентны, то из результатов [43] следует, что централизаторные размерности групп G и H равны. Так как группы G и H заданы деревьями с метками, то их централизаторные размерности конечны. Пусть группа G имеет копредставление (1.1) и порождается вершинными элементами a_1, a_2, \dots, a_n . По графу с метками \mathbb{A} построим \exists -формулу, которая реализуется на порождающих a_1, a_2, \dots, a_n в группе G .

$$\Phi_{\mathbb{A}} = (\exists x_1, \dots, x_n) \left[\left(\bigwedge_{i \neq j} x_i^{\mu_{ij}} = x_j^{\mu_{ji}} \right) \wedge \right. \\ \left. \wedge \left(\bigwedge_{i \neq j} \bigwedge_{1 \leq s < \mu_{ij}} \bigwedge_{1 \leq r < r_{ij}(s)} x_i^s x_j^r \neq x_j^r x_i^s \right) \right]$$

Наборы $\mu_{ij}, r_{ij}(s), 1 \leq i \neq j \leq n, i \neq j$ вычисляются по дереву с метками \mathbb{A} . Целое положительное число μ_{ij} определяется в группе G равенством

$$\langle a_i^{\mu_{ij}} \rangle = \langle a_i \rangle \cap \langle a_j \rangle.$$

При каждом фиксированном $s, 1 \leq s < \mu_{ij}$ степень $r_{ij}(s)$ вычисляется как минимальная степень a_j такая, что $a_j^{r_{ij}(s)}$ коммутирует с a_i^s . То есть

$$\langle a_j^{r_{ij}(s)} \rangle = \langle a_j \rangle \cap C_G(a_i^s).$$

Заметим, что из редуцированности \mathbb{A} вытекает, что все $\mu_{ij} \neq \pm 1$. Формула $\Phi_{\mathbb{A}}$ истина на группе G . Следовательно, эта формула истина в группе H . Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ элементы, на которых выполняется формула $\Phi_{\mathbb{A}}$ в H . Эти элементы попарно различны.

Определим отображение $\varphi: G \rightarrow H$ на порождающих G так $\varphi(a_i) = x_i$. Так как соотношения (1.1) группы $G = \pi_1(\mathbb{A})$ при таком отображении переходят в соотношения группы H на элементах x_1, x_2, \dots, x_n , то φ продолжается до гомоморфизма. Докажем, что φ – вложение G в H .

Сначала докажем, что x_1, x_2, \dots, x_n – эллиптические элементы в группе H . Заметим, что x_i^l централизует x_j^k в H тогда и только тогда, когда a_i^l централизует a_j^k в G . Это сразу вытекает из того, что формула $\Phi_{\mathbb{A}}$ реализуется на элементах a_1, \dots, a_n в G и на элементах x_1, \dots, x_n в H . Поэтому цепочка строго возрастающих централизаторов вида

$$C_G(a_i) \subset C_G(a_i^{m_1}) \subset \dots \subset C_G(a_i^{m_{k_i}}) = G$$

всегда переходит в цепочку строго возрастающих централизаторов в H

$$C_H(x_i) \subset C_H(x_i^{m_1}) \subset \dots \subset C_H(x_i^{m_{k_i}}) = H \quad (3.10)$$

для подходящих m_1, \dots, m_{k_i} . Заметим, что если $h \in H$ – гиперболический элемент, то $C_H(h) = C_H(h^l)$ при $l \neq 0$ (см. следствие 3.2.13 и утверждение 3.2.10). Так как G неабелева, то длина цепочки централизаторов (3.10) не меньше 2, поэтому $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ не могут быть гиперболическими.

Так как $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ – эллиптические, то $x_i = h_i^{-1} b_i^{\alpha_i} h_i$ для подходящих b_i – вершинных элементов $\pi_1(\mathbb{B})$ (здесь b_i может быть равно b_j , при $i \neq j$), и $h_i \in H$.

Из того, что x_1, \dots, x_n связаны соотношениями $\Phi_{\mathbb{A}}$, получаем:

$$h_i^{-1} b_i^{\mu_{ij} \alpha_i} h_i = h_j^{-1} b_j^{\mu_{ji} \alpha_j} h_j, 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Поэтому слово $h_i h_j^{-1} b_j^{\mu_{ji} \alpha_j} h_j h_i^{-1}$ в H должно сокращаться до $b_i^{\mu_{ij} \alpha_i}$. Это возможно, только если в приведённой записи слово $h_i h_j^{-1}$ побуквенно централизует $b_j^{\mu_{ji} \alpha_j}$. Значит,

$$h_i h_j^{-1} \in C_H(b_i^{\mu_{ij} \alpha_i}) = C_H(b_j^{\mu_{ji} \alpha_j})$$

и $b_i^{\mu_{ij}\alpha_i} = b_j^{\mu_{ji}\alpha_j}$.

Кроме того, если $1 \leq s < \mu_{ij}, 1 \leq r < \mu_{ji}$, то $x_i^s x_j^r \neq x_j^r x_i^s$. Поэтому

$$b_i^{-s\alpha_i} \underline{h_i h_j^{-1} b_j^{-r\alpha_j} h_j h_i^{-1} b_i^{s\alpha_i} h_i h_j^{-1} b_j^{r\alpha_j} h_j h_i^{-1}} \neq 1.$$

Это возможно только в двух случаях. Либо $h_i h_j^{-1}$ не представимо в виде $u_{ij} v_{ij}$, где u_{ij} централизует $b_i^{s\alpha_i}$ побуквенно, а v_{ij} централизует $b_j^{r\alpha_j}$ побуквенно. Либо первое неверно, и $b_i^{-s\alpha_i} b_j^{-r\alpha_j} b_i^{s\alpha_i} b_j^{r\alpha_j} \neq 1$. Это равенство означает, что элементы $b_i^{-s\alpha_i}$ и $b_j^{-r\alpha_j}$ отделимы в группе H .

Теперь докажем, что $\text{Ker}\varphi = \{1\}$. Пусть $1 \neq w(a_1, \dots, a_n) \in \text{Ker}\varphi$. Значит, в приведённом виде $w = a_i^\alpha$ или $|w| > 1$ в группе G и соседние элементы отделимы.

Если $\varphi(w) = w(h_1^{-1} b_1^{\alpha_1} h_1, \dots, h_n^{-1} b_n^{\alpha_n} h_n) = 1$ в H , то либо это равенство имеет вид $h_1^{-1} b_1^{\alpha_1} h_1 = 1$ (это противоречит отсутствию кручения в H), либо $|w| > 1$.

Если все $h_i h_j^{-1}$ на стыках в подсловах $b_i^{s\alpha_i} h_i h_j^{-1} b_j^{r\alpha_j}$ не сокращаются полностью, то после приведения слова $\varphi(w)$ в H получим $\varphi(w) = 1$ и $|\varphi(w)| > 1$. Этого не может быть, поэтому есть стык:

$$\varphi(w) = \dots b_i^{s\alpha_i} h_i h_j^{-1} b_j^{r\alpha_j} \dots = \dots b_i^{s\alpha_i} b_j^{r\alpha_j} \dots = 1.$$

Если ни в одной такой паре $b_i^{s\alpha_i}, b_j^{r\alpha_j}$ нет дальнейших сокращений, то слово $\varphi(w)$ приведено в H , и мы имеем противоречие как раньше. Поэтому найдется пара $b_i^{s\alpha_i}, b_j^{r\alpha_j}$, элементы которой неотделимы в H . Значит, они лежат в одной циклической подгруппе и, следовательно, перестановочны. Поэтому a_i^s и a_j^r перестановочны, значит, попадают в одну циклическую подгруппу. Противоречие. \square

Следствие 3.4.4. Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — редуцированные деревья с метками, и соответствующие GBS группы $G = \pi_1(\mathbb{A}), H = \pi_1(\mathbb{B})$ неабелевы. Тогда существует алгоритм, распознающий универсальную (экзистенциальную) эквивалентность групп G и H .

Доказательство. По теореме 3.4.1 достаточно предложить алгоритм, решающий проблему вложения для обобщённых групп Баумслэга-Солитера, представленных деревьями с метками. Из результатов работы [34], в частности, следует, что если

G является фундаментальной группой дерева с метками, то группа G может быть представлена только конечным числом редуцированных графов с метками. В главе 5 мы покажем, что в этом случае проблема вложения алгоритмически разрешима. \square

Теперь мы обсудим критерий универсальной эквивалентности для GBS групп централизованной размерности 3, представленных деревьями с метками.

Доказательство теоремы 3.4.2. Можно считать, что \mathbb{A} — редуцированное дерево с метками. Так как $cdim(\pi_1(\mathbb{A})) = 3$, то есть цепочка из двух Z -максимальных поддеревьев и она максимальна.

Пусть a — висячая вершина дерева A с меткой λ на смежном ребре, тогда $\lambda \neq 1$ ввиду редуцированности \mathbb{A} . В этом случае $C_G(a) = \langle a \rangle$ и $\{a\}$ — Z -максимальное поддерево потому, что $Z(\langle a, b \rangle) = \langle a^\lambda \rangle = \langle b^\alpha \rangle$ — собственная подгруппа $\langle a \rangle$. Пусть вершины a и b смежны. Если есть метки $\beta \neq \alpha$ рядом с вершиной b , то $Z(\langle a, b, c \rangle) = \langle b^{\text{НОК}(\alpha, \beta)} \rangle$ — собственная подгруппа $Z(\langle a, b \rangle)$, и это противоречие с $cdim(\pi_1(\mathbb{A})) = 3$, кроме случая, когда $\beta | \alpha$. Аналогично несложно понять, что $\alpha | \beta$. Поэтому $\beta = \alpha$. Рассуждая подобным образом, поймем, что если валентность вершины больше 1, то все метки рядом с ней равны. Поэтому скольжениями и расширением, как на рис. 3.10, получим требуемое. \square

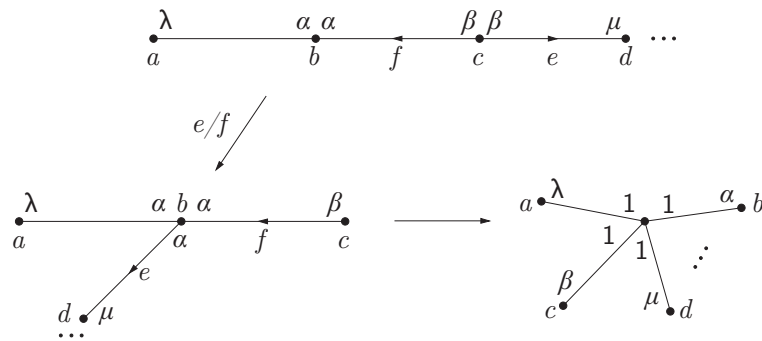


Рис. 3.10: Преобразование дерева с метками.

Лемма 3.4.5. Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $t \geq 2, n \geq 2$ и \mathbb{B} не изоморфна фундаментальной группе бутылки Клейна K . Если для всякого $1 \leq i \leq n$ найдется $1 \leq j \leq t$ такое, что λ_i делит μ_j , то $\pi_1(\mathbb{A})$ вкладывается в $\pi_1(\mathbb{B})$.

Доказательство. Построим \mathbb{C} и погружение графов с метками $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ так, что $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{C})$.

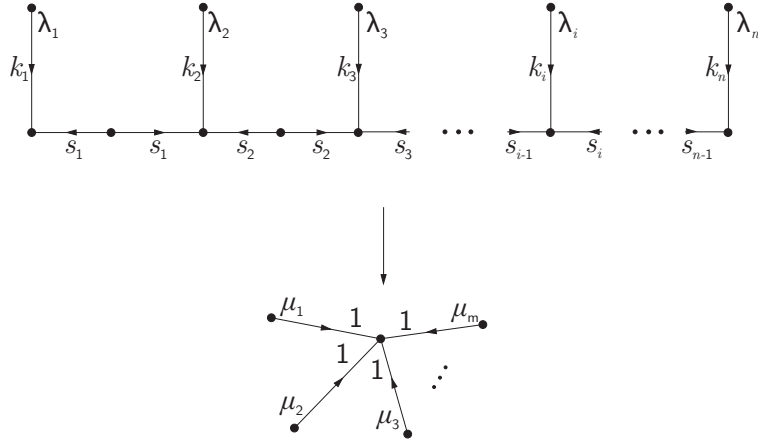


Рис. 3.11: Погружение при $m \geq 3$.

Если $m \geq 3$, то устроим погружение как на рис. 3.11. Если на ребре не написана метка, то она равна 1. Здесь $\mu_{k_i} = \alpha_i \cdot \lambda_i, i = 1, \dots, n$, метка k_i или s_i на середине ребра e графа определяет $\phi(e)$ и задаёт морфизм $\phi: C \rightarrow B$. При этом погружение устроено так, что $s_1 \notin \{k_1, k_2\}, s_i \notin \{k_i, k_{i+1}, s_{i-1}\}, i = 2, \dots, n - 1$.

Если же так выбрать очередное s_i невозможно (т.е. $m = 3$ и $\{k_i, k_{i+1}, s_{i-1}\} = \{1, 2, 3\}$), то локально подправим погружение как на рис. 3.12, при этом $r_{i-1} \notin \{k_i, k_{i-1}\}$ и $s_i \notin \{k_i, r_{i-1}\}$.

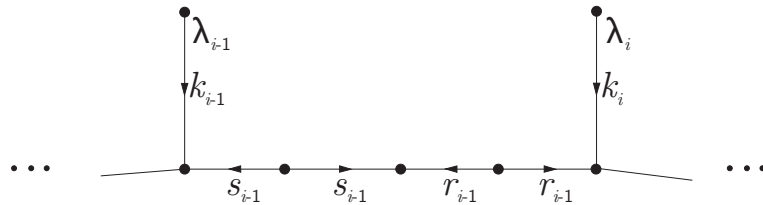


Рис. 3.12: Локальная подправка погружения при $m = 3$.

Если $m = 2$, то перенумеруем вершины A и B так, что $\mu_2 \geq 3$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k | \mu_1$, а $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n | \mu_2$. Погружение устроено так, как показано на рис. 3.13. При этом стрелки на ребрах погружаемого графа с метками указывает образ этого ребра – e или \bar{e} .

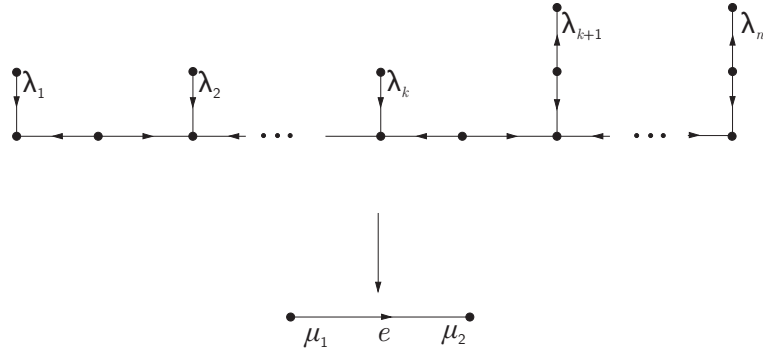


Рис. 3.13: Погружение при $m = 2$.

Заметим, что построенный граф с метками \mathbb{C} получается из \mathbb{A} с помощью серии расширений, поэтому, по замечанию 1.3.6, $\pi_1(\mathbb{A})$ вкладывается в $\pi_1(\mathbb{B})$. \square

Замечание 3.4.6. Если задано погружение $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, то вложение $\pi_1(\mathbb{A}) \hookrightarrow \pi_1(\mathbb{B})$ можно построить по Φ в явном виде.

Доказательство. В работе [22] развита теория накрытий для произвольных графов групп. Замечание 3.4.6 является следствием из утверждения 2.7 [22]. \square

Доказательство теоремы 3.4.3. Если условия делимости выполнены, то вложение строится через погружение, по лемме 3.4.5.

Если $\pi_1(\mathbb{A})$ вкладывается в $\pi_1(\mathbb{B})$, то по замечанию 1.3.6 найдется граф с метками \mathbb{C} такой, что $\pi_1(\mathbb{C}) \cong \pi_1(\mathbb{A})$, и существует погружение $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$. При этом \mathbb{C} получается из \mathbb{A} последовательностью схлопываний и расширений, поэтому множество простых делителей меток \mathbb{A} и меток \mathbb{C} совпадают. Ввиду свойств погружаемых графов с метками (1.2) метки \mathbb{C} делят метки \mathbb{B} . Следовательно, множество простых делителей \mathbb{A} является подмножеством множества простых делителей \mathbb{B} .

Из вида \mathbb{B} вытекает, что метки около каждой вершины \mathbb{C} равны между собой и равны либо 1, либо делят соответствующее μ_i , для подходящего $1 \leq i \leq m$. В этом случае число вершин с неединичными метками равно n , так как это число равно рангу $\pi_1(\mathbb{A})$. При этом каждая такая метка должна быть равна λ_i из-за того, что свободные произведения циклических групп изоморфны, только если число множителей совпадает, и множители соответственно изоморфны. Поэтому всякое λ_i делит подходящее μ_j . \square

Глава 4

Классы GBS групп

4.1 \mathcal{F}_π -аппроксимируемые GBS группы

В этом параграфе мы докажем критерий \mathcal{F}_π -аппроксимируемости.

Теорема 4.1.1. Пусть \mathbb{A} – граф с метками, представляющий GBS группу G . Группа G \mathcal{F}_π -аппроксимируема тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

- 1) $G \cong BS(1, n)$ и n удовлетворяет условиям утверждения 1.3.2;
- 2) $\Delta(G) = \{1\}$ и все метки \mathbb{A} – π -числа;
- 3) $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, все метки \mathbb{A} – π -числа и $2 \in \pi$.

Доказательство. Покажем необходимость одного из условий (1 – 3). Если G – \mathcal{F}_π -аппроксимируемая GBS группа, то G финитно аппроксимируема. По утверждению 1.3.3 получаем, что $G \cong BS(1, n)$ или $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$.

Если $G \cong BS(1, n)$, то условия утверждения 1.3.2 должны выполняться.

Пусть $\Delta(G) = \{1\}$, и G \mathcal{F}_π -аппроксимируема, тогда все подгруппы G \mathcal{F}_π -аппроксимируемы. Пусть метка n соответствует ребру e . Если начало и конца ребра e не совпадают, то

$$H = \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle \hookrightarrow G.$$

Из того, что группа H \mathcal{F}_π -аппроксимируема, вытекает, что n является π -числом [4].

Если начало и конец ребра e совпадают, то обе метки на них совпадают и равны n , так как $\Delta(G) = \{1\}$. Поэтому $BS(n, n)$ вкладывается в G . Тогда $BS(n, n)$ \mathcal{F}_π -аппроксимируема, и из теоремы 6 работы Д. И. Молдаванского [15] получаем, что n является π -числом.

Предположим, что $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, и G \mathcal{F}_π -аппроксимируема. Как раньше, получаем, что все метки на ребрах с различными концами являются π -числами. Если же концы совпадают, то либо $BS(n, n)$ \mathcal{F}_π -аппроксимируема (и тогда n является π -числом), либо $BS(n, -n)$ \mathcal{F}_π -аппроксимируема. В последнем случае кроме того, что n является π -числом, мы так же по теореме 6 [15] получаем, что $2 \in \pi$.

Проверим достаточность условий (1 – 3).

Если $G \cong BS(1, n)$ и n удовлетворяет условиям утверждения 1.3.2, то G \mathcal{F}_π -аппроксимируема по утверждению 1.3.2.

Предположим, что $\Delta(G) = \{1\}$ и все метки \mathbb{A} – π -числа. Тогда центр G циклический (это пересечение всех рёберных групп), и фактор-группа $G/Z(G)$ действует на том же дереве, что и T с конечными стабилизаторами. Порядки стабилизаторов являются π -числами, по теореме 1 [38]. Поэтому наименьшее общее кратное m этих порядков так же является π -числом. По утверждению 3.10 [22], в группе $G/Z(G)$ есть свободная подгруппа индекса m . Используя теорему Ремака [9], можно понять, что $G/Z(G)$ \mathcal{F}_π -аппроксимируема.

Если $g \in Z(G)$, то $g \notin G'$ (коммутант G' не пересекается с центром $Z(G)$). Поэтому $g \neq 1$ в G/G' . При этом абелева группа G/G' представляется в виде $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_d$ и d – π -число потому, что абелева группа G/G' задаётся соотношениями вида $x^k = y^l$, где k, l – π -числа. Тогда и G \mathcal{F}_π -аппроксимируема.

Пусть $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, все метки \mathbb{A} – π -числа, и $2 \in \pi$, тогда $H = Ker \Delta$ – подгруппа индекса 2, действует на том же дереве, что и G , и является GBS группой. Это действие описывается графом с метками \mathbb{B} , который является двулистным накрытием \mathbb{A} (см. утверждение 3.3.24 и рис. 3.8). Следовательно, все метки являются π -числами, и $\Delta(H) = \{1\}$. Поэтому H \mathcal{F}_π -аппроксимируема. Из того, что $2 \in \pi$, следует, что и G \mathcal{F}_π -аппроксимируема. \square

4.2 Группы n -узлов, действующие на деревьях

Если дан 1-узел, то можно построить копредставление Виртингера его группы с соотношениями вида $x_i^w = x_j$, где x_i, x_j — порождающие, а w — слово от них [61, 12]. Можно ли, зная копредставление группы G , понять, является ли эта группа группой узла? В настоящее время ответ неизвестен. Известны некоторые свойства групп узлов. Например, всякая группа узла является нормальным замыканием одного элемента. Кроме того, группа G/G' является бесконечной циклической. Известно, что $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$ [64]. М. Кервер доказал, что если конечно порождённая группа G удовлетворяет этим трём свойствам, то G является группой n -узла для всякого $n \geq 3$.

В этом параграфе мы опишем GBS группы, которые являются группами n -узлов при $n \neq 2$.

Теорема 4.2.1. *Пусть G — GBS группа. Тогда G является группой 1-узла тогда и только тогда, когда $G \cong T(p, q)$ для некоторых взаимно простых p, q .*

Теорема 4.2.2. *Пусть G — GBS группа, $G \not\cong \mathbb{Z}$. Тогда G является группой n -узла для $n \geq 3$ тогда и только тогда, когда G изоморфна факторгруппе либо группы $BS(m, m+1)$, где $m \geq 1$, либо группы $T(p, q)$ для некоторых взаимно простых p, q .*

В теореме 4.2.2 нет квантора для n потому, что множество групп 3-узлов совпадает с множеством n -узлов для каждого $n \geq 3$ [61]. Теорему 4.2.2 можно эффективно использовать потому, что все нециклические гомоморфные образы групп $BS(m, m+1)$ для $m \geq 1$ и $T(p, q)$ описаны в терминах графов с метками в леммах 4.2.6 и 4.2.7.

Лемма 4.2.3. *Пусть $G = \pi_1(\mathbb{A})$ — такая GBS группа, что $G/G' \cong \mathbb{Z}$. Тогда $\beta_1(A) \leq 1$.*

Доказательство. Из копредставления ясно, что

$$G/G' \cong \prod_{e \in E(\bar{A}) \setminus E(T)} \langle t_e \rangle \times \langle v \mid v \in V(A) \rangle \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(A)} \times H,$$

где подгруппа H группы G/G' порождена образами вершинных элементов. Поэтому $\beta_1(A) \leq 1$. □

Лемма 4.2.4. Пусть $G = \pi_1(\mathbb{A})$ — такая GBS группа, что $G = \langle\langle a \rangle\rangle_G$ для некоторого $a \in G$, и \mathbb{A} — дерево с метками. Тогда \mathbb{A} — сегмент с метками (см. рис. 4.1).

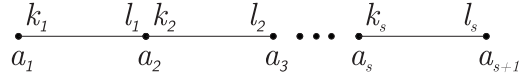


Рис. 4.1: Сегмент с метками.

Доказательство. Предположим противное. Тогда A содержит трезубец в качестве подграфа.

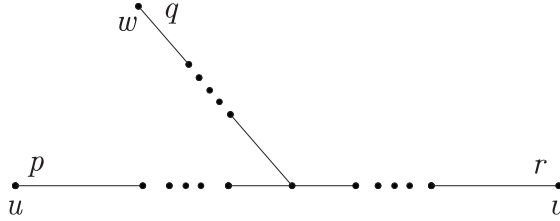


Рис. 4.2: Трезубец с метками.

Обозначим через N нормальное замыкание всех вершинных элементов A за исключением концов u, v, w . Тогда $G/N \cong \langle u, v, w \mid u^p = 1, v^r = 1, w^q = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q * \mathbb{Z}_r$ (см. рис. 4.2).

Если p, q, r попарно взаимно просты, то для некоторой нормальной подгруппы N_1 , содержащей N и подходящие степени u, v, w , имеем $G/N_1 \cong \mathbb{Z}_{p_1} * \mathbb{Z}_{q_1} * \mathbb{Z}_{r_1}$, где p_1, q_1, r_1 — разные простые числа. В этом случае G/N_1 не является нормальным замыканием одного элемента [58] и G тоже. Противоречие.

Предположим, что $(p, q) = d \neq 1$. Так как \mathbb{A} — дерево с метками, то существует сюръективный гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ (см. предложение 3.3 [67]). Поэтому $\text{Ker}(\varphi) \supseteq [G, G]$. Свойство $G = \langle a \rangle^G$ влечёт $G/G' \cong \mathbb{Z}$. Следовательно, мы имеем $(G/G')/N \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$. При $d \neq 1$, делящем p и q , группа $(G/G')/N$ не может быть циклической. \square

С помощью идеи плато [68] мы докажем следующую лемму.

Лемма 4.2.5. В условиях леммы 4.2.4 $l_i \perp k_j$ для всех i, j .

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $j \leq i$.

Выберем пару k_j, l_i так, что $j \leq i$, $(k_j, l_i) = d > 1$, и разность $i - j$ максимальна. Пусть p — простой делитель d . Тогда $k_x \perp p$ для всех $x < j$, и $l_y \perp p$ для всех $y > i$. Обозначим через r максимальное число такое, что $p | l_{r-1}$, $2 \leq r \leq j$. Если такого нет, то положим $r = 1$. Аналогично выберем минимальное f , $f \geq i + 1$ такое, что $p | k_f$.

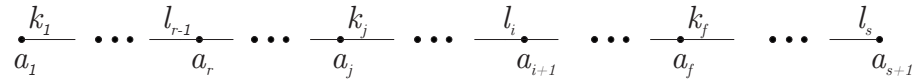


Рис. 4.3: Сегмент с метками, $j \leq i$.

Обозначим через N нормально замыкание:

$$N = \langle \langle a_1, \dots, a_{r-1}, a_{j+1}, \dots, a_i, a_{f+1}, \dots, a_{s+1}, a_r^p, \dots, a_j^p, a_{i+1}^p, \dots, a_f^p \rangle \rangle_G.$$

Тогда группа $G_1 = G/N$ изоморфна $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p$ потому, что из соотношений

$$\begin{aligned} a_m^{k_{m+1}} &= a_{m+1}^{l_{m+1}}, \\ a_m^p &= a_{m+1}^p = 1, \end{aligned}$$

и $p \perp k_{m+1}, p \perp l_{m+1}$ следует, что $a_m = a_{m+1}$, $m = r, \dots, j, i + 1, \dots, f$.

Поэтому $G_1/G'_1 \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Это противоречит $G/G' \cong \mathbb{Z}$.

2) Теперь предположим, что $i < j$, и $(k_j, l_i) = d > 1$.



Рис. 4.4: Сегмент с метками, $j > i$.

Пусть при этом разность $j - i$ минимальна. Тогда из пункта 1 вытекает $k_r \perp l_f$, $r = i + 1, \dots, j - 1$, $f = i, \dots, j - 1$ и $k_j \perp l_{i+1}, \dots, l_{j-1}$. В частности, для простого делителя p числа d мы имеем $p \perp k_{i+1}, \dots, k_{j-1}$ и $p \perp l_{i+1}, \dots, l_{j-1}$. Пусть

$$N = \langle \langle a_2, \dots, a_i, a_{j+1}, \dots, a_s, a_{i+1}^p, \dots, a_j^p \rangle \rangle_G.$$

Тогда, рассуждая как в пункте 1, мы получаем

$$G/N \cong \mathbb{Z}_{k_1} * \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_{l_s}.$$

Так как $k_1 \perp l_i$ и $k_j \perp l_s$, мы можем считать, что k_1, p, l_s — различные простые числа. Так как G является нормальным замыканием одного элемента, то и G/N должна быть такой. При этом $\mathbb{Z}_{k_1} * \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_{l_s}$ для различных простых чисел k_1, p, l_s не может быть нормальным замыканием одного элемента [58]. Это противоречие доказывает лемму. \square

Лемма 4.2.6. Пусть \mathbb{A} — сегмент с метками (см. рис. 4.1), и $G = \pi_1(\mathbb{A})$. Если $l_i \perp k_j$ для всех i, j , то G является гомоморфным образом подходящей группы торического узла.

Доказательство. Докажем по индукции, что a_2, \dots, a_{s-1} можно исключить из порождающих.

База индукции. Пусть группа задана порождающими $\{a_1, a_2, a_3\}$ и набором определяющих соотношений $a_1^{k_1} = a_2^{l_1}$, $a_2^{k_2} = a_3^{l_2}$. Выберем α и β так, что $\alpha l_1 + \beta k_2 = 1$. Тогда $a_2 = a_1^{\alpha k_1} a_3^{\beta l_2}$.

Шаг индукции. Пусть группа порождена элементами $\{a_1, a_2, \dots, a_{s+1}\}$. По индукции $a_i = w_i(a_1, a_s)$, где w_i — слово на буквах a_1, a_s , и $i = 2, \dots, s-1$. Выберем α и β так, что $\alpha l_1 \dots l_{s-1} + \beta k_s = 1$. Тогда $a_s = a_s^{\alpha l_1 \dots l_{s-1}} a_s^{\beta k_s} = a_1^{\alpha k_1 \dots k_{s-1}} a_{s+1}^{\beta l_s}$. Поэтому группа порождена a_1 и a_{s+1} . Причём выполнено соотношение $a_1^k = a_{s+1}^l$, где $k = k_1 \dots k_s \perp l = l_1 \dots l_s$. Поэтому группа G является гомоморфным образом группы $T(k, l)$. \square

Лемма 4.2.7. Если $G = \pi_1(\mathbb{A})$, $G = \langle\langle a \rangle\rangle_G$, и $\beta_1(A) = 1$, то \mathbb{A} можно выбрать циклом с взаимно простыми метками $k_i \perp l_j$ для всех i, j , $|\prod_{i=1}^s k_i - \prod_{i=1}^s l_i| = 1$ (см. рис. 4.5), и $G = \langle\langle t \rangle\rangle_G$ для подходящего рёберного элемента t .

Доказательство. Если \mathbb{A} — не цикл, то есть вершина u валентности 1. Так как \mathbb{A} — редуцированный граф с метками, то метка λ около u не равна ± 1 . Обозначим через

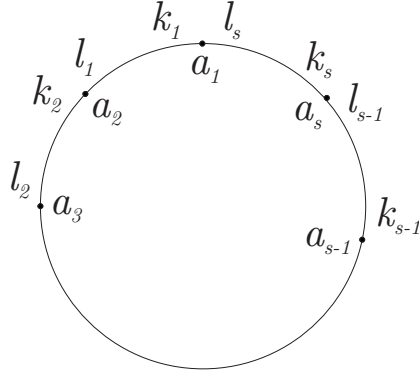


Рис. 4.5: Цикл с метками

N нормальное замыкание всех вершин, кроме u . Тогда $G/G'N \cong \langle t \rangle \times \langle u \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_\lambda$. Противоречие.

Пусть $d = (k_i, l_j)$ и p — простой делитель d и $j < i$. Обозначим через N нормальное замыкание $a_1, \dots, a_j, a_{j+1}^p, \dots, a_i^p, a_{i+1}, \dots, a_s$. Тогда $G/G'N \cong \langle t \rangle \times \langle a_{j+1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$, как в лемме 4.2.5. Противоречие. Случай $j \geq i$ рассматривается аналогично.

Пусть $k = \prod_{i=1}^s k_i$, $l = \prod_{i=1}^s l_i$. Если $k = 1$, то $s = 1$, так как \mathbb{A} редуцированный. Поэтому $G \cong \pi_1(\mathbb{A}) \cong BS(1, l)$, $G/G' \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{l-1}$. Следовательно, $l = 2$ и $BS(1, 2) = \langle\langle x \rangle\rangle_G$ удовлетворяет заключению леммы.

Если $k \neq 1$ и $l \neq 1$. Заметим, что в группе G выполнено равенство $t^{-1}a_i^k t = a_i^l$ для $1 \leq i \leq s$, и $l \perp k$. Поэтому в группе G/G' получаем $a_i^{k-l} = 1$, $i = 1, \dots, s$. Заметим, что

$$G/G' \cong \langle a_1, \dots, a_s \mid a_i^{k_i} = a_{i+1}^{l_i}, i = 1, \dots, s-1, a_s^{k_s} = a_1^{l_s}, [a_i, a_j] = 1, 1 \leq i < j \leq s \rangle \times \langle t \rangle.$$

Более того, из $k \perp k-l, l \perp k-l$ следует, что $a_i = a_1^{\alpha_i l_s \dots l_i}$, где $\alpha_i k_s \dots k_i \equiv_{k-l} 1$. Поэтому $G/G' \cong \langle a_1 \rangle \times \langle t \rangle$. Мы докажем, что все определяющие соотношения между a_1, \dots, a_s в группе G/G' следуют из $a_1^{k-l} = 1$:

$$a_i^{k_i} = a_{i+1}^{l_{i+1}} \iff a_1^{k_i \alpha_i l_s \dots l_i} = a_1^{\alpha_{i+1} l_s \dots l_{i+1} l_i}.$$

При этом $(k_i \alpha_i - \alpha_{i+1}) l_s \dots l_i \equiv_{k-l} 0$. Поэтому $G/G' \cong \mathbb{Z}_{k-l} \times \mathbb{Z}$, и $|k-l| = 1$.

Заметим, что $t^{-1}a_i^k t a_i^{-k} \in \langle\langle t \rangle\rangle_G$, поэтому $a_i^{l-k} = a_i^{\pm 1} \in \langle\langle t \rangle\rangle_G$ для всех i . Поэтому $G = \langle\langle t \rangle\rangle_G$. \square

Доказательство теоремы 4.2.1. Пусть GBS группа G является группой 1-узла.

Из утверждения 1.3.4 вытекает, что $G/G' \cong \mathbb{Z}$. Мы можем предполагать, что G не является элементарной. В самом деле, если G элементарна и неабелева, то это группа бутылки Клейна $\langle a, b | a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$, и порядок b в G/G' равен 2. Противоречие.

Пусть $G = \pi_1(\mathbb{A})$, тогда по лемме 4.2.3 либо A — дерево, либо $\beta_1(A) = 1$. Если A — дерево, то $\Delta(G) = \{1\}$. Следовательно, $Z(G) = \mathbb{Z}$ по предложению 2.5 [67]. Поэтому G — группа торического узла по следствию 6.3.6 [61].

Пусть теперь $\beta_1(A) = 1$. Заметим, что группа $G = \pi_1(\mathbb{A})$ финитно аппроксимируема по теореме 6.3.9 [61]. Поэтому из следствия 7.7 [69] вытекает, что либо $G \cong BS(1, n)$, либо $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$.

Если $G \cong BS(1, n)$, то $n = 2$ по лемме 4.2.7. Поэтому $G = BS(1, 2)$. Это противоречит [80].

Следовательно, $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$. Рассуждая как выше, можно считать $\Delta(G) = \{\pm 1\}$. Поэтому существуют $a, g \in G$ такие, что $gag^{-1} = a^{-1}$. Поэтому G/G' имеет кручение. Это противоречит $G/G' \cong \mathbb{Z}$. \square

Доказательство теоремы 4.2.2. Пусть GBS группа G является группой n -узла, $n \geq 3$.

Из утверждения 1.3.4 вытекает, что $G/G' \cong \mathbb{Z}$, $G = \langle\langle a \rangle\rangle_G$. Можно считать, что G не является элементарной GBS группой. По леммам 4.2.3–4.2.7 группа G является фундаментальной группой либо сегмента с метками (см. рис. 4.1) при $k_i \perp l_i$, либо цикла с метками (см. рис. 4.5) при $k_i \perp l_i$.

В первом случае G является гомоморфным образом группы $T(k, l)$ по лемме 4.2.6. Во втором случае G является гомоморфным образом группы Баумслага–Солитера $BS(k, k + 1)$ по теореме 1.1 [69].

Пусть теперь GBS группа G является гомоморфным образом ранга 2 некоторой группы Баумслага–Солитера $BS(m, m + 1)$.

Так как $m \perp m + 1$, то по теореме 1.1 [69] мы получаем, что $G = \pi_1(\mathbb{A})$, где \mathbb{A} является циклом, и $\prod_{i=1}^s k_i \perp \prod_{i=1}^s l_i$. Это значит, что \mathbb{A} — как в заключении леммы 4.2.7. Из [64] вытекает, что $H_2(G) = 0$. Теперь по лемме 4.2.7 мы получаем, что все свойства 1-4 утверждения 1.3.4 выполнены. Из утверждения 1.3.5 следует, что G группы n -узла, $n \geq 3$.

Наконец предположим, что GBS группа G является гомоморфным образом некоторой группы торического узла T .

Обозначим через $\phi : T \rightarrow G$ такой сюръективный гомоморфизм, что $G = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle$. Заметим, что x и y — эллиптические элементы в T (см. рис. 1.1). Поэтому $Comm_T x = Comm_T y = T$ по лемме 2.1 [67]. Следовательно, $Comm_G \phi(x) = Comm_G \phi(y) = G$. Значит, элементы $\phi(x)$ и $\phi(y)$ эллиптические. Из теоремы 1.1 [69] следует, что GBS группа ранга два, порождённая двумя эллиптическими элементами, представляется сегментом с метками. Из леммы 4.2.6 теперь следует, что G удовлетворяет условиям 1-4 утверждения 1.3.4. По утверждению 1.3.5 G является группой n -узла, $n \geq 3$. \square

4.3 Подгруппы конечного индекса небольших GBS групп

Напомним, что конечно порождённая группа G называется *большой* [75], если она имеет подгруппу конечного индекса, допускающую гомоморфизм на неабелеву свободную группу. Это сильное условие активно исследовалось, можно посмотреть свежие результаты по этой теме в [29].

Группа $BS(m, n)$ небольшая, если и только если $m \perp n$ [44, 68].

Пусть $a_n(G)$ — число подгрупп индекса n в группе G , $a_n^{\triangleleft}(G)$ — число нормальных подгрупп индекса n в группе G , а $N_n(G)$ — число классов сопряжённых подгрупп индекса n в группе G .

Подгруппы конечного индекса небольших групп Баумслэга–Солитера активно изучались. В 2005 году Е. Гелман [53] нашёл явную формулу для $a_n(BS(p, q))$. В 2008 году Дж. О. Баттон [30] нашёл формулу для $a_n^{\triangleleft}(BS(p, q))$. В 2010 году [42] получено явное описание подгрупп данного конечного индекса в группах $BS(p, q)$, и найдена формула для $N_n(BS(p, q))$.

В [68] Ж. Левитт доказал, что всякая небольшая GBS группа может быть представлена графом с метками \mathbb{A} , гомеоморфным окружности (см. рис. 4.6) и не содержащим собственного плато. Последнее условие эквивалентно тому, что $p_1 p_2 \dots p_k \perp$

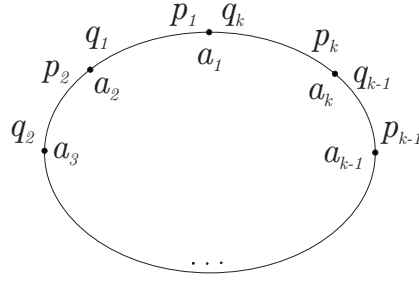


Рис. 4.6: Граф с метками \mathbb{A} небольшой GBS группы G

$q_1 q_2 \dots q_k$. Группа G может быть задана копредставлением

$$G \cong \langle a_1, a_2, \dots, a_k, d \mid a_i^{p_i} = a_{i+1}^{q_i}, i = 1, \dots, k-1, d^{-1} a_k^{p_k} d = a_1^{q_k} \rangle.$$

Обозначим через \mathbb{A}_m m -листное топологическое накрытие (см. лемму 6.4 [68]) графа с метками \mathbb{A} . Соответствующий граф имеет kt вершин и рёбер, при накрытии метки не меняются (см. рис. 4.7). Обозначим через K_m фундаментальную группу графа с метками \mathbb{A}_m . Из следствия 6.6 [68] следует, что всякая подгруппа конечного индекса группы $G = \pi_1(\mathbb{A})$ изоморфна K_m для подходящего m .

После теоремы 6.7 в [68] Ж. Левитт пишет, что было бы интересно получить обобщение результатов работ [30, 42, 53] для таких групп. В этом параграфе мы получаем такое обобщение и доказываем следующую теорему.

Теорема 4.3.1. Пусть G — небольшая нециклическая GBS группа, представленная графом с метками \mathbb{A} (см. рис. 4.6). Обозначим $p = p_1 p_2 \dots p_k$, $q = q_1 q_2 \dots q_k$. Следующие утверждения верны.

1) Существует биекция множества подгрупп конечного индекса группы G и множества подгрупп конечного индекса группы $BS(p, q)$. Эта биекция сохраняет индекс, нормальность и сопряжённость подгрупп. В частности, справедливы формулы:

$$a_n(G) = a_n(BS(p, q)) = \sum_{\substack{l|n \\ l \perp pq}} l,$$

$$a_n^\triangleleft(G) = a_n^\triangleleft(BS(p, q)) = \sum_{\substack{n=lm \\ l|p^m - q^m}} \text{НОД}(l, p - q),$$

$$N_n(G) = N_n(BS(p, q)) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{klms=n, \\ l \perp pq}} \mu(k) \cdot ls \cdot \text{НОД}(s, p^m - q^m).$$

2) Множество подгрупп индекса n в группе G совпадает с множеством подгрупп $K_{n,m}^s$, порождённых двумя элементами a_1^l и $d^m a_1^s$, где $n = lm$, $l, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $l \perp pq$, $s = 0, 1, \dots, l-1$. Все подгруппы $K_{n,m}^s$ различны.

3) Пусть n, l, m — натуральные числа, $lm = n$, и $l \perp pq$. Тогда для любых $s = 0, 1, \dots, l-1$ подгруппа $K_{n,m}^s$ изоморфна группе K_m . Группы K_m попарно неизоморфны.

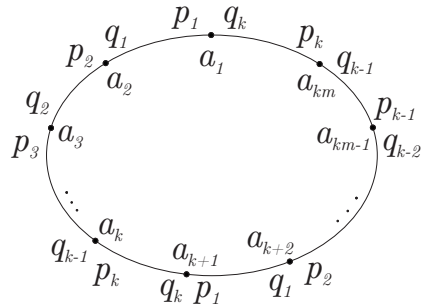


Рис. 4.7: t -листное топологическое накрытие \mathbb{A}_m графа с метками \mathbb{A}

Лемма 4.3.2. Если q и r — взаимно простые целые числа, то копредставления

$$\langle a, b, c \mid a^p = b^q, b^r = c^s, [a^{x_i}, b^{y_i}] = 1, i \in I \rangle \quad (4.1)$$

и

$$\langle a, c \mid a^{pr} = c^{qs}, [a^p, c^s] = 1, [a^{x_i}, c^{sy_i}] = 1, i \in I \rangle \quad (4.2)$$

задают изоморфные группы.

Доказательство. Используем преобразования Титце. Выпишем некоторые следствия соотношений (4.1):

$$[a^p, c^s] = 1, \quad (4.3)$$

$$a^{pr} = c^{qs}, \quad (4.4)$$

$$[a^{x_i}, c^{sy_i}] = 1, i \in I. \quad (4.5)$$

Добавим эти соотношения к (4.1). Так как $q \perp r$, то существуют целые α и β такие, что $\alpha q + \beta r = 1$. Поэтому

$$b = b^{\alpha q} \cdot b^{\beta r} = a^{\alpha p} \cdot c^{\beta s}.$$

Теперь мы можем исключить порождающий b и переписать соотношения:

$$a^p = b^q = a^{\alpha p q} \cdot c^{\beta q s}, \quad (4.6)$$

$$a^{\alpha p r} \cdot c^{\beta r s} = b^r = c^s, \quad (4.7)$$

$$[a^{x_i}, a^{\alpha p y_i} \cdot c^{\beta s y_i}] = 1, i \in I. \quad (4.8)$$

Так как $1 - \beta r = \alpha q$, то соотношение (4.7) эквивалентно

$$a^{\alpha p r} = c^{s(1-\beta r)} = c^{\alpha q s}.$$

Это соотношение следует из (4.4). Аналогично (4.6) эквивалентно

$$a^{\beta p r} = a^{p(1-\alpha q)} = c^{\beta q s}$$

и может быть получено из (4.4). Перепишем соотношение (4.8) так:

$$[a^{x_i}, c^{\beta s y_i}] = 1, i \in I.$$

В такой форме эти соотношения следуют из (4.5). После удаления b и соотношений (4.6–4.8) мы получаем требуемое копредставление. \square

Пусть \mathbb{A} — граф с метками, представляющий, небольшую нециклическую GBS группу G (см. рис. 4.6). Обозначим

$$P_i = \prod_{j=1}^i p_j, \quad Q_i = \prod_{j=i+1}^k q_j, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Лемма 4.3.3. *Всякая небольшая нециклическая GBS группа $G = \pi_1(\mathbb{A})$ изоморфна факторгруппе $BS(p, q)/N$, где*

$$N = \langle\langle [a^{P_i}, t a^{Q_i} t^{-1}], i = 1, \dots, k-1 \rangle\rangle_{BS(p, q)}.$$

Доказательство. Мы докажем индукцией по $r = 1, \dots, k - 1$, что

$$G \cong \langle a_1, a_{r+1}, \dots, a_k, d \mid a_1^{P_r} = a_{r+1}^{q_1 q_2 \dots q_r}, a_i^{P_i} = a_{i+1}^{q_i}, i = r + 1, \dots, k - 1, \\ d^{-1} a_k^{p_k} d = a_1^{q_k}, [a_1^{P_j}, a_{r+1}^{q_{j+1} q_{j+2} \dots q_r}] = 1, j = 1, 2, \dots, r - 1 \rangle. \quad (4.9)$$

База индукции. Соотношения $[a_1^{P_j}, a_{r+1}^{q_{j+1} q_{j+2} \dots q_r}] = 1, j = 1, 2, \dots, r - 1$ отсутствуют при $r = 1$. Поэтому (4.9) выполнено.

Шаг индукции. Предположим, что (4.9) выполнено для данного r . Чтобы доказать (4.9) для $r + 1$, мы применим лемму 4.3.2 и удалим a_{r+1} .

Для $r = k - 1$ мы получаем копредставление

$$G \cong \langle a_1, a_k, d \mid a_1^{P_{k-1}} = a_k^{q_1 q_2 \dots q_{k-1}}, d^{-1} a_k^{p_k} d = a_1^{q_k}, \\ [a_1^{P_j}, a_k^{q_{j+1} q_{j+2} \dots q_{k-1}}] = 1, j = 1, 2, \dots, k - 2 \rangle.$$

Если мы применим преобразование Титце, как раньше, и исключим

$$a_k = a_k^{\alpha(q_1 q_2 \dots q_{k-1})} \cdot a_k^{\beta p_k} = a_1^{\alpha P_{k-1}} \cdot d a_1^{\beta q_k} d^{-1},$$

то получим копредставление

$$G \cong \langle a_1, d \mid a_1^p = d a_1^q d^{-1}, [a_1^{P_j}, d a_1^{Q_j} d^{-1}] = 1, j = 1, 2, \dots, k - 1 \rangle.$$

Поэтому отображение $aN \mapsto a_1, tN \mapsto d$ из порождающих $BS(p, q)/N$ в порождающие G продолжается до требуемого изоморфизма. \square

Лемма 4.3.4. *Для всех целых x и y элемент*

$$[a^x, t a^y t^{-1}]$$

принадлежит H' для всякой подгруппы конечного индекса H группы $BS(p, q)$.

Доказательство. По теореме 1 [42] множество подгрупп индекса n группы $BS(p, q)$ совпадает с множеством подгрупп $H_{n,m}^s$, порождённых двумя элементами a^l и $t^m a^s$, где $n = lm$ для $l, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $l \perp pq$, $s = 0, 1, \dots, l - 1$.

Прямыми вычислениями можно проверить, что

$$[a^x, t a^y t^{-1}] = [(a^l)^{-\alpha}, t^m a^s \cdot (a^l)^{-\beta q^{m-1}} \cdot (t^m a^s)^{-1}],$$

где p делит $x + l\alpha$, и q делит $y + lp^{m-1}\beta$. \square

Пусть H — подгруппа группы G , обозначим через $L(G, H)$ множество всех подгрупп группы G , содержащих H . В частности, $L(G, \{1\})$ — множество всех подгрупп группы G . Следующая теорема о соответствии является основным инструментом этого параграфа.

Теорема 4.3.5. ([27, Теорема 3.3]) Пусть $\varphi: G \rightarrow G_1$ — гомоморфизм на группу G_1 . Тогда:

1) отображение $\psi: L(G, \ker\varphi) \rightarrow L(G_1, \{1\})$, отправляющее подгруппу из первого множества на её образ относительно φ , является биекцией;

2) эта биекция сохраняет индексы:

$$\text{если } \ker\varphi \leq H_1 \leq H_2, \text{ то } |H_2 : H_1| = |\varphi(H_2) : \varphi(H_1)|;$$

3) эта биекция сохраняет нормальность:

$$\text{если } \ker\varphi \leq H_1 \leq H_2, \text{ то } H_1 \trianglelefteq H_2 \Leftrightarrow \varphi(H_1) \trianglelefteq \varphi(H_2).$$

Замечание 4.3.6. В условиях теоремы 4.3.5 две подгруппы $H_1, H_2 \in L(G, \ker\varphi)$ сопряжены в G тогда и только тогда, когда подгруппы $\varphi(H_1), \varphi(H_2) \in L(G_1, \{1\})$ сопряжены в G_1 .

Доказательство теоремы 4.3.1. 1) Группа G изоморфна $BS(p, q)/N$, по лемме 4.3.3. Обозначим через L пересечение подгрупп конечного индекса группы $BS(p, q)$. Из леммы 4.3.4 следует, что $N \trianglelefteq L$. Пусть $\varphi: BS(p, q) \mapsto G$ — канонический гомоморфизм с ядром N . По теореме 4.3.5 существует биекция $\psi: L(BS(p, q), N) \rightarrow L(G, \{1\})$. Эта биекция сохраняет индексы, нормальность и классы сопряжённых элементов по теореме 4.3.5 и замечанию 4.3.6. Теперь формулы для $a_n(G)$, $a_n^{\triangleleft}(G)$ и $N_n(G)$ следуют из аналогичных формул для $BS(p, q)$ [30, 42, 53].

2) По теореме 1 [42] множество подгрупп индекса n группы $BS(p, q)$ совпадает с множеством подгрупп $H_{n,m}^s$. Каждая подгруппа $H_{n,m}^s$ порождена двумя элементами a^l и $t^m a^s$, где $n = lm$, $l, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $l \perp pq$, $s = 0, 1, \dots, l-1$. Все подгруппы $H_{n,m}^s$ различны. Отображение $aN \mapsto a_1, tN \mapsto d$ продолжается до изоморфизма $BS(p, q)/N \cong G$ по

лемме 4.3.3. Поэтому биекция ψ из пункта 1 отправляет подгруппу $H_{n,m}^s$ индекса n в подгруппу $K_{n,m}^s$ индекса n , порождённую двумя элементами a_1^l и $d^m a_1^s$, где $n = lm$, $l, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $l \perp pq$, $s = 0, 1, \dots, l-1$. Так как все подгруппы $H_{n,m}^s$ различны, то все подгруппы $K_{n,m}^s$ тоже различны.

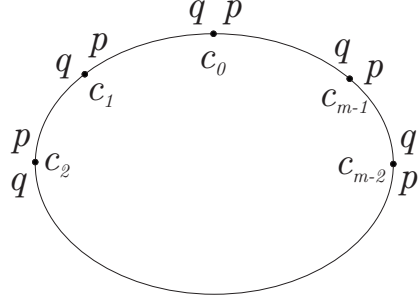


Рис. 4.8: Граф с метками \mathbb{B}_m небольшой GBS группы H_m

3) Обозначим через H_m небольшую GBS группу, представленную графом с метками \mathbb{B}_m (см. рис. 4.8). Она имеет следующее копредставление:

$$H_m \cong \langle c_0, c_1, \dots, c_{m-1}, h \mid c_i^q = c_{i+1}^p, i = 0, \dots, m-2, h^{-1}c_{m-1}^q h = c_0^p \rangle.$$

Если $n, l, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $lm = n$, $l \perp pq$, то по теореме 2 [42] подгруппа $H_{n,m}^s$ изоморфна H_m для всех $s = 0, 1, \dots, l-1$.

Из пункта 2 следует, что $K_{n,m}^s \cong H_{n,m}^s/N$. По лемме 4.3.4 $N \trianglelefteq (H_{n,m}^s)'$. Поэтому из леммы 4 [42] следует, что

$$K_{n,m}^s/(K_{n,m}^s)' \cong H_{n,m}^s/(H_{n,m}^s)' \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^m - q^m}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$K_r/(K_r)' \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^r - q^r}.$$

Из следствия 6.6 [68] вытекает, что группа $K_{n,m}^s$ изоморфна K_r , где $r = 1, 2, \dots$. Поэтому $K_{n,m}^s$ изоморфна K_r тогда и только тогда, когда $r = m$.

Заметим, что можно доказать, что $K_{n,m}^0$ изоморфна K_m , как в лемме 4.3.3 (используя преобразования Титце в обратную сторону), без привлечения следствия 6.6 [68].

□

Глава 5

Проблемы изоморфизма и вложения GBS групп

5.1 Проблема вложения GBS групп

В этом параграфе мы изучим проблему вложения GBS групп: определить алгоритмически, когда два графа с метками \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 задают такие GBS группы G_1 и G_2 , что G_1 изоморфно вкладывается в G_2 . Наш основной инструмент — теория накрытий для графов групп Х. Басса [22]. Точнее, мы используем замечание 1.3.6, которое следует из [22](предложение 2.7, следствие 4.6).

В этом параграфе мы будем пользоваться следующими определениями.

Пусть $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ — граф с метками. Вершина v графа A называется *специальной*, если $|St_A v| > 2$, или рядом с v есть метка, отличная от 1. Вершина v называется *общей*, если $|St_A v| = 2$, и обе метки рядом с v равны 1. Расширение называется *неестественным*, если $n = 1$ (см. рис. 1.2), и либо $St_A \partial_0(e) = \{e\}$, либо $St_A \partial_1(e) = \{\bar{e}\}$, где e — новое ребро. Если расширение не является неестественным, мы будем называть его *естественным*.

Граф с метками \mathbb{C} называется *расширением* \mathbb{A} , если найдётся последовательность естественных расширений, соединяющая \mathbb{A} и \mathbb{C} . Обозначим через $\Omega_N(\mathbb{A})$ множество таких графов с метками, что $\mathbb{B} \in \Omega_N(\mathbb{A})$ является расширением \mathbb{A} , и всякий редуцированный (т.е. без e, \bar{e} подпутей) путь e_1, e_2, \dots, e_{N+1} в B без самопересечений

содержит хотя одну специальную вершину.

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 5.1.1. *Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — такие графы с метками, что существует погружение $\mathbb{A} \mapsto \mathbb{B}$. Предположим, что $R(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_R\}$. Тогда можно алгоритмически найти такое натуральное число $N = N(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, что некоторый граф с метками $\mathbb{C} \in \bigcup_{i=1}^R \Omega_N(\mathbb{A}_i)$ погружается в \mathbb{B} .*

С помощью теоремы 5.1.1 несложно доказать следующую теорему.

Теорема 5.1.2. *Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — графы с метками. Если $|R(\mathbb{A})| < \infty$, то проблема вложения $\pi_1(\mathbb{A})$ в $\pi_1(\mathbb{B})$ алгоритмически разрешима.*

Если $\pi_1(\mathbb{A}) \not\cong BS(1, n)$, то можно алгоритмически распознать, верно ли, что $|R(\mathbb{A})| < \infty$ [32]. Решение проблемы вложения для $\pi_1(\mathbb{A}) \cong BS(1, n)$ описано [69], [95].

Сейчас мы обсудим определения и некоторые результаты работы [22], необходимые в этом параграфе.

Пусть $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ и $\mathbb{B} = (B, \mu)$ — графы с метками. Назовём набор $(\phi, (\sigma_a)_{a \in V(A)}, (\theta_e)_{e \in E(A)}, (\delta_e)_{e \in E(A)})$ морфизмом $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ графов с метками, если следующие утверждения выполнены:

- 1) $\phi: A \rightarrow B$ — морфизм графов;
- 2) гомоморфизмы вершинных и рёберных групп $\phi_a: \mathcal{A}_a \rightarrow \mathcal{B}_{\phi(a)}$ и $\phi_e = \phi_{\bar{e}}: \mathcal{A}_e \rightarrow \mathcal{B}_{\phi(e)}$ определены целыми числами σ_a и θ_e так, что $\phi_a: a \mapsto \phi(a)^{\sigma_a}$ и $\phi_e: e \mapsto \phi(e)^{\theta_e}$;
- 3) используя обозначение $\delta\Phi$ [22], мы можем выбрать множество (γ_a) в 2.7.3(a) [22] тривиальным ($\gamma_a = 1$ для всех $a \in V(A)$). Так как $\mathcal{B}_{\phi(\partial_0 e)}$ абелева, уравнения 2.7.3(b) [22] упрощаются:

$$\phi(a)^{\sigma_a \cdot \lambda_e} = \phi(a)^{\theta_e \cdot \mu_{\phi(e)}} \Leftrightarrow \sigma_a \cdot \lambda_e = \theta_e \cdot \mu_{\phi(e)} \Leftrightarrow \frac{\sigma_a \cdot \lambda_e}{\mu_{\phi(e)}} = \theta_e = \theta_{\bar{e}} = \frac{\sigma_b \cdot \lambda_{\bar{e}}}{\mu_{\phi(\bar{e})}} \quad (5.1)$$

для всех $e \in E(A)$, $a = \partial_0(e)$ и $b = \partial_0(\bar{e})$.

Обозначим множества $(\sigma_a)_{a \in V(A)}$, $(\theta_e)_{e \in E(A)}$ и $(\delta_e)_{e \in E(A)}$ через (σ) , (θ) и (δ) соответственно. В определении морфизма графов с метками отсутствуют условия на (δ) .

Для графов с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ и $\mathbb{B} = (B, \mu)$ морфизм $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ графов с метками называется *погружением*, если:

1) целые числа $\sigma_a, a \in V(A)$ и $\theta_e, e \in E(A)$ не равны нулю;

2) Для всех пар $(a, f), a \in V(A), f \in E(B)$ таких, что $\phi(a) = \partial_0 f$ отображение $\Phi_{a/f}: \left(\prod_{e \in \phi_{(a)}^{-1}(f)} \mathcal{A}_{a/e} \right) \rightarrow \mathcal{B}_{\phi(a)/f}$ инъективно (см. [22]).

Для морфизма $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ назовём пару $(a, f), a \in V(A), f \in E(B)$ *допустимой*, если $\phi(a) = \partial_0(f) = b$ и $\{e_1, e_2, \dots, e_k\} = \phi_{(a)}^{-1}(f)$. Для допустимых пар будем обсуждать условие

$$\lambda_{e_i} = \frac{\mu_f}{(\sigma_a, \mu_f)} \text{ при } i = 1, \dots, k, \text{ и } k \leq (\sigma_a, \mu_f). \quad (5.2)$$

Замечание 5.1.3. Если $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — погружение графов с метками, то условие 5.2 выполняются для всех допустимых пар (a, f) .

Доказательство. Обозначим $\mathcal{A}_{a/e_i} = \{[e]_{e_i}, [a]_{e_i}, \dots, [a^{\lambda_{e_i}-1}]_{e_i}\}$ для $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда, по определению погружения, отображение

$$\Phi_{a/f}([a^l]_{e_i}) = [b^{\sigma_a \cdot l} \cdot \delta_{e_i}]_f$$

для $l = 0, 1, \dots, \lambda_{e_i} - 1$ и $i = 1, \dots, k$ инъективно.

Напомним, что $\delta_{e_i} \in \mathcal{B}_b$. Поэтому $\delta_{e_i} = b^{r(e_i)}$ для подходящих целых чисел $r(e_i)$. Используем аддитивную форму записи для бесконечных циклических групп \mathcal{B}_f для $f \in E(B)$. Условие (2) погружения для пары (a, f) эквивалентно существованию целых чисел $r(e_i), 0 \leq r(e_i) < \mu_f$ таких, что все целые числа

$$\begin{aligned} & r(e_1), \sigma_a + r(e_1), 2\sigma_a + r(e_1), \dots, (\lambda_{e_1} - 1)\sigma_a + r(e_1), \\ & r(e_2), \sigma_a + r(e_2), 2\sigma_a + r(e_2), \dots, (\lambda_{e_2} - 1)\sigma_a + r(e_2), \\ & \dots \\ & r(e_k), \sigma_a + r(e_k), 2\sigma_a + r(e_k), \dots, (\lambda_{e_k} - 1)\sigma_a + r(e_k) \end{aligned}$$

различны по модулю μ_f .

Порядок элемента σ_a в аддитивной группе \mathbb{Z}_{μ_f} равен $\mu_f / (\sigma_a, \mu_f)$. Если $\lambda_{e_i} > \text{ord}(\sigma_a)$, то $j\sigma_a + r(e_i) \equiv_{\mu_f} r(e_i)$ для некоторого j . Поэтому $\Phi_{a/f}$ не может быть погружением. Следовательно $\lambda_{e_i} \leq \mu_f / (\sigma_a, \mu_f)$ для всех $i = 1, \dots, k$. Напомним, что

$\sigma_a \cdot \lambda_{e_i} = \theta_{e_i} \cdot \mu_f$ для всех $i = 1, \dots, k$, по условию (3) определения морфизма графов с метками. Тогда

$$\mu_f | \sigma_a \cdot \lambda_{e_i} \Leftrightarrow \frac{\mu_f}{(\sigma_a, \mu_f)} | \frac{\sigma_a}{(\sigma_a, \mu_f)} \cdot \lambda_{e_i} \Leftrightarrow \frac{\mu_f}{(\sigma_a, \mu_f)} | \lambda_{e_i}, i = 1 \dots, k.$$

Сравним $\lambda_{e_i} \leq \mu_f / (\sigma_a, \mu_f)$ и $\mu_f / (\sigma_a, \mu_f) | \lambda_{e_i}$. Получаем $\lambda_{e_i} = \mu_f / (\sigma_a, \mu_f)$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Для каждого ребра $e_i \in \phi_{(a)}^{-1}(f)$ образ $(A)_{a/e_i}$ при вложении $\Phi_{a/f}$ состоит из $\lambda_{e_i} = \mu_f / (\sigma_a, \mu_f)$ элементов $\mathcal{B}_{b/f} \cong \mathbb{Z}_{\mu_f}$. Поэтому если $k > (\sigma_a, \mu_f)$, то $\Phi_{a/f}$ не может быть инъекцией. \square

Замечание 5.1.4. Пусть $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — морфизм графов с метками. Предположим, что условия 1) и 2) погружения выполнены для всех допустимых пар (a, f) . Тогда Φ является погружением для подходящего выбора (δ) .

Доказательство. В обозначениях предыдущего доказательства нам нужно найти целые числа $r(e_i)$ для всех допустимых пар (a, f) и всех $e_i \in \phi_{(a)}^{-1}(f)$. Легко проверить, что если мы выберем $r(e_i) = i - 1$, то $\Phi_{a/f}$ — инъекция, и Φ — погружение. \square

Замечание 5.1.5. Пусть $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ — погружение, причём \mathbb{C} получается из редуцированного графа с метками \mathbb{A} с помощью расширений. Тогда существует граф с метками \mathbb{D} , который может быть получен из \mathbb{A} только с помощью естественных расширений, и погружается в \mathbb{B} .

Доказательство. Обозначим множество рёбер C , полученных с помощью естественных расширений, через $U(C)$. Удалим $U(C)$ из $E(C)$. Получим \mathbb{D} . \square

В дальнейшем будем использовать только естественные расширения.

Пусть $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ и $\mathbb{B} = (B, \mu)$ — графы с метками, и $\phi: A \rightarrow B$ — морфизм графов, будем говорить, что множество $(\sigma), (\theta)$ — минимальное множество, связанное с ϕ , если следующие утверждения выполнены:

1) набор $(\phi, (\sigma), (\theta), (\delta))$ определяет морфизм графов с метками для некоторого (δ) ;

2) если $\Psi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — морфизм графов с метками, соответствующий набору $(\phi, (\sigma'), (\theta'), (\delta'))$, то $\sigma_a | \sigma'_a$ для всех $a \in V(A)$, и $\theta_e | \theta'_e$ для всех $e \in E(A)$.

Если только первый пункт выполнен для набора $(\sigma), (\theta)$, то он называется *множеством, связанным с ϕ* .

Пусть A — граф, обозначим через A_0 граф, полученный из A отождествлением рёбер e и \bar{e} . Выберем максимальное поддерево T_{A_0} графа A_0 . Через T_A обозначим такой подграф A , что $(T_A)_0$ совпадает с T_{A_0} .

Пусть $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ — граф с метками, и $p = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — рёберный путь в A , определим

$$\Delta(p) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{\bar{e}_i}}{\lambda_{e_i}}.$$

Лемма 5.1.6. Пусть $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ и $\mathbb{B} = (B, \mu)$ — графы с метками, и $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — морфизм графов с метками. Если $p = (e_1, \dots, e_n)$ — рёберный путь в A , и $q = \phi(p) = (f_1 = \phi(e_1), \dots, f_n = \phi(e_n))$ — его образ в B , то $\Delta(p) \cdot \sigma_{\partial_1(e_n)} = \Delta(q) \cdot \sigma_{\partial_0(e_1)}$.

Доказательство. Из определения морфизма вытекает, что

$$\frac{\sigma_{\partial_0(e_i)} \cdot \lambda_{e_i}}{\mu_{f_i}} = \frac{\sigma_{\partial_1(e_i)} \cdot \lambda_{\bar{e}_i}}{\mu_{\bar{f}_i}}, \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, n.$$

Теперь легко заметить, что

$$\sigma_{\partial_1(e_n)} = \prod_{i=1}^n \frac{\mu_{\bar{f}_i}}{\mu_{f_i}} \cdot \frac{\lambda_{e_i}}{\lambda_{\bar{e}_i}} \cdot \sigma_{\partial_0(e_1)} = \frac{\Delta(q)}{\Delta(p)} \cdot \sigma_{\partial_0(e_1)}.$$

□

Лемма 5.1.7. Пусть \mathbb{A}, \mathbb{B} — графы с метками, и $\phi: A \rightarrow B$ — морфизм графов. Следующие утверждения выполнены:

1) Если A_0 — дерево, то существует (единственное с точностью до смены знака) минимальное множество $(\sigma), (\theta)$, связанное с ϕ ;

2) Если A_0 — не дерево, то минимальное множество, связанное с ϕ , существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sigma_{\partial_0 e} \cdot \lambda_e}{\mu_{\phi(e)}} = \frac{\sigma_{\partial_1 e} \cdot \lambda_{\bar{e}}}{\mu_{\phi(\bar{e})}}, \text{ для всех } e \in E(A) \setminus E(T_A),$$

где $\sigma_{\partial_0 e}$ и $\sigma_{\partial_1 e}$ для T_A , $\phi|_{T_A}$ определены в пункте 1);

3) Если множество, связанное с ϕ , существует, то существует (единственное с точностью до смены знака) минимальное множество связанное с ϕ ;

4) Если $(\sigma), (\theta)$ — минимальное множество, связанное с ϕ , то

$$\max\{|\sigma_a|, |\theta_e| \mid a \in V(A), e \in E(A)\} \leq (M(\mathbb{A}) \cdot M(\mathbb{B}))^{2 \cdot |V(A)|},$$

где $M(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda_e| \mid e \in E(A)\}$.

Доказательство. 1) Понятно, что

$$|(\theta) \cup (\sigma)| = |V(A_0)| + |E(A_0)| = 2|E(A_0)| + 1.$$

Условие 3) определения морфизма графов с метками эквивалентно системе $2|E(A_0)|$ линейных диофантовых уравнений. Эта система однородна, и её ранг равен $2|E(A_0)|$. Поэтому пространство решений одномерно. Понятно, что на этой прямой можно найти единственный (с точностью до смены знака) целочисленный вектор, координаты которого взаимно просты в совокупности.

2) Необходимость следует из пункта 3) определения морфизма графов с метками. Докажем достаточность. Надо дополнить множество $(\sigma), (\theta)$, определённое для T_A . Точнее, надо найти θ_e для $e \in E(A) \setminus E(T_A)$. С помощью 1) и уравнений 2) мы можем определить

$$\theta_e = \theta_{\bar{e}} = \frac{\sigma_{\partial_0 e} \cdot \lambda_e}{\mu_{\phi_e}} = \frac{\sigma_{\partial_1 e} \cdot \lambda_{\bar{e}}}{\mu_{\bar{\phi}_e}} \text{ для всех } e \in E(A) \setminus E(T_A).$$

При этом значения (θ) корректно определены. Наконец мы поучим минимальное множество из найденных $(\sigma), (\theta)$ с помощью умножения или деления на подходящее целое число.

3) Аналогично 1).

4) Выберем вершину a графа A так, что $|\sigma_a| = \min\{|\sigma_c| \mid c \in V(A)\}$. Если b — вершина графа A , то обозначим через p_b некоторый путь в A , соединяющий a и b . Из леммы 5.1.6 вытекает, что $\sigma_b = \sigma_a \cdot R_b$, где $R_b = \Delta(\phi(p_b)) / \Delta(p_b)$. Числитель R_b делит $\prod_{i=1}^n \lambda_{e_i} \cdot \mu_{\phi(\bar{e}_i)}$, где $p_b = (e_1, \dots, e_n)$. Поэтому $\max\{|\sigma_a|, |\theta_e|\} \leq (M(\mathbb{A}) \cdot M(\mathbb{B}))^{|V(A)|} \cdot |\sigma_a|$. Все σ_a и θ_e являются целыми тогда и только тогда, когда знаменатели дробей R_b делят σ_a . Знаменатель каждой R_b делит $\prod_{i=1}^n \lambda_{\bar{e}_i} \cdot \mu_{\phi(e_i)}$. Поэтому $|\sigma_a| \leq (M(\mathbb{A}) \cdot M(\mathbb{B}))^{|V(A)|}$. \square

Пусть n — целое ненулевое число, и $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — его разложение на простые множители. Обозначим через $\log n$ сумму $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$.

Для графа с метками \mathbb{A} определим $\log \mathbb{A} = \log \prod_{e \in E(A)} \lambda_e$.

Предложение 5.1.8. *Всякое расширение \mathbb{C} графа с метками \mathbb{A} имеет не более $S(\mathbb{A}) = \log \mathbb{A} + (|E(A)| - 2)|V(A)|$ специальных вершин.*

Доказательство. Если $|St_A a| = n > 2$, то с помощью расширений мы можем разделить эту звезду на не более, чем $n - 2$ трезубцев (см. рис. 5.1). Понятно, что расширения не могут увеличить $\log \mathbb{A}$. Поэтому число таких специальных вершин, что $\lambda_e \neq 1$ для некоторого $e \in St_A a$ не превосходит $\log \mathbb{A}$. При этом число таких специальных вершин, что $|St_A a| > 2$ не превосходит $(|E(A)| - 2) \cdot |V(A)|$. \square

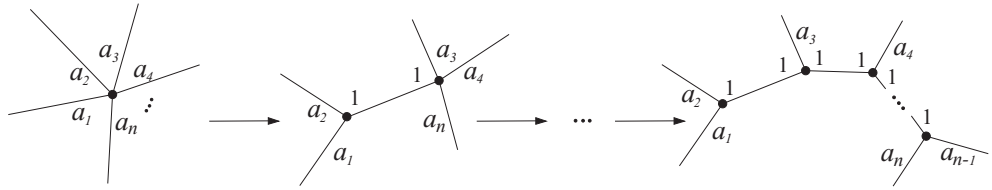


Рис. 5.1: Разделение звезды на трезубцы.

Предложение 5.1.9. *Мощность $\Omega_N(\mathbb{A})$ ограничена в терминах \mathbb{A} .*

Доказательство. Всякий граф с метками из $\Omega_N(\mathbb{A})$ имеет k специальных вершин, где $|V(A)| \leq k \leq S(\mathbb{A})$. Если $\mathbb{B} \in \Omega_N(\mathbb{A})$, и число специальных вершин \mathbb{B} равно k , то с помощью схлопываний из \mathbb{B} можно получить такой граф с метками \mathbb{C} , что $|V(C)| = k$, все его вершины специальные, и $\mathbb{C} \in \Omega_N(\mathbb{A})$.

Для данного k можно найти ограничение сверху на число графов с метками в $\Omega_N(\mathbb{A})$ с ровно k специальными вершинами и без общих вершин. Можно предполагать, что каждая новая специальная вершина появляется с одним новым ребром при расширении. Число графов с k вершинами и $|E(\mathbb{A})| + (k - |V(\mathbb{A})|) \cdot 2$ ребрами очевидно ограничено в терминах A . Так как рёбер и меток ограниченное число, то и число возможных расстановок меток ограничено.

Добавляя к одному из описанных выше графов с метками не более N общих вершин между парами специальных вершин, мы можем получить всякий граф с метками из $\Omega_N(\mathbb{A})$. Число таких расширений ограничено. Отсюда вытекает требуемое. \square

Пусть \mathbb{B} — граф с метками, и $q = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — такой путь в графе B , что $\Delta(q) = \alpha/\beta$, где $\alpha \perp \beta$. Обозначим через γ_q такое минимальное положительное целое число, что все числа

$$\beta\gamma_q \cdot \frac{1}{\mu_{f_1}}, \beta\gamma_q \cdot \frac{\mu_{\bar{f}_1}}{\mu_{f_1} \cdot \mu_{f_2}}, \dots, \beta\gamma_q \cdot \frac{\mu_{\bar{f}_1} \cdot \dots \cdot \mu_{\bar{f}_i}}{\mu_{f_1} \cdot \dots \cdot \mu_{f_{i+1}}}, \dots, \beta\gamma_q \cdot \frac{\mu_{\bar{f}_1} \cdot \dots \cdot \mu_{\bar{f}_{n-1}}}{\mu_{f_1} \cdot \dots \cdot \mu_{f_n}}$$

целые. Понятно, что $\gamma_q | \mu_{f_1} \cdot \dots \cdot \mu_{f_n}$.

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству леммы 5.1.7.

Предложение 5.1.10. Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — графы с метками, $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — морфизм графов с метками, и множество целых чисел $(\sigma), (\theta)$ связано с ϕ . Пусть \mathbb{A}_1 — граф с метками, полученный из \mathbb{A} добавлением пути $p = (e_1, \dots, e_n)$ к графу A так, что $\lambda_{e_i} = \lambda_{\bar{e}_i} = 1, i = 1, 2, \dots, n$. Расширим морфизм ϕ на граф A_1 так, что $\phi(p) = q$, где q — цикл. Если $\Delta(q) = \alpha/\beta$, где $\alpha \perp \beta$, то мы можем найти числа $\theta_{e_i}, \sigma_{\partial_1 e_i}$ для всех $i = 1, \dots, n-1$ и θ_{e_n} с помощью 5.1. Эти числа целые тогда и только тогда, когда $\beta \cdot \gamma_q | \sigma_{\partial_0 e_1}$.

Предложение 5.1.11. Предположим, что $\frac{\alpha}{\beta} \in \langle \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_k}{\beta_k} \rangle \subseteq \mathbb{Q}$, где $\alpha_i \perp \beta_i$ для всех $i = 1, \dots, k$. Обозначим $\prod_{i=1}^k (\frac{\alpha_i}{\beta_i})^{s_i}$ через $\frac{\alpha}{\beta}$, где $\alpha \perp \beta$. Положим $S = \sum_{i=1}^k s_i$ и $d = \log(\prod_{i=1}^k \alpha_i \beta_i)$. Предположим, что $\prod_{i=1}^k \alpha_i \beta_i$ имеет ровно P простых делителей p_1, p_2, \dots, p_P . Обозначим через $\tau_i: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ отображение, определённое так:

$$\tau_i \left(\frac{m}{n} \right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{\alpha_i}{\beta_i}, i = 1, \dots, k.$$

Тогда найдется последовательность $i_1, \dots, i_S \in \{1, \dots, k\}$ такая, что

$$(\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \cdot \dots \cdot \tau_{i_l}) \left(\beta \cdot \prod_{i=1}^P p_i^d \right) \in \mathbb{Z}, \text{ для всех } l = 1, 2, \dots, S, \quad (5.3)$$

и

$$(\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \cdot \dots \cdot \tau_{i_S}) \left(\beta \cdot \prod_{i=1}^P p_i^d \right) = \alpha \cdot \prod_{i=1}^P p_i^d. \quad (5.4)$$

Доказательство. Разлагая числители и знаменатели рациональных чисел на простые множители, определим отображение $\psi: \langle \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_k}{\beta_k} \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^P$ и положим $\vec{v}_i = \psi(\alpha_i/\beta_i)$. Разложим $\vec{v} = \vec{v}^+ + \vec{v}^-$ так, что

$$\vec{v}^+, -\vec{v}^- \in \mathbb{Z}_+^P = \{(r_1, \dots, r_P) | r_i \geq 0, i = 1, \dots, P\}.$$

Так как $\alpha_i \perp \beta_i$, то мы получим $\psi(\alpha_i) = \vec{v}_i^+$ и $\psi(\beta_i) = \vec{v}_i^-$. Обозначим через $\mathcal{Z} = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle_{\mathbb{Z}}$ целочисленную оболочку векторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. Отображение $\psi: \langle \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_k}{\beta_k} \rangle \rightarrow \mathcal{Z}$ является биекцией, и \mathcal{Z} — решётка в \mathbb{R}^P . Положим $\vec{w} = \psi(\frac{\alpha}{\beta}) = \sum_{i=1}^k s_i \vec{v}_i$, тогда $\psi(\beta) = \vec{w}^-$, и $\psi(\alpha) = \vec{w}^+$. Обозначим через $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z} - \vec{w}^-$ сдвиг решётки \mathcal{Z} на вектор $-\vec{w}^-$. Так как $\vec{w}^+ + \vec{w}^- \in \mathcal{Z}$, то $\vec{w}^+ \in \mathcal{Z} - \vec{w}^-$ и $-\vec{w}^- \in \mathcal{Z} - \vec{w}^-$.

Будем говорить, что две точки решётки \mathcal{Z} (и решётки \mathcal{Z}') соединены ребром, если соответствующее рациональное число может быть получено из другого с помощью τ_i . Чтобы доказать предложение, мы найдём путь в решётке \mathcal{Z} , соединяющий $-\vec{w}^-$ и \vec{w}^+ , и такой, что каждая его точка содержится в $\mathbb{Z}_{\geq -d}^P = \{(r_1, \dots, r_P) | r_i \geq -d\}$. Обозначим через $R = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle_{\mathbb{R}}$ подпространство \mathbb{R}^k , порождённое $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. Обозначим сдвиг $R - \vec{w}^-$ через R' . Тогда $R \supset \mathcal{Z}$ и $R' \supset \mathcal{Z}'$.

Точки $-\vec{w}^-$ и \vec{w}^+ соединены в R' сегментом $\mathcal{M} = \{t \cdot \vec{w}^+ + (1-t) \cdot (-\vec{w}^-) | t \in [0, 1]\}$. Так как R' и \mathbb{R}_+^P выпуклы, то $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^P$. Поэтому $t\vec{w}^+ + (1-t)(-\vec{w}^-) \in \mathbb{R}_+^P$ для всех $t \in [0, 1]$. Сегмент \mathcal{M} проходит через базовые параллелепипеды решётки \mathcal{Z}' . Заметим, что всякий редуцированный путь по вершинам этого параллелепипеда является искомым. Для этого достаточно понять, что для всякой точки этих параллелепипедов существует точка в \mathcal{M} на расстоянии не более диаметра параллелепипеда, и этот диаметр равен d . \square

Циклы q_1, q_2, \dots, q_k с общим началом и концом a в графе A называются *базовыми циклами*, если любой цикл q в A с началом и концом a может быть представлен композицией циклов q_1, q_2, \dots, q_k (с точностью до удаления и вставки путей e, \bar{e}), и число k минимально (оно равно первому числу Бетти графа A).

Предложение 5.1.12. Пусть \mathbb{B} — граф с метками, и m_1, \dots, m_k — базовые циклы на вершине $a \in V(\mathbb{B})$, и $\Delta(m_i) = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$, $\alpha_i \perp \beta_i$, $i = 1, \dots, k$. Положим $d =$

$\log(\prod_{i=1}^k \alpha_i \beta_i)$. Для любых целых чисел s_1, s_2, \dots, s_k найдется цикл q такой, что $\partial_0 q = \partial_1 q = a$, $\Delta(q) = \prod_{i=1}^k (\frac{\alpha_i}{\beta_i})^{s_i}$, и $\gamma_q | \text{НОК}(\gamma_{m_1}, \dots, \gamma_{m_k}) \prod_{i=1}^P p_i^d$.

Доказательство. Обозначим $\Delta(q) = \prod_{i=1}^k (\frac{\alpha_i}{\beta_i})^{s_i} = \frac{\alpha}{\beta}$ и положим $S = \sum_{i=1}^k s_i$. По предложению 5.1.11 найдётся последовательность i_1, \dots, i_S , удовлетворяющая (5.3) и (5.4). Чтобы доказать, что $q = m_{i_1} \circ m_{i_2} \circ \dots \circ m_{i_S}$ — подходящий путь, мы проверим, что $\text{НОК}(\gamma_{m_1}, \dots, \gamma_{m_k}) \prod_{i=1}^P p_i^d$ удовлетворяет всем условиям γ_q , за исключением минимальности. Используя (5.3), (5.4) и аналог 5.1.10, можно понять, что достаточно проверить, что

$$\beta_{i_j} \cdot \gamma_{m_{i_j}} | \Delta(m_{i_1}) \dots \Delta(m_{i_{j-1}}) \cdot \beta \cdot \text{НОК}(\gamma_{m_1}, \dots, \gamma_{m_k}) \cdot \prod_{i=1}^P p_i^d$$

для всех $j = 1, \dots, S$. Это вытекает из двух фактов. Во-первых, $\gamma_{m_{i_j}} | \text{НОК}(\gamma_{m_1}, \dots, \gamma_{m_k})$ для всех $j = 1, \dots, S$. Во-вторых, $\Delta(m_{i_1}) \dots \Delta(m_{i_j}) \beta \prod_{i=1}^P p_i^d$ — целое число. Поэтому $\beta_{i_j} | \Delta(m_{i_1}) \dots \Delta(m_{i_{j-1}}) \beta \prod_{i=1}^P p_i^d$ для всех $j = 1, \dots, S$. \square

В любом метрическом пространстве обозначим через $B_r(x)$ замкнутый шар радиуса r с центром x .

Предложение 5.1.13. Пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$ — такие векторы, что $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_l$ линейно независимы. Если система уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \vec{a}_i \cdot \vec{x} = b_i, & i = 1, \dots, l \\ \vec{a}_i \cdot \vec{x} \leq b_i, & i = l+1, \dots, m \end{cases} \quad (5.5)$$

разрешима в \mathbb{R}^n , то существует подмножество $I \subseteq \{l+1, \dots, m\}$ такое, что система уравнений

$$\begin{cases} \vec{a}_i \cdot \vec{x} = b_i, & i = 1, \dots, l \\ \vec{a}_i \cdot \vec{x} = b_i, & i \in I \end{cases} \quad (5.6)$$

разрешима в \mathbb{R}^n , и решения (5.6) образуют подмножество решений (5.5).

Доказательство. Обозначим через P множество решений (5.5) и через P_i для $i = l+1, \dots, m$ множество решений уравнения $\vec{a}_i \cdot \vec{x} = b_i$. Пусть x_0 — решение (5.5). Обозначим через r_1 минимальное вещественное число r такое, что существует $k, l+1 \leq k \leq m$

и $B_r(x_0) \cap P \cap P_k \neq \emptyset$. Выберем $l_1, l+1 \leq l_1 \leq m$ такое, что $B_{r_1}(x_0) \cap P \cap P_{l_1} \neq \emptyset$.

Тогда система уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \vec{a}_i \cdot \vec{x} = b_i, & i \in \{1, \dots, l, l_1\} \\ \vec{a}_i \cdot \vec{x} \leq b_i, & i \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{l_1\} \end{cases} \quad (5.7)$$

разрешима. Исключим такие неравенства (5.7), которые тождественно верны для всех x , удовлетворяющих $\vec{a}_i \cdot \vec{x} = b_i, i \in \{1, \dots, l, l_1\}$. Получим эквивалентную систему. Число неравенств в (5.7) меньше, чем в (5.5), и решения (5.7) являются решениями (5.5). Продолжая действовать аналогично, мы получим искомую систему. \square

Лемма 5.1.14. Пусть A — $m \times n$ матрица над \mathbb{Z} , и $b \in \mathbb{R}^m$. Если система диофантовых уравнений $A \cdot \vec{x} = b$ разрешима над \mathbb{R} , то существует решение $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, ограниченное в терминах A и b .

Доказательство. Так как система $A \cdot \vec{x} = b$ разрешима, то $rk(A) = rk(A|b) = k$. Без потери общности мы можем предполагать, что первые k строк и столбцов образуют базисный минор в A (обозначим его B). Тогда мы можем выбрать решение так, что

$$x = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0), \text{ и } B \cdot (y_1, y_2, \dots, y_k)^T = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T.$$

Положим $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$ и $\vec{c} = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T$. Так как $B \in GL_k(\mathbb{Z})$, то $\vec{y} = B^{-1} \cdot \vec{c}$. Заметим, что $\|B^{-1}\|$ ограничена в терминах A . \square

Лемма 5.1.15. Пусть A — $m \times n$ матрица над \mathbb{Z} ранга $rk(A) = k$. Обозначим через P ядро A . Существует такая константа R , ограниченная в терминах A , что для всякого $z \in P$ шар $B_R(z)$ содержит целочисленное решение системы $A \cdot \vec{x} = 0$.

Доказательство. Как и раньше, предполагаем, что первые k строк и столбцов образуют базисный минор в A (обозначим его B). Исключим линейно зависимые уравнения, считаем, что $m = k$. Обозначим $(k+i)$ -ый столбец A через $\vec{a}_i, i = 1, 2, \dots, n-k$. Тогда \vec{a}_i принадлежит линейной оболочке первых k столбцов A . Поэтому системы $B \cdot \vec{x}_i = \vec{a}_i$ разрешимы для всех $i = 1, 2, \dots, n-k$. Так как $B \in GL_k(\mathbb{Z})$, и $\vec{x}_i = B^{-1} \cdot \vec{a}_i, \vec{a}_i \in \mathbb{Z}^m$, то $\det(B) \cdot \vec{x}_i$ — целочисленный вектор. Более того, векторы $\vec{y}_i = (\vec{x}_i^T, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0), i = 1, \dots, n-k$ (-1 стоит на месте $(k+i)$) образуют базис P . Используя ограничение на $\|B^{-1}\|$, мы ограничим $|\det(B) \cdot y_i|$. Векторы

$\vec{z}_i = \det(B) \cdot \vec{y}_i, i = 1, \dots, n - k$ образуют целочисленный базис P . Целочисленная оболочка этого базиса является решёткой в P . Диаметр этой решётки ограничен в терминах A . Это показывает, как выбрать искомую константу R . \square

Предложение 5.1.16. Пусть A — $m \times n$ матрица над \mathbb{Z} , и $b \in \mathbb{Z}^n$. Если система $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ разрешима, то существует целочисленное решение \vec{x}_0 , длина которого ограничена в терминах A и b .

Доказательство. Из леммы 5.1.14 следует, что найдется решение $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ системы $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, ограниченное в терминах A и b . Тогда система $A \cdot (\vec{x} - \vec{z}) = 0$ удовлетворяет гипотезе леммы 5.1.15. Поэтому шар $B_R(\vec{z})$ содержит хоть одно целочисленное решение системы $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ для всякого решения \vec{z} системы $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. \square

Лемма 5.1.17. Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — графы с метками, A — дерево, и $\phi: A \rightarrow B$ — морфизм графов. Минимальное множество $(\sigma), (\theta)$, связанное с ϕ , можно вычислить алгоритмически. При этом число $L(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ делений и умножений в алгоритме ограничено в терминах A и B .

Доказательство. Чтобы вычислить множество $(\sigma), (\theta)$, связанное с ϕ , положим

$$\sigma_a = \left(\prod_{f \in E(B)} \mu_f \right)^{|V(A)|} \prod_{e \in E(A)} \lambda_e$$

для некоторой вершины $a \in V(A)$. По определению морфизма графов групп, вычислим $\theta_e = \theta_{\bar{e}}$ для всех рёбер с началом a . Потом вычисляем σ_b для всех вершин соединённых с a ребром и так далее. Рано или поздно мы вычислим множество $(\sigma), (\theta)$, связанное с ϕ (первоначальный выбор σ_a гарантирует целочисленность множества $(\sigma), (\theta)$). Понятно, что количество операций операций ограничено в терминах A и B .

Чтобы найти минимальное множество, связанное с ϕ , надо поделить элементы найденного множества на их совокупный НОД. Вычислить этот НОД можно по алгоритму Евклида. Учитывая то, что элементы $(\sigma), (\theta)$ ограничены в терминах A и B , становится ясно, что число шагов в алгоритме Евклида тоже ограничено в терминах A и B . \square

Предложение 5.1.18. Для двух графов с метками \mathbb{A} и \mathbb{B} наличие погружения $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ можно проверить алгоритмически. Число шагов в таком алгоритме ограничено можно ограничить в терминах A и B .

Доказательство. Чтобы найти погружение, мы проверяем все морфизмы $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$. Чтобы определить морфизм $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, надо найти морфизм графов ϕ и связанное с ним множество ϕ . Несложно понять, что число морфизмов графов ограничено в терминах A и B .

Если морфизм графов $\phi: A \rightarrow B$ фиксирован, то по лемме 5.1.17 поиск минимального множества, связанного с $\phi|_{T_A}$, можно выполнить за ограниченное число шагов. По лемме 5.1.7 нам надо проверить $|E(A)|/2 - |V(A)| + 1$ уравнений, чтобы понять, существует ли морфизм $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ с морфизмом графов ϕ .

Если $(\sigma_a), (\theta_e)$ — минимальное множество, связанное с ϕ , то всякое множество, связанное с ϕ , имеет вид $(l \cdot \sigma_a), (l \cdot \theta_e)$ для подходящего $l \in \mathbb{Z}$.

Морфизм ϕ и множество $(l \cdot \sigma_a), (l \cdot \theta_e)$, связанное с ϕ , определяют морфизм графов с метками Φ_l . Используя замечания 5.1.3 и 5.1.4, мы видим, что Φ_l является погружением тогда и только тогда, когда для всех допустимых пар (a, f) условие (5.2) выполнено. Несложно понять, что если для всех $l = 1, 2, \dots, \text{НОК}(\mu_f, f \in E(B))$ условие (5.2) нарушено, то морфизм $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ с морфизмом графов ϕ не может быть погружением. \square

Лемма 5.1.19. Пусть $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$ — целые положительные числа. Если $\text{НОД}(b_1, \dots, b_n) = 1$, то существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ такие, что $\alpha = \text{НОД}(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_n$ и α_i делит a_i для всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть p_1, \dots, p_k — различные простые числа такие, что $\alpha = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}$. Тогда $p_i^{\delta_i}$ делит $a_j \cdot b_j, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$. Поэтому $\delta_i = m_{ji} + n_{ji}, m_{ji} \geq 0, n_{ji} \geq 0, p_i^{m_{ji}} | a_j$ и $p_i^{n_{ji}} | b_j$. Следовательно, $p_i^{\min_j n_{ji}} | \text{НОД}(b_1, b_2, \dots, b_n) = 1$. Тогда получим, что для всякого i найдется j такое, что $n_{ji} = 0$. Поэтому $p_i^{\delta_i} | a_j$. Мы можем определить отображение $\rho: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ так, что $p_i^{\delta_i} | a_{\rho(i)}$. Тогда легко понять, что $\alpha_j = \prod_{i \in \rho^{-1}(j)} p_i^{\delta_i}$. \square

Пусть \mathbb{A} — такой граф с метками, что $R(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_R\}$. Положим

$$\begin{aligned}\log_{\mathbb{A}} &= \max_i \log \mathbb{A}_i, \\ V_{\mathbb{A}} &= \max_i |V(\mathbb{A}_i)|, \\ E_{\mathbb{A}} &= \max_i |E(\mathbb{A}_i)|, \\ M_{\mathbb{A}} &= \max_i M(\mathbb{A}_i), \\ S_{\mathbb{A}} &= \max_i S(\mathbb{A}_i).\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 5.1.1. Обозначим через $Path(\mathbb{A})$ множество таких редуцированных путей в A с точностью до инверсии, что их концы, специальные вершины и другие вершины — общие. Тогда $|Path(\mathbb{A})| \leq 3 \cdot C_{S(\mathbb{A})}^2$. Для $\mathbb{A} \in \bigcup_{i=1}^R \Omega_{|V(B)|}(\mathbb{A}_i)$ доказывать нечего потому, что длина некоторого пути в $Path(\mathbb{A})$ больше $|V(B)|$.

Обозначим пути в $Path(\mathbb{A})$ через $p_i, i = 1, \dots, r$.

Пусть $\Phi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — погружение с морфизмом графов $\phi: A \rightarrow B$. Так как $|p_i| > |V(B)|$, то p_i проходит через некоторые вершины $v_i, w_i \in V(B)$ такие, что $\phi(v_i) = \phi(w_i)$. Схлопывая часть пути p_i , соединяющую v_i и w_i , мы получим граф A_1 . Несложно понять, что ϕ индуцирует корректный морфизм графов $\phi|_{A_1}: A_1 \rightarrow B$. Будем выбирать общие вершины $a_i \in p_i, i = 1, \dots, r$ и проделывать такие преобразования, пока это возможно. Так мы построим граф с метками $\mathbb{F} \in \bigcup_{i=1}^R \Omega_{|V(B)|}(\mathbb{A}_i)$ и корректный морфизм ϕ . Понятно, что \mathbb{A} получается из \mathbb{F} заменой вершин a_i на пути q_i с метками 1 так, что $\phi(q_i)$ циклы в B для всех $i = 1, \dots, r$.

С помощью предложения 5.1.18 и замечания 5.1.4 мы можем алгоритмически проверить наличие погружения $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{B}$. Если ответ "да", то теорема доказана. В противном случае мы используем леммы 5.1.17 и 5.1.7, чтобы найти минимальное множество $(\sigma), (\theta)$, связанное с $\phi|_{T_{\mathbb{F}}}$, для некоторого максимального поддерева $T_{\mathbb{F}}$.

Теперь мы закончим доказательство отдельно для $r = 1$ и для общего случая.

Теперь предположим, что $r = 1$. В этом случае мы получаем \mathbb{A} из \mathbb{F} заменой вершины a на путь q . Все метки на q равны 1, и $\phi(q) = q'$ — цикл в графе B . Фиксируем базисные циклы m_1, m_2, \dots, m_k в B относительно вершины $\phi(a)$ такие, что $\Delta(m_i) = \alpha_i/\beta_i, \alpha_i \perp \beta_i, i = 1, \dots, k$. Тогда $\Delta(q') = \prod_{i=1}^k (\alpha_i/\beta_i)^{x_i} = (\alpha/\beta), \alpha \perp \beta$. Наша цель — получить ограничения на целые числа $x_i, i = 1, \dots, k$ в терминах \mathbb{B} и \mathbb{A} так, что соответствующее расширение \mathbb{F} погружается в \mathbb{B} .

Вершина a делит T_F на T_+ , и T_- так, что $T = T_- \cup T_+$ и $T_- \cap T_+ = \{a\}$. Обозначим через \mathbb{D} граф с метками, полученный из \mathbb{F} заменой вершины a на путь q , как выше так, что $\partial_0(q) = a_1, \partial_1(q) = a_2$. Опишем теперь, как минимальное множество $(\sigma), (\theta)$, определённое для T_F , меняется, когда мы переходим к графу с метками \mathbb{D} . По предложению 5.1.10 числа $\sigma_a, a \in V(q)$ и $\theta_e, e \in E(q)$ целые тогда и только тогда, когда $\beta \cdot \gamma_q | \sigma_{a_1}$ тогда и только тогда, когда $\alpha \cdot \gamma_{\bar{q}} | \sigma_{a_2}$. По предложению 5.1.12 возможно определить ϕ на q так, что $\gamma_q | \text{НОК}(\gamma_{m_i}) \cdot \prod_{i=1}^P p_i^d = H$, и H не зависит от x_i . Поэтому мы можем расширить морфизм ϕ на D .

Поэтому минимальное множество $(\sigma^+), (\theta^+)$, связанное с $\phi: D \rightarrow B$, делит поэлементно множество $(\sigma'), (\theta')$, где

$$\sigma'_c = \begin{cases} \sigma_c \cdot \beta \cdot H, c \in V(T_+), \\ \sigma_c \cdot \alpha \cdot H, c \in V(T_-), \end{cases}$$

и мы можем получить другие элементы $(\sigma'), (\theta')$ из определения морфизма графов с метками с помощью 5.1.17 и 5.1.7.

Обозначим вершины q через $v_1 = a_1, v_2, \dots, v_{|q|} = a_2$. Положим $\Sigma_{\pm} = \text{НОД}(\sigma_v, v \in T_{\pm})$. Чтобы определить минимальное множество $(\sigma), (\theta)$, связанное с $\phi: D \rightarrow B$, мы можем найти $(\sigma''), (\theta'')$ так, что

$$\sigma''_c = \begin{cases} \frac{\sigma_c \cdot \beta}{\text{НОД}(\Sigma_+ \cdot \beta, \Sigma_- \cdot \alpha, \sigma_{v_i}, i=1, \dots, |q|)}, c \in V(T_+), \\ \frac{\sigma_c \cdot \alpha}{\text{НОД}(\Sigma_+ \cdot \beta, \Sigma_- \cdot \alpha, \sigma_{v_i}, i=1, \dots, |q|)}, c \in V(T_-), \end{cases}$$

здесь мы можем найти σ_{v_i} из определения морфизма графов с метками с помощью 5.1.17 и 5.1.7. Возможно, некоторые числа в множестве $(\sigma''), (\theta'')$ нецелые, но мы можем найти целое число l так, что $(l \cdot \sigma''), (l \cdot \theta'')$ — минимальное множество, связанное с ϕ . Определим четвертое множество $(\sigma'''), (\theta''')$ так, что

$$\sigma'''_c = \begin{cases} \frac{\sigma_c \cdot \beta}{\text{НОД}(\Sigma_+ \cdot \beta, \Sigma_- \cdot \alpha)}, c \in V(T_+), \\ \frac{\sigma_c \cdot \alpha}{\text{НОД}(\Sigma_+ \cdot \beta, \Sigma_- \cdot \alpha)}, c \in V(T_-), \end{cases}$$

и мы можем найти σ_{v_i} , как выше. Несложно понять, что найдётся целое число κ такое, что $(\kappa \cdot \sigma'''), (\kappa \cdot \theta''')$ совпадает с $(\sigma''), (\theta'')$.

Подводя итог, мы можем найти целое κ так, что $\kappa | H \cdot \text{НОД}(\Sigma_+ \cdot \beta, \Sigma_- \cdot \alpha)$ и

$$\sigma_c^+ = \begin{cases} \frac{\sigma_c \cdot \beta \cdot \kappa}{\text{НОД}(\Sigma_+ \cdot \beta, \Sigma_- \cdot \alpha)}, c \in V(T_+), \\ \frac{\sigma_c \cdot \alpha \cdot \kappa}{\text{НОД}(\Sigma_+ \cdot \beta, \Sigma_- \cdot \alpha)}, c \in V(T_-), \end{cases}$$

определяет минимальное множество $(\sigma^+), (\theta^+)$, связанное с ϕ .

Всякое множество $(\sigma^*), (\theta^*)$, связанное с ϕ , равно $(\tau \cdot \sigma^+), (\tau \cdot \theta^+)$ для некоторого $\tau \in \mathbb{Z}_+$. По лемме 5.1.7 и замечаниям 5.1.3, 5.1.4, найдётся погружение $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ с морфизмом ϕ и связанным множеством $(\sigma^*), (\theta^*)$ тогда и только тогда, когда условия леммы 5.1.7 и (5.2) выполнены для $(\sigma^*), (\theta^*)$ и T_F .

Покажем, что достаточно проверять условие (5.2) только для допустимых пар (a, f) , где вершина a специальная. Если вершина a общая, то $St_A(a) = \{e_1, e_2\}$ и $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2} = 1$. Поэтому условие (5.2) имеет вид $\mu_f = (\sigma_a^*, \mu_f)$. Это равносильно $\mu_f | \sigma_a^*$. Напомним, что $(\sigma^*), (\theta^*)$ связано с ϕ , поэтому $\theta_e^* = \sigma_a^* / \mu_f$ — целое число.

Теперь заметим, что условия леммы 5.1.7 и (5.2) эквивалентны системе линейных уравнений относительно переменных x_1, \dots, x_k .

Обозначим через p_1, p_2, \dots, p_P множество всех простых делителей меток \mathbb{A} и \mathbb{B} . Если $\frac{m}{n} \in \langle p_1, p_2, \dots, p_P \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}$, то $\frac{m}{n} = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_P^{r_P}$, и мы положим $\psi(\frac{m}{n}) = (r_1, r_2, \dots, r_P) \in \mathbb{Z}^P$. Тогда мы имеем

$$\psi\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) = \vec{\gamma}_i, \quad \psi\left(\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{x_i}\right) = x_i \cdot \vec{\gamma}_i, \quad \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot \vec{\gamma}_i.$$

Обозначим i -ую координату $\vec{v} \in \mathbb{Z}^P$ через $[\vec{v}]_i$.

Если $\vec{v} \in \mathbb{Z}^P$, то обозначим неотрицательную часть \vec{v} через \vec{v}^+ и неположительную часть \vec{v} — через \vec{v}^- . Тогда $\vec{v} = \vec{v}^+ + \vec{v}^-$ и $\vec{v}^+, -\vec{v}^- \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^P$. Так как $\alpha \perp \beta$, то $\psi(\alpha) = (\psi(\frac{\alpha}{\beta}))^+$ и $\psi(\beta) = -(\psi(\frac{\alpha}{\beta}))^-$. Значения $\psi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$ зависят от $x_i, i = 1, \dots, k$, но мы знаем, что хоть одна из 2^P систем —

$$\left[\sum_{i=1}^k x_i \cdot \vec{\gamma}_i \right]_j \geq 0 \text{ (или } \leq 0), \quad j = 1, 2, \dots, P \text{ ---} \quad (5.8)$$

совместна и определяет значения $\psi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$.

Так как $\Sigma_+ \perp \Sigma_-$ и $\alpha \perp \beta$, то $(\Sigma_+ \cdot \beta, \Sigma_- \cdot \alpha) = (\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)$. Значения Σ_+ и Σ_- могут быть вычислены и зависят только от \mathbb{A} и \mathbb{B} . Из леммы 5.1.7 вытекает, что $\Sigma_+, \Sigma_- \leq (M(\mathbb{F}) \cdot M(\mathbb{B}))^{2|V(F)|}$, где $|V(F)| \leq 3 \cdot |V(B)| \cdot C_{S_{\mathbb{A}}}^2$ и $M(\mathbb{F}) \leq M_{\mathbb{A}}$.

Значения $(\Sigma_+, \alpha), (\Sigma_-, \beta)$ зависят от $x_i, i = 1, \dots, k$ и (как и ранее) определяются одной из 2^{2P} систем:

$$\begin{aligned} [\psi(\alpha)]_j &\geq [\psi(\Sigma_+)]_j \text{ (или } \leq [\Sigma_+]_j), j = 1, 2, \dots, P, \\ [\psi(\beta)]_j &\geq [\psi(\Sigma_-)]_j \text{ (или } \leq [\Sigma_-]_j), j = 1, 2, \dots, P. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Целое число κ делит H . При этом H не зависит от $x_i, i = 1, \dots, k$ и ограничено в терминах \mathbb{A} и \mathbb{B} . Поэтому число возможностей для κ ограничено в терминах \mathbb{A} и \mathbb{B} .

В уравнениях 2) леммы 5.1.7 нам надо заменить σ_v на дроби $\frac{\sigma_v \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)}$ или $\frac{\sigma_v \cdot \alpha \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)}$, в зависимости от $v = \partial_0(e) \in V(T_+)$ или $v = \partial_0(e) \in V(T_-)$. Перебирая ребра вне T_F , мы получаем из условий (2) леммы 5.1.7 не более $P \cdot (E_{\mathbb{A}}/2 - V_{\mathbb{A}} + 1)$ линейных уравнений. Поэтому следующие уравнения выполнены для всех $e \in E(F) \setminus E(T_F)$: если $\partial_0(e) \in V(T_+)$ и $\partial_1(e) \in V(T_-)$, то

$$\left[\psi \left(\frac{\sigma_{\partial_0(e)} \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)} \cdot \lambda_e \cdot \mu_{\phi(e)} \right) \right]_i = \left[\psi \left(\frac{\sigma_{\partial_1(e)} \cdot \alpha \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)} \cdot \lambda_{\bar{e}} \cdot \mu_{\phi(e)} \right) \right]_i; \quad (5.10)$$

если $\partial_1(e) \in V(T_+)$ и $\partial_0(e) \in V(T_-)$, то

$$\left[\psi \left(\frac{\sigma_{\partial_0(e)} \cdot \alpha \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)} \cdot \lambda_e \cdot \mu_{\phi(e)} \right) \right]_i = \left[\psi \left(\frac{\sigma_{\partial_1(e)} \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)} \cdot \lambda_{\bar{e}} \cdot \mu_{\phi(e)} \right) \right]_i. \quad (5.11)$$

Наконец, для всех специальных вершин a и рёбер $f \in St_B(\phi(a))$ надо рассматривать уравнения и неравенства (5.2):

$$\left[\psi \left(\lambda_{e_i} \cdot \left(\frac{\sigma_a \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)}, \mu_f \right) \right) \right]_j = [\psi(\mu_f)] \text{ для всех } e_i \in \phi_{(a)}^{-1}(f), \quad (5.12)$$

$$k(a, f) \leq \left(\frac{\sigma_a \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)}, \mu_f \right) = \frac{\mu_f}{\lambda_{e_i}}. \quad (5.13)$$

Заметим, что (5.13) не зависит от $x_i, i = 1, \dots, k$ и зависит только от ϕ . Мы можем определить значения $(\frac{\sigma_a \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)}, \mu_f)$ в (5.12) одним из 2^P путей как в (5.9) или (5.8):

$$\left[\psi \left(\frac{\sigma_a \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)} \right) \right]_j \geq [\psi(\mu_f)]_j \text{ (или } \leq [\psi(\mu_f)]_j), j = 1, 2, \dots, P. \quad (5.14)$$

Поэтому мы получаем P линейных диофантовых неравенств которые определяют $(\frac{\sigma_a \cdot \beta \cdot \kappa \cdot \tau}{(\Sigma_+, \alpha) \cdot (\Sigma_-, \beta)}, \mu_f)$ для каждой допустимой пары (a, f) . В итоге имеется не более $P \cdot S_{\mathbb{A}} \cdot |E(B)|$ таких неравенств.

Заметим, что (5.10) и (5.11) не зависят от τ и κ , но (5.12) зависит. Тем не менее можно понять, что если (5.12) выполнено для некоторого τ , то мы можем выбрать τ среди делителей $\text{НОК}(\mu_f | f \in E(B))$. Поэтому достаточно проверить только конечное количество возможных значений для τ . Это количество не зависит от $x_i, i = 1, \dots, k$ и зависит только от \mathbb{B} .

В результате мы получили набор систем (их число зависит только от \mathbb{A} и \mathbb{B}) уравнений и неравенств (5.8-5.14). Каждая система содержит ограниченное в терминах \mathbb{A} и \mathbb{B} количество уравнений и неравенств.

Если расширение \mathbb{D} для некоторого \mathbb{A}_i существует, то одна из систем разрешима. Обратно, если некоторая система разрешима, то мы можем использовать предложения 5.1.12, 5.1.10 и замечание 5.1.4, чтобы выбрать путь q и \mathbb{D} так, что \mathbb{D} погружается в \mathbb{B} . Теперь мы проверим, что параметры систем зависят только от \mathbb{A} и \mathbb{B} , и найдём ограничения на них.

Рассмотрим одну из этих систем. Обозначим её матрицу через Q и её правую часть — через \vec{b} . Тогда $rk(Q) \leq k \leq |E(B)|/2 - |V(B)| + 1$ потому, что k совпадает с числом столбцов Q .

Обозначим через M максимум модулей элементов Q . Ограничим M сверху. Коэффициенты при x_i в (5.8) и (5.9) не превосходят

$$\left[\sum_{i=1}^k \gamma_i \right]_j = \sum_{i=1}^k [\gamma_i]_j \leq \log \mathbb{B} \cdot k. \quad (5.15)$$

Коэффициенты при x_i в (5.10), (5.11), (5.12) и (5.14) появляются только из α и β . Поэтому (5.15) выполнено.

Ограничим $|\vec{b}|$. В (5.8) констант нет. Так как у нас уже есть верхняя граница для Σ_+ и Σ_- , то константы в (5.9) ограничены

$$\max\{[\psi(\Sigma_+)]_j, [\psi(\Sigma_-)]_j\} \leq (6 \cdot |V(B)| \cdot C_{S_A}^2) \cdot \log_2(M_A \cdot M(\mathbb{B})) = \Sigma.$$

Константы в (5.10) и (5.11) не превосходят

$$\max_j [\psi(\max_v \sigma_v^2 \cdot \max_e \lambda_e^2 \cdot \max_f \mu_f^2)]_j \leq 2\Sigma + 2 \cdot \log \mathbb{B} + 2 \log_A$$

Константы в (5.12) и (5.14) не превосходят

$$\max_j [\psi(\max_f \mu_f^2 \cdot \max_e \lambda_e \cdot \max_v \sigma_v \cdot \kappa \cdot \tau \cdot \Sigma_+ \cdot \Sigma_-)]_j \leq 5\Sigma + (3 \cdot k + 3) \cdot \log \mathbb{B} + \log_{\mathbb{A}},$$

потому, что $\tau | \text{НОК}(\mu_f, f \in E(B))$ и $\kappa | P(\mathbb{B})^k \prod_{i=1}^k p_i^d \cdot \Sigma_+ \cdot \Sigma_-$, где $d = \log \prod_{i=1}^k \alpha_i \cdot \beta_i \leq 2 \cdot \log \mathbb{B} \cdot k$.

Отсюда мы получаем ограничение на $|\vec{b}|$. Требуемое ограничение на N можно получить по предложению 5.1.16.

Теперь разберём общий случай. Напомним, что $r \leq |\text{Path}(\mathbb{A})| \leq 3 \cdot C_{S_{\mathbb{A}}}^2$. Основная идея такая же, как и при $r = 1$. Пусть граф с метками \mathbb{A} получен из \mathbb{F} заменой вершин $a_i, i = 1, 2, \dots, r$ такими путями q_i с метками 1, что $\phi: q_i \mapsto q'_i$ и q'_i — петли в B . Пусть $m_{1i}, m_{2i}, \dots, m_{ki}$ — базисные циклы в B с началом $\phi(a_i), i = 1, 2, \dots, r$. Тогда $\Delta(m_{ji}) = \frac{\alpha_j}{\beta_j}$, где $\alpha_j \perp \beta_j$, независимо от i . Положим $\gamma_{m_j} = \text{НОК}(\gamma_{m_{j1}}, \gamma_{m_{j2}}, \dots, \gamma_{m_{jr}})$. Так как q'_j — цикл в B , то $\Delta(q'_j) = \prod_{i=1}^k (\frac{\alpha_i}{\beta_i})^{x_{ij}}$. Наша цель — найти такие целые числа $x_{ij}, i = 1, \dots, k, j = 1, 2, \dots, r$, ограниченные в терминах \mathbb{B} и $R(\mathbb{A})$, что соответствующее расширение \mathbb{D} погружается в \mathbb{B} (такое расширение будет определено позже с помощью предложений 5.1.10 и 5.1.12).

Вершина a_i делит T_F на T_i^+ и $T_i^-, i = 1, 2, \dots, r$. Предположим, что $(\sigma), (\theta)$ — минимальное множество, связанное с ϕ , для T_F , и обозначим $\Delta(q'_j) = \prod_{i=1}^k (\frac{\alpha_i}{\beta_i})^{x_{ij}} = \frac{\omega_j}{\zeta_j}$, где $\omega_j \perp \zeta_j$ для всех $j = 1, 2, \dots, r$.

Вершины a_i делят дерево T_F на поддеревья. Мы их опишем следующим образом. Если v — вершина T_F , то расположение v относительно вершин $a_i, i = 1, 2, \dots, r$ описывается функцией:

$$\chi_v(j) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in T_j^+, \\ 0, & \text{if } v \in T_j^-, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Положим $V_\chi = \{v | \chi_v = \chi\}$ для всех $\chi \in \{0, 1\}^r$. Несложно понять, что $\bigsqcup_{\chi \in \{0, 1\}^r} V_\chi = V(T_F)$. Обозначим $\Sigma_\chi = \text{НОД}(\sigma_v | v \in V_\chi)$. Так как $(\sigma), (\theta)$ — минимальное множество, связанное с ϕ , то мы видим, что $\text{НОД}(\Sigma_\chi, \chi \in \{0, 1\}^r) = 1$.

Положим

$$\Theta = \text{НОД}(\prod_{j=1}^r \omega_j^{\chi(j)} \cdot \zeta_j^{1-\chi(j)}, \chi \in \{0, 1\}^r).$$

Применим лемму 5.1.19 для $a_\chi = \Sigma_\chi$ и $b_\chi = \prod_{j=1}^r \omega_j^{\chi(j)} \cdot \zeta_j^{1-\chi(j)} / \Theta$. Получим

$$\text{НОД}(\Sigma_\chi \cdot \prod_{j=1}^r \omega_j^{\chi(j)} \cdot \zeta_j^{1-\chi(j)}, \chi \in \{0, 1\}^r) = \Theta \cdot \prod_{\chi \in \{0, 1\}^r} \eta_\chi,$$

где $\eta_\chi | \Sigma_\chi$.

Как и в случае $r = 1$, минимальное множество, связанное с ϕ , на \mathbb{D} определяется:

$$\frac{\sigma_v \cdot \kappa \cdot \prod_{j=1}^r \omega_j^{\chi_v(j)} \cdot \zeta_j^{1-\chi_v(j)}}{\text{НОД}(\Sigma_\chi \cdot \prod_{j=1}^r \omega_j^{\chi(j)} \cdot \zeta_j^{1-\chi(j)}, \chi \in \{0, 1\}^r)} = \frac{\sigma_v \cdot \kappa \cdot \frac{\prod_{j=1}^r \omega_j^{\chi_v(j)} \cdot \zeta_j^{1-\chi_v(j)}}{\Theta}}{\prod_{\chi \in \{0, 1\}^r} \eta_\chi},$$

где $\kappa | \text{НОК}(\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2}, \dots, \gamma_{m_k}) \cdot \prod_{i=1}^P p_i^d \prod_{\chi \in \{0, 1\}^r} \eta_\chi$.

Теперь построим систему линейных уравнений и неравенств относительно $x_{ij}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, r$.

Обозначим все простые делители меток \mathbb{A} и \mathbb{B} через p_1, p_2, \dots, p_P . Если $\frac{m}{n} \in \langle p_1, p_2, \dots, p_P \rangle \subseteq \mathbb{Q}$, то $\frac{m}{n} = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_P^{r_P}$, и мы положим $\psi(\frac{m}{n}) = (r_1, r_2, \dots, r_P) \in \mathbb{Z}^P$, как выше. Тогда

$$\psi\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) = \vec{\gamma}_i, \quad \psi\left(\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{x_{ij}}\right) = x_{ij} \cdot \vec{\gamma}_i, \quad \psi\left(\frac{\omega_j}{\zeta_j}\right) = \sum_{i=1}^k x_{ij} \cdot \vec{\gamma}_i.$$

Для $\vec{v} \in \mathbb{Z}^P$ обозначим неотрицательную часть \vec{v} через \vec{v}^+ и неположительную часть \vec{v} через \vec{v}^- так, что $\vec{v} = \vec{v}^+ + \vec{v}^-$ и $\vec{v}^+, -\vec{v}^- \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^P$. Так как $\omega_j \perp \zeta_j$, то $\psi(\omega_j) = (\psi(\frac{\omega_j}{\zeta_j}))^+$ и $\psi(\zeta_j) = -(\psi(\frac{\omega_j}{\zeta_j}))^-$ для $j = 1, \dots, r$. Значения $\psi(\omega_j)$ и $\psi(\zeta_j)$ зависят от x_1, x_2, \dots, x_k , но мы знаем, что хоть одна из $2^{P \cdot r}$ систем

$$\left[\sum_{i=1}^k x_{ij} \cdot \gamma_i \right]_s \geq 0 \text{ (или } \leq 0), \quad s = 1, 2, \dots, P, j = 1, \dots, r \quad (5.16)$$

совместна. Поэтому значения $\psi(\omega_j)$ и $\psi(\zeta_j)$ для всех $j = 1, \dots, r$ могут быть определены системой $P \cdot r$ неравенств.

Значение Θ зависит от x_{ij} . Чтобы определить Θ , мы введём $[\Theta]_i, i = 1, \dots, P$. Значения $[\Theta]_i$ могут быть определены одной из 2^r систем:

$$\left[\psi\left(\prod_{j=1}^r \omega_j^{\chi_i(j)} \cdot \zeta_j^{1-\chi_i(j)}\right) \right]_i \leq \left[\psi\left(\prod_{j=1}^r \omega_j^{\chi(j)} \cdot \zeta_j^{1-\chi(j)}\right) \right]_i, \quad \chi \neq \chi_i. \quad (5.17)$$

Поэтому Θ может быть определено системой $(2^r - 1) \cdot P$ неравенств.

Целое число κ делит H . При этом H не зависит от x_{ij} и зависит только от $R(\mathbb{A})$ и \mathbb{B} . Поэтому число возможностей для κ ограничено в терминах \mathbb{A} и \mathbb{B} .

Числа Σ_χ не зависят от x_{ij} , а зависят только от \mathbb{A} и \mathbb{B} . Поэтому число возможностей для η_χ ограничено в терминах \mathbb{A} и \mathbb{B} .

Обозначим аналоги уравнений и неравенств (5.10)–(5.14) при $r \neq 1$ через (5.10') – (5.14'). В результате можно составить системы (их число зависит только от \mathbb{A} и \mathbb{B}) уравнений и неравенств (5.16), (5.17) и (5.10')–(5.14'). Каждая система состоит из $P \cdot (r + 2^r - 1 + S_{\mathbb{A}} \cdot |E(B)|)$ неравенств и не более $P \cdot (E_{\mathbb{A}}/2 - V_{\mathbb{A}} + 1 + S_{\mathbb{A}} \cdot |E(B)|)$ уравнений.

Если расширение \mathbb{F} некоторого графа с метками $\mathbb{A}_i \in R(\mathbb{A})$, описанное выше, существует, то одна из систем разрешима. Обратно, если некоторая система разрешима, то, по предложениям 5.1.12 и 5.1.10, мы можем выбрать путь q и расширение \mathbb{D} некоторого \mathbb{A}_i так, что \mathbb{D} погружается в \mathbb{B} . Проверим, что параметры этих систем зависят только от \mathbb{A} и \mathbb{B} , и вычислим ограничения на них.

Рассмотрим одну из этих систем. Обозначим её матрицу через Q и её правую часть — через \vec{b} . Тогда $rk(Q) \leq k \cdot r \leq (|E(B)|/2 - |V(B)| + 1) \cdot 3 \cdot C_{S_{\mathbb{A}}}^2$ потому, что k совпадает с числом столбцов Q .

Обозначим через M максимум модулей элементов Q . Ограничим M сверху. Коэффициенты x_i в (5.16) и (5.17) не превосходят

$$4 \cdot r \cdot \left[\sum_{i=1}^k \gamma_i \right]_j = 4 \cdot r \cdot \sum_{i=1}^k [\gamma_i]_j \leq 4 \cdot \log \mathbb{B} \cdot k \cdot r. \quad (5.18)$$

Коэффициенты при x_{ij} в (5.10')–(5.14') возникают только из ω_j , ζ_j и Θ . Поэтому (5.18) выполнено.

Теперь ограничим $|\vec{b}|$. Констант в (5.16) и (5.17) нет. По лемме 5.1.7

$$\max_{\chi} [\psi(\Sigma_\chi)]_j \leq (6 \cdot |V(B)| \cdot C_{S_{\mathbb{A}}}^2) \cdot \log_2(M_{\mathbb{A}} \cdot M(\mathbb{B})) = \Sigma.$$

Константы в (5.10') и (5.11') не превосходят

$$\begin{aligned} \max_j [\psi(\max_v \sigma_v^2 \cdot \max_e \lambda_e^2 \cdot \max_f \mu_f^2)]_j &\leq \\ &2 \cdot \Sigma + 2 \cdot \log \mathbb{B} + 2 \log_{\mathbb{A}}. \end{aligned}$$

Константы в (5.12') и (5.14') не превосходят

$$\max_j [\psi(\max_f \mu_f^2 \cdot \max_e \lambda_e \cdot \max_v \sigma_v \cdot \kappa \cdot \tau \cdot (\max_\chi \Sigma_\chi)^{2^r})]_j \leqslant (2 \cdot 2^r + 1)\Sigma + (3 \cdot k + 3) \cdot \log \mathbb{B} + \log_{\mathbb{A}}$$

потому, что $\tau | \text{НОК}(\mu_f, f \in E(B))$ и $\kappa | P(\mathbb{B})^k \prod_{i=1}^k p_i^d \cdot \prod_{\chi \in \{0,1\}^r} \eta_\chi$, где $d = \log \prod_{i=1}^k \omega_i \zeta_i \leqslant 2 \cdot \log \mathbb{B} \cdot k$.

Поэтому $|\vec{b}|$ ограничена в терминах \mathbb{A} и \mathbb{B} . Из предложения 5.1.16 несложно получить искомую оценку. \square

Теперь мы готовы доказать теорему 5.1.2.

Доказательство теоремы 5.1.2. Для того чтобы проверить, вкладывается $\pi_1(\mathbb{A})$ в $\pi_1(\mathbb{B})$ или нет, достаточно выполнить следующие шаги.

Шаг 0. Редуцируем \mathbb{B} .

Шаг 1. Проверяем конечность множества $R(\mathbb{A})$ с помощью алгоритма [32]. Если множество $R(\mathbb{A})$ конечно, то переходим к шагу 2, иначе останавливаемся и не даём ответа.

Шаг 2. Находим $R(\mathbb{A})$ с помощью стандартных преобразований.

Шаг 3. Вычисляем N с помощью теоремы 5.1.1. Находим $\Omega_N(\mathbb{A}_i)$ для всех $\mathbb{A}_i, i = 1, \dots, |R(\mathbb{A})|$. По предложению 5.1.9, все эти множества конечны, и $|\Omega_N(\mathbb{A}_i)|$ зависит только от \mathbb{A} и \mathbb{B} .

Шаг 4. Для всех \mathbb{C} из $\bigcup_i \Omega_N(\mathbb{A}_i)$ проверяем наличие погружения $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$. Предложение 5.1.18 показывает, что для этого требуется конечное число операций. Как только положительный ответ появился для некоторого \mathbb{C} из $\bigcup_i \Omega_N(\mathbb{A}_i)$, алгоритм говорит "да" и останавливается. Если для всех \mathbb{C} из $\bigcup_i \Omega_N(\mathbb{A}_i)$ ответ "нет", то по теореме 5.1.1 алгоритм говорит "нет" и останавливается.

5.2 Допустимые скольжения мобильных рёбер

При изучении проблемы изоморфизма GBS групп активно используются следующие три типа преобразований графов с метками: скольжения, индукции и $\mathcal{A}^{\pm 1}$ движения (см. рис. 1.3, 1.4, 1.5, 1.6).

Пусть $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ — граф с метками, и $p = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — путь в A . Обозначим

$$\Delta(p) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{\bar{e}_i}}{\lambda_{e_i}}.$$

Если метка λ_e на ребре допускает последовательность скольжений e/e_i для $i = 1, \dots, n$, то скольжение ребра e по пути p (обозн. e/p) будем называть *допустимым*. Если e/p допустимо, то после скольжения метка λ_e станет равна $\lambda_e \cdot \Delta p$.

Пусть T — максимальное поддерево в A , и f_1, \dots, f_k — рёбра, не лежащие в T (из пары e, \bar{e} , не лежащей в T , достаточно выбрать одно ребро). Выберем $a \in V(A)$ и обозначим через $p_i, i = 1, \dots, k$ циклы в A с началом и концом в a такие, что p_i один раз проходит через f_i и не содержит f_j и \bar{f}_j при $i \neq j$. Обозначим через $\Delta\pi_1(\mathbb{A})$ подгруппу $\langle \Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_k \rangle$ группы рациональных чисел \mathbb{Q} . Это определение тесно связано с определением модулярного гомоморфизма.

Предположим, что в A есть ребро e и цикл p такой, что после скольжения ребра e по циклу p граф A не изменится, но метка на ребре e будет умножена на целое число $\alpha \neq \pm 1$. В этом случае скольжения e по p можно повторять. Получается, что группа $\pi_1(\mathbb{A})$ может быть представлена бесконечным числом редуцированных графов, и теорема М. Клэя и М. Форестера не даёт алгоритма для решения проблемы изоморфизма.

Решения проблемы изоморфизма, полученные ранее, были найдены при существенных ограничениях на $\Delta\pi_1(\mathbb{A})$ или на структуру графа A . Такие ограничения, как правило, приводили к тому, что допустимые скольжения поддавались описанию, и это позволяло решить проблему изоморфизма. Тем не менее скольжения могут быть устроены весьма сложно. Например, неясно, можно ли с помощью скольжения одного ребра получить ту или иную метку на этом ребре. В данной работе без ограничений на граф A мы получаем следующее описание допустимых скольжений:

Теорема 5.2.1. *Пусть \mathbb{A} — граф с метками, $e \in E(A)$, и $\alpha \in \Delta\pi_1(\mathbb{A})$. Тогда существует алгоритм, который выясняет, существует ли цикл p такой, что скольжение e/p допустимо и $\Delta p = \alpha$. Если такой путь существует, то алгоритм выдаёт один из них.*

Пусть p_1, p_2, \dots, p_r – все различные простые делители числа $\prod_{e \in E(A)} \lambda_e$. Тогда из вида расширений и схлопываний следует, что если $\pi_1(\mathbb{C}) \cong \pi_1(\mathbb{A})$, то любая метка графа с метками \mathbb{C} имеет вид $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$, причём $\alpha_i \geq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, r$. Таким образом, можно установить соответствие

$$\overline{} : \{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} \mid \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^r,$$

при котором $\overline{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$. При таком отображении произведение меток переходит в сложение образов. В этом параграфе мы будем использовать аддитивную запись для меток и считать их целочисленными векторами длины r с неотрицательными координатами, если не оговорено противное.

Если $v, u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, обозначим через $[v]_i \in \mathbb{Z}$ i -ую координату v . Будем говорить, что $v \leq u$ ($v < u$), если для всех $i = 1, \dots, r$ $[v]_i \leq [u]_i$ (и неравенство строгое как минимум для одного индекса). Множество $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ с отношением \leq является частично упорядоченным множеством. Очевидно $\bar{a} \leq \bar{b}$ ($\bar{a} < \bar{b}$) тогда и только тогда, когда $a|b$ (a собственный делитель b).

Пусть $p = e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_n$ – путь в графе A , $\Delta p = v^+ - v^-$, $v^+, v^- \geq 0$, $\lambda_{e_i} = \alpha_i$, $\lambda_{\bar{e}_i} = \beta_i$. Определим γ_p как минимальный вектор из $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ такой, что для любого $i = 0, \dots, n-1$ справедливо неравенство

$$v^- + \gamma_p + \sum_{j=1}^i (\beta_j - \alpha_j) - \alpha_{i+1} \geq 0.$$

Это эквивалентно

$$\gamma_p = \max \left\{ \alpha_{i+1} + \sum_{j=1}^i (\alpha_j - \beta_j) + v^-, i = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Из определения вытекает критерий допустимости скольжения e/p .

Лемма 5.2.2. (*критерий допустимости*). Скольжение e/p допустимо тогда и только тогда, когда $\lambda_e \geq \gamma_p + (\Delta p)^-$.

Утверждение 5.2.3. Пусть $\tilde{v} = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность векторов из $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, и $|v_i|_1 \leq \alpha_i$. Тогда найдётся число $L = L(\tilde{v} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}, r)$ такое, что существуют такие $l_1 < l_2 \leq L$, что либо $v_{l_1} \geq v_{l_2}$, либо $v_{l_2} \geq v_{l_1}$.

Доказательство. Индукция по r . Если $r = 1$, то $L = 2$. Если $r = 2$, то несложно понять, что L можно выбрать равным $2\alpha_1$.

Пусть для размерности $r - 1$ такое L существует, покажем, что оно найдется и для размерности r . Заметим, что если $v_i \not\geq v_1$, то существует такое $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, что $[v_i]_k < [v_1]_k$. При $n \geq 2$ обозначим через $\omega(n)$ минимальное число i такое, что $[v_n]_i < [v_1]_i$, а через $\zeta(n)$ — значение $[v_n]_{\omega(n)}$. Заметим, что $0 \leq \zeta(n) \leq \alpha_1 - 1$ и $\omega(n) \in \{1, 2, \dots, r\}$. Значит, всего таких пар $(\omega(n), \zeta(n))$ не более $r \cdot \alpha_1$ штук. Если такого числа $L = L(\tilde{\alpha}, r)$ не существует, то есть пара (k, l) такая, что в последовательности \tilde{v} есть бесконечная подпоследовательность $\{v_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $\omega(v_{m_i}) = k$ и $\zeta(v_{m_i}) = l$ для всех $i \geq 1$, и какое бы L_1 натуральное число мы не выбрали, для любого $l_1 < l_2 \leq L_1$ будет выполнено $v_{m_{l_1}} \not\geq v_{m_{l_2}}$ и $v_{m_{l_2}} \not\geq v_{m_{l_1}}$. Но это противоречит предположению индукции, так как таких векторов может быть не более $L(\{\alpha_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}, r - 1)$. \square

Замечание 5.2.4. Если каждый элемент последовательности $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ может быть вычислен, то число $L = L(\tilde{\alpha}, r)$ может быть вычислено.

Доказательство. Сначала отметим, что если $\tilde{\beta} \geq \tilde{\alpha}$ поэлементно, то $L(\tilde{\beta}, r) \geq L(\tilde{\alpha}, r)$. Это следует из того, что всякая последовательность $\tilde{v} = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ векторов из $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, удовлетворяющая условию $|v_i|_1 \leq \alpha_i$, удовлетворяет условию $|v_i|_1 \leq \beta_i$.

Перенумеруем пары $(\omega(n), \zeta(n))$ в порядке появления в последовательности $\{(\omega(n), \zeta(n))\}_{n \geq 2}$ так, что p_1 — первая пара $p_1 = (\omega(2), \zeta(2))$, а $p_J = (\omega(n_J), \zeta(n_J))$ — последняя пара, $J \leq r \cdot \alpha_1$. Номера $n_1 = 2, n_2, \dots, n_J$ указывают на первый вектор v_{n_k} такой, что $[v_{n_k}]_{\omega(n_k)} = \zeta(n_k)$ и $\omega(n_k)$ — минимальное число, для которого $[v_{n_k}]_{\omega(n_k)} < [v_1]_{\omega(n_k)}$.

Можно считать, что $\tilde{\alpha}$ — неубывающая последовательность. Если это не так, заменим α_i на $\max_{1 \leq j \leq i} \alpha_j$ и найдём ограничение сверху на $L(\tilde{\alpha}, r)$ с помощью новой неубывающей последовательности.

Рассмотрим для начала случай $r = 3$, тогда $J < 3 \cdot \alpha_1$. Так как последовательность $\tilde{\alpha}$ неубывающая, то максимальное значение $L(\tilde{\alpha}, 3)$ может быть получено, если номер n_2 — наибольший из возможных, значит, для вычисления оценки сверху для $L(\tilde{\alpha}, 3)$ можно считать, что $n_2 = L(\{\alpha_i\}_{i \geq 2}, 3 - 1) = \alpha_2$. Тогда векторов v_i , соответствующих паре p_1 , не более α_2 , а тех, что соответствуют паре p_2 , получается не более α_{α_2+1} .

Следовательно, $n_3 \leq L(\{\alpha_i\}_{i \geq 1 + \alpha_2 + \alpha_{\alpha_2 + 1}}, 2) = \alpha_{1 + \alpha_2 + \alpha_{\alpha_2 + 1}}$ и так далее. Получается, что $n_i = \alpha_{n_{i-1} + n_{i-1} + \dots + n_1 + 1}$. Так как $J \leq 3(\alpha_1 + 1)$, то $n_{3\alpha_1} = 2\alpha_{(\sum_{j=1}^{3\alpha_1 - 1} n_j + 1)}$, и значит, всего таких элементов не более, чем $L(\{\alpha_i\}_{i \geq 1}, 3) := \sum_{j=1}^{3\alpha_1} n_j + 1$.

Для произвольного r рассуждаем аналогично. Так как $n_1 = 2$, то $n_2 \leq L(\{\alpha_i\}_{i \geq 2}, r - 1)$, $n_3 \leq L(\{\alpha_i\}_{i \geq n_2 + 1}, r - 1), \dots, n_{r \cdot \alpha_1} \leq L(\{\alpha_i\}_{i \geq \sum_{j=1}^{r \cdot \alpha_1 - 1} n_j + 1}, r - 1)$. Тогда $L(\{\alpha_i\}_{i \geq 1}, r - 1) \leq \sum_{j=1}^{r \cdot \alpha_1} n_j + 1$. Значит, оценка сверху может быть вычислена. \square

Утверждение 5.2.5. Пусть \mathbb{A} — граф с метками, $\lambda_e = \mu$, и существует цикл q в графе A такой, что:

- 1) e/q допустимо;
- 2) $\Delta q \geq 0$ и $\Delta q \neq 0$;

Тогда существует вычисляемая константа C и цикл q' , удовлетворяющий условиям 1, 2, и такой, что

- 3) $|q'| \leq C = C(\mathbb{A}, \mu)$.

Доказательство. Пусть p — цикл минимальной длины со свойствами 1 и 2. Найдём ограничение $|p|$ с помощью индукции по числу вершин, через которые проходит p . Перенумеруем эти вершины в порядке появления в пути p v_0, v_1, \dots, v_{k-1} , $k < |V(A)|$.

Пусть $k = 1$, тогда $p = e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_{|p|}$. Пусть $\tau_l = \mu \cdot \Delta(e_1, e_2, \dots, e_l)$ для $l = 0, 1, \dots, |p|$. Тогда $t_{i+1} \leq |t_i| + M$, где $M = \max_{e \in E(A)} |\Delta e|$. Если существуют $i < j < \lfloor \frac{|p|-1}{2} \rfloor$ такие, что $\tau_i \leq \tau_j$ или $\tau_j \leq \tau_i$ то возможен один из случаев:

либо $t_i \leq \tau_j$ и $\tau_i \neq \tau_j$, тогда путь $e_1 \cdot \dots \cdot e_j \cdot \bar{e}_i \cdot \bar{e}_{i-1} \cdot \dots \cdot \bar{e}_1$ обладает свойствами 1 и 2 и короче пути p , противоречие,

либо $t_i \geq \tau_j$ и $\tau_i \neq \tau_j$, тогда путь $e_1 \cdot \dots \cdot e_i \cdot e_{j+1} \cdot \dots \cdot e_{|p|}$ обладает свойствами 1 и 2 и короче пути p , противоречие,

либо $\tau_i \neq \tau_j$, тогда путь $e_1 \cdot \dots \cdot e_i \cdot e_{j+1} \cdot \dots \cdot e_{|p|}$ обладает свойствами 1 и 2 и короче пути p , противоречие.

Следовательно, таких i и j нет, тогда, по утверждению 5.2.3, получаем $|p| \leq 2L(\{|\mu| + iM\}_{i=1}^{\infty}, r) + 1 =: L_0(\mathbb{A}, |\mu|)$.

Для наглядности разберём случай $k = 2$, путь p имеет вид $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_T$, начало и конец p_i совпадают с v_0 , а остальные вершины (если они есть) равны v_1 .

Пусть $\tau_l = \mu \cdot \Delta(p_1 \cdots p_l)$ для $l = 0, \dots, T$, тогда, рассуждая как раньше, можно понять, что $|\tau_0| = |\mu|$, $|\tau_1| \leq |\mu| + 2M + L_0(\mathbb{A}, |\mu| + M)$, $|\tau_2| \leq |\tau_1| + 2M + L_0(\mathbb{A}, |\tau_1| + M)$, \dots , $|\tau_l| \leq |\tau_{l-1}| + 2M + L_0(\mathbb{A}, |\tau_{l-1}| + M)$. Рассуждая как раньше, можно получить, что $T \leq 2L(\{|\tau_i|\}_{i=1}^\infty, r) + 1 = L_1(\mathbb{A}, |\mu|)$.

Шаг индукции $s - 1 \rightarrow s$.

Пусть $k = s$, и путь p имеет вид $p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_T$, начало и конец p_i совпадают с v_0 , а остальные вершины (если они есть) принадлежат $\{v_1, v_2, \dots, v_{s-1}\}$. Пусть $\tau_l = \mu \cdot \Delta(p_1 \cdots p_l)$ для $l = 0, \dots, T$, тогда, рассуждая как раньше, можно понять, что $|\tau_0| = |\mu|$, $|\tau_1| \leq |\mu| + 2M + L_{s-1}(\mathbb{A}, |\mu| + M)$, $|\tau_2| \leq |\tau_1| + 2M + L_{s-1}(\mathbb{A}, |\tau_1| + M)$, \dots , $|\tau_l| \leq |\tau_{l-1}| + 2M + L_{s-1}(\mathbb{A}, |\tau_{l-1}| + M)$. По аналогии с доказанным выше можно получить, что $T \leq 2L(\{|\tau_i|\}_{i=1}^\infty, r) + 1 = L_s(\mathbb{A}, |\mu|)$. \square

Построим граф, который показывает, что путь q' из утверждения 5.2.5 может быть длинным даже по отношению к числу рёбер в A и метке на e . Для этого построим граф с метками \mathbb{A}_k для $k \in \mathbb{N}$, как показано на рис. 5.2. Здесь граф с метками \mathbb{A}_i получается приклеиванием к графу с метками из двух вершин и двух рёбер двух копий графа с метками \mathbb{A}_{i-1} по вершине v_{i-1} . Фиксируем $k \in \mathbb{N}$, построим граф с метками \mathbb{B}_k , присоединяя к вершине v_k петлю с метками p_{k+1} и $p_{k+1} \cdot q$ и ребро e с меткой p_1^s , где $s = s_1 + s_2 + \dots + s_{k-1} + 1$ (вторая метка не важна) см. рис. 5.3.

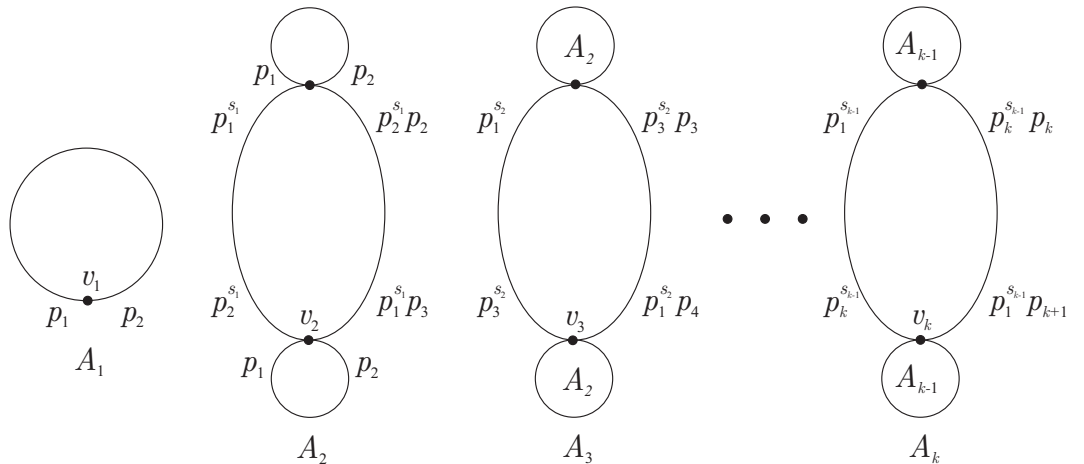


Рис. 5.2: Графы с метками \mathbb{A}_k .

Тогда граф B_k имеет $2^{k-1} + 1$ вершин и $2^k + 2^{k-1}$ рёбер. Можно понять, что

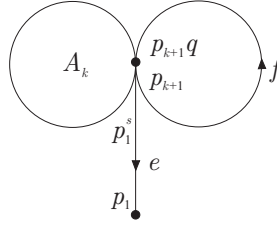


Рис. 5.3: Графы с метками \mathbb{B}_k .

если путь удовлетворяет условиям 1 и 2 утверждения 5.2.5, то его длина не менее $2^k s_1 \cdot s_2 \cdots s_{k-1}$. Если выбрать $s_i = 5$ для всех i , то получится оценка снизу на длину пути $2 \cdot 10^{k-1}$.

Для $v \in \mathbb{Z}^r$ обозначим множество $\{i | [v]_i \neq 0\}$ через $\text{supp}(v)$.

Утверждение 5.2.6. Пусть q_1, q_2, \dots, q_k – допустимые циклы в A , и $\Delta q_i = v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$. Если существует такой допустимый цикл p , что:

- 1) $\Delta p \geq 0$;
- 2) $\text{supp}(\Delta p) \setminus \bigcup_{i=1}^k \text{supp}(v_i) \neq \emptyset$,

тогда существуют вычислимые константы C_1 и C'_1 и допустимый цикл q , удовлетворяющий 1, 2 и

- 3) $|q| \leq C'_1$;
- 4) $|\Delta q| \leq C_1$.

Доказательство. Перенумеруем координаты так, чтобы $\bigcup_{i=1}^k \text{supp}(v_i) = \{1, 2, \dots, l\}$. Так как q_1, q_2, \dots, q_k допустимы, и $\Delta q_i = v_i \geq 0$, то какой бы вектор $n = (n_1, n_2, \dots, n_l, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^r$ мы ни выбрали найдутся константы t_1, t_2, \dots, t_k такие, что $\mu + \sum_{i=1}^k t_i v_i \geq n$.

Пусть $\mathbb{A}(q_1, \dots, q_k)$ – граф с метками, полученный из \mathbb{A} так: граф $A(q_1, \dots, q_k)$ совпадает с A , метке $\lambda_f = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ в графе с метками \mathbb{A} соответствует метка $\delta_f = (\lambda_{l+1}, \lambda_{l+2}, \dots, \lambda_r)$ в графе с метками $\mathbb{A}(q_1, \dots, q_k)$.

Так как p удовлетворяет условию 2, то p удовлетворяет условиям утверждения 5.2.5. Значит, существует цикл q' , у которого $\Delta q'|_{\overline{\text{supp}}} \geq 0$ и $\neq 0$. Обозначим $\Delta(q')$ через v . Если $v \geq 0$, то q' искомый и $C'_1 = C$, иначе $v^- \geq 0, \neq 0$. При этом $\text{supp}(v^-) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \text{supp}(v_i)$. Так как $|v| \leq C$, то $[v^-]_i \leq C$ для $i = 1, 2, \dots, l$. Выберем $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{Z}$

так, чтобы $\mu + \sum_{i=1}^k t_i v_i \geq v^-$. Константы $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{Z}$ ограничены в зависимости от C . Тогда несложно понять, что $q = q_1^{t_1} \cdot q_2^{t_2} \cdot \dots \cdot q_k^{t_k} \cdot q'$ является искомым путем и $|q|$ ограничено, в зависимости от длин $q_i, i = 1, 2, \dots, k$ и C . \square

Следствие 5.2.7. Пусть \mathbb{A} – граф с метками, и $e \in E(\mathbb{A})$, тогда либо из допустимости цикла p следует, что $\Delta p \not\geq 0$, либо существует допустимый цикл q и вычислимая константа T такие, что:

- 1) $\Delta q \geq 0, \neq 0$;
- 2) Если p допустим, и $\Delta p \geq 0$, то $\text{supp}(\Delta p) \subseteq \text{supp}(\Delta q)$;
- 3) $|q| \leq T$.

Такой цикл будем называть *максимальным неотрицательным допустимым (или просто максимальным) циклом* в графе с метками \mathbb{A} . Обозначим $\text{supp}(\Delta q)$ через $\text{supp}(\mathbb{A})$.

Доказательство. Применяя утверждение 5.2.6 нужное количество раз, находим набор циклов q_1, q_2, \dots, q_k таких, что если p допустим, и $\Delta p \geq 0$, то $\text{supp}(\Delta p) \subseteq \bigcup_{i=1}^k \text{supp}(\Delta q_i)$. Пусть $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k$, тогда $\Delta q \geq 0$, цикл q допустим, и $\text{supp}(\Delta q) = \bigcup_{i=1}^k \text{supp}(\Delta q_i)$ и $|q| \leq \sum_{j=2}^l C'_1(\mathbb{A}, \mu, q_1, \dots, q_j) + C = T$. \square

Если \mathbb{A} – граф с метками, и $e \in E(\mathbb{A})$, то можно построить граф $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbb{A}, e)$ следующим образом: вершины графа \mathfrak{A} – это графы с метками, полученные из \mathbb{A} скольжением ребра e , два графа с метками \mathbb{B}_1 и \mathbb{B}_2 соединены ребром в \mathfrak{A} , если существует такое ребро f графа \mathbb{A} , что \mathbb{B}_1 получается из \mathbb{B}_2 скольжением e/f . Из теоремы 8.2 [50] вытекает, что если в \mathbb{A} нет допустимых циклов p таких, что $\Delta(p) \geq 0, \neq 0$, то граф \mathfrak{A} конечный.

Лемма 5.2.8. Пусть \mathbb{A} – граф с метками, и $e \in E(\mathbb{A})$. Существует алгоритм, который находит константу D и допустимые неотрицательные циклы q_1, \dots, q_k такие, что если p – допустимый цикл, и $\Delta p \geq 0$, то $\Delta p = \sum_{i=1}^k x_i \Delta q_i$ для некоторых целых x_1, \dots, x_k и $|q_i| \leq D$ для $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Из следствия 5.2.7 следует, что если p допустим, и $\Delta p \geq 0$, то $\text{supp}(\Delta p) \subseteq \text{supp}(\mathbb{A})$. Кроме того, p допустим в $\mathbb{A}(q)$ и $\Delta p|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}} = 0$, значит, в

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbb{A}(q), e)$ цикл p индуцирует цикл с началом и концом в $\mathbb{A}(q)$. Ввиду того что в $\mathbb{A}(q)$ нет неотрицательных циклов, допустимых относительно e , получаем, что \mathfrak{A} – конечный граф, и число его вершин и рёбер ограничено как функция от \mathbb{A} . Пусть f_1^*, \dots, f_{k-1}^* – циклы в \mathfrak{A} с началом и концом в $\mathbb{A}(q)$, тогда они индуцируют циклы f_1, \dots, f_k в A такие, что $|f_i| < 2|E(\mathfrak{A})|$, $\Delta f_i|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}}$ (следовательно, $\text{supp}(\Delta f_i) \subseteq \text{supp}(q)$), и $\Delta p \in \langle \Delta(f_1), \dots, \Delta(f_{k-1}) \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Тогда для любого $i = 1, \dots, k-1$ найдется $y_i \in \mathbb{Z}$ такое, что цикл $q_i = q^{y_i} \cdot f_i$ допустим в \mathbb{A} . Выбор y_i можно устроить следующим образом: после скольжения по допустимому циклу q^{y_i} получим метку $\mu + y_i \cdot \Delta(q)$ на ребре e . Допустимость f_i после этого эквивалентна неравенству

$$\Delta(f_i^-) + \gamma_{f_i} \leq \mu + y_i \cdot \Delta(q).$$

Это неравенство векторов эквивалентно системе двух неравенств:

$$\Delta(f_i^-)|_{\text{supp}(\mathbb{A})} + \gamma_{f_i}|_{\text{supp}(\mathbb{A})} \leq \mu|_{\text{supp}(\mathbb{A})} + y_i \cdot \Delta(q)|_{\text{supp}(\mathbb{A})},$$

$$\Delta(f_i^-)|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}} + \gamma_{f_i}|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}} \leq \mu|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}} + y_i \cdot \Delta(q)|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}}.$$

Второе выполнено ввиду допустимости f_i в $\mathbb{A}(q)$. В первом неравенстве левая часть ограничена. Поэтому может быть найдено y_i , удовлетворяющее условиям. При этом

$$\begin{aligned} \langle \Delta(q_1), \dots, \Delta(q_{k-1}), \Delta(q) \rangle &= \langle y_1 \Delta(q) + \Delta(f_1), \dots, y_{k-1} \Delta(q) + \Delta(f_{k-1}), \Delta(q) \rangle = \\ &= \langle \Delta(f_1), \dots, \Delta(f_{k-1}), \Delta(q) \rangle = \langle \Delta(f_1), \dots, \Delta(f_{k-1}) \rangle. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо ввиду того, что $q \in \langle \Delta(f_1), \dots, \Delta(f_{k-1}) \rangle$ (это верно ввиду того, что q допустим в \mathbb{A} , значит, и в $\mathbb{A}(q)$). \square

Эта лемма обосновывает следующий алгоритм нахождения базиса:

- 1) Составляем \mathfrak{A} ;
- 2) Находим f_i^* (с помощью максимального поддерева в \mathfrak{A});

- 3) Составляем f_1, \dots, f_{k-1} ;
- 4) Ищем y_i из соответствующих систем неравенств;
- 5) Циклы $q, q_i = q^{y_i} \cdot f_i, i = 1, \dots, k - 1$ — искомые.

Теорема 5.2.9. Пусть \mathbb{A} — граф с метками, и $v \in \Delta\pi_1(\mathbb{A})$, тогда существует алгоритм, указывающий путь p такой, что e/p допустим, и $\Delta p = v$ или отвечающий что его нет.

Доказательство. Случай 1. Пусть $v \geq 0$. Если искомый путь существует, то по лемме 5.2.8 получаем, что $\Delta p = \sum_{i=1}^k x_i \Delta q_i$. Если $\text{supp}(v) \not\subseteq \text{supp}(\mathbb{A})$, то ответ нет, так как, по следствию 5.2.7, $\text{supp}(\Delta p) \subseteq \text{supp}(\mathbb{A})$. Если же $\text{supp}(v) \subseteq \text{supp}(\mathbb{A})$, то найдем решение системы:

$$v = \sum_{i=1}^k x_i q_i.$$

Если решения не существует, то ответ "нет" (ввиду леммы 5.2.8). Иначе цикл $q_1^{x_1} \dots q_k^{x_k}$ допустимый и искомый.

Случай 2. Пусть $v \leq 0$, и $v|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}} = 0$. Пусть \mathbb{B} получается из \mathbb{A} заменой метки μ на метку $\mu + v$. Заметим, что $\mu + v \geq 0$, иначе ответ "нет" сразу. Исходная задача эквивалентна поиску цикла p_0 , допустимого в \mathbb{B} и такого, что $\Delta p_0 = -v \geq 0$. Это случай один. Если ответ "да", то возвращаем ответ "да" и $p = p_0^{-1}$. Если ответ "нет", то и в случае 2 ответ "нет".

Случай 3. Произвольный. Пусть q — максимальный цикл в \mathbb{A} . Строим граф с метками $\mathbb{A}(q)$ и конечный граф $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbb{A}_q, \mu)$. Ищем в \mathfrak{A} путь, связывающий $\mathbb{A}(q)$ и граф с метками \mathbb{B} , полученный из $\mathbb{A}(q)$ заменой метки $\mu|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}}$ на метку $(\mu + v)|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}}$. Если такого пути нет (точнее нет вершины \mathbb{B} в графе \mathfrak{A}), то ответ "нет" (так как p , допустимый в \mathbb{A} , должен быть допустим и в $\mathbb{A}(q)$ и, значит, индуцировать путь в \mathfrak{A}) иначе находим p^* . Пусть p_1 цикл в \mathfrak{A} который индуцирует p^* . Тогда

$$\Delta p_1|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}} = v|_{\overline{\text{supp}(\mathbb{A})}}.$$

Если искомый p существует, то он индуцирует в \mathfrak{A} путь отличный от p^* на некоторый цикл. Значит, либо система

$$\Delta(p_1) - v = - \sum_{i=1}^k t_i \Delta(q_i)$$

разрешима в целых числах, либо ответ ”нет”. Составим цикл $p_2 = q_1^{t_1} \cdots q_k^{t_k} \cdot p_1$. Если p_2 допустим, то он искомый.

Если p_2 недопустим, то найдется целое число x (как в доказательстве леммы 5.2.8) такое, что цикл $q^x \cdot p_2$ допустим. Находим y — максимальное целое число такое, что цикл $p_3 = q^x \cdot p_2 \cdot q^{-y}$ допустим. Если $y = x$, то p_3 искомый.

Заметим, что искомый путь существует тогда и только тогда, когда существует путь q^* , допустимый в графе с метками \mathbb{B} (полученном из \mathbb{A} заменой метки μ на метку $\mu + \Delta(p_3)$) и такой, что $\Delta(q^*) = (y - x)\Delta(q) \leq 0$. Это случай 2. Если случай 2 возвращает ответ ”нет”, то и в случае 3 ответ ”нет”. Иначе получаем искомый цикл $p = p_3 \cdot q^*$. \square

Следствие 5.2.10. *Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — графы с метками. Если они связаны скольжением ребра e , то существует алгоритм, указывающий, изоморфны $\pi_1(\mathbb{A})$ и $\pi_1(\mathbb{B})$ или нет. Если ответ ”да”, то алгоритм указывает путь p такой, что \mathbb{B} получается из \mathbb{A} скольжением e по p .*

5.3 Проблема изоморфизма GBS групп с одним мобильным ребром

В этом параграфе представлен алгоритм, решающий проблему изоморфизма в случае, когда у одного из графов с метками мобильное ребро одно.

Ребро e графа с метками \mathbb{A} называется *мобильным* [32], если существует элемент $t \in \pi_1(\mathbb{A})$ такой, что G_e^t строго содержится в G_e . Здесь G_e — рёберная циклическая группа, соответствующая ребру e .

Из работы [32] следует, что в результате индукций, скольжений и $\mathcal{A}^{\pm 1}$ движений метки на немобильных ребрах ограничены и могут принимать конечный набор значений, зависящий от \mathbb{A} , который можно найти алгоритмически. Кроме того, в [32] доказано, что существует алгоритм, выясняющий, мобильно данное ребро или нет.

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 5.3.1. *Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — графы с метками, и число мобильных рёбер \mathbb{A}*

не более 1. Тогда существует алгоритм, решающий проблему изоморфизма групп $\pi_1(\mathbb{A})$ и $\pi_1(\mathbb{B})$. Если $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$, то изоморфизм можно найти алгоритмически.

Здесь и далее будем считать, что \mathbb{A} — редуцированный граф с метками, а $e \in E(\mathbb{A})$ — его единственное мобильное ребро, причём $\partial_0 e = a, \mu = \lambda_e$.

Будем использовать обозначения и определения предыдущего параграфа.

Лемма 5.3.2. $\gamma_p = \gamma_{p^{-1}}$.

Доказательство. Пусть $\Delta p = v^+ + v^-, v^+ \geq 0, v^- \leq 0$. Если $\Delta p^{-1} = w^+ + w^- = -v^+ - v^-$, то $w^+ = -v^-, w^- = -v^+$. Тогда, по определению,

$$\begin{aligned} \gamma_{p^{-1}} &= \max \left\{ \beta_{n-i} + \sum_{j=n-i+1}^n (\beta_j - \alpha_j) + w^-, i = 0, 1, \dots, n-1 \right\} = \\ &= \max \left\{ \beta_{n-i} + \sum_{j=n-i+1}^n (\beta_j - \alpha_j) - v^+, i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\Delta p = v^+ + v^- = \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j),$$

поэтому можно продолжить

$$\begin{aligned} \gamma_{p^{-1}} &= \max \left\{ \beta_{n-i} + \sum_{j=1}^{n-i} (\alpha_j - \beta_j) + v^-, i = 0, 1, \dots, n-1 \right\} = \\ &= \max \left\{ \alpha_{n-i} + \sum_{j=1}^{n-i-1} (\alpha_j - \beta_j) + v^-, i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}. \end{aligned}$$

После обозначения $k = n - i - 1$ получим значение γ_p по определению. \square

Исследуем возможные метки на e при скольжении по циклу p .

Лемма 5.3.3. Пусть \mathbb{A} — граф с метками, μ — метка на ребре e . Пусть p — допустимый цикл в \mathbb{A} , и $v = \Delta(p)$. Тогда в результате скольжения e/p и e/p^{-1} на e могут появиться метки $\{\mu + tv \mid \mu + tv \geq \gamma_p, \mu \geq \gamma_p\}$, и только они.

Доказательство. Скольжение e/p допустимо тогда и только тогда, когда $\mu \geq \gamma_p - v^-$. В результате однократного скольжения получаем метку $\mu + v \geq 0$. Скольжение e/p допустимо $t > 0$ раз, если $\mu \geq \gamma_p - tv^-$. Скольжение e/p допустимо $t < 0$ раз, если $\mu \geq \gamma_p - tv^+$.

Пусть $t \neq 0$, тогда e/p^t допустимо, если и только если выполнены два условия:

$$\mu \geq \gamma_p - tv^- \text{ и } \mu \geq \gamma_p - tv^+.$$

Первое тривиально при $t < 0$, второе — при $t > 0$. Пусть

$$v = \begin{pmatrix} v^- \\ v^+ \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \gamma_p = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда условия допустимости примут вид:

$$\mu_1 + tv^- \geq \gamma_1, \mu_2 \geq \gamma_2, \mu_1 \geq \gamma_1, \mu_2 + tv^+ \geq \gamma_2.$$

Несложно понять, что эти условия эквивалентны

$$\mu + tv \geq \gamma_p, \mu \geq \gamma_p,$$

второе тривиально, так как p — допустим. □

Для данного $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ понять, может ли метка u появиться на ребре e в результате скольжения ребра e , можно с помощью теоремы 5.2.9.

Пусть $u, v \in \mathbb{Z}^r$, через $[u, v]$ будем обозначать $w \in \mathbb{Z}^r$, для которого $[w]_i = \max([u]_i, [v]_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Обозначим Δq_i через v_i , $i = 1, 2, \dots, k$, а путь $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k$ — через q_0 . Используя леммы 5.2.8 и 5.3.3, докажем следующую лемму.

Лемма 5.3.4. Пусть \mathbb{A} — граф с метками, $e \in E(\mathbb{A})$. В результате скольжений ребра e каждая метка из множества

$$\Lambda(\mu) = \left\{ \mu + \sum_{i=1}^k s_i v_i \mid \mu + \sum_{i=1}^k s_i v_i \geq \gamma_{q_0} \right\}$$

может появиться на e .

Доказательство. С помощью последовательного прохождения циклов q_1, \dots, q_k из леммы 5.2.8 и применения к ним леммы 5.3.3 на ребре e может возникнуть метка из множества:

$$\Lambda_1(\mu) = \left\{ \mu + \sum_{i=1}^k t_i v_i \mid \mu + \sum_{i=1}^j t_i v_i \geq [\gamma_{q_j}, \gamma_{q_{j+1}}], j = 1, \dots, k-1, \right. \\ \left. \mu + \sum_{i=1}^k t_i v_i \geq \gamma_{q_k} \right\}.$$

Применим лемму 5.3.3 для цикла q_0 , получим метки из множества:

$$\Lambda_2(\mu) = \left\{ \mu + \sum_{i=1}^k t_i v_i + s \sum_{i=1}^k v_i \mid \mu + \sum_{i=1}^j t_i v_i \geq [\gamma_{q_j}, \gamma_{q_{j+1}}], j = 1, \dots, k-1, \right. \\ \left. \mu + \sum_{i=1}^k t_i v_i \geq [\gamma_{q_k}, \gamma_{q_0}], \mu + \sum_{i=1}^k (t_i + s) v_i \geq \gamma_{q_0} \right\}.$$

Обозначим $t_i + s$ через s_i получим:

$$\Lambda_3(\mu, s) = \left\{ \mu + \sum_{i=1}^k s_i v_i \mid \mu + \sum_{i=1}^j s_i v_i \geq [\gamma_{q_j}, \gamma_{q_{j+1}}] + s \sum_{i=1}^j v_i, j = 1, \dots, k-1, \right. \\ \left. \mu + \sum_{i=1}^k s_i v_i \geq [\gamma_{q_k}, \gamma_{q_0}] + s \sum_{i=1}^k v_i, \mu + \sum_{i=1}^k s_i v_i \geq \gamma_{q_0} \right\}.$$

При этом

$$\Lambda_2(\mu) = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} \Lambda_3(\mu, s).$$

Покажем, что для каждого набора s_1, s_2, \dots, s_k , удовлетворяющего неравенству $\mu + \sum_{i=1}^k s_i v_i \geq \gamma_{q_0}$, можно найти $s \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mu + \sum_{i=1}^j s_i v_i \geq [\gamma_{q_j}, \gamma_{q_{j+1}}] + s \sum_{i=1}^j v_i, j = 1, \dots, k-1, \\ \mu + \sum_{i=1}^k s_i v_i \geq [\gamma_{q_k}, \gamma_{q_0}] + s \sum_{i=1}^k v_i.$$

Это будет означать, что $\Lambda(\mu) \subseteq \Lambda_2(\mu)$, и докажет лемму.

Для этого заметим, что ввиду допустимости $q_i, i = 1, 2, \dots, k$ и q имеем $\mu \geq \gamma_{q_i}, i = 1, 2, \dots, k$ и $\mu \geq \gamma_q$. Отсюда $\mu \geq [\gamma_{q_j}, \gamma_{q_{j+1}}], j = 1, \dots, k-1$ и $\mu \geq [\gamma_{q_k}, \gamma_{q_0}]$. Поэтому для данных s_1, s_2, \dots, s_k нужно взять $s \leq \min(s_1, s_2, \dots, s_k)$. \square

Для того чтобы разобраться с допустимыми неположительными циклами, нам понадобятся рассуждения в терминах доказательства теоремы 5.2.9. Приведем необходимые обозначения. Через $b(q_0) \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$ обозначим множество положительных координат вектора Δq_0 . С точностью до перенумерации координат будем считать, что $b(q_0) = \{1, 2, \dots, |b(q_0)|\}$. Через $\overline{b(q_0)}$ обозначим $\{1, 2, \dots, r\} \setminus b(q_0)$.

Пусть $v \in \mathbb{Z}^r$, обозначим через $v|_{b(q_0)}$ вектор $([v]_1, [v]_2, \dots, [v]_{|b(q_0)|}) \in \mathbb{Z}^{|b(q_0)|}$.

Обозначим граф с метками, полученный из \mathbb{A} заменой всех меток λ_e на метки $\lambda_e|_{\overline{b(q_0)}}$ через \mathbb{A}_{q_0} . Если ребро e фиксировано, то будем обозначать граф с метками, полученный из \mathbb{A} заменой метки λ_e на τ , через \mathbb{A}^τ .

Лемма 5.3.5. Пусть \mathbb{A} — граф с метками, и $e \in E(\mathbb{A})$. Существует вычисляемая константа M такая, что если p — допустимый цикл и $\Delta p \not\geq 0$, то найдется допустимый цикл f такой, что $\Delta p \geq \Delta f$ и $|\Delta f|_1 \leq M$.

Доказательство. Фиксируем q'_1, q'_2, \dots, q'_k — базис неотрицательных допустимых путей в \mathbb{A} (лемма 5.2.8). Пусть p — допустимый цикл и $\Delta p \not\geq 0$. Построим p' по индукции так: $p_0 = p$, если $p_i \cdot (q'_j)^{-1}$ недопустим для всех $1 \leq j \leq k$, то $p' = p_i$, иначе найдём j , для которого $p_i \cdot (q'_j)^{-1}$ допустим, и положим $p_{i+1} = p_i \cdot (q'_j)^{-1}$. Построение конечно ввиду того, что $\Delta p_{i+1}|_{b(q_0)} < \Delta p_i|_{b(q_0)}$, и критерия допустимости. Если мы найдём требуемый f для p' , то он подойдет и для p , поэтому переобозначим p' через p .

Пусть $\mathbb{A}^{\mu+\Delta p}$ — граф с метками, полученный из \mathbb{A} заменой метки μ на $\mu + \Delta p$. Заметим, что q' допустим, $\Delta q' \geq 0$ в \mathbb{A} тогда и только тогда, когда $p^{-1}q'p = q$ допустим в $\mathbb{A}^{\mu+\Delta p}$ (это следует из критерия допустимости, учитывая $\Delta q \geq 0$). При этом $\Delta q = \Delta q'$. Обозначим $p^{-1} \cdot q'_i \cdot p$ через q_i . Тогда q_1, q_2, \dots, q_k — базис неотрицательных допустимых путей в $\mathbb{A}^{\mu+\Delta p}$.

Пока будем считать, что M — достаточно большое число. В результате доказательства будет показано, как вычислить M для данных \mathbb{A} и $e \in E(\mathbb{A})$. Если $|\Delta p|_1 \leq M$, тогда утверждение доказано, если же $|\Delta p|_1 > M$, то путь p удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если g — допустимый неотрицательный цикл $\mathbb{A}^{\mu+\Delta p}$, то g^{-1} недопустим в $\mathbb{A}^{\mu+\Delta p}$;
- 2) $|\Delta p|_1 > M$;
- 3) e/p допустим в \mathbb{A} ;

4) $\Delta p \not\geq 0$.

Покажем, насколько большим надо взять число M , чтобы эти условия были противоречивы. Предположим, что такой цикл нашёлся. Разобьём множество индексов $\{1, 2, \dots, r\} = b_M \sqcup b \sqcup tail$ так, что $tail = \{1, 2, \dots, r\} \setminus b(q_0)$, $b_M = \{i \mid [\Delta p]_i > M\} \setminus tail$ и b – остальные индексы. Переформулируем условие 1 в неравенствах: g – допустимый неотрицательный в $\mathbb{A}^{\mu+\Delta p}$, если $\mu + \Delta p \geq \gamma_g$, g^{-1} недопустимый в $\mathbb{A}^{\mu+\Delta p}$, если $\mu + \Delta p \not\geq \gamma_g + \Delta g$. Последнее условие эквивалентно:

$$\begin{aligned} (\gamma_g + \Delta g)|_{b_M} &\not\leq (\mu + \Delta p)|_{b_M}, \text{ или} \\ (\gamma_g + \Delta g)|_b &\not\leq (\mu + \Delta p)|_b, \text{ или} \\ (\gamma_g + \Delta g)|_{tail} &\not\leq (\mu + \Delta p)|_{tail}. \end{aligned}$$

Так как q_i , $i = 1, \dots, k$ – допустимые и неотрицательные, то проверим для них условие 1. Первое условие не выполнено ни для одного q_i при условии $M > \max_{i=1,2,\dots,k} \max_{j \in b_M} [\gamma_{q_i} + \Delta q_i - \mu]_j$ (условие на M).

Третье условие преобразуется в $\gamma_g|_{tail} \not\leq \mu + \Delta p|_{tail}$, так как $\Delta g \geq 0$ и, следовательно, $supp(\Delta g) \subseteq b(q_0)$. При этом условие $\gamma_g|_{tail} \not\leq (\mu + \Delta p)|_{tail}$ невыполнимо, так как g допустим. Значит, по выбору M свойство 1 может быть переформулировано так:

1'. если g – допустимый неотрицательный цикл, и

$$\Delta g|_{b_M} \leq \mu - \gamma_g + \Delta p|_{b_M} < \mu - \gamma_g + M,$$

то

$$\gamma_g + \Delta g|_b \not\leq \mu + \Delta p|_b.$$

Проведём рассуждение, как в доказательстве 5.2.9. Пусть p индуцирован одним из путей в $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbb{A}_{q_0}, e)$, соединяющего $\mathbb{A}_{q_0}^{\mu|_{\overline{b(q_0)}}}$ и $\mathbb{A}_{q_0}^{\mu+\Delta p|_{\overline{b(q_0)}}}$. Это означает, что $\Delta p|_{b(q_0)} \in \Delta p_0|_{b(q_0)} + \langle \Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_k \rangle_{\mathbb{Z}}$, где в качестве p_0 можно взять путь индуцированный самым коротким путем в \mathfrak{A} , соединяющим $\mathbb{A}_{q_0}^{\mu|_{\overline{b(q_0)}}}$ и $\mathbb{A}_{q_0}^{\mu+\Delta p|_{\overline{b(q_0)}}}$. Так как \mathfrak{A} конечен, то $|\Delta p_0|_1$ ограничено вычислимой константой. Итак,

$$\Delta p = \Delta p_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \Delta q_i.$$

Перенумеруем пути q_1, q_2, \dots, q_k так, чтобы $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$.

Если $i \in b_M$, то $M < [\Delta p_0]_i + \sum_{s=1}^k \alpha_s [\Delta q_s]_i \leq [\Delta p_0]_i + \alpha_1 \sum_{s=1}^k [\Delta q_s]_i$. Значит,

$$i \in b_M \Rightarrow \alpha_1 > \frac{M - [\Delta p_0]_i}{\sum_{s=1}^k [\Delta q_s]_i}, \quad (5.19)$$

причём $\sum_{s=1}^k [\Delta q_s]_i > 0$, иначе $i \notin b_M$ при $M > |\Delta p_0|_1$ (условие на M).

Так как q_1 допустим, $\Delta q_1 \geq 0$, и $\Delta q_1|_{b_M} \leq \mu - \gamma_{q_1} + M$, то найдется $i_1 \in b(q_0)$, $i_1 \notin b_M$ такое, что

$$\begin{aligned} [\gamma_{q_1} + \Delta q_1]_{i_1} &> [\mu]_{i_1} + [\Delta p_0]_{i_1} + \sum_{s=1}^k \alpha_s [\Delta q_s]_{i_1} \geq \\ &\geq [\mu]_{i_1} + [\Delta p_0]_{i_1} + \alpha_1 [\Delta q_1]_{i_1} + \alpha_k \sum_{s=2}^k [\Delta q_s]_{i_1}. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом (5.19) получаем $\alpha_k < A - B \cdot M$, где

$$B = \frac{[\Delta q_1]_{i_1}}{\sum_{s=1}^k [\Delta q_s]_{i_1} \cdot \sum_{s=2}^k [\Delta q_s]_{i_1}}.$$

Причём $[\Delta q_1]_{i_1} > 0$, иначе $[\gamma_{q_1}]_{i_1} \not\geq [\mu + \Delta p]_{i_1}$ ввиду допустимости q_1 . Кроме того, как отмечено выше, $\sum_{s=1}^k [\Delta q_s]_i > 0$. Так же $\sum_{s=2}^k [\Delta q_s]_{i_1} > 0$, иначе $\alpha_1 < const$, что противоречит (5.19) по выбору M (условие на M). Значит, $B > 0$.

Далее заметим, что из

$$\begin{aligned} [\gamma_{q_1} + \Delta q_1 - \mu - \Delta p_0]_{i_1} &> \sum_{s=1}^k \alpha_s [\Delta q_s]_{i_1} \geq \\ &\geq \alpha_1 [\Delta q_1]_{i_1} + \alpha_k \sum_{s=2}^k [\Delta q_s]_{i_1} \end{aligned}$$

следует, что $A_1 - \alpha_k \cdot B_1 > \alpha_1$, где

$$A_1 = \frac{[\gamma_{q_1} + \Delta q_1' - \mu - \Delta t_0]_{i_1}}{[\Delta q_1]_{i_1}}, \quad B_1 = \frac{\sum_{s=2}^k [\Delta q_s]_{i_1}}{[\Delta q_1]_{i_1}}.$$

Наконец заметим, что для всех $j \in b(\Delta q)$ выполнено:

$$\begin{aligned} [\gamma_{q_1}]_j &\leq [\mu + \Delta p_0]_j + \sum_{s=1}^k \alpha_s [\Delta q_s]_j \leq \\ &\leq [\mu + \Delta p_0]_j + \alpha_1 \sum_{s=1}^{k-1} [\Delta q_s]_j + \alpha_k [\Delta q_k]_j < \end{aligned}$$

$$< [\mu + \Delta p_0]_j + A_1 \sum_{s=1}^{k-1} [\Delta q_s]_j + \alpha_k \cdot \left([\Delta q_k]_j - B_1 \cdot \sum_{s=1}^{k-1} [\Delta q_s]_j \right).$$

Обозначим $[\Delta q_k]_j - B_1 \cdot \sum_{s=1}^{k-1} [\Delta q_s]_j$ через T_j . Если найдется j такое, что $T_j > 0$, то $\alpha_k > const$, что не верно для достаточно больших M (условие на M). Значит, для всех $j \in b(\Delta q)$ $T_j \leq 0$.

Обозначим $[\Delta q_1]_{i_1}$ через α , а $\sum_{s=2}^k [\Delta q_s]_{i_1}$ — через β . Тогда $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{>0}$. Пусть $q_* = (q_1)^\beta (q_2)^\beta \dots (q_{k-1})^\beta (q_k)^{-\alpha}$.

Разделим α_1 с остатком на β : $\alpha_1 = \beta_1 \beta + r_1$, $0 \leq r_1 < \beta$. В базисе неотрицательных допустимых путей заменим q_1 на q_0 , тогда разложение Δp изменится:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta p_0 + \sum_{s=1}^k \alpha_s \Delta q_s = \Delta p_0 + r_1 \Delta q_1 + \beta_1 (\beta \Delta q_1) + \sum_{s=2}^{k-1} \alpha_s \Delta q_s + \alpha_k \Delta q_k = \\ &= \Delta p_0 + r_1 \Delta q_1 + \beta_1 (\Delta q_* + \alpha \Delta q_k - \beta \sum_{s=2}^{k-1} \Delta q_s) + \sum_{s=2}^{k-1} \alpha_s \Delta q_s + \alpha_k \Delta q_k = \\ &= \Delta p_0 + r_1 \Delta q_1 + \beta_1 \Delta q_* + \sum_{s=2}^{k-1} (\alpha_s - \beta_1 \beta) \Delta q_s + (\alpha_k + \alpha \beta_1) \Delta q_k. \end{aligned}$$

Обозначим новые коэффициенты через β_s :

$$\beta_s = \alpha_s - \beta_1 \beta, 2 \leq s \leq k-1, \beta_k = \alpha_k + \alpha \beta_1$$

Заметим, что $\beta_s = \alpha_s - \beta_1 \beta \leq \alpha_1 - \beta_1 \beta = r_1$, $2 \leq s \leq k-1$, и

$$\beta_k = \alpha_k + \alpha \beta_1 = \alpha_k + \alpha \frac{\alpha_1 - r_1}{\beta} < \alpha_k + \frac{\alpha}{\beta} (A_1 - \alpha_k B_1 - r_1) =$$

При этом $B_1 = \beta/\alpha$, следовательно,

$$= \alpha_k + \frac{\alpha}{\beta} (A_1 - \alpha_k \frac{\beta}{\alpha} - r_1) = \frac{\alpha}{\beta} A_1 - r_1.$$

Значит, все β_s , $2 \leq s \leq k$ ограничены. Поэтому, выбрав M достаточно большим:

$$M > |\Delta p_0 + r_1 \Delta q_1 + \sum_{s=2}^{k-1} r_1 \Delta q_s + (\frac{\alpha}{\beta} A_1 - r_1) \Delta q_k|_1$$

(условие на M), — можно видеть, что $supp(\Delta q_*) = b_M$.

Теперь заметим, что q_* — допустимый неотрицательный цикл, и $|\Delta q_0 + \gamma_{q_0} - \mu|_1 \leq M$ (условие на M), значит, $(q_*)^{-1}$ недопустим. Следовательно, найдется $i_2 \in \text{supp}(\Delta q_*)$, как в условии 1', и $i_2 \notin b_M$ по выбору M . Однако $\text{supp}(\Delta q_*) = b_M$ по построению. Противоречие. Таким образом, нужная константа M может быть вычислена. \square

Доказанные леммы позволяют нам полностью описать множество возможных меток на мобильном ребре.

Обозначим через $f_i, i = 1, 2, \dots, L$ такие допустимые циклы, что $|\Delta f_i|_1 \leq M$, и $\Delta f_i \neq \Delta f_j$ при $i \neq j$. Их конечное число, и все они могут быть найдены с помощью теоремы 5.2.9. При этом выполняется $\mu \geq \gamma_{f_i} + \Delta f_i^-, i = 1, 2, \dots, L$.

Обозначим через $\Lambda_i, i = 1, 2, \dots, L$ множества меток вида

$$\Lambda_i = \left\{ \mu_i + \sum_{i=1}^k t_i v_i \mid \mu + \sum_{i=1}^k t_i v_i \geq [\gamma_{q_0}, \gamma_{f_i} - \Delta f_i^-] \right\},$$

где $\mu_i = \mu + \Delta f_i$. Каждая метка из всех этих множеств может появиться на e в результате скольжений (по леммам 5.2.2 и 5.3.4). Оказывается, других меток быть не может.

Теорема 5.3.6. *Если p — допустимый цикл, и $\Delta p \not\geq 0$, то для некоторого i $\mu + \Delta p \in \Lambda_i$.*

Доказательство. Для данного p по лемме 5.3.5 найдется $i, 1 \leq i \leq L$ такое, что $\Delta p \geq \Delta f_i$. Покажем, что $\mu + \Delta p \in \Lambda_i$. Цикл $f_i^{-1} \cdot p$ допустим в $\mathbb{A}^{\mu + \Delta f_i}$ и $\Delta(f_i^{-1} \cdot p) = \Delta p - \Delta f_i \geq 0$, поэтому для некоторых $t_s^0, s = 1, 2, \dots, k$

$$\Delta p - \Delta f_i = \sum_{s=1}^k t_s^0 v_s.$$

Поэтому

$$\mu + \Delta p = \mu + \Delta f_i + (\Delta p - \Delta f_i) = \mu + \Delta f_i + \sum_{s=1}^k t_s^0 v_s = \mu_i + \sum_{s=1}^k t_s^0 v_s.$$

Кроме того, из допустимости q_0 и f_i следует, что

$$\mu + \sum_{s=1}^k t_s^0 v_s = \mu + (\Delta p - \Delta f_i) \geq \mu \geq [\gamma_{q_0}, \gamma_{f_i} - \Delta f_i^-].$$

\square

Лемма 5.3.7. Пусть \mathbb{A} и \mathbb{B} — редуцированные графы с метками, \mathbb{A} имеет единственное мобильное ребро e , и $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$. Тогда существует последовательность $S_N \circ S_M$ или $S_N \circ S_M \circ \mathcal{A} \circ S_M \circ \text{Ind}$, соединяющая \mathbb{A} и \mathbb{B} .

Доказательство. Скольжение немобильных рёбер можно провести сначала. Пусть $P_1 \circ \dots \circ P_N$ — последовательность скольжений, индукций и $\mathcal{A}^{\pm 1}$ движений, соединяющая \mathbb{A} и \mathbb{B} . Движение \mathcal{A}^{-1} появиться не может вперёд \mathcal{A} , так как тогда у \mathbb{A} было бы два мобильных ребра. Аналогично до \mathcal{A} не может быть индукций.

Пусть в последовательности $P_1 \circ \dots \circ P_N$ есть отрезок $\mathcal{A} \circ (S, I)^* \circ \mathcal{A}^{\pm 1}$.

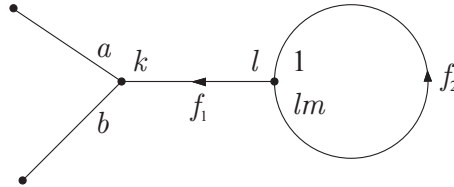


Рис. 5.4: Граф с метками \mathbb{A} после \mathcal{A} движения.

Какие скольжения и индукции возможны? Возможны только скольжения $f_1, \overline{f_1}, f_2, \overline{f_2}$, так как других мобильных рёбер нет. Скольжения $\overline{f_2}$ невозможны, так как l не может быть 1 (по определению $\mathcal{A}^{\pm 1}$ движений), скольжение f_2 невозможно, так как после такого скольжения \mathbb{A} перестаёт быть редуцированным. Скольжения f_1 и индукции могут сделать из метки l метку $l \cdot (lm)^c \cdot l_1 \cdot \dots \cdot l_s$, где $l_i | lm$. Скольжение $\overline{f_1}$ по допустимому p делают метку $k \cdot d, d = \Delta p$. В итоге получим рис. 5.5.

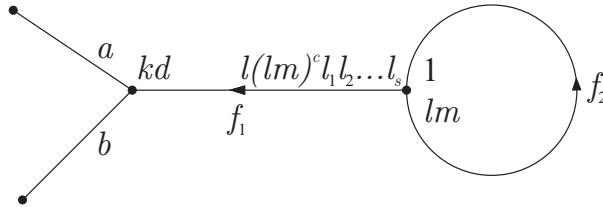


Рис. 5.5: Граф с метками \mathbb{A} после \mathcal{A} движения и $(S, I)^*$.

Исходя из требований преобразования \mathcal{A}^{-1} , необходимо $l \cdot (lm)^c \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_s | lm$. Обозначим $(lm)^c \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_s$ через m_1 , тогда $l \cdot m_1 | lm$. После преобразования \mathcal{A}^{-1} получим рис. 5.6.

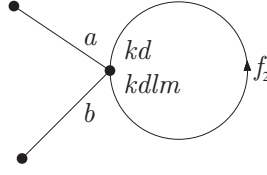


Рис. 5.6: Граф с метками \mathbb{A} после $\mathcal{A} \circ (S, I)^* \circ \mathcal{A}^{-1}$.

Получившиеся метки могли бы появиться в результате скольжений мобильного ребра, значит преобразования $\mathcal{A} \circ (S, I)^* \circ \mathcal{A}^{-1}$ не дают новых меток по сравнению со скольжениями и индукциями. После \mathcal{A} преобразования S_M и Ind перестановочны. \square

Доказательство теоремы 5.3.1. По теореме 1.3.7 если $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$, то существует последовательность скольжений, индукций и $\mathcal{A}^{\pm 1}$ движений, соединяющая \mathbb{A} и \mathbb{B} . По лемме 5.3.7 эта последовательность имеет вид $S_N \circ S_M$ или $S_N \circ S_M \circ \mathcal{A} \circ S_M \circ Ind$.

Если это последовательность вида $S_N \circ S_M$, то описание искомого множества меток на мобильном ребре даётся в теореме 5.3.6 и леммах 5.2.8, 5.3.4.

Если это последовательность вида $S_N \circ S_M \circ \mathcal{A} \circ S_M \circ Ind$, то аналогичное описание получается из всех графов, допускающих \mathcal{A} преобразование.

Проверка изоморфизма сводится теперь к поиску \mathbb{B} среди указанных графов с метками. Это, в свою очередь, реализуется проверкой разрешимости конечного числа систем линейных диофантовых уравнений и неравенств. Если $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$, то конкретная последовательность скольжений, индукций и $\mathcal{A}^{\pm 1}$ движений может быть указана. Поэтому изоморфизм может быть найден алгоритмически. \square

Заключение

В диссертации получены новые результаты о теоретико групповом устройстве обобщённых групп Баумслэга–Солитера и решены некоторые алгоритмические проблемы для этих групп. Основные результаты диссертации таковы:

1. Описана структура абстрактного соизмерителя групп Баумслэга–Солитера с взаимно простыми параметрами. Описаны неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслэга–Солитера с взаимно простыми параметрами. Найден критерий вложимости групп Баумслэга–Солитера с взаимно простыми параметрами в GBS группу. Вложения построены явно. Тем самым получен ответ на вопрос Ж. Левитта 2007 года.

2. Для произвольной GBS группы описана централизаторная размерность. Указан алгоритм для вычисления c -размерности GBS групп. Найден критерий универсальной эквивалентности GBS групп, представленных деревьями с метками. Построен алгоритм проверки универсальной эквивалентности таких GBS групп.

3. Указан критерий \mathcal{F}_π -аппроксимлируемости GBS групп. Описаны все группы n -узлов, которые действуют на деревьях с бесконечными циклическими стабилизаторами вершин и рёбер. Явно описаны подгруппы конечного индекса небольших GBS групп и изучены их свойства. Тем самым получен ответ на вопрос Ж. Левитта 2015 года.

4. Указан критерий вложения произвольной GBS группы в GBS группу, представленную конечным числом редуцированных графов с метками. Описан алгоритм проверки вложимости и построения вложения. Для GBS групп G , заданных графом с метками с одним мобильным ребром, указан алгоритм проверки изоморфизма произвольной GBS группы и группы G .

Следует отметить, что полученные результаты открывают возможность для дальнейшего исследования обобщённых групп Баумслэга–Солитера. Представляет интерес изучить хопфовость GBS групп, исследовать устройство группы внешних автоморфизмов, добиться более полного описания алгоритмических свойств. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в комбинаторной и геометрической теории групп и при чтении спецкурсов на математических факультетах.

Литература

- [1] Д. Н. Азаров, О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением, Матем. заметки, 64, 1(1998), 3–13.
- [2] Д. Н. Азаров, О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщённых свободных произведений групп конечного ранга, Сиб. матем. журн., 54, 6(2013), 1203–1215.
- [3] Д. Н. Азаров, О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп, Матем. заметки, 96, 2(2014), 163–169.
- [4] Д. Н. Азаров, Критерий \mathcal{F}_π -аппроксимируемости свободных произведений с объединённой циклической подгруппой нильпотентных групп конечных рангов, Сиб. матем. журнал, 57, 3 (2016), 483–494.
- [5] Е. И. Бунина, Г. А. Калеева, Универсальная эквивалентность общих и специальных линейных групп над полями, Фундамент. и прикл. матем., 21, 3(2016), 73–106.
- [6] Ю. Ш. Гуревич, А. И. Кокорин, Универсальная эквивалентность упрямоченных абелевых групп, Алгебра и логика, 2, 1(1963), 37–39.
- [7] О. А. Иванова, Д. И. Молдаванский, Аппроксимируемость конечными π -группами некоторых групп с одним определяющим соотношением, Науч. труды ИвГУ, Математика, 6(2008), 51–58.
- [8] Г. А. Калеева, Универсальная эквивалентность линейных групп над локальными коммутативными кольцами с $1/2$, Алгебра и логика, 58, 4(2019), 467–478.

- [9] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп. М.: Наука. Физматлит, 1996, 288 с.
- [10] М. Касальс-Руис, И. В. Казачков, Два замечания о теориях первого порядка групп Баумслага–Солитера, Сиб. матем. журн., 53, 5(2012), 1007–1012.
- [11] Л. Ф. Косвинцев, Конечные группы с максимальными централизаторами элементов, Мат. заметки, 13, 4(1973), 577–580.
- [12] Ю. В. Кузьмин, Гомологическая теория групп, М.: Факториал Пресс, 2006, 352 с.
- [13] Р. Линдон, П. Шупп, Комбинаторная теория групп: Пер. с англ, М.: Мир, 1980, 447 с.
- [14] А. А. Мищенко, Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных нильпотентных групп, Сиб. матем. журн., 52, 5(2011), 1113–1122.
- [15] Д. И. Молдаванский, Об аппроксимируемость групп Баумслага–Солитера, Чебышевский сборник, 13, 1(2012), 110–114.
- [16] А. Г. Мясников, Н. С. Романовский, Об универсальных теориях жёстких разрешимых групп, Алгебра и логика, 50, 6(2011), 802–821.
- [17] П. С. Новиков, Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества теории групп, Докл. АН СССР., 85, 4(1952), 709–712.
- [18] Е. И. Тимошенко, О сохранении элементарной и универсальной эквивалентности при сплетении, Алгебра и логика, 7, 4(1968), 114–119.
- [19] Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, 49, 2(2010), 263–290.
- [20] F. A. M. Aldosray and I. Stewart, Lie algebras with the minimal condition on centralizer ideals. Hiroshima Math. J., 19, 2(1989), 397–40.

- [21] D. Azarov, Residual properties of generalized free products with cyclic amalgamation, *Commun. in Algebra.*, 43, 4(2015), 1464–1471.
- [22] H. Bass, Covering theory for graphs of groups, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 89, 1(1993), 3–47.
- [23] G. Baumslag, D. Solitar, Some two-generator one-relator non-hopfian groups, *Bull. AMS*, 68, 3(1962), 199–201.
- [24] B. Beeker, Multiple conjugacy problem in graphs of free abelian groups, *Groups Geom. Dyn.*, 9, 1(2015), 1–27.
- [25] V. Bludov, On locally nilpotent groups with the minimal condition on centralizers. In *Groups St. Andrews 1997 in Bath, I*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 260, 81–84, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [26] N. Brownlowe, A. Munday, D. Pask, J. Spielberg, A. Thomas, \mathcal{C}^* -algebras associated to graphs of groups, *Advances in Math.*, 316(2017), 114–186.
- [27] O. Bogopolski, Abstract commensurators of solvable Baumslag–Solitar groups, *Commun. Algebra*, 40, 7(2012), 2494–2502.
- [28] R. M. Bryant, B. Hartley, Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralisers, *J. Algebra*, 61(1979), 326–334.
- [29] J. O. Button, Large groups of deficiency 1, *Israel Journal of Mathematics*, 167, 1(2008), 111–140.
- [30] J. O. Button, A formula for the normal subgroup growth of Baumslag–Solitar groups, *J. Group Theory*, 11, 6(2008), 879–884.
- [31] J. O. Button, R. P. Kropholler, Nonhyperbolic free-by-cyclic and one-relator groups, *New York J. Math.*, 22(2016), 755–774.
- [32] M. Clay, M. Forester, On the isomorphism problem for generalized Baumslag–Solitar groups, *Algebraic & Geometric Topology*, 8(2008), 2289–2322.

- [33] M. Clay, Deformation spaces of G -trees and automorphisms of Baumslag–Solitar groups, *Groups Geom. Dyn.*, 3(2009), 39–69.
- [34] M. Clay, M. Forester, Whitehead moves for G -trees, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2, 41(2009), 205–212.
- [35] D. J. Collins, The automorphism towers of some one-relator groups, *J. London Math. Soc.*, 3, 36(1978), 480–493.
- [36] A. L. Delgado, D. J. S. Robinson, M. Timm, Generalized Baumslag–Solitar groups and geometric homomorphisms, *J. Pure Appl. Alg.*, 215, 4(2011), 398–410.
- [37] A. L. Delgado, D. J. S. Robinson, M. Timm, Generalized Baumslag–Solitar graphs with soluble fundamental groups, *Alg. Coll.*, 21, 1(2014), 53–58.
- [38] A. L. Delgado, D. J. S. Robinson, M. Timm, Cyclic normal subgroups of generalized Baumslag–Solitar groups, *Comm. Alg.*, 45, 4(2017), 1808–1818.
- [39] A. L. Delgado, D. J. S. Robinson, M. Timm, 3-manifolds and generalized Baumslag–Solitar groups, *Comm. Anal. Geom.*, 26, 3(2018), 571–584.
- [40] D. Dieter, N. Petrosyan, Bredon cohomological dimensions for groups acting on $CAT(0)$ -spaces. *Groups Geom. Dyn.*, 9, 4(2015), 1231–1265.
- [41] F. A. Dudkin, Subgroups of Baumslag–Solitar groups, *Algebra and Logic*, 48, 1(2009), 1–19.
- [42] F. A. Dudkin, Subgroups of finite index in Baumslag–Solitar groups, *Algebra and Logic*, 49, 3(2010), 221–232.
- [43] A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov, Centralizer dimension and universal classes of group, *Sib. Electron. Math. Rep.*, 3(2006), 197–215.
- [44] M. Edjvet, S. J. Pride, The concept of "largeness" in group theory, II, *Groups-Korea 1983* (Kyoungju, 1983), 2954, *Lecture Notes in Math.*, 1098, Springer, Berlin, 1984.

- [45] M. Ershov, On the commensurator of the Nottingham group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(2010), 6663–6678.
- [46] E. S. Esyp, I. V. Kazatchkov, V. N. Remeslennikov, Divisibility theory and complexity of algorithms for free partially commutative groups, *Contemporary Math., Groups, Languages, Algorithms*, 378(2005), 319–348.
- [47] B. Farb, M. Handel, Commensurations of $Out(F_n)$, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 105(2007), 1–48.
- [48] M. Forester, Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees, *Geom. & Topol.*, 6(2002), 219–267.
- [49] M. Forester, On uniqueness of JSJ decomposition of finitely generated groups, *Comm. Math. Helv.*, 78(2003), 740–751.
- [50] M. Forester, Splittings of generalized Baumslag-Solitar groups, *Geometriae Dedicata*, 121, 1(2006), 43–59.
- [51] F. Fournier-Facio, Ultrametric analogues of Ulam stability of groups, arXiv:2105.00516, preprint, 2021.
- [52] G. Gandini, S. Meinert, H. Rüping, The Farrell–Jones conjecture for fundamental groups of graphs of abelian groups, *Groups Geom. Dyn.*, 9, 3(2015), 783–792.
- [53] E. Gelman, Subgroup growth of Baumslag-Solitar groups, *J. Group Theory*, 8, 6(2005), 801–806.
- [54] N. D. Gilbert, J. Howie, V. Metaftsis, E. Raptis, Tree actions of automorphisms groups, *J. Group theory*, 3(2000), 213–223.
- [55] K. W. Gruenberg, Residual properties of infinite soluble groups, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 7(1957), 29–62.
- [56] C. Guilbault, M. Moran, C. Tirel, Boundaries of Baumslag–Solitar groups, *Algebr. Geom. Topol.*, 19, 4(2019), 2077–2097.

- [57] C. Guilbault, M. Moran, K. Schreve, Compressible spaces and \mathcal{EZ} -structures, arXiv:2007.07764, preprint, 2020.
- [58] J. Howie, A proof of the Scott–Wiegold conjecture on free products of cyclic groups, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 173 (2002), 167–176.
- [59] N. Ito, On finite groups with given conjugate types, *Nagoya Math. J.*, 6(1953), 17–28.
- [60] N. Ivanov, Automorphisms of complexes of Curves and of Teichmüller spaces, *Inter. Math. Res. Not.*, 14(1997), 651–666.
- [61] A. Kawauchi, A survey of knot theory, Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, and Berlin, 1996, 420 pp.
- [62] O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, Locally finite groups, Amsterdam-London, 1973.
- [63] D. Kochloukova, Injective endomorphisms of the Baumslag-Solitar group, *Algebra Colloq.*, 13, 3(2006), 525–534.
- [64] P. H. Kropholler, Baumslag–Solitar groups and some other groups of cohomological dimension two, *Comment. Math. Helv. J.*, 65 (1990), 547–558.
- [65] C. J. Leininger, D. Margalit, Abstract commensurators of braid groups, *J. Algebra*, 299, 2(2006), 447–455.
- [66] J. C. Lennox, J. E. Roseblade, Centrality in Finitely Generated Soluble Groups, *J. Algebra*, 16(1970), 399–435.
- [67] G. Levitt, On the automorphism group of generalized Baumslag-Solitar groups, *Geom. & Topol.*, 11(2007), 473–515.
- [68] G. Levitt, Generalized Baumslag-Solitar groups: rank and finite index subgroups, *Annales de l’institut Fourier*, 65, 2(2015), 725–762.
- [69] G. Levitt, Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups, *Journal of Group Theory*, 18, 1(2015), 1–43.

- [70] D. McLaury, Irreducible Representations of Baumslag-Solitar Groups, *Journal of Group Theory*, 15, 4(2012), 543–552.
- [71] S. Meinert, The Lipschitz metric on deformation spaces of G -trees, *Algebraic & Geometric Topology*, 15(2015), 987–1029.
- [72] S. Meskin, Nonresidually finite one-relator groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 164(1972), 105–114.
- [73] D. I. Moldavanskii, Residual nilpotence of groups with one defining relation, *Math. Notes*, 107, 5(2020), 820–825.
- [74] A. Myasnikov, P. Shumayatsky, Discriminating groups and c -dimension, *J. Group Theory*, 7, 1(2004), 135–142.
- [75] S. J. Pride, The concept of "largeness" in group theory, in *Word problems (II)*, *Stud. Logic Foundations Math.* 95, North-Holland, Amsterdam-New York, 1980, 299–335.
- [76] D. J. S. Robinson, Recent results on generalized Baumslag-Solitar groups, *Note di Matematica*, 30(2010), 37–54.
- [77] D. J. S. Robinson, The Schur Multiplier of a Generalized Baumslag-Solitar Group, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 125(2011), 207–215.
- [78] D. J. S. Robinson, Generalized Baumslag-Solitar groups: a survey of recent progress, *Groups St Andrews 2013*, LMS, Lecture Note Series 422, 2016, 457–469.
- [79] E. Rips, Z. Sela, Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition, *Ann. of Math.* 146 (1997), 53–109.
- [80] P. B. Shalen, Three-manifolds and Baumslag-Solitar groups, *Topology and its Applications*, 110, 1(2001), 113–118.
- [81] R. Schmidt, Zentralisatorverbände endlicher Gruppen, *Rend. Dem. Math. Univ. Padova*, 44(1970), 97–131.

- [82] R. Schmidt, Characterisierung der einfachen Gruppe der Ordnung 175560 durch ihren Zentralisatorverbande, *Math. Z.*, 116, 4(1970), 299–306.
- [83] J. P. Serre, *Trees*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1980.
- [84] E. V. Sokolov, E. A. Tumanova, Generalized direct products of groups and their application to the study of residuality of free constructions of groups, *Algebra Logic*, 58, 6(2020), 480–493.
- [85] E. V. Sokolov, E. A. Tumanova, The root-class residuality of tree products with central amalgamated subgroups, *Sib. Math. J.*, 61, 3(2020), 545–551.
- [86] E. V. Sokolov, E. A. Tumanova, To the question of the root-class residuality of free constructions of groups, *Lobachevskii J. Math.*, 41(2020), 260–272.
- [87] E. V. Sokolov, Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups, *Journal of Algebra*, 582(2021), 1–25.
- [88] E. A. Tumanova, The root class residuality of Baumslag–Solitar groups, *Sib. Math. J.*, 58, 3(2017), 546–552.
- [89] P. Vassiliou, Eine Bemerkung über die von dem Zentralisator bestimmte Abbildung, *Prakt. Akad. Athenon*, 42 (1967), 286–289.
- [90] F. O. Wagner, Nilpotency in groups with the minimal condition on centralizers, *J. Algebra*, 217, 2(1999), 448–460.
- [91] B. A. F. Wehrfritz, Remarks on centrality and cyclicity in linear groups, *J. Algebra* 18(1971), 229–236.
- [92] K. Whyte, The large scale geometry of the higher Baumslag–Solitar groups, *Geom. & Func. Anal.*, 11(2001), 1327–1343.

Работы автора по теме диссертации

- [93] Ф. А. Дудкин, Об абстрактном соизмерителе групп Баумсллага–Солитера, *Алгебра и логика*, 52, 1(2013), 64–83.

- [94] Ф. А. Дудкин, Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумсллага–Солитера, Сиб. матем. журн., 54, 6(2013), 1273–1279.
- [95] Ф. А. Дудкин, О вложении групп Баумсллага–Солитера в обобщённые группы Баумсллага–Солитера, Сиб. матем. журн., 55, 1(2014), 90–96.
- [96] Ф. А. Дудкин, О централизаторной размерности обобщённых групп Баумсллага–Солитера, Алгебра и логика, 55, 5(2016), 611–615.
- [97] Ф. А. Дудкин, О проблеме изоморфизма обобщённых групп Баумсллага–Солитера с одним мобильным ребром, Алгебра и логика, 56, 3(2017), 300–316.
- [98] Ф. А. Дудкин, О решётке централизаторов и централизаторной размерности обобщённых групп Баумсллага–Солитера, Сиб. матем. журн., 59, 3(2018), 514–528.
- [99] Ф. А. Дудкин, Об универсальной эквивалентности обобщённых групп Баумсллага–Солитера, Алгебра и логика, 59, 5(2020), 529–541.
- [100] F. A. Dudkin, On the embedding problem for generalized Baumslag–Solitar groups, Journal of Group Theory, 18, 4(2015), 655–684.
- [101] F. A. Dudkin, Admissible slides for generalized Baumslag–Solitar groups, Siberian Electronic Mathematical Reports, 12(2015), 552–561.
- [102] F. A. Dudkin, Computation of the centralizer dimension of generalized Baumslag–Solitar groups, Siberian Electronic Mathematical Reports, 15(2018), 1823–1841.
- [103] F. A. Dudkin, \mathcal{F}_π -residuality of generalized Baumslag–Solitar groups, Archiv der Mathematik, 114, 2(2020), 129–134.
- [104] F. A. Dudkin, A. S. Mamontov, On knot groups acting on trees, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 29, 9(2020), 2050062.
- [105] F. A. Dudkin, Finite index subgroups in not large generalized Baumslag–Solitar groups, Comm. in Alg., 49, 9(2021), 3736–3742.