Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт математики им. С. Л. Соболева

Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Мамонтов Андрей Сергеевич

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ С ПЛОТНЫМ СПЕКТРОМ

01.01.06 — математическая логика,

алгебра и теория чисел

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени доктора

физико-математических наук

Научный консультант

чл.-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н.

В. Д. Мазуров

Новосибирск – 2021

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Многие теоремы, доказанные сперва для конечных групп, удаётся перенести на более широкие классы групп, накладывая на рассматриваемые группы те или иные ограничения, более слабые, чем конечность числа элементов [1, с. 337]. Такие ограничения называют *условиями конечности*. Примерами подобных условий являются периодичность и локальная конечность.

Группа называется *периодической*, если все её элементы имеют конечные порядки. *Группой периода n* называется группа, в которой выполняется тождество $x^n = 1$. Наименьший период группы называется её *экспонентой*. Группа называется *локально конечной*, если всякое её конечное подмножество порождает конечную подгруппу.

Вопрос о связи понятий периодичности и локальной конечности поднял У. Бернсайд в 1900–1901 годах [2]. Более точно, говоря современным языком, его интересовали следующие вопросы [3]:

Вопрос 1. Пусть n — натуральное число, и G — группа, порядки элементов которой не превосходят n. Является ли G локально конечной?

Вопрос 2. Пусть n — натуральное число. Является ли группа периода n локально конечной?

В 1902 году У. Бернсайд опубликовал работу [4], в которой обсуждал Вопрос 2. Со временем этот вопрос стал известен как *проблема Бернсайда* о группах периода n. Вопрос 1 упоминался в книге [5] со ссылкой на У. Бернсайда.

Эти вопросы довольно разные: второй является частным случаем первого; однако, например, для $n = 6$ на Вопрос 2 получен положительный ответ [6], а Вопрос 1 — открыт, поскольку содержит нерешённый случай Вопроса 2 для $n = 5$. В связи с этим естественно сформулировать аналогичный вопрос, используя следующее понятие.

Спектром периодической группы G называется множество $\omega(G)$ порядков её элементов. Очевидно, спектр группы конечен тогда и только тогда, когда конечен её период. В таком случае спектр однозначно определяется множеством $\mu(G)$ максимальных элементов из $\omega(G)$ по отношению делимости.

Вопрос 3. Пусть ω — фиксированное конечное множество натуральных чисел, и G — периодическая группа, такая что $\omega(G) = \omega$. Является ли G локально конечной?

Поскольку спектр группы содержит единицу и замкнут относительно делимости, то естественно накладывать такие же ограничения и на множество ω.

Далее основное внимание уделяется вопросу 3, а вопросы 1 и 2 затрагиваются лишь по мере необходимости. Естественно описывать историю исследования этих вопросов и известные результаты вместе.

У. Бернсайд в 1902 году отметил локальную конечность групп периода 2 и доказал локальную конечность групп периода 3 [4]. Вскоре было доказано [7, 8, 9], что если G — группа периода 3, порождённая d элементами, то она нильпотентна ступени ≤ 3 и её порядок ограничен в терминах d.

Первым, кто обратился к Вопросу 3, был Б. Нойман. В 1937 году он доказал [10], что если $\omega(G) = \{1, 2, 3\}$, то G локально конечна и является расширением элементарной абелевой группы посредством циклической. Заметим, что из результатов Б. Ноймана и У. Бернсайда, следует положительный ответ на Вопрос 1 для $n = 3$.

В 1940 году И. Н. Санов доказал локальную конечность групп периода 4 [11]. Строение таких групп оказалось несколько неожиданным: с ростом числа порождающих ступень разрешимости группы может неограниченно расти [12]. В той же работе И. Н. Санов доказал и локальную конечность групп со спектром $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4\}$. Строение таких групп описано в работе [13]. Идеи И. Н. Санова также формализованы в работе [14].

В 1956 году вышла знаменитая статья Ф. Холла и Г. Хигмена [15], предоставившая математикам новые мощные методы для исследования конечных групп. В частности, она сподвигла М. Холла написать работу [6], где он доказал локальную конечность групп периода 6 и описал их нормальное строение в духе этой статьи.

Заметим, что позднее в работе [16] М. Ньюмен существенно сократил доказательство М. Холла, сведя его к некоторому утверждению, которое он проверил с помощью компьютера. И. Г. Лысёнок в [17] освободил доказательство Ньюмена от компьютерных вычислений.

В 1959 году П. С. Новиков анонсировал существование бесконечной конечно порождённой группы конечного периода [18]. В 1968 году П. С. Новиков и С. И. Адян написали серию работ [19, 20, 21], в которых доказывалось существование бесконечной m–порождённой группы периода n для нечётного $n \geq 4381$. В 1975 году вышла книга С. И. Адяна [22], где оценка была понижена до нечётного $n \geq 665$. Геометрически наглядный вариант доказательства для нечётных $n > 10^{10}$ был предложен А. Ю. Ольшанским [23, 24], который позднее [25] на основе усовершенствованного им геометрического метода построил примеры бесконечных p-групп (p простое), все собственные подгруппы которых имеют порядок p (так называемые "монстры Тарского"); в [26] предложен другой способ построения таких примеров. Существование не локально конечных групп конечного периода 2^t было анонсировано в 1992 году независимо С. И. Ивановым и И. Г. Лысёнком. Их работы [27] и [28] с доказательствами вышли в 1994 и 1996 годах соответственно. В частности, в работе И. Г. Лысёнка доказывается существование бесконечной m-порождённой группы периода n для любых $m \geq 2$ и $n \geq 8000$.

Из обсуждения выше видна особая роль элементов порядка 2, которые принято называть *инволюциями.* Две инволюции всегда порождают понятно устроенную группу диэдра. В работах Р. Брауэра установлена глубокая взаимосвязь между централизаторами инволюций конечной группы и её строением, например, доказано, что имеется лишь конечное число простых групп с заданным централизатором инволюции [29]. В знаменитой работе У. Фейта и Д. Томпсона [30], доказано, что любая конечная неразрешимая группа содержит инволюцию.

В 1972 году В. П. Шунков [31] доказал замечательную теорему о локальной конечности периодической группы с конечным централизатором инволюции. Появилась надежда, что некоторые результаты о конечных группах с инволюциями могут быть перенесены на периодические группы. Кроме того, появился и метод для подобных исследований, и этот метод используется в диссертации. Отметим работу [32], содержащую другое доказательство теоремы В. П. Шункова.

Работа М. Ньюмена [33] 1979 года вернула в повестку исследований Вопрос 3. Она посвящена 70-летию Б. Ноймана, приводит обзор исследований по этой тематике и в качестве нового результата содержит описание групп G со спектром $\omega(G) = \{1, 2, 5\}$.

Спустя ровно 20 лет, в 1999 году Н. Гупта и В. Д. Мазуров опубликовали работу [34], содержащую существенные продвижения по этому вопросу. Они доказали, что если $\omega(G)$ является собственным подмножеством множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, то либо G локально конечна, либо содержит нильпотентную нормальную подгруппу N, такую что G/N является $5-$группой. Из работ Э. Ябары [35, 36] следует, что в последнем случае G/N конечна, если $N \neq 1$ Таким образом, G локально конечна, или является группой периода 5. Э. Ябара, по сути, доказывает, что группа периода 5, действующая *свободно*, т.е. без нетривиальных неподвижных точек, на абелевой группе, является циклической, — аналог известного утверждения в теории конечных групп. Отметим также работы [37, 38], посвящённые свободному действию, которые используются в диссертации. Работы [39, 40, 41] содержат результаты о $\{2, 3\}-$ группах, действующих свободно на абелевых группах. Свобода действия также естественно возникает в $\{2, 3\}-$группах, не содержащих элементов порядка 6, изучавшихся в работах [42, 43, 44, 45]. Резюмировать результаты этих работ по исследованию Вопроса 3 можно следующим утверждением: если G является группой периода 72 и не содержит элементов порядка 6, то G локально конечна. Заметим, что существуют не локально конечные группы G с $\mu(G) = \{2, 3^n\}$, где $n \geq 7$ [46] и $\mu(G) = \{2^m, 3\}$, где $m \geq 54$ [43].

Периодическую группу G назовём *группой с плотным спектром*, или OC_n-*группой*, если её спектр состоит из всех натуральных чисел от 1 до некоторого натурального числа n, т.е. $\omega(G) = \{1, 2, \dots, n\}$. В 1991 году Р. Брандл и В. Ши опубликовали работу [47], которая содержит классификацию всех *конечных* OC_n-групп. В частности, они доказали, что при $n > 8$ конечных OC_n-групп не существует. Из написанного выше и работы [48] следует, что при $n \le 5$ периодические OC_n группы локально конечны. В диссертации решён Вопрос 3 для периодических OC_6 и OC_7 групп: доказано, что такие группы являются локально конечными. Тем самым, решены вопросы 16.56 В. Д. Мазурова и 19.80 В. Ши из Коуровской тетради [77], являющиеся также частью вопроса 13.64 В.Ши от 1995 года.

В конце 1980-х годов появилось целое направление исследований в теории конечных групп, посвящённое вопросам распознавания неабелевых конечных простых групп по спектру. Среди первых исследователей были В. Ши и В.Д.Мазуров, этому направлению по сути принадлежит и упомянутая выше работа [47].

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество периодических групп и $G \in \mathfrak{M}$. Две группы называются *изоспектральными*, если их спектры равны. Говорят, что G *распознаваема по спектру в* $\mathfrak{M}$, если любая группа, изоспектральная G и лежащая в $\mathfrak{M}$, изоморфна G. К настоящему времени показано, что многие конечные простые группы распознаваемы по спектру в классе конечных групп: обзор текущего состояния исследований в этом направлении можно найти, например, в [49]. Отметим, что вопрос распознавания неабелевых конечных простых групп по спектру в классе всех групп, является частным случаем Вопроса 3.

В 1999 А.Х.Журтов и В.Д.Мазуров доказали [50], что проективные специальные линейные группы $L_2(2^m)$ распознаваемы по спектру в классе всех групп для любого $m > 1$. Эта работа подчеркивает важную связь между устройством централизатора инволюции, который в данном случае является элементарной абелевой 2-группой, и строением периодической группы. В работе [51] получен аналогичный результат для группы $L_2(7)$, спектр которой состоит из делителей чисел $\{3, 4, 7\}$. Поскольку знакопеременная группа A_7 является единственной конечной OC_7 группой [47], то из локальной конечности OC_7 групп, доказанной в диссертации, следует распознаваемость группы A_7 по спектру в классе периодических групп. В диссертации также доказывается, что группы Матьё M_{10} и $M_{21} \simeq L_3(4)$

распознаваемы по спектру в классе периодических групп.

Известны примеры конечных простых групп, которые распознаваемы по спектру в классе конечных групп, но не распознаваемы в классе периодических групп [52]. Они связаны с не локально конечными группами большого чётного периода, обеспечивающими отрицательное решение проблемы Бернсайда.

Заметим, что если G — это OC_6 или OC_7 группа, то G содержит инволюцию i и централизатор инволюции $H = C_G(i)$ является группой периода 12 без элементов порядка 12, т.е. $\mu(H) = \{4, 6\}$. В связи с проблемой Бернсайда для групп периода 12 в нескольких работах получены так называемые редукционные результаты. Так 2-длина [53] и 3-длина [15] группы периода 12 не превосходит двух и эта граница точная. В [54] доказано, что группа периода 12 локально конечна, если конечна любая её подгруппа, порождённая тремя элементами порядка 3. Вопрос о локальной конечности групп периода 12 открыт. Отметим также работу [55], где доказано, что наибольшая конечная группа периода 12, порождённая инволюцией и элементом порядка 3, имеет порядок $2^{66} \cdot 3^7$. В диссертации доказывается, что группа периода 12 без элементов порядка 12 локально конечна. Этот результат обобщает теоремы И. Н. Санова [11] и М. Холла [6]. Кроме того, он проясняет строение централизаторов инволюций в OC_6 и OC_7 группах. В диссертации также доказывается, что группа периода 12 локально конечна, если выполнено одно из следующих условий:

а) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 4;

б) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 6.

Отметим, что подобные условия хорошо известны в теории конечных групп. Конечная группа называется группой *n-транспозиций*, если она порождается классом сопряжённых инволюций D и порядок произведения любых двух элементов из D не превосходит n.

Конечные группы 3-транспозиций начал изучать Б.Фишер [56, 57], они полностью классифицированы [58]. Кроме того, любая группа 3-транспозиций является локально конечной [59]. Спорадические группы Фишера, Бэби монстр и Монстр [60] являются группами 3, 4 и 6-транспозиций соответственно. Используя наработанные в диссертации методы, были классифицированы *минимальные 3-порождённые группы* 6-*транспозиций*, т.е. группы G, для которых выполнены следующие условия:

(1) G порождается тремя элементами из класса сопряжённости D, состоящим из 6-транспозиций;

(2) если $H \leq G$ и $H = \langle H \cap D \rangle$, то либо $H = G$ либо H может быть порождена двумя элементами из D.

Этот результат был использован в теории Майорана, предложенной А. А. Ивановым [61] в качестве аксиоматизации некоторых свойств алгебры Грайса [62]. Напомним, что группа Монстр $\mathbb{M}$ — наибольшая из двадцати шести спорадических групп — была впервые построена, как группа автоморфизмов 196884-мерной коммутативной неассоциативной вещественной алгебры Грайса [62].

Другим направлением исследований, предварявшим изучение групп с плотным спектром, были попытки распространить известные в теории конечных групп результаты Бэра-Сузуки на периодические группы.

Обозначим через $O_p(G)$ максимальную нормальную p-подгруппу периодической группы G. Следующее утверждение известно как теорема Бэра-Сузуки. Пусть x — p-элемент конечной группы G, тогда $x \in O_p(G)$ в том и только в том случае, если $\langle x^g, x^h \rangle$ — p-группа для всех $g, h \in G$ [63, 64, 65]. Существует и несколько других эквивалентных формулировок.

Эта теорема применялась в теории конечных разрешимых групп [66] и при классификации конечных простых групп [67]. Важным практическим следствием теоремы Бэра-Сузуки является утверждение о том, что в простой группе G любая инволюция инвертирует некоторый неединичный элемент нечётного порядка [65].

Различные обобщения и аналоги теоремы Бэра–Сузуки исследовались многими авторами (см., например, [73, 69, 72, 70, 71, 74, 75, 68]). В работе [76], вошедшей в кандидатскую диссертацию соискателя, был доказан аналог теоремы Бэра-Сузуки для групп с условием максимальности для нильпотентных подгрупп.

В 1990 году А. В. Боровик записал в Коуровскую тетрадь [77] вопрос 11.11.а) о том, справедлива ли теорема Бэра-Сузуки в классе периодических групп, отметив, что особый интерес вызывает случай $p = 2$.

В диссертации теорема Бэра-Сузуки для $p = 2$ обобщается на группы периода $4k$, где k нечётно. Отметим, что в этом случае 2-радикал $O_2(G)$ является группой периода 4 и потому локально конечен. Последнее наблюдение показывает, как этот результат можно использовать для исследований групп с заданным спектром, обсуждавшихся выше. В работе [52] доказывается существование группы периода, делящегося на 2^{48}, в которой любые две инволюции порождают 2-группу, но 2 - радикал равен 1.

В диссертационной работе используются компьютерные вычисления в GAP [78] по алгоритму перечисления смежных классов. Отметим, что идея использовать машинные вычисления в этой области исследований появилась практически сразу же с распространением компьютеров. Она активно обсуждалась уже на конференции по бернсайдовым группам в Билфелде в 1977 году, и в последующих публикациях [79, 80]. Например, компьютеры использовались для изучения свойств групп периода 8 [81] и для сравнения их со свойствами бесконечных бернсайдовых групп [82].

Пусть $B(m, n)$ обозначает свободную m-порождённую группу периода n, а $B_0(m, n)$ — наибольшую конечную m-порождённую группу периода n [83, 84]. В работе [85] изучалась природа соотношений, необходимых для доказательства конечности $B(2, 6)$. Показано, что требуется от 22 до 2^{124} соотношений, использующих шестую степень, для определения группы $B(2, 6)$. Авторы работы отмечают ограниченность возможностей компьютера, считая, что непосредственным перечислением смежных классов не удастся ни доказать конечность $B(2, 6)$, ни найти небольшое множество порождающих, поскольку $|B(2, 6)| = 2^{28}3^{25}$. Таким образом, в вопросах бернсайдового типа компьютерные вычисления могут играть только вспомогательную роль. Приведём также несколько известных оценок, которые показывают специфику работы с элементами порядка 5 и 7, в том числе при компьютерных вычислениях. Группа $B_0(2, 5)$ имеет порядок 5^{34} и ступень нильпотентности 12 [86]. Группа $B_0(2, 7)$ имеет порядок 7^{20416} и ступень нильпотентности 28 [87].

Наконец, отметим, что рассматриваемым в диссертации вопросам посвящено несколько обзоров [3, 88].

Цель и основные результаты диссертации.

Цель диссертации состоит в разработке методов и доказательстве локальной конечности групп с плотным спектром. Основные результаты диссертации таковы.

1. Доказана локальная конечность OC_6 и OC_7 групп. Результат опубликован в статьях [115, 107, 108, 109].

2. Доказана локальная конечность групп периода 12 без элементов порядка 12. Результат опубликован в статье [118].

3. Доказана распознаваемость групп M_{10} и $L_3(4)$ по спектру в классе всех групп. Результат опубликован в статьях [114, 113].

4. Доказано, что теорема Бэра-Сузуки для $p = 2$ справедлива в группах периода $4k$, где k нечётно. Результат опубликован в статье [116].

5. Классифицированы минимальные 3-порождённые группы 6-транспозиций. Результат опубликован в статье [110].

6. Доказано, что если $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{5, 7\}$, то G локально конечна; а если $\mu(G) = \{6, 7\}$, то G является расширением локально конечной группы с помощью группы без инволюций. Результат опубликован в статьях [112, 111].

7. Доказано, что группа периода 12 локально конечна, если выполнено одно из следующих условий:

а) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 4;

б) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 6.

Результат опубликован в статьях [119, 117].

Результаты диссертации опубликованы в [119, 117, 118, 114, 115, 116, 113, 112, 111, 110, 107, 108, 109] в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результаты 2 и 4 получены автором лично, остальные результаты получены в неразделимом соавторстве: [119] с Д. В. Лыткиной и В. Д. Мазуровым; [117] с В. Д. Мазуровым; [114] с Д. В. Лыткиной и Э. Ябарой; [115] с Д. В. Лыткиной, В. Д. Мазуровым и Э. Ябарой; [113, 112, 108, 109] с Э. Ябарой; [111] с В. Го; [110] с М. Виброу и А. М. Старолетовым.

Новизна и научная значимость работы.

В диссертации изучаются периодические группы с заданным спектром. Наиболее значительный результат диссертации — доказательство локальной конечности OC_6 и OC_7 групп, и получение новых примеров простых групп распознаваемых по спектру в классе всех групп. Важным инструментом этой работы стал результат о локальной конечности групп периода 12 без элементов порядка 12, обобщающий результаты И. Н. Санова и М. Холла, и описывающий строение централизаторов инволюций в OC_6 и OC_7 группах, а также доказательство аналога теоремы Бэра-Сузуки для групп 2-периода 4. Все основные результаты диссертации являются новыми. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны, в первую очередь, специалистам по теории групп и колец. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории групп: теория конечных простых групп, методы локального анализа, теория периодических групп, а также вычисления в системе компьютерной алгебры GAP, использующие алгоритм перечисления смежных классов. Кроме того, в работе используются оригинальные методы, разработанные автором.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на конференциях в Новосибирске, Москве, Санкт-Петербурге, Екатеринбурге, Нальчике, Минске (Беларусь), Сент-Андрусе, Уорике, Бирмингеме (Англия), Искье (Италия). Результаты работы докладывались на семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» Института математики СО РАН и НГУ.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, 5 глав и списка литературы. Она изложена на 131 страницах, библиография содержит 119 наименований.

Перейдём к более подробному изложению работы.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на разделы. Основные результаты диссертации называются теоремами. Точные формулировки всех теорем приведены в соответствующих главах. Вспомогательные утверждения — предложения и леммы — имеют тройную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер раздела в текущей главе, третье — номер утверждения в текущем разделе.

Глава 1. Глава посвящена основным определениям, обозначениям и используемым результатам и содержит три соответствующих раздела. Формулируются основные определения, использующиеся на протяжении всей диссертации. Вводятся обозначения, в том числе для некоторых групп, заданных порождающими и определяющими соотношениями. Приводятся формулировки некоторых известных результатов, которые используются в доказательствах, и их непосредственные следствия.

Глава 2. Первый раздел содержит доказательство аналога теоремы Бэра-Сузуки для групп 2-периода 4. В последующих разделах рассматриваются группы с элементами небольших порядков: как правило, не больше 7. В разделе 2.2 доказывается конечность подгрупп, порождённых инволюцией и элементом порядка 3. В разделе 2.3 приводятся результаты, связанные с подгруппами, порождёнными инволюцией и элементом порядка 4. В разделах 2.4-2.5 описываются свойства соответствующих подгрупп: F_{42} и A_4. Результаты главы 2 используются при доказательстве результатов главы 3 и 4.

Глава 3. В данной главе доказываются следующие основные результаты диссертации. В первом разделе главы доказывается локальная конечность групп периода 12 без элементов порядка 12. В разделах 3.2 и 3.3 доказывается распознаваемость групп M_{10} и $L_3(4)$ по спектру в классе всех групп, соответственно. В разделе 3.4 доказывается, что если $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{5, 7\}$, то G локально конечна. В разделах 3.5 и 3.6 доказывается что группа периода 12 локально конечна, если выполнено одно из следующих условий, соответственно:

а) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 4;

б) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 6.

Глава 4. В данной главе доказывается локальная конечность OC_6 и OC_7-групп. Разделы соответствуют этапам доказательства. В разделе 4.5 доказывается также, что если $\mu(G) = \{6, 7\}$, то G является расширением локально конечной группы с помощью группы без инволюций.

Глава 5. В данной главе доказывается теорема 11, содержащая классификацию минимальных 3-порождённых групп 6-транспозиций.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту чл.–корр. РАН Виктору Даниловичу Мазурову. Автор также выражает свою признательность кандидату физико-математических наук Алексею Михайловичу Старолетову за поддержку в процессе работы над диссертацией.

Глава 1

Обозначения и предварительные результаты

1.1 Определения

Группа называется *периодической*, если все её элементы имеют конечные порядки. *Группой периода n* называется группа, в которой выполняется тождество $x^n = 1$. Наименьший период группы называется её *экспонентой*. Класс C_n групп периода n является *многообразием*, то есть он замкнут относительно взятия подгрупп, фактор–групп и прямых произведений. Группа называется *локально конечной*, если всякое её конечное подмножество порождает конечную подгруппу.

Спектром периодической группы G называется множество $\omega(G)$ порядков её элементов. Очевидно, спектр группы конечен тогда и только тогда, когда конечен её период. В таком случае спектр однозначно определяется множеством $\mu(G)$ максимальных элементов из $\omega(G)$ по отношению делимости. Например, рассмотрим A_7 — знакопеременную группу степени 7. Тогда $\omega(A_7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $\mu(A_7) = \{4, 5, 6, 7\}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество периодических групп и $G \in \mathfrak{M}$. Две группы называются *изоспектральными*, если их спектры равны. Говорят, что G *распознаваема по спектру в* $\mathfrak{M}$, если любая группа, изоспектральная G и лежащая в $\mathfrak{M}$, изоморфна G.

Группа A *свободно действует* на группе B, если A действует на B, B нетривиальна и $b^a \neq b$, если a и b — нетривиальные элементы из A и B, соответственно.

Группа называется (n, m)–*порождённой*, если она порождается двумя элементами, один из которых имеет порядок n, а другой — порядок m.

1.2 Обозначения и соглашения

Буквой G всегда обозначается некоторая группа конечного периода.

В тексте используются следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\omega(G) = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ — порядок некоторого элемента группы $G\}$ — спектр G;

$\mu(G)$ — максимальные элементы из $\omega(G)$ относительно делимости;

$\Gamma_n = \Gamma_n(G)$ — множество элементов порядка n из G, для $n \in \mathbb{N}$;

$\Delta = \Delta(G) = \{x^2 \mid x \in \Gamma_4\}$;

$O_p(G)$ — максимальная нормальная p-подгруппа G, p простое;

$O_{p,q}(G)$ — полный прообраз в G группы $O_q(G/O_p(G))$, p и q простые;

$A : B$ — некоторое расширение группы A посредством B;

D_n — группа диэдра порядка n;

$Z(G)$ — центр группы G;

$C_G(x)$ — централизатор элемента x (или подмножества x) в группе G;

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y;

$x^y = y^{-1}xy$;

$x^G = \{x^y \mid y \in G\}$ — класс сопряжённости элемента $x \in G$;

$G \simeq H$ — группы G и H изоморфны.

Отношение $x \sim y$ для $x, y \in G$ обозначает, что порядки элементов x и y равны. Очевидно, $xy \sim yx$ и $x \sim x^{-1}$.

Обозначим через A_n и S_n знакопеременную и симметрическую группу степени n соответственно, а через $L_n(q)$ — проективную специальную линейную группу размерности n над полем из q элементов.

При обозначении групп степень простого числа p^k обозначает элементарную абелеву группу порядка p^k, число n обозначает циклическую группу порядка n, p^{1+2} обозначает экстраспециальную группу порядка p^3 без элементов порядка p^2.

Зададим следующие группы, используя порождающие и определяющие соотношения:

$$F_{k^2\cdot 6} = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^6, [x,t]^k \rangle \simeq k^2 : 6;$$

$$F_{42} = \langle x, z \mid R_{42} \rangle, \text{ где } R_{42} = \{x^3, z^2, (xz)^6, b^7, b^x = b^4\} \text{ и } b = z^x z;$$

$$F_{36} = \langle t, x \mid t^4, x^3, (t^2x)^2, [x, x^t] \rangle; \text{ (см. лемму 2.3.1}$$

$$3^{1+2} = \langle x, y \mid x^3, y^3, (xy)^3, (xy^{-1})^3 \rangle \text{ (см. лемму 2.2.3);}$$

$$3^{1+2} : 2^2 = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (yz)^3, [x,z], (yx)^6, (yzx)^6 \rangle \text{ (см. лемму 2.2.3);}$$

$$3^{1+2} : 2 = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^6, [x,t]^3 \rangle;$$

$$F_{100} = \langle x, t \mid x^4, t^2, (xt)^4, (x^2t)^5 \rangle \simeq 5^2 : 4;$$

$$F_{20} = \langle a, d \mid a^2, d^4, ad^1ad^2ad^3 \rangle \simeq 5 : 4.$$

Заметим, что $F_{42} < F_{294}$ при $z = t^{xt}$.

Использование знака равенства, вместо изоморфизма, например, $F_{294} = \langle x, t \rangle$ подразумевает, что элементы x и t не только порождают группу, изоморфную F_{294}, но и удовлетворяют соответствующим определяющим соотношениям.

Говоря о вычислениях, мы подразумеваем вычисления в GAP [78] по алгоритму перечисления смежных классов.

В работе группы часто задаются порождающими и определяющими соотношениями. Отметим, что если слово равно единице в группе, то оно тривиально и в её гомоморфных образах. Поэтому для порождающих элементов гомоморфных образов удобно использовать те же обозначения, что и в исходной группе.

1.3 Используемые результаты

Лемма 1.3.1. *(В. П. Шунков [31]) Если периодическая группа G содержит инволюцию с конечным централизатором, то G локально конечна.*

Лемма 1.3.2. *(В.П. Шунков [103, Теорема 2] и [104, Теорема 2.4]). Если G — бесконечная 2-группа конечного периода и F — конечная подгруппа G, то $C_G(F)$ бесконечна.*

Лемма 1.3.3. *(У. Бернсайд [4]) Группа периода 3 локально конечна.*

Лемма 1.3.4. *(И. Н. Санов [11]) Группа периода 4 локально конечна.*

Лемма 1.3.5. *(М. Холл [6]) Группа периода 6 локально конечна.*

Лемма 1.3.6. *Пусть $x, y \in \Gamma_2$ и $xy \in \Gamma_n$.*
Если $n = 2k$ чётно, то $(xy)^k$ лежит в центре группы $\langle x, y\rangle$.
Если $n = 2k+1$ нечётно и $z = (xy)^k$, то $y^z = x$.

Лемма 1.3.7. *(О. Ю. Шмидт [105, Теорема 23.1.1]) Расширение G локально конечной группы A посредством локально конечной группы G/A — само локально конечная группа.*

Лемма 1.3.8. *([48, Лемма 7]) Пусть A — собственная подгруппа группы H. Если в A нет элементов порядка 3 и каждый элемент из $H \setminus A$ является 3-элементом, то A нормальна в H и A двуступенно нильпотентна.*

Из этой леммы следует следующая

Лемма 1.3.9. *Пусть G — периодическая группа, $x \in \Gamma_3(G)$, $4 \in \omega(G)$ и $a \in \Delta(G)$. Если $a^G\Gamma_3 \subseteq \Gamma_3$, то $\langle a^G\rangle$ локально конечна.*

Доказательство. По индукции $\langle a^G\rangle\Gamma_3 \subseteq \Gamma_3$.

Если $h = x_1 \dots x_n$ элемент порядка 3, где $x_1, \dots, x_n \in a^G$, то $n > 2$, и $x_n = x_{n-1} \dots x_2 x_1 h \in \Gamma_3$, что невозможно. Таким образом, $3 \notin \omega(\langle a^G\rangle)$. Имеем $\langle a^G, x\rangle = \langle a^G\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$ и по лемме 1.3.8 $\langle a^G\rangle$ нильпотентна ступени не выше 2. Поэтому $\langle a^G\rangle$ локально конечна. □

.

Лемма 1.3.10. *(В. Д. Мазуров, [48]) Пусть G — OC_5 группа. Тогда либо $G \simeq A_6$, либо $G \simeq V : A_5$, где V — нетривиальная элементарная абелева группа.*

Глава 2

Группы с заданным спектром

2.1 Аналоги теоремы Бэра-Сузуки

Как отмечалось во введении, известная теорема Бэра-Сузуки утверждает, что *если x — элемент конечной группы G, p — простое число и для любого $g \in G$ подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ является p-группой, то $x \in O_p(G)$*. Важным классическим следствием этой теоремы является утверждение о том, что в конечной простой группе любая инволюция обращает некоторый неединичный элемент нечётного порядка.

В данном разделе доказывается аналог теоремы Бэра-Сузуки для 2-групп периода 4 (теорема 1). Затем доказывается аналог теоремы Бэра-Сузуки для $p = 3$ (лемма 2.1.2). В основе доказательства теоремы лежит следующая

Лемма 2.1.1. *Пусть H — группа, порождённая инволюцией b и элементом a порядка делящего 4, и H не содержит элементов порядка 8. Если порядок произведения любых двух элементов из b^H делит 4, то H является 2-группой.*

Доказательство. Если a — инволюция, то $1 = (b^a b)^4 = (ab)^8$, откуда $(ab)^4 = 1$ и H является группой диэдра порядка делящего 8. Пусть далее a — элемент порядка 4.

Подгруппа $K = \langle b, b^a, a^2 \rangle$ нормальна в $\langle a, b \rangle$ и индекса делящего 2. Докажем, что K является 2 — группой. Пусть $x = b$, $y = b^a$ и $z = a^2$. По условию $(xy)^4 = 1$. Заметим, что $1 = (b^{a^2} b)^4 = (a^2 b)^8$. Следовательно,

$$(a^2 b)^4 = (xz)^4 = 1,$$

и $b^{a^2} \in C_G(b)$. Порядок $yz = a^2b^a = aba$ равен порядку a^2b и потому делит 4.

Справедливы следующие равенства:

$$y^z x = (b^a)^{a^2} b = a^2 \cdot a^3ba \cdot a^2b = aba^3b \sim b^ab.$$

Далее

$$b^{aba^2ba}b = a \cdot a^2ba^2ba^2 \cdot ababa^2bab = a \cdot ba^2b \cdot ababa^2bab = (aba^2bab)^2.$$

Поэтому порядок $b^{aba^2ba}b$ равен порядку $(a^2babab)^2$, откуда $(a^2babab)^4 = 1$.

При этом

$$(yz)^2x = (b^aa^2)^2b = a^3ba^3a^3ba^3b = a^3ba^2ba^3b \sim a^2babab,$$

$$(zx)^2y = (a^2b)^2b^a = a^2ba^2b \cdot a^2aba = ba^2baba \sim a^2babab,$$

следовательно, $((yz)^2x)^4 = ((zx)^2y)^4 = 1$.

Наконец, $b^{aba^2ba^3b}b = (aba^2ba^3b)^2 \sim (ba^2bb^a)^2$. Откуда $1 = (ba^2bb^a)^4 = (xzxy)^4$.

Следовательно, группа K является гомоморфным образом группы

$$L = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (xy)^4, (xz)^4, (yz)^4, (y^zx)^4, ((yz)^2x)^4, ((zx)^2y)^4, (xzxy)^4\rangle.$$

Вычисления в GAP [78] по алгоритму перечисления смежных классов показывают, что порядок L равен 2^{15}. Стало быть, K и $\langle a, b\rangle$ являются 2-группами.

Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть G — группа периода $n = 4k$, где k нечётно, содержащая инволюцию $i \in G$. Если любые два элемента из i^G порождают 2-подгруппу, то $\langle i^G\rangle$ — нормальная 2-подгруппа.*

Доказательство. Пусть $z = c_1c_2...c_{m-1}c_m$ — произвольный элемент из i^G, где $c_1, c_2, ..., c_{m-1}, c_m \in i^G$. Индукцией по m докажем, что z является 2-элементом. Утверждение очевидно при $m = 1$. Пусть $m > 1$. По предположению индукции порядок элемента $a = c_1c_2...c_{m-1}$ делит 4. Положим $b = c_n$ и $H = \langle a, b\rangle$. По лемме 2.1.1 $z = ab$ является 2-элементом и теорема доказана. □

Лемма 2.1.2. *Пусть G — группа периода $n = 3k$, где k не делится на 3, содержащая элемент y порядка 3. Если любые два элемента из y^G порождают 3-подгруппу, то $\langle y^G \rangle$ — нормальная 3-подгруппа.*

Доказательство. Пусть $h = y_1 \dots y_n$ — произвольный элемент из H, где $y_i \in y^G$. Положим $x = y_1 \dots y_{n-1}$ и $y = y_n$. Используя индукцию по n, достаточно доказать, что если x порядка 3, то порядок xy равен 3. По предположению выполнены следующие соотношения $R = \{(y^x y)^3, (y^x y^{-1})^3, [y^x, y]^3, (y^{xyx} y)^3\}$. Поэтому $\langle x, y \rangle$ является гомоморфным образом $K = \langle x, y \mid R \cup \{x^3, y^3\} \rangle$. Вычисления показывают, что K является конечной группой порядка 3^9. Лемма доказана. □

Заметим, что по леммам 1.3.3 и 1.3.4, группы из заключений теоремы 1 и леммы 2.1.2 являются локально конечными. Вопрос о локальной конечности групп периодов 5, 8 и 9 является открытым. Поэтому условия из формулировок связаны с возможностями использования результатов для исследования вопросов локальной конечности.

2.2 (2,3)-порождённые подгруппы

В данном разделе доказывается конечность и приводится описание $(2,3)$ – порождённых подгрупп в группах, порядки элементов которых не превосходят 8. Для доказательства основных результатов диссертации будут использованы частные случаи этого результата. После этого приводятся несколько технических лемм.

Лемма 2.2.1. *Пусть группа K, порождённая инволюцией t и элементом x порядка 3, не содержит элементов порядка больше 8. Тогда K конечна и выполнено одно из следующих утверждений:*

(a) $(xt)^3 = 1$, *и K изоморфна A_4;*

(b) $(xt)^4 = 1$, *и K изоморфна S_3 или S_4;*

(c) $(xt)^5 = 1$, *и K изоморфна A_5;*

(d) $(xt)^6 = 1$, *и* K *является гомоморфным образом* $(k \times k) : 6$, *где* k *— это порядок* $[x, t]$;

(e) $(xt)^7 = [x, t]^8 = 1$, *и* K *является гомоморфным образом* $2^6.L_2(7)$; *если при этом* $[x, t]^4 = 1$, *то* $K \simeq L_2(7)$;

(f) $(xt)^8 = 1$, *и либо* K *является разрешимой* $(2, 3)$*-группой, либо является расширением элементарной абелевой группы порядка делящего* 2^8 *посредством* $PGL_2(7)$.

Доказательство. (a). Пусть $(xt)^3 = 1$. Тогда

$$tt^x = tx \cdot xtx \sim xtx \cdot tx = (xt)^3 t = t.$$

Таким образом, порядок произведения двух инволюций tt^x равен двум, поэтому $[t, t^x] = 1$. Следовательно, K является расширением нетривиальной нормальной элементарной абелевой 2-подгруппы $\langle t^K \rangle$ посредством циклической $\langle x \rangle$. Заметим, что $tt^x t^{x^2} = (tx^{-1})^3 = 1$, поэтому группа $\langle t^K \rangle$ порождается двумя элементами и имеет порядок 4; а элемент x действует на $\langle t^K \rangle$ без неподвижных точек. Стало быть, K изоморфна A_4, и изоморфизм можно построить следующим образом: $x \simeq (1, 2, 3)$ и $t \simeq (1, 2)(3, 4)$.

(b). Пусть $(xt)^4 = 1$. Положим $a = (tx)^2$. Если $a = 1$, то $xx^t = (xt)^2 = 1$, другими словами, инволюция t инвертирует элемент x, и K изоморфна S_3.

Пусть теперь a — инволюция. Заметим, что

$$at \sim ta = t \cdot (tx)^2 = xtx \sim tx^{-1} \sim xt \in \Gamma_4.$$

Поэтому $aa^t = (at)^2$ имеет порядок 2 и $[a, a^t] = 1$. Аналогично $aa^x = (tx^{-1})^2$ имеет порядок 2 и $[a, a^x] = 1$. Таким образом, K является расширением нетривиальной нормальной элементарной абелевой 2-группы $\langle a^K \rangle$ посредством группы, изоморфной S_3. Наконец, заметим, что

$$aa^x a^{x^2} = (ax^{-1})^3 = (x^t)^3 = 1,$$

поэтому группа $\langle a^K \rangle$ порождается двумя элементами и имеет порядок 4. Стало быть K изоморфна S_4, и изоморфизм можно построить следующим образом: $x \simeq (2,3,4)$ и $t \simeq (1,2)$.

(c). Пусть $(xt)^5 = 1$. Положим $a = tx^{-1}$, тогда $a^5 = 1$. Заметим, что

$$t \cdot x^a = t \cdot xtxtx \cdot x = x^{-1}tx^{-1}t \cdot x = (x^{-1})^{tx} \in \Gamma_3.$$

По пункту (a) $H = \langle t, x^a \rangle \simeq A_4$. При этом $atH = aH$ и $axH = H$. Следовательно, $|K : H| = 5$ и $|K| = |A_5|$. Таким образом, подстановочное представление K по подгруппе H задаёт изоморфизм $K \simeq A_5$.

(d). Пусть $(xt)^6 = 1$. Обозначим через a коммутатор $[x,t] = x^{-1}txt$, а через k — порядок элемента a. Заметим, что

$$a^t = tx^{-1}txt = tx^{-1}tx = a^{-1}.$$

Кроме того,

$$aa^x a^{x^2} = (ax^{-1})^3 = x^{-1}(tx)^6 x = 1,$$

$$a^{xt} = a^{tx[x,t]} = (a^{-1})^{xa}.$$

Таким образом, подгруппа $H = \langle a, a^x \rangle$ нормальна в $K = \langle x, t \rangle$. Прямые вычисления показывают, что $[a, a^x] = (tx)^6 = 1$ и H абелева. Образы элементов t и x в фактор-группе G/H коммутируют, поэтому G/H является циклической группой порядка 6.

(e). Пусть $(xt)^7 = 1$. Тогда

$$x \cdot t^{xt} \sim (tx)^3 \cdot x = (x^{-1}t)^4 \cdot x \sim (x^{-1}t)^2 x^{-1} \sim tx^{-1}tx = tt^x.$$

В частности, если порядок tt^x не превосходит 6, то $H = \langle x, t^{xt} \rangle$ — одна из групп, перечисленных в предыдущих пунктах.

Заметим, что K является гомоморфным образом группы $K(j) = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^7, [x,t]^j \rangle$, где $j \in \{5,6,7,8\}$. Вычисления показывают, что $K(5) \simeq 1$, при этом $K(6) \simeq K(7) \simeq L_2(13)$ и, стало быть, содержит элемент порядка 13, что невозможно. Таким образом, K — гомоморфный образ $K(8) \simeq 2^6.L_2(7)$. При этом, вычисления показывают, что $K(4) \simeq L_2(7)$.

Далее будем считать, что $(xt)^8 = 1$.

Если порядок $[x,t]$ не делит 8, то $\langle x, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$K(i, i_1, i_2) = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^8, [x,t]^i, ((xt)^2x^2t)^{i_1}, ((xt)^2(x^2t)^2)^{i_2}\rangle,$$

для некоторого $i \in \{5,6,7\}$ и $i_1, i_2 \in \{5,6,7,8\}$. Вычисления показывают, что $K(6,6,6) \simeq K(6,8,6) \simeq S_4$, $K(6,6,8)$ является расширением элементарной абелевой группы $\langle[((xt)^2x^{-1}t)^3]^K\rangle$ порядка 3^4 посредством $GL_2(3)$, $K(6,8,8)$ является группой порядка $2^{13}3$ и $K(7,8,6)$ является расширением элементарной абелевой группы $\langle[((xt)^2(x^{-1}t)^2)^3]^K\rangle$ порядка 2^8 посредством $PGL_2(7)$. Группа $K(i,i_1,i_2)$ тривиальна при остальных значениях параметров.

Пусть теперь $[x,t]^8 = 1$. Положим $z = x^t$. Заметим, что $1 = (tx)^8 = (x^tx)^4 = (zx)^4$ и $(xz^{-1})^8 = 1$. Поэтому $\langle x, z\rangle$ является гомоморфным образом

$$\begin{aligned} K(k,l,m,n) = \langle a, b \mid a^3, b^3, (ab)^4, (ab^{-1})^8, (abab^{-1})^k,& \\ (baba^{-1})^l, (bab^{-1}a^{-1})^m, (aba^{-1}b^{-1}ab^{-1})^n\rangle,& \end{aligned}$$

где $k,l,m,n \in \{5,6,7,8\}$. При этом $K(8,8,8,6) \simeq L_3(3)$, что невозможно, поскольку K не содержит элементов порядка 13. Таким образом, исключая значения параметров, для которых соответствующая группа тривиальна, $k = l = 8$, $m = n = 7$ и $\langle x, z\rangle \simeq L_2(7)$. Но тогда $[x,t]^4 = 1$, и $\langle x,t\rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^8, [x,t]^4\rangle \simeq PGL_2(7)$. Лемма доказана. □

Следующую лемму можно получить в качестве следствия леммы 2.2.1

Лемма 2.2.2. *Пусть $a, b, c \in \Gamma_2$, $ab \in \Gamma_3$, $[a,c] = 1$ и $H = \langle a,b,c\rangle$ не содержит элементов порядка больше 8. Тогда H конечна и если H не содержит элементов порядка 8, то H не содержит и элементов порядка 7.*

Доказательство. Пусть $x = ab$, $t = c$, тогда $t^b = t^x$. Таким образом, $K = \langle x,t\rangle$ удовлетворяет условиям леммы 2.2.1 и является нормальной подгруппой в H индекса делящего 2. Следовательно, H конечна. При этом

$$[x,t] = [ab,c] = bacabc = (bc)^2,$$

поэтому случай (e) леммы 2.2.1 возможен для K только если порядок bc равен 8 и $H = PGL_2(7)$. $\square$

В следующей лемме доказывается конечность и описываются свойства некоторых групп, заданных порождающими и определяющими соотношениями. Эти группы обозначены как 3^{1+2} и $3^{1+2} : 2^2$. Заметим, что конечность группы $3^{1+2} : 2^2$ также следует из леммы 2.2.2.

Лемма 2.2.3. *(1) Группа*

$$3^{1+2} = \langle x, y \mid x^3, y^3, (xy)^3, (xy^{-1})^3 \rangle$$

является экстраспециальной группой периода 3 *и порядка* 27*, изоморфной группе подстановок* $P = \langle a, b \rangle$*, где* $a = (123)(475)(689)$*,* $b = (124)(396)(587)$*. При этом* $\langle a, a^b \rangle$ *— элементарная абелева группа порядка* 9 *и* $a^{b^2} = (aa^b)^{-1}$*.*

(2) Группа

$$3^{1+2} : 2^2 = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (yz)^3, [x, z], (yx)^6, (yzx)^6 \rangle$$

является расширением экстраспециальной группы порядка 27 *и периода* 3 *посредством элементарной абелевой группы порядка* 4*. Отображение*

$$u = (3, 4)(5, 6)(7, 9) \mapsto x, v = (2, 3)(4, 5)(6, 8) \mapsto y, w = (1, 2)(5, 7)(6, 9) \mapsto z$$

продолжается до изоморфизма ϕ *группы подстановок* $\langle u, v, w \rangle$ *на* $3^{1+2} : 2^2$*. В частности,* $((x^y z)^2 x)^2 = 1$*. Кроме того, если* $f = y^{xyz}$*, то* $(fz)^3 = [f, x] = 1$ *и* $\langle x, w, z \rangle \simeq A_4$*.*

Доказательство. Обозначим $R = 3^{1+2}$ и $F = 3^{1+2} : 2^2$.

(1). Очевидно $x^2 = x^{-1}$, $y^2 = y^{-1}$, $(xy)^2 = y^{-1}x^{-1}$, $(x^{-1}y^{-1})^2 = yx$. По определению $[x, x^y] = x^{-1}y^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xy = (x^{-1}y^{-1})^2(y^{-1}x)^2 y = yxx^{-1}yy = y^3 = 1$, т.е. x и x^y перестановочны. Кроме того, $1 = (yx)^3 = x^{y^2}x^y x$, откуда $x^{y^2} = (xx^y)^{-1}$. Поэтому $\langle x, y \rangle$ — расширение абелевой группы $\langle x, x^y \rangle$ посредством $\langle y \rangle$. Таким образом, $|R| \leq 27$. Непосредственно проверяется, что P — гомоморфный образ R и $|P| = 27$. Поэтому $F \simeq P$, $|\langle x, x^y \rangle| = 9$ и пункт (1) доказан.

(2). Положим $a = yz$, $b = a^x$ и покажем, что $\langle a, b\rangle$ — гомоморфный образ группы R из пункта (1). Действительно, $a^3 = b^3 = 1$ и $(ab)^3 = (yzx)^6 = 1$. Кроме того,

$$(a^{-1}b)^3 = (zyxyzx)^3 = (zyxyxz)^3 = z(yx)^6 z = 1.$$

По пункту (1) $\langle a, b\rangle$ — 3-группа периода 3, порядок которой не превосходит 27. Далее,

$$b^y = a^{xy} = yxyzxy = (yx)^2 zy = a(a^x)^{-1}a^{-1} = ab^{-1}a^{-1} \in \langle a, b\rangle.$$

Из приведённых формул следует, что подгруппа $N = \langle a, b\rangle$ нормальна в группе F и, поскольку $a = yz$, группа F/N изоморфна группе $\langle x, z\rangle N/N$, причём порядок последней не превосходит 4. Поэтому $|F| \le 27 \cdot 4 = 108$. Непосредственно проверяется, что $\langle u, v, w\rangle$ удовлетворяет определяющим соотношениям F. Кроме того, $\langle uw, (uw)^u\rangle$ совпадает с группой P из пункта (1), поэтому $\langle a, b\rangle$ — группа порядка 27. Добавление соотношения $a = 1$ превращает F в группу порядка 4, поэтому $|F : \langle a, b\rangle| = 4$ и $|F| = 108 = 2^2 3^3$. Таким образом, ϕ — изоморфизм. Теперь равенство $((x^y z)^2 x)^2 = 1$ вытекает из соответствующего равенства в $\langle u, v, w\rangle$. Также проверяется, что $(fz)^3 = [f, x] = 1$ и $\langle x, w, z\rangle \simeq A_4$. Лемма доказана. □

2.3 (2,4)-порождённые подгруппы

Обозначим через $F_{36} = \langle x, t \mid x^4, t^2, (x^2t)^3, (xt)^4, [x, t]^3\rangle$ группу Фробениуса с ядром $\langle a, a^x\rangle$ порядка 9 и дополнением $\langle x\rangle$ порядка 4, где $a = x^2 t$. Заметим, что, из определяющих соотношений следует, что $[a, a^x] = (tx)^4 = 1$ и инволюция t инвертирует a и a^x.

Лемма 2.3.1. *Пусть группа K не содержит элементов порядка больше 11 и порождается элементами $x \in \Gamma_4$ и $t \in \Gamma_2$, такими что $x^2 t \in \Gamma_3$. Тогда K конечна и изоморфна одной из групп S_5, F_{36}, $L_2(7)$, $(A_4 \times A_4) : 4$.*

Доказательство. Обозначим через n порядок элемента $t^x t$. Пусть сначала $n = 2k + 1$ нечётно. По лемме 1.3.6 $t^{(t^x t)^k} = t^x$, поэтому $(t^x t)^k x^{-1} \in C_G(t)$. Группа K

является гомоморфным образом группы

$$G(i,j,l,n,h) = \langle x,t \mid x^4, t^2, (x^2t)^3, (xt)^i, ((xt)^3x^2t)^j, ((xt)^4x^3t)^l, (t^xt)^n, ((t^xt)^{k_n}x^{-1})^h \rangle,$$

где $n \in \{5,7,9,11\}$; $k_n = (n-1)/2$; $i,j,l \in \{6,7,8,9,10,11\}$; $h \in \{6,8,10\}$. Вычисления показывают, что $G(6,8,6,*,*)$ тривиальна или изоморфна S_5, $G(8,8,8,9,8)$ изоморфна F_{36} и $G(i,j,l,n,h)$ не содержит элементов порядка 3 при остальных возможных значениях параметров.

Пусть далее n чётно. Тогда K является гомоморфным образом группы

$$G(h,i,j) = \langle x,t \mid x^4, t^2, (x^2t)^3, (xt)^i, ((xt)^3x^2t)^j, (t^xt)^h \rangle,$$

где $i,j \in \{6,7,8,9,10,11\}$ и $h \in \{6,8,10\}$. Вычисления показывают, что $G(8,9,9) \simeq L_2(17)$, что невозможно; $G(8,7,6) \simeq G(8,7,9) \simeq L_2(7)$; $G(10,6,8) \simeq S_5$; $G(6,8,8) \simeq (A_4 \times A_4) : 4$ и $G(h,i,j)$ не содержит элементов порядка 3 при остальных возможных значениях параметров. □

Напомним обозначения следующих групп:

$$F_{100} = \langle x,t \mid x^4, t^2, (xt)^4, (x^2t)^5 \rangle;$$

$$F_{20} = \langle a,d \mid a^2, d^4, ad^1ad^2ad^3 \rangle.$$

Лемма 2.3.2. *Пусть K не содержит элементов порядка больше 7 и порождается элементами $x \in \Gamma_4$ и $t \in \Gamma_2$, такими что $x^2t \in \Gamma_5$. Тогда K конечна и содержит одну из следующих подгрупп: A_6, $L_3(4)$ или F_{20}.*

Доказательство. Группа $K = \langle x,t \rangle$ является гомоморфным образом порядка $\geq$ 20 группы

$$G(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5) = \langle x,t \mid x^4, t^2, y^5, (yx)^{i_1}, [y,x]^{i_2}, (a^yx)^{i_3}, (xyx^3y^2)^{i_4}, ((tx^2tx)^2tx^{-1})^{i_5} \rangle,$$

где $a = x^2$, $y = at$; и $i_1,\ldots,i_5 \in \{4,5,6,7\}$. Вычисления показывают, что $G(5,4,5,6,6) \simeq A_6$, $G(7,5,7,4,5) \simeq L_3(4)$, $H = G(4,5,4,5,4) \simeq F_{100}$. При остальных значениях параметров порядок соответствующей группы не превосходит 20. Единственным образом F_{100}, содержащим элемент порядка 5, при действии гомоморфизма с нетривиальным ядром, является группа F_{20} из заключения леммы.

Предположим $K \simeq H$. Тогда элементы $x_1 = x^{tx(ta)^2}$ и t порождают в H подгруппу, изоморфную F_{20}. $\square$

Лемма 2.3.3. *Пусть K — группа периода $4n$, где n нечётно. Если $y \in \Gamma_4(K)$ и в централизаторе $C_K(y^2)$ существует инволюция x, отличная от y^2, то её можно выбрать в нормализаторе y.*

Доказательство. Группа $\langle x, y\rangle$ является расширением центральной подгруппы $\langle y^2\rangle \simeq 2$ посредством группы диэдра, в частности, она конечна.

Допустим сначала, что порядок xy равен $2k+1$. Тогда $y = (xy)^{2k}xy^2$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$y^2 = (xy)^{2k-1}xy \cdot xy^2 \cdot xy(xy)^{2k-1} \cdot xy^2.$$

Последовательно перенося центральный элемент y^2 направо и сокращая $x \cdot x$ заметим, что элемент в правой части этого равенства равен единице, поскольку количество букв y в нем делится на 4. Стало быть y — это инволюция, что противоречит условию.

Таким образом, порядок xy равен $2k$. Тогда $z = (xy)^k$ — инволюция, которая нормализует $\langle y\rangle$:

$$y^z = (yy^2x)^k \cdot y \cdot (xy)^k = (yx)^{2k} \cdot y^{2k+1} = y^{\pm 1},$$

в зависимости от четности k. Таким образом, если $z \neq y^2$, то в качестве искомой инволюции можно взять z.

Предположим $z = y^2$. Из предыдущего равенства $k = 2m$ чётно и $|xy| = 4m$. Из условия следует $m = 1$, следовательно $y^2 = (xy)^2$, откуда $[x, y] = 1$ и в качестве искомой инволюции можно взять x. $\square$

Лемма 2.3.4. *Пусть группа G не содержит элементов порядка больше 7. Если инволюция $a \in \Delta$ инвертирует элемент порядка 5 и $C_G(a)$ содержит инволюцию $t \neq a$, то G содержит одну из следующих подгрупп: $A_6, L_3(4), S_5, S_6$.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим $b \in \Gamma_4$, такой что $b^2 = a$. По предположению найдётся инволюция c, такая что $ac \in \Gamma_5$. По лемме 2.3.2

в G есть подгруппа Фробениуса $K = \langle a, d\rangle \simeq F_{20}$, содержащая a. Воспользуемся условием, что $C_G(a)$ содержит инволюцию $t \neq a$. По лемме 2.3.3 такую инволюцию t можно выбрать в нормализаторе $\langle b\rangle$.

Таким образом, $\langle d, a, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(w, i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle d, a, t \mid d^4, a^2, t^2, [a, t], w = (td)^{i_1}, (dat)^{i_2}, (d^2t)^{i_3}, (d^2at)^{i_4}, a = b^2\rangle,$$

где $b = dad^2$, $w \in \{b^{-1}b^t, bb^t\}$, $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что либо порядки этих групп не превосходят 20, либо они изоморфны S_5 или S_6. Например, $G(b^{-1}b^t, 5, 5, 6, 6) \simeq S_6$. Получаем противоречие. □

2.4 Подгруппы, изоморфные F_{42}

Напомним обозначения для групп, обсуждающихся в данном разделе:

$$F_{294} = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^6, [x, t]^7\rangle;$$

$$F_{42} = \langle x, z \mid R_{42}\rangle, \text{ где } R_{42} = \{x^3, z^2, (xz)^6, b^7, b^x = b^4\} \text{ и } b = z^x z.$$

Использование знака равенства, вместо изоморфизма, например $F_{294} = \langle x, t\rangle$, подразумевает, что элементы x и t не только порождают группу, изоморфную F_{294}, но и удовлетворяют соответствующим определяющим соотношениям.

Лемма 2.4.1. *Пусть $z = t^{xt}, b = z^x z, u = z^{x^2z} = t^{[x^{-1},t][x,t]}$ — соответствующие элементы группы F_{294}. Тогда выполнены соотношения R_{42}, при этом x и z порождают подгруппу $F_{42} = \langle x, z \mid R_{42}\rangle$, являющуюся группой Фробениуса порядка 42, и $[u, x] = 1$.*

Доказательство. Пусть $a = t^x t$ как в доказательстве леммы 2.2.1 (d). Тогда $z = ta$ и

$$b = x^{-1}taxta = aa^{xt}a = a(a^{-1})^{xa}a = (a^{-1})^x a^2,$$

$$b^4 = (a^3)^x a = x^{-1} \cdot (x^{-1}txt)^3 \cdot x \cdot x^{-1}txt =$$

$$= xtxtx^{-1}txtx^{-1}tx^{-1}t,$$

$$b^x = (a^2(a^{-1})^x)^x = x^{-1} \cdot x^{-1}txtx^{-1}txt \cdot x^{-1} \cdot tx^{-1}tx \cdot x^2 = xtxtx^{-1}txtx^{-1}tx^{-1}t.$$

Следовательно, $b^x = b^4$.

Заметим, что отображение

$$x \to (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12)(13,14,15)(16,17,18)(19,20,21)$$

$$t \to (2,4)(3,5)(6,7)(8,10)(9,11)(12,13)(14,16)(15,17)(18,19)$$

может быть продолжено до изоморфизма $\langle x, t\rangle$ и соответствующей постановочной группы.

Оставшиеся утверждения теперь несложно проверить вычислениями в группе подстановок. $\square$

Далее цель данного раздела — доказать следующее предложение.

Предложение 2.4.1. *Пусть порядки элементов группы G не превосходят 7. Пусть $F_{42} = \langle z, x\rangle$ — подгруппа из G, $u = z^{x^2z}$, и v — инволюция из $C_G(x)$. Тогда либо $v = u$, либо G содержит подгруппу, изоморфную $L_2(7)$, инволюции которой сопряжены с z.*

Доказательству предшествуют две леммы с теми же предположениями. Обозначим через B следующий набор соотношений, которые предполагаются далее на протяжении раздела:

$$B = \{v^2, z^2, x^3, (xz)^6, b^7, b^x b^{-4}, [x, v]\}, \text{где } b = z^x z.$$

Лемма 2.4.2. *Если $[u, v] = 1$, то $v = u$.*

Доказательство. Подгруппа $\langle v, z, x\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle v, z, x | B \cup \{[u, v], (zv)^{i_1}, (v^{x^z}v)^{i_2}, (vx^z)^{i_3}, (xzv)^{i_4}\}\rangle,$$

где $i_1, \ldots, i_4 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что либо порядок $G(i_1, i_2, i_3, i_4)$ делит 42, либо v централизует F_{42}, что невозможно. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.4.3. *Если $(uv)^3 = 1$, то либо $v = u$, либо G содержит подгруппу H, изоморфную $L_2(7)$. При этом $\Gamma_2(H) \subseteq v^G = z^G$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по лемме 2.2.1 (e) порядки элементов $v \cdot x^z$ и $v \cdot xx^z$ не равны 7. Поэтому $\langle x, z, v\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(j_1, j_2, i_1, i_2, i_3) = \langle x, z, v \mid B \cup \{(uv)^3, (vx^z)^{j_1}, (xx^z v)^{j_2}, (vz)^{i_1}, (vzx)^{i_2}, (xx^z xv)^{i_3}\}\rangle,$$

где $j_1, j_2 \in \{4, 5, 6\}$ и $i_1, i_2, i_3 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что индексы $|G(j_1, j_2, i_1, i_2, i_3) : \langle x\rangle|$ не превосходят 14, следовательно, $v \in \langle x, z\rangle$. Противоречие. Порядки элементов zu и uv нечётны, откуда, используя свойства диэдральных групп (лемма 1.3.6), получаем равенства $z^G = u^G = v^G$. Лемма доказана. □

Доказательство предложения 2.4.1

Предположим противное. Диэдральная подгруппа $\langle u, v\rangle$ централизует элемент x порядка 3, и поэтому не содрежит элементов порядка 4, 5 и 7. Если порядок uv чётен, то пусть i — инволюция из центра $\langle u, v\rangle$. По лемме 2.4.2 $i = u$ и, следовательно, $v = u$, противоречие. Если порядок uv равен 3, то получаем противоречие по лемме 2.4.3. Предложение доказано. □

Нам также понадобится следующее следствие.

Лемма 2.4.4. *Пусть $F_{42} = \langle z, x\rangle$ — подгруппа в G, и y — элемент порядка 3 из $C_G(x)$. Тогда либо $[y, u] = 1$, где $u = z^{x^2 z}$, либо G содержит подгруппу $H \simeq L_2(7)$.*

Доказательство. Предположим противное. В группе G нет элементов порядка 12, поэтому подгруппа $\langle u, y\rangle$, централизующая x, не содержит элементов порядка 4. По предложению 2.4.1 $\langle u, y\rangle$ содержит единственную инволюцию u. По лемме 2.4.2 $[u, y] = 1$. Противоречие. Лемма доказана. □

2.5 Подгруппы, изоморфные A_4

Цель данного раздела — доказать следующее утверждение.

Предложение 2.5.1. *Пусть группа G не содержит элементов порядка больше 7. Пусть H — подгруппа в G, изоморфная A_4. Тогда либо $O_2(H) \subseteq O_2(G)$, либо инволюция из H инвертирует элемент порядка 5, либо G содержит подгруппу, изоморфную A_6, S_5 или $L_2(7)$.*

На протяжении данного раздела будем считать, что G — контрпример к предложению 2.5.1 и H — подгруппа в G, изоморфная A_4. Зафиксируем порождающие $a \simeq (1,2)(3,4)$ и $x \simeq (1,2,3)$ группы H. Они удовлетворяют соотношениям

$$A = \{x^3, a^2, (ax)^3\}.$$

При этом $O_2(H) = \langle a, a^x \rangle$.

Лемма 2.5.1. *Если инволюция t не инвертирует элементы порядка 5, то для любого $y \in \Gamma_3$ порядок ty делит 4 или 6.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 2.2.1. Если порядок ty равен 7, то $\langle t, y \rangle \simeq L_2(7)$; противоречие с тем, что G является контрпримером к предложению 2.5.1. Если порядок ty равен 5, то $\langle t, y \rangle \simeq A_5$; противоречие с условием. □

По теореме 1 для доказательства предложения 2.5.1 достаточно доказать, что если t — инволюция из a^G, то либо $(at)^4 = 1$, либо $\langle t, a, x \rangle$ содержит подгруппу, изоморфную A_6, S_5 или $L_2(7)$. Эта стратегия реализуется в следующих леммах, где последовательно показывается, что в соответствующих ситуациях инволюция t не может являться контрпримером.

Возможности для подгруппы $\langle t, x \rangle$ ограничиваются леммой 2.2.1. Прежде всего, после нескольких подготовительных лемм, рассматривается случай $\langle t, x \rangle \simeq F_{294}$.

Лемма 2.5.2. *Если t — инволюция и $[t, x] = 1$, то $(at)^4 = 1$.*

Доказательство. Группа $\langle t, a, x \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$\begin{aligned} G(i_1, i_2, \ldots, i_9) = \langle a, t, x \mid A \cup \{ & t^2, [t,x], (ta)^{i_1}, \\ & (ta^x)^{i_2}, (ata^x)^{i_3}, (a^x(at)^2)^{i_4}, [a^x, (at)^2]^{i_5}, \\ & (a^x(at)^3)^{i_6}, (a(ta^x)^3)^{i_7}, (atx)^{i_8}, ((at)^2x)^{i_9}\}\rangle, \end{aligned}$$

где $i_1, ..., i_9 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что эта группа конечна и либо изоморфна S_5, либо является $\{2,3\}$-группой, такой что $O_2(\langle a, x \rangle) \subseteq O_2(\langle a, t, x \rangle)$. Лемма доказана. □

Лемма 2.5.3. *Для любой инволюции t либо порядок tt^x не равен 7, либо t инвертирует элемент порядка 5. В частности, если $t \in a^G$, то $tt^x \notin \Gamma_7$.*

Доказательство. Предположим противное. По леммам 2.2.1 и 2.4.1 найдётся инволюция $z \in t^G$, такая что $\langle z, x\rangle = F_{42}$. По предложению 2.4.1 $C_G(x)$ содержит единственную инволюцию $u = z^{x^2 z}$. По лемме 2.5.2 $(ua)^4 = (ua^x)^4 = 1$.

Следовательно, группа $\langle u, a, x\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$L = \langle u, a, x \mid A \cup \{u^2, [u, x], (ua)^4, (ua^x)^4\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что эта группа конечна: $|L| = 192$, и $z_0 = (ua^x ua)^2$ — центральная инволюция группы L. В частности, $z_0 \in C_G(x)$.

Если $z_0 = u$, то $(ua^x ua)^2 = u$, откуда

$$a^x u \cdot aua^x \cdot ua = 1$$

$$(a^x a)^u \sim aua^x \sim ua^x a = ua^{x^2} = (ua)^{x^2} \sim ua.$$

Получаем $(ua)^2 = 1$ и u коммутирует с $\langle a, x\rangle$, откуда $z_0 = (ua^x ua)^2 = (a^x a)^2 = 1$.

Таким образом, по лемме 2.4.2 можно считать, что $z_0 = 1$. Тогда $\langle u, a, x\rangle$ — гомоморфный образ $M = L/\langle z_0 = 1\rangle$. В M положим $i = (ua)^2$. Тогда $i^2 = (ix)^3 = [u, i] = 1$.

Предположим сначала, что $i \neq 1$. Тогда $\langle i, x\rangle \simeq A_4$. Заменяя a на i, рассмотрим группу $\langle i, z, x\rangle$, чтобы упростить соотношения (мы не предполагаем, что $i \in a^G$). Отметим, что выполнены следующие соотношения:

$$R = \{i^2, z^2, x^3, (xz)^6, b^7, b^x b^{-4}, (ix)^3, (ui)^2\}, \text{ где } b = z^x z, u = z^{x^2 z}.$$

Положим $y = z^i$, тогда $y \in t^G$. По леммам 2.2.1 и 2.5.1 в группе $\langle y, x\rangle$ реализуется одна из следующих возможностей:

- $(yx)^6 = (y^x y)^7 = 1$.

  Положим $v = y^{[x^{-1}, y][x, y]}$. По лемме 2.4.1 $[v, x] = 1$ и по предложению 2.4.1 $u = v$. Вычисления показывают, что порядок группы

$$G(k) = \langle i, z, x | R \cup \{(iz)^k, (yx)^6, (y^x y)^7, uv^{-1}\}\rangle$$

при $k \in \{5,7\}$ делит 3. Заметим, что группа $G(4) = G(6) = G(2) \simeq 7 : (2 \times A_4)$ содержит элемент порядка 14, а соответствующий гомоморфный образ без элементов порядка 14 совпадает с $\langle x, z\rangle$. Противоречие.

- $(yx)^6 = (y^x y)^5 = 1$.

  Этот случай невозможен, поскольку $y \in a^G$.

- $(yx)^6 = (y^x y)^6 = 1$.

  Элементы $h = (y^x y)^2$ и $k = [h, x]$ группы $\langle y, x \mid y^2, x^3, (yx)^6, (y^x y)^6\rangle \simeq F_{216}$ удовлетворяют следующим свойствам: $\langle h, x\rangle \simeq 3^{1+2}$ — экстраспециальная группа периода 3 и порядка 27, а k — элемент порождающий её центр. Кроме того, инволюция y инвертирует элементы h и k.

  Заметим, что $uy = uizi \sim iuiz = uz \in \Gamma_7$. По лемме 2.4.4 $[u, k] = 1$. Получаем, что элемент $(uy)^2$ порядка 7 централизует k. Следовательно, $k = 1$. Заменяя теперь в этих рассуждениях k на h, аналогично получим $h = 1$. Таким образом, рассматриваемый случай является частным случаем следующего.

- $(yx)^6 = (y^x y)^4 = 1$.

  Положим $v = yx^{-1}yxyxyx^{-1}y$. Тогда $[v, x] = 1$ и по предложению 2.4.1 либо $u = v$, либо $v = 1$. Вычисления показывают, что порядок группы

  $$G(k, \epsilon) = \langle i, z, x | R \cup \{(iz)^k, (yx)^6, (y^x y)^4, u^\epsilon v\}\rangle$$

  при $k \in \{4,5,6,7\}, \epsilon \in \{0,1\}$ делит 24. Противоречие.

- $(yx)^4 = 1$. Положим $v = y^{xy}$. Тогда $x^v = x^{-1}$. Следовательно $vuv \in C_G(x)$ и по предложению 2.4.1 $u = vuv$. Вычисления показывают, что порядок группы

  $$G(k_1, k_2) = \langle i, z, x | R \cup \{(iz)^{k_1}, (izx)^{k_2}, (yx)^4, (uv)^2\}\rangle$$

  делит 2 при $k_1, k_2 \in \{4,5,6,7\}$.

Таким образом получаем, что $i = 1$. Тогда $(ax)^3 = (ua)^2 = 1$, заменим i на a и повторим рассуждения выше, получим $a = 1$; противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 2.5.4. *Пусть x, y, z — элементы порядка 3, такие что $xy, yz \in a^G$ и $K = \langle x, y, z\rangle$. Тогда K является расширением 2-группы посредством группы порядка 3, и выполнены следующие соотношения:*

$$R = \{(xz)^6, (x^{-1}z)^4, (xyz)^6, (xyzxz)^4, (xzy)^6, (x^{-1}z^y)^4\}$$

и $(y^{-1}zx)^4 = 1$.

Доказательство. Предположим противное. По лемме 2.5.1 порядки $x \cdot yz$ и $xzy = xy \cdot z^y$ делят 4 или 6. Будем использовать следующие обозначения для множества соотношений в алфавите $\{x, y, z\}$:

$$B = \{x^3, y^3, z^3, (xy)^2, (yz)^2\},$$

$$R(k_1, \dots, k_6) = \{(xz)^{k_1}, (x^{-1}z)^{k_2}, (xyz)^{k_3}, (xyzxz)^{k_4}, (xzy)^{k_5}, (x^{-1}z^y)^{k_6}\}.$$

Заметим, что K является гомоморфным образом группы

$$G(k_1, \dots, k_6) = \langle x, y, z | B \cup R(k_1, \dots, k_6)\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_4, k_6 \in \{4, 5, 6, 7\}$, $k_3, k_5 \in \{4, 6\}$.

Предположим K является гомоморфным образом $L = G(6, 7, 6, 7, 6, 7)$. Пусть $i = (xz)^3$. Вычисления показывают, что порядок $L/\langle i = 1\rangle$ равен 3, что невозможно. Поэтому можно считать, что i — инволюция. Тогда $\langle i, y\rangle$ — группа из заключения леммы 2.2.1, не содержащая элементов порядка больше 6. Следовательно, K — гомоморфный образ $L(k_7) = L/\langle (iy)^{k_7} = 1\rangle$, где $k_7 \in \{4, 5, 6\}$. Вычисления показывают, что индекс этих групп по подгруппе $\langle x, yz\rangle$, порождённой инволюцией $yz \in a^G$ и элементом x порядка 3, тривиален. По лемме 2.2.1 получаем противоречие.

Группа $G(6, 5, 6, 6, 6, 5)$ изоморфна $M_{12} \times 3$. Вычисления показывают, что индекс $G(6, 7, 6, 6, 6, 7)$ по $(2, 3)$-порождённой подгруппе $\langle x, yz\rangle$ тривиален. Группа $G(7, 7, 6, 6, 6, 7)$ изоморфна $L_2(13)$. Во всех этих случаях группа K удовлетворяет заключению леммы.

Группа $L = G(6, 4, 6, 4, 6, 4)$ содержит нормальную 2-подгруппу V порядка 2^{11} и ступени нильпотентности 2 с центром порядка 2^3, такую что $L/V \simeq A_4$. Действие L

на смежных классах по $\langle x, yz\rangle$ является точным подстановочным представлением L на 2^8 точках. Теперь несложно проверить, что подгруппа L и её гомоморфные образы удовлетворяют заключению леммы. Вычисления показывают, что порядки остальных групп $G(k_1, \dots, k_6)$ делят 96, и они являются гомоморфными образами L. Лемма доказана. □

Лемма 2.5.5. *Пусть* $t \in a^G$ *и* $\langle t, x\rangle \simeq A_4$*. Тогда* $(at)^4 = 1$*.*

Доказательство. Пусть $x_1 = tx^{-1}$, $y_1 = x$, $z_1 = x^{-1}a$. Тогда $x_1y_1 = t \in a^G$ и $y_1z_1 = a \in a^G$ и заключение следует из леммы 2.5.4. Действительно, $at = y_1z_1x_1y_1 \sim y_1^{-1}z_1x_1$. Лемма доказана. □

Лемма 2.5.6. *Пусть элементы* $x, y, w \in \Gamma_3(G)$*, такие что* $xy \in a^G$ *и* $[y, w] = 1$*. Тогда* $\langle x, y, w\rangle$ *конечна и* $((xy)(xy)^w)^4 = 1$*.*

Доказательство. Пусть $z = x^w$. Тогда $(xy)^w = x^wy = zy$, поэтому $zy \in a^G$. Таким образом, для группы $\langle x, y, z\rangle$ выполнены условия леммы 2.5.4. Обозначим через R соотношения из заключения леммы 2.5.4 и через B соответствующие соотношения из доказательства леммы 2.5.4. Тогда группа $\langle x, y, w\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(k_1, k_2, k_3) = \langle x, y, w \mid R \cup B \cup \{w^3, [y, w], (xw)^{k_1}, (x^{-1}w)^{k_2}, (xyw)^{k_3}\}\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3 \in \{4, 5, 6, 7\}$.

Группа $K = G(6, 6, 6)$ имеет нормальную 2-подгруппу V порядка 2^{10} ступени нильпотентности 2 с центром порядка 2^4, и $K/V \simeq 3\times 3$. Вычисления показывают, что порядки $K/\langle((xy)(xy)^w)^4\rangle$ и K совпадают, следовательно, требуемое соотношение выполняется в группе K и её гомоморфных образах.

Вычисления показывают, что $G(7, 7, 7) \simeq L_3(4)$, что невозможно, поскольку G является контрпримером к предложению 2.5.1. Порядки $G(k_1, k_2, k_3)$ делят 12 в остальных случаях. Лемма доказана. □

Лемма 2.5.7. *Пусть* t *— инволюция,* $at \in \Gamma_3$ *и* $tx \in \Gamma_6$*. Тогда* $(tt^x)^6 \neq 1$*.*

Доказательство. Предположим противное.

Порядок at нечётен, поэтому $t \in a^G$.

Заметим, что элементы $h = (t^x t)^2$ и $k = [h, x]$ группы $\langle t, x \mid t^2, x^3, (tx)^6, (t^x t)^6\rangle \simeq F_{216}$ удовлетворяют следующим свойствам: $\langle h, x\rangle \simeq 3^{1+2}$ — экстраспециальная группа периода 3 и порядка 27, k — её центральный элемент. Более того, $h^t = h^{-1}$ и $k^t = k^{-1}$.

Элементы ax^{-1}, x, k удовлетворяют условиям леммы 2.5.6, откуда $(a^k a)^4 = 1$. Положим $c = tk$, тогда $c \in t^G$. Группа $\langle a, t, c\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(k_1, k_2, k_3, k_4) = \langle a, t, c \mid a^2, t^2, c^2, (at)^3, (ct)^3, (a^{tc}a)^4,$$
$$(ac)^{k_1}, (at \cdot c)^{k_2}, (ta^c)^{k_3}, (ata^c)^{k_4}\rangle,$$

где $k_1, k_3, k_4 \in \{4, 5, 6, 7\}$, $k_2 \in \{4, 6\}$. Вычисления показывают, что только группа $G(5, 6, 5, 5) \simeq A_5$ содержит элемент порядка 3 и имеет порядок больше 12, но такое невозможно, поскольку G является контрпримером к предложению 2.5.1.

Таким образом, получаем $k = 1$. Тогда $[h, x] = 1$. Вновь по лемме 2.5.6 $(a^h a)^4 = 1$. Аналогично, рассматривая группу $\langle a, t, h\rangle$, получаем $h = 1$. Следовательно, $(tt^x)^2 = 1$.

По лемме 2.5.2 можно считать, что tt^x — инволюция. Элемент $u = tt^x tt^{x^{-1}} t$ является инволюцией из центра группы $\langle t, x | t^2, x^3, (tx)^6, [t, x]^2\rangle \simeq 2 \times A_4$. По лемме 2.5.2 в группе G выполняются соотношения $(au)^4 = (a^x u)^4 = 1$. Применяя лемму 2.2.2 к подгруппе $\langle t, a, a^x\rangle$, получаем, что порядок ta^x делит 4 или 6. Таким образом, подгруппа $\langle a, t, x\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(k_1, k_2, k_3) = \langle a, t, x \mid A \cup \{t^2, (at)^3, (tx)^6, (t^x t)^2, (au)^4, (a^x u)^4,$$
$$(ta^x)^{k_1}, (t \cdot xa)^{k_2}, (ax \cdot t)^{k_3}\}\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3 \in \{4, 6\}$. Вычисления показывают, что порядки групп $G(k_1, k_2, k_3)$ делят 12. Откуда $t = 1$, противоречие.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.5.8. *Пусть t — инволюция. Тогда $|at| \neq 3, 6$.*

Доказательство. Предположим противное.

Если $|at| = 6$, то $|aa^t| = 3$. Поэтому можно считать $|at| = 3$. Тогда $t \in a^G$.

Обозначим через $B = A \cup \{t^2, (at)^3\}$ соотношения, выполняющиеся в G.

Пусть $b = a^x$. Предположим bt и abt — элементы порядка 6. Тогда $w = t^{bta} \in a^G$ удовлетворяет соотношениям $(aw)^3 = (bw)^2 = (abw)^6 = 1$ по лемме 2.2.3. По лемме 2.2.2, заменяя, если необходимо, t на w, a на b или ab, можно считать, что $(tb)^6 = (tab)^4$.

Предположим $(tx)^4 = 1$. Тогда группа $\langle a, t, x\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(k) = \langle a, t, x | B \cup \{(tx)^4, (tb)^6, (tab)^4, (ax \cdot t)^k\}\rangle,$$

где $k \in \{4, 6\}$. Вычисления показывают, что $G(4) \simeq A_6$, $G(6) \simeq V \rtimes L_2(7)$, где V — элементарная абелева группа порядка 2^3. В группе $G(6)$ подгруппа $\langle a, x^t\rangle$ изоморфна $L_2(7)$. Поскольку G является контрпримером к предложению 2.5.1, оба этих случая невозможны. Значит $(tx)^6 = 1$ по лемме 2.5.1.

Пусть $t_1 = a^t$. Тогда в группе $\langle a, b, t_1\rangle$ выполнены соотношения $(t_1b)^6 = (t_1ab)^4 = 1$. Поэтому если $(t_1x)^4 = 1$, то выполнены все соотношения, определяющие $G(k)$, и вновь получаем противоречие.

По леммам 2.5.3, 2.5.7, 2.2.1 получаем соотношения

$$R = \{(tx)^6, (t^xt)^4, (t_1x)^6, (t_1^xt_1)^4\}.$$

Инволюция $u = tt^xtt^{x^{-1}}t$ группы $\langle t, x \mid t^2, x^3, (tx)^6, (t^xt)^4\rangle$ централизует x. По лемме 2.5.2 $(au)^4 = 1$. Группа $\langle a, t, x\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(k_1, k_2) = \langle a, t, x | B \cup R \cup \{(au)^4, (tb)^6, (tab)^4, (ax \cdot t)^{k_1}, (xa \cdot t)^{k_2}\}\rangle,$$

где $k_1, k_2 \in \{4, 6\}$. Вычисления показывают, что порядок $G(k_1, k_2)$ делит 12. Поэтому $t = 1$ и получаем противоречие.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.5.9. *Пусть инволюции a, t, f удовлетворяют соотношениям: $(at)^7 = (af)^4 = 1$ и $[t, f] = 1$. Тогда $(atf)^7 = (t(af)^2))^4 = 1$ и группа $\langle a, t, f\rangle$ является двойной группой Фробениуса $V : 7 : 2$, где V — элементарная абелева порядка 2^6.*

Доказательство. Чтобы доказать конечность группы $\langle a,t,f\rangle$, заметим, что она является гомоморфным образом

$$G(i_1,i_2)=\langle a,t,f \mid a^2,t^2,f^2,(at)^7,(af)^4,(tf)^2,(atf)^{i_1},(t(af)^2)^{i_2}\rangle,$$

где $i_1,i_2\in\{4,5,6,7\}$. Вычисления показывают, что $G(7,4)$ конечна и удовлетворяет заключению леммы. Порядок групп $G(i_1,i_2)$ не превосходит 14 при других значениях параметров, что невозможно. Лемма доказана. □

Доказательство предложения 2.5.1.

Пусть s — произвольная инволюция из G. По лемме 2.5.8 либо $(as)^7=1$, либо $(as)^4=1$. В первом случае $s\in a^G$ и поэтому по лемме 2.5.1 либо $(xs)^4=1$, либо $(xs)^6=1$. Будем использовать эти свойства без дальнейших ссылок.

По теореме 1 и лемме 2.5.8 найдётся инволюция t, такая что $(at)^7=1$. Введём обозначение $B=A\cup\{t^2,(at)^7\}$ для множества соотношений.

Если выполнены соотношения $R_1=\{(tx)^4,(a^tx)^4,(t^ax)^4,(t^{at}x)^4\}$, то вычисления показывают, что группа $\langle a,t,x|B\cup R_1\rangle$ тривиальна. Заменяя, если необходимо, инволюцию t на инволюцию из $\langle a,t\rangle$, можно считать, что $tx\in\Gamma_6$. По леммам 2.5.3 и 2.5.7 $(tt^x)^4=1$.

Предположим сначала, что t^xt — инволюция. Тогда $x\cdot t^xt=x\cdot x^{-1}txt\sim x^t$, поэтому $\langle t^xt,x\rangle\simeq A_4$. Инволюция $u=tt^xtt^{x^{-1}}t$ в группе $\langle t,x\rangle$ централизует x. Если $a\cdot t^xt\in\Gamma_7$, то $t^xt\in a^G$ и по лемме 2.5.5 получаем противоречие. Поэтому $(a\cdot t^xt)^4=1$. По лемме 2.5.2 $(au)^4=1$. По лемме 2.5.8 порядок a^xt не делится на 3. Следовательно, группа $\langle a,t,x\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(k)=\langle a,t,x \mid B\cup\{(tx)^6,(tt^x)^2,(au)^4,(att^x)^4,(a^xtt^x)^4,(a^xt)^k\}\rangle,$$

где $k\in\{4,7\}$. Вычисления показывают, что $|G(k)|$ делит 12.

Пусть $t^xt\in\Gamma_4$. Обозначим $y=(xt)^2$ и $v=(xt)^3$. Очевидно, $[y,v]=1$. В $\langle x,t\rangle$ элемент y порядка 3 лежит в подгруппе $H_1=\langle (t^xt)^2,y\rangle$, изоморфной A_4. При этом инволюция $(t^xt)^2$ лежит в Δ и по лемме 2.3.4 не инвертирует элементы порядка 5. Воспользуемся доказанными леммами, заменяя H на H_1. По лемме 2.5.3 (где в качестве H подставляем H_1, $x\mapsto y$, $t\mapsto a$) порядок aa^y не равен 7.

По лемме 2.5.8 $(aa^y)^4 = 1$. В $\langle x, t\rangle$ выполнено соотношение $(v^x v)^2 = 1$. По доказанному выше $(av)^4 = 1$. Докажем, что $(aa^{xt})^4 = 1$.

По лемме 2.5.1 реализуется одна из следующих возможностей.

- Пусть сначала $ay \in \Gamma_6$.

  Положим $u = aa^y ayay^{-1}a$. Тогда $u^2 = 1$ и $[u, y] = 1$. Поскольку $u, v \in C_G(y)$, то порядок uv делит 6.

  Предположим $\langle u, v\rangle$ содержит элемент порядка 3. Пусть w — инволюция, такая что порядок uw равен 3. Заметим, что если a^g — произвольный элемент, сопряжённый с a, то порядок $a^g v$ чётен. В противном случае элемент a сопряжён с v и потому инвертирует элемент порядка 3, что противоречит лемме 2.5.8. Таким образом, группа $\langle a, y, w\rangle$ является гомоморфным образом группы

  $$G(i) = \langle a, y, w \mid a^2, y^3, w^2, (ay)^6, (a^y a)^4, w^y w, \\ (aw)^4, (uw)^3, (au^w)^4, (a^{ya} w)^4, (ayw)^i\rangle.$$

  Вычисления показывают, что $G(5) \simeq S_6$ и для всех остальных $i \in \{4, 5, 6, 7\}$ порядок $G(i)$ не превосходит $|\langle a, y\rangle| = 96$. Поэтому этот случай невозможен.

  Пусть теперь $(uv)^2 = 1$. Тогда группа $\langle a, y, v\rangle$ является гомоморфным образом группы

  $$G(i_1, i_2) = \langle a, y, v \mid a^2, y^3, v^2, (ay)^6, [a, y]^4, [y, v], (av)^4, (uv)^2, \\ (ayv)^{i_1}, ((av)^2 y)^{i_2}\rangle,$$

  где $i_1, i_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$; $u = aa^y ayay^{-1}a$. Вычисления показывают, что такая группа всегда конечна и содержит элементы порядка 3 только при $i_1 = i_2 = 6$. В последнем случае $G(6, 6)$ является $\{2, 3\}$-группой порядка $2^{18}3$, откуда по лемме 2.5.8 получаем требуемое соотношение $(aa^{xt})^4 = 1$.

- Пусть теперь $ay \in \Gamma_4$.

Тогда группа $\langle a, y, v\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2) = \langle a, y, v \mid a^2, y^3, v^2, (ay)^4, [y, v], (av)^4, (ayv)^{i_1}, ((av)^2y)^{i_2}\rangle,$$

где $i_1, i_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$. В группе $G(4, 6)$ имеем $|aa^{yv}| = 6$, что невозможно по лемме 2.5.8. Далее, $G(6, 4) \simeq 2 \times S_6$, $G(6, 6) \simeq D_{12}$, что невозможно. Вычисления показывают, что группа $G(i_1, i_2)$ не содержит элементов порядка 3 при других значениях параметров i_1 и i_2. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

Далее считаем, что $(aa^{xt})^4 = 1$. Тогда $(a^xa^t)^4 = 1$ и по лемме 2.5.9 $\langle a, a^t, a^x\rangle = \langle a, t, a^x\rangle$ — конечная двойная группа Фробениуса. В частности, $(ta^x)^4 = 1$ и $(taa^x)^7 = (a^taa^x)^7 = 1$.

Заметим, что в группе $\langle t, x\rangle$ имеем $(x^{-1}t)^6 = 1$, $\langle (x^{-1}t)^3, x\rangle \simeq 2 \times A_4$. Поэтому, повторяя рассуждение выше получим $(aa^{x^{-1}t})^4 = 1$. Следовательно, $(a^ta^{x^{-1}})^4 = (a^taa^x)^4 = 1$. Противоречие. Предложение доказано. $\square$

В качестве следствия получаем следующее утверждение.

Лемма 2.5.10. *Пусть группа G не содержит элементов порядка больше 7 и $O_2(G) = 1$.*

(1) Если G не содержит подгрупп, изоморфных $L_2(7)$, S_5 и A_6, то для любых $t \in \Delta$ и $x \in \Gamma_3$ выполнено $(xt)^6 = [x, t]^p = 1$, где p нечётно.

(2) Если $\mu(G) = \{4, 6\}$, то для любых $t \in \Gamma_2$ и $x \in \Gamma_3$ выполнено $(xt)^6 = [x, t]^3 = 1$.

Доказательство. Предположим противное.

По предложению 2.5.1 и лемме 2.3.4 G не содержит подгрупп, изоморфных A_4, инволюции которых лежат в Δ (Γ_2 в случае (2) соответственно). По лемме 2.2.1 $xt \in \Gamma_6$.

Пусть $j = 2k$ — порядок $[x, t]$, где $k \in \{1, 2, 3\}$. Тогда $u = [x, t]^k$ — инволюция, при этом

$$u \cdot x = x^{-1}t \cdot (x^{-1}txt)^{k-1}x \cdot tx \sim x(x^{-1}txt)^{k-1} \sim \begin{cases} x, \text{ если } k = 1 \\ x^t, \text{ если } k = 2 \\ (x^{-1}t)^2, \text{ если } k = 3 \end{cases}$$

Следовательно, $\langle x, u\rangle \simeq A_4$. Используя предложение 2.5.1, в случае (2) сразу получаем противоречие с условием $O_2(G) = 1$.

Пусть теперь $t \in \Delta$. Заметим, что $u \notin \Delta$ (в частности, $k \neq 2$) и по предложению 2.5.1 u инвертирует элемент порядка 5, т.е. $uv \in \Gamma_5$ для некоторого $v \in u^G$.

Из определения видно, что для всех k элемент u представим в виде произведения двух инволюций, сопряжённых с t. Скажем, $u = ab$, где $a, b \in t^G \subseteq \Delta$. Очевидно, $[a, b] = 1$. Порядки va и vb чётны, в противном случае $u^G = v^G = t^G$.

Таким образом, $\langle v, a, b\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i_1, i_2, i_3) = \langle v, a, b \mid v^2, a^2, b^2, (vab)^5, (ab)^2, (va)^{i_1}, (vb)^{i_2}, (ab^v)^{i_3}\rangle,$$

где $i_1, i_2 \in \{4, 6\}$, $i_3 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что $G(4, 6, 6) \simeq G(6, 4, 6) \simeq 2 \times S_5$, $G(6, 6, 4) \simeq 2 \times S_6$, $G(6, 6, 4) \simeq 2 \times L_2(11)$, и $|G(i_1, i_2, i_3)| \leq 4$ при остальных значениях параметров. Во всех случаях получаем противоречие. Лемма доказана. $\square$

Глава 3

Результаты о локальной конечности

3.1 Группы периода 12 без элементов порядка 12

В данном разделе доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — группа, для которой $\omega(G) \subseteq \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Тогда G локально конечна.*

В леммах, предшествующих доказательству теоремы, предполагается, что $G = \langle \Gamma_2(G) \rangle$ — группа, удовлетворяющая условию теоремы, и $O_2(G) = 1$. По лемме 2.5.10 для любых $t \in \Gamma_2$ и $x \in \Gamma_3$ выполнено $(xt)^6 = [x, t]^3 = 1$.

Лемма 3.1.1. *Пусть a и b — элементы порядка 3 из G. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) подгруппа $\langle a, b \rangle$ является гомоморфным образом экстраспециальной группы периода 3 и порядка 27 и $(ab)^3 = (aba)^3$;

(2) подгруппа $\langle a, b \rangle$ является гомоморфным образом расширения элементарной абелевой 3-группы порядка 81 при помощи $SL_2(3)$ и с точностью до замены b на b^{-1} выполнены следующие соотношения: $(ab)^6 = (ab^{-1})^4 = [a, b]^4 = (abab^{-1}a^{-1}b^{-1})^3 = 1$. Если $x = (ab)^2$, то $x \sim x^a$, подгруппа $\langle x, x^a \rangle$ изоморфна $SL_2(3)$, и фактор-группа группы $\langle a, b \rangle$ по нормальному замыканию подгруппы, порождённой элементом $(xx^a)^3$, лежащим в центре подгруппы $\langle x, x^a \rangle$, является гомоморфным образом A_4.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\langle a,b \mid a^3, b^3, (ab)^4, (a^{-1}b)^3\rangle \simeq L_2(7)$. Поэтому с точностью до замены b на b^{-1} можно считать, что $(ab)^6 = 1$. Пусть $k \in \{2,3\}$ такое, что $(ab^{-1})^{2k} = 1$. Тогда $t = (ab)^3$ и $s = (ab^{-1})^k$ — элементы, порядка делящего 2. По лемме 2.5.10 выполнены следующие соотношения:

$$R(k) = \{a^3, b^3, (ab)^6, (ab^{-1})^{2k}, (t^c t)^3, (s^a s)^3, (bs)^6\},$$

где $c = a^b$. Тогда группа $\langle a,b\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(k,i_1,i_2,i_3) = \langle a,b \mid R(k) \cup \{[a,b]^{i_1}, (abab^{-1})^{i_2}, ((ab)^2a^{-1}b^{-1})^{i_3}\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что индекс $|G(k,i_1,i_2,i_3) : \langle a,t\rangle|$ конечен и $\langle a,b\rangle$ является гомоморфным образом $G(3,6,6,6) \simeq 3^{1+2}$ или $G(2,4,6,6)$, которые описаны в пунктах (1) и (2) заключения леммы, соответственно. Отметим, что перечисление смежных классов по $(2,3)$-порождённой подгруппе $\langle a,t\rangle$ в обоих случаях даёт точное подстановочное представление на 9 и 36 символах, соответственно. Остальные пункты заключения теперь проверяются непосредственно. Лемма доказана. □

Лемма 3.1.2. *Пусть $x,y,z \in \Gamma_2(G)$. Если $(xy)^3 = (yz)^3 = 1$, то $(xz)^3 = 1$.*

Доказательство. Пусть $(xyz)^4 = 1$. Тогда $(xy(xy)^z)^2 = 1$ и по лемме 2.2.1 подгруппа $\langle xy, (xy)^z\rangle$ является гомоморфным образом A_4, что невозможно. Таким образом, $(xyz)^6 = 1$.

Пусть $(xz)^{2i} = 1$, где $i \in \{2,3\}$. Тогда порядок $u = (xz)^i$ делит 2. По лемме 2.5.10 выполнено соотношение $[xy,u]^3 = 1$. Группа $\langle x,y,z\rangle$ является гомоморфным образом

$$F(i,j) = \langle x,y,z \mid x^2, y^2, z^2, (xy)^3, (yz)^3, (xz)^{2i}, (yx^z)^j, (xyz)^6, [xy,u]^3\rangle,$$

где $i,j \in \{4,6\}$. Вычисления показывают, что $F(3,6) \simeq 3^{1+2} : 2$ и для этой группы выполнено заключение леммы. Во всех остальных случаях порядок $F(i,j)$ делит 6. Лемма доказана. □

Лемма 3.1.3. *Пусть a и b — элементы порядка 3 из группы G, порождающие подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$. Тогда любая инволюция $t \in C_G(Z(\langle a,b\rangle))$ централизует всю подгруппу $\langle a,b\rangle$.*

Доказательство. С точностью до замены a на a^{-1} можно считать, что $aba = bab$. Обозначим через $x = (ab)^3$ инволюцию из центра $\langle a, b\rangle$. По условию $[t, x] = 1$. По лемме 2.5.10 выполнены следующие соотношения:

$$R = \{(at)^6, [a,t]^3, (bt)^6, [b,t]^3, (a^b t)^6, [a^b, t]^3, (b^a t)^6, [b^a, t]^3\}.$$

Положим $a_1 = a^t$, $a_2 = a^{ta}$, $a_3 = a^{ta^{-1}}$, $a_4 = a^{tat}$, $a_5 = [a,t]$, $a_6 = (at)^2$. Поскольку $\omega(G) \subseteq \{1,2,3,4,6\}$, то $([a,b]b^t)^{12} = 1$. По лемме 3.1.1 группа $\langle a, b, t\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$F(k_1, ..., k_6) = \langle a, b, t \mid R \cup \{t^2, a^3, b^3, [x,t], ([a,b]b^t)^{12}, u_i, s_i, aba = bab \mid i \in \{1, \ldots 6\}\}\rangle,$$

где $k_i \in \{1,2,3\}$, причем если $k_i = 1$, то $u_i = (a_i b)^6$, $s_i = (a_i b^{-1})^4$; если $k_i = 2$, то $u_i = (a_i b)^4$, $s_i = (a_i b^{-1})^6$; если $k_i = 3$, то $u_i = (a_i b)^3$, $s_i = (a_i b a_i)^3$.

Вычисления показывают, что $|F(1,1,1,1,3,2)| = 48$. При остальных значениях k_i соответствующая группа тривиальна. Таким образом t — автоморфизм порядка 2 группы $\langle a, b\rangle$, изоморфной $SL_2(3)$. Поскольку в G нет элементов порядка 8, то выполнено заключение леммы. □

Лемма 3.1.4. *Пусть a и b — элементы порядка 3 из группы G, порождающие подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$, t — инволюция. Тогда если $\langle t, C_G(Z(\langle a, b\rangle))\rangle$ является 2-подгруппой, то t централизует $\langle a, b\rangle$.*

Доказательство. Можно считать, что $aba = bab$ и $x = (ab)^3$ — инволюция из центра $\langle a, b\rangle$. По условию $(xt)^4 = 1$. Пусть $y = (tx)^2$. Тогда y лежит в центре $\langle t, x\rangle$ (лемма 1.3.6). По лемме 3.1.3 $[a, y] = [b, y] = 1$. По леммам 2.5.10 и 3.1.1 группа $\langle a, b, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$F(k_1, ..., k_6) = \langle a, b, t \mid R \cup \{t^2, a^3, b^3, [y,a], [y,b], (xt)^4,$$
$$([a,b]b^t)^{12}, u_i, s_i, aba = bab \mid i \in \{1, \ldots 6\}\rangle.$$

Используются обозначения леммы 3.1.3 и $y = (tx)^2$.

Вычисления показывают, что $|F(1,1,1,1,3,2)| = 48$. При остальных значениях k_i соответствующая группа тривиальна. Таким образом t — автоморфизм порядка 2 группы $\langle a, b\rangle$, изоморфной $SL_2(3)$. Поскольку в G нет элементов порядка 8, то выполнено заключение леммы. □

Следующая техническая лемма является некоторой вариацией теоремы Бэра-Сузуки на тему групп 3-транспозиций. Она будет использована в нескольких местах, поэтому подробно обозначим в формулировке все используемые предположения.

Лемма 3.1.5. *Пусть G — группа периода 12. Пусть $a \in G$ — элемент порядка 3, являющийся произведением двух инволюций x и y. Если порядок произведения любых двух элементов из x^G делит 3, то $\langle a, a^g \rangle$ — 3-группа для любого $g \in G$.*

Доказательство. Пусть $g \in G$. Тогда $a^g = zt$, где $z = x^g, t = y^g$, причем из леммы 1.3.6 следует, что $y, t \in x^G$. Группа $\langle a, a^g \rangle$ содержится в группе $\langle x, y, z, t \rangle$, которая является гомоморфным образом

$$
\begin{aligned}
F = \langle x, y, z, t \mid\ & x^2, y^2, z^2, t^2, (xy)^3, (xz)^3, (yz)^3, (xyz)^{12}, (y^x z)^3, \\
& (xt)^3, (yt)^3, (tz)^3, (ty^x)^3, (tz^x)^3, (ty^z)^3, (xyzt)^{12}, \\
& (x^{yz}t)^3, (x^{zy}t)^3, (x^{yzy}t)^3, (xyzx^t)^{12}, (xyzy^t)^{12} \rangle.
\end{aligned}
$$

Вычисления показывают, что $|F| = 2 \cdot 3^7$. Следовательно, силовская 3-подгруппа G нормальна в G, и выполнено заключение леммы. □

Доказательство теоремы 2. Предположим противное. Пусть G — контрпример к теореме с наименьшей экспонентой $O_2(G)$. По теореме Санова 1.3.4 $O_2(G)$ локально конечна. Если $\overline{G} = G/O_2(G)$ локально конечна, то G локально конечна по теореме Шмидта 1.3.7. Следовательно, $\overline{G}$ — контрпример к теореме и $O_2(\overline{G}) = 1$. Таким образом, $O_2(G) = 1$.

Пусть $H = \langle \Gamma_2(G) \rangle$. Тогда H — нормальная подгруппа в G и $O_2(H) = 1$. Группа G/H имеет период 6 и, стало быть, локально конечна по теореме Холла 1.3.5. По теореме Шмидта 1.3.7 H — контрпример к теореме и можно считать, что $G = H$ порождается инволюциями. По теоремам Санова 1.3.4 и Холла 1.3.5 $2, 3 \in \omega(G)$.

По лемме 2.5.1 группа G не содержит подгрупп, изоморфных A_4.

Покажем, что для любой инволюции i, лежащей в центре подгруппы, изоморфной $SL_2(3)$, порядок произведения ii^g для любого $g \in G$ делит 3. Доказательство проведём индукцией по минимальной длине n разложения элемента g в произведение инволюций.

Пусть $n = 1$, тогда g — инволюция. Если порядок $ii^g = (ig)^2$ не делит 3, то $|ig|$ не делит 6, стало быть $(ig)^4 = 1$. По лемме 3.1.4 $[i, g] = 1$ и $|ii^g| = 1$ делит 3, противоречие.

Пусть теперь $n > 1$ и $g = t_1, ..., t_n$, где $t_1, .., t_n$ — инволюции. По предположению порядки элементов $ii^{t_1 \dots t_{n-1}}$ и $i^{t_1 \dots t_{n-1}} i^{t_1 \dots t_n}$ делят 3. Тогда по лемме 3.1.2 порядок ii^g делит 3.

Таким образом, если i — инволюция из центра подгруппы, изоморфной $SL_2(3)$, то i^G образует класс сопряженных инволюций, такой, что порядок произведения любых двух элементов из i^G делит 3. По леммам 3.1.5 и 2.1.2 $\langle i^G \rangle$ является расширением 3-группы при помощи 2. В частности, $\langle i^G \rangle$ локально конечна.

Пусть H — конечно порождённая подгруппа в G. Тогда H порождается конечным множеством инволюций I. Рассмотрим множество $K = \{i \in I \mid i$ лежит в центре подгруппы из H, изоморфной $SL_2(3)\}$. По доказанному, группа $L = \langle K^H \rangle$ локально конечна, как произведение конечного числа нормальных локально конечных подгрупп. Пусть $\overline{H} = H/L$. По лемме 2.5.10 и лемме 3.1.1 в $\overline{H}/O_2(\overline{H})$ любые два элемента порядка 3 порождают 3-группу. По лемме 2.1.2 группа $\overline{H}/O_2(\overline{H})$ локально конечна. По теореме Шмидта H конечна. Стало быть, G локально конечна. Теорема 2 доказана. □

3.2 Распознаваемость группы M_{10} по спектру

M_{10} обозначает группу Матьё, действующую на множестве из 10 точек. Цель данного раздела — доказать следующую теорему о распознавании группы M_{10} по спектру в классе всех групп.

Теорема 3. *Пусть $\mu(G) = \{3, 5, 8\} = \mu(M_{10})$. Тогда G изоморфна M_{10}.*

На протяжении раздела пусть G — контрпример к теореме 3. По теореме Шункова 1.3.1 централизатор произвольной инволюции из G является бесконечной 2-подгруппой.

Из леммы 2.2.1 получаем следующее описание $(2,3)$ — порождённых подгрупп.

Лемма 3.2.1. *Пусть K — подгруппа в G, порождённая инволюцией a и элементом x порядка 3. Тогда либо $|ax| \leq 5$ и K изоморфна, соответственно, одной из следующих групп S_3, A_4, S_4, A_5, либо $(ax)^8 = [a,x]^3 = 1$, и K является гомоморфным образом группы $(4 \times 4) \leftthreetimes S_3$. В частности, если $a \in \Gamma_2$ и $x \in \Gamma_3$, то $ax \in \Gamma_8$ влечёт $[a,x]^3 = 1$.*

Из леммы 2.3.1 следует

Лемма 3.2.2. *Пусть $a \in \Gamma_2$, $b \in \Gamma_4$ и $ab^2 \in \Gamma_3$. Тогда $\langle a, b\rangle \simeq F_{36}$.*

Лемма 3.2.3. *G содержит подгруппу, изоморфную F_{36}.*

Доказательство. Предположим противное. Выберем $a \in \Delta$. По лемме 3.2.2 для $b \in a^G$ и $t \in \Gamma_2$ порядок bt не равен 3. По лемме 3.2.1 для любого $x \in \Gamma_3$ выполнено $a^G x \subseteq \Gamma_3$. По лемме 1.3.9 $\langle a^G\rangle$ локально конечна.

Любая конечно порождённая подгруппа F в $\langle\Delta\rangle$ содержится в некоторой конечно порождённой подгруппе $\langle t_1, \dots t_n\rangle$, где $t_i \in \Delta$. Поскольку $\langle t_i^G\rangle$ локально конечны, то по теореме Шмидта 1.3.7 $\langle\Delta\rangle$ — нормальная локально конечная подгруппа G. По лемме 1.3.10 фактор-группа $G/\langle\Delta\rangle$ является локально конечной, и, следовательно, G локально конечна по теореме Шмидта 1.3.7. Таким образом, $G \simeq M_{10}$ [89] и, стало быть, G содержит подгруппу, изоморфную F_{36}, противоречие. □

Лемма 3.2.4. *Пусть K — конечная 2-группа, содержащая подгруппу V порядка 4, такую что $C_K(V) = V$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(a) $K = V$;

(b) K — группа кватернионов и V циклическая;

(c) K — диэдральная группа, и либо V нециклическая, либо $|K| = 8$;

(d) K — полудиэральная группа, т.е.

$$K \simeq \langle x, y \mid x^{2^m} = y^2 = 1, x^y = x^{-1+2^{m-1}}\rangle$$

для некоторого $m \geqslant 3$.

В частности, K содержит цилическую подгруппу индекса 2 и $|K : [K,K]| = 4$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы K. Можно считать, что $K \neq V$. Пусть M — максимальная подгруппа, содержащая V. Если $M = V$, то K — неабелева группа порядка 8, т.е. она кватернионная или диэдральная. Если $M \neq V$, то M неабелева и по индукции $|M : [M, M]| = 4$, т.е. $|K : [M, M]| = 8$. Если $|K : [K, K]| = 4$, то заключение следует из [90, Теорема 5.4.5], поэтому можно считать, что $[K, K] = [M, M]$, и каждая из трех максимальных подгрупп M нормальна в K. Пусть N — максимальная подгруппа M, содержащая V. Если N является циклической, то $N = V \triangleleft K$ и $|K : V| = |K : C_K(V)| = 2$, стало быть $|K| = 8$, противоречие. Таким образом, $V \ntriangleleft K$, $N \neq V$ и N является диэдральной или кватернионной. Выберем v из $V \setminus Z(K)$ и $k \in K \setminus M$. Тогда $v^k \in N$ и найдётся $m \in M$, такой что $v^{km} = v$. Получаем $km \in C(V) \setminus V$, противоречие. □

Лемма 3.2.5. *Пусть $a \in \Gamma_4(G)$. Тогда $C_G(a) \setminus \langle a \rangle$ содержит инволюцию.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $H = C_G(a^2)$. По теореме Шункова 1.3.1 H — бесконечная 2-группа периода 8. По лемме Шункова 1.3.2 если K — конечная подгруппа H, то централизатор $C_H(K)$ бесконечен.

Пусть $C = C_H(a)$. Если подгруппа C бесконечна, то в ней есть подгруппа U порядка 16, содержащая a. По предположению в U ровно одна инволюция, и порядок её центра ≥ 4, следовательно U циклическая порядка 16, что невозможно. Таким образом, C является циклической группой порядка 4 или 8. Заметим, что $|\operatorname{Aut}(\langle a \rangle)| = 2$ и $\langle a \rangle$ характеристическая подгруппа в C, поэтому $N_H(C)/C$ — группа порядка 2. Если $|C| = 8$, то пусть $x \in N_H(N_H(C)) \setminus N_H(C)$. Тогда $C^x \leq N_H(C)$ и $C^x \neq C$. Поскольку C и C^x являются подгруппами индекса 2 в $N_H(C)$, то $C \cap C^x$ — подгруппа индекса 2 в C, т.е. $C \cap C^x = \langle a \rangle$. Кроме того, C^x циклическа, поэтому $C^x \leq C_H(\langle a \rangle) = C$; противоречие.

Пусть теперь $|C| = 4$. Пусть U — конечная подгруппа, содержащая C, порядка ≥ 32 в H. Очевидно $C_U(C) = C$, и по лемме 3.2.4 U содержит циклическую подгруппу индекса 2, т.е. порядка ≥ 16; противоречие. □

Доказательство теоремы 3

Пусть F — подгруппа, изоморфная F_{36} в G (лемма 3.2.3). Выберем порождающие $x, y, g \in F$, так, что выполнены соотношения

$$R = \{x^3, y^3, g^4, [x, y], x^g y, y^g x^{-1}\}.$$

По лемме 3.2.5 найдётся $a \in \Gamma_2$, такая что $[g, a] = 1$ и $a \notin F$.

Если $(xa)^8 = 1$, то по лемме 3.2.1 $[x, a]^3 = 1$. Стало быть, $\langle x, y, g, a\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i, j) = \langle x, y, g, a \mid R \cup \{a^2, [g, a], (xa)^8, (g^2 a^x)^i, [x, a]^3, ((x^{-1} gya)^2 a)^j\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что порядок $G(i, j)$ делит 36 для всех $i, j \in \{3, 5, 8\}$, вопреки условию $a \notin \langle x, y, g\rangle$. Из соображений симметрии получаем, что $(xa)^8 \neq 1, (ya)^8 \neq 1, (xya)^8 \neq 1$. Стало быть, $\langle x, y, g, a\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2, i_3, j) = \langle x, y, g, a \mid R \cup \{a^2, [g, a], (xa)^{i_1}, (ya)^{i_2}, (xya)^{i_3}, (ga^x)^j\}\rangle,$$

где $i_1, i_2, i_3 \in \{3, 5\}$, $j \in \{3, 5, 8\}$.

Вычисления показывают, что порядок $G(i_1, i_2, i_3, j)$ делит 36, вопреки условию $a \notin \langle x, y, g\rangle$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

3.3 Распознаваемость группы $L_3(4)$ по спектру

Цель данного раздела — доказать следующую теорему о распознавании группы $L_3(4)$ по спектру в классе всех групп.

Теорема 4. *Пусть $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} = \omega(L_3(4))$. Тогда G изоморфна $L_3(4)$.*

На протяжении раздела пусть G — контрпример к теореме. По теореме Шункова 1.3.1 централизатор произвольной инволюции из G является бесконечной 2-подгруппой.

Из леммы 2.2.1 получаем следующее описание $(2, 3)$–порождённых подгрупп.

Лемма 3.3.1. *Пусть K — подгруппа в G, порождённая инволюцией a и элементом x порядка 3. Тогда либо $|ax| \leq 5$ и K изоморфна, соответственно, одной из следующих групп S_3, A_4, S_4, A_5, либо $|ax| = 4$ и $K \simeq L_2(7) \simeq L_3(2)$. В частности, если $K \not\simeq A_4$, то K содержит подгруппу, изоморфную S_3.*

Лемма 3.3.2. *Существуют $a, b \in \Delta$ такие, что $\langle a, b\rangle \simeq S_3$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x \in \Gamma_3(G)$. Тогда по лемме 3.3.1 для всех $a \in \Delta$ имеем $a\Gamma_3 \subseteq \Gamma_3$. По лемме 1.3.9 $\langle\Delta\rangle$ локально конечна.

Группа $G/\langle\Delta\rangle$ содержит инволюцию, элемент порядка 3, и не содержит элементов порядка 4, следовательно, она локально конечна [42, Теорема 2]. Таким образом, G локально конечна по теореме Шмидта 1.3.7, откуда $G \simeq L_3(4)$ [91]; противоречие. □

Следующая лемма получается как следствие леммы 2.3.1.

Лемма 3.3.3. *G содержит подгруппу, изоморфную F_{36} или $L_3(2)$.*

Лемма 3.3.4. *Если G содержит подгруппу , изоморфную F_{36}, то G содержит подгруппу, изоморфную $L_3(4)$.*

Доказательство. Положим $T = \langle x, y, g \mid \alpha\rangle$, где $\alpha = \{x^3, y^3, [x, y], g^4, x^g y^{-1}, y^g x\}$, и отождествим T с F_{36}. По лемме 1.3.2 найдётся $a \in \Gamma_2$ такой, что $a \notin T$ и $[a, g] = 1$. Пусть $\beta = \{a^2, [a, g], (xa)^{i_1}, (ga^x)^{i_2}, (xya)^{i_3}, (g^2a^{xy})^{i_4}\}$. Тогда $\langle T, a\rangle$ является гомоморфным образом группы $L(i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle x, y, g, a|\alpha \cup \beta\rangle$, где $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{3, 4, 5, 7\}$. Вычисления показывают, что либо $L(5, 7, 5, 5)/Z(L(5, 7, 5, 5)) \simeq L_3(4)$, либо порядок группы $L(i_1, i_2, i_3, i_4)$ делит 36. Лемма доказана. □

Лемма 3.3.5. *Если G содержит подгруппу H изоморфную $L_3(2)$, то G содержит подгруппу, изоморфную $L_3(4)$.*

Доказательство. Отождествим H с $L_3(2)$ и рассмотрим следующие матрицы над полем из двух элементов:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственная проверка показывает справедливость следующих соотношений:

$$\alpha = \{x^3, y^2, (xy)^7, [x, y]^4\}.$$

Пусть $z = [x, y]$, тогда $C_H(z^2) = \langle y, z\rangle$. По лемме 1.3.2 найдётся $t \in \Gamma_2$ такой, что $t \notin H$ и $[t, y] = [t, z] = 1$.

Положим $i = y^{x^2 y}$, тогда $z^2 i \in \Gamma_3$. По лемме 2.2.2 порядок ti не равен 7. Положим

$$\beta_t(j_1, j_2, j_3, j) = \{t^2, [y, t], [z, t], (xt)^{j_1}, (xyt)^{j_2}, (xytxt)^{j_3}, (ti)^j\}.$$

Тогда $\langle x, y, t\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(j_1, j_2, j_3, j) = \langle x, y, t \mid \alpha \cup \beta_t(j_1, j_2, j_3, j)\rangle,$$

где $j_1, j_2, j_3, j \in \{3, 4, 5, 7\}$ и $j \neq 7$. Вычисления показывают, что $G(7, 5, 7, 5)/Z(G(7, 5, 7, 5)) \simeq L_3(4)$, при этом порядки всех других групп делят $|L_3(2)|$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4.

По леммам 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4 и 3.3.5 G содержит подгруппу H, изоморфную $L_3(4)$. Докажем, что $G = H$.

Используем обозначения леммы 3.3.5. По доказательству леммы 3.3.5 можно отождествить H с группой $\langle x, y, t \mid \alpha \cup \beta_t(7, 5, 7, 5)\rangle$. Положим $t_1 = t^{(t^x)}$ и $t_2 = t^{(t^{x^2})}$. Заметим, что $W = \{y, y^x, t, t_1, t_2\}$ является в H силовской 2-подгруппой и централизатором инволюции. По лемме 1.3.2 найдётся инволюция $u \notin H$, такая что $[u, W] = 1$. Заметим, что для $v = ut$ также имеем $v \notin H$ и $[v, W] = 1$. Поэтому $\langle x, y, t, u\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$S = \langle x, y, t, u \mid \alpha \cup \beta_t(7, 5, 7, 5) \cup \beta_u(7, 5, 7, 5) \cup \beta_v(7, 5, 7, 5) \cup \{[u, t], [u, t_1], [u, t_2]\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что S тривиальна. Теорема 4 доказана. $\square$

3.4 О периодических группах с узким спектром

Цель раздела — доказательство следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть G — группа и $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{7, 5\}$. Тогда $p = 7$ и G является расширением 2-группы с помощью $L_2(8)$. В частности, G локально конечна.*

На протяжении раздела $\mu = \{4, 5, 7, 9\}$ и G является контрпримером к теореме.

Следующая лемма является аналогом леммы 3.3.5, однако приходится несколько модифицировать доказательство.

Лемма 3.4.1. *G не содержит подгрупп, изоморфных $L_3(2)$.*

Доказательство. Предположим противное, что G содержит подгруппу H изоморфную $L_3(2)$. Докажем, что G содержит подгруппу, изоморфную $L_3(4)$, тем самым получая противоречие.

Как в лемме 3.3.5 можно считать, что H порождается элементами x и y, которые удовлетворяют соотношениям

$$\alpha = \{x^3, y^2, (xy)^7, [x, y]^4\}.$$

Пусть $z = [x, y]$. По теореме Шункова 1.3.1 $C = C_G(z^2)$ является бесконечной 2-группой. Пусть $S = C_H(z^2)$. По лемме 1.3.2 группа $C_C(S)$ бесконечна. Пусть K — группа порядка 16 из $C_C(S)$, содержащая S. Если K содержит единственную инволюцию z^2, то K является циклической или обобщенной группой кватернионов [92, Теорема 12.5.2] и потому содержит элемент порядка 8, что невозможно. Пусть t — инволюция из $C_C(S)$, отличная от z^2. Заметим, что $S = \langle y, y^x \rangle$.

Пусть $a = x^{yx^2yx^2}$ — элемент порядка 3 из нормализатора $N_H(\langle y, z^2 \rangle)$. Поскольку t централизует группу $\langle y, z^2 \rangle$, то t^a и t^{a^2} также централизуют эту группу. Следовательно, $\langle t^{\langle a \rangle} \rangle$ является 2-группой, на которой элемент a действует без неподвижных точек. По [48, Лемма 2] $\langle t^{\langle a \rangle} \rangle = \langle t, t^a \rangle$ — абелева. Откуда $(at)^3 = 1$.

Заметим, что $i = y^{x^2yx^2} \in C_H(y^x)$. Поскольку $[t, y^x] = 1$, то $(it)^4 = 1$. Пусть $j = y^{(xy)^2}$, тогда $z^2j \in \Gamma_3$. Заметим, что zt — элемент порядка 4, такой что $(zt)^2 = z^2$. По лемме 2.3.1 $zjt = (xy)^3t \in \Gamma_4 \cup \Gamma_7$.

Таким образом, группа $\langle x, y, t \rangle$ является гомоморфным образом

$$G(r_1, r_2, r_3, r) = \langle x, y, t \mid \alpha \cup \{t^2, [t, z], [y, t], (at)^3, (ti)^4, (xt)^{r_1}, (t^xt)^{r_2}, (yti)^{r_3}, ((xy)^3t)^r\} \rangle,$$

где $r_1, r_2, r_3 \in \mu$ и $r \in \{4, 7\}$. Вычисления показывают, что индекс $G(r_1, r_2, r_3, r)$ по подгруппе $\langle x, y \rangle$ конечен и либо он тривиален, либо $G(7, 4, 9, 4) \simeq L_3(4)$, либо

$|G(9,*,9,7):\langle x,y\rangle| = 56$. В последнем случае $56\cdot|\langle x,y\rangle|$ не делится на 9, поэтому можно полагать $r_1 = 3$; вычисления показывают, что $|G(3,*,9,7)| = 168$, противоречие. $\square$

Следующая лемма является аналогом леммы 3.3.4

Лемма 3.4.2. *Если $x \in \Gamma_4(G)$ и $t \in \Gamma_2(G)$, то $x^2 t \notin \Gamma_3(G)$.*

Доказательство. Предположим противное. По леммам 2.3.1 и 3.4.1 $\langle t,x\rangle \simeq F_{36}$ и выполнены соотношения

$$\beta = t^2, x^4, (xt)^4, (t^x t)^3, (x^2 t)^3.$$

По леммам 1.3.1 и 1.3.2 найдётся инволюция y, которая централизует x и не лежит в $\langle t,x\rangle$. Очевидно, $xy \in \Gamma_4$ и $(xy)^2 = x^2$. По леммам 2.3.1 и 3.4.1 $\langle t,xy\rangle \simeq F_{36}$, откуда $(xyt)^4 = (t^{xy}t)^3 = 1$. Таким образом, группа $\langle x,y,t\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(r_1,r_2) = \langle x,y,t \mid \beta \cup \{y^2, y^x y, (xyt)^4, (t^{xy}t)^3, (yt)^{r_1}, (x^2yt)^{r_2}\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что для любых значений $r_1, r_2 \in \mu$ порядок $G(r_1,r_2)$ либо делит 36, либо не делится на 3. Противоречие. $\square$

Полного описания $(2,3)$-порождённых групп, изоспектральных G, получить не удается. Однако для доказательства теоремы достаточно доказать следующий аналог.

Лемма 3.4.3. $\Gamma_3\Delta \subseteq \Gamma_3$.

Доказательство. Пусть $x \in \Gamma_3$, $t \in \Delta$.

Если порядок $t^x t$ делит 9, то по лемме 1.3.6 найдётся инволюция t', такая что $tt' \in \Gamma_3(G)$ вопреки лемме 3.4.2. Поэтому можно считать, что порядок $t^x t$ не делит 9. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть сначала $xt \in \Gamma_7$. Если порядок tt^x чётен, то по лемме 2.2.1 $\langle x,t\rangle \simeq L_2(7)$, что противоречит лемме 3.4.1. Если порядок tt^x равен $2k+1$, то $(t^x t)^k x^{-1} \in C_G(t)$. Таким образом $\langle x,t\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(k) = \langle x,t \mid x^3, t^2, (xt)^7, (tt^x)^{2k+1}, ((t^x t)^k x^{-1})^4\rangle.$$

Вычисления показывают, что $G(k)$ тривиальна при $k \in \{1, 2, 3\}$.

2) Пусть теперь $xt \in \Gamma_9$. Положим $y = (xt)^3$ и заметим, что $yt = xtxtx \sim t^x t$. Таким образом по 1) порядок $t^x t$ не делит 7. Следовательно, группа $\langle x, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$H(k) = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^9, (tt^x)^k\rangle,$$

где $k \in \{3, 4, 5\}$. Вычисления показывают, что $H(3)$ — циклическая порядка 3, $H(4) \simeq A_4$, и $H(5) \simeq H(3) \times L_2(19)$.

3) Наконец, пусть порядок xt меньше 7. Тогда $\langle x, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$K(r_1, r_2) = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^{r_1}, (tt^x)^{r_2}\rangle,$$

где $r_1 \in \{3, 4, 5\}$ и $r_2 \in \{3, 4, 5, 7\}$. Вычисления показывают, что $K(4, 3) \simeq S_4$ и $K(5, 5) \simeq A_5$ содержат подгруппу, изоморфную S_3, что невозможно; $K(3, 4) \simeq A_4$ и $K(r_1, r_2)$ тривиальна при остальных значениях параметров. Лемма доказана. □

Лемма 3.4.4. *Пусть G — локально конечная группа с $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{7, 5\}$. Тогда $p = 7$ и G является расширением 2-группы с помощью $L_2(8)$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \Gamma_4(G), z \in \Gamma_9(G)$ и $t \in \Gamma_p(G)$. Тогда $K = \langle x, y, z, t\rangle$ — конечная группа и $\omega(K) = \omega(G)$. Группа K трипримарна и не содержит элементов смешанного порядка, поэтому она не может быть группой Фробениуса или двойной группой Фробениуса [93, Лемма 1.1].

Из классификации трипримарных групп [94] следует, что $p = 7$ и $\overline{K} = K/O_2(K) \simeq L_2(8)$, где $O_2(K)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^6 в K, каждая из которых как $\overline{K}$-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)SL_2(2^n)$-модулю. Следовательно, x^2 и y^2 порождают 2-подгруппу. Стало быть, $\langle\Delta\rangle$ — нормальная 2-подгруппа в G и $G/\langle\Delta\rangle \simeq L_2(8)$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5

Пусть $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{7, 5\}$. По лемме 3.4.4 достаточно доказать, что G локально конечна. Предположим противное.

По лемме 3.4.3 $\Gamma_3\Delta \subseteq \Gamma_3$. По лемме 1.3.9 $\langle\Delta\rangle$ — локально конечная 2-группа.

Если $T = G/\langle\Delta\rangle$ не содержит инволюций, то T действует свободно на центре $\langle\Delta\rangle$, что невозможно по [38]. Таким образом, T содержит инволюцию, элемент порядка 3, и не содержит элементов порядка 4, следовательно, T локально конечна по [42, Теорема 2]. Откуда G локально конечна по теореме Шмидта 1.3.7, противоречие. Теорема доказана. □

3.5 Инволюции в группах периода 12 — I

Целью раздела является доказательство следующего результата.

Теорема 6. *Пусть G — группа с тождественным соотношением $x^{12} = 1$, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 4. Тогда G локально конечна.*

Далее в этом разделе G — группа периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 4.

Лемма 3.5.1. *Пусть $z, y, t \in \Gamma_2(G)$. Если $(zy)^3 = (yt)^3 = 1$, то $(zt)^3 = 1$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть $|zt| = 6$. Положим $x = (zt)^3$, $w = x^y$, $a = (wz)^2x$ и $b = (wt)^2x$. Тогда $(wx)^3 = (yx)^6 = 1$.

По лемме 1.3.6 инволюция x лежит в центре группы $\langle z, t\rangle$. По лемме 2.2.3, применённой к $\langle x, y, z\rangle$ и $\langle x, y, t\rangle$, выполнены соотношения $a^2 = b^2 = 1$. Подгруппа $\langle z, w, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$\begin{aligned} F = \langle z, w, t \mid\ & z^2, w^2, t^2, (zw)^6, (wt)^6, (tz)^6, (wx)^3, a^2, b^2, (zwt)^{12}, (ab)^6, \\ & ((wz)^3t)^6, ((xwz)^3t)^6, (w^zt)^6, (x^{wz}t)^6, (x^{wzw}t)^6, (z^{wx}t)^6, \\ & (at)^6, (a^wt)^6, (zb)^6, (zwtzt)^{12}, (zwxt)^{12}\rangle, \end{aligned}$$

где $a = (wz)^2x$, $b = (wt)^2x$, $x = (zt)^3$.

Перечисляя смежные классы группы F по подгруппе $\langle z, w\rangle$, получим ограничение на порядок $|F : \langle z, w\rangle| = 81$ и подстановочное представление $\varphi : F \to F_p$.

Вычисления в группе подстановок F_p показывают, что $|F_p| = 3^5 4$, поэтому представление φ точное. Кроме того, в группе F_p, а стало быть и в F, выполнено соотношение $(zwt)^3 = 1$. Тогда $\langle z, y, t\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$Q = \langle z, y, t \mid z^2, y^2, t^2, (zy)^3, (yt)^3, (tz)^6, (xyz)^6$$
$$(xyt)^6, (zyt)^{12}, (zx^y t)^3, (z^y t)^6, ((zyt)^6 z)^6\rangle$$

порядка 54. Группа Q является расширением экстраспециальной группы порядка 27 при помощи инволюции, и в Q порядок произведения любых двух инволюций делит 3. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 6.

Пусть H — подгруппа, порождённая всеми инволюциями из G. Свяжем с H граф Γ, вершины которого — инволюции из G, и две вершины a и b смежны, если $(ab)^3 = 1$.

Пусть Θ — одна из компонент связности Γ. По лемме 3.5.1 граф Θ полный и по лемме 1.3.6 все вершины из Θ сопряжены в H.

Покажем, что $a^b \in \Theta$ для всех $a \in \Theta$, $b \in H$. Поскольку H порождается инволюциями, то можно считать, что b — инволюция. Тогда $(aa^b)^3 = (ab)^6 = 1$. Итак, Θ — класс сопряженности в H и, в частности, $\langle\Theta\rangle \trianglelefteq H$.

Лемма 3.5.2. *$R = \langle\Theta\rangle$ — расширение 3-группы посредством группы порядка 2. В частности, R локально конечна.*

Доказательство. Если в Θ только одна вершина, то $|R| = 2$. Пусть $x, y \in \Theta$ и $x \neq y$, тогда $a = xy$ — элемент порядка 3. По лемме 3.1.5 подгруппа $\langle a, a^g\rangle$ является 3-группой для любого $g \in R$. По лемме 2.1.2 подгруппа $\langle a^R\rangle$ — 3-группа, лежащая в $O_3(R)$. Таким образом, для любых инволюций x и y из Θ их произведение лежит в $O_3(R)$. □

Лемма 3.5.3. *H — локально конечная группа, являющаяся расширением 3-группы посредством 2-группы.*

Доказательство. Очевидно, H порождается нормальными в G подгруппами R_i, каждая из которых порождается вершинами некоторой компоненты связности Θ

графа Γ. По лемме 3.5.2 каждая подгруппа R_i является расширением 3-группы посредством 2-группы. Поэтому H — расширение 3-группы посредством 2-группы. Так как группы периода 3 и 4 локально конечны (леммы 1.3.3 и 1.3.4), то H локально конечна по теореме Шмидта 1.3.7. □

Лемма 3.5.4. *G локально конечна.*

Доказательство. Фактор-группа G/H не содержит элементов порядка 4 и поэтому удовлетворяет условиям теоремы 6. Если H_1/H — подгруппа, порождённая всеми инволюциями из G/H, то по лемме 3.5.3 группа H_1/H локально конечна и по теореме Шмидта 1.3.7 H_1 локально конечна. Далее, G/H_1 является 3-группой и поэтому локально конечна (лемма 1.3.3). Следовательно, G локально конечна. Лемма 3.5.4 и теорема 6 доказаны. □

3.6 Инволюции в группах периода 12 — II

Целью раздела является доказательство следующего результата.

Теорема 7. *Пусть G — группа периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 6, и пусть H — подгруппа, порождённая всеми инволюциями из G. Тогда G локально конечна и выполнено одно из следующих утверждений.*

1. *Группа G является 3-группой.*

2. *Подгруппа H является расширением 3-группы посредством группы порядка 2, а G — расщепляемым расширением 3-группы посредством некоторой нетривиальной подгруппы группы кватернионов порядка 8 или группы $SL_2(3)$.*

3. *Подгруппа H изоморфна расщепляемому расширению элементарной абелевой 2-группы V посредством неабелевой группы порядка 6, действующей на V без неподвижных точек, а G/H является 3-группой.*

4. *Фактор-группа $G/O_2(G)$ является расширением 3-группы посредством элементарной абелевой 2-группы и $H \leq O_2(G)$.*

На протяжении раздела будем использовать локальные обозначения. Обозначим через S естественное полупрямое произведение прямой суммы двух неприводимых S_3-модулей размерности 2 и симметрической группы S_3 степени 3. Таким образом, $S = VA$, где V — прямое произведение групп V_1 и V_2, каждая из которых является элементарной абелевой группой порядка 4, $A \simeq S_3$ и группы V_1A, V_2A изоморфны симметрической группе S_4 степени 4.

Обозначим через R полупрямое произведение неабелевой 3-группы E периода 3 порядка 27 и группы, порождённой инволюцией, инвертирующей при сопряжении каждый элемент из $E/\Phi(E)$.

Следующая лемма содержит описание групп, порядки элементов которых не превосходят 4.

Лемма 3.6.1. *([13]) Пусть G — группа периода 12, в которой нет элементов порядка 6. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

1. *G — группа периода 3 или 4;*

2. *в G есть нормальная элементарная абелева 3-подгруппа N и G/N изоморфна подгруппе группы кватернионов порядка 8;*

3. *в G есть нормальная элементарная абелева 2-подгруппа N, и $G = NS$, где $S \simeq S_3$ и $C_N(S) = 1$;*

4. *в G есть нормальная 2-подгруппа N ступени нильпотентности не выше двух, и $|G/N| = 3$.*

До конца раздела G обозначает группу периода 12, в которой порядок произведения любых двух инволюций отличен от числа 6.

В следующей лемме описаны подгруппы, порождённые тремя инволюциями.

Лемма 3.6.2. *Пусть G порождена тремя инволюциями a, b, c. Тогда G — конечная группа и справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $(ab)^4 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$ *и* G *— группа порядка, делящего* 2^{10}*;*

(2) с точностью до перестановок a, b, c *выполнены равенства* $(ab)^3 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$ *и* G *изоморфна фактор-группе группы* S*. При этом* $(abc)^3 = 1 = [(ac)^2, (bc)^2]$*. Группа*

$$H = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (xy)^3, (xz)^4, (yz)^4, (xyz)^3, [(xz)^2, (yz)^2]\rangle$$

изоморфна S *и в ней нет элементов порядка* 6*.*

(3) с точностью до перестановки a, b, c *выполнены равенства* $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^4 = 1$ *и* G *— гомоморфный образ группы* S_4*.*

(4) $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^3 = 1$ *и* G *— гомоморфный образ группы* R*. При этом* $(abc)^2 \in Z(G)$ *и в* $G/\langle (abc)^2\rangle$ *нет элементов порядка* 6*.*

Доказательство. (1) Пусть $(ab)^4 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$. В этом случае G является гомоморфным образом

$$F(r, s, t, u) = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (xy)^4, (xz)^4, (yz)^4, (xyz)^{12}, (xyxz)^{12},$$
$$((xy)^2z)^r, ((xz)^2y)^s, ((yz)^2x)^t, ((xy)^2(xz)^2)^u\rangle,$$

где $\{r, s, t, u\} \subseteq \{3, 4\}$. Вычисления показывают справедливость следующих равенств.

а) $|F(4, 4, 4, 4)| = 2^{10}$.

б) Если $u \in \{3, 4\}$, а среди показателей r, s, t ровно один равен 3, то в силу симметрии определяющих соотношений группы $F(r, s, t, u)$ можно считать, что $r = 3, s = t = 4$ и в этом случае $|F(r, s, t, u)| = 8$.

в) Если среди показателей (r, s, t) ровно один равен 4, то можно считать, что $r = s = 3, t = 4$. В этом случае $|F(r, s, t, u)| = 2$, где $u \in \{3, 4\}$.

Группа $F(3, 3, 3, 3)$ тривиальна.

(2) Пусть $(ab)^3 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$. В этом случае G является гомоморфным образом

$$F(r, s) = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (xy)^3, (xz)^4, (yz)^4, (xyz)^{12}, ((xz)^2y)^r, ((yz)^2x)^s, (y^xz)^{12}\rangle,$$

где $\{r, s\} \subseteq \{3, 4\}$.

Если хотя бы одно из чисел r, s равно 3, то $|F(r,s)| = 2$. Если $r = s = 4$, то $|F(r,s)| = 2^8 3$, и в $F(r,s)$ порядок $x^{yx}x^z$ равен 6. Так как $|F/\langle (x^{yx}x^z)^2\rangle| = 8$, то можно считать, что G является гомоморфным образом факторгруппы $F_1 = F/\langle (x^{yx}x^z)^3\rangle$. Так как $Z(F_1) = \langle (xyz)^3\rangle$, то G является гомоморфным образом группы $F_2 = F_1/\langle (xyz)^3\rangle$ порядка $2^5 3$, изоморфной S.

(3) Пусть $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^4 = 1$. Тогда G — гомоморфный образ

$$F(r) = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (xy)^3, (xz)^3, (yz)^4, (xyz)^{12}, ((yz)^2x)^r\rangle,$$

где $r \in \{3, 4\}$. Вычисления показывают, что $F(4) \simeq S_4$, а $F(3) = 1$.

(4) Пусть $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^3 = 1$. Тогда G является гомоморфным образом

$$F(r) = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^2, (xy)^3, (xz)^3, (yz)^3, (xyz)^{12}, (y^xz)^r\rangle,$$

где $r \in \{3, 4\}$. Вычисления показывают, что $F(4) \simeq S_4$, а $F(3) \simeq R$.

Лемма доказана. □

Лемма 3.6.3. *Пусть G конечна, порождена инволюциями и содержит подгруппу H, изоморфную R. Тогда G — расширение 3-группы посредством группы порядка 2. В частности, все инволюции в G сопряжены и порядок произведения любых двух различных инволюций равен 3.*

Доказательство. По $\{p, q\}$-теореме Бернсайда [92, Теорема 9.3.2] G разрешима.

Пусть вначале $T = O_2(G) \neq 1$. Покажем, что в этом случае TH содержит подгруппу, изоморфную $S_3 \times 2$.

Пусть Z — подгруппа порядка 3 из $Z(H)$. Если $C_T(Z) = 1$, то одна из подгрупп H порядка 6 (обозначим её через A) централизует в T некоторую инволюцию t и $A \times \langle t\rangle$ — искомая подгруппа. Если же $C = C_T(Z) \neq 1$, то на C действует группа H/Z, являющаяся расширением элементарной абелевой группы V порядка 9 посредством группы порядка 2, инвертирующей каждый элемент из V. Снова некоторая неабелева подгруппа A из H порядка 6 централизует в C некоторую инволюцию t, т.е. снова подгруппа $A \times \langle t\rangle$ является искомой.

Так как в $A \times \langle t\rangle$ есть, очевидно, две инволюции, порядок произведения которых равен шести, то рассматриваемый случай невозможен, т.е. $O_2(G) = 1$,

$U = O_3(G) \neq 1$ и силовская 2-подгруппа T из G действует точно на U при сопряжении. Если в T содержатся две различные инволюции, то в T есть элементарная абелева подгруппа T_0 порядка 4. Если L — подгруппа из U наименьшего порядка, которую T_0 нормализует, но не централизует, то $|L| = 3$ и LT_0 изоморфна $S_3 \times 2$, что по условию невозможно. Поэтому T содержит единственную инволюцию и, поскольку G порождается инволюциями, $|T| = 2$, $G = O_3(G)T$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.6.4. *Пусть G порождается инволюциями x, y, z, t, где $H = \langle x, y, z\rangle \simeq R$ и $(tx)^2 = (ty)^3 = 1$. Тогда $t = x \in H$.*

Доказательство. Очевидно, G является гомоморфным образом

$$F(a,b,c,d,f) = \langle x,y,z,t \mid x^2, y^2, z^2, t^2, (xy)^3, (xz)^3, (yz)^3, (xyz)^{12}, (xyxz)^3,$$
$$(xt)^2, (yt)^3, (tz)^a, (ty^x)^b, (tz^x)^c, (ty^z)^d, (tx^{yz})^f,$$
$$(yzt)^{12}, (xyzt)^{12}, (xyzty)^{12}, (xyzy^t)^{12}\rangle,$$

где $a, b, c, d, f \in \{3, 4\}$. Вычисления показывают, что $|F(a,b,c,d,f)| \leq 6912$. Таким образом, G конечна. По лемме 3.6.3 $(tx)^3 = 1$. Отсюда $t = x$. $\square$

Лемма 3.6.5. *Пусть $H \simeq R$ — подгруппа из G, порождённая инволюциями x, y, z. Если t — инволюция из G, то $(xt)^3 = 1$.*

Доказательство. По лемме 3.6.2 $\langle x, y, t\rangle$ является гомоморфным образом подгруппы S. Если $t \in \langle x, y\rangle$, то утверждение леммы справедливо. Если же $t \notin \langle x, y\rangle$, то в $\langle x, y, t\rangle$ можно выбрать инволюцию $t_1 = x^t$, для которой порядок xt_1 равен 2, а yt_1 — элемент порядка 3. По лемме 3.6.4 $t_1 \in \langle x, y, z\rangle$ и поэтому $(xt_1)^3 = 1$. Противоречие. $\square$

Лемма 3.6.6. *Если G порождается инволюциями и не содержит подгрупп, изоморфных R, то порядок любого элемента из G не превосходит числа 4. В частности, G локально конечна.*

Доказательство. Пусть $g \in G$, $g = t_1 \cdots t_n$, где $t_1, ..., t_n$ — инволюции. Индукцией по n покажем, что $g^3 = 1$ или $g^4 = 1$. По лемме 3.6.2 это верно при $n \leq 3$. Пусть $n \geq 4$.

По индукционному предположению порядок элемента $g_1 = t_1 \cdots t_{n-1}$ не превосходит числа 4. Если порядок g_1 равен 4, то $W = \langle g_1, t_n \rangle = U\langle g_1 \rangle$, где $U = \langle g_1^2, t_n, t_n^{g_1} \rangle$ — подгруппа, порождённая тремя инволюциями, и инвариантная относительно $\langle g_1 \rangle$. Из леммы 3.6.2 вытекает, что W конечна и содержит подгруппу U индекса 1 или 2. По лемме 3.6.2 U не содержит элементов порядка 6. Предположим, что W содержит элемент порядка 6. Тогда $|W : U| = 2$ и по лемме 3.6.2 порядок произведения некоторых двух инволюций из W равен 6. Итак, W не содержит элементов порядка 6, и, в частности, порядок $g = g_1 t_n$ не превосходит четырёх.

Если порядок g_1 равен 3, то либо $g_2 = t_1 \cdots t_{n-2}$ — инволюция и g содержится в подгруппе $\langle g_2, t_{n-1}, t_n \rangle$, порождённой тремя инволюциями, либо g_2 — элемент порядка 3 и тогда g_1 сопряжен с g_2, т.е. g можно представить как произведение $n-1$ инволюций, либо, наконец, g_2 — элемент порядка 4 и поэтому $g_1 \in \langle g_2, t_{n-1} \rangle \simeq S_4$, откуда g_1 — произведение двух инволюций, g принадлежит подгруппе, порождённой тремя инволюциями, и из леммы 3.6.2 вытекает, что в G нет элементов порядка 6. Локальная конечность G вытекает теперь из теоремы Санова (лемма 1.3.4). $\square$

Лемма 3.6.7. *Пусть G — конечная группа, порождённая инволюциями, и пусть порядок произведения любых двух различных инволюций из G равен 3. Тогда порядок силовской 2-подгруппы из G равен двум.*

Доказательство. Утверждение тривиально, если G содержит только одну инволюцию. Пусть a, b — две различные инволюции из G и $S = \langle a, b \rangle$. Понятно, что S — неабелевая группа порядка 6. Если $O_2(G) \neq 1$ и v — инволюция из $O_2(G)$, то av — 2-элемент и его порядок не может быть равен 3. Поэтому $O_2(G) = 1$, $O_3(G) \neq 1$ и силовская 2-подгруппа T из G действует точно на $O_3(G)$. Теперь так же, как в соответствующем месте доказательства леммы 3.6.3, можно показать, что $|T| = 2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.6.8. *Пусть G порождается инволюциями и содержит подгруппу $Q \simeq R$. Тогда G локально конечна и содержит 3-подгруппу индекса 2.*

Доказательство. Пусть x, y, z — инволюции, порождающие Q. Покажем, что

$(ab)^3 = 1$ для любых двух инволюций a, b из G. Действительно, по лемме 3.6.5 в $\langle x, y, z, a\rangle$ все инволюции сопряжены. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $x = a$. Ещё одно применение леммы 3.6.5 показывает, что $(ab)^3 = (xb)^3 = 1$.

Покажем, что G периода 6. Пусть $g \in G$, $g = t_1 \cdots t_s$ — произведение инволюций. Индукцией по s докажем, что $g^6 = 1$. По доказанному выше это верно при $s \leq 2$. Пусть $s \geq 3$ и для $h = t_1 \cdots t_{s-1}$ справедливо равенство $h^6 = 1$. По лемме 3.1.5 подгруппа $H = \langle h^3, t_s, {t_s}^h, {t_s}^{h^2}\rangle$ конечна, а по лемме 3.6.7 порядок её силовской 2-подгруппы равен 2. Так как H является $\langle h\rangle$-инвариантной подгруппой, то H — подгруппа индекса 1 или 3 в группе $\langle h, t_s\rangle = H\langle h\rangle$. Поэтому в $\langle h, t_s\rangle$ нет элементов порядка 4 и, в частности, $g^6 = (ht_s)^6 = 1$. Таким образом, G периода 6. По лемме 1.3.5 она локально конечна. Кроме того, в ней порядок произведения любых двух инволюций равен 3. По лемме 3.6.7 индекс силовской 3-подгруппы в G равен 2. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 7.

Пусть H — подгруппа, порождённая всеми инволюциями из G. По леммам 3.6.6 и 3.6.6 она локально конечна. Так как группа G/H периода 6, то она тоже локально конечна по лемме 1.3.5. Теперь G локально конечна по теореме Шмидта 1.3.7.

Если в G нет инволюций, т.е. $H = 1$, то G, очевидно, является 3-группой и выполнен пункт 1 теоремы 7. Пусть H является расширением 3-группы посредством группы порядка два и пусть Z — силовская 2-подгруппа из H. Тогда $G = O_3(H)C_G(Z)$. По условию любая инволюция из $C_G(Z)$ лежит в Z, поэтому силовская 2-подгруппа T из G является либо циклической группой, либо группой кватернионов, поэтому либо G обладает нормальным 2-дополнением, которое совпадает с $O_3(G)$, либо G — расщепляемое расширение $O_3(G)$ посредством $SL_2(3)$, и выполнен пункт 2 теоремы.

Теперь по лемме 3.6.8 можно считать, что в H нет подгрупп, изоморфных R. В этом случае по лемме 3.6.6 порядок любого элемента из H не превосходит числа 4 и H удовлетворяет заключению леммы 3.6.1. Так как H порождена инволюциями, то либо H является 2-группой, либо $H = VS$, где V — нормальная элементарная абелева 2-группа, S — группа диэдра порядка 6 и $C_V(S) = 1$. Рассмотрим вначале второй случай. Пусть U — подгруппа порядка 3 из S, а T — силовская 2-подгруппа из S. Тогда $G = VN_G(U) = VC_G(U)T$. Так как H содержит все инволюции из G и $C_V(U) = 1$, то $C_G(U)$ является 3-группой и выполнен пункт 3 теоремы.

Пусть, наконец, H является 2-группой. Тогда в $H/O_2(H)$ нет элементов порядка 4 и, следовательно, $H/O_2(H)$ является расширением 3-группы посредством элементарной абелевой 2-группы. Другими словами, выполнен пункт 4 теоремы. Теорема 7 доказана. $\square$

Глава 4

OC_6 и OC_7-группы

Цель настоящего раздела — доказательство локальной конечности OC_6 и OC_7-групп. Точные формулировки приводятся в следующих двух теоремах.

Теорема 8. *Если спектр группы G равен $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то G локально конечна и для неё справедливо одно из следующих утверждений.*

*(1) $N = O_5(G)$ — нетривиальная элементарная абелева группа,
$G = NC$, где C изоморфна $SL_2(3)$ или группе $\langle x, y \mid x^3, y^4, x^y = x^{-1}\rangle$, и
C действует свободно на N.*

(2) $T = O_2(G)$ — нетривиальная элементарная абелева группа и $G/T \simeq A_5$.

(3) G изоморфна S_5 или S_6.

Теорема 9. *Знакопеременная группа A_7 распознаваема по спектру в классе периодических групп.*

Доказательство этих теорем сначала ведётся отдельно: доказывается, что контрпример к теоремам обязан содержать подгруппу из следующего списка $A_6, S_5, L_2(7)$. После этого для обеих теорем вместе доказывается, что такое предположение приводит к противоречию.

4.1 О подгруппах OC_6-групп

Цель раздела — доказать следующее утверждение.

Предложение 4.1.1. *Контрпример G к теореме 8 содержит подгруппу, изоморфную A_6 или S_5.*

На протяжении раздела G — контрпример к теореме 8.

Лемма 4.1.1. *Группа G не является локально конечной.*

Доказательство. Предположим противное: пусть группа G является локально конечной OC_6-группой. Докажем, что она удовлетворяет заключению теоремы 8.

Пусть a, b, c — элементы из G порядков $4, 5, 6$ соответственно и $H_0 = \langle a, b, c \rangle$. По условию H_0 конечна. По [47] возможны только следующие случаи:

(а) $H_0 = NC$, где $N_0 = O_5(H)$ — нетривиальная элементарная абелева подгруппа, C изоморфна расщепляемому расширению циклической группы 3 посредством 4, либо $C \simeq SL_2(3)$.

(б) $T = O_2(H_0)$ — нетривиальная элементарная абелева группа и $H_0/T \simeq A_5$.

(в) H_0 изоморфна S_5 или S_6.

Пусть имеет место случай (а). Тогда $N = C_G(N_0)$ является 5-группой, на которой свободно действует группа C, содержащая инволюцию. Поэтому N — абелева группа. Пусть $H = NC$. Покажем, что $H = G$. Пусть $g \in G$, $H_1 = \langle H_0, g \rangle$. Тогда H_1 — конечная группа и $H_1 = O_5(H_1)C$, где $O_5(H_1)$ абелева. Очевидно, $N_0 \leq O_5(H_1) \leq N$, поэтому $H_1 \leq NC = H$. Отсюда $g \in H$ и $H = G$ удовлетворяет пункту (1) заключения теоремы.

Аналогично доказывается, что в случае (б) $C_G(O_2(H_0))H_0 = G$ удовлетворяет пункту (2) заключения теоремы.

Если $H_0 \simeq S_5$ и $H_0 \neq G$, то для $g \in G \backslash H_0$ конечная подгруппа $\langle H_0, g \rangle$ изоморфна S_6, а если $H_0 \simeq S_6$, то $H_0 = G$.

Во всех случаях группа G оказывается локально конечной; противоречие. □

Лемма 4.1.2. *Пусть K — подгруппа G, порождённая инволюцией $y \in \Delta$ и элементом x порядка 4. Предположим, что для любых $t \in \Delta$ и $i \in \Gamma_2$ порядок ti не равен 5. Тогда K конечна и не содержит элементов порядка 5.*

Доказательство. K является гомоморфным образом группы

$$K(i_1, i_2, i_3, j_4, j_5) = \langle x, y \mid x^4, y^2, (xy)^{i_1}, ((xy)^2x)^{i_2}, (x^3yx^2yxy)^{i_3}, [x, y]^{j_4}, (x^2y)^{j_5} \rangle,$$

где $i_1, i_2, i_3 \in \{4, 5, 6\}$ и $j_4, j_5 \in \{4, 6\}$. Вычисления показывают, что такая группа всегда конечна и содержит элемент порядка 5 только в случае $K \simeq K(5, 6, 4, 6, 6) \simeq S_5$, что невозможно, поскольку $S_5 \ni (1, 2, 3, 4, 5) = (1, 5)(2, 4) \cdot (2, 5)(3, 4)$ и $(1, 5)(2, 4) \in \Delta(S_5)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.1.3. *Существуют $t, i \in \Delta(G)$, такие что $ti \in \Gamma_5(G)$.*

Доказательство. Предположим противное и докажем, что если для любых $t \in \Delta$ и $i \in \Gamma_2$ порядок ti не равен 5, то $\langle \Delta \rangle$ является $\{2, 3\}$-группой и G локально конечна; что противоречит лемме 4.1.1.

Положим $H = \langle \Delta \rangle$ и докажем, что H не содержит элементов порядка 5. Предположим противное. Тогда найдутся $t_1, ..., t_n \in \Delta$, такие что $z = t_1 ... t_n$ является элементом порядка 5. Пусть при этом n наименьшее из возможных. По условию $n \geq 3$.

Положим $x = t_1 ... t_{n-1}$ и $y = t_n$. Тогда $z = xy$ — элемент порядка 5, где y — инволюция. По лемме 2.2.1 порядок x не равен 3. По выбору n, порядок x не равен 5. По лемме 4.1.2 порядок x не делит 4. Таким образом, $x \in \Gamma_6$.

Пусть $a = x^3$, $b = y$, и $c = x^4$. Тогда $c^a = c$ и $abc \in \Gamma_5$. Так как $a \in \Gamma_2$ и $b \in \Delta$, то порядок ab не равен 5. По лемме 2.2.1 порядок bc не равен 5.

Докажем, что $\langle a, b, c \rangle$ конечна и не содержит элементов порядка 5.

Рассмотрим сначала случай $(bc)^4 = 1$. Тогда $\langle a, b, c \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$K(j_1, j_2) = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^3, [a, c], (abc)^5, (bc)^4, (ab)^{j_1}, ((ab)^2 b^{ac})^{j_2} \rangle,$$

где $j_1, j_2 \in \{4, 6\}$, которая либо равна $K(6, 4) \simeq S_5$, либо порядка 2. Оба этих случая невозможны.

Таким образом, $(bc)^6 = 1$. Если $h \in \Gamma_2$ такой, что $\langle h, c \rangle \simeq A_4$, то группа $\langle h, a, c \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i_1, i_2, ..., i_9) = \langle h, a, c \mid h^2, a^2, c^3, (hc)^3, [a, c], (ah)^{i_1}, (at)^{i_2}, (hat)^{i_3},$$
$$(td)^{i_4}, [t, d]^{i_5}, (ti)^{i_6}, (hj)^{i_7}, (hac)^{i_8}, ((ha)^2 c)^{i_9} \rangle,$$

где $t = h^c, d = (ha)^2, i = (ha)^3, j = (at)^3$. Вычисления показывают, что эта группа конечна для любых $i_1, ..., i_9 \in \{4, 5, 6\}$, и не содержит элементов порядка 5, за исключением случая $G(6, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 4, 5) \simeq S_5$. По условиям леммы $\langle h, a, c\rangle$ не является гомоморфным образом S_5. По предложению 2.5.1 $O_2(\langle h, c\rangle) \subseteq O_2(\langle a, h, c\rangle)$, и стало быть $(ah)^4 = (ah^c)^4 = 1$.

(Случай A) Предположим сначала, что $[b, c] \in \Gamma_6$. Тогда для $h = (b^cb)^3$ выполняется $\langle h, c\rangle \simeq A_4$ (см. доказательство леммы 2.5.10). В частности, $(ah)^4 = (ah^c)^4 = 1$. Положим $s = (ab)^3$. Если $sc \notin \Gamma_4$, то $\langle a, b, c\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i, j, i_1, i_2, i_3) = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^3, [a, c], (ab)^i, (bc)^6, (abc)^5, [b, c]^6, (ah)^4, (ah^c)^4, (sc)^j, (ac^b)^{i_1}, ((ab)^2c)^{i_2}, (s^cs)^{i_3}\rangle,$$

где $i \in \{4, 6\}$, $j \in \{5, 6\}$, $i_1, i_2, i_3 \in \{4, 5, 6\}$. Вычисления показывают, что порядок $G(i, j, i_1, i_2, i_3)$ делит 2, что невозможно. Таким образом, $sc \in \Gamma_4$.

Если $ab \in \Gamma_6$, то $s \in \Gamma_2$, и по лемме 2.2.1 $\langle s, c\rangle \simeq S_4$, поэтому $\langle [s, c], c\rangle \simeq A_4$. По доказанному выше $(a[s, c])^4 = 1$, и $\langle a, b, c\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$L = \langle a, b, c \mid a^2, b^2 = c^3, [a, c], (ab)^6, (bc)^6, (abc)^5, [b, c]^6, (ah)^4, (ah^c)^4, (sc)^4, (a[s, c])^4\rangle.$$

Вычисления показывают, что порядок L равен 2.

Таким образом, можно считать, что $ab \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Тогда $\langle a, b, c\rangle$ является гомоморфным образом

$$T(i) = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^3, [a, c], (ab)^i, (bc)^6, (abc)^5, [b, c]^6, (ah)^4, (ah^c)^4\rangle,$$

где $i \in \{3, 4\}$. Вычисления показывают, что порядок $T(i)$ делит 2, что невозможно.

(Случай B) Пусть теперь $[b, c] \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

Группа $\langle a, b, c\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(p, i, i_1, i_2, ..., i_6) = \langle a, b, c \mid b^2, a^2, c^3, [a, c], (ab)^p, (bc)^6, (abc)^5, (b^cb)^i, ((ab)^3c)^{i_1}, (((ab)^3)^c(ab)^3)^{i_2}, (ac^b)^{i_3}, (a(bc)^2cb)^{i_4}, ((ab)(cb)^2)^{i_5}, ((ab)^2c)^{i_6}\rangle.$$

Вычисления показывают, что для любых $i \in \{3,4\}$, $p \in \{4,6\}$, $i_1, i_2, ..., i_6 \in \{4,5,6\}$ либо порядок групп $G(p,i,i_1,i_2,...,i_6)$ делит 2, либо G содержит подгруппу $G(4,4,5,6,4,4,6,4) \simeq S_6$, что невозможно.

Полученное противоречие доказывает, что H не содержит элементов порядка 5. Очевидно, $\omega(G/H) \subseteq \{1,2,3,5,6\}$. Если G/H является 5-группой, то $\omega(H) = \{1,2,3,4,6\}$. В этом случае выберем $r \in \Gamma_5, a \in \Gamma_4, b \in \Gamma_3$. Положим $U = \langle a,b,r\rangle$. Тогда U является конечной группой Фробениуса с дополнением порядка 5. По теореме Томпсона ядро Фробениуса группы U нильпотентно, и, следовательно, U содержит элемент порядка 12, что невозможно. Таким образом, G/H не является 5-группой и, стало быть, локально конечна [10, 34, 95]. Поскольку по теореме 2 H также является локально конечной группой, то G локально конечна по теореме Шмидта 1.3.7. Лемма доказана. □

Лемма 4.1.4. *Все инволюции G сопряжены и любая подгруппа G порядка 4 является циклической.*

Доказательство. По леммам 4.1.2 и 4.1.3 найдётся инволюция из $\Delta(G)$, которая инвертирует элемент порядка 5. По лемме 2.3.2 G содержит подгруппу H, изоморфную F_{20}. Пусть $t \in \Delta(H)$. По лемме 2.3.4 $C_G(t)$ не содержит инволюций, отличных от t. По лемме 1.3.6 любая инволюция из G сопряжена с t. □

Из леммы 4.1.4 следует, что если $a,b \in \Gamma_2$ и $a \neq b$, то $ab \in \Gamma_3 \cup \Gamma_5$. По лемме 2.2.1 также получаем, что если $a \in \Gamma_2$ и $x \in \Gamma_3$, то $(ax)^6 = 1$. По лемме 4.1.3 можно считать, что для любого $a \in \Gamma_2$ существует $b \in \Gamma_2$, такой что $ab \in \Gamma_5$.

Лемма 4.1.5. *Если $a,b,c \in \Gamma_2$ такие, что $ab \in \Gamma_3$ и $bc \in \Gamma_5$, то $ac \in \Gamma_5$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по лемме 4.1.4 группа $\langle a,b,c\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(j_1,j_2) = \langle a,b,c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (ac)^3, (bc)^5, (a^b c)^{j_1}, [ab,c]^{j_2}, (abc)^6\rangle,$$

где $j_1, j_2 \in \{3,5\}$. Вычисления показывают, что $|G(j_1,j_2)| \in \{1,2,6\}$; противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 4.1.6. *Пусть $a, b \in \Gamma_2$ и пусть $x^2 = b$.*

(a) Если $ab \in \Gamma_3$, то $ax \in \Gamma_4$, $[a, x] \in \Gamma_3$ и $\langle a, x\rangle \simeq F_{36}$.

(b) Если $ab \in \Gamma_5$, то $ax \in \Gamma_4$, $[a, x] \in \Gamma_5$ и $\langle a, x\rangle$ является гомоморфным образом F_{100}.

В любом случае $ax \in \Gamma_4$.

Доказательство. Лемма следует из лемм 2.3.1 и 2.3.2. □

Доказательство предложения 4.1.1.

Пусть $H = \langle\Delta\rangle$ и $x \in \Gamma_4$. Докажем, что $Hx \subseteq \Gamma_4$ и G локально конечна; что противоречит лемме 4.1.1.

Пусть w слово от $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \Gamma_2$. Покажем, что $(wx)^4 = 1$, используя индукцию по $\ell(w)$, длине слова w.

Если $\ell(w) = 1$, то $w \in \Gamma_2$, и заключение верно по лемме 4.1.6.

Если $\ell(w) > 1$, то $w = aw_1$, где $a \in \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ и $\ell(w_1) = \ell(w) - 1$. По индукции $y = w_1x$ имеет порядок 4. По лемме 4.1.6 $a(w_1x) = ay \in \Gamma_4$. Следовательно, $Hx \subseteq \Gamma_4$. В частности, H и G/H содержат инволюции, но не содержат элементов порядка 4, таким образом, H, G/H, а стало быть, и G являются локально конечными; противоречие с леммой 4.1.1. Предложение 4.1.1 доказано. □

4.2 О факторах, не содержащих элементов порядка 4

В этом разделе T обозначает группу, такую что $\mu(T) = \{5, 6, 7\}$. Пусть

$$\Gamma_2^* = \Gamma_2^*(T) = \{t \in \Gamma_2(T) \mid C_T(t) \text{ — элементарная абелева группа}\}.$$

Будем считать, что это множество не пусто и зафиксируем некоторый $a \in \Gamma_2^*$. Пусть

$$\Lambda_2 = \Lambda_2(T) = \{x^3 \mid x \in \Gamma_6(T)\}.$$

Отметим, что множества Γ_2^* и Λ_2 нормальны в T, состоят из инволюций и не пересекаются, при этом $\Lambda_2 \neq \emptyset$. Цель настоящего параграфа — доказать, что $\langle \Gamma_2^* \rangle$ является группой периода 6.

Лемма 4.2.1. *Если $b \in \Gamma_2(T)$, то $(ab)^6 = 1$. В частности, $[a,t]^6 = 1$ для любого $t \in T$.*

Доказательство. Предположим противное. Если инволюции a и b не сопряжены, то порядок ab чётен и заключение леммы верно. Таким образом, $b \in \Gamma_2^*$.

Пусть $c \in \Lambda_2$. Тогда порядок ac чётен. Если он равен 6, то инволюция $(ac)^3$ из центра диэдральной подгруппы $\langle a, c \rangle$ лежит в Λ_2. В любом случае, a коммутирует с некоторым элементом из Λ_2, и можно считать $[a,c] = 1$.

Таким образом, в группе T выполнены следующие соотношения (p нечётно):

$$R(p) = \{a^2, b^2, c^2, (ab)^p, [a,c]\}.$$

Поскольку множества Γ_2^* и Λ_2 нормальны и не пересекаются, также выполняются соотношения:

$$R_1 = \{(bc)^6, (a^b c)^6, (b^{ab} c)^6\}.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем соотношения

$$R_2 = \{(a(bc)^3)^6, (a(a^b c)^3)^6, (a(b^{ab} c)^3)^6\}.$$

Следовательно, $\langle a, b, c \rangle$ является гомоморфным образом

$$T(p,i,j) = \langle a, b, c \mid R(p) \cup R_1 \cup R_2 \cup R(i,j) \rangle,$$

где $R(i,j) = \{(abc)^i, (aa^b c)^j\}$. Вычисления показывают, что порядок $T(p,i,j)$ делит 4 для всех $p \in \{5,7\}$ и $i,j \in \{5,6,7\}$; противоречие. □

Лемма 4.2.2. *Если $x \in \Gamma_3(T)$, то $(ax)^6 = 1$.*

Доказательство. По лемме 4.2.1 получаем $[a,x]^6 = 1$. Следовательно, $\langle a, x \rangle$ является гомоморфным образом $K_p = \langle a, x \mid a^2, x^3, (ax)^p, [a,x]^6 \rangle$. При этом $K_5 = 1$, а $K_7 \simeq L_2(13)$, что невозможно. Таким образом, $p = 6$, что и требовалось. □

Лемма 4.2.3. *Если $b, c \in \Gamma_2^*(T)$, то $[(ab)^2, (bc)^2] = 1$.*

Доказательство. Предположим сначала, что порядки элементов ab и bc делят 3, т.е. выполнены следующие соотношения:

$$R_3 = \{a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3\}.$$

Используя леммы 4.2.1 и 4.2.2, получаем следующие соотношения

$$R_4 = \{(ac)^6, (a^b c)^6, (ab \cdot c)^6, (b \cdot (ac)^3)^6\}.$$

Следовательно, $\langle a, b, c\rangle$ является гомоморфным образом $K = \langle a, b, c \mid R_3 \cup R_4\rangle$. Вычисления показывают, что $K \simeq 3^{1+2} : 2$. Центр K имеет порядок 3 и потому содержится в ядре соответствующего гомоморфизма. Поэтому $\langle a, b, c\rangle$ является расширением элементарной абелевой 3-группы посредством инволюции. В частности, $[ab, bc] = 1$.

Пусть теперь b, c — произвольные элементы $\Gamma_2^*(T)$. Тогда $b, b^a, b^c \in \Gamma_2^*(T)$ и $(b^a b)^3 = (bb^c)^3 = 1$. По доказанному $[(ab)^2, (bc)^2] = [b^a b, bb^c] = 1$. Лемма доказана. □

Лемма 4.2.4. *Если $b, c \in \Gamma_2^*(T)$, то $(abc)^2 = 1$. Более того, $[a'b, cd] = 1$ для любых $a', b, c, d \in \Gamma_2^*(T)$.*

Доказательство. Пусть $w = (abc)^2$. По лемме 4.2.3 $\langle a, b, c\rangle$ является гомоморфным образом

$$T(i) = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^6, (bc)^6, (ac)^6, (abc)^i, [(ab)^2, (bc)^2], [(bc)^2, (ca)^2], [(ca)^2, (ab)^2]\rangle.$$

Вычисления показывают, что $|T(5)| = |T(7)| = 4$. Следовательно, $i = 6$ и порядок w в T делит 3. Дальнейшие вычисления показывают, что в группе $T(6)$ элемент ww^a порядка 3 централизует a. Поэтому в T выполнено $w^a = w^{-1}$. Аналогично, $w^b = w^{-1}$ и $w^c = w^{-1}$. Следовательно, $w = w^{abc} = w^{-1}$. Порядок w делит 3, стало быть $w = 1$.

Докажем, что $[a'b, cd] = 1$. Без ограничения общности $a' = a$. Имеем $(abc)^2 = 1 = (abd)^2$. Следовательно, $(ab)^c = (ab)^{-1} = (ab)^d$ и поэтому $(ab)^{cd} = ab$. Лемма доказана. □

Лемма 4.2.5. *Пусть T — группа и $\mu(T) = \{5,6,7\}$. Тогда $\langle \Gamma_2^*(T) \rangle$ — локально конечная группа периода 6.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Gamma_2^*(T)$ и $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. По лемме 4.2.4 $K = \langle a_i a_j \mid i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \rangle$ — нормальная абелева подгруппа периода 6. Следовательно, $H = K\langle a_1 \rangle$ конечна и удовлетворяет заключению леммы. Любой элемент $\langle \Gamma_2^*(T) \rangle$ может быть записан как конечное слово от порождающих, поэтому этого достаточно для доказательства леммы. □

4.3 Редукция 2-радикала

Цель этого и следующего раздела — доказать аналог предложения 4.1.1 для групп, изоспектральных A_7. А именно, будет доказано следующее предложение.

Предложение 4.3.1. *Пусть G — периодическая группа, изоспектральная A_7. Тогда G содержит подгруппу, изоморфную A_6, S_5 или $L_2(7)$.*

В данном разделе G — контрпример к предложению 4.3.1 с наименьшей возможной экспонентой $O_2(G)$. Цель раздела — доказать, что $O_2(G) = 1$.

Лемма 4.3.1. *G не локально конечна.*

Доказательство. Предположим G локально конечна. Пусть x_4, x_5, x_6, и x_7 — такие элементы из G, что порядок x_i равен i. Тогда $H = \langle x_4, x_5, x_6, x_7 \rangle$ конечна и $\omega(H) = \omega(G)$. В силу [47] $H \simeq A_7$. Следовательно, $G \neq H$, и можно выбрать $x \in G \setminus H$. Снова $\langle H, x \rangle$ конечна, и поэтому изоморфна A_7. Следовательно, $H = \langle H, x \rangle = G$, противоречие. Лемма доказана. □

Следствием леммы 4.3.1 и теоремы Шункова (лемма 1.3.1) является

Лемма 4.3.2. *Централизатор любой инволюции в G бесконечен.*

Лемма 4.3.3. $O_2(G) = 1$.

Доказательство. Предположим $N = O_2(G) \neq 1$ и пусть $\overline{G} = G/N$.

По теореме Санова (лемма 1.3.4) N локально конечна. Пусть $x \in \Gamma_5(G)$ тогда по теореме Шмидта (лемма 1.3.7) $\langle N, x\rangle$ локально конечна и по теореме Томпсона N локально нильпотентна. По теореме Хигмена [96] N нильпотентна и, в частности, $Z(N) \neq 1$.

Рассмотрим несколько случаев.

0. $\omega(G) = \omega(\overline{G})$. Тогда, в силу выбора G, для группы $\overline{G}$ выполнено заключение предложения 4.3.1. Пусть $\overline{H}$ — конечная простая подгруппа $\overline{G}$, из заключения предложения, и H — её полный прообраз в G. Тогда H локально конечна и содержит подгруппу K, являющуюся расширением конечной 2-группы N_1 посредством $\overline{H}$. Проверка всех таких неприводимых расширений (используя [97] или [78, § 50.6]), не содержащих элементов порядка больше 7 (в частности, с тривиальным центром) показывает, что расширение расщепляемо. Следовательно, G удовлетворяет заключению предложения 4.3.1; противоречие.

1. $\mu(\overline{G}) = \{3, 4, 5, 7\}$. Тогда по теореме 4 $\overline{G} \simeq L_3(4)$ и по теореме Шмидта 1.3.7 G локально конечна, что противоречит лемме 4.3.1.

2. $\mu(\overline{G}) = \{5, 6, 7\}$. В этом случае $\Delta \subseteq N$.

2.1 Предположим найдётся $h \in G$ порядка 4, не лежащий в N. Тогда $\overline{h}$ является инволюцией в $\overline{G}$.

Докажем сначала, что $C_{\overline{G}}(\overline{h})$ является элементарной абелевой 2-группой. Пусть C — полный прообраз $C_{\overline{G}}(\overline{h})$ в G. Предположим C содержит элемент x порядка 3. Тогда $[x, h] \in N$. Поэтому $[x, N\langle h\rangle] \subseteq N$. Заметим, что группа $\langle x, h, N\rangle$ локально конечна, как расширение локально конечной группы N посредством $(2, 3)$-порождённой, а стало быть конечной (по лемме 2.2.1), группы $\langle \overline{x}, \overline{h}\rangle$. Заменяя N на минимальную $\langle x, h\rangle$-инвариантную подгруппу в N, содержащую $N \cap \langle x, h\rangle$, можно считать, что $\langle x, h, N\rangle$ конечна. Пусть $P = \langle h, N\rangle$. Поскольку $[x, P] \subseteq N$, то P является конечной $\langle x\rangle$-инвариантной 2-подгруппой $\langle x, h, N\rangle$. Обозначим через $\Phi = \Phi(P)$ подгруппу фраттини. Заметим, что $h^2 \in \Phi = P'\Delta$ и P/Φ элементарная абелева. Поскольку x — нетривиальный автоморфизм P, он действует нетривиально на P/Φ. Следовательно, все базисные элементы $h\Phi, h^x\Phi, h^{x^2}\Phi$ для P/Φ лежат в $[x\Phi, P/\Phi]$, и $C_{P/\Phi}(x) = 1$. Равенство $P/\Phi = [x\Phi, P/\Phi] \times C_{P/\Phi}(x\Phi)$ теперь влечёт

$P/\Phi = [x\Phi, P/\Phi] \subseteq N/\Phi$, следовательно $P \subseteq N$; противоречие.

Таким образом, $\overline{h} \in \Gamma_2^*(G/N)$. По лемме 4.2.5 $\overline{H} = \langle \Gamma_2^*(G/N) \rangle$ является локально конечной группой периода 6. Поскольку $N = O_2(G)$, то $\overline{H}$ содержит элемент порядка 3. Обозначим через H полный прообраз $\overline{H}$ в G. Тогда H — нормальная локально конечная $\{2,3\}$-подгруппа в G, содержащая элемент порядка 3 и элемент h порядка 4. Пусть $x \in \Gamma_3(H)$ и $y \in \Gamma_5(G)$. По теореме Шмидта 1.3.7 $H \rtimes \langle y \rangle$ локально конечна. Следовательно, $K = \langle x, h \rangle^K \rtimes \langle y \rangle$ — конечная группа. Элемент y действует на подгруппе $S = \langle x, h \rangle^K$ свободно. Поэтому S нильпотентна и является прямым произведением своих силовских подгрупп, в частности, содержит элемент порядка 12, что невозможно.

2.2 Пусть теперь $\Gamma_4(G) \subseteq N$.

Пусть $a \in \Gamma_2(G) \backslash N$ и $b \in \Gamma_2(N)$. Тогда $N\langle a \rangle$ является 2-группой, поэтому $(ab)^4 = 1$. Если $ab \in \Gamma_4 \subset N$, то $a \in N$, вопреки выбору a. Стало быть, $(ab)^2 = 1$. Пусть $C = C_G(\Gamma_2(Z(N)))$. По построению $\Gamma_4 \subseteq N \leq C$. По доказанному $\Gamma_2 \subseteq C$. Множество $\Gamma_2(Z(N))$ нормально в G, поэтому, $C \triangleleft G$.

Поскольку $Z(N) \neq 1$, то C содержится в централизаторе инволюции, и, стало быть, не содержит элементов порядка 5 или 7. Элемент $x \in \Gamma_5(G)$ действует свободно на C. Рассуждения выше позволяют установить нильпотентность C. Стало быть, C не содержит элементов порядка 3, так как $12 \notin \omega(G)$. Поэтому $O_2(G) = C \neq N$; противоречие.

3. $\mu(\overline{G}) = \{2, 3, 5, 7\}$. В работе [98] доказано, что имеет место один из следующих случаев:

3.1 $\overline{G}$ является расширением абелевой 2-группы $\overline{V}$ посредством группы без инволюций. Обозначим через V полный прообраз $\overline{V}$ в G. Тогда $O_2(G) = V \neq N$; противоречие.

3.2 $\overline{G}$ локально конечна. По теореме Шмидта 1.3.7 G локально конечна вопреки лемме 4.3.1.

4. $\mu(\overline{G}) = \{3, 5, 7\}$. Рассмотрим следующие характеристические подгруппы $L = \langle \Gamma_4(N) \rangle$ и $D = \langle \Delta(L) \rangle$. Поскольку N локально конечна и нильпотентна $L \neq D$. Пусть $\overline{G} = G/D$ и $x \in \Gamma_3(G)$. Рассуждая как в пункте 2.1, получим $C_{\overline{L}}(\overline{x}) = 1$,

т.е. $\overline{x}$ действует свободно на $\overline{L} \neq 1$. Следовательно, подгруппа $\langle \overline{x} \rangle$ нормальна в $\overline{G}$ [38, Теорема 3], и поэтому обязательна центральна. Получаем противоречие, поскольку $15, 21 \notin \omega(G)$. Лемма доказана. $\square$

4.4 О подгруппах OC_7-групп

Целью данного раздела является доказательство предложения 4.3.1.

Как и в прошлом разделе, G — контрпример к предложению 4.3.1 с наименьшей возможной экспонентой $O_2(G)$. По лемме 4.3.3 $O_2(G) = 1$.

Лемма 4.4.1. *Если $t \in \Delta$ и $x \in \Gamma_3$, то $(xt)^6 = [x, t]^p = 1$ и $p \in \{3, 5, 7\}$.*

Доказательство. Поскольку $O_2(G) = 1$, лемма следует из леммы 2.5.10. $\square$

В следующих нескольких леммах доказывается, что $p = 3$.

Лемма 4.4.2. *G не содержит подгруппы H, изоморфной F_{42} или F_{294}, такой что $\Gamma_2(H) \subseteq \Delta(G)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $H \simeq F_{42}$. Предположим противное. Пусть $F_{42} \simeq H = \langle x, z \mid R_{42} \rangle \leq G$, где $z \in \Delta(G)$, $b = z^x z$ и $R_{42} = \{x^3, z^2, (xz)^6, b^7, b^x = b^4\}$. Тогда $u = z^{x^2 z}$ — инволюция из $\Delta(G)$, централизующая x. Заметим, что $C_{\langle x, z \rangle}(u) = \langle u, x \rangle$.

(1) $C_G(x) = \langle x, u \rangle$.

Предположим, что y — элемент порядка 3, централизующий x, и $y \notin \langle x \rangle$. По лемме 2.4.4 $y \in C_G(u)$.

Если $[z, y]^7 = 1$, то $v = z^{[y^{-1}, z][y, z]}$ — инволюция, централизующая y. По лемме 2.4.2 $u = v$. Тогда $\langle z, x, y \rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i) = \langle z, x, y \mid R_{42} \cup \{y^3, u^y u, [x, y], (yz)^6, (z^y z)^7, uv, ((zy)^2 x)^i\} \rangle,$$

где $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что xy лежит в центре $G(6)$, что невозможно, а порядки остальных групп $G(i)$ не превосходят $42 = |\langle z, x \rangle|$, и таким образом $y \in \langle x \rangle$, что противоречит выбору y.

Предположим порядок $[z, y]$ не равен 7. Тогда по лемме 4.4.1 он делит 3 или 5. Следовательно, $\langle z, x, y\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2) = \langle z, x, y \mid R_{42} \cup \{y^3, u^y u, [x, y], (yz)^6, (z \cdot xy)^6, (z \cdot xy^{-1})^6, (z^y z)^{i_1}, ((zy)^2 x)^{i_2}\}\rangle,$$

где $i_1 \in \{3, 5\}$, $i_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что индекс $|G(i_1, i_2) : \langle x, z\rangle|$ делит 3. Он равен 3 только для групп $G(3, 6)$ и $G(5, 6)$, в центре которых содержится элемент порядка 3. Таким образом, $\langle z, x, y\rangle = \langle x, z\rangle$, что противоречит выбору y.

Предположим v — инволюция из $C_G(x)$. Тогда $(uv)^6 = 1$. Если $|uv| = 3$, то по пункту (1) $uv = x^{\pm 1}$, и, следовательно, $v = ux^{\pm 1}$ должно быть инволюцией, что неверно. Таким образом, диэдральная подгруппа $\langle u, v\rangle \subseteq C_G(x)$ не содержит элементов порядка 3 и можно выбрать v так, что $[u, v] = 1$. В этом случае $v = u$ по лемме 2.4.2.

(2) $C_\Delta(u) = \{u\}$.

Предположим существует инволюция $t \in C_\Delta(u)$, такая что $t \neq u$. Пусть $w = [x, t]$. Отметим, что $\langle t, x\rangle \subseteq C_G(u)$, и таким образом $w^3 = 1$ по лемме 4.4.1. По пункту (1) имеем $w \neq 1$. Таким образом $\langle x, w\rangle$ является либо элементарной абелевой, либо изоморфна экстраспециальной группе 3^{1+2} экспоненты 3 и порядка 3^3. В любом случае, либо найдётся элемент $y \in \Gamma_3 \backslash \langle x\rangle$, централизующий x, что противоречит пункту (1), либо $(tx)^2 = 1$. В последнем случае $\langle t, z, x\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i_1, i_2) = \langle z, x, t \mid R_{42} \cup \{t^2, (ut)^2, (tx)^2, (t^z x)^6, (z^t x)^6, (tz)^{i_1}, (tzx)^{i_2}\}\rangle,$$

где $i_1, i_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что $G(7, 5) \simeq G(7, 7) \simeq S_7$, $G(6, 7) \simeq L_3(2) : 2$, что невозможно, и порядки $G(i_1, i_2)$ делят 12 при остальных значениях параметров. Получаем противоречие.

(3) Если $t \in \Gamma_2 \backslash \Delta$, то $[u, t] = 1$.

Рассмотрим различные возможности строения группы $\langle t, x\rangle$ согласно лемме 2.2.1.

Предположим $(tx)^2 = 1$. Поскольку t и u не сопряжены, порядок $|ut|$ чётен. Если $|ut| = 4$, то $(ut)^2 \in C_\Delta(u) = \{u\}$, что невозможно. Следовательно, $(ut)^6 = 1$ и

$(u \cdot tx)^6 = 1$ (t и tx сопряжены в $\langle t, x\rangle \simeq S_3$). Поэтому $\langle u, t, x\rangle$ является гомоморфным образом

$$\langle u, t, x \mid \{u^2, t^2, x^3, [u, x], (tx)^2, (ut)^6, (utx)^6\}\rangle \simeq S_3 \times S_3.$$

Из пункта (1) следует, что $(ut)^2 = 1$.

Предположим $(tx)^3 = 1$. Тогда $\langle t, x\rangle \simeq A_4$. По лемме 2.5.2 либо G содержит подгруппу, изоморфную S_5, либо $O_2(\langle t, x\rangle) \subseteq O_2(G)$. Другими словами, можно считать, что $(ut)^4 = (ut^x)^4 = 1$. Если $|ut| = 4$, то $(ut)^2 \in C_\Delta(u) = \{u\}$, противоречие. Поэтому $(ut)^2 = 1$.

Предположим $(tx)^4 = 1$. Тогда $\langle t, x\rangle \simeq S_4$. Следовательно, $(tx)^2 \in \Delta$ и $\langle (tx)^2, x\rangle \simeq A_4$, что противоречит лемме 2.5.10.

Предположим $(tx)^5 = 1$. Тогда $\langle t, x\rangle \simeq A_5$ и можно отождествить $t = (1, 2)(3, 4)$ и $x = (1, 3, 5)$. Пусть $v = (1, 3)(2, 4)$ и $w = (1, 3)(2, 5)$. Тогда $\langle x, v\rangle \simeq S_3$ и $\langle w, x\rangle \simeq A_4$. Уже доказано, что в этих случаях v, w и w^x централизуют u. Поскольку $t \in \langle v, w, w^x\rangle \leq C_G(u)$, получаем требуемое.

Таким образом, далее можно считать, что $tx \in \Gamma_6$.

Если $[x, t]$ порядка 5 либо 7, то $C_{\langle x,t\rangle}(x)$ содержит инволюцию, которая сопряжена с t. По пункту (1) она должна совпадать с u, и стало быть $t \in \Delta$; противоречие.

Если $[x, t] \in \Gamma_4$, то $v = [x, t]^2 \in \Delta$ и $\langle v, x\rangle \simeq A_4$, что противоречит лемме 2.5.10.

Таким образом, $[x, t]^6 = 1$. Пусть $y = [x, t]^2$. Тогда $\langle x, y\rangle$ является гомоморфным образом экстраспециальной группы 3^{1+2}. По пункту (1), отсюда следует, что $y = 1$. Поэтому $\langle x, y\rangle$ является гомоморфным образом $K = \langle x, t \mid \{t^2, x^3, (xt)^6, [t, x]^2\}\rangle \simeq 2\times A_4$. Если $Z(\langle x, t\rangle)$ содержит инволюцию, то по пункту (1) она должна совпадать с u, и таким образом $[t, u] = 1$, что и требуется. Другая возможность $\langle x, t\rangle \simeq A_4$ рассмотрена выше.

(4) Лемма следует из пункта (3).

Заметим, что u и z сопряжены. Следовательно, $u, z \in C_G(t)$ по (3). Таким образом, элемент uz порядка 7 централизует t; противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 4.4.3. *Пусть $a \in \Delta$ и $(ab)^3 = (bc)^3 = 1$. Тогда $(ac)^3 = 1$.*

Доказательство. Используя лемму 4.4.1, заметим, что $\langle a, b, c\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i) = \langle a, b, c \mid \{a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^i, (ab \cdot c)^6, (ab \cdot a^c)^6, (ab \cdot a^{cac})^6\}\rangle,$$

где $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что $|G(i)|$ делит 6 если $i \neq 6$.

Пусть $u = (ac)^3$. В $G(6)$ порядок bu равен 8, а порядок $a^{cb} \cdot c^a$ равен 36. Поэтому рассмотрим группу $\overline{G} = G(6)/\langle (bu)^4, (a^{cb} \cdot c^a)^6\rangle$. В $\overline{G}$ имеем $\langle ab, c^{ac}\rangle \simeq S_4$, откуда по лемме 4.4.1 следует, что $(ab \cdot c^{ac})^2 = 1$. Поэтому попадаем в фактор $\overline{G}/\langle (abc^{ac})^2\rangle \simeq 3^{1+2} : 2$, являющийся группой 3-транспозиций. Лемма доказана. □

Лемма 4.4.4. *Инволюция $a \in \Delta$ не инвертирует элементы порядка* 5.

Доказательство. Предположим противное.

По лемме 2.3.4 $C_G(a)$ содержит единственную инволюцию. Следовательно, для любого $b \in \Gamma_2$ порядок ab нечётен и $\Delta = \Gamma_2 = a^G$.

Рассмотрим граф Γ со множеством вершин Δ и рёбрами $\overline{ab}$ для $ab \in \Gamma_3$. Пусть Δ_b обозначает его компоненту связности, проходящую через вершину $b \in \Delta$. По лемме 4.4.4 Δ_b является полным графом.

Предположим Δ_a имеет вершину $b \neq a$. Пусть $x = ab$. Докажем, что $C_G(x)$ является 3-группой. Действительно,

$$K = \langle a, b, c \mid \{a^2, b^2, c^2, [c, ab], (ab)^r, (ac)^s\}\rangle \simeq D_{2m},$$

где $m = (r, s)$ — наибольший общий делитель, и $a = b$ в K.

Пусть $c \in \Delta$ и $d \in \Delta_c$. По условию $(dx)^6 = 1$ и $(dd^x)^p = 1$. По лемме 2.2.1 если $p \in \{5, 7\}$, то $C_G(x)$ содержит инволюцию, что невозможно. Таким образом, $p = 3$ и $d^x \in \Delta_c$. Следовательно, x нормализует каждую компоненту связности Δ_b графа Γ.

Пусть $y \in x^G$. Тогда y нормализует Δ_a. Поэтому $\langle x, x^y\rangle$ является 3-группой. Вычисления показывают, что $\langle x, y \mid \{x^3, y^3, (xx^y)^3, [x, y]^3, (xy)^i\}\rangle$ является 3-группой для $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Стало быть, $\langle x, y\rangle$ является 3-группой. По лемме 2.1.2 $x \in O_3(G)$.

Далее в доказательстве активно используется тот факт, что порядок произведения двух инволюций нечётен. Это свойство может быть записано в виде тождества, поэтому оно сохраняется в гомоморфных образах G.

Рассмотрим $\overline{G} = G/O_3(G)$. Если $\mu(\overline{G}) = \{3, 4, 5, 7\}$, то $\overline{G} \simeq L_3(4)$ по теореме 4, и G локально конечна, вопреки лемме 4.3.1.

Предположим $\mu(\overline{G}) = \{4, 5, 7\}$. Тогда $C_{\overline{G}}(\overline{a})$ является 2-группой периода 4, содержащей единственную инволюцию. Поскольку любая бесконечная локально конечная группа содержит бесконечную абелеву подгруппу [99, 100], $C_{\overline{G}}(\overline{a})$ конечна. По теореме Шункова 1.3.1 $\overline{G}$ локально конечна. По теореме Шмидта 1.3.7 G локально конечна, вопреки лемме 4.3.1.

Таким образом, $\mu(\overline{G}) = \mu(G)$ и можно считать, что Γ — пустой граф. Другими словами, инволюции из Δ не лежат в подгруппах, изоморфных S_3. Пусть $q \in \Gamma_3$, такой что $[q, a] = 1$. Рассмотрим инволюцию $b \in \Gamma_2$, отличную от a. Тогда $bb^q \in \Gamma_5$ по лемме 4.4.2, $qb \in \Gamma_6$ и $\langle q, b\rangle$ содержит инволюцию, централизующую q. Следовательно, $a \in \langle q, b\rangle$ и $(ab)^5 = 1$.

Положим далее $K = \langle \Delta \rangle$, возьмём $r \in \Gamma_4$ и отметим, что $Kr \subseteq \Gamma_4$ (см. лемму 2.3.1 и доказательство предложения 4.1.1). Таким образом и K и G/K содержат инволюцию и не содержат элементов порядка 4.

Выберем элемент x порядка 3, такой что a и x не перестановочны. Тогда $\langle a, x\rangle \simeq F_{150}$, и $u = a^{xa(x^{-1}a)^2} \in C_G(x)$. В $C = C_K(u)$ нет элементов порядка 4, поэтому $C \simeq O_3(C) \times \langle u \rangle$, и $O_3(C)$ бесконечна по лемме 4.3.2. Пусть $y \in O_3(C)$, такой что $\langle y \rangle \neq \langle x \rangle$ и $[x, y] = 1$. Пусть $z = xy$. Выберем инволюции $v = a^{ya(y^{-1}a)^2} \in C_G(y)$ и $w = a^{za(z^{-1}a)^2} \in C_G(z)$ в группах $\langle a, y\rangle$ и $\langle a, z\rangle$ соответственно. Поскольку $u, v \in C_G(y)$ и $u, w \in C_G(z)$, получаем $u = v = w$. Следовательно, $L = \langle a, x, y\rangle$ является гомоморфным образом

$$K = \langle a, x, y \mid \{a^2, x^3, y^3, (ax)^6, [a, x]^5, (ay)^6, [a, y]^5, [x, y], (az)^6, [a, z]^5, uv, uw\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что K конечна и содержит элемент $axayx$ порядка 15. Стало быть, L — гомоморфный образ $K(p) = K/\langle (axayx)^p \rangle$, где $p \in \{3, 5\}$. Вычисления показывают, что в $K(3)$ нет элементов порядка 5, а $K(5)$ изоморфна F_{150}, следовательно $\langle x \rangle = \langle y \rangle$; противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 4.4.5. *Пусть $a \in \Delta$ инвертирует $x \in \Gamma_3$. Тогда $x \in O_3(G)$.*

Доказательство. Пусть $b = ax$. По лемме 2.1.2 достаточно доказать, что для любого элемента y порядка 3 порядок xy делит 3. По предположению выполнены следующие соотношения:

$$R_5 = \{a^2, b^2, (ab)^3, (ay)^6, (a^y a)^3, (by)^6, (b^y b)^3\}.$$

Пусть $g = yy^a$. Тогда $g^3 = 1$ и $[g^a, g] = 1$. По леммам 4.4.1, 4.4.2 и 4.4.4 выполнены соотношения

$$R_6 = \{(bg)^6, (b^a g)^6, (b^g b)^3\}.$$

По лемме 4.4.3 $(ba^g)^3 = (ab^g)^3 = 1$. Поэтому группа $\langle a, b, g\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i, j) = \langle a, b, g \mid R_5 \cup R_6 \cup \{g^3, [g^a, g], (ba^g)^3, (ab^g)^3, (abg)^i, (bag)^j\}\rangle,$$

где $i, j \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что порядок $G(i, j)$ делит $3^5 \cdot 2$. Следовательно, $(abg)^3 = (bag)^3 = 1$.

Аналогично для $h = yy^b$ получим $(abh)^3 = (bah)^3 = 1$. Выпишем имеющиеся соотношения:

$$R_7 = \{y^3, (ay)^6, (a^y a)^3, (by)^6, (b^y b)^3, (ba^y)^3, (ab^y)^3, (abg)^3, (bag)^3, (abh)^3, (bah)^3\}.$$

Группа $\langle a, b, y\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i) = \langle a, b, y \mid R_5 \cup R_7 \cup \{(aby)^i\}\rangle,$$

где $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что порядок $G(i)$ делит $3^7 \cdot 2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.4.6. *Предположим $O_3(G) \neq 1$. Пусть $\bar{S}$ — нетривиальная 2-подгруппа $\bar{G} = G/O_3(G)$, S — её полный прообраз в G и $\Gamma_2(S) \subseteq \Delta(G)$. Тогда $N_{\bar{G}}(\bar{S})$ не содержит элементов порядка 5 или 7.*

Доказательство. Предположим противное: $N_{\bar{G}}(\bar{S})$ содержит элемент $\bar{x}$ порядка 5 или 7. Его прообраз x действует свободно на $O_3(G)\bar{S} = S$. Группа S локально конечна по теореме 2. По теореме Шмидта 1.3.7 $\langle S, x\rangle$ локально конечна. Выберем в группе S произвольные элементы a порядка 3 и b порядка, делящего 4. Тогда

$\langle a,b,x\rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $\langle x\rangle$, причём $\langle a,b\rangle$ лежит в ядре и потому нильпотентна. Следовательно, $[a,b]=1$ и $S=O_3(G)\times S'$, где S' — нетривиальная 2-подгруппа. Возьмём инволюцию i из S' и произвольный $y\in G$. Элементы i и i^y централизуют $O_3(G)\neq 1$, следовательно $\langle i,i^y\rangle$ не содержит элементов порядка 5 или 7. Так как $i\in\Delta$, то любой элемент порядка 3, который i инвертирует, по лемме 4.4.5 должен лежать в $O_3(G)$, но i централизует $O_3(G)$. Следовательно, $\langle i,i^y\rangle$ является 2-группой. По теореме 1 $i\in O_2(G)$, что противоречит лемме 4.3.3. Лемма доказана. □

Доказательство предложения 4.3.1.

Пусть $a\in\Delta$ и $x\in\Gamma_3$. По леммам 4.4.2 и 2.3.4 имеем $(aa^x)^3=1$.

Предположим сначала, что для всех $x\in\Gamma_3$ выполнено $a=a^x$. Тогда любые два элемента из a^G лежат в централизаторе элемента порядка 3 и порождают 2-подгруппу. По теореме 1 $a\in O_2(G)$, что противоречит лемме 4.3.3.

Выберем $x\in\Gamma_3$ такой, что $y=aa^x\in\Gamma_3$. Тогда $y\in O_3(G)$ по лемме 4.4.5. Рассмотрим $\overline{G}=G/O_3(G)$.

Если $\mu(\overline{G})=\{3,4,5,7\}$, то $\overline{G}\simeq L_3(4)$ по теореме 4, и G локально конечна, что противоречит лемме 4.3.1.

Предположим $\omega(\overline{G})=\omega(G)$. Тогда $\bar{a}$ коммутирует с $\Gamma_3(\overline{G})\neq 1$ и, как показано выше, лежит в $O_2(\overline{G})$. Получаем противоречие с леммой 4.4.6.

Пусть, наконец, $\mu(\overline{G})=\{4,5,7\}$. Обозначим $H=\overline{G}$, будем опускать черту, и разобьём доказательство на несколько шагов.

(1) *Все инволюции H сопряжены.*

По свойствам диэдральных групп достаточно доказать, что если $b\in\Gamma_2(H)$ и $[a,b]=1$, то a и b сопряжены. По лемме 4.4.6 $\langle\Delta\rangle$ не является 2-группой. По теореме 1 существует инволюция c, такая что порядок ac равен 5 или 7. Порядки bc^a и $a^{ca}b$ чётны. Поэтому $\langle a,b,c\rangle$ является гомоморфным образом

$$R_p(i)=\langle a,b,c\mid\{a^2,b^2,c^2,[a,b],(ac)^p,(bc^a)^4,(a^{ca}b)^4,(abc)^i\}\rangle,$$

где $p\in\{5,7\}$ и $i\in\{4,5,7\}$. Вычисления показывают, что $R_5(5)\simeq 2^4:D_{10}$, $R_7(7)\simeq 2^6:D_{14}$, $|R_p(i)|$ делит 4 при остальных значениях параметров, причем $b\in\Delta(R_5(5))$

или $\Delta(R_7(7))$, соответственно. Получаем противоречие с леммой 4.4.6.

(2) *Пусть* $X = X(a) = \{x \mid x \in H, a^x \in C_H(a)\}$. *Тогда* $x^4 = 1$ *для всех* $x \in X$.

Предположим утверждение неверно. Тогда $\langle a, x\rangle$ является гомоморфным образом

$$R_p = R_p(i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle a, x \mid \{a^2, x^p, [a, a^x], (ax)^{i_1}, \\ (ax^2)^{i_2}, [a, x^2]^{i_3}, ((x^2x^a)^2(x^ax^2)^{-1})^{i_4}\}\rangle,$$

где $p \in \{5, 7\}$ и $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{4, 5, 7\}$. Вычисления показывают, что $|R_p| \in \{1, 2, p\}$ за исключением двух случаев: $R_5(5, 5, 4, 5) \simeq 2^4 : 5$ и $R_7(7, 7, 4, 7) \simeq V : 7$, где $|V| = 2^{12}$, которые невозможны по лемме 4.4.6.

(3) $\Gamma_2(X \setminus C_H(a)) = \emptyset$. *В частности,* $x^2 \in C_H(a)$ *для всех* $x \in X$.

Предположим $x \in \Gamma_2(X \setminus C_H(a))$. Заметим, что aa^x является инволюцией из $C_H(a)$. По определению X и пункту (1) найдётся $y \in X$, такой что $a^y = aa^x$. Поскольку $a^{yx} = aa^x \in C_H(a)$, то $yx \in X$. Из пункта (2) следует $(xy)^4 = 1 = (ayx)^4$ и $(a(yx)^2)^4 = 1$. Таким образом, $\langle a, x, y\rangle$ является гомоморфным образом

$$T(i_1, i_2) = \langle a, x, y \mid \{a^2, x^2, y^4, (ax)^4, (xy)^4, (ayx)^4, (a(yx)^2)^4, a^yaa^x, (xy^2)^{i_1}, (axyay^2)^{i_2}\}\rangle,$$

где $i_1, i_2 \in \{4, 5, 7\}$. Вычисления показывают, что все такие группы конечны, и во всех них $a = 1$, противоречие.

(4) *Если* $x, y \in \Gamma_2(H)$ *и* $(xy)^4 = 1$, *то* $(xy)^2 = 1$. *В частности,* $J = \langle\Gamma_2(C_H(a))\rangle$ *элементарная абелева.*

Пусть $(xy)^4 = 1$, тогда $x^y \in C_H(x)$ и стало быть $y \in X(x)$. По пункту (3) получаем $y \in C_H(x)$.

(5) *Получаем противоречие.*

Пусть x — произвольная инволюция, перестановочная с a. По пункту (1) $x = a^g$ и $ax = a^h$ для $g, h \in X(a)$. По пункту (4) $g, h \in N_H(J)$. По лемме 4.4.6 группа $N_H(J)$ имеет период 4 и, следовательно, является локально конечной по лемме 1.3.4. Таким образом, $L = \langle a, g, h\rangle$ конечна и нильпотентна, причём

$$a^h = ax = aa^g = [a, g] \in [L, a],$$

что невозможно в нильпотентной группе L (для $a \neq 1$). Противоречие. Предложение 4.3.1 доказано. $\square$

4.5 О группах периода 42

Цель настоящего раздела — воспользоваться имеющимися результатами, отвлечься от OC_n-групп и доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть $\mu(G) = \{6, 7\}$. Тогда G является расширением локально конечной группы посредством группы без инволюций.*

Доказательство. 1. *Можно считать, что $O_3(G) = 1$.*

Действительно, если $\omega(G/O_3(G)) \neq \omega(G)$, то либо $G/O_3(G)$ локально конечна, либо период $G/O_{3,2}(G)$ нечётен [98, Теорема 2]. Группы $O_3(G)$ и $O_{3,2}(G)$ локально конечны по лемме 1.3.5. В первом случае локальная конечность группы G теперь следует из теоремы Шмидта 1.3.7, а во втором случае заключение теоремы очевидно.

2. *Можно считать, что G не содержит подгрупп, изоморфных A_4.*

В противном случае по предложению 2.5.1 $O_2(G) \neq 1$. Обозначим $H = O_{2,3}(G)$.

Допустим, в G/H есть подгруппа, изоморфная A_4. Пусть tH — инволюция из этой подгруппы. Можно считать, что t — инволюция. Действительно, если $t \in \Gamma_6$, то $t^2 \in H$ и $tH = t^3H$.

Пусть s — инволюция из $O_2(G)$, тогда $(ts)^2 = s^ts \in O_2(G)$, следовательно $(ts)^2 = 1$. Поскольку $t \notin O_2(G)$, то порядок tr не делит 2 для некоторого $r \in t^G$. Так как $[t, s] = [r, s] = 1$, то можно считать $tr \in \Gamma_3$. По предложению 2.5.1 $tH \in O_2(G/H)$, откуда $x = (tr)^2$ — элемент порядка 3, лежащий в H и централизующий $O_2(G)$. Поскольку H нормальна в G, характеристическая подгруппа $O_p(H)$ лежит в $O_p(G)$ для простого p. По 1) $O_3(H) = 1$ и по лемме 4.6.1 $x \in C_H(O_2(H)) \leq O_2(H)$, противоречие.

Группа H локально конечна по лемме 1.3.5. Можно считать, что G/H содержит инволюцию и элемент порядка 7. Если $\omega(G/H) \neq \omega(G)$, то можно повторить рассуждения первого пункта. Таким образом, можно считать, что $\omega(G/H) = \omega(G)$ и заменить G на G/H.

3. *Пусть теперь $\omega(G) = \{6, 7\}$, G не содержит подгрупп изоморфных A_4, $O_3(G) = 1$ и G не является локально конечной.*

По лемме 4.4.2 G не содержит подгрупп изоморфных F_{42}, а по лемме 4.4.5 — подгрупп изоморфных S_3. По лемме 2.2.1 любая инволюция и любой элемент порядка 3 перестановочны. Поскольку G содержит элемент порядка 3 и не содержит элементов порядка 21, порядок произведения двух инволюций не равен 7. Следовательно, любые две инволюции перестановочны. Поэтому инволюции порождают нормальную локально конечную 2-подгруппу. Теорема доказана. □

4.6 Симметрические подгруппы

Согласно предложениям 4.1.1 и 4.3.1 при доказательстве теорем 8 и 9 можно считать, что G содержит подгруппу H, которая удовлетворяет условию $\omega(H) \subseteq \omega(G)$, и изоморфна группе из следующего списка

$$A_6, A_7, S_5, S_6, L_3(2), L_3(4).$$

Согласно списку, доказательство разбивается на несколько шагов. На определенном шаге предполагаем, что G содержит подгруппу H из списка, и либо выводим, что G содержит подгруппу большего порядка из того же списка, либо приходим к противоречию с леммой 4.3.2 (соответственно 4.1.1). Эта стратегия реализуется в следующих нескольких разделах диссертации.

Выбранная стратегия позволяет вести далее доказательство теорем 8 и 9 одновременно. Пусть далее G — контрпример, в частности, порядки элементов G не превосходят 7.

В данном разделе описанная выше стратегия реализована для симметрических и знакопеременных групп из списка.

Лемма 4.6.1. *Если p — простое число, G — локально конечная разрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $H = O_p(G)$ и $C = C_G(H)$. Тогда $C \trianglelefteq G$ и, таким образом, $O_{p'}(C) = 1$. Заметим, что $O_p(C) = C \bigcap H \leq Z(C)$. Если $O_{p,p'}(C) = O_p(C)$, то $C = O_p(C)$ и лемма верна. Поэтому $O_{p,p'}(C) \neq O_p(C)$. Выберем $L \trianglelefteq G$ так, что $O_p(C) < L \leq O_{p,p'}(C)$, и $L/O_p(C)$ абелева. Тогда L нильпотентна и стало быть $O_{p'}(C) \neq 1$, противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 4.6.2. *Пусть H — подгруппа в G, изоморфная S_4, и $V = O_2(H)$. Предположим также, что c — элемент порядка 3 из H, s — инволюция из H, инвертирующая c, $v \in H$ и $\langle v\rangle = C_V(s)$. Положим $V_1 = \langle s, v\rangle$, и $S = VV_1$ — силовская 2-подгруппа H. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1. *$C = C_G(V) = V$, S — силовская 2-подгруппа G, $N = C_G(v)$ — расширение элементарной абелевой 3-группы R посредством S, и $[R, s] = 1$.*

2. *H нормализует нетривиальную циклическую подгруппу. Более того, если $\langle V, c\rangle$ содержится в подгруппе, изоморфной A_5, то либо H нормализует циклическую подгруппу порядка 2, либо $\langle V, c\rangle$ содержится в подгруппе, изоморфной A_7.*

3. *Существует элементарная абелева подгруппа W порядка 4 из C, такая что $W \not\leq H$, $H \leq N_G(W)$ и c действует на W без неподвижных точек.*

Доказательство. Предположим вначале, что $C = V$. Тогда $N_G(V) = H$. Если при этом S не является силовской 2-подгруппой в G, то $N_G(S)$ — диэдральная или полудиэдральная группа порядка 16, и, следовательно, содержит элемент порядка 8. Поэтому S — силовская 2-подгруппа в G. По [101, Предложение 6] все силовские 2-подгруппы G конечны и сопряжены.

Пусть $N = C_G(v)$. По теореме 2 N локально конечна, а по лемме 1.3.1 бесконечна. Если $C_N(O_2(N)) \leq O_2(N)$, то поскольку $O_2(N)$ конечна, лемма 4.6.1 показывает, что $R = O_3(N) \neq 1$. Так как $C_R(V) = 1$, то R — элементарная абелева 3-группа, которую инвертирует некоторая инволюция $w \in V$. Поскольку ws — элемент порядка 4, который не может централизовать ни один нетривиальный элемент в R, то инволюция s централизует R. То, что $N = RS$, очевидно. Таким образом, если $C = V$, то выполнен пункт (1).

Пусть $C \neq V$. Очевидно, H нормализует C. Если $C_C(c) \neq 1$, то H нормализует нетривиальную циклическую подгруппу. Допустим теперь, что $\langle V, c\rangle$ содержится в подгруппе K, изоморфной A_5, и $C_C(c)$ содержит элемент t порядка 3. Тогда группа $\langle K, t\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i_1, i_2) = \langle a, b, c, t \mid a^3, b^3, c^3, (ab)^2, (ac)^2, (bc)^2, t^3, a^t a^{-1}, b^t b^{-1}, (ct)^{i_1}, (abct)^{i_2}\rangle.$$

Вычисления показывают, что $G(5, 7) \simeq A_7$ и $G(6, 5) \simeq A_5$. Для всех остальных $i_1, i_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$ порядок $|G(i_1, i_2)| \leq 4$, что невозможно. Таким образом, можно считать, что $C_C(c)$ — s-инвариантная 2-подгруппа, и стало быть содержит инволюцию t такую что $t^s = t$, и выполнен пункт (2).

Предположим, что $C \neq V$ и $C_C(c) = 1$. Тогда C — 2-группа и по [48, Лемма 2] $\langle A, A^c, A^{c^2}\rangle = \langle A, A^c\rangle$ — абелева группа для любой абелевой подгруппы A из C. Если в C существует инволюция t, не лежащая в V, то $(tt^s)^2 = (ts)^4 = 1$, поэтому $[t, t^s] = 1$. Таким образом, $U = \langle t, t^s, V\rangle$ — инвариантная относительно s элементарная абелева группа порядка большего четырёх. Это означает, что U содержит инволюцию $z \notin V$, для которой $z^s = z$. Пусть $W = \langle z, z^r\rangle$. Тогда W — инвариантная относительно c элементарная абелева подгруппа порядка 4 из C. Кроме того, W инвариантна относительно s. Действительно, $(z^c)^s = z^{sc^2} = z^{c^2} \in W$. Таким образом для W выполнен пункт (3).

Если же $\Omega(C) = V$, то пусть W/V — минимальная $\langle c, s\rangle$-инвариантная подгруппа из C/V. Ясно, что $|W/V| = 4$ и W — прямое произведение двух циклических групп порядка 4. Пусть g — элемент порядка 4 из W, для которого $g^s W \neq gV$. Тогда $(gs)^2 = gg^s \notin V$ и поэтому $(gs)^2$ — элемент порядка 4, а gs — элемент порядка 8, что невозможно. Лемма доказана. □

Лемма 4.6.3. *Пусть $H = \langle x, y, t\rangle$ — подгруппа в G, и выполнены соотношения*

$$\sigma = \{x^2, y^2, t^2, (xy)^5, (xt)^2\}.$$

Если $(yt)^7 \neq 1$, то $7 \notin \omega(H)$ и либо H изоморфна S_5 или S_6, либо выполняются *соотношения одного из следующих множеств:*

$$\tau_1 = \{(yt)^6, (xyt)^5, ((xyt)^2y)^6, (x(yt)^2)^5\},$$

$$\tau_2 = \{(yt)^5, (xyt)^6, ((xyt)^2y)^6, (x(yt)^2)^5\},$$

$$\tau_3 = \{(yt)^4, (xyt)^5\},$$

$$\tau_4 = \{(yt)^5, (xyt)^4\}.$$

Более того,

$$\langle x, y, t \mid \sigma \cup \tau_1\rangle \simeq \langle x, y, t \mid \sigma \cup \tau_2\rangle \simeq 2^4 : A_5,$$

$$\langle x, y, t \mid \sigma \cup \tau_3\rangle \simeq \langle x, y, t \mid \sigma \cup \tau_4\rangle \simeq 2^4 : D_{10}.$$

Доказательство. Группа $\langle x, y, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle x, y, t \mid \sigma \cup \{(yt)^{i_1}, (xyt)^{i_2}, ((xyt)^2y)^{i_3}, (x(yt)^2)^{i_4}\}\rangle,$$

где $i_1 \in \{4, 5, 6\}$, и $i_2, i_3, i_4 \in \{4, 5, 6, 7\}$.

Вычисления показывают, что $G(4, 6, 5, 6) \simeq G(6, 4, 5, 6) \simeq S_5$, и $G(6, 6, 5, 4) \simeq S_6$, при этом остальные нетривиальные случаи перечислены в лемме. □

Лемма 4.6.4. *Если G содержит подгруппу H, изоморфную A_6, то G содержит подгруппу, изоморфную S_6, A_7, или $L_3(4)$.*

Доказательство. Отождествим H с A_6 и положим $a = (1, 2, 3)$, $b = (1, 2, 4)$, $c = (1, 2, 5)$ и $d = (1, 2, 6)$. Тогда a, b, c, d порождают A_6 и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$A = \{a^3, b^3, c^3, d^3, (ab)^2, (ac)^2, (ad)^2, (bc)^2, (bd)^2, (cd)^2\}.$$

Эти соотношения определяют A_6. Также положим $x = ac = (1, 5)(2, 3)$, $y = cd = (1, 6)(2, 5)$ и $z = ab = (1, 5)(2, 3)$.

Пусть $V = \langle x, x^a\rangle$, $s = x^{abcad} = (2, 5)(4, 6)$, тогда $N_H(V) = V\langle c, s\rangle \simeq VS_3 \simeq S_4$.

Выберем V_1 как в лемме 4.6.2. Если $C_G(V) = V$, то по лемме 4.6.2 $C_G(V_1) > V_1$. Стало быть, поскольку все инволюции в H сопряжены, можно считать, что $C_G(V) > V$.

По лемме 4.6.2 либо G содержит подгруппу, изоморфную A_7, либо имеет место один из следующих случаев:

(1) Найдётся инволюция $t \in \Gamma_2(G)\backslash H$, централизующая $N_H(V)$, другими словами, выполнены соотношения

$$R_1 = \{t^2, [c,t], [x,t], [x^a,t], [s,t]\}.$$

Заметим, что $xz \in \Gamma_3$, поэтому порядок tz не равен 7 по лемме 2.2.2. Докажем, что $\langle H, t\rangle \simeq S_6$, более того $t \simeq (4,6)$ при естественном вложении H.

Заметим, что $\langle H, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $G(j, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$, определённой как

$$\langle a, b, c, d, t \mid A \cup R_1 \cup \{(tz)^j, (at)^{i_1}, (bt)^{i_2}, (dt)^{i_3}, (a^b dt)^{i_4}, (abcdt)^{i_5}, (a^b cdt)^{i_6}\}\rangle,$$

где $x = ac$, $z = ab$, и $s = x^{abcad}$. Вычисления показывают, что для всех $j \in \{4,5,6\}$ и $i_1, ...i_6 \in \{4,5,6,7\}$ порядок $G(j, i_1, \ldots, i_6)$ конечен и больше $|A_6|$ только в случае $G(6,6,4,4,6,6,6) \simeq S_6$. Вычисления в группе S_6 показывают, что $t \simeq (4,6)$, как и требовалось.

(2) Найдётся инволюция $t \in \Gamma_2(G)\backslash H$, для которой выполнены соотношения

$$R_2 = \{t^2, [x,t], [x^a,t], (tc)^3\}.$$

Докажем, что $\langle H, t\rangle \simeq L_3(4)$.

Заметим, что $H_1 = \langle x, y, t\rangle$ и $H_2 = \langle x^a, z, t\rangle$ удовлетворяют условиям леммы 4.6.3, поэтому выделим следующие соотношения, определяющие эти подгруппы:

$$\psi_1(i_1, i_2, i_3, i_4) = \{(yt)^{i_1}, (xyt)^{i_2}, ((xyt)^2 y)^{i_3}, (x(yt)^2)^{i_4}\},$$

$$\psi_2(j_1, j_2, j_3, j_4) = \{(zt)^{j_1}, (x^a zt)^{j_2}, ((x^a zt)^2 z)^{j_3}, (x^a (zt)^2)^{j_4}\}.$$

Таким образом, $\langle H, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3, j_4) = \langle a, b, c, d, t \mid A \cup R_2 \cup \psi_1 \cup \psi_2\rangle.$$

По лемме 4.6.3 можно считать, что $(i_1, i_2) \neq (6,6) \neq (j_1, j_2)$, и $i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{4,5,6\}$. Вычисления показывают, что для всех таких параметров индекс $\langle a, b, c, d\rangle$ конечен; более того, $\langle H, t\rangle$ является гомоморфным образом одной из групп $\{L_3(4), 2^5 : 2^4 : A_6, 2.L_3(4))\}$. $\square$

Отметим, что $L_3(4)$ определяется соотношениями

$$A \cup R_2 \cup \{(at)^3, (bt)^5, (ct)^3, (dt)^3, (abt)^5\}.$$

Лемма 4.6.5. *Если G содержит подгруппу H, изоморфную S_5, то G содержит подгруппу, изоморфную S_6 или A_7.*

Доказательство. Предположим противное. Отождествим H с S_5 и положим $a = (1,2)$, $b = (2,3)$, $c = (3,4)$, $d = (4,5)$. Тогда a, b, c, d порождают S_5 и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$B = \{a^2, b^2, c^2, d^2, (ab)^3, (ac)^2, (ad)^2, (bc)^3, (bd)^2, (cd)^3\}.$$

Эти соотношения определяют S_5. Также положим $x = ab$, $u = ac$, $v = u^x$, и $V = \langle u, v \rangle$. Тогда $N_H(V) = V\langle a, b \rangle \simeq VS_3 \simeq S_4$.

По лемме 4.6.2 необходимо рассмотреть три случая:

(1) Найдётся $t \in \Gamma_3$, для которого выполнены соотношения

$$R_3 = \{t^3, [t, a], [t, c], (t(abc)^2)^2\}.$$

Рассмотрим подгруппу $K = \langle a, b, c \rangle \simeq S_4$ в H. Тогда $\langle K, t \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i_1, i_2) = \langle a, b, c, t \mid R_3 \cup \{a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (ac)^2, (bc)^3, (bt)^{i_1}, (abt)^{i_2}\}\rangle,$$

где $i_1, i_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что $G(5,7) \simeq A_7$ и $|G(i_1, i_2)| \leq 24$, если $(i_1, i_2) \neq (5, 7)$.

(2) Найдётся $t \in \Gamma_2$, такой что $[t, V] = [t, x] = 1$.

В этом случае $\langle H, t \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle a, b, c, d, t \mid B \cup \{t^2, (tu)^2, (tv)^2, tt^x, (abct)^{i_1}, (adt)^{i_2}, (abcdt)^{i_3}, ((dt)^2c)^{i_4}\}\rangle.$$

Отметим, что некоторые из этих групп достаточно большие. Например, $G(4,4,5,4) \simeq 2^8 : S_5$, $G(4,4,5,5) \simeq O_5(3)$, $G(4,6,6,4) \simeq A_6 : D_8$, $G(4,6,6,5) \simeq 2 \times A_8$.

(3) Найдётся $t \in \Gamma_2$, такой что $[t, V] = 1$ и $(tx)^3 = 1$, т.е. выполнены следующие соотношения

$$R_4 = \{t^2, (tu)^2, (tv)^2, (tx)^3\}.$$

В этом случае $\langle H, t\rangle$ является гомоморфным образом группы

$$\langle a, b, c, d, t \mid B \cup R_4 \cup \{(at)^{j_1}, (ct)^{j_2}, (bt)^{i_1}, (dt)^{i_2}, (abct)^{i_3}, (bdt)^{i_4}, ((bcd)^2t)^{i_5}, (adt)^{i_6}, (abcdt)^{i_7}\}\rangle,$$

где $j_1, j_2 \in \{4, 6\}$, поскольку $a, c \in C_G(u)$.

Вычисления показывают, что во всех случаях группы конечны для всех $i_1, ..., i_7 \in \{4, 5, 6, 7\}$. □

Лемма 4.6.6. *G не содержит подгрупп, изоморфных S_6.*

Доказательство. Предполжим противное и отождествим H с S_6. Обозначим $a = (12)$, $b = (23)$, $c = (34)$, $d = (45)$, $e = (56)$. Тогда выполнены следующие соотношения:

$$D_1 = \{a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, (ab)^3, (ac)^2, (ad)^2, (ae)^2, (bc)^3, (bd)^2, (be)^2, (cd)^3, (ce)^2, (de)^3\}.$$

Положим $r = ab$, $v = ac$, $V = \langle v, v^r\rangle$. Тогда $R = \langle a, b, c\rangle = VS$, где $S = \langle a, b\rangle = S_3$. При этом V — элементарная абелева 2-группа, инвариантная в R.

Положим $C = C_H(e)$. Тогда $C = \langle a, b, c, e\rangle = R \times \langle e\rangle$. Пусть $D = C_G(e)$. По теореме 2 и лемме 4.3.2 D локально конечна и бесконечна.

Предположим вначале, что $O_3(D) \neq 1$. Поскольку $9 \notin \omega(G)$, то V централизует $O_3(D)$ по [102, Лемма 7].

Пусть $D_0 = C_{O_3(D)}(r)$. Очевидно, $D_0 \neq 1$ и D_0 R-инвариантна. Поскольку $12 \notin \omega(G)$, то a, b, c действуют без неподвижных точек и по [48, Лемма 5] инвертируют D_0. Пусть t — элемент порядка 3 из D_0. Тогда t удовлетворяет соотношениям

$$P_1 = \{t^3, (at)^2, (bt)^2, (ct)^2, [ab, t]\}.$$

Пусть теперь $O_3(D) = 1$. В этом случае $F = O_2(D) \neq 1$. Если F конечна, то $D/C_D(F)$ — подгруппа конечной группы $Aut(F)$, поэтому $C_D(F)$ — бесконечная группа, содержащаяся в F по лемме 4.6.1; противоречие. Таким образом, F бесконечна. В частности, $F \cdot (V \times \langle e\rangle) \neq V \times \langle e\rangle$.

Положим $W = V\times\langle e\rangle$. Докажем, что $C_{FW}(W) \neq W$, что также можно получить как следствие к [103, Теорема 2]. Пусть $W \leq U \leq FW$ и $|U| = 2^{55}$. Пусть A — максимальная абелева нормальная подгруппа U. Так как $C_U(A) = A$, то $|A| \geq 2^{10}$ и $|\Omega(A)| \geq 2^5$. Пусть $B = \Omega_1(A)$. Очевидно, что $1 \neq B\cap W$. Если $W \leq B$, то доказывать нечего. Пусть $W \not\leq B$ и $w \in W\backslash C_B(W)$. Тогда порядок $C = C_B(w)$ не меньше 8. Если W централизует C, то CW — элементарная абелева 2-подгруппа, порядок которой больше 8. Если же W не централизует C, то $|W\cap B| = 2$, $|W\cap C| = 2$ и $|C_C(W)| \geq 4$, т.е. $C_C(W)W$ — элементарная абелева 2-подгруппа порядка не меньшего 16.

Пусть $W < U \leqslant C_{FW}(W)$ и S действует неприводимо на $U/W = \overline{U}$.

Если $|\overline{U}| = 2$, то $|U| = 4$. Пусть $t \in U \setminus \langle e\rangle$. Очевидно, $[t,a] = [t,b] = [t,c] = e^\alpha$, где $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Таким образом, выполнено одно из следующих тождеств:

$$P_2 = \{t^2, [a,t], [b,t], [c,t]\},$$

$$P_3 = \{t^2, [a,t]e, [b,t]e, [c,t]e\},$$

$$P_4 = \{t^2e, [a,t], [b,t], [c,t]\},$$

$$P_5 = \{t^2e, [a,t]e, [b,t]e, [c,t]\}.$$

Пусть $|\overline{U}| = 4$. Тогда U/V либо элементарная абелева, либо группа кватернионов порядка 8. Во втором случае US/V содержит элемент порядка 8, что невозможно. Так как $U/\langle e\rangle$ тоже элементарная абелева, то U элементарная абелева по теореме Ремака [105, Теорема 4.3.9].

Так как $|C_U(a)| = 8$, то существует $t \in C_U(a)\setminus W$. Подгруппа $A = \langle t, t^r, t^{r^2}\rangle$ инвариантна относительно R и $tt^r\cdot t^{r^2} \in C_U(r) = \langle e\rangle$. Если $tt^r\cdot t^{r^2} \neq 1$, то заменим t на элемент из $C_A(t)\cap[A,r]$. В этом случае $tt^rt^{r^2} = 1$ и $\langle t, t^r\rangle$ — R-инвариантная группа порядка 4.

Таким образом, выполнены соотношения

$$P_6 = \{(at)^2, (bt)^4, (ct)^4, (abt)^3, (act)^2, (bct)^3\}.$$

Также положим

$$D_2 = \{[e,t], (td)^{i_1}, (tcd)^{i_2}, (ted)^{i_3}, (tad)^{i_4}, (tbd)^{i_5}, (tabd)^{i_6}, (tbcd)^{i_7}\}.$$

Тогда $\langle H, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$\langle a, b, c, d, e, t \mid D_1 \cup P_i \cup D_2\rangle.$$

Вычисления показывают, что эта группа конечна для всех $i_1, \dots, i_7 \in \{4, 5, 6, 7\}$, и $i \in \{1, \dots, 6\}$. Отсюда следует заключение леммы. □

В следующей лемме доказывает, что есть только один естественный способ "склеить" вместе две подгруппы, изоморфные A_6, с общей подгруппой, изоморфной A_5. Ниже $\sim$ обозначает изоморфизм.

Лемма 4.6.1. *Предположим $a \sim (1, 2, 3)$, $b \sim (1, 2, 4)$, $c \sim (1, 2, 5)$, $d \sim (1, 2, 6)$ — элементы G, порождающие подгруппу $H \sim A_6$. Предположим $t \sim (1, 2, 6')$ такой, что $\langle a, b, c, t\rangle$ — другая подгруппа G, изоморфная A_6 ($t \notin H$). Тогда $\langle a, b, c, d, t\rangle \simeq A_7$ и можно считать, что $t \sim (1, 2, 7)$.*

Доказательство. Заметим, что

$$a_1 = bc^{-1}b^{-1}db^{-1}d^{-1} \simeq (4, 5, 6), a_2 = bc^{-1}b^{-1}tb^{-1}t^{-1} \in C_G(a),$$

$$b_1 = ad^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1} \simeq (3, 6, 5), b_2 = at^{-1}a^{-1}ca^{-1}c^{-1} \in C_G(b),$$

$$c_1 = ad^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1} \simeq (3, 6, 4), c_2 = at^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1} \in C_G(c),$$

и поэтому в G выполнены следующие соотношения:

$$R_c = \{(a_1a_2)^6, (b_1b_2)^6, (c_1c_2)^6\}.$$

Пусть

$$F_5 = \{a^3, b^3, c^3, (ab)^2, (bc)^2, (ac)^2\},$$

$$F_1 = \{d^3, (ad)^2, (bd)^2, (cd)^2\},$$

$$F_2 = \{t^3, (at)^2, (bt)^2, (ct)^2\}.$$

Тогда соотношения F_5 определяют $\langle a, b, c\rangle \simeq A_5$, соотношения $F_1 \cup F_5$ и $F_2 \cup F_5$ определяют две соответствующие подгруппы, изоморфные A_6. Поэтому $\langle a, b, c, d, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$K = K(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = \langle a, b, c, d, t \mid F_1 \cup F_2 \cup F_5 \cup R_c \cup \{(td)^{i_1}, (abcdt)^{i_2}, [t, d]^{i_3}, (t^{-1}d)^{i_4}, (adt)^{i_5}\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что если $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{4,5,6,7\}$ и $i_5 \in \{4,5,6\}$, то $|K : \langle a,b,c\rangle|$ делит 42. Если $i_5 = 7$, то $\langle a,b,c,d,t\rangle$ является гомоморфным образом

$$\overline{K} = K(i_1, i_2, i_3, i_4, 7)/\langle((ad)^t ad)^4 = 1\rangle$$

по лемме 2.2.1, и вычисления показывают, что для всех $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{4,5,6,7\}$ индекс $\langle a,b,c\rangle$ в $\overline{K}$ тривиален. □

Лемма 4.6.2. *G не содержит подгрупп, изоморфных A_7.*

Доказательство. Предположим противное и отождествим H с A_7. Пусть $u = (1,2)(3,4)$, $v = (1,3)(2,4)$, $w = (1,2)(6,7)$. Обозначим $U = \langle u,v\rangle$, $V = \langle u,w\rangle$ и будем использовать те же обозначения для их изоморфных образов в A_7. Тогда $S = UV$ — силовская 2-подгруппа H. Заметим, что

$$C_{A_7}(U) = U \times \langle(5,6,7)\rangle \text{ и } C_{A_7}(V) = V,$$

$$N_{A_7}(U) = S_4 \times \langle(5,6,7)\rangle \text{ и } N_{A_7}(V) = S_4,$$

здесь $x = (1,3,6)(2,4,7) \in N_{A_7}(V)$, $x^v = x^{-1}$, $u^x = (3,4)(6,7) = uw$.

Таким образом, хотя и U и V нормальны в соответствующих подгруппах H, изоморфных S_4, применение леммы 4.6.2 к ним даст различные эффекты. Это наблюдение вместе с тем фактом, что все инволюции A_7 сопряжены — ключ к доказательству.

Применим лемму 4.6.2 к подгруппе $K = \langle v,w,x\rangle \simeq S_4$, такой что $O_2(K) = V$, и рассмотрим случаи из заключения леммы.

(1) $C_G(V) = V$, S — силовская 2-подгруппа G, $C_G(u)$ является расширением элементарной абелевой 3-группы Q посредством S и $[Q,v] = 1$.

Удобно задавать H порождающими и определяющими соотношениями так, как она появляется в случае 2 леммы 4.6.2, применённой к подгруппе $\langle U,(1,2,3)\rangle$, изоморфной S_4. В терминах отождествления $H \sim A_7$ выберем

$$a \sim (1,2,3), b \sim (1,2,4), c \sim (1,2,5), d \sim (5,6,7).$$

Другими словами, зафиксируем элементы a,b,c,d из G, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R_H = \{a^3, b^3, c^3, d^3, (ab)^2, (bc)^2, (ac)^2, [a,d], [b,d], (dc)^5, (abcd)^7\}$$

и порождают $H \simeq A_7$, где $u = [a,b] = (1,2)(3,4)$. Тогда $d \in Q$. Поскольку Q бесконечна по лемме 1.3.1, то найдётся $t \in Q$, такая что $t \notin H$.

Можно считать, что t централизует a и b. Действительно, $P = \langle a,b,t\rangle$ — конечная разрешимая группа и $V \subseteq O_2(P)$. Если $z \in Z(O_2(P))$, то $z \in C_G(U)$, и стало быть $z \in S$; кроме того $z \in C_G(v)$, и поэтому $z \in V$. Таким образом, $V = O_2(P)$. Если $O_3(P) = 1$, то $t \in C_P(V) \subseteq V$; противоречие. Пусть $1 \neq f \in O_3(P)$, тогда в качестве t можно выбрать центральный элемент из 3-подгруппы $\langle f, a\rangle$.

По лемме 4.6.2 $\langle a,b,c,t\rangle \simeq A_7$, более того t "расположен" в этой группе также, как d "расположен" в H $(t \sim (5,6,7'))$, т.е. выполнены следующие соотношения:

$$R_t = \{t^3, [t,a], [t,b], (tc)^5, (abct)^7\}.$$

Заметим, что $\langle a,b,c,d,t\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1,i_2,i_3) = \langle a,b,c,d,t \mid R_H \cup R_t \cup \{[d,t], (tdc)^{i_1}, (td^c)^{i_2}, (abcdt)^{i_3}\}\rangle,$$

где $i_1, i_2, i_3 \in \{4,5,6,7\}$. Вычисления показывают, что $G(5,6,7) \simeq 3^6 : A_7$, что невозможно, и $|G(i_1,i_2,i_3)| \leq |A_7|$ для других значений параметров.

(2) $C_G(V) > V$.

Прежде всего запишем подстановки, упомянутые выше, в виде слов от порождающих:

$$x = bac(dc)^2, v = a^{-1}b^{-1}, u = v^a, w = uu^x.$$

Введём обозначения, чтобы следовать лемме 4.6.4:

$$a_1 = x, c_1 = x^{vw}, b_1 = x^{abcadc}, d_1 = x^{abc^{-1}d^{-1}c}, x_1 = a_1c_1, y_1 = c_1d_1, z_1 = a_1b_1,$$

также положим $s = uv, r = [c,d]$.

Заметим, что выполнены следующие соотношения:

$$A_1 = \{a_1^3, b_1^3, c_1^3, d_1^3, (a_1b_1)^2, (a_1c_1)^2, (a_1d_1)^2, (b_1c_1)^2, (b_1d_1)^2, (c_1d_1)^2\}.$$

Более того, $x_1 = a_1c_1 = u$, $V = \langle u, u^{a_1}\rangle$, $s = uv = (1,4)(2,3)$, и $c_1^s = c_1^{-1}$.

По лемме 4.6.4 для $\langle a_1,b_1,c_1,d_1\rangle \simeq A_6$ найдётся $t \in G$, такой что имеет место один из следующих случаев:

2.1) $\langle a_1, b_1, c_1, d_1, t\rangle \simeq S_6$, и заключение леммы следует из леммы 4.6.6.

2.2) $\langle a_1, b_1, c_1, d_1, t\rangle \simeq L_3(4)$.

Отметим, что $a, b \in \langle a_1, b_1, c_1, d_1\rangle$ и найдётся инволюция $f \in \langle a_1, b_1, c_1, d_1, t\rangle \simeq L_3(4)$, такая что $[f, O_2(\langle a, b\rangle)] = 1$ и $(af)^3 = 1$. Другими словами $\langle a, b, f\rangle \simeq 2^4 : 3$ и $\langle a, f\rangle \simeq A_4$. Тогда fa^{-1}, a, d удовлетворяют условию леммы 2.5.6. Более того, $\langle f, d\rangle$ содержится в централизаторе инволюции ab и поэтому не содержит элементов порядка 5 или 7. Поэтому $f \in O_2(\langle a, f, d\rangle)$ и $(ff^d)^4 = 1$.

Обозначим $e = (a^{-1})^{cbadb} \sim (1, 2, 6)$ и $z = ab$. Применяя лемму 4.6.4 к $\langle a, b, c, e\rangle$ и f, получаем справедливость следующего набора соотношений:

$$R_P = \{[f, z], [f, z^a], (af)^3, (bf)^3, (cf)^3, (ef)^5, (aef)^5\}.$$

Вычисления показывают, что группа

$$\langle a, b, c, d, f \mid R_H \cup R_P \cup \{(fd)^{i_1}, (afd)^{i_2}, (afd^{-1})^{i_3}\}$$

тривиальна для $i_1 \in \{4, 5, 6\}$ и $i_2, i_3 \in \{4, 5, 6, 7\}$ за исключением $i_1 = i_2 = i_3 = 6$. Стало быть, в G выполнены соотношения

$$R_5 = \{(fd)^6, (afd)^6, (afd^{-1})^6\}.$$

Таким образом, $\langle a, f, d\rangle$ является гомоморфным образом

$$K = \langle a, f, d \mid \{a^3, f^2, d^3, [a, d], (af)^3, (ff^d)^4\} \cup R_5\rangle.$$

Вычисления показывают, что K является конечной группой порядка $2^{10}{\cdot}3^2$. Можно выбрать f в $Z(O_2(\langle a, f, d\rangle))$, и считать, что либо $(fd)^3 = (afd)^3 = 1$ либо $[f, d] = 1$.

Наконец, $\langle a, b, c, d, f\rangle$ является гомоморфным образом

$$\langle a, b, c, d, f \mid R_H \cup R_P \cup T\rangle,$$

где $T \in \{\{(fd)^3, (afd)^3\}, \{[f, d]\}\}$. Вычисления показывают, что в обоих случаях $|\langle a, b, c, d, f\rangle : \langle a, b, c, d\rangle| = 1$.

2.3) $\langle a_1, b_1, c_1, t\rangle \simeq A_7$. Пусть $f \in \langle a_1, b_1, c_1, t\rangle$ — такой элемент, что $\langle a_1, b_1, c_1, f\rangle \simeq A_6$ и выполнены соотношения

$$R_f = \{f^3, (a_1f)^2, (b_1f)^2, (c_1f)^2\}.$$

По лемме 4.6.1 $\langle a_1, b_1, c_1, d_1, f\rangle \simeq A_7$ и можно считать, что $(d_1 f)^2 = 1$.

Пусть $L = R_H \cup R_f \cup \{(d_1 f)^2\}$. Обозначим $S = \langle a_1, b_1, c_1, d_1\rangle$. Чтобы различать изоморфизмы, будем обозначать их следующим образом $H = \langle a, b, c, d\rangle \simeq_\uparrow A_7$ и $\langle S, f\rangle \simeq_\downarrow A_7$; так что

$$a \simeq_\uparrow (1,2,3), b \simeq_\uparrow (1,2,4), c \simeq_\uparrow (1,2,5), d \simeq_\uparrow (5,6,7),$$

$$a_1 \simeq_\downarrow (1,2,3), b_1 \simeq_\downarrow (1,2,4), c_1 \simeq_\downarrow (1,2,5), d_1 \simeq_\downarrow (1,2,6), f \simeq_\downarrow (1,2,7).$$

Пусть $i \simeq_\uparrow (1,2)(3,5) = a_1 b_1^{(a_1 b_1 d_1^{-1} b_1^{-1} c_1 d_1^{-1} c_1^{-1})} \simeq_\downarrow (1,2)(6,7)$. Тогда i инвертирует b_1, d_1, f $(\downarrow)$ и a, b, c, d $(\uparrow)$.

Вычисления (с перечислением смежных классов по подгруппе $\langle a, b, c, d\rangle$) показывают, что группа

$$K(w) = \langle a, b, c, d, f \mid L \cup \{w\}\rangle$$

изоморфна $PSU(3,5)$ если w является 4-ой степенью одного из слов множества $W = \{cd, df, cf^{-1}, df^{-1}\}$, и $K(w)$ тривиальна, если w является 5-ой степенью слова из W. Следовательно, в G порядки слов из W делят 6 или 7. Также заметим, что индекс $\langle a, b, c, d\rangle$ в любой из групп $K((cif)^4)$, $K((dif)^4)$, $K((acif)^4)$, $K((adif)^4)$ равен 1.

Заметим, что $\langle c, i, f\rangle$ является гомоморфным образом (с $ci \to a, i \to b, if \to c$)

$$K = K(j, i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle a, b, c \mid \{a^2, b^2, c^2, (ac)^j, (abc)^{i_1}, (c^{ab}c)^{i_2}, (ba^c)^{i_3}, (abcac)^{i_4}\}\rangle.$$

Также отметим, что $i \cdot if \cdot ci \cdot if = fcf \sim cf^{-1}$. Поэтому $j, i_3 \in \{6,7\}$, $i_1 \in \{5,6,7\}$ и $i_2, i_4 \in \{4,5,6,7\}$. Вычисления показывают, что $\langle c, i, f\rangle$ является гомоморфным образом $K(6,6,6,6)$ порядка $2^7 \cdot 3^3$, и $[c,f]^3 = 1$. Таким образом, в G выполнены соотношения:

$$R_6 = \{(cd)^6, (df)^6, (cf^{-1})^6 (df^{-1})^6, [c,f]^3, [d,f]^3\}.$$

Рассмотрим подгруппу G, порождённую a, d, f, и отметим, что её строение определяется следующими соотношениями.

- $a^3, d^3, [a, d]$.
- $(af)^3, (af^{-1})^6, [a, x]$, где $x = (af^{-1})^2$, которые выполнены в $K \simeq_\downarrow A_6$.

- $(fd)^6, (fd^{-1})^6, y^3$, где $y = [d, f]$, эти соотношения берутся из R_6.
- $(adf)^6, (adf^{-1})^6, [ad, f]^3$. Поскольку $[a, d] = 1$ и i инвертирует a и d, то i инвертирует ad и рассуждения выше можно применить к ad вместо d.
- $(xd)^3 = 1$, это соотношение выполнено в $\langle a, b, c, d\rangle \simeq_\uparrow A_7$ (здесь мы используем $x = a_1^{c_1 d_1} \simeq_\downarrow (3, 6, 5) = (af^{-1})^2 \simeq_\uparrow (1, 2, 3)(4, 6, 7)$).
- $((adf)^2 fa)^6$, это соотношение уничтожает элемент порядка 12.

Пусть F — группа, определённая этими соотношениями. Тогда вычисления показывают, что $|F| = 2^{12}{\cdot}3^4$. Пусть $z = f^{-1}af^{-1}dfa^{-1}f$. Тогда $z \in C_F(\langle a, d\rangle)\setminus\langle a, d\rangle$ и фактор-группа $F/\langle z^F\rangle$ изоморфна 3^2. Таким образом, можно считать, что $z \neq 1$ и z является элементом порядка 3. Тогда внутри централизатора $C_G(d)$ элемента порядка 3 содержится подгруппа $\langle b, a, z\rangle$ с $b^3 = a^3 = z^3 = (ba)^2 = [a, z] = 1$. По лемме 2.5.6 $((ba)(ba)^z)^2 = 1$.

Вычисления показывают, что

$$|\langle a, b, c, d, f \mid L \cup R_6 \cup \{((ba)(ba)^z)^2\}\rangle : \langle a, b, c, d\rangle| = 1;$$

противоречие. Лемма доказана. $\square$

Из доказанных лемм следует

Предложение 4.6.1. *G не содержит подгрупп, изоморфных S_5.*

4.7 $L_3(2)$-подгруппы

Лемма 4.7.1. *Пусть $x, y \in \Gamma_3, a \in \Gamma_2$ такие, что $x^a = x^{-1}$ и $y^a = y$. Тогда $\langle x, y, a\rangle$ является конечной $\{2, 3\}$-группой и выполнены следующие соотношения:*

$$I_1(x, y) = \{(xy)^6, (yy^x)^3, (xx^y)^3\}.$$

Более того, $v = [x, y]^2 \in C_G(y)$, и $v^a = v^{-1}$.

Доказательство. Действительно, $\langle x, y, a\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5) = \langle x,y,a \mid a^2, x^3, y^3, (ax)^2, [a,y], (xy)^{i_1}, \\ (xy^{-1})^{i_2}, (axy)^{i_3}, (ax^yx)^{i_4}, (a(xy)^2)^{i_5}\rangle.$$

Вычисления показывают, что

$$G(5,5,4,4,6) \simeq S_5, G(6,6,5,6,5) \simeq L_2(11), G(7,7,5,7,7) \simeq A_7,$$

что невозможно по предложению 4.6.1; группа $G(6,6,6,4,6)$ и её гомоморфный образ $G(6,6,6,6,6) = G(6,6,6,2,6)$ удовлетворяют заключению леммы. Порядок $G(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5)$ не превосходит 6 для остальных значений параметров $i_1,i_2,i_3,i_4,i_5 \in \{4,5,6,7\}$. □

Из леммы 2.3.1 следует

Лемма 4.7.2. *Пусть $t \in \Gamma_4, x \in \Gamma_3$ такие, что $\langle t^2, x\rangle \simeq S_3$. Тогда $\langle t, x\rangle$ изоморфна $L_3(2)$ или F_{36}.*

Лемма 4.7.3. *Предположим $b \in \Gamma_2$ инвертирует элемент t порядка 4 из подгруппы H, изоморфной F_{36}. Тогда либо $K = \langle b, H\rangle$ является конечной $\{2,3\}$-группой, содержащей элемент w порядка 3, для которого выполнены соотношения*

$$I_2(b,t,w) = \{[b,w], (bw^t)^2, (wt^2)^2\},$$

либо $K \simeq A_6$.

Доказательство. Пусть $y \in \Gamma_3(H), a = t^2$. Обозначим

$$R_7 = \{t^4, b^2, y^3, (ay)^2, [y,y^t], (tb)^2\}.$$

Заметим, что K является гомоморфным образом

$$G(i_1,\dots i_7) = \langle t,b,y \mid R_7 \cup \{(aby)^{i_1}, (by)^{i_2}, (tby)^{i_3}, (t(by)^2)^{i_4}, \\ (bybty)^{i_5}, (byy^t)^{i_6}, (abyy^t)^{i_7}\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что K является гомоморфным образом

$$S = G(6,6,6,4,4,6,6) \text{ при этом } |S| = 2^3 \cdot 3^6,$$

поскольку другие нетривиальные возможные группы — это

$$G(4,6,5,5,5,5,5) \simeq G(5,5,4,6,5,6,4) \simeq \\ G(5,5,6,5,6,4,6) \simeq G(6,4,5,6,6,5,5) \simeq A_6.$$

Элемент $z = (yy^by)^t$ имеет порядок 3 в S и удовлетворяет соотношениям I_2. Таким образом, если z имеет порядок 3 в K, то положим $w = z$. Пусть слово z задаёт тривиальный элемент в K, тогда K является гомоморфным образом $\overline{S} = S/\langle z = 1\rangle$. Требуемые соотношения выполнены в $\overline{S}$ для $w = y$. □

Лемма 4.7.4. *Пусть t — элемент порядка 4 из подгруппы H, изоморфной $L_3(2)$. Если t^2 инвертирует $y \in \Gamma_3$, то $\langle t, y\rangle \simeq L_3(2)$.*

Доказательство. Пусть $a = t^2$. Выберем подгруппу $K \leq H$ такую, что $t \in K \sim S_4$. Допустим $t \sim (1,2,3,4)$, и рассмотрим $b \sim (2,4)$, $x \sim (1,4,2)$, $z \sim (2,3,4)$. Тогда $t = bxz$ и выполнены следующие соотношения, определяющие S_4:

$$I_3 = \{b^2, x^3, z^3, x^bx, z^bz, (xz)^2\}.$$

По лемме 4.7.2 можно считать $\langle t, y\rangle \simeq F_{36}$. Заметим, что b инвертирует t. По лемме 4.7.3 найдётся $w \in \Gamma_3$ такой, что выполнены соотношения $I_2 = I_2(b,t,w)$. По лемме 4.7.1 подгруппа $\langle b,x,z,w\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i) = \langle b,x,z,w \mid \{w^3, (twz)^i\} \cup I_1(x,w) \cup I_1(z,w) \cup I_2 \cup I_3\rangle.$$

Вычисления показывают, что $|G(i)| \leq 24$ для любого $i \in \{4,5,6,7\}$, и, стало быть, $w = 1$, противоречие. □

Предложение 4.7.1. *Пусть a — инволюция из подгруппы W, изоморфной $L_3(2)$. Тогда $C_G(a)$ является 2-группой.*

Доказательство. Предположим противное и выберем элемент w порядка 3 из $C_G(a)$.

Пусть $W = \langle t, x \mid \theta \rangle$, где $\theta = \{t^4, x^3, (t^2x)^2, (tx)^7\}$, и $a = t^2$.

Положим $y = x^t$ и $u = xyxy^{-1}xyx$. Отметим, что a инвертирует элемент порядка 3 из $\Sigma = \{u, u^t\}$, и $(xu)^2 = (xu^t)^2 = 1$.

Без ограничения общности, можно считать, что $[x, w] = 1$. Действительно, рассмотрим $\langle a, x, w \rangle$, и положим $v = [x, w]^2$. По лемме 4.7.1 $[v, w] = 1$ и $v^a = v^{-1}$. Таким образом, если порядок v равен 3, то по лемме 4.7.4 $\langle t, v \rangle \simeq L_3(2)$, и можно заменить x на v и W на $\langle t, v \rangle$. Если $v = 1$, тогда заменим w на $xx^wxw^{-1} \in C_G(\langle a, x \rangle)$.

Возьмём $z \in \Sigma$. Тогда по лемме 4.7.1 $\langle a, x, z, w \rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i) = \langle a, x, z, w \mid \{a^2, x^3, z^3, w^3, (xz)^2, (ax)^2, (az)^2, [a, w], [x, w], (axwz)^i\} \cup I_1(z, w) \rangle.$$

Вычисления показывают, что $|G(i)| \leq 24$ для $i \neq 6$, и $G(6) \simeq (A_4 \times A_4) : 2$. Непосредственно проверяется, что $[z, w]^2 = 1$ и $x = z^{-1}wxwz^{-1}w$.

Стало быть $\langle W, w \rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2, i_3) = \langle t, x, w \mid \theta \cup \{w^3, [a, w], (uw)^6, [u, w]^2, (vw)^6, [v, w]^2, [x, w], x^{-1}u^{-1}wuwu^{-1}w, x^{-1}v^{-1}wvwv^{-1}w, (v^uw)^{i_1}, (av^uw)^{i_2}, (auv^{-1}w)^{i_3}\} \rangle,$$

где $v = u^t$. Вычисления показывают, что $G(7, 4, 7) \simeq A_8$, что невозможно; и $|G(i_1, i_2, i_3)|$ делит 3 при других значениях параметров $i_1, i_2, i_3 \in \{4, 5, 6, 7\}$; противоречие. □

Лемма 4.7.5. *G содержит подгруппу, изоморфную $2^3 : L_3(2)$ или $L_3(4)$.*

Доказательство. По предложению 4.3.1 G содержит подгруппу H, изоморфную A_6, S_5 или $L_2(7)$. В первых двух случаях согласно леммам 4.6.4, 4.6.2, и предложению 4.6.1 G содержит подгруппу, изоморфную $L_3(4)$. Поэтому далее будем считать, что $G \geq H \simeq L_3(2)$ и отождествим H с $\langle a, x \mid R \rangle$, где

$$R = \{a^2, x^3, (ax)^7, [a, x]^4\}.$$

Пусть $c = x^t$, тогда $\langle a, c\rangle \simeq S_4$, при этом $a \simeq (1,2)$ и $c \simeq (2,3,4)$. Обозначим $v = (ac)^2, s = a^{ca}$, так что $V = \langle v, v^c\rangle \simeq O_2(S_4)$. Тогда $N_H(V) = \langle a, c\rangle$. Если $C_G(V) = V$, то по лемме 4.6.2 $C_G(V_1) > V_1$. Поскольку все инволюции H сопряжены, можно считать, что $C_G(V) > V$. По леммам 4.6.2, 4.6.2 и предложению 4.7.1 найдётся инволюция $w \in G \setminus H$, для которой выполнен один из следующих пунктов:

(1) $\langle a, c\rangle$ централизует w.

Тогда $\langle a, x, w\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2, i_3) = \langle a, x, w \mid R \cup \{w^2, [w, a], [w, c], (xw)^{i_1}, [x, w]^{i_2}, (axw)^{i_3}\}\rangle.$$

Вычисления показывают, что $G(6,4,7) \simeq G(6,6,7) \simeq V : L_3(2)$, где $|V| = 2^6$, и $|G(i_1, i_2, i_3)| \leq 168$ при других значениях параметров. Наибольшим гомоморфным образом $G(6,4,7)$ без элементов порядка 8 является $2^3 : L_3(2)$.

(2) Существует элементарная абелева подгруппа $W \ni w$ порядка 4 в C, такая что $W \not\leq H$, $H \leq N_G(W)$ и c действует на W без нетривиальных неподвижных точек. В этом случае выполнены соотношения

$$R_{96} = \{w^2, [w, v], [w, v^c], (cw)^3, [a, w]\},$$

при этом $\langle a, c, w\rangle \simeq 2^4 : S_3$. Заметим, что $|v^c \cdot a^x| = 3$ в H. Поэтому по лемме 2.2.2 $\langle v^c, a^x, w\rangle$ не содержит элементов порядка 7. Следовательно, $\langle a, x, w\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2, j) = \langle a, x, w \mid R \cup R_{96} \cup \{(axw)^{i_1}, (xw)^{i_2}, (wv^c a^x)^j\}\rangle,$$

где $i_1, i_2, j \in \{4,5,6,7\}$, и $j \neq 7$. Вычисления показывают, что $G(5,7,5) \simeq L_3(4)$, $G(4,7,4) \simeq 2^3 : L_3(2)$, и $G(7,6,6) \simeq 2^6 : L_3(2)$; при этом $|G(i_1, i_2, i_3) : \langle a, x\rangle| = 1$ для других значений параметров. □

Для произвольного подмножества M в G положим

$$M^+ = \{x \in M \mid \exists H < G \text{ такая, что } x \in H \simeq L_3(2)\} \text{ и } M^- = M \setminus M^+.$$

Лемма 4.7.6. *G не содержит подгрупп, изоморфных F_{42}.*

Доказательство. Предположим $F_{42} = \langle t, x\rangle \leq G$, где $t \in \Gamma_2$ и $x \in \Gamma_3$.

Пусть u — инволюция из $C_{F_{42}}(x)$ (см. лемму 2.4.1). Заметим, что инволюции u и t сопряжены, и по предложению 4.7.1 лежат в Γ_2^-. По предложению 2.4.1 u — единственная инволюция в $C_G(x)$. По лемме 2.5.3 x не может содержаться в подгруппе, изоморфной A_4.

Возьмём $a \in \Delta^+$ и рассмотрим $\langle a, x\rangle$. По лемме 2.2.1 и предложению 4.7.1 имеем $x^a = x^{-1}$. Действительно, если $|ax| = 6$ и порядок $[a, x]$ чётен, то найдётся подгруппа в $\langle a, x\rangle$, изоморфная A_4, которая содержит x (см. доказательство леммы 2.5.10); если порядок $[a, x]$ нечётен, то найдётся элемент порядка 3 в $C_{\langle a,x\rangle}(a)$, что невозможно.

Таким образом, для любого $a \in \Delta^+$ имеем $x^a = x^{-1}$. Пусть $W \leq G$ такая, что $W \simeq L_3(2)$, выберем $a, b \in \Gamma_2(W)$ с условием $ab \in \Gamma_4$. Тогда $x^{ab} = x$, откуда $12 \in \omega(G)$; противоречие. □

Лемма 4.7.7. *G содержит подгруппу, изоморфную $L_3(4)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по лемме 4.7.5 найдётся подгруппа $H \simeq V : L_3(2)$, где $V \simeq 2^3$. Если $v \in V$, то $C_G(v)$ содержит элемент порядка 3. Откуда по предложению 4.7.1 $v \in \Delta^-$.

По предложению 2.5.1 G не имеет подгрупп, изоморфных A_4, которые содержат v. По лемме 4.4.1 для любого $x \in \Gamma_3$ выполнено $(xt)^6 = [x, t]^p = 1$, где p нечётно. По лемме 4.7.6 $p \neq 7$. Поскольку $C_G(v) > V \simeq 2^3$, то по лемме 2.3.4, $p \neq 5$. Повторим рассуждения леммы 4.4.5: если v инвертирует x порядка 3, то $x \in O_3(G)$, а этот случай был рассмотрен при доказательстве леммы 4.4.4. Таким образом, $v \in \Delta^+$, противоречие. □

4.8 $L_3(4)$-подгруппы и доказательство теорем

На протяжении параграфа предполагаем, что $L_3(4) \simeq H \leq G$. Пусть $i \in \Gamma_2(H)$, и $C = C_G(i)$. Тогда $C_H = C_H(i)$ является подгруппой C порядка 2^6 с центром $V = Z(C_H) \simeq 2^2$. Пусть $N = N_H(C_H(i))$, и выберем $n \in \Gamma_3(N)$, так что $N = \langle C_H, n\rangle$.

Заметим, что $6 \notin \omega(H)$, поэтому n действует на C_H без неподвижных точек. В частности, $\langle V, n\rangle \simeq A_4$. Пусть $j = i^n$, так что $V = \langle i, j\rangle$.

Лемма 4.8.1. *$V \subseteq O_2(C)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по теореме 1 найдётся $t \in \Gamma_2(C_G(i))$, такая что $i^n t \in \Gamma_3$. Заметим, что $\langle i, n, t\rangle$ является гомоморфным образом

$$G(i_1, i_2, i_3) = \langle i, n, t \mid i^2, n^3, t^2, (in)^3, (ti)^2, (ti^n)^3, (tn)^{i_1}, (t^n t)^{i_2}, (int)^{i_3}\rangle.$$

Вычисления показывают, что $G(7, 4, 7) \simeq A_7$, что невозможно, и $\langle i, n, t\rangle$ является гомоморфным образом A_4 при остальных значениях параметров. □

Лемма 4.8.2. *$O_3(C) = 1$.*

Доказательство. Предположим $1 \neq x \in O_3(C_G(i))$. Тогда $\langle x, x^j\rangle$ является 3-подгруппой. Поэтому $\langle x, j\rangle$ является гомоморфным образом $3^{1+2} : 2$. По лемме 4.8.1 отсюда следует, что $[x, j] = 1$. Поэтому $[x, V] = 1$ и n нормализует V, стало быть $[x^n, V] = 1$ и, в частности, $x^n \in C$.

Пусть k — произвольная инволюция из $C_H(i)$. Отметим, что $\langle k, n\rangle \simeq A_4$. Тогда $\langle k, k^n, x, x^n, x^{n^2}\rangle$ является n-инвариантной подгруппой $C_G(i)$. Следовательно, $R = \langle k, n, x\rangle$ является $\{2, 3\}$-группой. По предложению 2.5.1 $k, k^n \in O_2(R)$. Стало быть, k не инвертирует элементы порядка 3 из $S = \langle k, x\rangle$. С другой стороны, $x \in O_3(R)$ и поэтому S является гомоморфным образом $3^{1+2} : 2$. Это возможно только если $[k, x] = 1$.

Таким образом, x централизует все инволюции из $C_H(i)$. В $C_H(i)$ есть две некоммутирующие инволюции, поэтому $12 \in \omega(G)$, противоречие. □

Доказательство теорем 8 и 9.

Централизатор C является группой периода 12, поэтому его 2-длина ≤ 2 [53]. По лемме 4.8.2 $O_3(C) = 1$ и, стало быть, $C_C(O_2(C)) \subseteq O_2(C)$ по лемме 4.6.1. По лемме 1.3.1 C бесконечна. Таким образом, $O_2(C)$ бесконечна.

Следовательно, $P = \langle O_2(C), C_H(i)\rangle$ является бесконечной 2-группой, а $C_H(i)$ — её конечная подгруппа. По лемме 1.3.2 $C_P(C_H(i))$ бесконечна, и по [99, 100] она содержит бесконечную абелеву подгруппу. Таким образом, найдётся инволюция $u \notin H$, такая что $[u, C_H(i)] = 1$.

Определим следующим множества соотношений:

- $\alpha = \{x^3, y^2, (xy)^7, [x,y]^4\}$ определяют $L_3(2)$;
- $\beta = \{t^2, t^y t, t^{[x,y]}t\}$, утверждающие, что инволюция t коммутирует с силовской 2-подгруппой $L_3(2)$;
- $\gamma_t(i_1, i_2, i_3, j_1) = \{(xt)^{i_1}, (xyt)^{i_2}, (xytxt)^{i_3}, (ty^{x^2y})^{j_1}\}$: эти соотношения использовались при доказательстве теоремы 4, где показано, что они определяют конечную группу $\langle x, y, t\rangle$, когда $i_1, i_2, i_3, j_1 \in \{3, 4, 5, 7\}$ и $j_1 \neq 7$.

При доказательстве леммы 3.3.5 показано (и это можно проверить вычислениями), что

$$R = \langle x, y, t \mid \alpha \cup \beta \cup \gamma_t(7, 5, 7, 5)\rangle$$

является группой, такой что $H = R/Z(R)$ изоморфна $L_3(4)$, и, таким образом, H можно отождествить с подгруппой H в G. Обозначим $t_1 = t^{t^x}$ и $t_2 = t^{t^{x^2}}$. Вычисления показывают, что $Z(R) = \langle z\rangle^R$, где $z = (t_1 y y^x)^2 t$, и $C_H(t) = \langle y, y^x, t, t_1, t_2\rangle$.

Пусть $v = ut$. Заметим, что $\langle H, u\rangle$ является гомоморфным образом

$$\begin{aligned} G(i_1, i_2, i_3, j_1, i_4, i_5, i_6, j_2) = \langle x, y, t, u \mid \alpha \cup \beta \cup \gamma_t(7, 5, 7, 5) \cup \{z\} \\ \cup \{u^2, [u, y], [u, y^x], [u, t], [u, t_1], [u, y_2]\} \cup \gamma_u(i_1, i_2, i_3, j_1)\gamma_v(i_4, i_5, i_6, j_2)\rangle, \end{aligned}$$

где параметры лежат в множестве $\{4, 5, 6, 7\}$ и $j_1, j_2 \neq 7$, поскольку $[x, y]^2 \cdot y^{x^2y} \in \Gamma_3$ и u централизует $[x, y]^2$ по [8, Лемма 2.2]. Вычисления показывают, что индекс подгруппы $\langle x, y, t\rangle$ в этой группе ≤ 2, и поэтому $u \in H$; противоречие. $\square$

Глава 5

Минимальные 3-порождённые группы 6-транспозиций

На протяжении этой главы единичный элемент группы считается инволюцией. Нормальное множество инволюций D группы G называется *множеством 6-транспозиций*, если $G = \langle D \rangle$ и для любой пары a и b элементов D порядок ab не превосходит 6. В этом случае также говорят, что пара (G, D) является группой 6-транспозиций.

Нетрудно заметить, что если (G, D) — группа 6-транспозиций, порождённая двумя элементами из D, то G является группой диэдра порядка, не превосходящего 12. При этом классификация групп 6-транспозиций, которые могут быть порождёны тремя элементами из D, неизвестна. В этой главе будут классифицированы группы 6-транспозиций, которые порождаются тремя элементами из D и удовлетворяют следующему условию минимальности.

Группа 6 - транспозиций (G, D) называется *минимальной 3-порождённой*, если она удовлетворяет следующим двум свойствам:

1. G порождается тремя элементами из D;

2. если $H \leq G$ и $H = \langle H \cap D \rangle$, то либо $H = G$ либо H может быть порождена двумя элементами из D.

Заметим, что класс минимальных 3-порождённых групп 6-транспозиций замкнут относительно взятия гомоморфных образов.

Цель настоящего раздела — доказать следующую теорему.

Теорема 11. *Пусть (G, D) — конечная нетривиальная минимальная 3-порождённая группа 6-транспозиций.*
Тогда G изоморфна одной из следующих групп.

1. D_{2n}, *где* $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$;
2. 2^3, S_4, $GL(2, 3)$, A_5;
3. $p^2 : 2 \simeq \langle x, y, z \mid x^p, y^p, [x, y], z^2, x^z x, y^z y\rangle$, *где* $p \in \{3, 5\}$;
4. $(2m \times 2) : 2 \simeq \langle x, y, z \mid x^{2m}, y^2, [x, y], z^2, x^z x, y^z x^m y\rangle$, *где*
   $m = 2$ *и* $D = y^G \cup z^G \cup (xz)^G$ *или* $D = y^G \cup z^G \cup (xz)^G \cup (x^2)^G$; *либо*
   $m = 3$ *и* $D = y^G \cup z^G$ *или* $D = y^G \cup z^G \cup (x^3)^G$;
5. $p^{1+2} : 2 \simeq \langle x, y, z \mid x^p, y^p, [x, y]^p, [x, [x, y]], [y, [x, y]], z^2, x^z x, y^z y\rangle$, *где* $p \in \{3, 5\}$;
6. $(5^2 : 3) : 2 \simeq \langle x, y, z, w \mid x^5, y^5, z^3, [x, y], w^2, x^w y^{-1}, y^z y x^{-1}, z^w z\rangle$.

Как отмечалось во введении, этот результат связан с теорией Майорана [110].

Заметим, что множество $D \setminus \{1\}$ единственно в том и только в том случае, когда все элементы порядка 2 сопряжены в G. Это выполнено для пунктов (3), (5), (6), $G \simeq D_{2n}$ с нечётным n и $G = A_5$.

Лемма 5.0.1. *Пусть (G, D) — группа 6-транспозиций, порождённая тремя элементами из D. Тогда (G, D) является минимальной 3-порождённой в том и только в том случае, когда для любых $a, b, c \in D$ подгруппа $H = \langle a, b, c\rangle$ либо равна G, либо может быть порождена двумя элементами из D.*

Доказательство. Если (G, D) — минимальная 3-порождённая и $a, b, c \in D$, то заключение для $H = \langle a, b, c\rangle$ выполнено по определению минимальных 3-порождённых групп. Докажем обратную импликацию. Пусть H — собственная подгруппа G и $H = \langle H \cap D\rangle$. Выберем для H порождающее множество $S \subseteq D$

минимального размера. Предположим $|S| \geq 3$ и выберем различные a, b, и c из S. Тогда $\langle a, b, c\rangle \leqslant H$ и, следовательно, $\langle a, b, c\rangle \neq G$. По условию подгруппа $\langle a, b, c\rangle$ может быть порождена двумя элементами из D; получаем противоречие с минимальностью S. Стало быть $|S| \leq 2$ и G является минимальной 3-порождённой. $\square$

Будем писать G вместо (G, D), если понятно, о каком D идёт речь, либо нам важен лишь сам факт существования соответствующего множества D. Далее G является группой 6-транспозиций.

Обозначим через $S(k, l, m)$ множество минимальных 3-порождённых групп (G, D), которые могут быть порождены тремя инволюциями a,b,$c \in D \setminus \{1\}$ такими что $|ab| = k$, $|bc| = l$, $|ac| = m$, где $1 \leq k \leq l \leq m \leq 6$.

Любая нетривиальная минимальная 3-порождённая группа лежит хотя бы в одном из множеств $S(k, l, m)$. При этом, например, S_4 лежит и в $S(2, 3, 3)$ и в $S(2, 3, 4)$. Очевидно, если $G \in S(k, l, m)$, то G является гомоморфным образом группы $\langle a, b, c \mid R(k, l, m)\rangle$, где

$$R(k, l, m) = \{a^2, b^2, c^2, (ab)^k, (bc)^l, (ac)^m\}.$$

Из леммы 1.3.6 следует

Лемма 5.0.2. *Пусть $(G, D) \in S(k, l, m)$ и G порождается двумя D-элементами. Тогда $G \simeq D_{2n}$ и выполнено одно из следующих утверждений:*

1. *$n \in \{1, 2, 3, 5\}$ и $(k, l, m) \in \{(1, n, n), (n, n, n)\}$;*
2. *$n = 4$ и $(k, l, m) \in \{(1, 4, 4), (2, 2, 4), (2, 4, 4)\}$;*
3. *$n = 6$ и $(k, l, m) \in \{(1, 6, 6), (2, 2, 3), (2, 2, 6), (2, 3, 6), (3, 6, 6)\}$.*

Предположение теоремы 11 о том, что G a priori является конечной, необходимо только для случая, когда порядок произведения любых двух элементов из $D \setminus \{1\}$ делит 5. Особенность этого случая объясняется следующим примером.

Пусть x и y — порождающие свободной бернсайдовой группы $B(2, 5)$ и τ — автоморфизм порядка 2, инвертирующий порождающие, т.е. $x^\tau = x^{-1}$ и $y^\tau = y^{-1}$. Тогда $G = B(2, 5) \rtimes \langle\tau\rangle$ является группой 6-транспозиций, где D — множество элементов порядка 2. Более того, порядок произведения любых двух элементов из D делит 5; и G порождается тремя инволюциями $x\tau$, $y\tau$ и τ из D. Вопрос о конечности группы $B(2,5)$, а, стало быть, и группы G, открыт.

Пусть p — нечётное простое. Обозначим через $\mathcal{K}_p$ класс групп G, таких что
1) G содержит нормальное множество инволюций D и порождается тремя элементами из D;
2) для любых $x, y \in D \setminus \{1\}$ порядок xy делит p;
3) если $H \leq G$ и $H = \langle H \cap D \rangle$, то либо $H = G$ либо H может быть порождена двумя элементами из D.

Доказательство теоремы разбивается на несколько шагов, что позволяет осуществлять редукцию. Шаги доказательства оформлены в виде лемм.

Лемма 5.0.3. *Если $G \in S(2,l,m)$, где $(l,m) \neq (5,5)$, то G изоморфна одной из следующих групп: 2^3, S_4, A_5 или D_{2n}, где $n \in \{2,4,6,10\}$.*

Доказательство. Пусть $l = 2$. Тогда $b \in Z(G)$ и соотношения $R(2,2,m)$ определяют $2 \times D_{2m}$. Группы $2 \times D_8$ и $2 \times D_{12}$ не являются минимальными 3-порождёнными поскольку $\langle b, a, a^c \rangle \simeq 2^3$ и $\langle b, a, c^{ac} \rangle \simeq 2^3$ — собственные недиэдральные подгруппы, соответственно. Таким образом, G изомофна одной из групп: D_4, 2^3, $2 \times D_6 \simeq D_{12}$, D_8 или $2 \times D_{10} \simeq D_{20}$.

Пусть $l = 3$ или 4 и $m \neq 6$. К соотношениям $R(2,l,m)$ на порождающих группы G добавляются соотношения, ограничивающие порядки произведения двух инволюций из D. Эти дополнительные соотношения показаны во второй колонке таблицы 5.1. Вычисления показывают, что соответствующие соотношения определяют группу F из третьей колонки таблицы. Группа G является, очевидно, гомоморфным образом F. Исследуя гомоморфные образы группы F, выделяем минимальные 3-порождённые, используя лемму 5.0.1. В этих случаях получаем $G \in \{D_8, S_4, A_5\}$.

Пусть $l = 3$ и $m = 6$. Поскольку $ab = ba$, то $|bc^a| = |b^a c| = |bc| = 3$. Кроме того, $|cc^a| = |(ca)^2| = 3$. Если $\langle b, c^a, c \rangle$ порождается двумя D-элементами, то по лемме 5.0.2 $b \in \langle c^a, c \rangle \subset \langle a, c \rangle$, следовательно $G \simeq D_{12}$. Таким образом, можно считать $G = \langle b, c^a, c \rangle \in S(3,3,3)$. Минимальные 3-порождённые группы в $S(3,3,3)$

перечислены в таблице 5.1. Поскольку они не содержат элементов порядка 6 и пары различных коммутирующих инволюций, то они не лежат в $S(2,3,6)$ и этот случай невозможен.

Осталось рассмотреть случаи $(l,m) \in \{(4,6),(5,6),(6,6)\}$. Пусть $a,b,c \in D$, при этом $|ab| = 2$, $|bc| = l$, где $l \in \{4,5,6\}$, и $|ac| = 6$.Положим $w = a^{ca}$. Тогда

$$aw \sim aacaca \sim (ca)^2 \in \Gamma_3.$$

Рассмотрим группу $H = \langle a,b,w\rangle$. Если $|wb| \in \{3,4,5\}$, то $H \in S(2,3,|wb|)$, в частности, H не является диэдральной по лемме 5.0.2. Поэтому $G = H$ и эти случаи рассмотрены выше. Таким образом, $wb \in \Gamma_2 \cup \Gamma_6$. Если $|wb| = 2$, то вычисления показывают, что G является гомоморфным образом $D_8 \times S_3$, D_{20} или $2 \times S_3 \times S_3$. Как и выше проверяется, что факторы этих групп не лежат в $S(2,l,6)$.

Наконец, пусть $|wb| = 6$. Поскольку $S(2,3,6) = \{D_{12}\}$, можно считать, что H порождается двумя D-элементами и, стало быть, $H = \langle b,w\rangle$. Поскольку $|ab| = 2$ и $|aw| = 3$, то $a = w^{bw}$. Добавляя это соотношение к $R(2,l,6)$, получаем, что если $l = 4,5,6$, то G является гомоморфным образом $2 \times D_8$, D_{20} или $2 \times S_3 \times S_3$, соответственно. Первые две группы не содержат элементов порядка 6. Гомоморфные образы $2 \times S_3 \times S_3$ либо содержат D-порождённую подгруппу, изоморфную 2^3, либо не лежат в $S(2,6,6)$. Таким образом, этот случай невозможен. □

Лемма 5.0.4. *Если $G \in S(2,5,5)$, то $G \simeq A_5$.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a,b,c\rangle$, $|ab| = 2$ и $|bc| = |ac| = 5$. Тогда $c^{acac} = a$ и $c^{bcbc} = b$. Поскольку a и b коммутируют, то коммутируют и их сопряжённые $c = b^{cbcb}$ и a^{cbcb}. Следовательно, $a^{cbcbacac}$ и $c^{acac} = a$ коммутируют. Пусть $w = a^{cbcbacac}$. Если $w = a$ или $w = b$, то вычисления показывают, что G — гомоморфный образ D_{10} либо группы вида $((2{\times}Q_8):2):D_{10}$. Первый случай противоречит лемме 5.0.2. Во втором случае положим $x = a^{cbcb}$. Тогда $\langle a^x, a^c, b^c\rangle$ изоморфна либо $2 \times D_8$ либо 2^3, поэтому в этом случае G не является минимальной 3-порождённой.

Таким образом, можно считать, что a, b и w различны. Пусть $H = \langle b,a,w\rangle$. Тогда $H \in S(2,2,|wb|)$, поэтому если $G = H$, то $G \simeq A_5$ или $G \simeq D_{20}$ по лемме 5.0.3. Поскольку $D_{20} \notin S(2,5,5)$, то H порождается двумя D-элементами.

(k, l, m)	доп. соотношения	F	факторы F, лежащие в $S(k, l, m)$
$(2, 3, 3)$	нет	S_4	S_4
$(2, 3, 4)$	нет	$2 \times S_4$	S_4
$(2, 3, 5)$	нет	$2 \times A_5$	A_5
$(2, 4, 4)$	$(ab^c)^6$	$(2^2 \times S_3^2) : 2$	D_8
	$(ab^c)^5$	$(D_{10} \times D_{10}) : 2$	D_8
	$(ab^c)^4$	$(D_8 \times D_8) : 2$	D_8
$(2, 4, 5)$	$(ab^c)^5$	$A_6 : 2$	—
	$(ab^c)^4$	$2 \times ((2^4 : 5) : 2)$	—
	$(ab^c)^6$, $(ca^{b^c a})^6$	$((3^4 : A_5) : 2) : 2$	—
	$(ab^c)^6$, $(ca^{b^c a})^5$	D_{20}	—
	$(ab^c)^6$, $(ca^{b^c a})^4$	$2 \times ((2^4 : A_5) : 2)$	—
$(3, 3, 3)$	$(ab^c)^6$	$((6 \times 6) : 3) : 2$	S_3, $3^2 : 2$, S_4, $3^{1+2} : 2$
	$(ab^c)^5$	$(5^2 : 3) : 2$	$(5^2 : 3) : 2$, S_3
	$(ab^c)^4$	$((4 \times 4) : 3) : 2$	S_3, S_4

Таблица 5.1: 3-порождённые группы и их минимальные 3-порождённые факторы

Поскольку a коммутирует с w и b, то $a \in Z(H)$ и, стало быть, $H \in \{D_4, D_8, D_{12}\}$. Тогда H содержит три класса сопряжённых элементов порядка 2 и поскольку H порождается двумя D-элементами, все три класса лежат в D. Таким образом, $ab \in D$. Предположим $|abc| \neq 5$. Тогда группа $\langle a, ab, c\rangle$ не является диэдральной по лемме 5.0.2 и, следовательно, $\langle a, ab, c\rangle = G$. Поэтому G изоморфна группе из заключения леммы 5.0.3. Поскольку $G \in S(2,5,5)$, то $G \simeq A_5$. Получаем $|abc| = 5$. Рассматривая группу $\langle a, b^c, b\rangle$, аналогично получаем $|ab^c| = 5$. Вычисления показывают, что соотношения $R(2,5,5) \cup \{(abc)^5, (ab^c)^5\}$ определяют тривиальную группу. $\square$

Лемма 5.0.5. *Предположим найдутся $a, c \in D$, такие что $|ac| = 5$. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: D_{10}, D_{20}, A_5, или $(5^2 : 3) : 2$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть (G, D) является контрпримером. Если найдётся $d \in D \setminus \{1, a\}$, такой что $[a, d] = 1$ то по лемме 5.0.2 $\langle a, c, d\rangle$ не является группой диэдра и поэтому $G = \langle a, c, d\rangle$; противоречие с леммами 5.0.3 и 5.0.4. Таким образом, можно считать, что для всех $d \in D \setminus \{1\}$ порядок ad нечётен, в частности, a и d сопряжены в $\langle a, d\rangle$. Таким образом, порядок произведения любых двух различны элементов из $D \setminus \{1\}$ нечётен.

Если для любого $b \in D$ подгруппа $\langle a, b, c\rangle$ может быть порождена двумя D-элементами, то $b \in \langle a, c\rangle$, поэтому $G \simeq D_{10}$; противоречие. Таким образом, найдётся $b \in D$, такой что $G = \langle a, b, c\rangle$.

Предположим сначала, что $G \in S(3,3,5)$ и выберем $b \in D$, такой что $|ab| = |bc| = 3$. Тогда G является гомоморфным образом

$$G(i,j) = \langle a, b, c \mid R(3,3,5) \cup \{(ba^c)^i, (ba^{ca})^j\}\rangle,$$

где $i, j \in \{3, 5\}$. Вычисления показывают, что $G(3,5) \simeq G(5,3) \simeq 2$, и $G(5,5) \simeq 2 \times PSU_3(4)$. Если $G \simeq 2 \times PSU_3(4)$ или $G \simeq PSU_3(4)$, то найдётся элемент порядка 2 в $D \setminus \{a\}$, перестановочный с a; противоречие. Наконец, $|G(3,3)| = 5^2 \cdot 3 \cdot 2$. В этом случае положим $x = ac$, $y = x^b$, $z = ab$ и $w = b$. Тогда выполнены определяющие соотношения из случая (6) теоремы 11 и $G(3,3) \simeq (5^2 : 3) : 2$; противоречие.

Пусть $|ab| = 3$ и $|bc| = 5$. Тогда $a = b^{ab}$ и $b^{(cb)^2} = c = a^{(ca)^2} = b^{ab(ca)^2}$. Следовательно, $x = (ab)(ca)^2 \cdot (bc)^2 \in C_G(b)$. Сопрягая $(ab)^3 = 1$, получим $(a^x b)^3 = 1$. Поэтому если $G = \langle a, b, a^x\rangle$, то $G \in S(3,3,5)$ или $G \in S(3,3,3)$; противоречие. Таким образом, можно считать, что $\langle a, b, a^x\rangle$ порождается двумя D-элементами. Тогда $\langle a, b\rangle \simeq S_3$ и $a^x \in \{a, b, a^b\}$. Если $a^x = b$, то $a = xbx^{-1} = b$; противоречие. Таким образом либо $a^x = a$, либо $a^x = a^b$.

Пусть $b_1 = b^c$, $b_2 = b^{cb}$ и $b_3 = b^{cbc}$ — различные инволюции из $\langle b, c\rangle$. Если $|bb_j| = 5$ и $|ab| = 3$, то $H = \langle b_j, a, b\rangle$ не порождается двумя D-элементами. Стало быть, если $|ab_j| = 3$ для некоторого j, то $G = H \in S(3,3,5)$; противоречие. Поэтому всегда $|ab_j| = 5$.

Теперь G является гомоморфным образом

$$G(i) = \langle a, b, c \mid R(3,5,5) \cup \{(ab_1)^5, (ab_2)^5, (ab_3)^5, a^x a^{b^i}\}\rangle,$$

где $i = 0$, если $a^x = a$; и $i = 1$, если $a^x = a^b$. Группа $G(0) \simeq 3^4 : D_{10}$ не является минимальной 3-порождённой, поскольку $\langle a, b, a^{cabc}\rangle \in S(3,3,3)$ изоморфна $3^2 : 2$, а порядки других гомоморфных образов $G(0)$ не делятся на 3. Наконец, $G(1) \simeq D_{10}$ и снова $|G(1)|$ не делится на 3; противоречие. □

Лемма 5.0.6. *Если $G \in S(3,l,m)$ и для любых $x, y \in D$ порядок xy не превосходит 5, то G изоморфна одной из следующих групп: S_3, D_{12}, $3^2 : 2$, S_4, $GL(2,3)$ или $3^{1+2} : 2$.*

Доказательство. Пусть $a, b, c \in D$, такие что $|ab| = 3$, $|bc| = l$, $|ac| = m$ и $G = \langle a, b, c\rangle$. Сначала рассмотрим случай $l = m = 3$. Добавим к $R(3,3,3)$ соотношение $(ab^c)^j = 1$, где $j \in \{4,6\}$. Используя вычисления и лемму 5.0.1, получаем, что G изоморфна одной из следующих групп S_3, S_4, $3^2 : 2$, $3^{1+2} : 2$ (см. Таблицу 5.1). Поэтому можно считать, что $m = 4$ или 6.

Стратегия состоит в том, чтобы рассмотреть все возможности для (l,m), и в каждом случае указать слово w от порождающих, такое что группа $\langle a, b, w\rangle$ уже была рассмотрена.

Пусть $(l,m) \in \{(3,4),(4,4)\}$. Положим $w = a^c$. Тогда $|ac| = 4$, и $|aw| = 2$. Рассмотрим $H = \langle w, a, b\rangle$. Если $|bw| = 3, 4$, то $H \in S(2,3,3)$ или $H \in S(2,3,4)$. По леммам 5.0.2 и 5.0.3 $G = H \simeq S_4$. Поэтому $|bw| = 2$ или $|bw| = 6$. В первом случае если $l = 3, 4$, то G — гомоморфный образ 2 или $(S_3 \times S_3) : 2$, соответственно. В зависимости от множества D, группа $(S_3 \times S_3) : 2$ содержит либо D_{12} либо $S_3 \times S_3$, которые 3-порождены и не могут быть порождены двумя D-элементами.

Таким образом, можно считать, что $|wb| = 6$. Тогда $H \in S(2, 3, 6)$ и либо $H = G$ либо $H = D_{12}$. В первом случае по лемме 5.0.3 получаем $G = D_{12}$, что невозможно, поскольку в D_{12} нет элементов порядка 4. Стало быть, $H = D_{12}$ и $H = \langle w, b\rangle$. Поскольку $|ab| = 3$ и $|aw| = 6$, то $a = b^{wb}$. Используя эти соотношения, получаем, что G — гомоморфный образ $GL(2, 3)$ или $(2^2 \times A_4) : 2$. В первом случае G должна быть изоморфна $GL(2, 3)$, поскольку содержит элемент порядка 4. Во втором случае, если $G \simeq (2^2 \times A_4) : 2$, то три элемента из a^G порождают подгруппу, изоморфную 2^3, поэтому G не является минимальной 3-порождённой. Далее, среди гомоморфных образов найдётся только один с подходящими порядками элементов ab, bc и ac — это $(6 \times 2) : 2$. В обозначениях теоремы 11, положим $x = bw$, $y = c$, $z = a$. Тогда между x, y и z выполнены соответствующие соотношения.

Пусть $l = 3$ и $m = 6$. Положим $w = c^{ac}$ и $H = \langle a, b, w\rangle$. Как выше, можно счиать, что либо $|bw| = 2$, либо $|bw| = 6$. В первом случае, G является гомоморфным образом S_3; противоречие. Поэтому $|bw| = 6$. Тогда $H \in S(2, 3, 6)$ и $H = D_{12}$ по лемме 5.0.3. Стало быть, $a = b^{wb}$. Используем это равенство и соотношение $(ab^c)^j = 1$, где $j = 4$ и $j = 6$. Вычисления показывают, что если $j = 6$, то G конечна и $(ac)^3 = 1$; противоречие. Аналогично, если $j = 4$, то G является гомоморфным образом $(((4 \times 2) : 4) : 3) : 2$. Для последней группы найдется три элемента в a^G, порождающие подгруппу, изоморфную 2^3. Вычисления показывают, что только один гомоморфный образ имеет подходящие порядки элементов ab, bc и ac — он изоморфен $GL(2, 3)$.

Пусть, наконец, $(l, m) \in \{(4, 6), (6, 6)\}$. Положим $w = a^c$ и $H = \langle a, b, w\rangle$. Тогда $|aw| = |acac| = 3$. Если $H = G$, то $G \in S(2, 3, 3)$ или $G \in S(3, 3, i)$. Таким образом, можно считать, что H порождается двумя D-элементами. Из леммы 5.0.2 следует, что $|bw| = 3$ и $H = \langle a, b\rangle$. Тогда $w = a^b$. В этом случае G является гомоморфным образом D_{12}. $\square$

Лемма 5.0.7. *Если $G \in S(k,l,m)$, где $k,l,m \in \{4,6\}$, то либо $G \in S(u,v,w)$, где $u \in \{2,3\}$, либо $G \simeq (4 \times 2) : 2$.*

Доказательство. Предположим, сначала, что $m = 6$ и рассмотрим $x = c^{ac}$. Тогда $|ax| = 2$ и $|cx| = 3$. Можно считать, что группы $\langle a,x,b\rangle$ и $\langle b,x,c\rangle$ порождаются двумя D-элементами. Если $l = 4$, то это невозможно по лемме 5.0.2. Рассматривая a^{ca} вместо x, аналогично получим, что если $G \in S(4,6,6)$, то $G \in S(u,v,w)$, где $u \in \{2,3\}$. Предположим $k = 6$. По лемме 5.0.2 группы $\langle a,x,b\rangle$ и $\langle b,x,c\rangle$ изоморфны D_{12}. Тогда $|bx| = 2$ и $x = (ab)^3 = c^{bc}$. Стало быть, G является гомоморфным образом

$$\langle a,b,c \mid R(6,6,6) \cup \{(bx)^2, x(ab)^3, xc^{bc}\}\rangle \simeq D_{12}$$

и $|bc|$ делит 2; противоречие.

Наконец, предположим $k = l = m = 4$. Пусть $x = a^b$. Тогда $|ax| = 2$, и не нарушая общности можно считать, что $\langle a,x,c\rangle = \langle a,c\rangle$ диэдральная. По лемме 5.0.2 либо $|xc| = 4$ и $x = a^c$, либо $|xc| = 2$ и $x = (ac)^2$. Поэтому G является гомоморфным образом $G(i) = \langle a,b,c \mid R(4,4,4), \{xa^ia^c\}\rangle$, где $x = a^b$ и $i \in \{0,1\}$. Заметим, что $G(1) \simeq D_8$ и $a = 1$ в этом случае; противоречие. Более того, $G(0) \simeq (4 \times 2^2) : 2$ и эта группа содержит подгруппу, изоморфную 2^3, и порождённую тремя D-элементами. Исследуя остальные гомоморфные образы, получим, что толко в одном из них $|ab| = |bc| = |ac| = 4$. Этот образ изоморфен $(4 \times 2) : 2$. □

Из доказанных результатов видно, что для доказателства теоремы 11 осталось показать, что конечные группы из $\mathcal{K}_5$ перечислены в теореме. Ниже приводится описание всех конечных групп из $\mathcal{K}_p$ для любого нечётного p.

Для конечной группы H, обозначим через $O(H)$ наибольшую нормальную подгруппу нечётного порядка в H, а через $Z^*(H)$ прообраз в H центра $H/O(H)$. Следующая лемма следует из известной Z^*-теоремы Глаубермана.

Лемма 5.0.8. *[106, Следствие 1] Пусть S — силовская 2-подгруппа конечной группы G. Пусть $x \in S$. Тогда $x \notin Z^*(G)$ в том и только в том случае, когда найдётся $y \in C_S(x)$, сопряжённый с x в G и отличный от x.*

Далее $G \in \mathcal{K}_p$ и конечна.

Лемма 5.0.9. *Все элементы из* $\Gamma_2(G)$ *сопряжены и* $G = O(G) \rtimes \langle a \rangle$. *Более того,* $O(G) = \langle ab, ac \rangle$. *Если* N *— собственная* $\langle a \rangle$*-инвариантная нормальная подгруппа в* $O(G)$, *то* $G/N \in \ \mathcal{K}_p$.

Доказательство. Пусть T — силовская 2-подгруппа G, содержащая a. Если $g \in G$ и $a^g \neq a$,то $|aa^g| = p$, следовательно $a^g \notin T$. По лемме 5.0.8 $a \in Z^*(G)$. Аналогично, $b, c \in Z^*(G)$, поэтому $Z^*(G) = G$. Следовательно, $|G/O(G)|$ делит 8 и $ab, bc, ac \in O(G)$. Откуда $|G/O(G)| = 2$ и $G = O(G) \rtimes \langle a \rangle$. Докажем, что $O(G)$ порождается ab и ac. Заметим, что $bc = baac$, следовательно $bc \in \langle ab, ac \rangle$. Пусть $x \in O(G)$ и $x = i_1 i_2 ... i_k$, где $i_j \in \{a, b, c\}$ для всех j и $i_j \neq i_{j+1}$ для $j < k$. Очевидно, $k > 1$ и $i_1 i_2 \in \langle ab, ac \rangle$. Поэтому $i_3 i_4 ... i_k \in O(G)$. По индукции $x \in \langle ab, ac \rangle$ и $O(G) = \langle ab, ac \rangle$.

Докажем последнее утверждение леммы. Если $a \in G$ и $A \leq G$, то обозначим образы a и A под действием естественного гомоморфизма из G в G/N через $\overline{a}$ и $\overline{A}$, соответственно. Пусть $\overline{t}$ — инволюция из G/N. Тогда можно считать, что t — инволюция. Действительно, $t^2 \in O(G)$, откуда $|t| = 2(2m+1)$ для $m \in \mathbb{Z}$, следовательно, $|t^{2m+1}| = 2$ и $\overline{t^{2m+1}} = \overline{t}$. Очевидно, $\overline{G}$ порождается тремя инволюциями $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. В качестве нормального множества инволюций для $\overline{G}$ можно взять $\overline{a}^{\overline{G}}$. Пусть $\overline{t_1} \neq \overline{t_2} \in \overline{a}^{\overline{G}}$. Если $|\overline{t_1}| = |\overline{t_2}| = 2$ и $t_1 \neq t_2$, то $\overline{t_1 \cdot t_2} = \overline{t_1} \cdot \overline{t_2}$, поэтому $|\overline{t_1} \cdot \overline{t_2}| = p$. Пусть наконец $\overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{t_3} \in \overline{a}^{\overline{G}}$ и $\langle \overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{t_3} \rangle \neq \overline{G}$. Тогда, очевидно, $\langle t_1, t_2, t_3 \rangle \neq G$. Откуда $\langle t_1, t_2, t_3 \rangle$ является гомоморфным образом D_{2p} и, следовательно, $\langle \overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{t_3} \rangle$ является гомоморфным образом D_{2p}. Получаем $\overline{G} \in \mathcal{K}_p$. □

Лемма 5.0.10. $O(G)$ *является* p*-группой.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $|G|$. Пусть $|G| > 2$. Тогда p делит $|O(G)|$. Пусть $N = O_{p'}(O(G)) \neq 1$. По лемме 5.0.9 $G/N \in \mathcal{K}_p$, по индукции $O(G)/N$ является p-группой. Следовательно, $|G : N|$ и $|N|$ взаимно просты, и по теореме Шура-Цассенхауза найдётся подгруппа $T \leq G$, изоморфная G/N. Поскольку $T \in \mathcal{K}_p$ и p делит $|T|$, получаем $T \simeq D_{2p}$. Поскольку $|N|$ не делится на p и $G \in \mathcal{K}_p$, то a является единственным элементом порядка 2 в $N\langle a \rangle$. Стало быть,

$N \le C_G(a)$. Следовательно, $|G/C_G(a)|$ делит p и T содержит все инволюции из G; это противоречит тому, что G порождается инволюциями.

Таким образом, $N = O_p(O(G)) \neq 1$. Предположим $N < O(G)$. Тогда $G/N \in \mathcal{K}_p$ и поэтому $O(G)/N$ является p-группой по предположению индукции; противоречие. $\square$

Лемма 5.0.11. *Пусть $x = ab$ и $y = ac$.*
(1) если $|O(G)| = 1$, то либо $G = 1$ либо $G = 2$;
(2) если $|O(G)| = p$, то $G = D_{2p}$;
(3) если $|O(G)| = p^2$, то $G = (\langle x\rangle \times \langle y\rangle) \rtimes \langle a\rangle$, где $x^a = x^{-1}$, $y^a = y^{-1}$;
(4) если $|O(G)| = p^3$, то $O(G) \simeq p^{1+2}$ и $G = \langle x, y\rangle \rtimes \langle a\rangle$, где $[x, y]^p = 1$ и $[x, y] \in Z(G)$.

Доказательство. Если $|O(G)| \le p$, то утверждения очевидны. Пусть $|O(G)| = p^2$. Тогда $O(G) = \langle x, y\rangle$ по лемме 5.0.9. Так как $|x| = |y| = p$, то $O(G)$ элементарная абелева. Заметим, что $(ax)^2 = b^2 = 1$, откуда $x^a = x^{-1}$. Аналогично, $y^a = y^{-1}$.

Наконец, пусть $|O(G)| = p^3$. Поскольку $O(G) = \langle x, y\rangle$, то $O(G)$ неабелева. Поскольку группа $O(G)$ порождается двумя элементами порядка p, она изоморфна p^{1+2}. Тогда $[x, y] \neq 1$ и, стало быть, $\langle [x, y]\rangle = Z(O(G)) = O(G)'$. Заметим, что $x^a = x^{-1}$ и $y^a = y^{-1}$. Поэтому $(x^{-1}y^{-1}xy)^a = xyx^{-1}y^{-1}$. Так как $[x, y] \in Z(O(G))$, то $xy = (yx)(x^{-1}y^{-1}xy) = (x^{-1}y^{-1}xy)(yx)$. Откуда $xyx^{-1}y^{-1} = x^{-1}y^{-1}xy$, поэтому $[x, y]^a = [x, y]$, как и требовалось. $\square$

Следующее предложение описывает конечные группы из $\mathcal{K}_p$.

Предложение 5.0.1. *Всякая группа из $\mathcal{K}_p$ изоморфна группе из леммы 5.0.11.*

Доказательство. Несложно проверить, что все группы из леммы 5.0.11 действительно лежат в $\mathcal{K}_p$. Предположим найдётся $G \in \mathcal{K}_p$, такая что $|G| \ge 2p^3$. Докажем, что $|G| = 2p^3$. Пусть $P = O(G) = \langle x, y\rangle$ — силовская p-подгрупа G. Поскольку P порождается двумя элементами порядка p и имеет порядок больший, чем p^2, то P неабелева и, в частности, нециклическая. Таким образом, минимальное число порождающих P равно 2 и, стало быть, подгруппа Фраттини $\Phi(P)$ имеет индекс p^2 в P.

Докажем, что a централизует $[x, y]$ и $|[x, y]| = p$. По лемме 5.0.9 $G/\Phi(P)$ изоморфна группе из леммы 5.0.11(3). Стало быть, найдётся нормальная подгруппа $\overline{N}$ в $G/\Phi(P)$ порядка p. Пусть N — полный прообраз $\overline{N}$ в G и $T = N\langle a\rangle$. Предположим T имеет более чем p различных сопряженных с a. Тогда можно взять три различных инволюции a, i и j, так что $j \notin \langle a, i\rangle$. Тогда $|\langle a, i, j\rangle| > 2p$ и $|\langle a, i, j\rangle| \leq |T| < |G|$; противоречие с $G \in \mathcal{K}_p$. Таким образом T имеет не более чем p инволюций, откуда $|T : C_T(a)| \leq p$. Следовательно, $|C_T(a)| \geq |\Phi(P)|$. Поскольку в $G/\Phi(P)$ нет элементов порядка $2p$, то $C_T(a) = \Phi(P)$. Поскольку $P/\Phi(P)$ абелева, то $P' \leqslant \Phi(P)$, в частности, $P' \leqslant C_G(a)$. Откуда $[x, y]^a = [x, y]$ и $[x, y^{-1}]^a = [x, y^{-1}]$.

Из равенств $(x^{-1}y^{-1}xy)^a = (x^{-1})^a(y^{-1})^a x^a y^a = xyx^{-1}y^{-1}$ следует $(xy)(x^{-1}y^{-1}) = (x^{-1}y^{-1})(xy)$. Так как $xy = xaay$ и $(ax)^2 = (ay)^2 = 1$, то $|xy| = p$. Аналогично, $|x^{-1}y^{-1}| = p$ и, стало быть, $[x, y]^p = (xy)^p(x^{-1}y^{-1})^p = 1$ как и утверждалось. Рассматривая равенство $[y^{-1}, x]^a = [y^{-1}, x]$, получим $(yx^{-1})(y^{-1}x) = (y^{-1}x)(yx^{-1})$.

Докажем, что $x[x, y] = x^{2n}y^{-1}xyx^{-2n}$ для любого целого $n \geq 0$. При $n = 0$ получаем $x[x, y] = xx^{-1}y^{-1}xy = x^0y^{-1}xyx^0$. Предположим $x[x, y] = x^{2n}y^{-1}xyx^{-2n}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
x[x,y] &= x^{2n}y^{-1}xyx^{-2n} = x^{2n+1}(x^{-1}y^{-1})(xy)x^{-2n} = x^{2n+1}(xy)(x^{-1}y^{-1})x^{-2n} = \\
&= x^{2n+2}yx^{-1}y^{-1}x^{-2n} = x^{2n+2}(yx^{-1})(y^{-1}x)x^{-2n-1} = x^{2n+2}(y^{-1}x)(yx^{-1})x^{-2n-1} = \\
&= x^{2n+2}y^{-1}xyx^{-2n-2}, \text{ что и требовалось.}
\end{aligned}
$$

Положим $n = p - 1$, получим $x[x, y] = x^{p-1}y^{-1}xyx^{-(p-1)} = x^{-1}y^{-1}xyx = [x, y]x$. Стало быть, $[x, y]$ и x коммутируют. Аналогично, $[x, y]$ и y коммутируют. Откуда, $x^p = y^p = [x, y]^p = 1$ и $[x, y] \in Z(P)$. Стало быть, P является гомоморфным образом p^{1+2}, в частности, $|P| \leq p^3$. Таким образом, $|P| = p^3$ и предложение доказано. □

Теорема 11 следует из доказанных лемм и предложения 5.0.1 при $p = 5$.

Заключение

В диссертации изучаются периодические группы с заданным спектром. Основные результаты диссертации перечислены ниже.

1. Доказана локальная конечность OC_6 и OC_7 групп. В частности, группа A_7 распознаваема по спектру в классе всех групп.

2. Доказана локальная конечность групп периода 12 без элементов порядка 12.

3. Доказана распознаваемость групп M_{10} и $L_3(4)$ по спектру в классе всех групп.

4. Доказано, что теорема Бэра-Сузуки для $p = 2$ справедлива в группах периода $4k$, где k нечётно.

5. Классифицированы минимальные 3-порождённые группы 6-транспозиций.

6. Доказано, что если $\mu(G) = \{4, p, 9\}$, где $p \in \{5, 7\}$, то G локально конечна; а если $\mu(G) = \{6, 7\}$, то G является расширением локально конечной группы с помощью группы без инволюций.

7. Доказано, что группа периода 12 локально конечна, если выполнено одно из следующих условий:

а) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 4;

б) порядок произведения любых двух инволюций из группы не равен 6.

Литература

[1] А. Г. Курош, Теория групп. М.:Наука, 1967.

[2] C. Adelmann, E. H.-A. Gerbracht, “Letters from William Burnside to Robert Fricke: automorphic functions, and the emergence of the Burnside Problem”, Arch. Hist. Exact Sci., 63:1 (2009), 33–50.

[3] D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, “Groups with given element orders”, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 7:2 (2014), 191–203.

[4] W. Burnside, “On an unsettled question in the theory of discontinuous groups”, Quart. J. Pure Appl. Math., 33 (1902), 230–238.

[5] M. A. Hilton, “An introduction to the theory of groups of finite order”, Clarendon Press, Oxford, 1908.

[6] M. Hall, “Solution of the Burnside problem for exponent six”, Illinois J. Math., 2 (1958), 764–786.

[7] C. Hopkins, “Finite groups in which conjugate operations are commutative”, Amer. J. Math., 51 (1929), 35–41.

[8] F. Levi, “Groups in which the commutator operations satisfy certain algebraic conditions”, J. Indian Math. Soc., 6 (1942), 166–170.

[9] F. Levi, B. van der Waerden, “Uber eine besondere Klasse von Gruppen”, Abh. Math. Semin., Hamburg Univ., 9 (1932), 157–158.

[10] B. H. Neumann, “Groups whose elements have bounded orders”, J. London Math. Soc., 12 (1937), 195–198.

[11] И. Н. Санов, “Решение проблемы Бернсайда для показателя 4”, Учен. зап. Ленингр.гос. ун-та, сер. матем., 55 (1940), 166–170.

[12] Ю. П. Размыслов, “О проблеме Холла–Хигмена”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 42:4 (1978), 833–847.

[13] Д. В. Лыткина, “Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4”, Сиб. матем. журн., 48:2 (2007), 353–358.

[14] M. L. Newell, “On Sanov 4th-compounds of a group”, Illinois J. Math. 47:1/2 (2003), 453–459.

[15] P. Hall, G. Higman, “On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside’s problem”, Proc. London Math. Soc., 6:3 (1956), 1–42.

[16] M. F. Newman, “Groups of exponent six”, Computational group theory (Durham, 1982), Academic Press, London, 1984, 39–41.

[17] И. Г. Лысёнок, “Доказательство теоремы М. Холла о конечности групп $B(m,6)$”, Матем. заметки, 41:3 (1987), 422–428.

[18] П. С. Новиков, “О периодических группах”, ДАН СССР 127 (1959), 749–752.

[19] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:1 (1968), 212–244.

[20] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. II”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:2 (1968), 251–524.

[21] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. III”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 32:3 (1968), 709–731.

[22] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.:Наука, 1975.

[23] А. Ю. Ольшанский, “О теореме Новикова–Адяна”, Матем. сб., 118:2 (1982), 203–235.

[24] А. Ю. Ольшанский, Геометрия определяющих соотношений в группах, Наука, М., 1989.

[25] А. Ю. Ольшанский, “Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка”, Алгебра и логика, 21:5 (1982), 553–618.

[26] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:5 (1991), 933–990.

[27] S. V. Ivanov, “The free Burnside groups of sufficiently large exponents”, Internat. J. Algebra Comput., 4 (1994), 3–308.

[28] И. Г. Лысёнок, “Бесконечные бернсайдовы группы четного периода”, Изв. РАН. Сер. матем., 60:3 (1996), 3–224.

[29] R. Brauer, K. A. Fowler, “On groups of even order”. Ann. Math., 62:3 (1955), 565–583.

[30] W. Feit, J. G. Thompson, “Solvability of groups of odd order”, Pacific Journal of Mathematics, 13 (1963), 775–1029.

[31] В. П. Шунков, “О периодических группах с почти регулярной инволюцией”, Алгебра и логика, 11:4 (1972), 470–493.

[32] В. В. Беляев, “Группы с почти регулярной инволюцией”, Алгебра и логика, 26:5 (1987), 531–535.

[33] M. F. Newman, “Groups of exponent dividing seventy”, Math. Sci., 4 (1979), 149–157.

[34] N. D. Gupta, V. D. Mazurov, “On groups with small orders of elements”, Bull. Aust. Math. Soc., 60:2 (1999), 197–205.

[35] E. Jabara, “Fixed point free actions of groups of exponent 5”, J. Aust. Math. Soc., 77:3 (2004), 297–304.

[36] Э. Ябара, “Свободное действие групп периода 5”, Алгебра и логика, 50:5 (2011), 685–688.

[37] B. H. Neumann, “Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed”, Arch. Math., 7 (1956), 1–5.

[38] А. Х. Журтов, “О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса”, Сиб. матем. журн., 41:2 (2000), 329–338.

[39] E. Jabara, P. Mayr, “Frobenius complements of exponent dividing $2^m \cdot 9$”, Forum Mathematicum, 21:1 (2009), 217–220.

[40] Д. В. Лыткина, “О периодических группах, действующих свободно на абелевой группе”, Алгебра и логика, 49:3 (2010), 379–387.

[41] А. Х. Журтов, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. И. Созутов, “О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах”, Тр. ИММ УрО РАН, 19, № 3, 2013, 136–143.

[42] А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров, “Локальная конечность некоторых групп с заданными порядками элементов”, Владикавк. матем. журн., 11:4 (2009), 11–15.

[43] В. Д. Мазуров, “О группах периода 24”, Алгебра и логика, 49:6 (2010), 766–781.

[44] Э. Джабара, Д. В. Лыткина, “О группах периода 36”, Сиб. матем. журн., 54:1 (2013), 44–48.

[45] E. Jabara, D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, “Some groups of exponent 72”, J. Group Theory, 17:6 (2014), 947–955.

[46] А. И. Созутов, “О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса”, Сиб. матем. журн., 35:4 (1994), 893–901.

[47] R. Brandl, W. Shi, "Finite groups whose element orders are consecutive integers", J. Algebra 143:2 (1991), 388–400.

[48] В. Д. Мазуров, "О группах периода 60 с заданными порядками элементов", Алгебра и логика, 39:3 (2000), 329–346.

[49] A.V. Vasil'ev, "On finite groups isospectral to simple classical groups", J. Algebra, 423 (2015), 318–374.

[50] А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров, "О распознавании конечных простых групп $L_2(2^m)$ в классе всех групп", Сиб. матем. журн., 40:1 (1999), 75–78.

[51] D. V. Lytkina, A. A. Kuznetsov, "Recognizability by spectrum of the group $L_2(7)$", Сиб. электрон. матем. изв., 4 (2007), 136–140.

[52] В. Д. Мазуров, А. Ю. Ольшанский, А. И. Созутов, "О бесконечных группах конечного периода", Алгебра и логика, 54:2 (2015), 243–251.

[53] Е. Г. Брюханова. "О 2-длине и 2-периоде конечной разрешимой группы", Алгебра и логика, 18:1 (1979), 5–20.

[54] Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, "О группах периода 12", Сиб. матем. журн., 56:3 (2015), 594–599.

[55] A. V. Zavarnitsine, "On a finite $2,3$-generated group of period 12", Сиб. электрон. матем. изв., 11 (2014), 548–556.

[56] B. Fischer, "Distributive Quasigruppen endlicher Ordnung", Math. Z., 83 (1964), 267–303.

[57] B. Fischer, "Finite groups generated by 3-transpositions", Invent. Math., 13 (1971), 232–246.

[58] M. Aschbacher, 3-transposition groups. (English summary) Cambridge Tracts in Mathematics, 124. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. viii+260 pp.

[59] H. Cuypers, J. I. Hall, “The 3-transposition groups with trivial center”, Journal of Algebra, 178 (1995), 149–193.

[60] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press (1985).

[61] A. A. Ivanov, “The Monster Group and Majorana Involutions”, Number 176 in Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[62] R. L. Griess, “The friendly giant”, Invent. Math., 69:1 (1982), 1–102.

[63] R. Baer, “Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen”, Math. Ann., 133 (1957), 256–270.

[64] M. Suzuki, “Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed”, Ann. Math., 82:2 (1968), 191–212.

[65] J. Alperin, R. Lyons, “On conjugacy classes of p-elements”, J. Algebra, 19:2 (1971), 536–537.

[66] K. Doerk, T. Hawkes, Finite Soluble Groups. Berlin: de Gruyter, 1992.

[67] Д. Горенстейн, Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

[68] А. И. Созутов, “Об одном обобщении теоремы Бэра–Судзуки”, Сиб. мат. журн., 41:3 (2000), 674–675.

[69] P. Flavell, “A weak soluble analogue of the Baer–Suzuki theorem”, Preprint http://web.mat.bham.ac.uk/P.J.Flavell/research/preprints.

[70] N. Gordeev, F. Grunewald, B. Kunyavskii, E. Plotkin, “A description of Baer–Suzuki type of the solvable radical of a finite group”, J. Pure Appl. Algebra, 213:2 (2009), 250–258.

[71] N. Gordeev, F. Grunewald, B. Kunyavskii, E. Plotkin, “Baer–Suzuki theorem for the solvable radical of a finite group”, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 347:5–6 (2009), 217–222.

[72] S. Guest, “A solvable version of the Baer–Suzuki theorem”, Trans. Amer. Math. Soc., 362:11 (2010), 5909–5946.

[73] P. Flavell, S. Guest, R. Guralnick, “Characterizations of the solvable radical”, Proc. Amer. Math. Soc., 138:4 (2010), 1161–1170.

[74] N. Gordeev, F. Grunewald, B. Kunyavskii, E. Plotkin, “From Thompson to Baer–Suzuki: a sharp characterization of the solvable radical”, J. Algebra, 323:10 (2010), 2888–2904.

[75] Д. О. Ревин, “О π-теоремах Бэра–Судзуки”, Сиб. матем. журн., 52:2 (2011), 430–440.

[76] А. С. Мамонтов, “Аналог теоремы Бэра–Сузуки для бесконечных групп”, Сиб. мат. журн., 45:2 (2004), 394—398.

[77] Unsolved Problems in Group Theory: the Kourovka Notebook. eds. E. I. Khukhro and V. D. Mazurov, 19th edition, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk. 2018.

[78] The GAP Group, Gap: groups, algorithms, and programming, vers. 4.10.2 (2019), http:// www.gap-system.org

[79] G. Havas, M. F. Newman, “Application of computers to questions like those of Burnside”, Lecture Notes in Math., 806 (1980), 211–230.

[80] M. F. Newman, E. A. O’Brien, “Application of computers to questions like those of Burnside, II”, Int. J. of Algebra and Computation, 6:5 (1996), 593–605.

[81] F. J. Grünewald, G. Havas, L. Mennicke, M. F. Newman, “Groups of Exponent Eight”, Lecture Notes in Math., 806 (1980), 49–188.

[82] M. F. Newman, “Groups of exponent eight are different”, Bul. of the London Math. Soc., 25:3 (1993), 263–264.

[83] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:1 (1990), 42–59.

[84] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп”, Матем. сб., 182:4 (1991), 568–592.

[85] G. Havas, M. F. Newman, A. C. Niemeyer, C. C. Sims, “Groups with exponent six”, Comm. Algebra, 27:8 (1999), 3619–3638.

[86] А. И. Кострикин, Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.

[87] E. A. O'Brien, M. Vaughan-Lee, “The 2-generator restricted burnside group of exponent 7”, Int. J. of Algebra and Computation, 12:4 (2002), 575–592.

[88] M. Herzog, P. Longobardi, M. Patrizia, “Properties of finite and periodic groups determined by their element of orders (a survey)”, Group theory and computation, 59–90, Indian Stat. Inst. Ser., Springer, Singapore, 2018.

[89] E. Jabara and M. S. Lucido, “Finite group with Hall coverings”, J. Austral. Math. Soc., 78:1 (2005), 1–16.

[90] D. Gorenstein, Finite groups, New York-London (1968).

[91] W. Shi, “A characterization of some projective special linear groups”, J. Math., Wuhan Univ., 5 (1985), 191–200.

[92] M. Hall, The theory of groups, New York (1963).

[93] А. В. Васильев, “О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел”, Сиб. мат. журн., 46:3 (2005), 511–522.

[94] А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов , “О конечных трипримарных группах”, Тр. ИММ УрО РАН, 16:3 (2010), 150–158.

[95] В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов, “О периодических группах с элементами малых порядков”, Сиб. матем. журн., 50:2 (2009), 397–404.

[96] G. Higman, “Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements”, J. London Math. Soc., 32 (1957), 321–334.

[97] D. F. Holt, W. Plesken. Perfect groups. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford Mathematical Monographs, New York (1989), xii+364 pages.

[98] В. Д. Мазуров, “О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций”, Алгебра и логика, 39:1 (2000), 74–86.

[99] P. Hall, C. R. Kulatilaka, “A property of locally finite groups”, J. London Math. Soc., 39 (1964), 235–239.

[100] М. И. Каргаполов, “О проблеме О. Ю. Шмидта”, Сиб. матем. ж., 4:1 (1963), 232–235.

[101] Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов, “О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп”, Сиб. матем. ж., 49:2 (2008), 394–399.

[102] В. Д. Мазуров, “Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов”, Алгебра и логика, 41:2 (2002), 166–198.

[103] В. П. Шунков, “Об одном классе p-групп”, Алгебра и логика, 9:4 (1970), 484–496.

[104] В. П. Шунков. M_p-группы. Наука, Москва, 1990.

[105] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, изд. 4-е, перераб. и дополн., Наука, Физматлит, М., 1996.

[106] G. Glauberman, “Central elements in core-free groups”, J. Algebra, 4:3(1966), 403–420.

Работы автора по теме диссертации

[107] А. С. Мамонтов, “О периодических группах, изоспектральных A_7”, Сиб. матем. журн., 61:1 (2020), 137–147.

[108] А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “О периодических группах, изоспектральных A_7. II”, Сиб. матем. журн., 61:6 (2020), 1366–1376.

[109] А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “Распознавание A_7 по множеству порядков элементов”, Сиб. матем. журн., 62:1 (2021), 117–130.

[110] A. Mamontov, A. Staroletov, M. Whybrow, “Minimal 3-generated Majorana algebras”, Journal of Algebra, 524 (2019), 367–394.

[111] В. Го, А. С. Мамонтов, “О группах, порядки элементов которых делят 6 и 7”, Сиб. матем. журн., 58:1 (2017), 88–94.

[112] А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “О периодических группах с узким спектром”, Сиб. матем. журн., 57:3 (2016), 683–687.

[113] А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “Распознавание группы $L_3(4)$ по множеству порядков элементов в классе всех групп”, Алгебра и логика, 54:4 (2015), 439–443.

[114] E. Jabara, D. Lytkina, A. Mamontov, “Recognizing M_{10} by spectrum in the class of all groups”, Int. J. of Algebra and Computation, 24:2 (2014), 113–119.

[115] Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов, Э. Ябара, “Группы, порядки элементов которых не превосходят 6”, Алгебра и логика, 53:5 (2014), 570–586.

[116] А. С. Мамонтов, “О теореме Бэра–Сузуки для групп 2-периода 4”, Алгебра и логика, 53:5 (2014), 649–652.

[117] В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов, “Инволюции в группах периода 12”, Алгебра и логика, 52:1 (2013), 92–98.

[118] А. С. Мамонтов, “Группы периода 12 без элементов порядка 12”, Сиб. матем. журн., 54:1 (2013), 150–156.

[119] Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов, “Локальная конечность некоторых групп периода 12”, Сиб. матем. журн., 53:6 (2012), 1373–1378.