ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Ыскак Тимур

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Демиденко Геннадий Владимирович

НОВОСИБИРСК — 2021

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом начала активно развиваться с середины 20 века. Уравнения с запаздывающим аргументом описывают процессы, в которых их состояние в настоящий момент времени зависит от прошлых состояний. Данные процессы возникают во многих задачах теории автоматического регулирования и управления, автоматики и телемеханики, радиофизики, при моделировании процессов иммунологии, распространения инфекционных заболеваний, при изучении генных сетей, моделировании нейронных сетей, экономики и т. д. (см., например, [6], [7], [8], [11], [12], [15], [16], [20], [28], [30], [31], [41], [42], [45], [47], [48], [56], [75], [76], [80], [81], [82], [87], [89], [90], [93], [94]). Существует несколько классов дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом: уравнения с постоянным сосредоточенным запаздыванием

$$f\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) = 0, \quad \tau > 0,$$

уравнения с переменным сосредоточенным запаздыванием

$$f\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right) = 0, \quad \tau(t) > 0,$$

уравнения с постоянным распределенным запаздыванием

$$f\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds, \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) = 0, \quad \tau > 0,$$

и др.

В данной диссертации будут рассмотрены некоторые классы систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds$$

$$+F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right).$$

В настоящее время существует огромное число работ, посвященных исследованию дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Одной из важных проблем в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является теория устойчивости. Исследованию данной темы посвящен ряд монографий (см., например, книги А.Д. Мышкиса [46], Л.Э. Эльсгольца [67], Н.Н. Красовского [38], Э. Пинни [49], Р. Беллмана и К. Кука [9], В.П. Рубаника [55], А. Халаная и Д. Векслера [59], Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина [69], Ю.А. Митропольского и Д.И. Мартынюка [44], В.Б. Колмановского и В.Р. Носова [33], С.Н. Шиманова [66], Дж. Хейла [60], Д.Г. Кореневского [35], [36], Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной [1], Ю.Ф. Долгого [26], В.Б. Колмановского и А.Д. Мышкиса [86], Н.В. Азбелева и П.М. Симонова [4], К. Гу, В.Л. Харитонова и Дж. Чена [83] и др.).

К настоящему времени наиболее изученными являются задачи об асимптотической устойчивости стационарных решений автономных дифференциальных уравнений с постоянным сосредоточенным запаздыванием, при этом широкое распространение получили спектральные методы исследований. Основой для них служит спектральный критерий асимптотической устойчивости (см. [9]). В силу данного критерия асимптотическая устойчивость нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \tag{0.1}$$

эквивалентна тому, что все корни характеристического квазиполинома

$$\det\left(A + Be^{-\lambda\tau} - \lambda I\right)$$

лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$. Для линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \tag{0.2}$$

также имеет место спектральный критерий асимптотической устойчивости нулевого решения, который формулируется в терминах принадлежности корней характеристического уравнения

$$\det \left(A + \int_0^\tau e^{-\lambda s} B(s) ds - \lambda I \right) = 0 \tag{0.3}$$

левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$.

Стоит отметить, что для системы линейных автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием проверка принадлежности корней характеристической функции левой полуплоскости может представлять сложную задачу. С одной стороны, приближенное вычисление корней характеристической функции является весьма трудоемкой задачей (при этом их может быть счетное число), с другой стороны, это задача, вообще говоря, является плохо обусловленной. Это справедливо даже в случае, когда $B(s) \equiv 0$, т. е. для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} y(t) = Ay(t), \quad t > 0, \tag{0.4}$$

поскольку задача о поиске спектра недиагонализируемых матриц является плохо обусловленной, и очень малые возмущения в матрице могут привести к большим ошибкам при вычислении собственных значений (см., например, [14], [57]). Поэтому при исследовании асимптотической устойчивости решений конкретных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом большое значение приобретают различные признаки принадлежности корней характеристического уравнения (0.3) левой полуплоскости. Для уравнений с запаздывающим аргументом для этой цели зачастую используют метод D-разбиений (см., например, [63]), амплитудно-фазовый метод (см., например, [68]), метод Меймана – Чеботарева (см., например, [64]), а также методы, основанные на использовании аналогов теорем Ляпунова [37], [50].

Наиболее распространенным из этих методов является метод функционалов Ляпунова – Красовского [38]. Приведем один из результатов Н.Н. Красовского для линейной системы дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием (0.1).

Теорема 0.1. *Предположим, что существуют матрицы* $H = H^* >$

0 *и* $K = K^* > 0$ *такие, что выполнено матричное неравенство*

$$\begin{pmatrix} HA + A^*H + K & HB \\ B^*H & -K \end{pmatrix} < 0.$$

Тогда нулевое решение системы (0.1) асимптотически устойчиво.

Замечание. *Здесь и далее для эрмитовой матрицы* U *неравенство* $U > 0$ *означает положительную определенность матрицы* U*.*

При доказательстве данной теоремы использовался следующий функционал Ляпунова – Красовского:

$$v(t, y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle Ky(s), y(s)\rangle ds. \tag{0.5}$$

Данный функционал $v(t, y)$ является аналогом функции Ляпунова $\langle Hy(t), y(t)\rangle$ для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида (0.4). Отметим, что матрица H, присутствующая в функции Ляпунова, является эрмитовым положительно определенным решением матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0. \tag{0.6}$$

Известно, что для систем вида (0.4) можно выписать оценку решений, характеризующую экспоненциальное убывание на бесконечности, используя решение данного матричного уравнения. Например, при $C = I$, где I — единичная матрица, оценка будет выглядеть следующим образом [17]:

$$\|y(t)\| \le \sqrt{2\|A\|\|H\|} \exp\left(-\frac{t}{2\|H\|}\right) \|y(0)\|, \quad t > 0. \tag{0.7}$$

Здесь и далее в качестве матричной нормы используется спектральная норма. Отметим, что, во-первых, нахождение решения матричного уравнения (0.6) является хорошо обусловленной задачей (см. [13]), во-вторых, используя решение матричного уравнения (0.6), можно указать оценки на множества притяжения стационарных решений нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Функционал Ляпунова – Красовского (0.5) можно использовать при исследовании асимптотической устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Но использование такого функционала не позволяет получить аналоги оценки Крейна (0.7). Впервые аналоги оценки Крейна для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом удалось получить в работах [22], [61], [85], [88]. Результаты данных работ были получены с использованием различных модификаций функционала Ляпунова – Красовского.

В частности, в работе [22] был предложен функционал Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds. \tag{0.8}$$

Заметим, что отличие данного функционала от функционала (0.5) заключается в том, что здесь матрица K является переменной. Приведем результат из работы [22] для системы (0.1).

Рассмотрим начальную задачу для системы (0.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.9}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau,0])$ — заданная вектор-функция.

Теорема 0.2. *Предположим, что существуют матрицы $H = H^* > 0$ и $K(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

и составная матрица

$$\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB \\ B^*H & -K(\tau) \end{pmatrix}$$

положительно определена. Тогда для решения $y(t)$ начальной задачи (0.9) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{h_{min}^{-1} v(0,\varphi)}\, e^{-\gamma t/2}, \tag{0.10}$$

где

$$\gamma = \min\left\{\frac{c_{min}}{\|H\|}, k\right\},$$

$$v(0,\varphi) = \langle H\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_{-\tau}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds,$$

$h_{min} > 0$, $c_{min} > 0$ *— минимальные собственные значения матриц* H *и* $\mathbf{C}$ *соответственно,* $k > 0$ *— максимальное число такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Оценка (0.10) является аналогом оценки Крейна (0.7). Отметим, что использование функционала вида (0.8) позволяет получить аналоги оценки Крейна (0.7) для решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а также оценить множество притяжения нулевого решения.

Аналогичные результаты были получены для системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \tag{0.11}$$

здесь D, A, B — матрицы размера $n \times n$. В литературе системы вида (0.11) называют системами нейтрального типа.

При исследовании экспоненциальной устойчивости решений (0.11) Г.В. Демиденко в [77] предложил использовать функционал Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds. \tag{0.12}$$

Приведем результат Г.В. Демиденко из [77].

Теорема 0.3. *Пусть* $\|D\| < 1$. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H = H^* > 0, \quad K(s) \in C^1([0,\tau])$$

такие, что

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau],$$

при этом

$$\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix} > 0.$$

Тогда нулевое решение системы (0.11) экспоненциально устойчиво.

В работе [77] также установлены оценки решений системы (0.11), которые являются аналогами оценки Крейна (0.7). Данные оценки характеризуют экспоненциальную скорость убывания решений на бесконечности, при этом скорость убывания существенно зависит от матрицы D. Данные результаты были обобщены в работе [19] на случай, когда спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

В отличие от автономных систем задача об устойчивости решений неавтономных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием менее изучена. Основные результаты получены для систем линейных периодических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В литературе имеются также некоторые обобщения на случай почти периодических коэффициентов [5], [54]. Основы теории устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами заложены в работах А.М. Зверкина [29], А. Стокса [91], А. Халаная [58], В. Хана [84], Дж. Хейла [60], С.Н. Шиманова [66], Ю.В. Комленко и Е.Л. Тонкова [34]. Основным подходом в этих исследованиях является развитие теории Флоке и использование оператора монодромии, являющегося обобщением матрицы монодромии для обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Помимо указанного подхода к проблеме устойчивости решений линейных периодических систем с запаздывающим аргументом в литературе развиваются: метод производящих функций (см., например, [40], [53], [65]), метод монотонных операторов (см., например, [1], [2], [3], [10]), метод функционалов Ляпунова – Красовского (см., например, [27], [32], [33], [38], [39], [51], [52], [62]). Следует отметить, что существующие условия экспоненциальной устойчивости решений неавтономных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом проверить достаточно сложно. Трудности возникают также при описании областей притяжения при рассмотрении систем нелинейных уравнений, а также при получении асимптотических оценок решений при $t \to \infty$.

Аналог оценки Крейна (0.7) для систем

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \tag{0.13}$$

$$A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t) \equiv B(t+T), \quad T > \tau,$$

появился в работе [22]. Здесь $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами, $F(t, u_1, u_2)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по u_1 и оценке

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \leq q_1 \|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2 \|u_2\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2 \geq 0, \quad \omega_1, \omega_2 > 0.$$

В работе [22] был предложен новый функционал Ляпунова – Красовского

$$v(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds. \tag{0.14}$$

Сформулируем результат из [22].

Теорема 0.4. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1([0, T]), \quad K(s) = K^*(s) \in C^1([0, \tau])$$

такие, что

$$H(0) = H(T) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau],$$

и составная матрица

$$\mathbf{C}(t) = -\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + K(0) & H(t)B(t) \\ B^*(t)H(t) & -K(\tau) \end{pmatrix}$$

положительно определена на отрезке $[0, T]$. Тогда нулевое решение (0.13) асимптотически устойчиво.

Помимо указанной теоремы в работах [22], [23] были получены оценки решений, которые характеризуют экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценки на множество притяжения нулевого решения.

В работе [25] аналогичные результаты были получены для системы

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau)), \quad t>0,$$

$$A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t) \equiv B(t+T),$$

с использованием следующего функционала Ляпунова – Красовского:

$$v(t,y) = \langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle ds. \tag{0.15}$$

Данный функционал был введен в работе [24].

Отметим, что подход, который развивается в работах [22]–[25], [77], позволяет сводить задачу об экспоненциальной устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием к решению хорошо обусловленных задач. В диссертации данный подход будет применяться при исследовании экспоненциальной устойчивости решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием.

Цель работы.

1. Исследование экспоненциальной устойчивости нулевого решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием.

2. Получение конструктивных оценок решений систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности, и конструктивных оценок на множества притяжения нулевого решения.

3. Нахождение конструктивных условий на возмущения, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость нулевого решения.

Обзор основных результатов диссертации.

В **первой главе** исследована экспоненциальная устойчивость нулевого решения систем линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. В частности, в **первом параграфе** рассматривается следующая система:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \tag{0.16}$$

где A — матрица размера $n\times n$, $B(s)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными элементами при $s \in [0,\tau]$. Для данной системы ставится начальная задача:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.17}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau,0])$ — заданная вектор-функция. Экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (0.16) исследуется с помощью функционала Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, dsd\eta.$$

Данный функционал является аналогом функционала (0.8).

Теорема 0.5. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такая, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

при этом матрица

$$P = -HA - A^*H - \tau K(0) - H\left[\int\limits_{0}^{\tau} B(s)K^{-1}(s)B^*(s)ds\right]H$$

положительно определена. Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{0.18}$$

Тогда для решения начальной задачи (0.17) справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\| \le \|H^{-1}\|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi),$$

где

$$\gamma = \min\left\{p^H_{min}, k\right\},$$

$p^H_{min} > 0$ — *минимальное собственное число матрицы* $P_H = H^{-\frac{1}{2}} P H^{-\frac{1}{2}}$,

$$v(0,\varphi) = \langle H\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds d\eta.$$

Отметим, что из теоремы 0.5 вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (0.16).

Во **втором параграфе** рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt} y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^t B(t, t-s) y(s) ds, \qquad (0.19)$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T, s) \equiv B(t,s).$$

При получении результатов использовался функционал Ляпунова – Красовского, который является аналогом (0.14):

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta.$$

Рассмотрим для системы (0.19) следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^t B(t, t-s) y(s) ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \qquad (0.20)$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Теорема 0.6. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ и матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$H(t) > 0, \quad t \in [0,T], \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Выберем число $k > 0$ такое, что выполнено (0.18) и предположим, что справедливо неравенство

$$\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0, \tag{0.21}$$

где

$$\gamma_H(t) = \min\left\{p^H_{min}(t), k\right\},$$

$p^H_{min}(t)$ — минимальное собственное число матрицы

$$P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t),$$

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \tau K(0)$$

$$-H(t)\left[\int\limits_0^\tau B^*(t,s)K^{-1}(s)B(t,s)ds\right]H(t).$$

Тогда для решения начальной задачи (0.20) справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\| \le \|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2}ds\right)v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi),$$

где

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds d\eta.$$

Заметим, что из теоремы 0.6 следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (0.19).

В **третьем параграфе** исследовалась задача о робастной устойчивости систем (0.16), (0.19). Для системы (0.16) рассматривался случай наличия постоянных возмущений коэффициентов, для системы (0.19) — случай наличия периодических возмущений. Для примера, приведем результат для системы (0.19). Рассмотрим систему следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A(t) + A_1(t))y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s)ds, \quad (0.22)$$

где $A(t)$, $A_1(t)$ — матрицы с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t, s)$, $B_1(t, s)$ — матрицы с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной. Выпишем начальную задачу для системы (0.22):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = (A(t) + A_1(t))y(t) \\ + \int\limits_{t-\tau}^{t} (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \quad (0.23)$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Теорема 0.7. *Пусть выполнены условия теоремы 0.6. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых матриц возмущений $A_1(s)$, $B_1(t, s)$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\|A_1(t)\| < \varepsilon, \quad \|B_1(t, s)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0, \quad s \in [0, \tau],$$

нулевое решение системы (0.22) экспоненциально устойчиво.

Величина ε указана в явном виде (случай обыкновенных дифференциальных уравнений см. в [18], [21]).

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости решений линейных систем нейтрального типа с распределенным запаздыванием. В **первом параграфе** рассматриваются автономные системы вида

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad (0.24)$$

где D, A — матрицы размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами. Начальная задача для данной системы будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.25}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

При получении результатов будет использоваться функционал Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t, y) = \langle H\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big), \big(y(t) + Dy(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+ \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds.$$

Данный функционал является аналогом функционала (0.12). Далее сформулируем теорему, в которой получим предварительные оценки решений.

Теорема 0.8. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрицы $K(s) = K^*(s) \in C^1([0, \tau])$, $M(s) = M^*(s) \in C^1([0, \tau])$ такие, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad M(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0, \tau], \tag{0.26}$$

и предположим, что выполнены условия

$$R = \frac{1}{\tau}(M(\tau) - D^*M(0)D) - D^*K(0)D > 0, \tag{0.27}$$

$$P = \tau Q_{11} - \tau Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^* - \int\limits_0^{\tau} Q_{13}(s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(s)ds > 0, \tag{0.28}$$

где

$$Q_{11} = -\frac{1}{\tau}\left(HA + A^*H + M(0)\right) - K(0),$$

$$Q_{12} = \frac{1}{\tau}(HA + M(0))D + K(0)D, \quad Q_{22} = R, \tag{0.29}$$

$$Q_{13}(s) = -HB(s), \quad Q_{33}(s) = K(s), \quad s \in [0, \tau].$$

Выберем число $k > 0$ *такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) + kM(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Тогда для решения задачи (0.25) справедлива следующая оценка:

$$v(t, y) \leq e^{-\gamma_H t} v(0, \varphi),$$

где

$$\gamma_H = \min \left\{ p_{min}^H, k \right\},$$

$p_{min}^H > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $P_H = H^{-\frac{1}{2}} P H^{-\frac{1}{2}}$,

$$v(0, \varphi) = \langle H(\varphi(0) + D\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D\varphi(-\tau)) \rangle$$

$$+ \int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle \, ds d\eta + \int_{-\tau}^0 \langle M(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle \, ds.$$

Заметим, что из условия положительной определенности матрицы R из (0.27) следует, что спектр матрицы D лежит в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Следовательно, $\|D^i\| \to 0$ при $i \to \infty$.

Перед формулировкой теоремы с оценками решений начальной задачи (0.25) введем обозначения:

$$\Phi = \max_{t \in [-\tau, 0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\Theta = \|H^{-1}\|^{1/2} \left(2\|H\|(1 + \|D\|^2) + \int_0^\tau \int_0^\eta \|K(s)\| \, ds d\eta + \int_0^\tau \|M(s)\| \, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 0.9. *Пусть*

а) *выполнены условия теоремы 0.8,*

б) l — *такое минимальное число, что* $\|D^l\| < 1$.

1. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma_H \tau} < 1$, *то для решения начальной задачи (0.25) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi e^{-\frac{\gamma_H}{2} t}$$

$$\times \left(\Theta \left(1 - \|D^l\| e^{\frac{l\gamma_H \tau}{2}} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma_H \tau}{2}} + \max\{\|D\| e^{\frac{\gamma_H}{2}\tau}, \dots, \|D^l\| e^{\frac{\gamma_H}{2} l\tau}\} \right).$$

2. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma_H \tau} = 1$, то для решения начальной задачи (0.25) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi e^{-\frac{\gamma_H}{2} t}$$

$$\times \left(\Theta \left(1 + \frac{t}{l\tau} \right) \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma_H \tau}{2}} + \max\{1, \|D\| e^{\frac{\gamma_H \tau}{2}}, \dots, \|D^{l-1}\| e^{\frac{(l-1)\gamma_H \tau}{2}}\} \right).$$

3. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma_H \tau} > 1$, то для решения начальной задачи (0.25) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi \|D^l\|^{\frac{t}{l\tau} - 1}$$

$$\times \left(\Theta \left(1 - \|D^l\|^{-1} e^{-\frac{l\gamma_H \tau}{2}} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma_H \tau}{2}} + \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\} \right).$$

Заметим, что из теоремы 0.9 следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (0.24).

Во **втором параграфе** рассматривается случай периодических коэффициентов:

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s) y(s) ds, \qquad (0.30)$$

где $D(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными по совокупности переменных и T-периодическими по первой переменной элементами, т. е.

$$D(t) \equiv D(t+T), \quad A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t,s) \equiv B(t+T, s).$$

При исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения будем использовать следующий функционал Ляпунова – Красовского:

$$v(t,y) = \langle H(t)\big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big), \big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+\int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, dsd\eta + \int_{t-\tau}^t \langle M(t-s,s)y(s), y(s)\rangle \, ds.$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова – Красовского (0.15).

Рассмотрим начальную задачу для системы (0.30):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) \\ + \displaystyle\int_{t-\tau}^t B(t,t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.31}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Теорема 0.10. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t) > 0$, матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ и матрица $M(s,\xi) = M^*(s,\xi)$, $s \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}$, непрерывная по совокупности аргументов, непрерывно дифференцируемая по первой переменной и T-периодическая по второй переменной, при этом*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

$$M(s,\xi) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) < 0, \quad s \in [0,\tau], \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Предположим также, что выполнено следующее условие:

$$R(t) = \frac{1}{\tau}(M(\tau, t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t)) \\ -D^*(t)K(0)D(t) > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{0.32}$$

Обозначим через $p_{min}^H(t)$ минимальное собственное значение матрицы

$$P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t), \tag{0.33}$$

$$P(t) = \tau Q_{11}(t) - \tau Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int_0^\tau Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(t,s)ds,$$

$$Q_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0,t)\right) - K(0),$$

$$Q_{12}(t) = \frac{1}{\tau}(H(t)A(t) + M(0,t))D(t) + K(0)D(t), \quad Q_{22}(t) = R(t), \tag{0.34}$$

$$Q_{13}(t,s) = -H(t)B(t,s), \quad Q_{33}(s) = K(s).$$

Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{0.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) + kM(s,\xi) \leq 0, \quad s \in [0,\tau], \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{0.36}$$

Тогда для решения начальной задачи (0.31) верна следующая оценка:

$$v(t,y) \leq \exp\left(-\int_0^t \gamma_H(s)ds\right) v(0,\varphi), \tag{0.37}$$

где

$$\gamma_H(t) = \min\left\{p^H_{min}(t), k\right\},$$

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)(\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau))\rangle$$

$$+ \int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds d\eta + \int_{-\tau}^0 \langle M(-s,s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds.$$

Отметим, что выполнение условий теоремы 0.10 не влечет экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (0.30), поскольку в оценке (0.37) $\gamma_H(t)$ может быть отрицательна при всех $t \in [0,T]$. Заметим, что из условия (0.32) и условий на матрицы $K(s)$, $M(s,\xi)$ следует, что $L(t) = M(0,t) > 0$ является T-периодическим решением следующего матричного уравнения:

$$L(t-\tau) - D^*(t)L(t)D(t) = C(t), \quad C(t) = C^*(t) > 0, \tag{0.38}$$

где элементы матрицы $C(t)$ непрерывны и T-периодичны. Следовательно, нулевое решение системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом

$$z(t) = D(t)z(t-\tau), \quad D(t) \equiv D(t+T), \tag{0.39}$$

экспоненциально устойчиво. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 0.11. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1. Нулевое решение системы (0.39) экспоненциально устойчиво.
2. Существует единственное непрерывное T-периодическое решение $L(t) = L^*(t) > 0$, $t \in [0, T]$, матричного уравнения (0.38).

Введем обозначения:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|, \tag{0.40}$$

$$\Theta = \max_{s\in[0,T]} \|H^{-1}(s)\|^{1/2} \Bigg(2\|H(0)\|(1 + \|D(0)\|^2)$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^\eta \|K(s)\|\, ds d\eta + \int_0^\tau \|M(s, -s)\|\, ds \Bigg)^{\frac{1}{2}}, \tag{0.41}$$

$$c = \exp \left(\max_{\xi\in[0,T]} \left(\frac{\xi}{T} \int_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2} ds - \int_0^\xi \frac{\gamma_H(s)}{2} ds \right) \right), \tag{0.42}$$

$$\beta_M = \sqrt{\max_{s\in[0,T]} \|M(0, s)\| \max_{s\in[0,T]} \|M^{-1}(0, s)\|}, \tag{0.43}$$

$$\alpha_M = \max_{s\in[0,T]} \Big(1 - \Big\| M^{\frac{1}{2}}(0, s-\tau) \big(M(0, s-\tau) - D^*(s) M(0, s) D(s) \big)^{-1}$$

$$\times M^{\frac{1}{2}}(0, s-\tau) \Big\|^{-1} \Big). \tag{0.44}$$

При этом $\alpha_M \in [0, 1)$. В следующей теореме приведем оценки решения начальной задачи (0.31).

Теорема 0.12. *Пусть*
а) выполнены условия теоремы 0.10,
б) $\Delta = \int_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2T} ds > 0$.

1. Если $\alpha_M^{1/2} e^{\Delta\tau} < 1$, *то для решения начальной задачи (0.31) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi \beta_M \alpha_M^{-1/2} e^{-\Delta t} \Theta c \left(1 - \alpha_M^{1/2} e^{\Delta\tau} \right)^{-1}.$$

2. Если $\alpha_M^{1/2}e^{\Delta\tau} = 1$, *то для решения начальной задачи (0.31) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi\beta_M\alpha_M^{-1/2}e^{-\Delta t}\left(\frac{\Theta c}{\tau}t + \Theta c + 1\right).$$

3. Если $\alpha_M^{1/2}e^{\Delta\tau} > 1$, *то для решения начальной задачи (0.31) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi\beta_M\alpha_M^{-1/2}\alpha_M^{\frac{1}{2\tau}t}\left(\Theta c\left(1 - \alpha_M^{-1/2}e^{-\Delta\tau}\right)^{-1} + \alpha_M^{1/2}\right).$$

Условия а) и б) являются достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (0.30).

Третий параграф посвящен исследованию робастной устойчивости систем (0.24) и (0.30). Для системы (0.24) рассмотрен случай постоянных возмущений коэффициентов, для системы (0.30) — случай T-периодических возмущений коэффициентов. Рассмотрим случай наличия возмущений для системы (0.30):

$$\frac{d}{dt}(y(t) + \widehat{D}(t)y(t-\tau)) = \widehat{A}(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t}\widehat{B}(t, t-s)y(s)ds, \qquad (0.45)$$

где

$$\widehat{D}(t) = D(t) + D_1(t), \quad \widehat{A}(t) = A(t) + A_1(t),$$
$$\widehat{B}(t,s) = B(t,s) + B_1(t,s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in [0,\tau],$$

$D(t)$, $A(t)$, $B(t,s)$ — матрицы из системы (0.30), $D_1(t)$ — матрица возмущений с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A_1(t)$ — матрица возмущений с непрерывными T-периодическими элементами, $B_1(t,s)$ — матрица возмущений с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной.

Рассмотрим начальную задачу для системы (0.45):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + \widehat{D}(t)y(t-\tau)) = \widehat{A}(t)y(t) \\ + \int\limits_{t-\tau}^{t} \widehat{B}(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.46}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Теорема 0.13. *Пусть выполнены пункты а) и б) теоремы 0.12, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых матриц возмущений $D_1(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t,s)$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\|D_1(t)\| < \varepsilon, \quad \|A_1(t)\| < \varepsilon, \quad \|B_1(t,s)\| < \varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, \tau],$$

нулевое решение системы (0.45) экспоненциально устойчиво, и для решения начальной задачи (0.46) имеют место аналогичные оценки из теоремы 0.12.

В **третьей главе** исследуется устойчивость нулевого решения классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. **Первый параграф** посвящен автономному случаю. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds + F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \tag{0.47}$$

где A — матрица размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами при $s \in [0, \tau]$, $F(u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1, u_2) и следующей оценке:

$$\|F(u_1, u_2)\| \le q_1 \|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2 \|u_2\|^{1+\omega_2}, \tag{0.48}$$

где

$$q_1,\, q_2 \ge 0, \quad \omega_1,\, \omega_2 > 0 \; - \; const.$$

Рассмотрим начальную задачу для (0.47):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds \\ +F\left(y(t), \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.49}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

При исследовании устойчивости нулевого решения будет использоваться следующий функционал Ляпунова – Красовского, аналогичный функционалу (0.8):

$$v(t, y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds d\eta$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Сформулируем теорему, которая является аналогом теорем из [22], [23], [43].

Теорема 0.14. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрицы $K(s) = K^*(s) \in C^1([0, \tau])$, $M(s) = M^*(s) \in C^1([0, \tau])$ такие, что выполнены неравенства (0.26). Выберем $k > 0$ так, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) + 2kM(s) \le 0. \tag{0.50}$$

Предположим также, что матрица

$$P = -HA - A^*H - M(0) - \tau K(0) - H\left[\int\limits_{0}^{\tau} B(s)K^{-1}(s)B^*(s)ds\right]H$$

является положительно определенной. Выберем число $\alpha > 0$ *так, что*

$$\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2}\|H\| < \gamma_H h_{min}, \tag{0.51}$$

где

$$\gamma_H = \min\{p^H_{min}, k\},$$

$h_{min} > 0$ *— минимальное собственное значение матрицы* H, $p^H_{min} > 0$ *— минимальное собственное значение матрицы* $P_H = H^{-\frac{1}{2}} P H^{-\frac{1}{2}}$. *Тогда для решения (0.49) с начальными данными из множества*

$$\mathbf{E} = \Bigg\{ \varphi \in C([-\tau, 0]) : v(0, \varphi) < r^{-2/\omega_1},$$

$$\int\limits_{-\tau}^{0} \left(\frac{k}{2} \langle M(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle - \frac{q_2 \tau^{\omega_2}\|H\|}{\alpha} \|\varphi(s)\|^{2+2\omega_2} \right) ds \geq 0,$$

$$\left(h^{-1}_{min} \left[1 - r v^{\omega_1/2}(0, \varphi) \right]^{-2/\omega_1} v(0, \varphi) \right)^{\omega_2} < \frac{\alpha k \|M^{-1}(\tau)\|^{-1}}{q_2 \tau^{\omega_2} \|H\|} \Bigg\}$$

справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{h_{min}}} e^{-\frac{\delta}{2}t} \left[1 - r v^{\omega_1/2}(0, \varphi) \right]^{-1/\omega_1} v^{1/2}(0, \varphi),$$

где

$$r = \frac{2q_1\|H\|}{\delta h^{1+\omega_1/2}_{min}},$$

$$\delta = \min\left\{ p^H_{min} - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2}\|H\|}{h_{min}}, k \right\}.$$

Отметим, что полученная оценка на решение характеризует экспоненциальное убывание на бесконечности с начальными данными из $\mathbf{E}$, т. к. показатель экспоненты — отрицательный в силу (0.51). Следовательно, условия теоремы 0.14 являются достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (0.47). Множество $\mathbf{E}$ является множеством притяжения нулевого решения.

Во **втором параграфе** изучается экспоненциальная устойчивость нулевого решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad (0.52)$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T, s) \equiv B(t,s),$$

$F(t, u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1, u_2) и следующей оценке:

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \quad t \ge 0, \quad (0.53)$$

где

$$q_1,\, q_2 \ge 0, \quad \omega_1,\, \omega_2 > 0 \, - \, const.$$

Рассмотрим начальную задачу для (0.52):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds \\ +F\left(t, y(t), \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \quad (0.54)$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

При исследовании устойчивости нулевого решения будет использоваться следующий функционал Ляпунова – Красовского:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds d\eta$$

$$+\int_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Данный функционал является аналогом функционала Ляпунова – Красовского (0.14).

Теорема 0.15. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t)$ такая, что*

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

и матрицы $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$, $M(s) = M^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что выполнены неравенства (0.26). Выберем $k > 0$ так, чтобы выполнялось условие (0.50), пусть также будет выполнено неравенство

$$\int_0^T \gamma_H(s)ds > 0,$$

где

$$\gamma_H(t) = \min\{p_{min}^H(t), k\},$$

$p_{min}^H(t)$ — минимальное собственное значение матрицы

$$P_H(t) = H^{-1/2}(t)P(t)H^{-1/2}(t),$$

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - M(0) - \tau K(0)$$
$$-H(t)\left[\int_0^\tau B(t,s)K^{-1}(s)B^*(t,s)ds\right]H(t).$$

Выберем число $\alpha > 0$ так, что

$$\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2}\int_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}(s)}ds < \int_0^T \gamma_H(s)ds,$$

где $h_{min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Тогда для решения начальной задачи (0.54) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Bigg\{\varphi \in C([-\tau,0]) : v(0,\varphi) < r^{-2/\omega_1},$$

$$
\int\limits_{-\tau}^{0} \left(\frac{k}{2} \langle M(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle - \frac{q_2 \tau^{\omega_2} \|H(0)\|}{\alpha} \|\varphi(s)\|^{2+2\omega_2} \right) ds \geq 0,
$$

$$
\max_{s\in[0,T]} \left(h_{min}^{-1}(s) \exp\left(- \int\limits_0^s \delta(\xi) d\xi \right) \right)^{\omega_2}
$$

$$
\times \left(\left[1 - r v^{\omega_1/2}(0,\varphi) \right]^{-2/\omega_1} v(0,\varphi) \right)^{\omega_2} < \frac{\alpha k \|M^{-1}(\tau)\|^{-1}}{q_2 \tau^{\omega_2} \max\limits_{s\in[0,T]} \|H(s)\|} \Bigg\}
$$

справедлива следующая оценка:

$$
\|y(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{h_{min}(t)}} e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \delta(s) ds} \left[1 - r v^{\omega_1/2}(0,\varphi) \right]^{-1/\omega_1} v^{1/2}(0,\varphi),
$$

где

$$
r = q_1 \omega_1 \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2} \int\limits_0^s \delta(\eta) d\eta \right) ds
$$

$$
\times \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2} \int\limits_0^T \delta(\eta) d\eta \right) \right)^{-1},
$$

$$
\delta(t) = \min\left\{ p_{min}^H(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H(t)\|}{h_{min}(t)}, k \right\}.
$$

Отметим, что, как в теореме 0.14, полученная оценка характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности с начальными данными из **E**. Следовательно, условия теоремы 0.15 являются достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (0.52). Множество **E** является множеством притяжения нулевого решения.

Четвертая глава посвящена исследованию экспоненциальной устойчивости нулевого решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием нейтрального типа. В **первом**

параграфе изучается автономная система

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds$$

$$+F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \tag{0.55}$$

где D, A — матрицы размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами при $s \in [0,\tau]$, $F(u_1,u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1,u_2) и оценке (0.48).

По существу, была доказана теорема об устойчивости по первому приближению.

Теорема 0.16. *Пусть выполнены условия теоремы 0.8, тогда нулевое решение системы (0.55) экспоненциально устойчиво.*

Для системы (0.55) получены также оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценка на множество притяжения нулевого решения.

Второй параграф посвящен исследованию экспоненциальной устойчивости нулевого решения систем следующего вида:

$$\frac{d}{dt}(y(t)+D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds$$

$$+F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \tag{0.56}$$

где $D(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е.

$$D(t+T) \equiv D(t), \quad A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T,s) \equiv B(t,s),$$

$F(t, u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1, u_2) и оценке (0.53). Рассмотрим начальную задачу для (0.56):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds \\ +F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.57}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

В дальнейших утверждениях будет предполагаться, что выполнены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения линеаризованной системы, т. е. условия а) и б) теоремы 0.12. При формулировке соответствующих результатов будем пользоваться определением матрицы $R(t)$ в (0.32), обозначениями (0.33), (0.34), (0.40), (0.41), (0.43), (0.44). Также введем обозначения: $q_{min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $Q_{22}(t) = R(t)$,

$$m_{\max} = \max_{s\in[0,T]} \|M^{-1}(\tau, s)\|^{1+\omega_2},$$

$$N = \max_{s\in[0,T]} \nu(H(s)),$$

где $\nu(H(t)) = \|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|$ — число обусловленности матрицы $H(t)$,

$$\Lambda_1 = \frac{m_{\max}\tau^{1+\omega_2}}{\alpha} \max_{s\in[0,T]} \|H(s)\|,$$

$$\Lambda_2 = 2^{1+\omega_1} \max_{s\in[0,T]} \|H(s)\| \max_{s\in[0,T]} \|D(s)\|^{1+\omega_1},$$

$$\Lambda_3 = 2^{1+\omega_1} N \max_{s\in[0,T]} \|D(s)\|^{1+\omega_1} \max_{s\in[0,T]} \left(\|Q_{22}^{-1}(s)Q_{12}^*(s)\| + \frac{1}{4}\right),$$

α — положительное число,

$$v(0, \varphi) = \langle H(0)(\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau))\rangle$$

$$+\int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds d\eta + \int_{-\tau}^0 \langle M(-s,s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds,$$

$$\delta(t) = \min\{p_{min}^H(t) - q_2\alpha\nu(H(t)), k\}, \quad \Delta = \int_0^T \frac{\delta(s)}{2T} ds,$$

$$c = \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]}\left(\frac{\xi}{T}\int_0^T \frac{\delta(s)}{2}ds - \int_0^\xi \frac{\delta(s)}{2}ds\right)\right).$$

Теорема 0.17. *Пусть*
1) выполнены условия теоремы 0.10;
2) $\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0$, *где* $\gamma_H(t) = \min\{p_{min}^H(t), k\}$;
3) число $\alpha > 0$ *такое, что выполнено неравенство*

$$\alpha q_2 \int_0^T \nu(H(s))ds < \int_0^T \gamma_H(s)ds; \tag{0.58}$$

4) выполнено неравенство $\alpha_M^2 e^{\Delta\tau} < 1$.
Тогда для решения начальной задачи (0.57) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Big\{\varphi \in C^1([-\tau, 0]) : \quad q_1\Lambda_2 \max\{1, c_1^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \tau \min_{s\in[0,T]} q_{min}(s),$$

$$q_1\Lambda_3 \max\{1, c_1^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \frac{1}{2}\Delta, \quad 2^{1+\omega_1}q_1 N c^{\frac{\omega_1}{2}} v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi) + q_2\Lambda_1 c^{\omega_2} v^{\omega_2}(0,\varphi) < \Delta\Big\},$$

где

$$c_1 = \beta_M \alpha_M^{-1/2}\Theta c\left(1 - \alpha_M^{1/2} e^{\frac{\Delta\tau}{4}}\right)^{-1},$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le c_1 \Phi e^{-\frac{\Delta t}{4}}.$$

Теорема 0.18. *Пусть*
1) выполнены условия теоремы 0.10;

2) $\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0$, *где* $\gamma_H(t) = \min\{p^H_{min}(t), k\}$;
3) число $\alpha > 0$ *такое, что выполнено неравенство (0.58);*
4) выполнено равенство $\alpha_M^2 e^{\Delta\tau} = 1$.
Тогда для решения начальной задачи (0.57) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Bigg\{\varphi \in C^1([-\tau, 0]) : \quad q_1\Lambda_2 \max\{1, c_2^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \tau \min_{s\in[0,T]} q_{min}(s),$$

$$q_1\Lambda_3 \max\{1, c_2^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \frac{1}{2}\Delta, \quad 2^{1+\omega_1} q_1 N c^{\frac{\omega_1}{2}} v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi) + q_2\Lambda_1 c^{\omega_2} v^{\omega_2}(0,\varphi) < \Delta \Bigg\},$$

где

$$c_2 = \beta_M \alpha_M^{-1/2} \max_{s\geq 0}\left(e^{-\frac{\Delta s}{4}}\left(\frac{\Theta c}{\tau}s + \Theta c + 1\right)\right),$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi\beta_M\alpha_M^{-1/2} e^{-\frac{\Delta t}{4}}\left(\frac{\Theta c}{\tau}t + \Theta c + 1\right).$$

Теорема 0.19. *Пусть*
1) выполнены условия теоремы 0.10;
2) $\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0$, *где* $\gamma_H(t) = \min\{p^H_{min}(t), k\}$;
3) число $\alpha > 0$ *такое, что выполнено неравенство (0.58);*
4) выполнено неравенство $\alpha_M^2 e^{\Delta\tau} > 1$.
Тогда для решения начальной задачи (0.57) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Bigg\{\varphi \in C^1([-\tau, 0]) : \quad q_1\Lambda_2 \max\{1, c_3^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \tau \min_{s\in[0,T]} q_{min}(s),$$

$$q_1\Lambda_3 \max\{1, c_3^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \frac{1}{2}\Delta, \quad 2^{1+\omega_1} q_1 N c^{\frac{\omega_1}{2}} v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi) + q_2\Lambda_1 c^{\omega_2} v^{\omega_2}(0,\varphi) < \Delta \Bigg\},$$

где

$$c_3 = \beta_M \alpha_M^{-1/2}\left(\Theta c\left(1 - \alpha_M^{-1/2} e^{-\Delta\tau}\right)^{-1} + \alpha_M^{1/2}\right),$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq c_3 \Phi \alpha_M^{\frac{1}{2\tau}t}.$$

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и снабжены доказательствами.

Основные положения, выносимые на защиту: достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием в терминах матричных и интегральных неравенств, оценки решений данных систем, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, а также оценки множеств притяжения нулевого решения классов нелинейных систем.

Методы исследований. При получении результатов были построены и использованы функционалы Ляпунова – Красовского, аналогичные функционалам в работах [22], [24], [77]. Вспомогательным аппаратом исследования послужили методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и теории матриц.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены при исследовании асимптотического поведения решений различных моделей, которые описываются системами дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на семинаре «Избранные вопросы математического анализа» в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: профессор Г.В. Демиденко) и на семинаре кафедры дифференциальных уравнений в Новосибирском государственном университете (руководитель: профессор А.М. Блохин). Результаты работы также докладывались на конференциях: Международная школа-конференция «Соболевские чтения» (Новосибирск, 2016, 2017, 2018), Международная конференция «Математика в современном мире» (Новосибирск, 2017), VI Международная конференция «Nonlinear Analysis and Extremal Problems» (Иркутск, 2018), XIX Международная математическая конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения 2019» (Могилев, Республика Беларусь, 2019), Международная конференция «Математика в приложениях» (Новосибирск, 2019).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [70]–[74], [92]. Работы [70]–[74] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Исследования по теме диссертации поддержаны грантом РФФИ конкурса на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре («Аспиранты»), код проекта 19-31-90149, тема «Устойчивость решений дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием» под руководством Г.В. Демиденко, 2019–2021 гг.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и полезные дискуссии, а также к.ф.-м.н. И.И. Матвеевой и к.ф.-м.н. М.А. Скворцовой за ценные советы и помощь в работе.

Глава 1. Устойчивость нулевого решения систем линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

§ 1.1. Автономные линейные системы

В данном параграфе рассмотрим следующий класс дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \tag{1.1.1}$$

где A — матрица размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами при $s \in [0, \tau]$, $\tau > 0$ — параметр запаздывания.

Рассмотрим для системы (1.1.1) следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{1.1.2}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Определение. Под **решением** начальной задачи (1.1.2) будем понимать функцию из класса $C([-\tau, \infty)) \cap C^1(0, \infty)$, при подстановке которой в начальную задачу получаем тождество.

Известно, что начальная задача (1.1.2) однозначно разрешима на всей полуоси (см., например, [46]).

Теперь дадим определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости нулевого решения.

Определение. Нулевое решение системы (1.1.1) **устойчиво по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором при любых начальных данных $\varphi(s)$ таких, что $\|\varphi, C([-\tau, 0])\| < \delta$, для решения начальной задачи (1.1.2) выполнено неравенство $\|y(t)\| < \varepsilon$ при всех $t > 0$.

Здесь под $\|y(t)\|$ понимается евклидова норма вектора, т. е.

$$\|y(t)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t),$$

где $y_i(t)$ — компоненты вектор-функции $y(t)$. Под $\|\varphi, C([-\tau, 0])\|$ понимаем равномерную норму на $[-\tau, 0]$, т. е.

$$\|\varphi, C([-\tau, 0])\| = \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| = \max_{s\in[-\tau,0]} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(s)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\varphi_i(t)$ — компоненты вектор-функции $\varphi(t)$.

Определение. Нулевое решение системы (1.1.1) **асимптотически устойчиво**, если выполнены следующие два пункта:
1) нулевое решение устойчиво по Ляпунову;
2) существует $\Delta > 0$ такое, что для любых начальных данных $\varphi(s)$ таких, что $\|\varphi, C([-\tau, 0])\| < \Delta$, все компоненты решения начальной задачи (1.1.2) стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

Отметим, что для линейных систем второй пункт определения можно упростить, отказавшись от требования существования Δ, и заменить на следующее:
2^*) любое решение системы (1.1.1) стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Если во втором пункте определения асимптотической устойчивости стремление к нулю идёт с экспоненциальной скоростью, то говорят, что нулевое решение экспоненциально устойчиво.

Определение. Нулевое решение системы (1.1.1) **экспоненциально устойчиво**, если существуют c, γ, $\Delta > 0$ такие, что для любых начальных данных $\varphi(s)$ таких, что $\|\varphi, C([-\tau, 0])\| < \Delta$, для решения начальной задачи (1.1.2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq ce^{-\gamma t}\|\varphi, C([-\tau, 0])\|, \quad t > 0.$$

Основной целью данного параграфа является исследование экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1.1) и получение оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1.1.1) будет использоваться функционал Ляпунова – Красовского, аналогичный функционалу из [22]:

$$v(t, y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int_0^{\tau} \int_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta. \qquad (1.1.3)$$

В следующей теореме получим оценки решений (1.1.2), используя функционал Ляпунова – Красовского.

Теорема 1.1.1. *Пусть существуют матрица* $H = H^* > 0$ *и матрица* $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ *такая, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

при этом матрица

$$P = -HA - A^*H - \tau K(0) - H\left[\int_0^\tau B(s)K^{-1}(s)B^*(s)ds\right]H \tag{1.1.4}$$

положительно определена. Выберем число $k > 0$ *такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{1.1.5}$$

Тогда для решения начальной задачи (1.1.2) справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\| \le \|H^{-1}\|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi), \tag{1.1.6}$$

где

$$\gamma = \min\left\{\frac{p_{min}}{\|H\|}, k\right\}, \tag{1.1.7}$$

$p_{min} > 0$ *— минимальное собственное число матрицы* P,

$$v(0,\varphi) = \langle H\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds d\eta. \tag{1.1.8}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал (1.1.3) на решении $y(t)$ начальной задачи (1.1.2). Дифференцируя $v(t,y)$ по t, получаем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = \left\langle H\left(Ay(t) + \int_{t-\tau}^t B(t-s)y(s)ds\right), y(t)\right\rangle$$

$$+ \left\langle Hy(t), \left(Ay(t) + \int_{t-\tau}^t B(t-s)y(s)ds\right)\right\rangle + \tau\langle K(0)y(t), y(t)\rangle$$

$$-\int_0^\tau \langle K(\eta)y(t-\eta), y(t-\eta)\rangle\, d\eta + \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta.$$

Учитывая, что

$$\int_0^\tau \langle K(\eta)y(t-\eta), y(t-\eta)\rangle\, d\eta = \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds,$$

производную $v(t, y)$ в силу системы (1.1.1) можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = -\int_{t-\tau}^t \left\langle Q(t-s)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds$$

$$+\int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta,$$

где

$$Q(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau}(HA + A^*H) - K(0) & -HB(s) \\ -B^*(s)H & K(s)\end{pmatrix}, \quad s \in [0, \tau].$$

Сформулируем лемму, которая в дальнейшем нам пригодится.

Лемма 1.1.1. *Пусть* $Q_{11} = Q_{11}^*$, Q_{12}, $Q_{22} = Q_{22}^* > 0$ *— квадратные матрицы,* z_1, z_2 *— вектора, тогда имеет место следующее представление:*

$$\left\langle \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}\right\rangle = \langle (Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^*)z_1, z_1\rangle$$

$$+\langle Q_{22}^{-1}(Q_{22}z_2 + Q_{12}^*z_1), (Q_{22}z_2 + Q_{12}^*z_1)\rangle.$$

Представление проверяется непосредственно.

Учитывая, что $K(s)$ — положительно определенная матрица, в силу леммы 1.1.1 и обозначения (1.1.4) имеем следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\langle Py(t), y(t)\rangle + \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta. \quad (1.1.9)$$

Поскольку p_{min} — минимальное собственное значение матрицы P, то в силу неравенства
$$p_{min}\|y(t)\|^2 \leq \langle Py(t), y(t)\rangle$$
получаем
$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -p_{min}\|y(t)\|^2 + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta.$$
Так как $p_{min} > 0$, то, учитывая неравенство
$$\langle Hy(t), y(t)\rangle \leq \|H\|\|y(t)\|^2,$$
будем иметь
$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -\frac{p_{min}}{\|H\|}\langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta.$$
В силу (1.1.5) справедлива оценка
$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -\frac{p_{min}}{\|H\|}\langle Hy(t), y(t)\rangle - k\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, dsd\eta.$$
Учитывая обозначение (1.1.7), имеем неравенство
$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -\gamma v(t,y). \tag{1.1.10}$$
Это эквивалентно
$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}v(t,y)\right) = e^{\gamma t}\frac{d}{dt}v(t,y) + \gamma e^{\gamma t}v(t,y) \leq 0.$$
Интегрируя от 0 от t и учитывая, что $v(0,y) = v(0,\varphi)$, получаем
$$v(t,y) \leq e^{-\gamma t}v(0,\varphi).$$
Отсюда в силу определения функционала (1.1.3) и того, что $H > 0$, вытекает оценка (1.1.6):

$$\|y(t)\|^2 \leq \|H^{-1}\| v(t,y) \leq \|H^{-1}\| e^{-\gamma t} v(0,\varphi).$$

Теорема доказана.

Приведем несколько следствий к данной теореме. Поскольку оценка (1.1.6) характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1, тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

В следующей теореме приведем более точную оценку.

Теорема 1.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1, тогда для решения начальной задачи (1.1.2) справедлива следующая оценка:*

$$\|y(t)\| \leq \|H^{-1}\|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma_H}{2}t} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi),$$

где

$$\gamma_H = \min\left\{p_{min}^H, k\right\}, \tag{1.1.11}$$

$k > 0$ *— такое максимальное число, что выполнено (1.1.5),* $p_{min}^H > 0$ *— минимальное собственное число матрицы* $P_H = H^{-\frac{1}{2}} P H^{-\frac{1}{2}}$, P *определено в (1.1.4),* $v(0,\varphi)$ *определено в (1.1.8).*

Доказательство. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1.1.1, получим (1.1.9):

$$\frac{d}{dt} v(t,y) \leq -\langle Py(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s) y(s), y(s)\right\rangle ds d\eta.$$

В силу следующей оценки

$$\langle Py(t), y(t)\rangle = \left\langle H^{\frac{1}{2}} P_H H^{\frac{1}{2}} y(t), y(t)\right\rangle = \left\langle P_H H^{\frac{1}{2}} y(t), H^{\frac{1}{2}} y(t)\right\rangle$$

$$\geq p_{min}^H \left\langle H^{\frac{1}{2}} y(t), H^{\frac{1}{2}} y(t)\right\rangle = p_{min}^H \langle Hy(t), y(t)\rangle$$

справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt} v(t,y) \leq -p_{min}^H \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s) y(s), y(s)\right\rangle ds d\eta.$$

Используя обозначение (1.1.11), имеем аналог (1.1.10):

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -\gamma_H v(t,y).$$

Повторяя рассуждения после (1.1.10), получим требуемое неравенство.

Теорема доказана.

Также сформулируем для системы (1.1.1) аналог теоремы Н.Н. Красовского (теорема 0.1) [38].

Теорема 1.1.4. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такая, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

при этом матрица

$$Q(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau}(HA + A^*H) - K(0) & -HB(s) \\ -B^*(s)H & K(s) \end{pmatrix}$$

положительно определена при всех $s \in [0,\tau]$. Тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Из леммы 1.1.1, положительной определенности блочной матрицы $Q(s)$ и матрицы $K(s)$ при всех $s \in [0,\tau]$ следует, что матрица P из (1.1.4) положительно определена. Следовательно, выполнены условия теоремы 1.1.2, откуда следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1.1.1).

Теорема доказана.

Пример 1.1.1. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt}y(t) = -ay(t) + \int\limits_{t-1}^{t} b(t-s)y(s)ds, \tag{1.1.12}$$

где $a > 0$, $b(s)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция. Используя теорему 1.1.2, укажем условия на коэффициенты данного уравнения, при которых нулевое решение будет экспоненциально устойчивым. Выберем H и $K(s)$:

$$H = \frac{1}{a}, \quad K(s) = e^{-ks}, \quad s \in [0,1],$$

где $k > 0$, подберем его позже. Из (1.1.4) получим

$$P = 1 - \int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2} e^{ks} ds \geq 1 - e^k \int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2} ds.$$

Несложно заметить, что если

$$\int\limits_0^1 b^2(s) ds < a^2,$$

то всегда можно подобрать $k > 0$ такое, что $P > 0$, например,

$$k = -\frac{1}{2} \ln \left(\int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2} ds \right).$$

Тогда при данных условиях на a и $b(s)$ нулевое решение будет экспоненциально устойчивым. Укажем оценку решений дифференциального уравнения (1.1.12). Для этого введем начальные условия:

$$\begin{cases} y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-1, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases}$$

где $\varphi(s) \in C([-1, 0])$. Тогда получим начальную задачу вида (1.1.2). В силу теоремы 1.1.1 для решения начальной задачи справедлива оценка

$$|y(t)|^2 \leq a e^{-\gamma t} \left(\frac{1}{a} \varphi^2(0) + \int\limits_0^1 \int\limits_{-\eta}^0 e^{ks} \varphi^2(s) ds d\eta \right),$$

где

$$\gamma = \min \left\{ a - \left(\int\limits_0^1 b^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2} \ln \left(\int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2} ds \right) \right\}.$$

§ 1.2. Линейные системы с периодическими коэффициентами

Рассмотрим класс систем линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \tag{1.2.1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T,s) \equiv B(t,s).$$

Основной целью данного параграфа является исследование экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.2.1) и получение оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

При получении результатов будет использоваться функционал Ляпунова – Красовского, аналогичный функционалу из [22]:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, dsd\eta. \tag{1.2.2}$$

Рассмотрим для системы (1.2.1) следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{1.2.3}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Перед формулировкой теоремы об оценке решений начальной задачи (1.2.3) сформулируем критерий асимптотической устойчивости нулевого решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad t > 0, \tag{1.2.4}$$

где $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица [21].

Теорема 1.2.1. *I. Если нулевое решение системы (1.2.4) асимптотически устойчиво, то для любой непрерывной на $[0,T]$ матрицы $C(t)$ существует единственное решение $L(t)$ краевой задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}L + LA(t) + A^*(t)L = -C(t), \quad 0 < t < T, \\ \\ L(0) = L(T), \end{cases} \tag{1.2.5}$$

при этом, если

$$C(t) = C^*(t) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.2.6}$$

то

$$L(t) = L^*(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

II. Пусть матрица $C(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и удовлетворяет условиям (1.2.6). Если краевая задача (1.2.5) имеет эрмитово решение $L(t)$ такое, что $L(0) > 0$, то нулевое решение системы (1.2.4) асимптотически устойчиво.

Теперь сформулируем аналог теоремы 1.1.1 и теоремы 4 из [23].

Теорема 1.2.2. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ и матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$H(0) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau],$$

и предположим, что матрица

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \tau K(0)$$

$$-H(t)\left[\int\limits_0^\tau B^*(t,s)K^{-1}(s)B(t,s)ds\right]H(t) \qquad (1.2.7)$$

положительно определена при $t \in [0,T]$. *Тогда для решения начальной задачи (1.2.3) справедлива следующая оценка:*

$$\|y(t)\| \le \|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma(s)}{2}ds\right) v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi), \qquad (1.2.8)$$

где

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\},$$

$p_{min}(t) > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $P(t)$,

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, dsd\eta. \qquad (1.2.9)$$

Доказательство. В силу положительной определенности матрицы $P(t)$ и того, что $H(0) > 0$, получим, что $H(t)$ — решение специальной краевой задачи (1.2.5) при $t \in [0,T]$, при этом в силу положительной определенности матрицы P из (1.2.7) выполнено условие (1.2.6):

$$-\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) > 0,$$

следовательно, по теореме 1.2.1 $H(t) > 0$ при всех $t \in [0,T]$. Рассмотрим функционал (1.2.2) вдоль решения начальной задачи (1.2.3). Повторим рассуждения доказательства теоремы 1.1.1 и получим аналог (1.1.10):

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\gamma(t)v(t,y).$$

Это эквивалентно

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(\int\limits_0^t \gamma(s)ds\right) v(t,y)\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^t \gamma(s)ds\right)\frac{d}{dt}v(t,y) + \gamma(t)\exp\left(\int_0^t \gamma(s)ds\right)v(t,y) \le 0.$$

Интегрируя от 0 от t и учитывая, что $v(0,y) = v(0,\varphi)$, получаем

$$v(t,y) \le \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)ds\right)v(0,\varphi). \qquad (1.2.10)$$

Отсюда в силу определения функционала (1.2.2) и того, что $H(t) > 0$ при $t \in \mathbb{R}$, вытекает оценка (1.2.8):

$$\|y(t)\|^2 \le \|H^{-1}(t)\|v(t,y) \le \|H^{-1}(t)\|\exp\left(-\int_0^t \gamma(s)ds\right)v(0,\varphi).$$

Теорема доказана.

Отметим, что при выполнении условий теоремы 1.2.2 нулевое решение системы (1.2.1) экспоненциально устойчиво, поскольку оценка (1.2.8) характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности.

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.2, тогда нулевое решение системы (1.2.1) экспоненциально устойчиво.*

Отметим, что в теореме 1.2.2 можно ослабить условия на матрицу $P(t)$ следующим образом.

Теорема 1.2.4. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ и матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$H(t) > 0, \quad t \in [0,T], \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau],$$

и предположим, что выполнено неравенство

$$\int_0^T \gamma_H(s)ds > 0, \qquad (1.2.11)$$

где
$$\gamma_H(t) = \min\left\{p^H_{min}(t), k\right\},$$
$p^H_{min}(t)$ *— минимальное собственное значение матрицы*
$$P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t), \qquad (1.2.12)$$
матрица $P(t)$ *определена в (1.2.7). Тогда для решения начальной задачи (1.2.3) справедлива следующая оценка:*
$$\|y(t)\| \le \|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2}ds\right)v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi), \qquad (1.2.13)$$
где $v(0,\varphi)$ *определено в (1.2.9).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.3.

Если выполняются условия данной теоремы, то нулевое решение системы (1.2.1) экспоненциально устойчиво. Это следует из следующей леммы [92].

Лемма 1.2.1. *Пусть* $x(t)$ *— непрерывная* T*-периодическая функция, тогда*
$$\int\limits_0^t x(s)ds \ge \frac{\delta}{T}t + S, \quad t > 0,$$
где
$$\delta = \int\limits_0^T x(s)ds, \quad S = \min_{\xi\in[0,T]}\left(\int\limits_0^\xi x(s)ds - \frac{\xi}{T}\int\limits_0^T x(s)ds\right).$$
Доказательство. Пусть $t \in ((j-1)T, jT]$, $j \in \mathbb{N}$, тогда
$$\int\limits_0^t x(s)ds = \sum_{i=1}^{j-1}\int\limits_{(i-1)T}^{iT} x(s)ds + \int\limits_{(j-1)T}^{t} x(s)ds.$$

В силу T-периодичности функции $x(t)$ имеем
$$\int\limits_0^t x(s)ds = (j-1)\delta + \int\limits_0^{t-(j-1)T} x(s)ds,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^t x(s)ds = \frac{\delta}{T}t + \int\limits_0^{t-(j-1)T} x(s)ds - \frac{t-(j-1)T}{T}\int\limits_0^T x(s)ds.$$

Учитывая, что $t-(j-1)T \in (0,T]$, получим требуемое.

Лемма доказана.

Теорема 1.2.5. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.4, тогда нулевое решение системы (1.2.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Покажем, что оценка (1.2.13) характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности, следовательно, покажем, что нулевое решение (1.2.1) экспоненциально устойчиво. В силу леммы 1.2.1 и T-периодичности функции $\gamma_H(t)$ из оценки (1.2.13) следует следующее неравенство:

$$\|y(t)\| \le c\|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}}e^{-\Delta t}v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi),$$

где

$$c = \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]}\left(\frac{\xi}{T}\int\limits_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2}ds - \int\limits_0^{\xi}\frac{\gamma_H(s)}{2}ds\right)\right),$$

$$\Delta = \int\limits_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2T}ds.$$

Из (1.2.11) следует, что $\Delta > 0$, что и требовалось показать.

Теорема доказана.

В следующем примере покажем, что в некоторых случаях предпочтительнее использовать теорему 1.2.4, чем теорему 1.2.2.

Пример 1.2.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) + \sqrt{1,8}\sin t\int\limits_{t-1}^t e^{\frac{s-t}{2}}y(s)ds.$$

Проводя соответствие с системой (1.2.1), получим $A(t) \equiv -1$, $B(t,s) = \sqrt{1,8}e^{-\frac{s}{2}}\sin t$, $\tau = 1$, $T = 2\pi$. Построим функционал Ляпунова – Красовского (1.2.2) для данного уравнения с целью исследования экспоненциальной устойчивости. Возьмем $H(t) \equiv 1$, $K(s) = e^{-s}$, тогда функционал (1.2.2) примет вид

$$v(t,y) = y^2(t) + \int\limits_0^1 \int\limits_{t-\eta}^t e^{-t+s} y^2(s)\, ds d\eta.$$

Матрица $P(t)$ из теоремы 1.2.2 примет вид

$$P(t) = 1 - 1,8\sin^2 t.$$

Несложно заметить, что с данным выбором матриц $H(t)$, $K(s)$ условия теоремы 1.2.2 не выполняются, так как $P(t)$ принимает отрицательные значения. Но выполняются условия теоремы 1.2.4. Для этого требуется найти $P_H(t)$, которая в силу выбора матрицы $H(t)$ совпадает с $P(t)$ и своим минимальным собственным значением $p^H_{min}(t)$. Выберем параметр $k = 1$. Тогда найдем $\gamma_H(t)$ из теоремы 1.2.4:

$$\gamma_H(t) = \min\left\{p^H_{min}(t); k\right\} = \min\left\{1 - 1,8\sin^2 t; 1\right\} = 1 - 1,8\sin^2 t.$$

Проверим, выполнено ли условие (1.2.11):

$$\int\limits_0^T \gamma_H(s) ds = \int\limits_0^{2\pi} (1 - 1,8\sin^2 s) ds = 0,2\pi > 0.$$

Условие (1.2.11) выполнено, следовательно, нулевое решение рассматриваемого дифференциального уравнения экспоненциально устойчиво. Укажем оценку решений данного дифференциального уравнения. Для этого введем начальные условия:

$$\begin{cases} y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-1, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases}$$

где $\varphi(s) \in C([-1,0])$. Тогда получим начальную задачу вида (1.2.3). В силу теоремы 1.2.4 для решения начальной задачи справедлива оценка

$$|y(t)|^2 \le e^{-0,1t - 0,45\sin 2t} \left(\varphi^2(0) + \int\limits_0^1 \int\limits_{-\eta}^0 e^s \varphi^2(s) ds d\eta \right).$$

§ 1.3. Линейные системы с возмущениями в коэффициентах

В данном параграфе речь пойдет о робастной устойчивости нулевого решения систем (1.1.1) и (1.2.1). Наряду с системой (1.1.1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A + A_1)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} (B(t-s) + B_1(t-s))y(s)ds, \qquad (1.3.1)$$

где A, A_1 — матрицы размера $n \times n$, $B(s)$, $B_1(s)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами на отрезке $[0, \tau]$.

Определение. Нулевое решение системы (1.1.1) **робастно устойчиво**, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что при любых A_1, $B_1(s)$ таких, что $\|A_1\| < \varepsilon$, $\|B_1(s)\| < \varepsilon$, $s \in [0, \tau]$, нулевое решение системы (1.3.1) устойчиво по Ляпунову.

Отметим, что задача об устойчивости решений дифференциального уравнения с возмущениями является очень важной, поскольку при моделировании реальных процессов коэффициенты матриц, как правило, заданы не точно. Например, они могут быть получены в результате некоторых приближений громоздких выражений или измерений, которые проводятся с небольшими погрешностями, или каких-либо численных расчетов на компьютере. Коэффициенты могут также определяться гипотетически при отсутствии полной информации о процессе.

Рассмотрим также начальную задачу для данной системы:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = (A + A_1)y(t) \\ + \int\limits_{t-\tau}^{t} (B(t-s) + B_1(t-s))y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Пусть при $A_1 = 0$, $B_1(s) \equiv 0$ выполнены условия теоремы 1.1.1, тогда нулевое решение (1.3.1) экспоненциально устойчиво. Нас будут интересовать условия на матрицы возмущений A_1, $B_1(s)$, при которых нулевое решение системы (1.3.1) останется экспоненциально устойчивым. Отметим, что условия теорем 1.1.1 и 1.1.3 одинаковые, но в теореме 1.1.3 полученная оценка решений точнее, чем оценка (1.1.6) в теореме 1.1.1, поэтому при доказательстве соответствующих утверждений будет использоваться теорема 1.1.3. Также будет существенно использоваться функционал Ляпунова – Красовского (1.1.3).

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1. Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для любых матриц возмущений* A_1, $B_1(s)$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\|A_1\| < \varepsilon, \quad \|B_1(s)\| < \varepsilon, \quad s \in [0, \tau],$$

нулевое решение системы (1.3.1) экспоненциально устойчиво.

Данная теорема будет следовать из следующей леммы.

Лемма 1.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1, и матрицы возмущений* A_1, $B_1(s)$ *такие, что*

$$r \le \frac{p^H_{min}}{2}, \tag{1.3.3}$$

где

$$r = 2\|A_1\|\sqrt{\nu(H)}$$
$$+\|H\| \int\limits_0^\tau \|K^{-1}(s)\| \left(2\|B_1(s)\|\|B(s)\| + \|B_1(s)\|^2\right) ds, \tag{1.3.4}$$

$\nu(H) = \|H\|\|H^{-1}\|$ *— число обусловленности матрицы* H, $p^H_{min} > 0$ *— минимальное собственное число матрицы* $P_H = H^{-\frac{1}{2}} P H^{-\frac{1}{2}}$, P *из (1.1.4). Тогда для решения начальной задачи (1.3.2) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \|H^{-1}\|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}t} v^{\frac{1}{2}}(0, \varphi), \tag{1.3.5}$$

где

$$\gamma_1 = \min\left\{\frac{p^H_{min}}{2}, k\right\}, \tag{1.3.6}$$

$v(0, \varphi)$ *определено в (1.1.8), число* $k > 0$ *определено в (1.1.5).*

Доказательство.

Поскольку выполнены условия теоремы 1.1.1, то определен функционал Ляпунова – Красовского (1.1.3). Рассмотрим этот функционал вдоль решения (1.3.2). Повторяя рассуждения доказательства теоремы 1.1.3, получим аналог (1.1.10):

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\widehat{\gamma}_H v(t,y), \tag{1.3.7}$$

где

$$\widehat{\gamma}_H = \min\left\{\widehat{p}^H_{min}, k\right\},$$

$\widehat{p}^H_{min}$ — минимальное собственное значение матрицы

$$\widehat{P}_H = H^{-\frac{1}{2}}\Bigg(-H\left(A+A_1\right) - \left(A+A_1\right)^* H - \tau K(0)$$

$$-H\Bigg[\int\limits_0^\tau \left(B(s)+B_1(s)\right)K^{-1}(s)\left(B(s)+B_1(s)\right)^* ds\Bigg]H\Bigg)H^{-\frac{1}{2}}.$$

Учитывая, что $\|H^{\frac{1}{2}}\| = \|H\|^{\frac{1}{2}}$, несложно проверить, что для матрицы P_H из (1.1.4) и r из (1.3.4) справедливо следующее неравенство:

$$\|\widehat{P}_H - P_H\| = \Bigg\| -H^{\frac{1}{2}}A_1H^{-\frac{1}{2}} + H^{-\frac{1}{2}}A_1^*H^{\frac{1}{2}}$$

$$-H^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_0^\tau \Big(B_1(s)K^{-1}(s)\left(B(s)+B_1(s)\right)^* + B(s)K^{-1}(s)B_1^*(s)\Big)ds\right]H^{\frac{1}{2}}\Bigg\| \le r.$$

Тогда получим

$$\widehat{P}_H \ge P_H - rI.$$

Пусть $\widehat{\nu}$ — собственный вектор матрицы $\widehat{P}_H$, соответствующий собственному значению $\widehat{p}^H_{min}$, тогда имеет место следующее неравенство:

$$\widehat{p}^H_{min}\|\widehat{\nu}\|^2 = \langle \widehat{P}_H\widehat{\nu}, \widehat{\nu}\rangle \ge \langle P_H\widehat{\nu}, \widehat{\nu}\rangle - r\|\widehat{\nu}\|^2 \ge (p^H_{min} - r)\|\widehat{\nu}\|^2.$$

Следовательно,

$$\widehat{p}^H_{min} \ge p^H_{min} - r.$$

Тогда из (1.3.3) вытекает оценка

$$\widehat{p}^H_{min} \ge \frac{p^H_{min}}{2}.$$

Оценим $\widehat{\gamma}_H$, учитывая обозначение (1.3.6):

$$\widehat{\gamma}_H = \min\left\{\widehat{p}^H_{min}, k\right\} \geq \min\left\{\frac{p^H_{min}}{2}, k\right\} = \gamma_1.$$

В силу данного неравенства из (1.3.7) имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -\gamma_1 v(t,y).$$

Домножив на $e^{\gamma_1 t}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma_1 t}v(t,y)\right) \leq 0.$$

Проинтегрируем от 0 до t и учтем, что $v(0,y) = v(0,\varphi)$:

$$v(t,y) \leq v(0,\varphi)e^{-\gamma_1 t}.$$

В силу определения функционала Ляпунова – Красовского (1.1.3) и положительной определенности матрицы H получим оценку (1.3.5).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.3.1. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, где $\varepsilon_1 = \frac{p^H_{min}}{8\sqrt{\nu(H)}}$, ε_2 — положительный корень квадратного полинома $a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 = 0$, где

$$a_1 = \|H\|\int\limits_0^\tau \|K^{-1}(s)\|ds, \quad a_2 = 2\|H\|\int\limits_0^\tau \|K^{-1}(s)\|\|B(s)\|ds, \quad a_3 = \frac{p^H_{min}}{4}.$$

Покажем, что при таком выборе ε выполняется условие (1.3.3). Оценим первое слагаемое в (1.3.4):

$$2\|A_1\|\sqrt{\nu(H)} < 2\sqrt{\nu(H)}\varepsilon \leq 2\sqrt{\nu(H)}\varepsilon_1 = \frac{p^H_{min}}{4}.$$

Теперь оценим интегральное слагаемое в (1.3.4). В силу неравенства $\|B_1(s)\| < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ при $s \in [0,\tau]$ и неотрицательности матричной нормы получим

$$\|H\|\int\limits_0^\tau \|K^{-1}(s)\|\left(2\|B_1(s)\|\|B(s)\| + \|B_1(s)\|^2\right)ds$$

$$\le \max_{\xi\in[0,\tau]} \|B_1(\xi)\|^2 \|H\| \int_0^\tau \|K^{-1}(s)\| ds$$

$$+2 \max_{\xi\in[0,\tau]} \|B_1(\xi)\| \|H\| \int_0^\tau \|K^{-1}(s)\| \|B(s)\| ds < a_1\varepsilon_2^2 + a_2\varepsilon_2 = \frac{p_{min}^H}{4}.$$

Следовательно, условие (1.3.3) выполнено, и справедлива оценка (1.3.5). Из данной оценки следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1.3.1).

Теорема доказана.

Получим аналогичные результаты для класса систем вида (1.2.1). Рассмотрим возмущенную систему:

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A(t) + A_1(t))y(t) + \int_{t-\tau}^{t} (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s)ds, \quad (1.3.8)$$

где $A(t)$, $A_1(t)$ — матрицы с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$, $B_1(t,s)$ — матрицы с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной. Также рассмотрим начальную задачу для (1.3.8):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = (A(t) + A_1(t))y(t) \\ + \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \quad (1.3.9)$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Так как условия в теореме 1.2.4 слабее, чем условия теоремы 1.2.2, то будем опираться именно на теорему 1.2.4 при исследовании робастной устойчивости нулевого решения системы (1.3.8).

Теорема 1.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.4. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых матриц возмущений $A_1(s)$,*

$B_1(t,s)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\|A_1(t)\| < \varepsilon, \quad \|B_1(t,s)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0, \quad s \in [0,\tau],$$

нулевое решение системы (1.3.8) экспоненциально устойчиво.

Теорема следует из следующей леммы.

Лемма 1.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.4, и матрицы возмущений $A_1(s)$, $B_1(t,s)$ такие, что имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^T r(s)ds \leq \int\limits_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2} ds, \tag{1.3.10}$$

где

$$r(t) = 2\|A_1(t)\|\sqrt{\nu(H(t))}$$

$$+\|H(t)\| \int\limits_0^\tau \|K^{-1}(s)\| \big(2\|B_1(t,s)\|\|B(t,s)\| + \|B_1(t,s)\|^2\big) ds, \tag{1.3.11}$$

$\nu(H(t)) = \|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|$ — число обусловленности матрицы $H(t)$, $\gamma_H(t) = \min\{p^H_{min}(t), k\}$, $p^H_{min}(t)$ — минимальное собственное число матрицы $P_H(t)$ из (1.2.12), число $k > 0$ удовлетворяет (1.1.5). Тогда для решения начальной задачи (1.3.9) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left(\max_{\xi \in [0,T]} \int\limits_\xi^T \frac{\gamma_H(s)}{4} ds \right)$$

$$\times \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{4} ds \right) v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi). \tag{1.3.12}$$

Доказательство. Так как доказательство теоремы 1.2.4 проводится по схеме доказательства теоремы 1.2.2, то будем опираться на доказательство теоремы 1.2.2. Рассмотрим функционал $v(t,y)$ вдоль решения начальной задачи (1.3.9). Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в теореме 1.2.2, получим аналог (1.2.10):

$$v(t,y) \leq \exp\left(-\int\limits_0^t \widehat{\gamma}_H(s) ds \right) v(0,\varphi), \tag{1.3.13}$$

где
$$\widehat{\gamma}_H(t) = \min\{\widehat{p}^H_{min}(t), k\},$$
$\widehat{p}^H_{min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы
$$\widehat{P}_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)\biggl(-\frac{d}{dt}H(t) - H(t)(A(t)+A_1(t)) - (A(t)+A_1(t))^*H(t) - \tau K(0)$$
$$-H(t)\left[\int\limits_0^\tau (B(t,s)+B_1(t,s))K^{-1}(s)(B(t,s)+B_1(t,s))^* ds\right]H(t)\biggr)H^{-\frac{1}{2}}(t).$$
Используя обозначение (1.3.11), получим
$$\|\widehat{P}_H(t) - P_H(t)\| \le r(t).$$
Это эквивалентно
$$P_H(t) - r(t)I \le \widehat{P}_H(t) \le P_H(t) + r(t)I.$$
Пусть $\widehat{\nu}$ — собственный вектор матрицы $\widehat{P}_H(t)$, соответствующий собственному значению $\widehat{p}^H_{min}(t)$, тогда имеет место следующее неравенство:
$$\widehat{p}^H_{min}(t)\|\widehat{\nu}\|^2 = \langle \widehat{P}_H(t)\widehat{\nu}, \widehat{\nu}\rangle \ge \langle P_H(t)\widehat{\nu}, \widehat{\nu}\rangle - r(t)\|\widehat{\nu}\|^2 \ge (p^H_{min}(t) - r(t))\|\widehat{\nu}\|^2.$$
Следовательно,
$$\widehat{p}^H_{min}(t) \ge p^H_{min}(t) - r(t).$$
Аналогично показывается, что
$$\widehat{p}^H_{min}(t) \le p^H_{min}(t) + r(t).$$
Тогда имеет место оценка
$$|\widehat{p}^H_{min}(t) - p^H_{min}(t)| \le r(t). \qquad (1.3.14)$$
Оценим $\widehat{\gamma}_H(t)$. Из определения $\widehat{\gamma}_H(t)$ получим
$$\widehat{\gamma}_H(t) = \min\{\widehat{p}^H_{min}(t), k\} = \frac{1}{2}(\widehat{p}^H_{min}(t) + k - |\widehat{p}^H_{min}(t) - k|).$$
Воспользуемся неравенством треугольника
$$\widehat{\gamma}_H(t) \ge \frac{1}{2}\left(p^H_{min}(t) + k - |p^H_{min}(t) - k|\right) - |\widehat{p}^H_{min}(t) - p^H_{min}(t)|$$

$$= \gamma_H(t) - |\widehat{p}^H_{min}(t) - p^H_{min}(t)|.$$

В силу (1.3.14) получим

$$\widehat{\gamma}_H(t) \geq \gamma_H(t) - r(t).$$

Пусть $t \in [(j-1)T, jT)$, $j \in \mathbb{N}$, тогда после интегрирования справедливо неравенство

$$\int\limits_0^t \widehat{\gamma}_H(s)ds \geq \int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2}ds + \int\limits_0^t \left(\frac{\gamma_H(s)}{2} - r(s)\right) ds$$

$$= \int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2}ds + \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{(i-1)T}^{iT} \left(\frac{\gamma_H(s)}{2} - r(s)\right) ds - \int\limits_t^{jT} \left(\frac{\gamma_H(s)}{2} - r(s)\right) ds.$$

Отсюда в силу (1.3.10) и T-периодичности $r(t)$ и $\gamma_H(t)$ следует оценка

$$\int\limits_0^t \widehat{\gamma}_H(s)ds \geq \int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2}ds - \int\limits_{t-(j-1)T}^{T} \left(\frac{\gamma_H(s)}{2} - r(s)\right) ds$$

$$\geq \int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2}ds - \max_{\xi \in [0,T]} \int\limits_\xi^T \frac{\gamma_H(s)}{2}ds.$$

Тогда из (1.3.13) получаем

$$v(t,y) \leq \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2}ds + \max_{\xi \in [0,T]} \int\limits_\xi^T \frac{\gamma_H(s)}{2}ds\right) v(0,\varphi).$$

Повторяя рассуждения теоремы 1.2.2 после (1.2.10), нетрудно показать справедливость оценки (1.3.12).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.3.2. Подберем ε так, чтобы выполнялось (1.3.10). Несложно заметить, что из неравенства

$$T \max_{t \in [0,T]} r(t) \leq \int\limits_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2}ds$$

следует (1.3.10). Выбирать ε будем схожим образом, как и в доказательстве теоремы 1.3.1. Положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{8T \max\limits_{t\in[0,T]} \sqrt{\nu(H(t))}} \int\limits_0^T \gamma_H(s)ds,$$

ε_2 — положительный корень квадратного полинома $a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3 = 0$, где

$$a_1 = \max_{t\in[0,T]} \|H(t)\| \int\limits_0^\tau \|K^{-1}(s)\|ds,$$

$$a_2 = 2\max_{t\in[0,T]} \|H(t)\| \max_{\xi\in[0,T]} \int\limits_0^\tau \|K^{-1}(s)\|\|B(\xi, s)\|ds,$$

$$a_3 = \frac{1}{4T} \int\limits_0^T \gamma_H(s)ds.$$

Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям в теореме 1.3.1, нетрудно показать, что условие (1.3.10) выполнено. Тогда в силу оценки (1.3.12), условия (1.2.11) и T-периодичности $\gamma(s)$ нулевое решение системы (1.3.8) экспоненциально устойчиво.

Теорема доказана.

Отметим, что условие (1.3.10) в лемме 1.3.2 позволяет коэффициентам матриц возмущений $A_1(t)$ и $B_1(t, s)$ быть очень большими на маленькой области. Заметим, что отказ от условия T-периодичности функций $A_1(t)$ и $B_1(t, s)$ по переменной t не влияет на справедливость теоремы 1.3.2.

Пример 1.3.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение с возмущениями следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = (-1 + a_1(t))y(t) + \int\limits_{t-1}^{t} \left(\sqrt{1,8}\,(\sin t)\, e^{\frac{s-t}{2}} + b_1(t, t-s)\right) y(s)ds,$$

где $a_1(t)$ — непрерывная 2π-периодическая функция, $b_1(t, s)$ — непрерывная функция, 2π-периодическая по первой переменной. Отметим, что в случае $a_1(t) \equiv 0$, $b_1(t,s) \equiv 0$ получим пример 1.2.1. Для данного примера был построен функционал Ляпунова – Красовского (1.2.2):

$$v(t,y) = y^2(t) + \int\limits_0^1 \int\limits_{t-\eta}^t e^{-t+s} y^2(s)\, ds d\eta,$$

и доказана экспоненциальная устойчивость нулевого решения. Здесь $H(t) \equiv 1$, $K(s) = e^{-s}$, $P(t) = 1 - 1,8 \sin^2 t$, $k = 1$,

$$\gamma_H(t) = 1 - 1,8 \sin^2 t, \quad \int\limits_0^{2\pi} \gamma_H(s) ds = 0,2\pi.$$

Воспользуемся теоремой 1.3.2 и найдем условия на $a_1(t)$, $b_1(t,s)$, при которых нулевое решение рассматриваемой системы останется экспоненциально устойчивым. Найдем $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{16\pi \max\limits_{t\in[0,2\pi]} \sqrt{\nu(H(t))}} \int\limits_0^{2\pi} \gamma_H(s) ds = \frac{1}{80},$$

ε_2 — положительный корень квадратного полинома

$$(e-1)\lambda^2 + 4\sqrt{1,8}(e^{1/2} - 1)\lambda - \frac{1}{40} = 0,$$

т. е.

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{28,9e - 57,6e^{1/2} + 28,7} - 4\sqrt{1,8}(e^{1/2} - 1)}{2(e-1)} \approx 0,007.$$

Тем самым, $\varepsilon = \varepsilon_2 \approx 0,007$, и согласно теореме 1.3.2 при любых $a_1(t)$ и $b_1(t,s)$ таких, что

$$|a_1(t)| < \varepsilon_2, \quad |b_1(t,s)| < \varepsilon_2, \quad t \geq 0, \quad s \in [0,1],$$

нулевое решение рассматриваемой системы будет экспоненциально устойчивым.

Рассмотрим случай, когда $b_1(t,s) \equiv 0$. Введем начальные условия:

$$\begin{cases} y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-1,0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases}$$

где $\varphi(s) \in C([-1,0])$. Тогда получим начальную задачу вида (1.3.9). Применим лемму 1.3.2. Из (1.3.11) получим

$$r(t) = 2|a_1(t)|,$$

тогда, если

$$2\int_0^{2\pi} |a_1(s)|ds < 0,1\pi,$$

то в силу неравенства

$$\exp\left(\max_{\xi\in[0,2\pi]}\int_\xi^{2\pi}\frac{\gamma_H(s)}{4}ds\right) \le e^{0,05\pi+0,1125} \approx 1,31$$

из (1.3.12) следует оценка

$$|y(t)| \le e^{-0,025t-0,1125\sin 2t}e^{0,05\pi+0,1125}\left(\varphi^2(0)+\int_0^1\int_{-\eta}^0 e^s\varphi^2(s)dsd\eta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Данная оценка характеризует экспоненциальное убывание на бесконечности, следовательно, нулевое решение будет экспоненциально устойчивым. Заметим, что $a_1(t)$ может принимать большие по модулю значения на малом интервале.

Глава 2. Устойчивость нулевого решения систем линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием нейтрального типа

§ 2.1. Автономные линейные системы нейтрального типа

В данной главе изучим экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием. В данном параграфе рассмотрим автономный случай:

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t>0, \tag{2.1.1}$$

где D, A — матрицы размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными на отрезке $[0,\tau]$ элементами. Начальная задача для данной системы будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2.1.2}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau,0])$ — заданная вектор-функция.

Определение. Под **решением** начальной задачи (2.1.2) будем понимать функцию из класса

$$\bigcap_{i \geq 0} C^1((i-1)\tau, i\tau) \bigcap C([-\tau,\infty)),$$

в точках $i\tau$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, функция будет иметь конечные левые и правые производные. При этом при подстановке данной функции в начальную задачу будет выполняться тождество почти всюду. Поскольку система (2.1.1) — линейная, то начальная задача (2.1.2) имеет единственное решение, определенное при всех $t > 0$ (см. [46]).

При получении результатов будет использоваться функционал Ляпунова – Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle H\big(y(t)+Dy(t-\tau)\big), \big(y(t)+Dy(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds. \qquad (2.1.3)$$

Данный функционал является аналогом функционала из [77]. Далее сформулируем и докажем теорему, в которой получим предварительные оценки решения.

Теорема 2.1.1. *Пусть существуют матрица $H=H^*>0$ и матрицы $K(s)=K^*(s)\in C^1([0,\tau])$, $M(s)=M^*(s)\in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$K(s)>0,\quad \frac{d}{ds}K(s)<0,\quad M(s)>0,\quad \frac{d}{ds}M(s)<0,\quad s\in[0,\tau],$$

и предположим, что выполнены условия

$$R=\frac{1}{\tau}(M(\tau)-D^*M(0)D)-D^*K(0)D>0, \qquad (2.1.4)$$

$$P=\tau Q_{11}-\tau Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^*-\int\limits_{0}^{\tau}Q_{13}(s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(s)ds>0, \qquad (2.1.5)$$

где

$$Q_{11}=-\frac{1}{\tau}\left(HA+A^*H+M(0)\right)-K(0),$$

$$Q_{12}=\frac{1}{\tau}(HA+M(0))D+K(0)D,\quad Q_{22}=R, \qquad (2.1.6)$$

$$Q_{13}(s)=-HB(s),\quad Q_{33}(s)=K(s),\quad s\in[0,\tau].$$

Выберем число $k>0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s)+kK(s)\le 0,\quad \frac{d}{ds}M(s)+kM(s)\le 0,\quad s\in[0,\tau]. \qquad (2.1.7)$$

Тогда для решения задачи (2.1.2) справедлива следующая оценка:

$$v(t,y)\le e^{-\gamma t}v(0,\varphi), \qquad (2.1.8)$$

где

$$\gamma=\min\left\{\frac{p_{min}}{\|H\|},k\right\}, \qquad (2.1.9)$$

$p_{min}>0$ — минимальное собственное значение матрицы P,

$$v(0,\varphi)=\langle H(\varphi(0)+D\varphi(-\tau)),(\varphi(0)+D\varphi(-\tau))\rangle$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{-\eta}^{0}\langle K(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\, dsd\eta+\int\limits_{-\tau}^{0}\langle M(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\, ds. \qquad (2.1.10)$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1.2). Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского (2.1.3) на решении $y(t)$. Его производная будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}v(t,y)=\langle (HA+A^*H+\tau K(0)+M(0))\, y(t),y(t)\rangle$$

$$+\langle y(t),A^*HDy(t-\tau)\rangle+\left\langle y(t),H\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t-s)y(s)ds\right\rangle$$

$$+\langle A^*HDy(t-\tau),y(t)\rangle-\langle M(\tau)y(t-\tau),y(t-\tau)\rangle$$

$$+\left\langle y(t-\tau),D^*H\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t-s)y(s)ds\right\rangle+\left\langle H\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t-s)y(s)ds,y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle D^*H\int\limits_{t-\tau}^{t}B(t-s)y(s)ds,y(t-\tau)\right\rangle$$

$$-\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, ds+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle\, dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Перепишем данное тождество в терминах квадратичной формы:

$$\frac{d}{dt}v(t,y)+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle C(t-s)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds$$

$$=\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle\, dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds, \qquad (2.1.11)$$

где

$$C(s)=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}(s)\\ C_{12}^{*} & C_{22} & C_{23}(s)\\ C_{13}^{*}(s) & C_{23}^{*}(s) & C_{33}(s)\end{pmatrix},\quad s\in[0,\tau],$$

$$C_{11}=Q_{11}=-\frac{1}{\tau}\left(HA+A^{*}H+M(0)\right)-K(0),$$

$$C_{12}=-\frac{1}{\tau}A^{*}HD,\quad C_{22}=\frac{1}{\tau}M(\tau),\quad C_{13}(s)=-HB(s),$$

$$C_{23}(s)=-D^{*}HB(s),\quad C_{33}(s)=Q_{33}(s)=K(s).$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего тождества:

$$\left\langle C(s)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle Q(s)\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где

$$Q(s)=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}(s)\\ Q_{12}^{*} & Q_{22} & 0\\ Q_{13}^{*}(s) & 0 & Q_{33}(s)\end{pmatrix},$$

Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, $Q_{13}(s)$, $Q_{33}(s)$ из (2.1.6). Действительно,

$$\left\langle C(s)\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$=\left\langle C(s)\begin{pmatrix} I & -D & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} I & -D & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle.$$

$$=\left\langle\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ -D^{*} & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}C(s)\begin{pmatrix} I & -D & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1+Dz_2\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Перемножив матрицы, получим указанное тождество. Поскольку Q_{22}, $Q_{33}(s) > 0$, $s \in [0, \tau]$, по аналогии с леммой 1.1.1 имеет место следующее представление:

$$\left\langle \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}(s) \\ Q_{12}^{*} & Q_{22} & 0 \\ Q_{13}^{*}(s) & 0 & Q_{33}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= \left\langle \left(Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^{*} - Q_{13}(s) Q_{33}^{-1}(s) Q_{13}^{*}(s) \right) z_1, z_1 \right\rangle$$
$$+ \langle Q_{22}^{-1} (Q_{22} z_2 + Q_{12}^{*} z_1), (Q_{22} z_2 + Q_{12}^{*} z_1) \rangle$$
$$+ \langle Q_{33}^{-1}(s) (Q_{33}(s) z_3 + Q_{13}^{*}(s) z_1), (Q_{33}(s) z_3 + Q_{13}^{*}(s) z_1) \rangle.$$

Следовательно, из (2.1.11) имеем

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \leq - \int_{t-\tau}^{t} \Bigg\langle \Bigg(Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^{*}$$
$$- Q_{13}(t-s) Q_{33}^{-1}(t-s) Q_{13}^{*}(t-s) \Bigg) (y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau)) \Bigg\rangle ds$$
$$+ \int_{0}^{\tau} \int_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta + \int_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} M(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Отсюда в силу определения матрицы P из (2.1.5) получим

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \leq - \langle P(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau)) \rangle$$
$$+ \int_{0}^{\tau} \int_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta + \int_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} M(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Из определения p_{min}, (2.1.7) и (2.1.9) следует справедливость следующего неравенства:

$$\frac{d}{dt} v(t, y) + \gamma v(t, y) \leq 0.$$

Домножив обе части неравенства на $e^{\gamma t}$ и проинтегрировав, получим оценку (2.1.8).

Теорема доказана.

Отметим, что пока не получены оценки на норму решений, которые характеризуют экспоненциальное убывание на бесконечности. Данные оценки будут указаны в следующих теоремах. Заметим, что из положительной определенности матрицы $M(s)$ при $s \in [0, \tau]$ и матрицы R из (2.1.4) следует, что спектр матрицы D лежит в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Действительно, в силу (2.1.7) имеем

$$M(0) = M(\tau) - \int_0^\tau \frac{d}{ds} M(s) ds > M(\tau),$$

тогда из положительной определенности матрицы R получим

$$M(0) - D^* M(0) D - \tau D^* K(0) D$$

$$> M(\tau) - D^* M(0) D - \tau D^* K(0) D = \tau R > 0,$$

следовательно,

$$M(0) - D^* M(0) D > 0.$$

Таким образом, $M(0) = M^*(0)$ — это положительно определенное решение дискретного уравнения Ляпунова

$$M(0) - D^* M(0) D = C, \quad C = C^* > 0.$$

Из этого следует (см. [17], [14]), что спектр матрицы D лежит в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. При этом норма матрицы D может быть больше 1.

Поскольку спектр матрицы D лежит в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, то $\|D^i\| \to 0$ при $i \to +\infty$, следовательно, существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $i \geq l$ будет справедливо неравенство $\|D^i\| < 1$. Данное число l будет использовано в следующей теореме. Также введем обозначения:

$$\Phi = \max_{t \in [-\tau, 0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\Theta = \|H^{-1}\|^{1/2}$$

$$\times \left(2\|H\|(1 + \|D\|^2) + \int_0^\tau \int_0^\eta \|K(s)\| \, ds d\eta + \int_0^\tau \|M(s)\| \, ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.12)$$

Теорема 2.1.2. *Пусть*

а) выполнены условия теоремы 2.1.1,

б) l — такое минимальное число, что $\|D^l\| < 1$.

1. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma\tau} < 1$, то для решения начальной задачи (2.1.2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\times \left(\Theta \left(1 - \|D^l\| e^{\frac{l\gamma\tau}{2}} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \max\{\|D\| e^{\frac{\gamma}{2}\tau}, \ldots, \|D^l\| e^{\frac{\gamma}{2}l\tau}\} \right),$$

где γ определено в (2.1.9).

2. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma\tau} = 1$, то для решения начальной задачи (2.1.2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\times \left(\Theta \left(1 + \frac{t}{l\tau} \right) \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \max\{1, \|D\| e^{\frac{\gamma\tau}{2}}, \ldots, \|D^{l-1}\| e^{\frac{(l-1)\gamma\tau}{2}}\} \right).$$

3. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma\tau} > 1$, то для решения начальной задачи (2.1.2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi \|D^l\|^{\frac{t}{l\tau}-1}$$

$$\times \left(\Theta \left(1 - \|D^l\|^{-1} e^{-\frac{l\gamma\tau}{2}} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \max\{1, \|D\|, \ldots, \|D^{l-1}\|\} \right).$$

Доказательство. Так как

$$\langle H(\varphi(0) + D\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D\varphi(-\tau)) \rangle \leq 2\Phi^2 \|H\| (1 + \|D\|^2),$$

$$\int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle \, ds d\eta \leq \Phi^2 \int_0^\tau \int_0^\eta \|K(s)\| \, ds d\eta,$$

$$\int_{-\tau}^0 \langle M(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle \, ds \leq \Phi^2 \int_0^\tau \|M(s)\| \, ds,$$

то имеем

$$v(0, \varphi) \leq \Phi^2 \left(2\|H(0)\|(1 + \|D\|^2) + \int_0^\tau \int_0^\eta \|K(s)\| \, ds d\eta + \int_0^\tau \|M(s)\| \, ds \right).$$

В силу (2.1.8) и (2.1.12) для решения задачи (2.1.2) справедлива следующая оценка:

$$\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle \le e^{-\gamma t}\Phi^2\frac{\Theta^2}{\|H^{-1}\|}.$$

Поскольку H — эрмитова положительно определенная матрица, то

$$\|y(t)+Dy(t-\tau)\| \le \Phi\Theta e^{-\frac{\gamma t}{2}}.$$

Учитывая неравенство

$$\|y(t)\| \le \|y(t)+Dy(t-\tau)\| + \|Dy(t-\tau)\|,$$

получаем

$$\|y(t)\| \le \Phi\Theta e^{-\frac{\gamma t}{2}} + \|Dy(t-\tau)\|.$$

Оценим, как выше:

$$\|Dy(t-\tau)\| \le \|Dy(t-\tau)+D^2y(t-2\tau)\| + \|D^2y(t-2\tau)\|.$$

Отсюда

$$\|Dy(t-\tau)\| \le \|D\|\Phi\Theta e^{-\frac{\gamma t}{2}} + \|D^2y(t-2\tau)\|,$$

и следовательно,

$$\|y(t)\| \le \Phi\Theta e^{-\frac{\gamma t}{2}} + \|D\|\Phi\Theta e^{-\frac{\gamma(t-\tau)}{2}} + \|D^2y(t-2\tau)\|.$$

Пусть $t \in (i\tau,(i+1)\tau]$, $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Повторяя подобные рассуждения, получим

$$\|y(t)\| \le \Phi\Theta\sum_{j=0}^{i}\|D^j\|e^{-\frac{\gamma(t-j\tau)}{2}} + \|D^{i+1}y(t-(i+1)\tau)\|.$$

Используя определение матричной нормы, легко показать справедливость следующего неравенства:

$$\|y(t)\| \le \Phi\left(\Theta\sum_{j=0}^{i}\|D^j\|e^{-\frac{\gamma(t-j\tau)}{2}} + \|D^{i+1}\|\right),$$

это эквивалентно

$$\|y(t)\| \le \Phi\left(\Theta\sum_{j=0}^{i}\|D^j\|e^{\frac{\gamma}{2}j\tau} + \|D^{i+1}\|e^{\frac{\gamma}{2}t}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \qquad (2.1.13)$$

Случай 1: $\|D^l\|^2 e^{l\gamma\tau} < 1$. Учитывая, что $t \in (i\tau, (i+1)\tau]$, из (2.1.13) следует

$$\|y(t)\| \leq \Phi\left(\Theta\sum_{j=0}^{\infty}\|D^j\|e^{\frac{\gamma}{2}j\tau} + \|D^{i+1}\|e^{\frac{\gamma}{2}(i+1)\tau}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Отсюда имеем

$$\|y(t)\| \leq \Phi\left(\Theta\sum_{j=0}^{\infty}\|D^j\|e^{\frac{\gamma}{2}j\tau} + \max\{\|D\|e^{\frac{\gamma\tau}{2}}, \ldots, \|D^l\|e^{\frac{l\gamma\tau}{2}}\}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Перепишем ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} = \sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \sum_{j=l}^{2l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \sum_{j=2l}^{3l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \ldots$$

и оценим его:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} \leq \sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \|D^l\|e^{\frac{l\gamma\tau}{2}}\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}}$$

$$+(\|D^l\|e^{\frac{l\gamma\tau}{2}})^2\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \ldots.$$

Используя формулу суммы убывающей геометрической прогрессии, получаем требуемую оценку.

Случай 2: $\|D^l\|^2 e^{l\gamma\tau} = 1$. Учитывая, что $t \in (i\tau, (i+1)\tau]$, из (2.1.13) следует

$$\|y(t)\| \leq \Phi\left(\Theta\sum_{j=0}^{i}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \max\{1, \|D\|e^{\frac{\gamma\tau}{2}}, \ldots, \|D^{l-1}\|e^{\frac{(l-1)\gamma\tau}{2}}\}\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Несложно убедиться, что

$$\sum_{j=0}^{i}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} \leq \left(1 + \frac{t}{l\tau}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}}.$$

Отсюда сразу получаем требуемую оценку.

Случай 3: $\|D^l\|^2 e^{l\gamma\tau} > 1$. Пусть $i \in (ml, (m+1)l]$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тогда

$$\sum_{j=0}^{i} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} \leq \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \|D^l\| e^{\frac{l\gamma\tau}{2}} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \dots$$

$$+ (\|D^l\| e^{\frac{l\gamma\tau}{2}})^m \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}},$$

что эквивалентно

$$\sum_{j=0}^{i} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} \leq (\|D^l\| e^{\frac{l\gamma\tau}{2}})^m \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}}$$

$$\times \big(1 + (\|D^l\| e^{\frac{l\gamma\tau}{2}})^{-1} + \dots + (\|D^l\| e^{\frac{l\gamma\tau}{2}})^{-m}\big).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{i} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} \leq (\|D^l\| e^{\frac{l\gamma\tau}{2}})^m (1 - \|D^l\|^{-1} e^{-\frac{l\gamma\tau}{2}})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}}.$$

Поскольку $t \in (ml\tau, (m+1)l\tau]$ и $\|D^l\| > e^{-\frac{l\gamma\tau}{2}}$, из (2.1.13) имеем

$$\|y(t)\| \leq \Phi e^{-\frac{\gamma}{2}t} \Bigg(\Theta (\|D^l\| e^{\frac{l\gamma\tau}{2}})^m (1 - \|D^l\|^{-1} e^{-\frac{l\gamma\tau}{2}})^{-1}$$

$$\times \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}} + \|D^{i+1}\| e^{\frac{\gamma}{2}t} \Bigg).$$

Учитывая, что $i \in (ml, (m+1)l]$, получаем

$$\|D^{i+1}\| \leq \|D^l\|^m \|D^{i+1-ml}\| \leq \|D^l\|^m \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\}.$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \leq \Phi \Bigg(\Theta \|D^l\|^m e^{\frac{ml\gamma\tau}{2}} (1 - \|D^l\|^{-1} e^{-\frac{l\gamma\tau}{2}})^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\| e^{\frac{j\gamma\tau}{2}}$$

$$+ \|D^l\|^m \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\} e^{\frac{\gamma}{2}t} \Bigg) e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Из того, что $t \in (ml\tau, (m+1)l\tau]$, следует

$$\|y(t)\| \le \Phi\Bigg(\Theta\left(1-\|D^l\|^{-1}e^{-\frac{l\gamma\tau}{2}}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma\tau}{2}}$$

$$+\max\{1,\|D\|,\ldots,\|D^{l-1}\|\}\Bigg)\|D^l\|^{\frac{t}{l\tau}-1}.$$

Отсюда вытекает требуемое неравенство.

Теорема доказана.

Теорема 2.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1, тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Отметим, что можно получить более точные оценки решений, как в теореме 1.1.3.

Теорема 2.1.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1. Тогда для решения задачи (2.1.2) справедлива следующая оценка:*

$$v(t,y) \le e^{-\gamma_H t}v(0,\varphi),$$

где

$$\gamma_H = \min\left\{p_{min}^H, k\right\},$$

число $k>0$ определено в (2.1.7), $p_{min}^H > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P_H = H^{-\frac{1}{2}}PH^{-\frac{1}{2}}$, матрица P определена в (2.1.5), $v(0,\varphi)$ из (2.1.10).

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 2.1.1.

Теорема 2.1.5. *Пусть*

а) выполнены условия теоремы 2.1.1,

б) l — такое минимальное число, что $\|D^l\|<1$.

1. Если $\|D^l\|^2e^{l\gamma_H\tau} < 1$, то для решения начальной задачи (2.1.2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi e^{-\frac{\gamma_H}{2}t}$$

$$\times\left(\Theta\left(1-\|D^l\|e^{\frac{l\gamma_H\tau}{2}}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma_H\tau}{2}}+\max\{\|D\|e^{\frac{\gamma_H}{2}\tau},\ldots,\|D^l\|e^{\frac{\gamma_H}{2}l\tau}\}\right).$$

2. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma_H \tau} = 1$, *то для решения начальной задачи (2.1.2) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi e^{-\frac{\gamma_H}{2}t}$$

$$\times\left(\Theta\left(1+\frac{t}{l\tau}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma_H\tau}{2}} + \max\{1, \|D\|e^{\frac{\gamma_H\tau}{2}}, \dots, \|D^{l-1}\|e^{\frac{(l-1)\gamma_H\tau}{2}}\}\right).$$

3. Если $\|D^l\|^2 e^{l\gamma_H \tau} > 1$, *то для решения начальной задачи (2.1.2) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi \|D^l\|^{\frac{t}{l\tau}-1}$$

$$\times\left(\Theta\left(1-\|D^l\|^{-1}e^{-\frac{l\gamma_H\tau}{2}}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\gamma_H\tau}{2}} + \max\{1, \|D\|, \dots, \|D^{l-1}\|\}\right).$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 2.1.2.

В следующем примере будет рассмотрен случай, когда норма матрицы D в системе (2.1.1) больше 1, т. е. $\|D\| > 1$, спектр матрицы D лежит в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, и при этом нулевое решение будет экспоненциально устойчивым.

Пример 2.1.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_1(t) + 2\dfrac{d}{dt}y_2(t-1) = -10y_1(t) + \displaystyle\int\limits_{t-1}^{t} b_1(t-s)y_1(s)ds, \\ \dfrac{d}{dt}y_2(t) = -10y_2(t) + \displaystyle\int\limits_{t-1}^{t} b_2(t-s)y_2(s)ds, \end{cases} \tag{2.1.15}$$

где $b_1(s)$, $b_2(s)$ — непрерывные на $[0,1]$ функции такие, что выполнены неравенства

$$\int\limits_0^1 b_1^2(s)ds < c_1, \quad \int\limits_0^1 b_2^2(s)ds < c_2. \tag{2.1.16}$$

Выясним, при каких c_1 и c_2 нулевое решение данной системы экспоненциально устойчиво. Проводя соответствие с системой (2.1.1), получим, что $\tau = 1$,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} b_1(s) & 0 \\ 0 & b_2(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1].$$

Отметим, что норма матрицы D равна 2, т. е. $\|D\| = 2$. Напомним, что в качестве матричной нормы используется ее спектральная норма. Укажем матрицы H, $K(s)$ и $M(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2.1.1. В качестве матрицы $K(s)$ возьмем следующую матрицу:

$$K(s) = e^{-ks} I, \quad s \in [0, 1],$$

где I — единичная матрица размера 2×2, k — некоторое положительное число, дальше уточним его. В качестве матрицы $M(s)$ возьмем матрицу

$$M(s) = \begin{pmatrix} 7e^{-ks} & 0 \\ 0 & 35e^{-ks} \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 1].$$

Заметим, что

$$M(0) - D^* M(0) D = 7I,$$

т. е. $M(0)$ — решение дискретного уравнения Ляпунова. В качестве матрицы H возьмем решение следующего матричного уравнения:

$$HA + A^* H = -K(0) - M(0) - 8I,$$

тем самым

$$H = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 2,2 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем матрицы из (2.1.4) и (2.1.6):

$$Q_{11} = 8I, \quad Q_{12} = 0, \quad Q_{13}(s) = \begin{pmatrix} -0,8b_1(s) & 0 \\ 0 & -2,2b_2(s) \end{pmatrix},$$

$$Q_{22} = R = \begin{pmatrix} 7e^{-k} & 0 \\ 0 & 35e^{-k} - 32 \end{pmatrix}, \quad Q_{33}(s) = e^{-ks} I, \quad s \in [0, 1].$$

Вычислим матрицу P из (2.1.5):

$$P = \begin{pmatrix} 8 - 0,64 \int\limits_0^1 b_1^2(s)e^{ks}ds & 0 \\ 0 & 8 - 4,84 \int\limits_0^1 b_2^2(s)e^{ks}ds \end{pmatrix}.$$

Осталось подобрать k, c_1, c_2 так, чтобы матрицы R и P были положительно определенными. Условие того, что матрица R положительно определена, эквивалентна тому, что

$$k < \ln \frac{35}{32}.$$

В силу цепочки неравенств

$$\int\limits_0^1 b_i^2(s)e^{ks}ds \le e^k \int\limits_0^1 b_i^2(s)ds \le \frac{35}{32} \int\limits_0^1 b_i^2(s)ds, \quad i = 1, 2,$$

взяв в качестве c_1 и c_2 в (2.1.16) следующие числа

$$c_1 = \frac{80}{7} \approx 11,43, \quad c_2 = \frac{1280}{847} \approx 1,51,$$

получим, что матрица P — положительно определенная. Тем самым условия теоремы 2.1.1 выполнены, следовательно, нулевое решение системы (2.1.15) при указанных константах экспоненциально устойчиво.

§ 2.2. Линейные системы с периодическими коэффициентами нейтрального типа

Данный параграф посвящен изучению экспоненциальной устойчивости нулевого решения систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \qquad (2.2.1)$$

где $D(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными по совокупности переменных и T-периодическими по первой переменной элементами, т. е.

$$D(t) \equiv D(t+T), \quad A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t,s) \equiv B(t+T,s).$$

Рассмотрим начальную задачу для системы (2.2.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) \\ + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2.2.2}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

При исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения будем использовать следующий функционал Ляпунова – Красовского, аналогичный функционалу Ляпунова – Красовского из [24]:

$$v(t,y) = \langle H(t)\big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big), \big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+ \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s,s)y(s), y(s)\rangle \, ds, \tag{2.2.3}$$

где $H(t)$ — гладкая положительно определенная матрица,, $K(s)$, $M(s,\xi)$ — положительно определенные матрицы. Введем обозначения, аналогичные обозначениям в параграфе 2.1:

$$R(t) = \frac{1}{\tau}(M(\tau, t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t)) \\ -D^*(t)K(0)D(t). \tag{2.2.4}$$

В следующей теореме будет предполагаться, что $R(t)$ является положительно определенной матрицей при $t \in [0, T]$, тогда можно корректно определить через $p^H_{min}(t)$ минимальное собственное значение матрицы

$$P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t), \tag{2.2.5}$$

где

$$P(t) = \tau Q_{11}(t) - \tau Q_{12}(t) Q_{22}^{-1}(t) Q_{12}^*(t) - \int\limits_0^\tau Q_{13}(t,s) Q_{33}^{-1}(s) Q_{13}^*(t,s) ds,$$

$$Q_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0,t)\right) - K(0),$$

$$Q_{12}(t) = \frac{1}{\tau}(H(t)A(t) + M(0,t))D(t) + K(0)D(t), \quad Q_{22}(t) = R(t), \tag{2.2.6}$$

$$Q_{13}(t,s) = -H(t)B(t,s), \quad Q_{33}(s) = K(s).$$

Теорема 2.2.1. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t) > 0$, матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ и матрица $M(s,\xi) = M^*(s,\xi)$, $s \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}$, непрерывная по совокупности аргументов, непрерывно дифференцируемая по первой переменной и T-периодическая по второй переменной, при этом*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

$$M(s,\xi) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) < 0, \quad s \in [0,\tau], \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Предположим также, что $R(t)$ является положительно определенной при $t \in [0,T]$. Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau],$$

$$\frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) + kM(s,\xi) \le 0, \quad s \in [0,\tau], \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.2.2) верна следующая оценка:

$$v(t,y) \le \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma_H(s) ds\right) v(0,\varphi), \tag{2.2.7}$$

где

$$\gamma_H(t) = \min\left\{p_{min}^H(t), k\right\}, \tag{2.2.8}$$

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)(\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau))\rangle$$

$$+\int_0^{\tau}\int_{-\eta}^{0}\langle K(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\,dsd\eta+\int_{-\tau}^{0}\langle M(-s,s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\,ds. \qquad (2.2.9)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.1.

Замечание. Функция $\gamma_H(t)$ из (2.2.8) является T-периодической.

Отметим, что выполнение условий теоремы 2.2.1 не влечет экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (2.2.1), поскольку в оценке (2.2.7) $\gamma_H(t)$ может быть отрицательна при всех $t\in[0,T]$.

Заметим, что из условия (2.2.4) и условий на матрицы $K(s)$, $M(s,\xi)$ следует, что нулевое решение системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом

$$z(t)=D(t)z(t-\tau),\quad D(t)\equiv D(t+T), \qquad (2.2.10)$$

экспоненциально устойчиво. Действительно, в силу условий теоремы 2.2.1 матрица $R(t)$ положительно определена, откуда следует

$$M(\tau,t-\tau)-D^*(t)M(0,t)D(t)>0.$$

Из условий на матрицу $M(s,\xi)$ имеем

$$M(\tau,\xi)-M(0,\xi)=\int_0^{\tau}\frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi)ds<0.$$

Из последних двух оценок получим

$$M(0,t-\tau)-D^*(t)M(0,t)D(t)>0.$$

Тем самым $L(t)=M(0,t)>0$ является T-периодическим решением следующего матричного уравнения:

$$L(t-\tau)-D^*(t)L(t)D(t)=C(t),\quad C(t)=C^*(t)>0, \qquad (2.2.11)$$

где элементы матрицы $C(t)$ непрерывны и T-периодичны. Экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (2.2.10) вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.2.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Нулевое решение системы (2.2.10) экспоненциально устойчиво.

2. Существует единственное непрерывное T-периодическое решение $L(t) = L^*(t) > 0$, $t \in [0, T]$, матричного уравнения (2.2.11).

Доказательство. Для системы (2.2.10) рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} z(t) = D(t)z(t-\tau), \quad t > t_0, \\ z(s) = \psi(s), \quad s \in [t_0 - \tau, t_0], \quad \psi(s) \in C([t_0 - \tau, t_0]), \\ z(t_0 + 0) = \psi(t_0). \end{cases} \tag{2.2.12}$$

Введем обозначение

$$\begin{cases} G_0(t) = I, \\ G_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} D(t - j\tau) = D(t) \cdots D(t - (i-1)\tau), \quad i \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{2.2.13}$$

при этом

$$G_i(t)D(t - i\tau) = G_{i+1}(t), \quad G_i(t + T) = G_i(t). \tag{2.2.14}$$

Пусть $t \in ((i-1)\tau + t_0, i\tau + t_0]$, $i \in \mathbb{N}$, тогда решение (2.2.12) можно записать в следующем виде:

$$z(t) = D(t) \cdots D(t - (i-1)\tau)\psi(t - i\tau) = G_i(t)\psi(t - i\tau). \tag{2.2.15}$$

Докажем, что из утверждения 1) следует утверждение 2).
Экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (2.2.10) означает, что существуют константы $c, \delta > 0$ такие, что для любой вектор-функции $\psi(s) \in C([t_0 - \tau, t_0])$ для решения начальной задачи (2.2.12) справедлива следующая оценка:

$$\|z(t)\| \le ce^{-\delta(t-t_0)} \max_{s \in [t_0 - \tau, t_0]} \|\psi(s)\|, \quad t > t_0.$$

Учитывая (2.2.15), при $t \in ((i-1)\tau + t_0, i\tau + t_0]$, $i \in \mathbb{N}$, имеем

$$\|z(t)\| = \|G_i(t)\psi(t - i\tau)\| \le ce^{-\delta(t-t_0)} \max_{s \in [t_0 - \tau, t_0]} \|\psi(s)\|.$$

Возьмем в качестве вектор-функции $\psi(s) \equiv z_0$, где $z_0 \neq 0$, тогда перепишем оценку

$$\frac{\|G_i(t)z_0\|}{\|z_0\|} \le ce^{-\delta(t-t_0)}, \quad t \in ((i-1)\tau + t_0, i\tau + t_0].$$

В силу произвольности z_0 получаем оценку на норму матрицы $G_i(t)$:

$$\|G_i(t)\| \le ce^{-\delta(t-t_0)}, \quad t \in ((i-1)\tau + t_0, i\tau + t_0].$$

Следовательно,

$$\|G_i(t)\| \le ce^{-\delta\tau(i-1)}. \tag{2.2.16}$$

В силу произвольности t_0 оценка верна для всех t.
Теперь, имея данную оценку, приведем формулу решения матричного уравнения (2.2.11):

$$L(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} G_j^*(t + j\tau)C(t + (j+1)\tau)G_j(t + j\tau). \tag{2.2.17}$$

Докажем, что ряд справа сходится равномерно:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|G_j^*(t + j\tau)C(t + (j+1)\tau)G_j(t + j\tau)\|$$

$$\le \sum_{j=0}^{+\infty} \|C(t + (j+1)\tau)\| \|G_j(t + j\tau)\|^2.$$

Учитывая оценку (2.2.16), T-периодичность и непрерывность элементов матрицы $C(t)$, имеем

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|G_j^*(t + j\tau)C(t + (j+1)\tau)G_j(t + j\tau)\|$$

$$\le c^2 \max_{s\in[0,T]} \|C(s)\| \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-2\delta\tau(j-1)},$$

что и требовалось доказать. Положительная определенность матрицы $L(t)$ следует из положительной определенности матрицы $C(t)$ и (2.2.17). Осталось теперь убедиться, что формула (2.2.17) действительно является решением (2.2.11). Распишем первое слагаемое в (2.2.11):

$$L(t-\tau) = \sum_{j=0}^{+\infty} G_j^*(t + (j-1)\tau)C(t + j\tau)G_j(t + (j-1)\tau)$$

$$= C(t) + \sum_{j=1}^{+\infty} G_j^*(t + (j-1)\tau) C(t + j\tau) G_j(t + (j-1)\tau).$$

Это эквивалентно

$$L(t-\tau) = C(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} G_{j+1}^*(t + j\tau) C(t + (j+1)\tau) G_{j+1}(t + j\tau).$$

Из (2.2.14) получим

$$L(t-\tau) = C(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} D^*(t) G_j^*(t + j\tau) C(t + (j+1)\tau) G_j(t + j\tau) D(t)$$

$$= C(t) + D^*(t) L(t) D(t).$$

Тем самым показали существование решения (2.2.11).

Докажем единственность решения от противного. Пусть $L_1(t)$ и $L_2(t)$ — два различных T-периодических решения (2.2.11), тогда $L_0(t) = L_1(t) - L_2(t) \not\equiv 0$ — T-периодическое решение следующего уравнения:

$$L_0(t-\tau) - D^*(t) L_0(t) D(t) = 0.$$

Это эквивалентно

$$L_0(t) = D^*(t+\tau) L_0(t+\tau) D(t+\tau).$$

Воспользовавшись этой формулой i раз, получим

$$L_0(t) = D^*(t+\tau) \cdots D^*(t+i\tau) L_0(t+i\tau) D(t+i\tau) \cdots D(t+\tau)$$

$$= G_i^*(t+i\tau) L_0(t+i\tau) G_i(t+i\tau).$$

Оценим норму матрицы $L_0(t)$, используя (2.2.16):

$$\|L_0(t)\| \le \|L_0(t+i\tau)\| c^2 e^{-2\delta\tau(i-1)}.$$

Устремив i к бесконечности, получим, что $L_0(t) \equiv 0$ — противоречие. Единственность доказана.

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 1).

Пусть $L(t)$ является положительно определенным T-периодическим решением (2.2.11). Рассмотрим следующую функцию вдоль решения (2.2.12) при $t \in ((i-1)\tau + t_0, i\tau + t_0]$, $i \in \mathbb{N}$:

$$\langle L(t) z(t), z(t) \rangle = \langle L(t) D(t) z(t-\tau), D(t) z(t-\tau) \rangle$$

$$= \langle D^*(t)L(t)D(t)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle.$$

Из этого следует

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle$$
$$= \langle L(t-\tau)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle - \langle C(t)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle. \qquad (2.2.18)$$

Поскольку $C(t)$, $L(t-\tau)$ — положительно определенные эрмитовы матрицы, то справедливо неравенство

$$\langle C(t)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle$$
$$= \langle L^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)C(t)L^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)(L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)z(t-\tau)), (L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)z(t-\tau))\rangle$$
$$\geq \|L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)C^{-1}(t)L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)\|^{-1}\langle L(t-\tau)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle.$$

Тогда из (2.2.18) имеем

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle \leq \Big(1 - \|L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)C^{-1}(t)L^{\frac{1}{2}}(t-\tau)\|^{-1}\Big)$$
$$\times\langle L(t-\tau)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle.$$

Так как матрица $L(t)$ положительно определена, то выражение в правой части в скобках неотрицательно. Введем обозначение:

$$\alpha = \max_{s\in[0,T]}(1 - \|L^{\frac{1}{2}}(s-\tau)C^{-1}(s)L^{\frac{1}{2}}(s-\tau)\|^{-1}) < 1. \qquad (2.2.19)$$

Учитывая данное обозначение, имеем

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle \leq \alpha\langle L(t-\tau)z(t-\tau), z(t-\tau)\rangle.$$

Повторим подобные рассуждения несколько раз:

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle \leq \alpha^i\langle L(t-i\tau)z(t-i\tau), z(t-i\tau)\rangle,\ t \in ((i-1)\tau + t_0, i\tau + t_0].$$

Поскольку $z(t)$ — решение (2.2.12), получим

$$\langle L(t)z(t), z(t)\rangle \leq \alpha^i\langle L(t-i\tau)\psi(t-i\tau), \psi(t-i\tau)\rangle,\ t \in ((i-1)\tau + t_0, i\tau + t_0].$$

В силу неравенств $\frac{1}{\|L^{-1}(t)\|}\|z_0\|^2 \leq \langle L(t)z_0, z_0\rangle \leq \|L(t)\|\|z_0\|^2$ имеем

$$\|z(t)\|^2 \leq \alpha^i\|L^{-1}(t)\|\|L(t-i\tau)\|\|\psi(t-i\tau)\|^2.$$

Используя то, что $t \in ((i-1)\tau + t_0, i\tau + t_0]$, получим

$$\|z(t)\|^2 \le \beta^2 \alpha^{(t-t_0)/\tau} \max_{s\in[t_0-\tau,t_0]} \|\psi(s)\|^2,$$

где

$$\beta = \sqrt{\max_{s\in[0,T]} \|L(s)\| \max_{s\in[0,T]} \|L^{-1}(s)\|}.$$

Это эквивалентно

$$\|z(t)\| \le \beta e^{\frac{\ln\alpha}{2\tau}(t-t_0)} \max_{s\in[t_0-\tau,t_0]} \|\psi(s)\|. \tag{2.2.20}$$

Так как $\alpha < 1$, то из оценки выше следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения (2.2.10).

Теорема доказана.

Замечание 1. Из (2.2.16) в силу определения $G_i(t)$, оценки (2.2.20), обозначений (2.2.19) имеем

$$\|G_i(t)\| = \|D(t)\cdots D(t-(i-1)\tau)\| \le \beta e^{\frac{\ln\alpha}{2}(i-1)} = \beta\alpha^{\frac{i-1}{2}}. \tag{2.2.21}$$

Замечание 2. Рассмотрим случай $T = \tau$. Зафиксируем $t \in [0,\tau)$, тогда система (2.2.10) примет следующий вид:

$$z_i = \mathfrak{D} z_{i-1},$$

где $\mathfrak{D} = D(t)$, система (2.2.11) перейдет в континуум дискретных уравнений Ляпунова при каждом $t \in [0,\tau)$:

$$L - \mathfrak{D}^* L \mathfrak{D} = C,$$

и теорема 2.2.2 вытекает из критерия Ляпунова об асимптотической устойчивости для разностных уравнений.

Замечание 3. Рассмотрим случай $T/\tau = m/n$, m, $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $t \in [0, \tau/n)$, тогда система (2.2.10) примет следующий вид:

$$z_i = \mathfrak{D}_i z_{i-1}, \quad \mathfrak{D}_i = D(t - i\tau), \quad \mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_{i+m},$$

система (2.2.11) перейдет в континуум разностных уравнений Ляпунова при каждом $t \in [0,\tau/n)$:

$$L_{i-1} - \mathfrak{D}_i^* L_i \mathfrak{D}_i = C_i, \quad C_i = C_i^* > 0, \quad C_1 = C_{m+1},$$

и теорема 2.2.2 вытекает из работы [78].

В теореме 2.2.2 можно ослабить условия в пункте 2.

Следствие 2.2.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1. Нулевое решение системы (2.2.10) экспоненциально устойчиво.
2. У матричного уравнения (2.2.11) существует непрерывное T-периодическое решение $L(t) = L^*(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Введем обозначения

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\Theta = \max_{s\in[0,T]} \|H^{-1}(s)\|^{1/2}$$

$$\times \left(2\|H(0)\|(1 + \|D(0)\|^2) + \int\limits_0^\tau \int\limits_0^\eta \|K(s)\|\, ds d\eta + \int\limits_0^\tau \|M(s, -s)\|\, ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$c = \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]} \left(\frac{\xi}{T} \int\limits_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2} ds - \int\limits_0^\xi \frac{\gamma_H(s)}{2} ds \right) \right),$$

где функция $\gamma_H(t)$ определена в (2.2.8).

Как отмечалось выше (после доказательства теоремы 2.2.1), при выполнении условий теоремы 2.2.1 $M(0, t)$ — это T-периодическое положительно определенное решение (2.2.11), следовательно, имеет место оценка вида (2.2.21):

$$\|G_i(t)\| = \|D(t) \cdots D(t - (i-1)\tau)\| \le \beta_M \alpha_M^{\frac{i-1}{2}}, \tag{2.2.22}$$

где

$$\beta_M = \sqrt{\max_{s\in[0,T]} \|M(0, s)\| \max_{s\in[0,T]} \|M^{-1}(0, s)\|},$$

$$\alpha_M = \max_{s\in[0,T]} \Big(1 - \Big\| M^{\frac{1}{2}}(0, s - \tau)\big(M(0, s - \tau) - D^*(s)M(0, s)D(s)\big)^{-1}$$

$$\times M^{\frac{1}{2}}(0, s - \tau) \Big\|^{-1} \Big).$$

При этом $\alpha_M \in [0,1)$. В следующей теореме установим оценки решения начальной задачи (2.2.2).

Теорема 2.2.3. *Пусть*
а) выполнены условия теоремы 2.2.1,
б) $\Delta = \int_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2T} ds > 0$.

1. Если $\alpha_M^{1/2} e^{\Delta\tau} < 1$, *то для решения начальной задачи (2.2.2) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi\beta_M \alpha_M^{-1/2} e^{-\Delta t} \Theta c \left(1 - \alpha_M^{1/2} e^{\Delta\tau}\right)^{-1}.$$

2. Если $\alpha_M^{1/2} e^{\Delta\tau} = 1$, *то для решения начальной задачи (2.2.2) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi\beta_M \alpha_M^{-1/2} e^{-\Delta t} \left(\frac{\Theta c}{\tau} t + \Theta c + 1\right).$$

3. Если $\alpha_M^{1/2} e^{\Delta\tau} > 1$, *то для решения начальной задачи (2.2.2) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi\beta_M \alpha_M^{-1/2} \alpha_M^{\frac{1}{2\tau}t} \left(\Theta c \left(1 - \alpha_M^{-1/2} e^{-\Delta\tau}\right)^{-1} + \alpha_M^{1/2}\right).$$

Доказательство.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2.1.2, из (2.2.7) получим

$$\langle H(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), (y(t) + D(t)y(t-\tau))\rangle$$
$$\leq \exp\left(-\int_0^t \gamma_H(s)ds\right) \Phi^2 \frac{\Theta^2}{\|H^{-1}(t)\|}.$$

Поскольку $H(t)$ — эрмитова положительно определенная матрица, то

$$\|y(t) + D(t)y(t-\tau)\| \leq \Phi\Theta \exp\left(-\int_0^t \frac{\gamma_H(s)}{2} ds\right).$$

Воспользуемся леммой 1.2.1:

$$\|y(t) + D(t)y(t-\tau)\| \le \Phi\Theta c e^{-\Delta t}.$$

Пусть $t \in (i\tau, (i+1)\tau]$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2.1.2, получим аналог (2.1.13):

$$\|y(t)\| \le \Phi \left(\Theta c \sum_{j=0}^{i} \|G_j(t)\| e^{\Delta j \tau} + \|G_{i+1}(t)\| e^{\Delta t} \right) e^{-\Delta t},$$

где $G_i(t)$ определено в (2.2.13). В силу (2.2.22) имеем

$$\|y(t)\| \le \beta_M \alpha_M^{-\frac{1}{2}} \Phi \left(\Theta c \sum_{j=0}^{i} \alpha_M^{\frac{j}{2}} e^{\Delta j \tau} + \alpha_M^{\frac{i+1}{2}} e^{\Delta t} \right) e^{-\Delta t}.$$

Доказательства трех случаев аналогичны доказательству в теореме 2.1.2.

Теорема доказана.

Замечание. Условия а) и б) теоремы 2.2.3 являются достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.2.1).

Сформулируем следствие, аналог теоремы 1.2.3.

Теорема 2.2.4. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ такая, что $H(0) > 0$, матрица $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$ и матрица $M(s,\xi) = M^*(s,\xi)$, непрерывная по совокупности аргументов, непрерывно дифференцируемая по первой переменной и T-периодическая по второй переменной, при этом*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

$$M(s,\xi) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}M(s,\xi) < 0, \quad s \in [0,\tau], \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Пусть выполнено (2.2.4) и матрица

$$P(t) = \tau Q_{11}(t) - \tau Q_{12}(t) Q_{22}^{-1}(t) Q_{12}^*(t) - \int_0^{\tau} Q_{13}(t,s) Q_{33}^{-1}(s) Q_{13}^*(t,s) ds,$$

где $Q_{11}(t)$, $Q_{12}(t)$, $Q_{22}(t)$, $Q_{13}(t,s)$, $Q_{33}(s)$ из (2.2.6), положительно определены при $t \in [0,T]$. Тогда нулевое решение системы (2.2.1) экспоненциально устойчиво.

Отметим, что при выполнении условий теорем 2.2.3, 2.2.4 спектр матрицы $D(t)$ при $t \in [0,T]$ не обязательно должен находится внутри единичного круга $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Это продемонстрирует следующий пример.

Пример 2.2.1. Рассмотрим следующее уравнение нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) + \sqrt{2}y\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin^2 t\right) = -20y(t) + \int\limits_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} b(t,t-s)y(s)ds, \quad (2.2.23)$$

где $b(t,s)$ — непрерывная π-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\max_{t\in[0,\pi]} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b^2(t,s)ds < c. \quad (2.2.24)$$

Найдем c, при котором нулевое решение данного уравнения экспоненциально устойчиво. Проводя соответствие с системой (2.2.1), получим

$$T = \pi, \quad \tau = \frac{\pi}{2},$$

$$D(t) = \sqrt{2}\sin^2 t, \quad A(t) = -20, \quad B(t,s) = b(t,s).$$

Отметим, что при некоторых t функция $D(t)$ больше единицы. Подберем матрицы, чтобы выполнялись условия теоремы 2.2.4:

$$K(s) = 2e^{-ks}, \quad M(s,t) = 4\pi L(t)e^{-ks}, \quad H(t) = 0,2\pi L(t) + 0,05\pi,$$

$$s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad t \in [0,\pi],$$

где $k > 0$ — число, условия на которое уточним ниже,

$$L(t) = \frac{1 + 2\cos^4 t}{1 - 4\sin^4 t\cos^4 t} \quad (2.2.25)$$

является π-периодическим положительным решением задачи (2.2.11), а именно

$$L\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - 2L(t)\sin^4 t = 1.$$

Приведем некоторые свойства функции $L(t)$ в следующей лемме.

Лемма 2.2.1. *Для функции (2.2.25) справедливы следующие две оценки:*

$$1 \le L(t) \le 3, \quad \left|\frac{d}{dt}L(t)\right| \le 8\sqrt{3}, \quad t \in [0, \pi].$$

Доказательство. Вычислим производную функции $L(t)$:

$$\frac{d}{dt}L(t) = \frac{8\sin t\cos^3 t}{(1 - 4\sin^4 t\cos^4 t)^2}$$
$$\times(-2\sin^4 t + 4\sin^2 t\cos^6 t + 2\sin^2 t\cos^2 t - 1).$$

Введем обозначения

$$L_1(t) = 8\sin t\cos^3 t,$$
$$L_2(t) = \frac{1}{(1 - 4\sin^4 t\cos^4 t)^2},$$
$$L_3(t) = -2\sin^4 t + 4\sin^2 t\cos^6 t + 2\sin^2 t\cos^2 t - 1,$$

при этом $\frac{d}{dt}L(t) = L_1(t)L_2(t)L_3(t)$. Покажем, что $L_3(t)$ всегда отрицательна. Для этого воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\begin{aligned} L_3(t) &= -2\sin^4 t + 4\sin^2 t\cos^6 t + 2\sin^2 t\cos^2 t - (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 \\ &= -3\sin^4 t + 4\sin^2 t\cos^6 t - \cos^4 t(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 \\ &= -3(1 - \cos^2 t)^2 - \cos^4 t(1 - 2\cos^2 t)^2. \end{aligned}$$

Из данного представления нетрудно заметить, что $L_3(t)$ всегда отрицательна. Следовательно, своего наибольшего и наименьшего значения функция $L(t)$ достигает в тех точках, где $L_1(t)$ равна нулю, т. е. в точках $t = \frac{\pi i}{2}$, $i \in \mathbb{N}$. Поскольку $L(t)$ является π-периодической и

$$L(0) = 1, \quad L\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3,$$

то первое неравенство в формулировке леммы выполнено.

Покажем справедливость второго неравенства. Оценим модули функций $L_1(t)$, $L_2(t)$ и $L_3(t)$. Найдем критические точки функции $L_1(t)$, для этого найдем ее производную:

$$\frac{d}{dt}L_1(t) = 8\cos^4 t - 24\sin^2 t\cos^2 t = 24\cos^4 t\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg} t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{tg} t\right).$$

В точках $t = \frac{\pi}{6}$, $t = -\frac{\pi}{6}$ функция $L_1(t)$ достигает своего максимума и минимума, следовательно,

$$|L_1(t)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Оценим $L_2(t)$:

$$|L_2(t)| = L_2(t) = \frac{1}{(1 - \frac{\sin^4 2t}{4})^2} \leq \frac{16}{9}.$$

Теперь оценим модуль функции $L_3(t)$. Заметим, что максимальное и минимальное значения функции $L_3(t)$ совпадают с минимальным и максимальным значениями функции

$$g(\lambda) = -3(1-\lambda)^2 - \lambda^2(1-2\lambda)^2$$

на отрезке $[0, 1]$. Найдем производную:

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda) = 6 - 8\lambda + 12\lambda^2 - 16\lambda^3 = (1 + 2\lambda^2)(6 - 8\lambda).$$

Очевидно, что функция $g(\lambda)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо при $\lambda = \frac{3}{4}$, либо на концах отрезка. Посчитаем значения функции в этих точках:

$$g(0) = -3, \quad g\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{21}{64}, \quad g(1) = -1,$$

следовательно,

$$|L_3(t)| \leq 3.$$

Отсюда получаем справедливость второго неравенства в формулировке леммы.

Лемма доказана.

Теперь вычислим соответствующие матрицы из (2.2.4), (2.2.6):

$$Q_{11}(t) = 8L(t) + 2 - 0,4\frac{d}{dt}L(t), \quad Q_{12}(t) = 0,$$

$$Q_{22}(t) = R(t) = 8 - 8L\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(1 - e^{-\frac{k\pi}{2}}) - 4\sin^4 t,$$

$$Q_{13}(t,s) = -\pi b(t,s)(0,2L(t) + 0,05), \quad Q_{33}(s) = 2e^{-ks}.$$

Чтобы получить экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (2.2.23) из условия теоремы 2.2.4, достаточно показать, что $R(t)$ и $P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t)$ — положительные при $t \in [0, \pi]$. В силу леммы 2.2.1 справедлива оценка

$$R(t) \geq 4 - 8L\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(1 - e^{-\frac{k\pi}{2}}) \geq 4 - 24(1 - e^{-\frac{k\pi}{2}}).$$

Следовательно, $R(t) > 0$, если

$$k < \frac{2}{\pi}\ln\frac{6}{5}.$$

Вычислим и оценим $P_H(t)$, используя лемму 2.2.1:

$$P_H(t) = 20 - \frac{2\frac{d}{dt}L(t)}{2L(t) + 0,5} - \pi(0,2L(t) + 0,05)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b^2(t,s)\frac{e^{ks}}{2}ds$$

$$\geq 20 - \frac{32\sqrt{3}}{5} - 0,325\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b^2(t,s)e^{ks}ds$$

$$\geq \frac{4}{5}\left(25 - 8\sqrt{3}\right) - 0,325\pi e^{\frac{k\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b^2(t,s)ds.$$

В силу условия на k получим

$$P_H(t) \geq \frac{4}{5}\left(25 - 8\sqrt{3}\right) - 0,39\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b^2(t,s)ds.$$

Учитывая, что первое слагаемое в правой части — положительное, получим, что если

$$c = \frac{80}{39\pi}\left(25 - 8\sqrt{3}\right) \approx 7,27$$

в оценке (2.2.24), то нулевое решение системы (2.2.23) будет экспоненциально устойчивым.

§ 2.3. Линейные системы нейтрального типа с возмущениями в коэффициентах

В данном параграфе изучим робастную устойчивость нулевого решения линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием. Вначале рассмотрим возмущенный случай системы (2.1.1):

$$\frac{d}{dt}(y(t) + \widehat{D}y(t-\tau)) = \widehat{A}y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \widehat{B}(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \tag{2.3.1}$$

где

$$\widehat{D} = D + D_1, \quad \widehat{A} = A + A_1, \quad \widehat{B}(s) = B(s) + B_1(s), \quad s \in [0, \tau],$$

D, A, $B(s)$ — матрицы из системы (2.1.1), D_1, A_1 — матрицы возмущений, $B_1(s)$ — матрица возмущений с непрерывными коэффициентами. Начальная задача для данной системы будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + \widehat{D}y(t-\tau)) = \widehat{A}y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} \widehat{B}(t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2.3.2}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых матриц возмущений D_1 A_1, $B_1(s)$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\|D_1\| < \varepsilon, \quad \|A_1\| < \varepsilon, \quad \|B_1(s)\| < \varepsilon, \quad s \in [0, \tau],$$

нулевое решение системы (2.3.1) экспоненциально устойчиво.

Так как выполнены условия теоремы 2.1.1, то определены матрицы H, $K(s)$, $M(s)$ из данной теоремы. Введем аналог обозначений (2.1.4), (2.1.6):

$$\widehat{Q}_{11} = -\frac{1}{\tau}\left(H(A + A_1) + (A + A_1)^* H + M(0)\right) - K(0),$$

$$\widehat{Q}_{12} = \frac{1}{\tau}(H(A+A_1) + M(0))(D+D_1) + K(0)(D+D_1), \qquad (2.3.3)$$

$$\widehat{Q}_{22} = \widehat{R} = \frac{1}{\tau}(M(\tau) - (D+D_1)^* M(0)(D+D_1)) - (D+D_1)^* K(0)(D+D_1),$$

$$\widehat{Q}_{13}(s) = -H(B(s)+B_1(s)), \quad \widehat{Q}_{33}(s) = Q_{33}(s) = K(s), \quad s \in [0,\tau].$$

Также введем аналог матрицы P из (2.1.5):

$$\widehat{P} = \tau\widehat{Q}_{11} - \tau\widehat{Q}_{12}\widehat{Q}_{22}^{-1}\widehat{Q}_{12}^* - \int\limits_0^\tau \widehat{Q}_{13}(s)\widehat{Q}_{33}^{-1}(s)\widehat{Q}_{13}^*(s)ds. \qquad (2.3.4)$$

Отметим, что в определение матрицы $\widehat{P}$ входит слагаемое $\widehat{Q}_{22}^{-1} = \widehat{R}^{-1}$, которое будет существовать в силу условий на матрицу возмущений D_1 в следующей лемме. Данная теорема будет следовать из следующей леммы и того, что

$$\|\widehat{P} - P\| \to 0 \quad \text{при} \quad \|D_1\| + \|A_1\| + \max_{s\in[0,\tau]} \|B_1(s)\| \to 0,$$

где матрица P из (2.1.5).

Лемма 2.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1, и матрицы возмущений D_1 A_1, $B_1(s)$ удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$\|D_1\| < \left(\|D\|^2 + \frac{\tau}{\|R^{-1}\|(\tau\|K(0)\| + \|M(0)\|)}\right)^{\frac{1}{2}} - \|D\|, \qquad (2.3.5)$$

$$\|\widehat{P} - P\| \le \frac{p_{min}}{2}, \qquad (2.3.6)$$

R определена в (2.1.4), $p_{min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы P из (2.1.5). Тогда для решения начальной задачи (2.3.2) справедлива оценка

$$v(t,y) \le e^{-\gamma_1 t} v(0,\varphi), \qquad (2.3.7)$$

где

$$\gamma_1 = \min\left\{\frac{p_{min}}{2\|H\|}, k\right\}, \qquad (2.3.8)$$

число $k > 0$ удовлетворяет (2.1.7), $v(0,\varphi)$ определено в (2.1.10).

Доказательство леммы. Доказательство данной леммы аналогично доказательству теоремы 2.1.1. Нужно показать, что при выполнении неравенств (2.3.5) и (2.3.6) матрицы $\widehat{R}$ и $\widehat{P}$ положительно определены. Вначале покажем, что если выполняется неравенство (2.3.5), то матрица $\widehat{R}$ положительно определена. Имеет место следующее неравенство:

$$\widehat{R} = R - \frac{1}{\tau} D_1^*(\tau K(0) + M(0))D - \frac{1}{\tau} D^*(\tau K(0) + M(0))D_1$$

$$-\frac{1}{\tau} D_1^*(\tau K(0) + M(0))D_1 \geq R - \frac{1}{\tau}\|D_1\|^2(\tau\|K(0)\| + \|M(0)\|)I$$

$$-\frac{2}{\tau}\|D\|\|D_1\|(\tau\|K(0)\| + \|M(0)\|)I.$$

Поскольку R — положительно определенная эрмитова матрица, и $\|R^{-1}\|^{-1} > 0$ — минимальное собственное значение данной матрицы, то справедлива следующая оценка:

$$\widehat{R} \geq \|R^{-1}\|^{-1} I - \frac{1}{\tau}\|D_1\|^2(\tau\|K(0)\| + \|M(0)\|)I$$

$$-\frac{2}{\tau}\|D\|\|D_1\|(\tau\|K(0)\| + \|M(0)\|)I.$$

Положительная определенность правой части равносильна следующему неравенству:

$$\|D_1\|^2 + 2\|D\|\|D_1\| - \frac{1}{\tau\|R^{-1}\|(\tau\|K(0)\| + \|M(0)\|)} < 0.$$

Тем самым справедливость данного неравенства эквивалентна тому, что $\|D_1\|$ должна быть меньше, чем положительный корень квадратного уравнения

$$\lambda^2 + 2\|D\|\lambda - \frac{\tau}{\|R^{-1}\|(\tau\|K(0)\| + \|M(0)\|)} = 0,$$

у которого один положительный корень и один отрицательный корень. Заметим, что данный положительный корень стоит в правой части неравенства (2.3.5), следовательно, матрица $\widehat{R}$ положительно определена.

Покажем, что матрица $\widehat{P}$ положительно определена. Это будет следовать из следующего неравенства:

$$\widehat{P} = P + (\widehat{P} - P) \geq p_{min} I - \|\widehat{P} - P\| I.$$

Отсюда в силу (2.3.6) имеем

$$\widehat{P} \geq \frac{p_{min}}{2} > 0.$$

Следовательно,

$$\widehat{p}_{min} \geq \frac{p_{min}}{2},$$

где $\widehat{p}_{min}$ — минимальное собственное значение матрицы $\widehat{P}$. Отсюда в силу теоремы 2.1.1 имеем аналог оценки (2.1.8):

$$v(t,y) \leq e^{-\widehat{\gamma}t}v(0,\varphi),$$

где

$$\widehat{\gamma} = \min\left\{\frac{\widehat{p}_{min}}{\|H\|}, k\right\}.$$

Следовательно,

$$\widehat{\gamma} \geq \min\left\{\frac{p_{min}}{2\|H\|}, k\right\} = \gamma_1.$$

Отсюда получаем (2.3.7).

Лемма доказана.

Как несложно заметить, из положительной определенности матрицы $\widehat{R}$ следует, что спектр матрицы $\widehat{D} = D + D_1$ лежит в единичном круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Следовательно, $\|\widehat{D}^i\| \to 0$ при $i \to \infty$. Напомним обозначения, которые использовались в теореме 2.1.2:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\Theta = \|H^{-1}\|^{1/2}\left(2\|H\|(1+\|D\|^2) + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^\eta \|K(s)\|\,dsd\eta + \int\limits_0^\tau \|M(s)\|\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть*

а) выполнены условия теоремы 2.1.1,

б) матрицы возмущений D_1 A_1, $B_1(s)$ удовлетворяют неравенствам (2.3.5), (2.3.6),

в) $\widehat{l}$ — такое минимальное число, что $\|\widehat{D}^{\widehat{l}}\| < 1$.

1. Если $\|\widehat{D}^{\widehat{l}}\|^2 e^{\widehat{l}\gamma_1\tau} < 1$, то для решения начальной задачи (2.3.2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi e^{-\frac{\gamma_1}{2}t}$$
$$\times \left(\Theta \left(1 - \|\widehat{D}^{\widehat{l}}\| e^{\frac{\widehat{l}\gamma_1\tau}{2}} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{\widehat{l}-1} \|\widehat{D}^j\| e^{\frac{j\gamma_1\tau}{2}} + \max\{\|\widehat{D}\| e^{\frac{\gamma_1}{2}\tau}, \ldots, \|\widehat{D}^{\widehat{l}}\| e^{\frac{\gamma_1}{2}\widehat{l}\tau}\} \right).$$

2. Если $\|\widehat{D}^{\widehat{l}}\|^2 e^{\widehat{l}\gamma_1\tau} = 1$, то для решения начальной задачи (2.3.2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi e^{-\frac{\gamma_1}{2}t}$$
$$\times \left(\Theta \left(1 + \frac{t}{\widehat{l}\tau} \right) \sum_{j=0}^{\widehat{l}-1} \|\widehat{D}^j\| e^{\frac{j\gamma_1\tau}{2}} + \max\{1, \|\widehat{D}\| e^{\frac{\gamma_1\tau}{2}}, \ldots, \|\widehat{D}^{\widehat{l}-1}\| e^{\frac{(\widehat{l}-1)\gamma_1\tau}{2}}\} \right).$$

3. Если $\|\widehat{D}^{\widehat{l}}\|^2 e^{\widehat{l}\gamma_1\tau} > 1$, то для решения начальной задачи (2.3.2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi \|\widehat{D}^{\widehat{l}}\|^{\frac{t}{\widehat{l}\tau}-1}$$
$$\times \left(\Theta \left(1 - \|\widehat{D}^{\widehat{l}}\|^{-1} e^{-\frac{\widehat{l}\gamma_1\tau}{2}} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{\widehat{l}-1} \|\widehat{D}^j\| e^{\frac{j\gamma_1\tau}{2}} + \max\{1, \|\widehat{D}\|, \ldots, \|\widehat{D}^{\widehat{l}-1}\|\} \right).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.2.

Аналогично изучим робастную устойчивость системы вида (2.2.1). Рассмотрим возмущенную систему:

$$\frac{d}{dt}(y(t) + \widehat{D}(t)y(t-\tau)) = \widehat{A}(t)y(t) + \int_{t-\tau}^{t} \widehat{B}(t, t-s)y(s)ds, \qquad (2.3.9)$$

где

$$\widehat{D}(t) = D(t) + D_1(t), \quad \widehat{A}(t) = A(t) + A_1(t),$$
$$\widehat{B}(t,s) = B(t,s) + B_1(t,s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in [0,\tau],$$

$D(t)$, $A(t)$, $B(t,s)$ — матрицы из системы (2.2.1), $D_1(t)$ — матрица возмущений с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A_1(t)$ — матрица возмущений с непрерывными T-периодическими элементами, $B_1(t,s)$ — матрица возмущений с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной.

Рассмотрим начальную задачу для системы (2.3.9):

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}(y(t) + \widehat{D}(t)y(t-\tau)) = \widehat{A}(t)y(t) \\
+ \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} \widehat{B}(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \\
y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\
y(+0) = \varphi(0),
\end{cases}
\tag{2.3.10}
$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Теорема 2.3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.3, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых матриц возмущений $D_1(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t,s)$, удовлетворяющих неравенствам*

$$
\|D_1(t)\| < \varepsilon, \quad \|A_1(t)\| < \varepsilon, \quad \|B_1(t,s)\| < \varepsilon, \quad t \in [0,T], \quad s \in [0,\tau],
$$

нулевое решение системы (2.3.9) экспоненциально устойчиво.

Так как выполнены условия теоремы 2.2.3, то определены матрицы $H(t)$, $K(s)$, $M(s,\xi)$. Введем аналог обозначений (2.2.4), (2.2.6):

$$
\widehat{Q}_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)\widehat{A}(t) + \widehat{A}^*(t)H(t) + M(0,t)\right) - K(0),
$$

$$
\widehat{Q}_{12}(t) = \frac{1}{\tau}(H(t)\widehat{A}(t) + M(0,t))\widehat{D}(t) - K(0)\widehat{D}(t), \tag{2.3.11}
$$

$$
\widehat{Q}_{22}(t) = \widehat{R}(t) = \frac{1}{\tau}\left(M(\tau, t-\tau) - \widehat{D}^*(t)M(0,t)\widehat{D}(t)\right) - \widehat{D}^*(t)K(0)\widehat{D}(t),
$$

$$
\widehat{Q}_{13}(t,s) = -H(t)\widehat{B}(t,s), \quad \widehat{Q}_{33}(s) = Q_{33}(s) = K(s).
$$

Отметим, что при выполнении условий теоремы 2.2.3 и при достаточно малой по норме $D_1(t)$ матрица $\widehat{Q}_{22}(t) = \widehat{R}(t)$ будет положительно определенной и обратимой. Условие на то, насколько малой должна быть матрица $D_1(t)$, будет сформулировано в следующей лемме. Также введем аналог матрицы $P_H(t)$ из (2.2.5):

$$
\widehat{P}_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)\widehat{P}(t)H^{-\frac{1}{2}}(t),
$$

$$\widehat{P}(t) = \tau \widehat{Q}_{11}(t) - \tau \widehat{Q}_{12}(t)\widehat{Q}_{22}^{-1}(t)\widehat{Q}_{12}^{*}(t) - \int\limits_{0}^{\tau} \widehat{Q}_{13}(t,s)\widehat{Q}_{33}^{-1}(s)\widehat{Q}_{13}^{*}(t,s)ds.$$

Теорема 2.3.3 будет следовать из следующей леммы и того, что

$$\|\widehat{P}_H(t) - P_H(t)\| \rightrightarrows 0, \quad t \in [0,T],$$

при

$$\max_{t\in[0,T]} \|D_1(t)\| + \max_{t\in[0,T]} \|A_1(t)\| + \max_{\substack{t\in[0,T]\\ s\in[0,\tau]}} \|B_1(t,s)\| \to 0.$$

Лемма 2.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.3, и матрицы возмущений $D_1(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t,s)$ удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$\|D_1(t)\| < \left(\|D(t)\|^2 + \frac{\tau}{\|R^{-1}(t)\|(\tau\|K(0)\| + \|M(0,t)\|)}\right)^{\frac{1}{2}} - \|D(t)\|, \quad t \in [0,T], \tag{2.3.12}$$

$$\int\limits_{0}^{T} \|\widehat{P}_H(s) - P_H(s)\| ds \le \int\limits_{0}^{T} \frac{\gamma_H(s)}{2} ds, \tag{2.3.13}$$

где матрица $R(t)$ определена в (2.2.4), $\gamma_H(t)$ из (2.2.8). Тогда для решения начальной задачи (2.3.10) справедлива оценка

$$v(t,y) \le \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]} \int\limits_{\xi}^{T} \frac{\gamma_H(s)}{2} ds\right) \exp\left(-\int\limits_{0}^{t} \frac{\gamma_H(s)}{2} ds\right) v(0,\varphi), \tag{2.3.14}$$

$v(0,\varphi)$ определено в (2.2.9).

Доказательство леммы. Из условия (2.3.12) следует положительная определенность T-периодической матрицы $\widehat{R}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Доказательство этого факта аналогично доказательству в лемме 2.3.1 утверждения, что из (2.3.5) следует положительная определенность матрицы $\widehat{R}$. Далее по аналогии с доказательством леммы 1.3.2 получаем оценку (2.3.14).

Лемма доказана.

Также имеет место аналог теоремы 2.2.3. Сначала напомним обозначения, введенные перед теоремой 2.2.3:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\Theta = \max_{s\in[0,T]} \|H^{-1}(s)\|^{1/2}$$

$$\times \left(2\|H(0)\|(1+\|D(0)\|^2) + \int\limits_0^\tau \int\limits_0^\eta \|K(s)\|\, ds d\eta + \int\limits_0^\tau \|M(s,-s)\|\, ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$c = \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]} \left(\frac{\xi}{T} \int\limits_0^T \frac{\gamma_H(s)}{2} ds - \int\limits_0^\xi \frac{\gamma_H(s)}{2} ds \right)\right),$$

$$\beta_M = \sqrt{\max_{s\in[0,T]} \|M(0,s)\| \max_{s\in[0,T]} \|M^{-1}(0,s)\|}.$$

Обозначим

$$\widehat{\alpha}_M = \max_{s\in[0,T]} \Big(1 - \Big\| M^{\frac{1}{2}}(0,s-\tau) \left(M(0,s-\tau) - \widehat{D}^*(s) M(0,s) \widehat{D}(s) \right)^{-1}$$

$$\times M^{\frac{1}{2}}(0,s-\tau) \Big\|^{-1} \Big).$$

Теорема 2.3.4. *Пусть*
а) выполнены условия теоремы 2.2.3,
б) матрицы возмущений $D_1(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t,s)$ *удовлетворяют неравенствам (2.3.12), (2.3.13).*

1. Если $\widehat{\alpha}_M e^{\Delta\tau} < 1$, *то для решения начальной задачи (2.3.10) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi \beta_M \widehat{\alpha}_M^{-1/2} e^{-\frac{\Delta}{2}t} \Theta c \left(1 - \widehat{\alpha}_M^{1/2} e^{\frac{\Delta\tau}{2}} \right)^{-1}.$$

2. Если $\widehat{\alpha}_M e^{\Delta\tau} = 1$, *то для решения задачи (2.3.10) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi \beta_M \widehat{\alpha}_M^{-1/2} e^{-\frac{\Delta}{2}t} \left(\frac{\Theta c}{\tau} t + \Theta c + 1 \right).$$

3. Если $\widehat{\alpha}_M e^{\Delta\tau} > 1$, то для решения начальной задачи (2.3.10) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi\beta_M \widehat{\alpha}_M^{-1/2} \widehat{\alpha}_M^{\frac{1}{2\tau}t} \left(\Theta c \left(1 - \widehat{\alpha}_M^{-1/2} e^{-\frac{\Delta\tau}{2}}\right)^{-1} + \widehat{\alpha}_M^{1/2}\right).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2.3.

Пример 2.3.1. Рассмотрим возмущенную систему для уравнения из примера 2.1.1:

$$\frac{d}{dt}(y(t) + (D + D_1)y(t-\tau)) = Ay(t) + \int\limits_{t-1}^{t} B(t-s)y(s)ds,$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} b_1(s) & 0 \\ 0 & b_2(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [0,1],$$

D_1 — матрица возмущений. Будем предполагать, что элементы матрицы $B(s)$ непрерывны при $s \in [0,1]$ и удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\int\limits_0^1 b_1^2(s)ds \le \frac{165}{16} = 10{,}3125, \quad \int\limits_0^1 b_2^2(s)ds \le \frac{15}{11} \approx 1{,}36.$$

Цель данного примера состоит в том, чтобы, используя лемму 2.3.1, показать, при каких ε_1 нулевое решение данной системы будет экспоненциально устойчивым. В примере 2.1.1 были указаны матрицы функционала Ляпунова – Красовского, которые удовлетворяют условиям теоремы 2.1.1:

$$H = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 2{,}2 \end{pmatrix}, \quad M(s) = \begin{pmatrix} 7e^{-ks} & 0 \\ 0 & 35e^{-ks} \end{pmatrix},$$

$$K(s) = e^{-ks}I, \quad s \in [0,1].$$

Положим $k = \ln\frac{35}{33}$. Матрицы для невозмущенной системы из (2.1.4), (2.1.6) имеют вид:

$$Q_{11} = 8I, \quad Q_{12} = 0, \quad Q_{22} = R = \begin{pmatrix} 6,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_{13}(s) = \begin{pmatrix} -0,8b_1(s) & 0 \\ 0 & -2,2b_2(s) \end{pmatrix}, \quad Q_{33}(s) = \left(\frac{33}{35}\right)^s I.$$

Вычислим матрицу P из (2.1.5):

$$P = \begin{pmatrix} 8 - 0,64\int\limits_0^1 \left(\frac{35}{33}\right)^s b_1^2(s)ds & 0 \\ 0 & 8 - 4,84\int\limits_0^1 \left(\frac{35}{33}\right)^s b_2^2(s)ds \end{pmatrix}.$$

Учитывая неравенство

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{35}{33}\right)^s b_i^2(s)ds \le \frac{35}{33}\int\limits_0^1 b_i^2(s)ds, \quad i = 1, 2,$$

и условия на $b_1(s)$, $b_2(s)$, получим

$$P \ge I.$$

Следовательно, $p_{min} \ge 1$. Поскольку $p_{min} > 0$, то для невозмущенной системы выполнены условия теоремы 2.1.1. Так как

$$\|D\| = 2, \quad \|R^{-1}\| = 1, \quad \|K(0)\| = 1, \quad \|M(0)\| = 35,$$

то неравенство (2.3.5) будет выглядеть следующим образом:

$$|\varepsilon_1| < \sqrt{4 + \frac{1}{36}} - 2 \approx 0,0067.$$

Посчитаем матрицы из (2.3.3):

$$\widehat{Q}_{11} = Q_{11}, \quad \widehat{Q}_{13}(s) = Q_{13}(s), \quad \widehat{Q}_{33}(s) = Q_{33}(s),$$

$$\widehat{Q}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14\varepsilon_1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{Q}_{22} = \begin{pmatrix} 6,6 - 8\varepsilon_1^2 & -16\varepsilon_1 \\ -16\varepsilon_1 & 1 - 36\varepsilon_1^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\widehat{P}$ из (2.3.4) имеет вид:

$$\widehat{P} = P - \widehat{Q}_{12}\widehat{Q}_{22}^{-1}\widehat{Q}_{12}^*,$$

т. е.

$$\widehat{P} - P = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{196\varepsilon_1^2(6,6-8\varepsilon_1^2)}{6,6-501,6\varepsilon_1^2+288\varepsilon_1^4} \end{pmatrix}.$$

Тем самым, для того, чтобы условие (2.3.6) выполнялось, должно быть справедливо неравенство

$$\left|\frac{196\varepsilon_1^2(6,6 - 8\varepsilon_1^2)}{6,6 - 501,6\varepsilon_1^2 + 288\varepsilon_1^4}\right| \leq \frac{1}{2} \leq \frac{p_{min}}{2}.$$

Это неравенство будет верным, если

$$|\varepsilon_1| < 0,046.$$

Суммируя результаты, получим, что нулевое решение рассматриваемой системы будет экспоненциально устойчивым, если

$$|\varepsilon_1| < \sqrt{4 + \frac{1}{36}} - 2 \approx 0,0067.$$

Глава 3. Устойчивость нулевого решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

§ 3.1. Автономные нелинейные системы

В данной главе исследуется устойчивость нулевого решения классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. Данный параграф посвящен автономному случаю. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds + F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \qquad (3.1.1)$$

где A — матрица размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами при $s \in [0, \tau]$, $F(u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1, u_2) и следующей оценке:

$$\|F(u_1, u_2)\| \leq q_1 \|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2 \|u_2\|^{1+\omega_2}, \qquad (3.1.2)$$

где

$$q_1,\, q_2 \geq 0, \quad \omega_1,\, \omega_2 > 0 - const.$$

Отметим, что при исследовании устойчивости нулевого решения систем нелинейных уравнений важной задачей является нахождение оценок на множество притяжения. Использование функционалов Ляпунова – Красовского позволяет найти не только оценки решений, которые характеризуют скорость убывания при $t \to \infty$, но и оценки на множество притяжения.

Рассмотрим начальную задачу для (3.1.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds \\ +F\left(y(t), \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{3.1.3}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

При исследовании устойчивости нулевого решения будет использоваться следующий функционал Ляпунова – Красовского, аналогичный функционалу (1.1.3):

$$v(t, y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds d\eta$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle ds. \tag{3.1.4}$$

Сформулируем теорему, которая является аналогом теорем из [22], [23], [43].

Теорема 3.1.1. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрицы $K(s) = K^*(s) \in C^1([0, \tau])$, $M(s) = M^*(s) \in C^1([0, \tau])$ такие, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad M(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Выберем $k > 0$ так, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) + 2kM(s) \leq 0.$$

Предположим также, что матрица

$$P = -HA - A^*H - M(0) - \tau K(0) - H\left[\int\limits_{0}^{\tau} B(s)K^{-1}(s)B^*(s)ds\right] H \tag{3.1.5}$$

является положительно определенной. Выберем число $\alpha > 0$ *так, что*

$$\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H\| < \gamma_H h_{min}, \tag{3.1.6}$$

$$\gamma_H = \min\{p_{min}^H, k\}, \tag{3.1.7}$$

$h_{min} > 0$ *— минимальное собственное значение матрицы* H, $p_{min}^H > 0$ *— минимальное собственное значение матрицы* $P_H = H^{-\frac{1}{2}} P H^{-\frac{1}{2}}$. *Тогда для решения (3.1.3) с начальными данными из множества*

$$\mathbf{E} = \Bigg\{ \varphi \in C([-\tau, 0]) : v(0, \varphi) < r^{-2/\omega_1},$$

$$\int_{-\tau}^{0} \left(\frac{k}{2} \langle M(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle - \frac{q_2 \tau^{\omega_2} \|H\|}{\alpha} \|\varphi(s)\|^{2+2\omega_2} \right) ds \geq 0,$$

$$\left(h_{min}^{-1} \left[1 - r v^{\omega_1/2}(0, \varphi) \right]^{-2/\omega_1} v(0, \varphi) \right)^{\omega_2} < \frac{\alpha k \|M^{-1}(\tau)\|^{-1}}{q_2 \tau^{\omega_2} \|H\|} \Bigg\}$$

справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{h_{min}}} e^{-\frac{\delta}{2} t} \left[1 - r v^{\omega_1/2}(0, \varphi) \right]^{-1/\omega_1} v^{1/2}(0, \varphi), \tag{3.1.8}$$

где

$$r = \frac{2 q_1 \|H\|}{\delta h_{min}^{1+\omega_1/2}}, \tag{3.1.9}$$

$$\delta = \min \left\{ p_{min}^H - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \|H\|}{h_{min}}, k \right\}. \tag{3.1.10}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (3.1.3), определенное на интервале $(0, t')$, при этом начальные данные $\varphi(s)$ лежат в $\mathbf{E}$. Продифференцируем функционал Ляпунова – Красовского (3.1.4) вдоль решения начальной задачи (3.1.3):

$$\frac{d}{dt} v(t, y) = -\int_{t-\tau}^{t} \left\langle Q(t-s) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

$$-\langle M(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle + 2Re\left\langle Hy(t), F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right)\right\rangle$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds,$$

где

$$Q(s) = \left(\begin{array}{cc} Q_{11} & Q_{12}(s) \\ Q_{12}^*(s) & Q_{22}(s) \end{array}\right),$$

$$Q_{11} = -\frac{1}{\tau}\left(HA + A^*H + M(0)\right) - K(0),$$

$$Q_{12}(s) = -HB(s), \quad Q_{22}(s) = K(s), \quad s \in [0,\tau].$$

В силу леммы 1.1.1 имеет место следующее представление

$$\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle Q(t-s)\left(\begin{array}{c} y(t) \\ y(s) \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} y(t) \\ y(s) \end{array}\right)\right\rangle ds$$

$$= \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\left(\begin{array}{cc} Q_{12}(t-s)Q_{22}^{-1}(t-s)Q_{12}^*(t-s) & Q_{12}(t-s) \\ Q_{12}^*(t-s) & Q_{22}(t-s) \end{array}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\begin{array}{c} y(t) \\ y(s) \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} y(t) \\ y(s) \end{array}\right)\right\rangle ds + \langle P_H H^{\frac{1}{2}}y(t), H^{\frac{1}{2}}y(t)\rangle.$$

Учитывая то, что следующая квадратичная форма неотрицательно определенная:

$$\left\langle\left(\begin{array}{cc} Q_{12}(s)Q_{22}^{-1}(s)Q_{12}^*(s) & Q_{12}(s) \\ Q_{12}^*(s) & Q_{22}(s) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right)\right\rangle$$

$$= \langle Q_{22}^{-1}(s)(Q_{12}^*(s)u_1 + Q_{22}(s)u_2), (Q_{12}^*(s)u_1 + Q_{22}(s)u_2)\rangle \geq 0,$$

и для эрмитовой матрицы $S = S^*$ справедливо неравенство

$$s_{min}\|u\|^2 \leq \langle Su, u\rangle, \tag{3.1.11}$$

где s_{min} — минимальное собственное значение матрицы S, имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -p_{min}^H\langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+2Re\left\langle Hy(t), F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right)\right\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta.$$

В силу (3.1.2) и неравенства Гёльдера получаем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -p_{min}^{H}\langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+2\|H\|\|y(t)\| \left(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1} + q_2\tau^{\omega_2}\int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(s)\|^{1+\omega_2}ds\right)$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta.$$

Используя неравенство $2ab \le \alpha a^2 + b^2/\alpha$, $\alpha > 0$, имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -p_{min}^{H}\langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+2q_1\|H\|\|y(t)\|^{2+\omega_1} + q_2\tau^{\omega_2}\|H\| \left(\alpha\tau\|y(t)\|^2 + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(s)\|^{2+2\omega_2}ds\right)$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta.$$

Следовательно, в силу (3.1.11)

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\left(p_{min}^{H} - \frac{\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\|H\|}{h_{min}}\right)\langle Hy(t), y(t)\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + 2q_1\|H\|\|y(t)\|^{2+\omega_1}$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{1}{2}\left\langle\frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle+\frac{q_2\tau^{\omega_2}\|H\|}{\alpha}\|y(s)\|^{2+2\omega_2}\right)ds$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta. \tag{3.1.12}$$

В силу второго неравенства в определении множества $\mathbf{E}$ и непрерывности решения (3.1.3) либо $\varphi(s)\equiv 0$, из чего следует, что решение (3.1.3) $y(t)\equiv 0$ и оценка (3.1.8) выполнена, либо существует $t_0>0$ такое, что при всех $t\in(0,t_0)$

$$\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{1}{2}\left\langle\frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle+\frac{q_2\tau^{\omega_2}\|H\|}{\alpha}\|y(s)\|^{2+2\omega_2}\right)ds<0. \tag{3.1.13}$$

Из (3.1.12) при $t\in(0,t_0)$ вытекает следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt}v(t,y)\le-\left(p^H_{min}-\frac{\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\|H\|}{h_{min}}\right)\langle Hy(t),y(t)\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}M(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+2q_1\|H\|\|y(t)\|^{2+\omega_1}$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta.$$

Используя (3.1.11), определение δ из (3.1.10), функционал Ляпунова – Красовского (3.1.4), получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y)\le-\delta v(t,y)+\frac{2q_1\|H\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}}v^{1+\omega_1/2}(t,y).$$

Если $v(t_1,y)=0$ при некотором t_1, то $y(t)=0$ при $t\in(t_1-\tau,t_1]$. Поставив начальную задачу типа (3.1.3) с нулевыми начальными данными на интервале $(t_1-\tau,t_1]$, в силу существования и единственности решения начальной задачи получим, что $y(t) = 0$ при всех $t > t_1$. Поэтому можно считать, что $v(t, y) > 0$. Имеем

$$v^{-1-\omega_1/2}(t,y)\frac{d}{dt}v(t,y) \leq -\delta v^{-\omega_1/2}(t,y) + \frac{2q_1\|H\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}}. \tag{3.1.14}$$

Это эквивалентно

$$\frac{d}{dt}\left(v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1\delta}{2}t\right)\right) \geq -\frac{q_1\omega_1\|H\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}}\exp\left(-\frac{\omega_1\delta}{2}t\right).$$

Проинтегрировав от 0 до t, получим

$$v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1\delta}{2}t\right) \geq v^{-\omega_1/2}(0,\varphi)$$

$$-\frac{q_1\omega_1\|H\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}}\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\omega_1\delta}{2}s\right)ds.$$

Следовательно,

$$v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1\delta}{2}t\right) \geq v^{-\omega_1/2}(0,\varphi)$$

$$-\frac{q_1\omega_1\|H\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\omega_1\delta}{2}s\right)ds = v^{-\omega_1/2}(0,\varphi) - r, \tag{3.1.15}$$

где r определено в (3.1.9). Отметим, что сходимость интеграла следует из того факта, что $\omega_1 > 0$, $\delta > 0$. Параметр δ из (3.1.10) положителен в силу (3.1.6). Из (3.1.15) имеем

$$v(t,y) \leq e^{-\delta t}\left[v^{-\omega_1/2}(0,\varphi) - r\right]^{-2/\omega_1}.$$

При этом в силу определения $\mathbf{E}$ выражение в квадратных скобках положительно. В силу (3.1.11) и определения функционала Ляпунова – Красовского получаем оценку (3.1.8) при $t \in (0, t_0]$. Покажем, что эта оценка справедлива при всех $t < t'$. Для этого достаточно показать, что неравенство (3.1.13) выполнено при всех $t < t'$, тогда, повторяя рассуждения после (3.1.13), получим оценку (3.1.8). Докажем от противного.

Знаем, что при $t \in (0, t_0)$ выполнено (3.1.13). Предположим, что t_1 — это первая точка, где интеграл из левой части (3.1.13) равен 0, а при $t < t_1$ выполнено (3.1.13):

$$\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} M(t-s) \Big|_{t=t_1} y(s), y(s) \right\rangle + \frac{q_2 \tau^{\omega_2} \|H\|}{\alpha} \|y(s)\|^{2+2\omega_2} \right) ds = 0.$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям после (3.1.13), получим, что оценка (3.1.8) справедлива при $t \le t_1$. Из третьего неравенства в определении $\mathbf{E}$ и оценки (3.1.8) при $t \in (0, t_1]$ имеем

$$\|y(t)\|^{2\omega_2} < \frac{\alpha k \|M^{-1}(\tau)\|^{-1}}{q_2 \tau^{\omega_2} \|H\|},$$

следовательно, либо $y(t) = 0$ при всех $t \in [t_1 - \tau, t_1]$, тогда в силу существования и единственности решения начальной задачи получим, что $y(t) = 0$ при $t > t_1$ и оценка (3.1.8) выполнена, либо на ненулевой мере отрезка $[t_1 - \tau, t_1]$ будет выполнено строгое неравенство

$$\frac{q_2 \tau^{\omega_2} \|H\|}{\alpha} \|y(t)\|^{2+2\omega_2} < k \|M^{-1}(\tau)\|^{-1} \|y(t)\|^2.$$

Отсюда в силу (3.1.11) и определения матрицы $M(s)$ получим

$$\int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} \frac{q_2 \tau^{\omega_2} \|H\|}{\alpha} \|y(\eta)\|^{2+2\omega_2} d\eta < \int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} k \langle M(t_1 - \eta) y(\eta), y(\eta) \rangle d\eta$$

$$\le - \int\limits_{t_1-\tau}^{t_1} \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} M(t-\eta) \Big|_{t=t_1} y(\eta), y(\eta) \right\rangle d\eta.$$

Противоречие. Следовательно, (3.1.13) выполнено при всех $t < t'$. Повторяя рассуждения после (3.1.13), получаем, что оценка (3.1.8) выполнена при всех $t < t'$. По непрерывности можно определить значение $y(t)$ в точке t'. Рассмотрим начальную задачу типа (3.1.3):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}z(t) = Az(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)z(s)ds \\ +F\left(z(t), \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} z(s)ds\right), \quad t > t', \\ z(s) = y(s),\ s \in [t'-\tau, t'], \\ z(t'+0) = y(t'). \end{cases}$$

Данная начальная задача однозначно разрешима, поэтому решение начальной задачи (3.1.3) $y(t)$ можно продолжить. Следовательно, решение начальной задачи (3.1.3) определено при всех $t > 0$. Повторяя вышесказанные рассуждения, получим справедливость оценки (3.1.8) при всех $t > 0$.

Теорема доказана.

Отметим, что в теореме 3.1.1 оценка (3.1.8) характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности, у которых начальные данные лежат в множестве $\mathbf{E}$. Тем самым при выполнении условий теоремы 3.1.1 получаем, что нулевое решение системы (3.1.1) экспоненциально устойчиво. Множество $\mathbf{E}$ является множеством притяжения нулевого решения системы (3.1.1).

Теорема 3.1.2. *Пусть существуют матрица $H = H^* > 0$ и матрицы $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$, $M(s) = M^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad M(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Предположим также, что матрица P из (3.1.5) является положительно определенной. Тогда нулевое решение системы (3.1.1) экспоненциально устойчиво.

Заметим, что при исследовании устойчивости нулевого решения линейных систем в параграфе 1.1 использовался функционал Ляпунова – Красовского (1.1.3), отличный от (3.1.4). Тем не менее, если для линеаризованной системы (1.1.1) выполняются условия теоремы 1.1.2, то и для системы (3.1.1) выполняются условия теоремы 3.1.2. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 3.1.1. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt}y(t) = -ay(t) + \int\limits_{t-1}^{t} b(t-s)y(s)ds + y^2(t),$$

где $a > 0$, $b(s)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция. Проводя соответствие с (3.1.2), получим $q_1 = 1$, $\omega_1 = 1$, $q_2 = 0$. Линеаризованное уравнение совпадает с уравнением из примера 1.1.1. В данном примере было показано, что если

$$\int\limits_0^1 b^2(s)ds < a^2, \tag{3.1.16}$$

то нулевое решение линеаризованного уравнения экспоненциально устойчиво. Докажем, что при этих же самых условиях нулевое решение исходного нелинейного уравнения также будет экспоненциально устойчиво.

Выберем H и $K(s)$ как и в примере 1.1.1:

$$H = \frac{1}{a}, \quad K(s) = e^{-ks}, \quad s \in [0,1],$$

где

$$k = -\frac{1}{2}\ln\left(\int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2}ds\right).$$

Матрицу $M(s)$ укажем позже. Получим

$$P = 1 - M(0) - \int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2}e^{ks}ds \geq 1 - M(0) - e^k\int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2}ds$$

$$= 1 - M(0) - \left(\int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2}ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Укажем $M(s)$:

$$M(s)=\frac{1}{2}\left(1-\left(\int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2}ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)e^{-2ks}.$$

Следовательно,

$$P\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \frac{b^2(s)}{a^2}ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Условия теоремы 3.1.2 выполнены, значит, при выполнении условия (3.1.16) нулевое решение исходного нелинейного дифференциального уравнения экспоненциально устойчиво.

Укажем оценку на решение и множество притяжения для рассматриваемого дифференциального уравнения при конкретных a, $b(s)$. Положим

$$a=1,\quad b(s)\equiv\frac{1}{2}.$$

Введем начальные условия:

$$\begin{cases} y(s)=\varphi(s), \quad s\in[-1,0],\\ y(+0)=\varphi(0), \end{cases}$$

где $\varphi(s)\in C([-1,0])$ — заданная вектор-функция. Параметр $\alpha>0$ участвует в определении δ из (3.1.10) и множества притяжения $\mathbf{E}$. Поскольку $q_2=0$, то параметр α можно взять любым в силу (3.1.6), в том числе сколь угодно малым, и затем перейти к пределу в неравенстве (3.1.8), устремив α к нулю. Тем самым, можно считать, то $\alpha=0$. Выпишем обозначения, которые используются в теореме 3.1.1:

$$k=\ln 2,\quad M(s)=\frac{1}{4}4^{-s},\quad P_H=P=\frac{3}{4}-\frac{1}{4\ln 2}\approx 0,38,$$

$$v(0,\varphi)=\varphi^2(0)+\int\limits_0^1\int\limits_{-\eta}^0 2^s\varphi^2(s)dsd\eta+\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^0 4^s\varphi^2(s)ds,$$

$$\delta=\min\left\{\frac{3}{4}-\frac{1}{4\ln 2},\ln 2\right\}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4\ln 2},\quad r=2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4\ln 2}\right)^{-1}\approx 5,13.$$

Тогда для решения начальной задачи с начальными условиями из множества

$$\mathbf{E} = \left\{\varphi \in C([-1,0]) : v(0,\varphi) < r^{-2} \approx 0,03\right\}$$

справедлива оценка

$$|y(t)| \leq e^{-t(\frac{3}{8}-\frac{1}{8\ln 2})} \frac{v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{1 - rv^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}.$$

§ 3.2. Нелинейные системы с периодическими коэффициентами

В данном параграфе рассматривается система дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad (3.2.1)$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T,s) \equiv B(t,s),$$

$F(t,u_1,u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1,u_2) и следующей оценке:

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \leq q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \quad t \geq 0, \quad (3.2.2)$$

где

$$q_1,\, q_2 \geq 0, \quad \omega_1,\, \omega_2 > 0 \,-\, const.$$

В данном параграфе получим достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и укажем оценки на множество притяжения и оценки решений системы, которые характеризуют скорость убывания при $t \to \infty$.

Рассмотрим начальную задачу для (3.2.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds \\ +F\left(t, y(t), \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{3.2.3}$$

где $\varphi(s) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

При исследовании устойчивости нулевого решения будет использоваться следующий функционал Ляпунова – Красовского:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds d\eta$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle ds, \tag{3.2.4}$$

где $H(t)$, $K(s)$, $M(s)$ — гладкие положительно определенные матрицы. Функционал (3.2.4) является аналогом функционала Ляпунова – Красовского (1.2.2).

Введем обозначения: $h_{min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, $p^H_{min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы

$$P_H(t) = H^{-1/2}(t)P(t)H^{-1/2}(t), \tag{3.2.5}$$

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - M(0) - \tau K(0)$$

$$-H(t)\left[\int\limits_{0}^{\tau} B(t,s)K^{-1}(s)B^*(t,s)ds\right]H(t),$$

$$\gamma_H(t) = \min\{p^H_{min}(t), k\}, \tag{3.2.6}$$

$$\delta(t) = \min\left\{p_{min}^H(t) - \frac{\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2}\|H(t)\|}{h_{min}(t)}, k\right\}, \tag{3.2.7}$$

числа k, $\alpha > 0$ будут определены позже,

$$r = q_1\omega_1 \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds$$

$$\times\left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \delta(\eta)d\eta\right)\right)^{-1}. \tag{3.2.8}$$

Отметим, что последний множитель в определении r будет положительным в силу условий следующей теоремы.

Теорема 3.2.1. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t)$ такая, что $H(t) = H^*(t) > 0$ при $t \in \mathbb{R}$, и матрицы $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$, $M(s) = M^*(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad M(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Выберем $k > 0$ так, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) + 2kM(s) \le 0.$$

Пусть также выполнено неравенство

$$\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0. \tag{3.2.9}$$

Выберем число $\alpha > 0$ так, что

$$\alpha q_2 \tau^{1+\omega_2} \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}(s)} ds < \int\limits_0^T \gamma_H(s)ds. \tag{3.2.10}$$

Тогда для решения начальной задачи (3.2.3) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \left\{\varphi \in C([-\tau,0]) : v(0,\varphi) < r^{-2/\omega_1},\right.$$

$$\int\limits_{-\tau}^{0}\left(\frac{k}{2}\langle M(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle-\frac{q_2\tau^{\omega_2}\|H(0)\|}{\alpha}\|\varphi(s)\|^{2+2\omega_2}\right)ds\geq 0,$$

$$\max_{s\in[0,T]}\left(h_{min}^{-1}(s)\exp\left(-\int\limits_0^s\delta(\xi)d\xi\right)\right)^{\omega_2}$$

$$\times\left(\left[1-rv^{\omega_1/2}(0,\varphi)\right]^{-2/\omega_1}v(0,\varphi)\right)^{\omega_2}<\frac{\alpha k\|M^{-1}(\tau)\|^{-1}}{q_2\tau^{\omega_2}\max\limits_{s\in[0,T]}\|H(s)\|}\Bigg\}$$

справедлива следующая оценка:

$$\|y(t)\|\leq\frac{1}{\sqrt{h_{min}(t)}}e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\delta(s)ds}\left[1-rv^{\omega_1/2}(0,\varphi)\right]^{-1/\omega_1}v^{1/2}(0,\varphi).\quad(3.2.11)$$

Замечание. *В силу (3.2.10) оценка (3.2.11) характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности, поскольку $\delta(t)$ — T-периодическая функция и справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^T\delta(s)ds=\int\limits_0^T\min\left\{p_{min}^H(s)-\frac{\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\|H(s)\|}{h_{min}(s)},k\right\}ds$$

$$\geq\int\limits_0^T\left(\min\{p_{min}^H(s),k\}-\frac{\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\|H(s)\|}{h_{min}(s)}\right)ds$$

$$=\int\limits_0^T\min\{p_{min}^H(s),k\}ds-\alpha q_2\tau^{1+\omega_2}\int\limits_0^T\frac{\|H(s)\|}{h_{min}(s)}ds>0.$$

Доказательство. Проводя рассуждения доказательства теоремы 3.1.1, получим аналог (3.1.14):

$$v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^t\delta(s)ds\right)\geq v^{-\omega_1/2}(0,\varphi)$$

$$-q_1\omega_1 \int\limits_0^t \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds.$$

Следовательно,

$$v^{-\omega_1/2}(t,y)\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^t \delta(s)ds\right)$$

$$\geq v^{-\omega_1/2}(0,\varphi) - q_1\omega_1 \int\limits_0^\infty \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds. \qquad (3.2.12)$$

Последний интеграл сходится в силу того, что $\int\limits_0^T \delta(s)ds > 0$ и $H(t)$, $\delta(t)$ — T-периодические. Нетрудно показать справедливость следующего равенства:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds = \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{min}^{1+\omega_1/2}(s)}$$

$$\times\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^s \delta(\eta)d\eta\right) ds \left(1-\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \delta(s)ds\right)\right)^{-1} = \frac{r}{q_1\omega_1},$$

где r определено в (3.2.8). Далее, повторяя рассуждения теоремы 3.1.1, получим требуемое.

Теорема доказана.

Отметим, что, как и в теореме 3.1.1, в теореме 3.2.1 оценка (3.2.11) характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности, начальные данные которых лежат в множестве $\mathbf{E}$. Следовательно, если выполняются условия теоремы 3.2.1, то нулевое решение системы (3.2.1) экспоненциально устойчиво. Множество $\mathbf{E}$ является множеством притяжения нулевого решения системы (3.2.1).

Теорема 3.2.2. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t)$ такая, что*

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

и матрицы $K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau])$, $M(s) = M^*(s) \in C^1([0,\tau])$ *такие, что*

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad M(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}M(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Пусть также будет выполнено неравенство (3.2.9). Тогда нулевое решение решение системы (3.2.1) экспоненциально устойчиво.

Пример 3.2.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) + \sqrt{1,8}\sin t \int\limits_{t-1}^{t} e^{\frac{s-t}{2}} y(s)ds + \left(\int\limits_{t-1}^{t} y(s)ds \right)^2.$$

Линеаризованное уравнение совпадает с уравнением из примера 1.2.1, для которого была показана экспоненциальная устойчивость нулевого решения. Проводя соответствие с оценкой (3.1.2), получим $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $\omega_2 = 1$. Покажем, что нулевое решение рассматриваемой системы экспоненциально устойчиво. Построим функционал Ляпунова – Красовского (3.2.4) на основе функционала из примера 1.2.1. Возьмем $H(t) \equiv 1$, $K(s) = e^{-s}$, $M(s) = \varepsilon e^{-2s}$, ε выберем позже,

$$v(t,y) = y^2(t) + \int\limits_0^1 \int\limits_{t-\eta}^{t} e^{-t+s} y^2(s)\, ds d\eta + \varepsilon \int\limits_{t-1}^{t} e^{-2t+2s} y^2(s)\, ds.$$

Матрица $P_H(t)$ из (3.2.5) примет вид

$$P_H(t) = 1 - 1,8\sin^2 t - \varepsilon.$$

Найдем $\gamma_H(t)$ из (3.2.6):

$$\gamma_H(t) = \min\left\{p^H_{min}(t); k\right\} = \min\left\{1 - 1,8\sin^2 t - \varepsilon; 1\right\} = 1 - 1,8\sin^2 t - \varepsilon.$$

Проверим, выполнено ли условие (3.2.9):

$$\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds = \int\limits_0^{2\pi} (1 - 1,8\sin^2 t - \varepsilon)ds = 0,2\pi - 2\pi\varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon = 0,05$. Тогда

$$\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds = 0,1\pi > 0,$$

условие (3.2.9) выполнено, следовательно, нулевое решение рассматриваемого дифференциального уравнения экспоненциально устойчиво. Укажем оценки решений и множества притяжения нулевого решения данного дифференциального уравнения. Для этого введем начальные условия:

$$\begin{cases} y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-1, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases}$$

где $\varphi(s) \in C([-1, 0])$ — заданная вектор-функция. Тогда получим начальную задачу вида (3.2.3). Вычислим параметры, которые используются в теореме 3.2.1. Условие (3.2.10) на выбор α выглядит следующим образом:

$$2\pi\alpha < 0,1\pi.$$

Возьмем $\alpha = 0,025$. Вычислим параметры из (3.2.8) и (3.2.7):

$$r = 0, \quad \delta(t) = \min\{0,95 - 1,8\sin^2 t - 0,025; 1\} = 0,925 - 1,8\sin^2 t.$$

Оценим следующее выражение:

$$\max_{s\in[0,T]} \left(h_{min}^{-1}(s) \exp\left(-\int\limits_0^s \delta(\xi)d\xi \right) \right)^{\omega_2} = \max_{s\in[0,2\pi]} e^{-0,025s - 0,45\sin 2s}$$
$$< \max_{s\in[0,2\pi]} e^{-0,45\sin 2s} = e^{0,45}.$$

Тогда в силу теоремы 3.2.1 для решения начальной задачи с начальными условиями из множества

$$\mathbf{E} = \left\{ \varphi \in C([-1, 0]) : \int\limits_{-1}^0 \left(0,025e^s\varphi^2(s) - 40\varphi^4(s)\right) ds \geq 0, \right.$$
$$\left. v(0,\varphi) < \frac{e^{-2,45}}{800} \right\}$$

справедлива следующая оценка:

$$|y(t)| \le e^{-\frac{t}{80} - \frac{9}{40}\sin 2t} v^{1/2}(0, \varphi),$$

где

$$v(0, \varphi) = \varphi^2(t) + \int\limits_0^1 \int\limits_{-\eta}^0 e^s \varphi^2(s) ds d\eta + \frac{1}{20} \int\limits_{-1}^0 e^{2s} \varphi^2(s) ds.$$

Глава 4. Устойчивость нулевого решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием нейтрального типа

§ 4.1. Автономные нелинейные системы нейтрального типа

Данный параграф посвящен изучению экспоненциальной устойчивости нулевого решения некоторых классов автономных нелинейных систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием. Рассмотрим систему следующего вида:

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds$$

$$+F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \tag{4.1.1}$$

где D, A — матрицы размера $n \times n$, $B(s)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами при $s \in [0,\tau]$, $F(u_1,u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1,u_2) и следующей оценке:

$$\|F(u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \tag{4.1.2}$$

где

$$q_1,\, q_2 \ge 0, \quad \omega_1,\, \omega_2 > 0 \,-\, const.$$

Рассмотрим начальную задачу для (4.1.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds \\ +F\left(y(t), \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t>0, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{4.1.3}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция.

Цель данного параграфа заключается в получении достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения, нахождении оценок на множество притяжения и оценок решений системы, которые характеризуют скорость убывания при $t \to \infty$. При исследовании устойчивости будет использоваться функционал Ляпунова – Красовского (2.1.3):

$$v(t, y) = \langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^t \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle ds, \qquad (4.1.4)$$

где H, $M(s)$, $K(s)$ — эрмитовы гладкие положительно определенные матрицы. Более того, в данном параграфе будем предполагать, что выполнены условия теоремы 2.1.1. Напомним также некоторые обозначения, которые использовались в параграфе 2.1: $h_{min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H, p_{min}^H — минимальное собственное значение матрицы

$$P_H = H^{-\frac{1}{2}} P H^{-\frac{1}{2}}, \qquad (4.1.5)$$

$$P = \tau Q_{11} - \tau Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^* - \int\limits_0^\tau Q_{13}(s) Q_{33}^{-1}(s) Q_{13}^*(s) ds > 0, \qquad (4.1.6)$$

где

$$Q_{11} = -\frac{1}{\tau}\left(HA + A^*H + M(0)\right) - K(0),$$

$$Q_{12} = \frac{1}{\tau}(HA + M(0))D + K(0)D, \qquad (4.1.7)$$

$$Q_{22} = R = \frac{1}{\tau}(M(\tau) - D^*M(0)D) - D^*K(0)D > 0,$$

$$Q_{13}(s) = -HB(s), \quad Q_{33}(s) = K(s).$$

Введем обозначения: $q_{min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $Q_{22} = R$,

$$z_1(t) = Q_{22}^{-1} Q_{12}^* (y(t) + Dy(t-\tau)) + y(t-\tau), \qquad (4.1.8)$$

$$z_2(t, s) = Q_{33}^{-1}(t-s) Q_{13}^*(t-s)(y(t) + Dy(t-\tau)) + y(s), \qquad (4.1.9)$$

$$m = \|M^{-1}(\tau)\|^{1+\omega_2}, \tag{4.1.10}$$

$$\nu(H) = \|H\|\|H^{-1}\|, \tag{4.1.11}$$

$$\Lambda_1 = \frac{m\tau^{1+\omega_2}}{\alpha}\|H\|, \tag{4.1.12}$$

$$\Lambda_2 = 2^{1+\omega_1}\|H\|\|D\|^{1+\omega_1}, \tag{4.1.13}$$

$$\Lambda_3 = 2^{1+\omega_1}\nu(H)\|D\|^{1+\omega_1}\left(\|Q_{22}^{-1}Q_{12}^*\| + \frac{1}{4}\right). \tag{4.1.14}$$

Сформулируем теорему, которая является аналогом теоремы из [79].

Теорема 4.1.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1. Тогда при любых $\alpha > 0$ для решения начальной задачи (4.1.3), определенного при $t \in (0, t')$, справедлива оценка при $t \in (0, t')$:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le (q_2\alpha\nu(H) - p_{min}^H)\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+2^{1+\omega_1}q_1\nu(H)v^{1+\frac{\omega_1}{2}}(t,y) + q_2\Lambda_1 v^{1+\omega_2}(t,y)$$

$$-k\int_0^\tau\int_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, dsd\eta - k\int_{t-\tau}^t \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$+\left(q_1\Lambda_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} - \tau q_{min}\right)\|z_1(t)\|^2 + q_1\Lambda_3 v(t,y)\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}. \tag{4.1.15}$$

Доказательство. Продифференцируем функционал (4.1.4) вдоль решения начальной задачи (4.1.3):

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = \langle (HA + A^*H + \tau K(0) + M(0))\, y(t), y(t)\rangle$$

$$+\langle y(t), A^*HDy(t-\tau)\rangle + \left\langle y(t), H\int_{t-\tau}^t B(t-s)y(s)ds\right\rangle$$

$$+\langle A^*HDy(t-\tau), y(t)\rangle - \langle M(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$

$$+\left\langle y(t-\tau), D^*H\int_{t-\tau}^t B(t-s)y(s)ds\right\rangle + \left\langle H\int_{t-\tau}^t B(t-s)y(s)ds, y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle D^*H\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, y(t-\tau)\right\rangle$$

$$+2Re\left\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)), F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right)\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Перепишем данное тождество в терминах квадратичной формы:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle C(t-s)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds$$

$$= \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+2Re\left\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)), F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right)\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}M(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds, \qquad (4.1.16)$$

где

$$C(s) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}(s)\\ C_{12}^* & C_{22} & C_{23}(s)\\ C_{13}^*(s) & C_{23}^*(s) & C_{33}(s)\end{pmatrix}, \quad s\in[0,\tau],$$

$$C_{11} = Q_{11} = -\frac{1}{\tau}\left(HA + A^*H + M(0)\right) - K(0),$$

$$C_{12} = -\frac{1}{\tau}A^*HD, \quad C_{22} = \frac{1}{\tau}M(\tau),$$

$$C_{13}(s) = -HB(s), \quad C_{23}(s) = -D^*HB(s), \quad C_{33}(s) = Q_{33}(s) = K(s).$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующей формулы:

$$\left\langle C(s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle Q(s) \begin{pmatrix} x_1 + Dx_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 + Dx_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где

$$Q(s) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}(s) \\ Q_{12}^* & Q_{22} & 0 \\ Q_{13}^*(s) & 0 & Q_{33}(s) \end{pmatrix},$$

Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, $Q_{13}(s)$, $Q_{33}(s)$ определяются в (4.1.7). Перемножив матрицы, получим указанное представление. Учитывая эту формулу, условия на матрицы $K(s)$, $M(s)$ и их производные, (4.1.16) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le$$

$$-\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle Q(t-s) \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

$$-k\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds$$

$$+2Re\left\langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right)\right\rangle. \qquad (4.1.17)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части. По аналогии с леммой 1.1.1 справедливо следующее представление:

$$I_1 = -\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle Q(t-s) \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

$$= -\left\langle U \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z_1(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

$$-\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle Q_{33}(t-s)z_2(t,s), z_2(t,s)\rangle\, ds,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \tau Q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{\frac{1}{2}} P_H H^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \tau Q_{22} \end{pmatrix},$$

P_H из (4.1.5), Q_{22}, $Q_{33}(s)$ из (4.1.7), $z_1(t)$, $z_2(t,s)$ из (4.1.8) и (4.1.9) соответственно. Следовательно,

$$I_1 \le -\langle P_H H^{\frac{1}{2}}(y(t)+Dy(t-\tau)), H^{\frac{1}{2}}(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle - \tau q_{min}\|z_1(t)\|^2.$$

В силу определения p^H_{min} получим

$$I_1 \le -p^H_{min}\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)), (y(t)+Dy(t-\tau))\rangle - \tau q_{min}\|z_1(t)\|^2. \quad (4.1.18)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части (4.1.17):

$$I_2 = 2Re\left\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)), F\left(y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right)\right\rangle.$$

В силу (4.1.2) имеем

$$I_2 \le 2\|H\|\left(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1} + q_2\left\|\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right\|^{1+\omega_2}\right)\|y(t)+Dy(t-\tau)\|.$$

Следовательно,

$$I_2 \le 2\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|$$

$$\times\left(q_1(\|y(t)+Dy(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\|)^{1+\omega_1} + q_2\left\|\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right\|^{1+\omega_2}\right).$$

Используя неравенство

$$(a+b)^{1+\omega} \le 2^{\omega}a^{1+\omega} + 2^{\omega}b^{1+\omega}, \quad a,b \ge 0, \quad \omega > 0,$$

получим

$$I_2 \le 2^{1+\omega_1}q_1\|H\|\left(\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{1+\omega_1} + \|D\|^{1+\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_1}\right)$$

$$\times\|y(t)+Dy(t-\tau)\|+2q_2\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|\left\|\int\limits_{t-\tau}^{t}y(s)ds\right\|^{1+\omega_2}.$$

Воспользовавшись неравенством

$$2ab\le\alpha a^2+\frac{1}{\alpha}b^2,\quad a,b\ge 0\quad \alpha>0,$$

имеем

$$I_2\le 2^{1+\omega_1}q_1\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|$$
$$\times\left(\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{1+\omega_1}+\|D\|^{1+\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_1}\right)$$
$$+q_2\alpha\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2+\frac{q_2}{\alpha}\|H\|\left\|\int\limits_{t-\tau}^{t}y(s)ds\right\|^{2+2\omega_2}.$$

Используем неравенство Гёльдера:

$$I_2\le 2^{1+\omega_1}q_1\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}+2^{1+\omega_1}q_1\|H\|\|D\|^{1+\omega_1}$$
$$\times\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|+q_2\alpha\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2$$
$$+\frac{q_2\tau^{1+\omega_2}}{\alpha}\|H\|\left(\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\|^2ds\right)^{1+\omega_2}.$$

Из определения $z_1(t)$ в (4.1.8) имеем

$$\|y(t-\tau)\|\le\|z_1(t)\|+\|Q_{22}^{-1}Q_{12}^*\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|.$$

Следовательно,

$$\|y(t-\tau)\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|$$
$$\le\|Q_{22}^{-1}Q_{12}^*\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2+\|z_1(t)\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|$$
$$\le\left(\|Q_{22}^{-1}Q_{12}^*\|+\frac{1}{4}\right)\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2+\|z_1(t)\|^2.$$

Тогда справедливо неравенство

$$I_2\le 2^{1+\omega_1}q_1\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}+q_2\alpha\|H\|\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2$$
$$+\frac{q_2\tau^{1+\omega_2}}{\alpha}\|H\|\left(\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(s)\|^2ds\right)^{1+\omega_2}+2^{1+\omega_1}q_1\|H\|\|D\|^{1+\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}$$

$$\times\left(\left(\|Q_{22}^{-1}Q_{12}^*\|+\frac{1}{4}\right)\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2+\|z_1(t)\|^2\right).$$

В силу (3.1.11), (4.1.10) и определения $v(t,y)$ из (4.1.4) получаем

$$I_2\le 2^{1+\omega_1}q_1\|H\|\|H^{-1}\|v^{1+\frac{\omega_1}{2}}(t,y)+\frac{q_2m\tau^{1+\omega_2}}{\alpha}\|H\|v^{1+\omega_2}(t,y)$$

$$+q_2\alpha\|H\|\|H^{-1}\|\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+2^{1+\omega_1}q_1\|H\|\|D\|^{1+\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}$$

$$\times\left(\left(\|Q_{22}^{-1}Q_{12}^*\|+\frac{1}{4}\right)\|H^{-1}\|v(t,y)+\|z_1(t)\|^2\right).$$

Оценка (4.1.15) следует из данного неравенства, (4.1.18) и (4.1.17) с учетом обозначений (4.1.11)–(4.1.14).

Теорема доказана.

Напомним обозначения, введенные в параграфе 2.1:

$$\Phi=\max_{t\in[-\tau,0]}\|\varphi(t)\|, \tag{4.1.19}$$

$$v(0,\varphi)=\langle H(\varphi(0)+D\varphi(-\tau)),(\varphi(0)+D\varphi(-\tau))\rangle$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_{-\eta}^0\langle K(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle dsd\eta+\int\limits_{-\tau}^0\langle M(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds,$$

$$\Theta=\|H^{-1}\|^{1/2}$$

$$\times\left(2\|H\|(1+\|D\|^2)+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\eta\|K(s)\|\,dsd\eta+\int\limits_0^\tau\|M(s)\|\,ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1.20}$$

Введем обозначение:

$$\delta=\min\{p_{min}^H-q_2\alpha\nu(H),k\}. \tag{4.1.21}$$

Теорема 4.1.2. *Пусть*

1) выполнены условия теоремы 2.1.1;

2) l — такое минимальное число, что $\|D^l\|<1$;

3) число $\alpha>0$ такое, что выполнено неравенство

$$\alpha q_2\nu(H)<p_{min}^H; \tag{4.1.22}$$

4) выполнено неравенство $e^{\frac{l\delta\tau}{8}}\|D^l\| < 1$.
Тогда для решения начальной задачи (4.1.3) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Big\{\varphi \in C^1([-\tau,0]): \quad q_1\Lambda_2 \max\{1, c_1^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \tau q_{min},$$

$$q_1\Lambda_3 \max\{1, c_1^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \frac{1}{4}\delta, \quad 2^{1+\omega_1} q_1 \nu(H) v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi) + q_2\Lambda_1 v^{\omega_2}(0,\varphi) < \frac{1}{2}\delta\Big\},$$

где

$$c_1 = \Theta\left(1 - \|D^l\|e^{\frac{l\delta\tau}{8}}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|D^j\|e^{\frac{j\delta\tau}{8}} + \max\{\|D\|e^{\frac{\delta}{8}\tau}, \ldots, \|D^l\|e^{\frac{\delta}{8}l\tau}\},$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le c_1\Phi e^{-\frac{\delta}{8}t}. \tag{4.1.23}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (4.1.3), определенное на интервале $(0, t')$. В силу неравенств в определении множества $\mathbf{E}$ существует $t_1 > 0$ такое, что при всех $t \in (0, t_1)$ справедливы неравенства

$$q_1\Lambda_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} - \tau q_{min} < 0, \tag{4.1.24}$$

$$q_1\Lambda_3\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} < \frac{1}{4}\delta, \tag{4.1.25}$$

$$2^{1+\omega_1} q_1 \nu(H) v^{\frac{\omega_1}{2}}(t,y) + q_2\Lambda_1 v^{\omega_2}(t,y) < \frac{1}{2}\delta. \tag{4.1.26}$$

Следовательно, оценку (4.1.15) при $t \in (0, t_1)$ можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le (q_2\alpha\nu(H) - p_{min}^H)\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle$$

$$-k\int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta - k\int_{t-\tau}^t \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds + \frac{3}{4}\delta v(t,y).$$

Воспользуемся определением $v(t,y)$ из (4.1.4), δ из (4.1.21) и получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\frac{1}{4}\delta v(t,y).$$

Следовательно,

$$v(t,y) \le e^{-\frac{\delta}{4}t}v(0,\varphi). \tag{4.1.27}$$

Отсюда с учетом обозначений (4.1.19), (4.1.20) имеем оценку при $t \in (0,t_1)$:

$$\|y(t) + Dy(t-\tau)\| \le \Theta e^{-\frac{\delta}{8}t}\Phi.$$

Повторим рассуждения доказательства теоремы 2.1.2, тогда покажем справедливость оценки (4.1.23) при $t \in (0,t_1)$. Докажем от противного, что данная оценка верна при всех $t < t'$. Пусть $t_2 > 0$ — это первое число, при котором неверно одно из неравенств (4.1.24), (4.1.25), (4.1.26), при этом при всех $t \in (0,t_2)$ данные неравенства выполнены. Следовательно, оценки (4.1.23) и (4.1.27) справедливы при $t \in (0,t_2]$.

Случай 1: в точке t_2 нарушается неравенство (4.1.24), значит, в силу непрерывности решения начальной задачи (4.1.3) в точке t_2 достигается равенство

$$q_1\Lambda_2\|y(t_2-\tau)\|^{\omega_1} = \tau q_{min}.$$

Но в силу оценки (4.1.23) и первого неравенства в определении **E** получаем

$$q_1\Lambda_2\|y(t_2-\tau)\|^{\omega_1} \le q_1\Lambda_2 c_1^{\omega_1}\Phi^{\omega_1} < \tau q_{min}.$$

Противоречие, следовательно, неравенство (4.1.24) не может нарушаться при $t = t_2$.

Случай 2: в точке t_2 нарушается неравенство (4.1.25). Рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 3: в точке t_2 нарушается неравенство (4.1.26). В силу непрерывности решения начальной задачи (4.1.3) в точке t_2 достигается равенство

$$2^{1+\omega_1}q_1\nu(H)v^{1+\frac{\omega_1}{2}}(t_2,y) + q_2\Lambda_1 v^{1+\omega_2}(t_2,y) = \frac{1}{2}\delta.$$

Из (4.1.27) и третьего неравенства в определении **E** получаем

$$2^{1+\omega_1}q_1\nu(H)v^{1+\frac{\omega_1}{2}}(t_2,y) + q_2\Lambda_1 v^{1+\omega_2}(t_2,y)$$

$$\le 2^{1+\omega_1}q_1\nu(H)v^{1+\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi) + q_2\Lambda_1 v^{1+\omega_2}(0,\varphi) < \frac{1}{2}\delta.$$

Противоречие. Следовательно, оценка (4.1.26) не может нарушаться при $t = t_2$.

Так как ни одно из неравенств (4.1.24)–(4.1.26) не может нарушаться при $t = t_2$, получаем, что эти неравенства верны при всех $t < t'$. Тогда оценка (4.1.23) справедлива при всех $t < t'$. По непрерывности можно определить значение $y(t)$ в точке t'. Рассмотрим начальную задачу типа (4.1.3):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(z(t) + Dz(t-\tau)) = Az(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)z(s)ds \\ +F\left(z(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} z(s)ds\right), \quad t > t', \\ z(s) = y(s),\, s \in [t'-\tau, t'], \\ z(t'+0) = y(t'). \end{cases}$$

Данная начальная задача однозначно разрешима, следовательно, решение $y(t)$ начальной задачи (4.1.3) можно продолжить. Противоречие. Значит, решение начальной задачи (4.1.3) определено при всех $t > 0$. Тогда оценка (4.1.23) справедлива при всех $t > 0$.

Теорема доказана.

Теорема 4.1.3. *Пусть*
1) выполнены условия теоремы 2.1.1;
2) l — такое минимальное число, что $\|D^l\| < 1$;
3) число $\alpha > 0$ такое, что выполнено неравенство (4.1.22);
4) выполнено равенство $e^{\frac{l\delta\tau}{8}}\|D^l\| = 1$.
Тогда для решения начальной задачи (4.1.3) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Big\{\varphi \in C^1([-\tau, 0]) : \quad q_1\Lambda_2 \max\{1, c_2^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \tau q_{min},$$

$$q_1\Lambda_3 \max\{1, c_2^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \frac{1}{4}\delta, \quad 2^{1+\omega_1}q_1\nu(H)v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi) + q_2\Lambda_1 v^{\omega_2}(0,\varphi) < \frac{1}{2}\delta\Big\},$$

где

$$c_2 = \max_{s\geq 0}\left(e^{-\frac{\delta}{8}s}\left(\Theta\left(1+\frac{s}{l\tau}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\delta\tau}{8}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\max\{1,\|D\|e^{\frac{\delta\tau}{8}},\ldots,\|D^{l-1}\|e^{\frac{(l-1)\delta\tau}{8}}\}\right)\right),$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \Phi e^{-\frac{\delta}{8}t}$$

$$\times\left(\Theta\left(1+\frac{t}{l\tau}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\delta\tau}{8}}+\max\{1,\|D\|e^{\frac{\delta\tau}{8}},\ldots,\|D^{l-1}\|e^{\frac{(l-1)\delta\tau}{8}}\}\right).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.2.

Теорема 4.1.4. *Пусть*
1) выполнены условия теоремы 2.1.1;
2) l — такое минимальное число, что $\|D^l\|<1$;
3) число $\alpha>0$ такое, что выполнено неравенство (4.1.22);
4) выполнено неравенство $e^{\frac{l\delta\tau}{8}}\|D^l\|>1$.
Тогда для решения начальной задачи (4.1.3) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \left\{\varphi\in C^1([-\tau,0]): \quad q_1\Lambda_2\max\{1,c_3^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1}<\tau q_{min},\right.$$

$$\left. q_1\Lambda_3\max\{1,c_3^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1}<\frac{1}{4}\delta, \quad 2^{1+\omega_1}q_1\nu(H)v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi)+q_2\Lambda_1 v^{\omega_2}(0,\varphi)<\frac{1}{2}\delta\right\},$$

где

$$c_3 = \|D^l\|^{-1}$$

$$\times\left(\Theta\left(1-\|D^l\|^{-1}e^{-\frac{l\delta\tau}{8}}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|D^j\|e^{\frac{j\delta\tau}{8}}+\max\{1,\|D\|,\ldots,\|D^{l-1}\|\}\right),$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq c_3\Phi\|D^l\|^{\frac{t}{l\tau}}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.2.

Теорема 4.1.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1.1, тогда нулевое решение системы (4.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Данный результат следует из теорем 4.1.2–4.1.4. То есть, по существу, теорема 4.1.5 является теоремой об устойчивости по первому приближению. Продемонстрируем результаты данного параграфа на следующем примере.

Пример 4.1.1. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)+\frac{1}{3}y(t-1)\right)=-4y(t)+2\int\limits_{t-1}^{t}e^{\frac{s-t}{2}}y(s)ds+\left(\int\limits_{t-1}^{t}y(s)ds\right)^2.$$

Проводя соответствие с системой (4.1.1), получим

$$\tau=1,\quad D=\frac{1}{3},\quad A=-4,\quad B(s)=2e^{-\frac{s}{2}},\quad F(u_1,u_2)=u_2^2.$$

Тогда в оценке (4.1.2) будут следующие параметры: $q_1=0$, $q_2=\omega_2=1$. Укажем H, $K(s)$, $M(s)$ так, чтобы они удовлетворяли условиям теоремы 4.1.5 и, следовательно, условиям теоремы 2.1.1:

$$H=\frac{1}{2},\quad K(s)=M(s)=e^{-s},$$

тогда $k=1$, и матрицы из (4.1.7) примут вид:

$$Q_{11}=2,\quad Q_{12}=0,\quad Q_{22}=e^{-1}-\frac{2}{9}>0,$$

$$Q_{13}(s)=-e^{-\frac{s}{2}},\quad Q_{33}(s)=e^{-s},\quad s\in[0,1].$$

Вычислим P_H и P из (4.1.5), (4.1.6), соответственно:

$$P=1,\quad P_H=2>0.$$

Так как выполняются условия теоремы 2.1.1, то нулевое решение экспоненциально устойчиво. Найдем оценки на решения и множество притяжения. Введем начальные условия:

$$\begin{cases} y(s)=\varphi(s), & s\in[-1,0],\\ y(+0)=\varphi(0), \end{cases}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-1,0])$ — заданная вектор-функция. Найдем δ из (4.1.21), при этом не упустим условия на α в пункте 3) теорем 4.1.2–4.1.4:

$$\delta = \min\{p_{min}^H - q_2\alpha\nu(H), k\} = \min\{2-\alpha, 1\}.$$

Положим $\alpha = 1$, тогда $\delta = 1$.

Поскольку $D = \frac{1}{3} < 1$, то в теоремах 4.1.2–4.1.4 в пункте 2) число $l = 1$. Так как

$$e^{\frac{l\delta\tau}{8}}|D^l| = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{8}} < 1,$$

то для данной системы выполнены условия теоремы 4.1.2. Найдем все параметры, которые участвуют в условиях теоремы 4.1.2, учитывая, что $q_1 = 0$:

$$\Lambda_1 = \frac{e^2}{2}, \quad \Theta = \frac{\sqrt{38}}{3}, \quad c_1 = \frac{\sqrt{38}}{3}\left(1 - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{8}}\right)^{-1} + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{8}} \approx 3,68.$$

Тогда в силу теоремы 4.1.2 для решения начальной задачи с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \left\{\varphi \in C^1([-1,0]) : \quad v(0,\varphi) < e^{-2} \approx 0,13\right\}$$

справедлива оценка

$$|y(t)| \le c_1 \Phi e^{-\frac{t}{8}},$$

где

$$\Phi = \max_{t\in[-1,0]} |\varphi(t)|,$$

$$v(0,\varphi) = \frac{1}{2}\left(\varphi(0) + \frac{\varphi(-\tau)}{3}\right)^2 + \int_0^1 \int_{-\eta}^0 e^s\varphi^2(s)ds d\eta + \int_{-1}^0 e^s\varphi^2(s)ds.$$

§ 4.2. Нелинейные системы с периодическими коэффициентами нейтрального типа

В данном параграфе изучим экспоненциальную устойчивость нулевого решения некоторых классов нелинейных систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Рассмотрим систему следующего вида:

$$\frac{d}{dt}(y(t)+D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds$$

$$+F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \tag{4.2.1}$$

где $D(t)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, $A(t)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е.

$$D(t+T)\equiv D(t), \quad A(t+T)\equiv A(t), \quad B(t+T,s)\equiv B(t,s),$$

$F(t,u_1,u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по (u_1,u_2) и следующей оценке:

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \quad t\ge 0, \tag{4.2.2}$$

где

$$q_1,\, q_2 \ge 0, \quad \omega_1,\, \omega_2 > 0 \;-\; const.$$

Рассмотрим начальную задачу для (4.2.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t)+D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds \\ +F\left(t, y(t), \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t>0, \\ y(s)=\varphi(s), \quad s\in[-\tau,0], \\ y(+0)=\varphi(0), \end{cases} \tag{4.2.3}$$

где $\varphi(s)\in C^1([-\tau,0])$ — заданная вектор-функция.

Цель данного параграфа также заключается в получении достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения, получении оценок на множество притяжения и оценок решений системы, которые характеризуют скорость убывания при $t \to \infty$. При исследовании устойчивости будет использоваться функционал Ляпунова – Красовского (2.2.3):

$$v(t,y) = \langle H(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), (y(t) + D(t)y(t-\tau))\rangle$$

$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds d\eta + \int\limits_{t-\tau}^t \langle M(t-s,s)y(s), y(s)\rangle ds. \qquad (4.2.4)$$

В данном параграфе будем предполагать, что выполнены условия теоремы 2.2.1. Напомним обозначения, которые использовались в параграфе 2.2: $h_{min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, $p^H_{min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы

$$P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t), \qquad (4.2.5)$$

$$P(t) = \tau Q_{11}(t) - \tau Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int\limits_0^\tau Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(t,s)ds,$$

где

$$Q_{11}(t) = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + M(0,t)\right) - K(0),$$

$$Q_{12}(t) = \frac{1}{\tau}(H(t)A(t) + M(0,t))D(t) + K(0)D(t), \qquad (4.2.6)$$

$$Q_{22}(t) = R(t) = \frac{1}{\tau}(M(\tau,t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t)) - D^*(t)K(0)D(t) > 0,$$

$$Q_{13}(t,s) = -H(t)B(t,s), \quad Q_{33}(s) = K(s).$$

Введем обозначения: $q_{min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $Q_{22}(t) = R(t)$,

$$z_1(t) = Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)) + y(t-\tau),$$

$$z_2(t,s) = Q_{33}^{-1}(t-s)Q_{13}^*(t,t-s)(y(t) + D(t)y(t-\tau)) + y(s),$$

$$m_{\max} = \max_{s\in[0,T]} \|M^{-1}(\tau,s)\|^{1+\omega_2},$$

$$N = \max_{s\in[0,T]} \nu(H(s)),$$

где $\nu(H(t)) = \|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|$ — число обусловленности матрицы $H(t)$,

$$\Lambda_1 = \frac{m_{\max}\tau^{1+\omega_2}}{\alpha} \max_{s\in[0,T]} \|H(s)\|,$$

$$\Lambda_2 = 2^{1+\omega_1} \max_{s\in[0,T]} \|H(s)\| \max_{s\in[0,T]} \|D(s)\|^{1+\omega_1},$$

$$\Lambda_3 = 2^{1+\omega_1} N \max_{s\in[0,T]} \|D(s)\|^{1+\omega_1} \max_{s\in[0,T]} \left(\|Q_{22}^{-1}(s)Q_{12}^*(s)\| + \frac{1}{4}\right),$$

α — положительное число.

Сформулируем теорему, которая является аналогом теоремы из [25].

Теорема 4.2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1. Тогда при любых $\alpha > 0$ для решения начальной задачи (2.1), определенного при $t \in (0,t')$, справедлива оценка при $t \in (0,t')$:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le \langle H(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)), (y(t)+D(t)y(t-\tau))\rangle$$
$$\times(q_2\alpha\nu(H(t)) - p^H_{min}(t)) + 2^{1+\omega_1}q_1 N v^{1+\frac{\omega_1}{2}}(t,y) + q_2\Lambda_1 v^{1+\omega_2}(t,y)$$
$$-k\int\limits_0^\tau\int\limits_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, ds d\eta - k\int\limits_{t-\tau}^t \langle M(t-s,s)y(s),y(s)\rangle\, ds$$
$$+ (q_1\Lambda_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} - \tau q_{min}(t))\,\|z_1(t)\|^2 + q_1\Lambda_3 v(t,y)\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}. \quad (4.2.7)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.1.

Введем обозначения:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)(\varphi(0)+D(0)\varphi(-\tau)), (\varphi(0)+D(0)\varphi(-\tau))\rangle$$
$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds d\eta + \int\limits_{-\tau}^0 \langle M(-s,s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds,$$

$$\delta(t) = \min\{p^H_{min}(t) - q_2\alpha\nu(H(t)), k\}, \quad \Delta = \int\limits_0^T \frac{\delta(s)}{2T}ds, \tag{4.2.8}$$

$$\Theta = \max_{s\in[0,T]} \|H^{-1}(s)\|^{1/2}$$

$$\times\left(2\|H(0)\|(1+\|D(0)\|^2) + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^\eta \|K(s)\|\,dsd\eta + \int\limits_0^\tau \|M(s,-s)\|\,ds\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2.9}$$

$$c = \exp\left(\max_{\xi\in[0,T]}\left(\frac{\xi}{T}\int\limits_0^T \frac{\delta(s)}{2}ds - \int\limits_0^\xi \frac{\delta(s)}{2}ds\right)\right). \tag{4.2.10}$$

Как отмечалось выше (после доказательства теоремы 2.2.1), при выполнении условий теоремы 2.2.1 $M(0,t)$ — это T-периодическое положительно определенное решение (2.2.11), следовательно, имеет место оценка (2.2.21):

$$\|G_i(t)\| = \|D(t)\cdots D(t-(i-1)\tau)\| \le \beta_M \alpha_M^{\frac{i-1}{2}},$$

где $G_i(t)$ определена в (2.2.13),

$$\beta_M = \sqrt{\max_{s\in[0,T]}\|M(0,s)\| \max_{s\in[0,T]}\|M^{-1}(0,s)\|},$$

$$\alpha_M = \max_{s\in[0,T]}\Big(1 - \Big\|M^{\frac{1}{2}}(0,s-\tau)\big(M(0,s-\tau) - D^*(s)M(0,s)D(s)\big)^{-1}$$

$$\times M^{\frac{1}{2}}(0,s-\tau)\Big\|^{-1}\Big).$$

Теорема 4.2.2. *Пусть*

1) выполнены условия теоремы 2.2.1;

2) $\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0$, *где* $\gamma_H(t) = \min\{p^H_{min}(t), k\}$;

3) число $\alpha > 0$ *такое, что выполнено неравенство*

$$\alpha q_2 \int\limits_0^T \nu(H(s))ds < \int\limits_0^T \gamma_H(s)ds; \tag{4.2.12}$$

4) выполнено неравенство $\alpha_M^2 e^{\Delta\tau} < 1$.
Тогда для решения начальной задачи (4.2.3) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Bigg\{\varphi \in C^1([-\tau, 0]) : \quad q_1\Lambda_2 \max\{1, c_1^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \tau \min_{s\in[0,T]} q_{min}(s),$$

$$q_1\Lambda_3 \max\{1, c_1^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \frac{1}{2}\Delta, \quad 2^{1+\omega_1} q_1 N c^{\frac{\omega_1}{2}} v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi) + q_2\Lambda_1 c^{\omega_2} v^{\omega_2}(0,\varphi) < \Delta\Bigg\},$$

где

$$c_1 = \beta_M \alpha_M^{-1/2}\Theta c\left(1 - \alpha_M^{1/2} e^{\frac{\Delta\tau}{4}}\right)^{-1},$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le c_1 \Phi e^{-\frac{\Delta t}{4}}. \tag{4.2.13}$$

Доказательство. В силу неравенств в определении множества $\mathbf{E}$ и того, что параметр c из (4.2.10) не меньше 1, существует $t_1 > 0$ такое, что при всех $t \in (0, t_1)$ справедливы неравенства

$$q_1\Lambda_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} - \tau q_{min}(t) < 0,$$

$$q_1\Lambda_3\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} < \frac{1}{2}\Delta,$$

$$2^{\omega_1} q_1 N v^{\frac{\omega_1}{2}}(t,y) + q_2\Lambda_1 v^{1+\omega_2}(t,y) < \Delta.$$

Следовательно, оценку (4.2.7) при $t \in (0, t_1)$ можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le \langle H(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), (y(t) + D(t)y(t-\tau))\rangle$$

$$\times(q_2\alpha\nu(H(t)) - p_{min}^H(t)) + \frac{3}{2}\Delta v(t,y)$$

$$-k\int_0^\tau\int_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta - k\int_{t-\tau}^t \langle M(t-s,s)y(s), y(s)\rangle\, ds.$$

Воспользуемся определением $v(t,y)$ из (4.2.4), $\delta(t)$ из (4.2.8) и получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le \left(\frac{3}{2}\Delta - \delta(t)\right)v(t,y).$$

Следовательно,

$$v(t,y) \le \exp\left(\frac{3}{2}\Delta t - \int\limits_0^t \delta(s)ds\right) v(0,\varphi).$$

Используя лемму 1.2.1 и обозначения (4.2.8), (4.2.10), имеем

$$v(t,y) \le c^2 e^{-\frac{1}{2}\Delta t} v(0,\varphi).$$

Отсюда несложно вывести оценку при $t \in (0,t_1)$, учитывая обозначение (4.2.9):

$$\|y(t) + D(t)y(t-\tau)\| \le \Theta c e^{-\frac{\Delta}{4}t}\Phi.$$

Повторив рассуждения теоремы 2.2.3, получим справедливость оценки (4.2.13) при $t \in (0,t_1)$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1.2.

Теорема доказана.

Далее сформулируем еще две теоремы, в которых рассматриваются оставшиеся два случая. Доказательства данных теорем аналогичны доказательству теоремы 4.2.2.

Теорема 4.2.3. *Пусть*

1) выполнены условия теоремы 2.2.1;

2) $\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0$, *где* $\gamma_H(t) = \min\{p^H_{min}(t), k\}$;

3) число $\alpha > 0$ *такое, что выполнено неравенство (4.2.12);*

4) выполнено равенство $\alpha_M^2 e^{\Delta\tau} = 1$.

Тогда для решения начальной задачи (4.2.3) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E} = \Bigg\{\varphi \in C^1([-\tau,0]) : \quad q_1\Lambda_2 \max\{1, c_2^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \tau \min_{s\in[0,T]} q_{min}(s),$$

$$q_1\Lambda_3 \max\{1, c_2^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1} < \frac{1}{2}\Delta, \quad 2^{1+\omega_1}q_1 N c^{\frac{\omega_1}{2}} v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi) + q_2\Lambda_1 c^{\omega_2} v^{\omega_2}(0,\varphi) < \Delta\Bigg\},$$

где

$$c_2 = \beta_M \alpha_M^{-1/2} \max_{s\ge 0}\left(e^{-\frac{\Delta s}{4}}\left(\frac{\Theta c}{\tau}s + \Theta c + 1\right)\right),$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi\beta_M\alpha_M^{-1/2}e^{-\frac{\Delta t}{4}}\left(\frac{\Theta c}{\tau}t+\Theta c+1\right). \qquad (4.2.14)$$

Теорема 4.2.4. *Пусть*
1) выполнены условия теоремы 2.2.1;
2) $\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0$, *где* $\gamma_H(t)=\min\{p^H_{min}(t),k\}$;
3) число $\alpha>0$ *такое, что выполнено неравенство (4.2.12);*
4) выполнено неравенство $\alpha_M^2 e^{\Delta\tau}>1$.
Тогда для решения начальной задачи (4.2.3) с начальными данными из множества

$$\mathbf{E}=\Big\{\varphi\in C^1([-\tau,0]):\quad q_1\Lambda_2\max\{1,c_3^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1}<\tau\min_{s\in[0,T]}q_{min}(s),$$

$$q_1\Lambda_3\max\{1,c_3^{\omega_1}\}\Phi^{\omega_1}<\frac{1}{2}\Delta,\quad 2^{1+\omega_1}q_1Nc^{\frac{\omega_1}{2}}v^{\frac{\omega_1}{2}}(0,\varphi)+q_2\Lambda_1c^{\omega_2}v^{\omega_2}(0,\varphi)<\Delta\Big\},$$

где

$$c_3=\beta_M\alpha_M^{-1/2}\left(\Theta c\left(1-\alpha_M^{-1/2}e^{-\Delta\tau}\right)^{-1}+\alpha_M^{1/2}\right),$$

справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le c_3\Phi\alpha_M^{\frac{1}{2\tau}t}. \qquad (4.2.15)$$

Из теорем 4.2.2–4.2.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.2.5. *Пусть*
1) выполнены условия теоремы 2.2.1;
2) $\int\limits_0^T \gamma_H(s)ds > 0$, *где* $\gamma_H(t)=\min\{p^H_{min}(t),k\}$.
Тогда нулевое решение системы (4.2.1) экспоненциально устойчиво.

Пример 4.2.1. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)+\frac{1}{3}y(t-1)\right)=-y(t)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\int\limits_{t-1}^{t}e^{\frac{-t+s}{2}}y(s)ds+y^2(t).$$

Проводя соответствие с системой (4.2.1), получим, что $\tau = 1$, $T = 2\pi$,

$$D(t) \equiv \frac{1}{3}, \quad A(t) \equiv -1, \quad B(t,s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s}{2}} \sin t, \quad F(t, u_1, u_2) = u_1^2.$$

Параметры в оценке (4.2.2) будут следующие:

$$q_1 = 1, \quad \omega_1 = 1, \quad q_2 = 0.$$

Воспользуемся теоремой 4.2.5 для исследования экспоненциальной устойчивости нулевого решения. Укажем матрицы, которые будут удовлетворять условиям теоремы 2.2.1:

$$H(t) \equiv 2, \quad K(s) = e^{-s} \quad M(s,t) = e^{-s}.$$

Выберем $k = 1$. Посчитаем матрицы из (4.2.6):

$$Q_{11}(t) \equiv 2, \quad Q_{12}(t) \equiv 0, \quad Q_{22}(t) = R(t) \equiv e^{-1} - \frac{2}{9} > 0,$$

$$Q_{13}(t,s) = -\sqrt{2} e^{-\frac{s}{2}} \sin t, \quad Q_{33}(s) = e^{s}.$$

Тогда матрица $P_H(t)$ из (4.2.5) равна

$$P_H(t) = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t.$$

Легко заметить, что при таком выборе $H(t)$, $K(s)$, $M(s,t)$ выполняются условия теоремы 2.2.1. Проверим, что выполнено условие 2) в теореме 4.2.5:

$$\int\limits_0^T \gamma_H(s) ds = \int\limits_0^T \min\{p_{min}^H(s), k\} ds = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 s \, ds = \pi > 0.$$

Следовательно, нулевое решение рассматриваемой системы экспоненциально устойчиво. Найдем оценки решений и множества притяжения. Для этого поставим начальную задачу:

$$\begin{cases} y(s) = \varphi(s), \quad s \in [-1, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases}$$

где $\varphi(s) \in C^1([-1,0])$ — заданная вектор-функция. Параметр $\alpha > 0$ участвует в определении $\delta(t)$ из (4.2.8) и множества притяжения $\mathbf{E}$. Поскольку $q_2 = 0$, то параметр α можно взять любым в силу (4.2.12), в том числе сколь угодно малым, и затем перейти к пределу в неравенствах (4.2.13)–(4.2.15), устремив α к нулю. Тем самым, можно считать, то $\alpha = 0$. Вычислим необходимые параметры:

$$N = 1, \quad \Lambda_2 = \frac{8}{9}, \quad \Lambda_3 = \frac{1}{9}, \quad \delta(t) = \cos^2 t, \quad \Delta = \frac{1}{4},$$

$$q_{min}(t) = e^{-1} - \frac{2}{9} \approx 0,14, \quad \beta_M = 1, \quad \alpha_M = \frac{1}{9},$$

$$c = \exp\left(\max_{\xi\in[0,2\pi]}\left(-\frac{\sin 2\xi}{8}\right)\right) = e^{\frac{1}{8}} \approx 1,13.$$

Поскольку $\alpha_M^2 e^{\Delta\tau} = \frac{1}{81}e^{\frac{1}{2}} < 1$, то выполняются условия теоремы 4.2.2. Вычислим параметр c_1:

$$c_1 = \frac{7}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{8}}\left(1 - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{16}}\right)^{-1} \approx 8,69.$$

Тогда для решения начальной задачи с начальными условиями из множества

$$\mathbf{E} = \left\{\varphi \in C^1([-1,0]): \quad \max_{t\in[-1,0]}|\varphi(t)| < 0,006, \quad v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi) < 0,05\right\}$$

справедлива оценка

$$|y(t)| \leq c_1\left(\max_{t\in[-1,0]}|\varphi(t)|\right)e^{-\frac{t}{16}},$$

где

$$v(0,\varphi) = 2\left(\varphi(0) + \frac{\varphi(-\tau)}{3}\right)^2 + \int\limits_0^1\int\limits_{-\eta}^0 e^s\varphi^2(s)ds d\eta + \int\limits_{-1}^0 e^s\varphi^2(s)ds.$$

Заключение

В диссертации изучены асимптотические свойства решений следующих классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием:

- системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами;
- системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами;
- системы нелинейных уравнений с постоянными коэффициентами в линейной части;
- системы нелинейных уравнений с периодическими коэффициентами в линейной части;
- системы линейных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами;
- системы линейных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами;
- системы нелинейных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейной части;
- системы нелинейных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейной части.

Укажем основные результаты диссертации:

1. Для рассматриваемых классов уравнений получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения в терминах матричных и интегральных неравенств.

2. Указаны конструктивные оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, и конструктивные оценки на множество притяжения в нелинейном случае.

3. Для линейных систем исследована робастная устойчивость. В случае выполнения достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения найдены условия на возмущения, при которых сохраняется экспоненциальная устойчивость нулевого решения. Указаны оценки решений возмущенной системы, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности.

Список литературы

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

[2] Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С. 745–754.

[3] Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. II // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 555–562.

[4] Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.

[5] Алексенко Н.В., Романовский Р.К. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.

[6] Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983.

[7] Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980.

[8] Белых Л.Н. Анализ математических моделей в иммунологии. М.: Наука, 1988.

[9] Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[10] Березанский Л.М. Развитие W-метода Н.В. Азбелева в задачах устойчивости решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 739–750.

[11] Ванг К.-Ш., Ву Дж. Периодические системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и динамика птичьего гриппа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 32–42.

[12] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

[13] Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. 1994.

[14] Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

[15] Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977.

[16] Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1974.

[17] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[18] Демиденко Г.В. Матричные уравнения. Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009.

[19] Демиденко Г.В., Водопьянов Е.С., Скворцова М.А. Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 3. С. 53–60.

[20] Демиденко Г.В., Колчанов Н.А., Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. выч. матем. матем. физ. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

[21] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

[22] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

[23] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

[24] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

[25] Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А. Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.

[26] Долгий Ю.Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1996.

[27] Долгий Ю.Ф., Ким А.В. К методу функционалов Ляпунова для систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1313–1318.

[28] Дэй У.А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974.

[29] Зверкин А.М. Дифференциально-разностные уравнения с периодическими коэффициентами // В кн.: Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. С. 498–535.

[30] Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1983.

[31] Казаков А.Л., Лемперт А.А., Фунг Т.Б. Математическая модель управления запасами (поставками) с учетом запаздывания // Вестник ИрГТУ. 2012. № 4. С. 131–137.

[32] Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992.

[33] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

[34] Комленко Ю.В., Тонков Е.Л. Представление Ляпунова – Флоке для дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Матем. 1995. № 10. С. 40–45.

[35] Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наукова думка, 1989.

[36] Кореневский Д.Г. Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах: авториз. пер. с укр. / НАН Украины, Институт математики. Киев: Академпериодика, 2008.

[37] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. мат. мех. 1956. Т. 20, № 3. С. 315–327.

[38] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1959.

[39] Крупнова Н.И., Шиманов С.Н. Признак устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. мат. мех. 1972. Т. 36, вып. 3. С. 533–536.

[40] Малыгина В.В. Об устойчивости уравнений с периодическими параметрами // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1987. С. 41–43.

[41] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

[42] Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980.

[43] Матвеева И.И. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.

[44] Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев: Вища школа, 1979.

[45] Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М., Хусаинов Д.Я., Чеборин О.Г. “Магнитная потенциальная яма” — эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем. Киев: Наукова думка, 1991.

[46] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.-Л.: Гостехиздат, 1951; 2-е изд. М.: Наука, 1972.

[47] Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А. Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // Журн. техн. физ. 2011. Т. 81, вып. 9. С. 16–22.

[48] Перцев Н.В., Пичугин Б.Ю., Пичугина А.Н. Исследование асимптотического поведения решений некоторых моделей эпидемических процессов // Матем. биология и биоинформ. 2013. Т. 8, № 1. С. 21–48.

[49] Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: ИЛ, 1961.

[50] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. мат. мех. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.

[51] Разумихин Б.С. Прямой метод исследования устойчивости систем с последействием. Препринт. М.: ВНИИ системных исследований, 1984. 75 с.

[52] Репин Ю.М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикл. мат. мех. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 564–566.

[53] Рехлицкий З.И. Об устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Изв. АН СССР. 1966. Т. 30, № 5. С. 981–992.

[54] Романовский Р.К., Троценко Г.А. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.

[55] Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969.

[56] Свирежев Ю.М., Пасеков В.П. Основы математической генетики. М.: Наука, 1982.

[57] Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

[58] Халанай А. Теория устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием // Acad. Répub. Popul. Roum., Rev. Math. Pures Appl. 1961. V. 6. P. 633–653.

[59] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

[60] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[61] Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Кожаметов А.Т. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.

[62] Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т. Сходимость решений неавтономных систем нейтрального типа // Изв. вузов. Матем. 2006. № 1. С. 68–72.

[63] Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963.

[64] Чеботарёв Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН СССР. 1949. Т. 26. С. 3–331.

[65] Шильман С.В. Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.

[66] Шиманов С.Н. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1983.

[67] Эльсгольц Л.Э. Качественные методы в математическом анализе. М.: ГИТТЛ, 1955.

[68] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964.

[69] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

[70] Ыскак Т.К. Об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с периодическими коэффициентами в линейных членах // Динамические системы. 2017, Т. 7(35), № 4. С. 373–385.

[71] Ыскак Т.К. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2018. Т. 25. С. 159–169.

[72] Ыскак Т. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 3. С. 118–127.

[73] Ыскак Т. Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.

[74] Ыскак Т. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 2204–2215.

[75] Arik S. New criteria for stability of neutral-type neural networks with multiple time delays // IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst. 2020. V. 31, No. 5. P. 1504–1513.

[76] Bernoussi A. Global stability of an SIRSI epidemic model with a distributed delayed and generalized incidence function // Electron. J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 8, No. 2. P. 151–164.

[77] Demidenko G.V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No. 3. P. 119–130.

[78] Demidenko G.V. Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // J. Comput. Math. Optim. 2010. V. 6, No. 1. P. 1–12.

[79] Demidenko G.V., Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. V. 2016, No. 19. P. 1–20.

[80] Erneux T. Applied delay differential equations. Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, V. 3. New York: Springer, 2009.

[81] Faydasicok O. A new Lyapunov functional for stability analysis of neutral-type Hopfield neural networks with multiple delays // Neural Networks. 2020. V. 129. P. 288–297.

[82] Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Mathematics and its Applications, V. 74. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[83] Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. Stability of time-delay systems. Control Engineering. Boston: Birkhäuser, 2003.

[84] Hahn W. On difference differential equations with periodic coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1961. V. 3, No. 1. P. 70–101.

[85] Kharitonov V.L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Systems Control Lett. 2004. V. 53, No. 5. P. 395–405.

[86] Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D. Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. Mathematics and its Applications, V. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[87] Manivannan R., Samidurai R., Cao J., Alsaedi A., Alsaadi F.E. Stability analysis of interval time-varying delayed neural networks including

neutral time-delay and leakage delay // Chaos, Solitons & Fractals. 2018. V. 114. P. 433–445.

[88] Mondié S., Kharitonov V.L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, No. 2. P. 268–273.

[89] Samidurai R., Rajavel S., Sriraman R., Cao J., Alsaedi A., Alsaadi F.E. Novel results on stability analysis of neutral-type neural networks with additive time-varying delay components and leakage delay // International Journal of Control, Automation and Systems. 2017. V. 15, No. 4. P. 1888–1900.

[90] Songfang J., Yanheng Ch. Global exponential asymptotic stability of RNNs with mixed asynchronous time-varying delays // Adv. Difference Equ. 2020. No. 200. P. 1–14.

[91] Stokes A.P. A Floquet theory for functional differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V. 48, No. 8. P. 1330–1334.

[92] Yskak T. Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Functional Differential Equations. 2018. V. 25, No. 1–2. P. 97–108.

[93] Weera W., Niamsup P. Novel delay-dependent exponential stability criteria for neutral-type neural networks with non-differentiable time-varying discrete and neutral delays // Neurocomputing. 2016. V. 173. P. 886–898.

[94] Zhou X., Zhang L., Zheng T., Hong-li L., Teng Z. Global stability for a class of HIV virus-to-cell dynamical model with Beddington-DeAngelis functional response and distributed time delay // Math. Biosci. Eng. 2020. V. 17, No. 5. P. 4527–4543.