ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 519.21

Шефер Евгений Игоревич

Асимптотический анализ распределения времени пребывания случайного блуждания в области умеренно больших уклонений

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
И. С. Борисов

Новосибирск — 2021

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией $\sigma^2 := \mathbf{E}\xi_1^2 > 0$. Обозначим $S_k := \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Положим также $S_0 := 0$. Временем пребывания траектории случайного блуждания $\{S_1, \ldots, S_n\}$ не ниже переменного уровня $xg(\cdot)$ назовем случайную величину

$$\tau_n(xg) := \sum_{k=1}^{n} I\{S_k \geq xg(k/n)\},$$

где $I(\cdot)$ — индикатор события, $x \equiv x(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ задает скорость удаления границы, а ограниченная положительная функция $g(t)$, $t \in (0, 1]$, — конфигурацию границы в зависимости от времени.

Исследованию распределения $\tau_n(xg)$ при $g(\cdot) \equiv 1$ посвящено немало работ. Прежде всего, это касается результатов в так называемой области нормальных уклонений, когда $x = \sigma y \sqrt{n}$ и величина y не зависит от n. Одним из первых таких результатов является знаменитый предельный (т.е. при $n \to \infty$) закон арксинуса, доказанный П. Леви [28] для простейшего симметричного случайного блуждания (случай $x = 0$). Позже этот результат был улучшен в работе П. Эрдёша и М. Каца (см. [24]), где закон арксинуса был распространен на суммы независимых случайных величин с конечной ненулевой дисперсией. Изучением подобного функционала так же занимались К. Л. Чжун и У. Феллер [21] и Э. Спарре–Андерсен [29].

В силу известного принципа инвариантности Донскера–Прохорова [14, 23] предельное распределение достаточно широкого класса функционалов от процесса частичных сумм $S_n^*(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}$, $t \in [0, 1]$, совпадает с распределением тех же функционалов от стандартного винеровского процесса. В настоящее время принцип инвариантности играет решающую роль при исследовании предельного поведения граничных функционалов типа времени пребывания для случайных блужданий в области нормальных уклонений, хотя в более ранних упомянутых выше работах подобного обоснования предельных законов не было.

В самом деле, рассмотрим интегральный функционал

$$F_y(f) := \int\limits_0^1 I(f(t) \geq y)dt$$

при соответствующих условиях измеримости траектории $f(t)$. Легко видеть, что $F_y(S_n^*) = \tau_n(x)/n + O(1/n)$. Так что в области нормальных уклонений (т.е. для $x = \sigma y \sqrt{n}$) в силу принципа инвариантности нормированное время $\tau_n(x)/n$ сходится по распределению к случайной величине $\tau(y) := F_y(W)$, где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, определенный при $t \in [0,1]$. Хорошо известно (например, см. [2, 11]), что при любом $y \geq 0$

$$\mathbf{P}\{\tau(y) \leq s\} = \int_0^s \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(1-t)}}\, dt + 2\Phi(y) - 1, \tag{1}$$

где $\Phi(y)$ — функция Лапласа. Этот результат в несколько более громоздкой форме был впервые получен П. Леви [28] (см. также [30]). Приведенная компактная форма записи функции распределения $\tau(y)$ содержится, например, в работе П.Е. Баскаковой и А.Н. Бородина [2]. Легко видеть, что при $y = 0$ мы получаем вышеупомянутый *закон арксинуса*

$$\mathbf{P}\{\tau(0) \leq s\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{s},$$

который принадлежит классу бета-распределений. В силу формулы полной вероятности совершенно ясно, что распределение $\tau(y)$ представляет собой смесь законов арксинуса на отрезках переменной длины. При этом роль смешивающего распределения играет распределение момента первого достижения траекторией стандартного винеровского процесса уровня y. Однако непосредственно из (1) сказанное не следует. Формула (1) представляет собой существенно упрощенную запись отмеченной выше смеси законов арксинуса.

Другое направление асимптотического анализа — это получение точной асимптотики моментов и хвоста распределения случайной величины $\tau_n(xg)$ в области больших уклонений, т.е. когда $x/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$. Здесь уже не работают в полной мере функциональные предельные теоремы, например, принцип инвариантности, поскольку речь идет об исчезающе малых вероятностях событий, причем эта малость может быть существенно меньше погрешности приближения в соответствующей функциональной предельной теореме. Подобные результаты представляют интерес для финансовой и актуарной математики, когда те или иные показатели работы компании, допускающие интерпретацию введенных выше процессов частичных сумм, попадают в “красную зону”, т.е. превышают некоторый “высокий” критический уровень, который достижим с очень маленькой вероятностью.

Что касается асимптотических результатов для распределения $\tau_n(xg)$ в области больших уклонений для x, то в 2015 году В.И. Лотов и А.С. Тарасенко [13] опубликовали нижеследующий результат об асимптотическом поведении математического ожидания случайной величины $\tau_n(xg)$ в случае удаляющейся прямолинейной границы, т.е. в случае $g(t) \equiv 1$ и $x \equiv x(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, предположив выполнение следующих условий:

(A) $\frac{x}{\sqrt{n}} \to \infty$ и $\frac{x}{n} \to 0$ при $n \to \infty$;

(B) $\mathbf{E}e^{\lambda|\xi_1|} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$.

Отметим, что условие (A) описывает так называемую зону *умеренно больших уклонений*. Условие (B) принято называть (двусторонним) *условием Крамера* на распределение скачка блуждания.

Теорема A. ([13]) *При выполнении условий* (A) *и* (B) *имеет место следующее асимптотическое соотношение при* $n \to \infty$:

$$\mathbf{E}\tau_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n^{5/2}\sigma^3}{x^3} e^{-n\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)}, \tag{2}$$

где $\Lambda(z)$ — *функция уклонений (функция Крамера) случайной величины* ξ_1, *т.е.*

$$\Lambda(z) := \sup_{t\in\mathbb{R}}\{tz - \log\psi_{\xi_1}(t)\}, \ \ z \in \mathbb{R}, \ \ \text{где} \ \ \psi_{\xi_1}(t) := \mathbf{E}e^{t\xi_1}.$$

Для корректного задания функции Крамера здесь и всюду в дальнейшем будем считать, что эта функция принимает свои значения на расширенной числовой прямой и что $\log\infty = \infty$ и $a - \infty = -\infty$ для любого действительного a. Отметим, что при выполнении условия Крамера (B) функция уклонений будет конечной в некоторой окрестности нуля (см. [7]).

Цель работы.

1. Исследование асимптотического поведения математического ожидания случайной величины $\tau_n(xg)$ при $n \to \infty$ для широкого класса функций $g(\cdot)$ при выполнении условий (A) и (B).

2. Вычисление асимптотики хвоста распределения нормированной случайной величины $\tau_n(x)/n$ при $n \to \infty$ в случае удаляющейся прямолинейной границы ($g(t) \equiv 1$) при выполнении условий (A) и (B).

Обзор основных результатов. В *первой главе* исследовано асимптотическое поведение математического ожидания случайной величины $\tau_n(xg)$ при $n \to \infty$ для широкого класса функций $g(\cdot)$ при выполнении условий (A) и (B). В теореме 1 доказано, что в случае, когда функция $g(t)$ касается в одной точке $t_0 \in (0, 1]$ некоторой повернутой параболы $C\sqrt{t}$ при выполнении достаточно мягких ограничений на гладкость функции $g(t)$ в окрестности точки t_0, асимптотика математического ожидания определяется только поведением функции

$g(t)$ в бесконечно малой окрестности этой точки, а именно, номерами первых ненулевых левых и правых производных функции $g^2(t)/t$ в точке t_0. В частности, в случае $g(\cdot) \equiv 1$ из теоремы 1 следует вышеупомянутый результат В.И. Лотова и А.С. Тарасенко.

В теореме 2 рассматривается случай, когда $g(t)$ совпадает с повернутой параболой на некотором невырожденном отрезке $[t_1, t_2] \in (0, 1]$. В этом случае асимптотика математического ожидания определяется только указанным поведением функции $g(t)$ на интервале, и при некоторых условиях на характер поведения функции $g(t)$ в окрестностях точек t_1 и t_2 указанная асимптотика не зависит от порядка касания функцией $g(t)$ этих точек. Результаты этих двух теорем допускают обобщение на случай конечного множества точек касания повернутой параболы $C\sqrt{t}$ и таких невырожденных отрезков. Хотелось бы отметить, что константа C в этом случае будет определяться единственным образом. Отметим также, что функции вида $y(t) = C\sqrt{t}$, асимптотически пропорциональные стандартному отклонению случайного процесса $S_n^*(t)$, представляют собой так называемые линии уровня для распределения этого случайного процесса: при любом $t \in (0, 1]$ распределение случайной величины $S_n^*(t)/\sqrt{t}$ в пределе при $n \to \infty$ не зависит от значения t.

Во *второй главе* представлены результаты исследования асимптотики хвоста распределения нормированной случайной величины $\tau_n(x)/n$ в случае удаляющейся прямолинейной границы ($g(t) \equiv 1$) при выполнении "усиленного справа" условия Крамера на распределение скачков случайного блуждания. При этом $x = x(n)$ возрастает со скоростью, соответствующей несколько суженной зоне умеренно больших уклонений. Основные результаты второй главы утверждают, что для любого фиксированного $y \in (0, 1)$ при $n \to \infty$ асимптотика искомой вероятности имеет вид

$$\mathbf{P}\{\tau_n(x) \geq ny\} \sim \frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}} \frac{n\sigma^2}{x^2} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\},$$

где функция уклонений $\Lambda(z)$ была определена выше.

Эти результаты содержатся в теоремах 3–5, где в последних двух теоремах рассмотрены некоторые классы случайных блужданий, удовлетворяющих условию Крамера, для которых удается исследовать указанную выше асимптотику распределения в более широких, чем в теореме 3, зонах умеренно больших уклонений. В литературе подобные результаты не обнаружены.

Важнейшую роль при доказательстве основных результатов второй главы играют *оценки скорости сходимости в законе арксинуса*, где получен ряд результатов в случае, когда скачки случайного блуждания удовлетворяют условию (B). Эти результаты существенно влияют на размер зоны уклонений в теоремах 3–5. В теореме 6 получена оценка скорости сходимости в законе арксинуса для случайных блужданий с условием Крамера (B). Отдельно рассмотрен случай простейшего симметричного случайного блуждания. В этом частном случае получены неулучшаемые оценки скорости сходимости в терминах метрики Колмогорова (теоремы 7–10). Кроме того, в последнем случае было установлено, что оценки скорости поточечной сходимости функции распределения изучаемого времени пребывания имеют значительно более высокий порядок малости, нежели оценка точности равномерной аппроксимации указанных функций распределения (упомянутая выше скорость сходимости в метрике Колмогорова).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и снабжены полными доказательствами. Ранее асимптотика распределения вышеупомянутого времени пребывания в области умеренно больших уклонений не исследовалась. В литературе автор обнаружил лишь результаты в этом направлении, посвященные вычислению асимптотики математического ожидания времени пребывания траектории классического случайного блуждания выше прямолинейного уровня, удаляющегося со скоростью в диапазоне умеренно больших уклонений (приведенная выше теорема A). Так же имеются результаты, посвященные построению верхних оценок для моментов указанного времени пребывания выше удаляющейся прямолинейной границы [16].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Асимптотика математического ожидания случайной величины $\tau_n(xg)$ при $n \to \infty$ для широкого класса функций $g(\cdot)$ при выполнении условий (A) и (B). Результаты опубликованы в [4] и [20].

2. Асимптотика хвоста распределения нормированной случайной величины $\tau_n(x)/n$ при $n \to \infty$ при выполнении условия (A) и (B). Кроме того, выносятся на защиту результаты об оценках скорости сходимости в законе арксинуса для времени пребывания случайного блуждания на положительной полуоси за n шагов. Результаты опубликованы в [3].

Методы исследований. В работе применялись разнообразные методы и подходы, например, метод перевала для исследования асимптотики интегралов вида преобразования Лапласа, а также асимптотические результаты для сумм независимых случайных величин, включая результаты по умеренно большим уклонениям, принцип инвариантности Донскера–Прохорова, метод одного вероятностного пространства Я. Комлоша, П. Майора и Г. Тушнади [26, 27], а также различные комбинаторные соотношения и вероятностные неравенства.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены, например, к граничным задачам актуарной математики (теории страхования). Часть из них может быть использована при подготовке спецкурсов для магистрантов и аспирантов университетов.

Апробация работы. Основные результаты работы диссертации докладывались на объединенном семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института Математики СО РАН под руководством академика А.А. Боровкова. Результаты работы также докладывались на конференциях: "Applied Probability Workshop" (Новосибирск, 2020), "Современные проблемы стохастического анализа" (Ташкент, 2020), "Международная научная студенческая конференция" (Новосибирск, в 2017 и 2020 годах).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [3], [4], [20], а также в [5], [18], [19]. Работы [3], [4], [20], написанные в неразделимом соавторстве с научным руководителем, опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Нумерация теорем, следствий, замечаний и формул сквозная. Список литературы составлен последовательно по двум алфавитам: русскому и латинскому.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору И.С. Борисову за предложенную интересную тему исследования, помощь и совместное творчество, а также профессору А.А. Могульскому за конструктивные советы касательно постановки задачи в главе 1.

ГЛАВА 1.

Асимптотика среднего времени пребывания траектории случайного блуждания не ниже удаляющейся криволинейной границы

§ 1. Формулировка основных результатов

В главе исследуется асимптотическое поведение при $n \to \infty$ математического ожидания

$$\mathbf{E}\tau_n(xg) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(t) := g^2(t)/t, \ \ t \in (0,1].$$

Для формулировки нижеследующих условий нам будет удобно доопределить $G(t)$ в правой полуокрестности точки $t = 1$ как $G(t) := g^2(1)/t$. Предположим, что существует точка $t_0 \in (0,1]$, в которой достигается минимум функции $G(\cdot)$, и выполнены следующие условия:

1) существует такое положительное $r \leq g(t_0)$, что

$$G(t) \geq \max\left\{c_0(t), r^2/t\right\} \ \ \text{при всех } t \in (0,1],$$

где положительная функция $c_0(t)$ монотонно убывает на $(0,t_0)$, монотонно возрастает на $(t_0,1]$ и $c_0(t_0) = G(t_0)$;

2) функция $G(t)$ непрерывно дифференцируема m_1 раз в левой полуокрестности точки t_0 и m_2 раз в правой полуокрестности этой точки; при этом m_1 и m_2 — порядки соответственно *первых ненулевых* левой и правой производных функции $G(t)$ в точке $t = t_0$;

3) $\frac{x}{\sqrt{n}} \to \infty$ и $\frac{x}{n^{1-\gamma_m}} \to 0$ при $n \to \infty$, где

$$\gamma_m := \frac{1 - 1/m}{3 - 2/m}, \quad m := \max\{m_1, m_2\}.$$

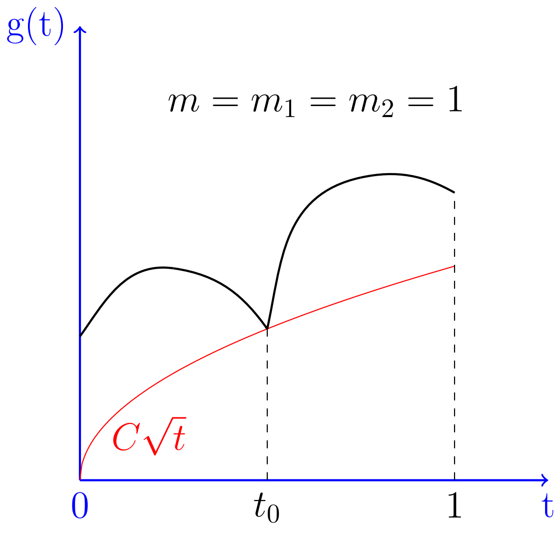

Рис. 1

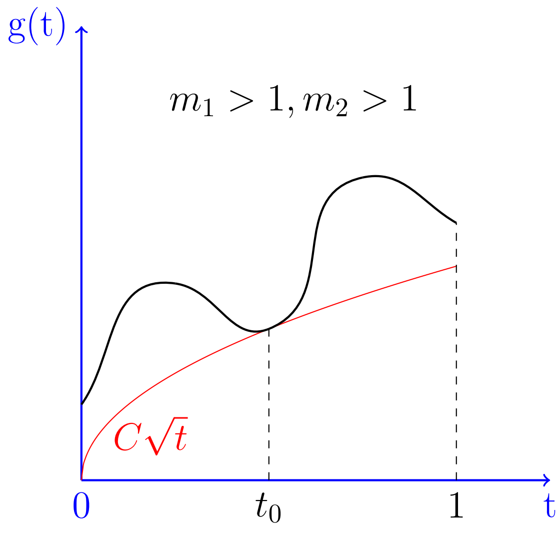

Рис. 2

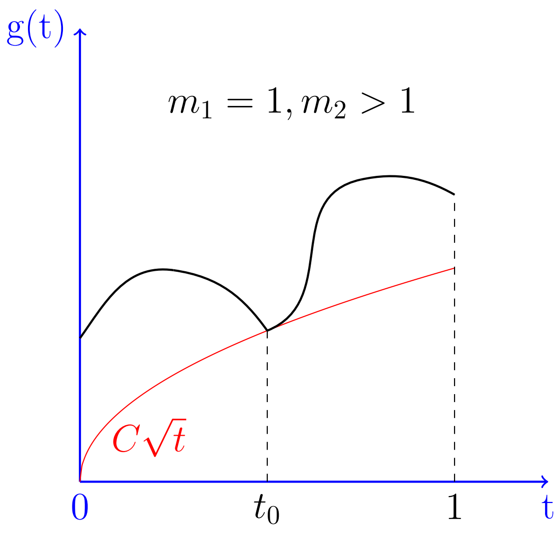

Рис. 3

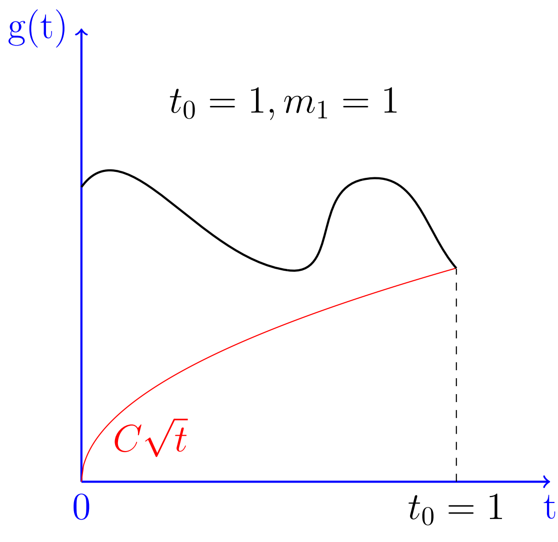

Рис. 4

На рисунках 1–4 представлены различные случаи поведения функции $g(t)$ на $[0, 1]$ и, в частности, в окрестности точки t_0, которые иллюстрируют введенные выше условия 1 и 2. На рисунке 1 представлен случай $m = m_1 = m_2 = 1$, где происходит *не гладкое* касание функцией $g(t)$ повернутой параболы $C\sqrt{t}$ в точке $t_0 \in (0,1)$. Случаи $m_1 > 1$ и $m_2 > 1$ (см. рисунок 2) представляют собой ситуацию, когда происходит *гладкое* касание кривой $g(t)$ параболы $C\sqrt{t}$ слева и справа от точки касания t_0, соответственно, причем возможен случай, когда гладкое касание будет только с одной стороны (см. рисунок 3). Если касание такой повернутой параболы впервые происходит только в точке $t_0 = 1$, то из указанного выше доопределения $G(t)$ в правой полуокрестности точки $t = 1$ следует, что можно положить в этом случае $m_2 = 1$, а итоговая асимптотика будет определяться поведением функции $g(t)$ в левой полуокрестности точки $t_0 = 1$, см. рисунок 4. Отметим, что значение коэффициента C определяется однозначно условием 1, и поэтому $C = \sqrt{G(t_0)}$.

Теорема 1. *При выполнении условий* 1–3 *и* (B) *имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{E}\tau_n(xg) \sim M(G,t_0,m_1,m_2)\frac{n(2m!)^{1/m}\sqrt{t_0}}{\sqrt{2\pi}g(t_0)}\left(\frac{\sigma}{\beta_n}\right)^{1+2/m}\Gamma\left(\frac{m+1}{m}\right)e^{-nt_0\Lambda\left(\frac{\beta_n g(t_0)}{\sqrt{nt_0}}\right)} \tag{3}$$

при $n \to \infty$, *где* $\beta_n := \frac{x}{\sqrt{n}}$, $\Gamma(z) := \int_0^\infty y^{z-1}e^{-y}\,dy$, $z > 0$, *— гамма-функция,* $\Lambda(z)$ *— функция уклонений (функция Крамера) случайной величины* ξ_1,

$$M(G,t_0,m_1,m_2) := \begin{cases} \frac{1}{|G^{(m_1)}(t_0-0)|^{1/m_1}}, & \text{если } t_0 \in (0,1),\ m_1 > m_2, \\ \frac{1}{|G^{(m_2)}(t_0+0)|^{1/m_2}}, & \text{если } t_0 \in (0,1),\ m_1 < m_2, \\ \frac{1}{|G^{(m_1)}(t_0-0)|^{1/m_1}} + \frac{1}{|G^{(m_2)}(t_0+0)|^{1/m_2}}, & \text{если } t_0 \in (0,1),\ m_1 = m_2, \\ \frac{1}{|G^{(m_1)}(1-0)|^{1/m_1}}, & \text{если } t_0 = 1. \end{cases}$$

При $m \geq 2$ *показатель степени экспоненты в* (3) *может быть заменен* *следующим выражением*:

$$-\frac{\beta_n^2 g^2(t_0)}{2t_0\sigma^2} + \frac{\mathbf{E}\xi_1^3 \beta_n^3 g^3(t_0)}{6t_0^2\sigma^6\sqrt{n}}. \qquad (4)$$

Замечание 1. Частный случай теоремы 1 при $g(\cdot) \equiv 1$, который соответствует случаю $t_0 = 1$ и $m = 1$, содержится в теореме A. Стоит также отметить, что теорема 1 допускает обобщение на случай конечного набора точек $\{t_k\}$, в окрестностях которых выполнены условия 1–3 и (B) со своими параметрами m_1 и m_2 для каждой точки t_k. Правая часть итоговой асимптотики в этом случае будет представлена в виде суммы правых частей в (3), вычисленных для каждой точки t_k отдельно.

Замечание 2. В соотношении (4) в силу условия 3 второе слагаемое имеет порядок $O(n^{-1/2}\beta_n^3) = o(\beta_n^2)$, причем эта величина в указанной в условии 3 зоне уклонений может стремиться как к нулю, так и к бесконечности того или иного знака.

В теореме 1 рассматривался случай, когда функция $g(t)$ касалась "повернутой параболы" в одной точке (или в конечном числе точек) сегмента $(0, 1]$. Следующая теорема рассматривает случай, когда на невырожденном отрезке функция $g(t)$ будет совпадать с "повернутой параболой", или, другими словами, функция $G(t)$ тождественно равна своему минимальному значению на некотором невырожденном отрезке $[t_1, t_2] \subset (0, 1]$.

Мы будем предполагать выполненными следующие условия, аналогичные условиям 1 и 2 теоремы 1:

$1')$ существует такое положительное $r \le g(t_1)$, что

$$G(t) \ge \max\left\{c_0(t), r^2/t\right\} \quad \text{при всех } t \in (0, 1],$$

где положительная функция $c_0(t)$ монотонно убывает на $[0, t_1)$, монотонно возрастает на $(t_2, 1]$ и $c_0(t) = G(t_1)$ при всех $t \in [t_1, t_2]$;

$2'$) функция $c_0(t)$ непрерывно дифференцируема m_1 раз в левой полуокрестности точки t_1 и m_2 раз в правой полуокрестности точки t_2; при этом m_1 и m_2 — порядки соответственно *первых ненулевых* левой и правой производных функции $c_0(t)$ в точках t_1 и t_2 соответственно.

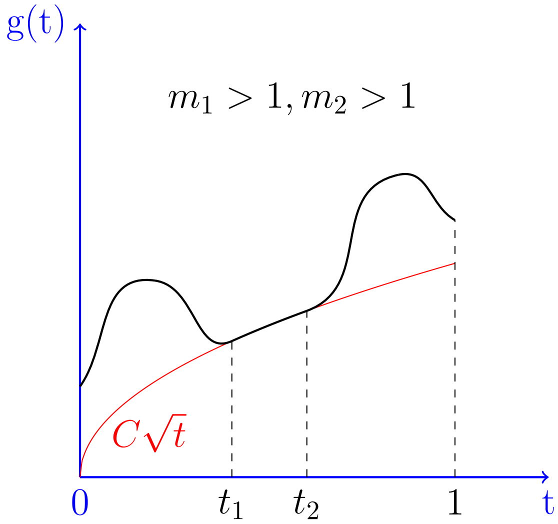

Рис. 5

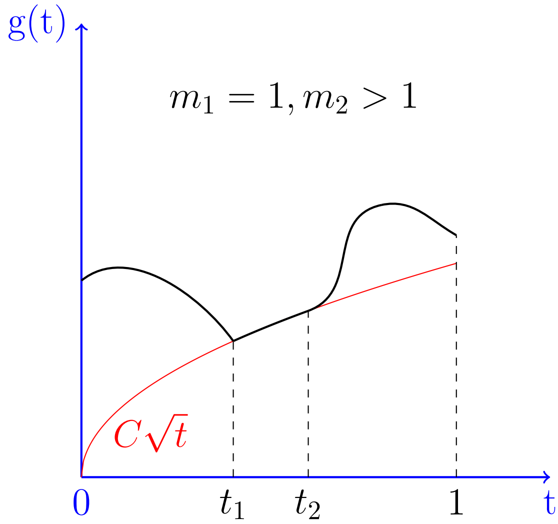

Рис. 6

На рисунках 5 и 6 представлены различные случаи поведения функции $g(t)$ вне интервала $[t_1, t_2]$, причем асимптотика исследуемого математического ожидания не будет зависеть от *порядка касания* функцией $g(t)$ повернутой параболы в точках t_1 и t_2.

Для формулировки теоремы 2 введем следующее обозначение:

$$\Lambda_0(z) := \Lambda(z) - \frac{z^2}{2\sigma^2}. \tag{5}$$

Отметим, что $\frac{z^2}{2\sigma^2}$ является первым членом ряда Крамера, т.е. первым ненулевым членом разложения функции уклонений $\Lambda(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $1'$, $2'$, 3 *и* (B). *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathbf{E}\tau_n(xg) \sim \frac{n^{3/2}\sigma\sqrt{t_1}}{\sqrt{2\pi}xg(t_1)} \exp\left\{-\frac{x^2g^2(t_1)}{2nt_1\sigma^2}\right\} J_n(t_1,t_2),$$

где $J_n(t_1,t_2) := \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \exp\left\{-nt\Lambda_0\left(\frac{xg(t_1)}{n\sqrt{t_1t}}\right)\right\} dt$. *В случае* $m \geq 2$

$$J_n(t_1,t_2) \sim \int_{t_1}^{t_2} \exp\left\{\frac{g^3(t_1)x^3\mathbf{E}\xi_1^3}{6\sigma^6 t_1^{3/2} n^2\sqrt{t}}\right\} dt,$$

в частности,

$$J_n(t_1,t_2) \sim \begin{cases} t_2 - t_1, & \text{если } \mathbf{E}\xi_1^3 = 0 \text{ или } \frac{x^3}{n^2} \to 0, \\ \frac{12n^2t_1^3\sigma^6}{x^3g^3(t_1)\mathbf{E}\xi_1^3} \exp\left\{\frac{x^3g^3(t_1)\mathbf{E}\xi_1^3}{6n^2t_1^2\sigma^6}\right\}, & \text{если } \mathbf{E}\xi_1^3 > 0 \text{ и } \frac{x^3}{n^2} \to \infty, \\ \frac{12n^2t_2^3\sigma^6}{x^3g^3(t_2)|\mathbf{E}\xi_1^3|} \exp\left\{\frac{x^3g^3(t_2)\mathbf{E}\xi_1^3}{6n^2t_2^2\sigma^6}\right\}, & \text{если } \mathbf{E}\xi_1^3 < 0 \text{ и } \frac{x^3}{n^2} \to \infty. \end{cases}$$

Замечание 3. Утверждения теорем 1 и 2 допускают следующие обобщения. Если в условиях теоремы 1 с одной стороны от t_0 граница $g(t)$ непрерывна в точке t_0 и локально ведет себя как $c_1|t-t_0|^r$, где $r \geq 1$, а с другой стороны от точки t_0 в некоторой ее полуокрестности существует *нижняя огибающая* для $g(t)$, которая локально ведет себя как $c_2|t-t_0|^{r-\nu}$ при некотором $\nu \in (0,r]$, то поведение $g(t)$ в этой полуокрестности может быть каким угодно. Асимптотика в этом случае будет зависеть только от c_1 и r. В частности, функция $g(t)$ в точке $t_0 \in (0,1)$ может иметь разрыв первого или второго рода, причем в одной из полуокрестностей этой точки функция $g(t)$ должна будет удовлетворять условию 2. Подобная ситуация изображена на рисунке 7. Случай разрывной функции $g(t)$ с условием $\liminf g(t) > g(t_0)$ в одной из полуокрестностей точки t_0 и односторонней непрерывностью $g(t)$ в другой полуокрестности формально можно было бы отнести к случаю $m_1 = 1$ (или $m_2 = 1$) при условии, что соответствующая односторонняя производная в точке t_0 бесконечна.

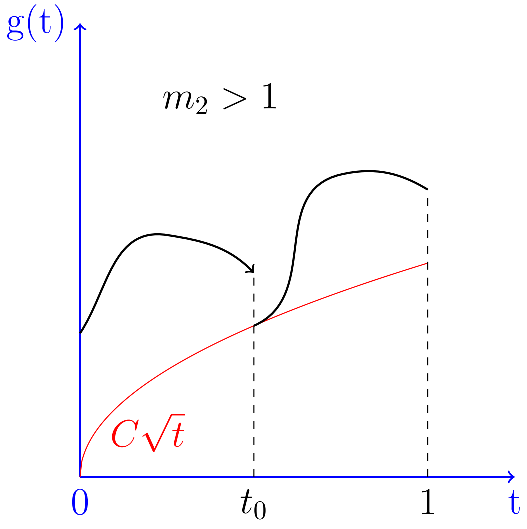

Рис. 7

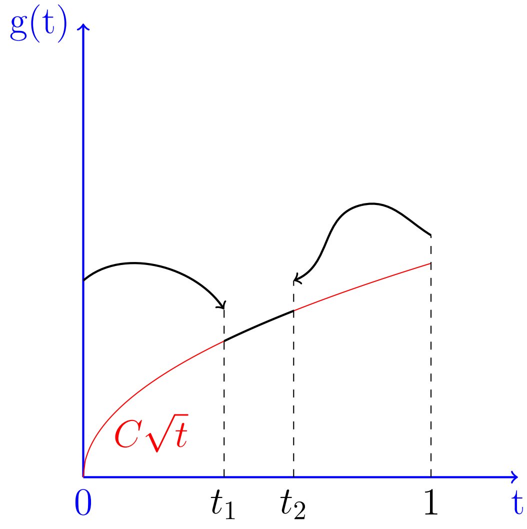

Рис. 8

Отметим, что условия $1')$ и $2')$ теоремы 2, очевидно, включают в себя вышеупомянутые случаи и, в частности, возможные разрывы функции $g(t)$ в точках t_1 и t_2 (см. рисунок 8), поскольку функция $c_0(t)$ в окрестности точки t_0 как раз и определяет вышеупомянутые нижние огибающие, локально ведущие себя как степенные функции $c_1|t-t_1|^{m_1}$ (в левой полуокрестности t_1) и $c_2|t-t_2|^{m_2}$ (в правой полуокрестности t_2). Тогда поведение функции $g(t)$ слева от t_1 и справа от t_2 не будет оказывать влияния на итоговую асимптотику в теореме 2, но величина $\max\{m_1, m_2\}$ всё же будет определять ширину области уклонений.

§ 2. Доказательство основных результатов.

2.1. Доказательство теоремы 1.

Без ограничения общности рассуждений всюду в дальнейшем считаем, что $\sigma = 1$ и $g(t_0) = \sqrt{t_0}$. В противном случае мы можем провести следующую перенормировку:

$$\mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\} = \mathbf{P}\left\{\frac{S_k}{\sigma} \geq \frac{xg(k/n)}{\sigma}\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{S_k}{\sigma} \geq \frac{xg(t_0)}{\sigma\sqrt{t_0}}\frac{\sqrt{t_0}g(k/n)}{g(t_0)}\right\},$$

что немедленно сведет нашу задачу к указанному выше случаю при замене x и g соответственно на $\hat{x} := \frac{xg(t_0)}{\sigma\sqrt{t_0}}$ и $\hat{g}(\cdot) := \frac{\sqrt{t_0}g(\cdot)}{g(t_0)}$.

Также без ограничения общности можно считать, что функция $g(t)$ равномерно ограничена. В противном случае часть суммы, где $g(k/n) \geq 2g(t_0)$, можно мажорировать величиной $\mathbf{E}\tau_n(2g(t_0)x)$, исследованной, например, в [13], которая не будет влиять на асимптотику $\mathbf{E}\tau_n(xg)$ (см. нижеследующую оценку (32)).

Прежде всего, выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_{1,n} \to 0$ таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\frac{n}{\varepsilon_{1,n}x^2} \to 0, \quad \frac{x}{\varepsilon_{1,n}n} \to 0.$$

Покажем, что такая последовательность $\varepsilon_{1,n}$ может быть выбрана в виде $\varepsilon_{1,n} = \delta_n \beta_n^{2/m_1-2}$, где $\delta_n \to 0$.

Проверка первого соотношения элементарна:

$$\frac{n}{\varepsilon_{1,n}x^2} = \frac{1}{\varepsilon_{1,n}\beta_n^2} = \frac{1}{\delta_n \beta_n^{2/m_1}} \to 0,$$

если, например, $\delta_n \geq \beta_n^{-1/m_1}$. Заметим, что из условия 3 следует асимптотическое представление $\beta_n = \nu_n n^{1/2-\gamma_m}$, где $\nu_n \to 0$, откуда получаем

$$\frac{x}{\varepsilon_{1,n}n} = \frac{\beta_n}{\varepsilon_{1,n}\sqrt{n}} = \frac{\beta_n^{3-2/m_1}}{\delta_n\sqrt{n}}$$
$$\leq \frac{\beta_n^{3-2/m}}{\delta_n\sqrt{n}} = \frac{\nu_n^{3-2/m} n^{(1/2-\gamma_m)(3-2/m)}}{\delta_n\sqrt{n}} = \frac{\nu_n^{3-2/m}}{\delta_n} \to 0,$$

скажем, если $\delta_n \geq \sqrt{\nu_n}$. Таким образом, при $\delta_n \geq \max\{\beta_n^{-1/m_1}, \sqrt{\nu_n}\}$ и $\delta_n \to 0$ оба соотношения будут выполнены. В процессе доказательства теоремы 1 будет приведено еще одно условие на скорость убывания δ_n.

Аналогичным образом введем последовательность $\varepsilon_{2,n}$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{n}{\varepsilon_{2,n}x^2} \to 0, \quad \frac{x}{\varepsilon_{2,n}n} \to 0.$$

Теперь разобьем $\mathbf{E}\tau_n(xg)$ на четыре подсуммы:

$$\mathbf{E}\tau_n(xg) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

где

$$R_1 := \sum_{k=N_n}^{[n_0]} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\}, \qquad R_2 := \sum_{k=[n_0]+1}^{K_n} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\},$$

$$R_3 := \sum_{k=1}^{N_n-1} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\}, \qquad R_4 := \sum_{k=K_n+1}^{n} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\},$$

$$N_n := \left[nt_0 - \frac{n^2t_0^2}{\varepsilon_{1,n}x^2}\right], \quad K_n := \left[nt_0 + \frac{n^2t_0^2}{\varepsilon_{2,n}x^2}\right], \quad n_0 := nt_0.$$

Если же $t_0 = 1$, то $R_2 = R_4 = 0$. Далее будет показано, что $R_3 = o(R_1)$ и $R_4 = o(R_2)$, т. е. основной вклад в асимптотику $\mathbf{E}\tau_n(xg)$ вносят R_1 и R_2. Всюду далее будем полагать, что $t_0 \in (0,1)$. В противном случае нам будет достаточно лишь найти асимптотику суммы R_1, и доказать, что $R_3 = o(R_1)$. Это является частным случаем теоремы при $t_0 = 1$.

Найдем асимптотику суммы R_1. Выводы при нахождении асимптотики R_2 будут зеркальными отражениями формул при вычислении асимптотики R_1, о чем более подробно будет сказано в конце параграфа.

Приведем необходимый нам результат из [8] в удобной для наших целей редакции.

Теорема Б. *Пусть $\theta := x/n > 0$. Тогда в случае нерешетчатого распределения ξ_1 при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} \sim \frac{e^{-n\Lambda(\theta)}}{\Lambda'(\theta)\sqrt{2\pi n d(\theta)}}$$

равномерно по $\theta \in (0, \theta_+]$, *где* $d(\theta) := \mathbf{D}\xi_1^{(\theta)}, \xi_1^{(\theta)}$ *— преобразование Крамера случайной величины* ξ_1 *в точке* θ, $\theta_+ > 0$ *определено в* [7].

В случае, когда ξ_1 *распределено на решетке с шагом* 1 *и сдвигом* a, *для значений* x *вида* $an + k$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} \sim \frac{e^{-n\Lambda(\theta)}}{(1 - e^{-\Lambda'(\theta)})\sqrt{2\pi n d(\theta)}}$$

равномерно по всем целым k *в зоне* $a + k/n \in (0, \theta_+]$.

Следствие 1. *При выполнении условий* 3 *и* (B) *при* $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое представление*

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} \sim \frac{\sqrt{n}e^{-n\Lambda(x/n)}}{x\sqrt{2\pi}} \tag{6}$$

равномерно в зоне уклонений $\frac{x}{\sqrt{n}} \to \infty$, $\frac{x}{n} \to 0$.

Для обоснования этого утверждения нужно принять во внимание в теореме Б, что при $\theta \to 0$ имеем $1 - e^{-\Lambda'(\theta)} \sim \Lambda'(\theta) \sim \theta$ (см. [7, гл. 9, с. 231]), и $\mathbf{D}\xi_1^{(\theta)} = (\ln \psi_{\xi_1}(\theta))'' \sim 1$.

В силу условия (B) функция $\Lambda(z)$ аналитична в окрестности нуля. Прежде всего отметим, что из условия 3 равномерно по всем $k \in [N_n, n_0]$ имеют место предельные соотношения $x/k \to 0$ и $x/\sqrt{k} \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда при выполнении условий 1–3 и (B) нормированная функция уклонений при разложении в ряд Тейлора в окрестности нуля (ряд Крамера) примет вид

$$k\Lambda\left(\frac{xg(\frac{k}{n})}{k}\right) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i \frac{x^i g^i(\frac{k}{n})}{k^{i-1}} = \frac{x^2 g^2(\frac{k}{n})}{2k} + k\Lambda_0\left(\frac{xg(\frac{k}{n})}{k}\right), \tag{7}$$

где $a_i = \frac{\Lambda^{(i)}(0)}{i!}$.

Докажем, что выполняется следующая эквивалентность для всех $k \in [N_n, n_0]$:

$$\exp\left\{-k\Lambda_0\left(\frac{xg(\frac{k}{n})}{k}\right)\right\} \sim \exp\left\{-nt_0\Lambda_0\left(\frac{xg(\frac{nt_0}{n})}{nt_0}\right)\right\} = \exp\left\{-n_0\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-n_0\Lambda_0\left(\frac{x\sqrt{t_0}}{n_0}\right)\right\} \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$k\sum_{i=3}^{\infty} a_i\left(\frac{xg(\frac{k}{n})}{k}\right)^i - n_0\sum_{i=3}^{\infty} a_i\left(\frac{xg(t_0)}{n_0}\right)^i =$$

$$= n_0\sum_{i=3}^{\infty} a_i\left(\frac{x^i g^i(\frac{k}{n})}{k^i} - \frac{x^i t_0^{i/2}}{n_0^i}\right) - (n_0-k)\sum_{i=3}^{\infty} a_i\left(\frac{xg(\frac{k}{n})}{k}\right)^i \to 0. \tag{9}$$

Рассуждения при выводе соотношения (9) аналогичны приведенным в [13]. Сначала найдем оценку для второй суммы правой части (9). Из условия на k получаем, что $n_0-k \le \frac{n_0^2}{x^2\varepsilon_n}$. Вынесем из под суммы множитель $(\frac{xg(\frac{k}{n})}{k})^3$, оценивая его равномерно по k в рассматриваемой зоне:

$$\frac{x^3 g^3(\frac{k}{n})}{k^3} \le \frac{x^3 g^3(\frac{k}{n})}{\left(n_0 - \frac{n_0^2}{\varepsilon_n x^2}\right)^3}.$$

Теперь оценим ряд $\sum\limits_{i=3}^{\infty} a_i\left(\frac{xg(\frac{k}{n})}{k}\right)^{i-3}$. Этот степенной ряд сходится в некоторой окрестности 0 в силу аналитичности функции уклонений. Так как $\frac{xg(\frac{k}{n})}{k} \to 0$ при $n\to\infty$ в рассматриваемой зоне уклонений k, то при достаточно больших n этот множитель попадает в эту самую окрестность. Оценим величину рассматриваемого ряда в этой окрестности константой C. Тогда

$$\left|(n_0-k)\sum_{i=3}^{\infty} a_i\left(\frac{xg(\frac{k}{n})}{k}\right)^i\right| \le \frac{Cn_0^2}{\varepsilon_n x^2}\frac{x^3 g^3(\frac{k}{n})}{\left(n_0 - \frac{n_0^2}{\varepsilon_n x^2}\right)^3} = \frac{Cxg^3\left(\frac{k}{n}\right)}{\varepsilon_n n_0 q_n^3} \to 0, \tag{10}$$

где $q_n := 1 - \frac{n_0}{\varepsilon_n x^2} \to 1$.

Из условия 2 следует, что производная функции $G(t)$ равномерно ограничена в некоторой окрестности точки t_0, а следовательно и $|g'(t)| < C_1 < \infty$ для всех $t \in [\frac{N_n}{n}, \frac{n_0}{n}]$. Из формулы конечных приращений следует, что

$$g\left(\frac{k}{n}\right) - \sqrt{t_0} = g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{n_0}{n}\right) \le C_1\frac{n_0-k}{n} \le C_1\frac{t_0 n_0}{\varepsilon_n x^2}.$$

Следовательно, для всех $k \in [N_n, n_0]$ имеет место следующая равномерная оценка:

$$n_0 g\left(\frac{k}{n}\right) - k\sqrt{t_0} \le n_0 g\left(\frac{k}{n}\right) - \sqrt{t_0}\left(n_0 - \frac{n_0^2}{\varepsilon_n x^2}\right)$$
$$= n_0\left(g\left(\frac{k}{n}\right) - \sqrt{t_0}\right) + \sqrt{t_0}\frac{n_0^2}{\varepsilon_n x^2} \le C_2 \frac{n_0^2}{\varepsilon_n x^2},$$

где $C_2 := C_1 t_0 + \sqrt{t_0}$.

Далее, из очевидного неравенства

$$y^i - x^i \le i y^{i-1}(y - x), \quad y > x,$$

имеем для $k \in [N_n, n_0]$:

$$\frac{g^i\left(\frac{k}{n}\right)}{k^i} - \frac{t_0^{i/2}}{n_0^i} = \frac{n_0^i g^i\left(\frac{k}{n}\right) - k^i t_0^{i/2}}{n_0^i k^i}$$
$$\le i n_0^{i-1} g^{i-1}\left(\frac{k}{n}\right) \frac{C_2 n_0^2}{\varepsilon_n x^2} \frac{1}{n_0^{2i}\left(1 - \frac{n_0}{\varepsilon_n x^2}\right)^i} = \frac{C_2 n_0 i}{g\left(\frac{k}{n}\right)\varepsilon_n x^2 n_0^i} \frac{g^i\left(\frac{k}{n}\right)}{q_n^i}.$$

В силу непрерывности функции $g(t)$ в рассматриваемой окрестности точки t_0 можно считать, что верна следующая элементарная равномерная оценка $g(k/n) < 3/2$ для всех $k \in [N_n, n_0]$ при $n \to \infty$. Следовательно, для всех n таких, что $q_n \ge 3/4$ получаем

$$\frac{x^i g^i\left(\frac{k}{n}\right)}{k^i} - \frac{x^i t_0^{i/2}}{n_0^i} \le \frac{C_2 n_0 i}{g\left(\frac{k}{n}\right)\varepsilon_n x^2} \frac{g^i\left(\frac{k}{n}\right)}{q_n^i} \frac{x^i}{n_0^i} < \frac{C_2 n_0 i}{g\left(\frac{k}{n}\right)\varepsilon_n x^2}\left(\frac{3/2}{3/4}\right)^i \frac{x^i}{n_0^i} = \frac{C_2 n_0}{g\left(\frac{k}{n}\right)\varepsilon_n x^2} i \frac{(2x)^i}{n_0^i}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{i=3}^{\infty} |a_i| i (2\alpha)^i$ сходится в некоторой окрестности нуля наряду с $\sum\limits_{i=3}^{\infty}|a_i|\alpha^i$, из предыдущего соотношения следует, что

$$n_0\left|\sum_{i=3}^{\infty}a_i\left(\frac{x^ig^i\left(\frac{k}{n}\right)}{k^i}-\frac{x^it_0^{i/2}}{n_0^i}\right)\right|<\frac{C_2n_0^2}{g\left(\frac{k}{n}\right)\varepsilon_nx^2}\sum_{i=3}^{\infty}|a_i|i\frac{(2x)^i}{n_0^i}$$
$$\leq C_3\frac{n_0^2}{\varepsilon_nx^2}\frac{x^3}{n_0^3}=C_3t_0\frac{x}{\varepsilon_nn}\to 0. \quad (11)$$

Таким образом, из (10) и (11) следует соотношение (8). Отсюда можно сделать вывод, что основной вклад в асимптотику показателя экспоненты вносит первый член его разложения в ряд Крамера. Поэтому в силу (6)—(8) будет верно следующее асимптотическое представление вероятности $\mathbf{P}\big\{S_k\geq xg(k/n)\big\}$ равномерно по всем $k\in[N_n,n_0]$:

$$\mathbf{P}\big\{S_k\geq xg(k/n)\big\}\sim\frac{\sqrt{k}}{xg(t_{n,k})\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2g^2(t_{n,k})}{2k}\right\}\exp\left\{-nt_0\Lambda_0\left(\frac{x}{\sqrt{t_0}}n_0\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{t_{n,k}}}{\beta_ng(t_{n,k})\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\beta_n^2g^2(t_{n,k})}{2t_{n,k}}\right\}\exp\left\{-n_0\Lambda_0\left(\frac{x\sqrt{t_0}}{n_0}\right)\right\}, \quad (12)$$

где $t_{n,k}:=\frac{k}{n}$. Отсюда заключаем, что при $n\to\infty$

$$R_1\sim n\exp\left\{-n_0\Lambda_0\left(\frac{x\sqrt{t_0}}{n_0}\right)\right\}\sum_{k=N_n}^{[n_0]}\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{t_{n,k}}}{\beta_ng(t_{n,k})\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\beta_n^2g^2(t_{n,k})}{2t_{n,k}}\right\}. \quad (13)$$

Легко видеть, что выражение

$$\frac{R_1}{n}\exp\left\{n_0\Lambda_0\left(\frac{x\sqrt{t_0}}{n_0}\right)\right\}$$

эквивалентно интегральной сумме Римана соответствующего интеграла, которым и можно будет заменить правую часть (13), как будет установлено далее.

Докажем, что при $n\to\infty$ имеет место следующее соотношение:

$$\left|\sum_{k=N_n}^{[n_0]}\frac{1}{n}\frac{\sqrt{t_{n,k}}}{\beta_ng(t_{n,k})\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\beta_n^2g^2(t_{n,k})}{2t_{n,k}}}-\int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0}\frac{\sqrt{t}}{g(t)\beta_n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\beta_n^2g^2(t)}{2t}}\,dt\right|=$$

$$= o\left(\sum_{k=N_n}^{[n_0]} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{t_{n,k}}}{\beta_n g(t_{n,k})\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta_n^2 g^2(t_{n,k})}{2t_{n,k}}}\right). \tag{14}$$

Известна следующая элементарная оценка погрешности приближения интеграла Римана для любой функции $f \in C^1(0,1)$:

$$\left|\sum_{k=N_n}^{[n_0]} \frac{1}{n} f(t_{n,k}) - \int\limits_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} f(t)\, dt\right| \leq \sum_{k=N_n}^{[n_0]} \frac{1}{n^2} \max_{t_{n,k-1} \leq t \leq t_{n,k}} |f'(t)|. \tag{15}$$

Далее, полагая $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{g(t)\beta_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta_n^2 g^2(t)}{2t}}$, покажем, что k-е слагаемое суммы в правой части последнего неравенства представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, чем соответствующее слагаемое суммы в (13). После вычисления производной $f'(t)$ можно легко убедиться в том, что для доказательства этого утверждения нам достаточно установить справедливость оценки

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n}{2N_n} + \frac{|g'(t)|}{g(t)} + \beta_n^2 \frac{g(t)}{2t^2}|2tg'(t) - g(t)|\right) = o(1)$$

при $n \to \infty$ равномерно по всем $t_0 \geq t \geq \frac{N_n}{n} > t_0 - \delta$. Для этого нужно лишь отметить, что в зоне уклонений $x = o(N_n)$ мы имеем $\beta_n^2 = o(N_n)$. Таким образом, соотношение (14) доказано.

Воспользовавшись (14), мы получили интеграл

$$\int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} \frac{\sqrt{t}}{g(t)} e^{-\frac{\beta_n^2 g^2(t)}{2t}}\, dt = \int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} e^{-\frac{\beta_n^2 G(t)}{2}}\, dt. \tag{16}$$

Далее, заметим, что функция $G(t)$ непрерывна и монотонно убывает на полуинтервале $[\frac{N_n}{n}, t_0)$ по причине того, что при больших n область интегрирования будет включаться в окрестность $[t_0 - \delta, t_0]$ точки $t = t_0$. Функция $e^{-\frac{\beta_n^2 G(t)}{2}}$ на этом полуинтервале интегрируема, $G(t) = 1 + o(1)$ при $n \to \infty$ равномерно по всем $t \in [\frac{N_n}{n}, t_0)$. Потому к интегралу (16) применима теорема о среднем:

$$\int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} e^{-\frac{\beta_n^2 G(t)}{2}}\, dt \sim \int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} e^{-\frac{\beta_n^2 G(t)}{2}}\, dt. \tag{17}$$

Разложим функцию G(t) в ряд Тейлора в окрестности точки $t = t_0 - 0$:

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{j=0}^{m_1} \frac{G^{(j)}(t_0-0)(t-t_0)^j}{j!} + \Delta(t-t_0)(t-t_0)^{m_1} \\ &= 1 + \frac{G^{(m_1)}(t_0-0)(t-t_0)^{m_1}}{m_1!} + \Delta(t-t_0)(t-t_0)^{m_1}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\Delta(y)$ — некоторая функция, стремящаяся к 0 при $y \to 0$. Тогда интеграл в правой части (17) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} e^{-\frac{\beta_n^2 G(t)}{2}}\, dt \\ &= \int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} \exp\left\{ -\frac{\beta_n^2}{2} \left(1 + \frac{G^{(m_1)}(t_0-0)(t-t_0)^{m_1}}{m_1!} + \Delta(t-t_0)(t-t_0)^{m_1} \right) \right\} dt. \end{aligned}$$

Отметим, что длина интервала интегрирования $\left(t_0 - \frac{N_n}{n}\right)$ в последнем интеграле имеет порядок

$$\frac{n}{\varepsilon_{1,n} x^2} = \frac{1}{\delta_n \beta_n^{2/m_1}}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\Delta(y)$ при $y \to +0$ монотонно убывает. Теперь оценим величину погрешности в показателе экспоненты под указанным интегралом:

$$\beta_n^2 \left(t_0 - \frac{N_n}{n} \right)^{m_1} \Delta\left(t_0 - \frac{N_n}{n} \right) \sim \frac{1}{\delta_n^{m_1}} \Delta\left(\frac{1}{\delta_n \beta_n^{2/m_1}} \right) \to 0 \tag{19}$$

при достаточно медленно стремящейся к нулю последовательности $\delta_n \geq \beta_n^{-1/m_1}$. При такой оценке снизу эту последовательность можно выбрать с условием

$\delta_n \geq \Delta^{\frac{1}{m_1+1}}(\beta_n^{-1/m_1})$. Это и есть третье и последнее ограничение на скорость сходимости к нулю последовательности δ_n. Например, последовательность

$$\delta_n = \max\{\sqrt{\nu_n}, \beta_n^{-1/m_1}, \Delta^{\frac{1}{m_1+1}}(\beta_n^{-1/m_1})\}$$

удовлетворяет всем трем вышеприведенным условиям.

Таким образом, окончательно получаем

$$\int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} e^{-\frac{\beta_n^2 G(t)}{2}}\, dt \sim e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} \exp\left\{-\frac{\beta_n^2}{2m_1!} G^{(m_1)}(t_0-0)(t-t_0)^{m_1}\right\} dt.$$

Проведем замену переменной интегрирования по формуле $y = (t_0 - t)^{m_1}$. Тогда интеграл в правой части последнего соотношения примет следующий вид:

$$e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \int_{\frac{N_n}{n}}^{t_0} \exp\left\{-\frac{\beta_n^2}{2m_1!} G^{(m_1)}(t_0-0)(t-t_0)^{m_1}\right\} dt$$

$$= e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \int_0^{\left(t_0-\frac{N_n}{n}\right)^{m_1}} \frac{1}{m_1} y^{\frac{1}{m_1}-1} \exp\left\{-\frac{\beta_n^2}{2m_1!}(-1)^{m_1} G^{(m_1)}(t_0-0)y\right\} dy.$$

Функция $G(t)$ убывает в некоторой окрестности t_0 при $t < t_0$. Из формулы (18) следует, что при нечетных m_1 выполняется $G^{(m_1)}(t_0-0) < 0$, а при четных m_1 будет $G^{(m_1)}(t_0-0) > 0$, т.е. величина $(-1)^{m_1} G^{(m_1)}(t_0-0)$ будет положительна. Таким образом,

$$e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \int_0^{\left(t_0-\frac{N_n}{n}\right)^{m_1}} \frac{1}{m_1} y^{\frac{1}{m_1}-1} \exp\left\{-\frac{\beta_n^2}{2m_1!}(-1)^{m_1} G^{(m_1)}(t_0-0)y\right\} dy$$

$$\sim \frac{1}{m_1} B_{m_1}^{\frac{1}{m_1}} e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \int_0^{\left(t_0-\frac{N_n}{n}\right)^{m_1} B_{m_1}^{-1}} z^{\frac{1}{m_1}-1} e^{-z}\, dz, \tag{20}$$

где

$$B_{m_1} := \frac{2m_1!}{\beta_n^2 |G^{(m_1)}(t_0-0)|}.$$

Поведение верхнего предела интегрирования при $n \to \infty$ по существу уже установлено в (19):

$$\left(t_0 - \frac{N_n}{n}\right)^{m_1} B_{m_1}^{-1} = O(\delta_n^{-m_1}). \tag{21}$$

Из (21) следует, что верхний предел интеграла в правой части (20) стремится к ∞. Потому при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{m_1} B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \int\limits_0^{\left(t_0 - \frac{N_n}{n}\right)^{m_1} B_{m_1}^{-1}} z^{\frac{1}{m_1}-1} e^{-z} dz \sim \frac{1}{m_1} B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \int\limits_0^{\infty} z^{\frac{1}{m_1}-1} e^{-z} dz$$

$$= \frac{1}{m_1} B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{m_1}\right) = B_{m_1}^{1/m_1} e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right). \qquad (22)$$

Из (13), (14), (20) и (22) мы получаем следующую асимптотику:

$$R_1 \sim \frac{n B_{m_1}^{1/m_1}}{\sqrt{2\pi}\beta_n} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n} + \frac{\mathbf{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2\sqrt{t_0}}\right\} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right)$$

$$\sim \frac{n(2m_1!)^{1/m_1}}{\sqrt{2\pi}\beta_n^{1+2/m_1} |G^{(m_1)}(t_0-0)|^{1/m_1}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n} + \frac{\mathbf{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2\sqrt{t_0}}\right\} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right)$$

$$= \frac{n^{3/2+1/m_1}(2m_1!)^{1/m_1}}{\sqrt{2\pi}x^{1+2/m_1} |G^{(m_1)}(t_0-0)|^{1/m_1}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n} + \frac{\mathbf{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2\sqrt{t_0}}\right\} \Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right). \qquad (23)$$

Таким образом мы получили асимптотику для суммы R_1.

Для вычисления асимптотики R_2 повторим всю схему рассуждений при нахождении асимптотики R_1. Первым делом обратимся к формуле (8). Путем повторения рассуждений для $k \in [n_0, K_n]$ можно убедиться, что аналог формулы (8) также будет выполняться. Ясно, что аналог (14) также применим и к

$$\frac{R_2}{n} \exp\left\{n_0 \Lambda_0\left(\frac{x\sqrt{t_0}}{n_0}\right)\right\},$$

а именно:

$$\frac{R_2}{n} \exp\left\{n_0 \Lambda_0\left(\frac{x\sqrt{t_0}}{n_0}\right)\right\} \sim \int_{t_0}^{\frac{K_n}{n}} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \exp\left\{-\frac{\beta_n^2 G(t)}{2}\right\} dt.$$

В силу условий на функцию $G(t)$ теорема о среднем здесь также применима. Далее, с помощью аналогов формул (18) и (19) получаем

$$\int_{t_0}^{\frac{K_n}{n}} e^{-\frac{\beta_n^2 G(t)}{2}} dt \sim e^{-\frac{\beta_n^2}{2}} \int_{t_0}^{\frac{K_n}{n}} \exp\left\{-\frac{\beta_n^2}{2m_2!} G^{(m_2)}(t_0+0)(t-t_0)^{m_2}\right\} dt. \qquad (24)$$

Заметим, что аналог формулы (17) позволяет утверждать, что в интеграле в правой части (24) величина $G^{(m_2)}(t_0+0)$ положительна. Заменим переменную интегрирования по формуле $y=(t-t_0)^{m_2}$. После замены переменной получаем следующий интеграл:

$$e^{-\frac{\beta_n^2}{2}}\int_{t_0}^{\frac{K_n}{n}}\exp\left\{-\frac{\beta_n^2}{2m_2!}G^{(m_2)}(t_0+0)(t-t_0)^{m_2}\right\}dt$$

$$=e^{-\frac{\beta_n^2}{2}}\int_0^{\left(\frac{K_n}{n}-t_0\right)^{m_2}}\frac{1}{m_2}y^{1/m_2-1}\exp\left\{-\frac{\beta_n^2}{2m_2!}G^{(m_2)}(t_0+0)y\right\}dy.$$

Осталось лишь заметить, что полученный интеграл отличается от интеграла в (20) только аргументом у функции $G^{(m_1)}(\cdot)$ и соответственно константой m_2 вместо m_1. Верхний предел интегрирования, аналогично формуле (21) будет стремиться к ∞. В итоге для R_2 имеем

$$R_2\sim\frac{n^{3/2+1/m_2}(2m_2!)^{1/m_2}}{\sqrt{2\pi}x^{1+2/m_2}|G^{(m_2)}(t_0+0)|^{1/m_2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2n}+\frac{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}{6n^2\sqrt{t_0}}\right\}\Gamma\left(\frac{m_2+1}{m_2}\right).\quad(25)$$

Сравним между собой асимптотики для R_1 и R_2, полученные в формулах (23) и (25). Утверждается следующее: если $m_1>m_2$, то $R_2=o(R_1)$. В самом деле, не обращая внимания на константы, которые не зависят от n, мы видим, что R_1 и R_2 отличаются множителями

$$\frac{n^{3/2+1/m_1}}{x^{1+2/m_1}}=n\beta_n^{-1-2/m_1},\quad\frac{n^{3/2+1/m_2}}{x^{1+2/m_2}}=n\beta_n^{-1-2/m_2}.$$

Требуемое предельное соотношение будет выполняться, т.к. $\beta_n\to\infty$. Отсюда можно сделать вывод, что асимптотика будет определяться максимальным из двух номеров первых ненулевых производных.

Теперь мы покажем, что R_3+R_4 не вносит вклада в асимптотику среднего времени, т.е. в (23) и (25) приведен ее окончательный вид.

Докажем, что $R_3=o(R_1)$. Разобьем сумму R_3 на две части: $R_3=R_5+R_6$, где

$$R_5 := \sum_{k=bnt_0}^{N_n-1} \mathbf{P}\{S_k \ge g(k/n)x\}, \qquad R_6 := \sum_{k=1}^{bnt_0-1} \mathbf{P}\{S_k \ge g(k/n)x\},$$

а положительное $b < 1$ будет выбрано позднее.

Сначала найдем асимптотику суммы R_5. Всюду далее положительные постоянные C_k в приведенных выкладках зависят только от функции g и констант $b > 0$ и t_0.

Из (6) и (8) получается следующее представление для отношения вероятностей:

$$\frac{\mathbf{P}(S_k \ge g(k/n)x)}{\mathbf{P}(S_{nt_0} \ge x\sqrt{t_0})} \sim \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}g(k/n)} \exp\left\{-k\Lambda\left(\frac{g(k/n)x}{k}\right) + nt_0\Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right\}. \qquad (26)$$

Из формулы конечных приращений и оценки для производной $\Lambda_0'(z)$ следует, что для некоторого $\theta_n \le \frac{Lx}{nt_0 b} \to 0$ (здесь $L = \sup_t g(t)$) справедливо неравенство

$$\left|\Lambda_0\left(\frac{g(k/n)x}{k}\right) - \Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right| = |\Lambda_0'(\theta_n)|\left|\frac{g(k/n)x}{k} - \frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right| \le C_4\left(\frac{x}{n}\right)^3 \frac{|g(k/n)n\sqrt{t_0} - k|}{k\sqrt{t_0}},$$

откуда следует оценка

$$\left|k\Lambda_0\left(\frac{g(k/n)x}{k}\right) - nt_0\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right| \le k\left|\Lambda_0\left(\frac{g(k/n)x}{k}\right) - \Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right| + (nt_0 - k)\left|\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right| \le C_4\left(\frac{x}{n}\right)^3 \frac{|g(k/n)n\sqrt{t_0} - k|}{\sqrt{t_0}} + C_5\left(\frac{x}{n}\right)^3 \frac{nt_0 - k}{t_0^{3/2}}. \qquad (27)$$

Отметим, что для всех достаточно малых $\delta > 0$ равномерно по всем

$k \in [bnt_0, (1-\delta)nt_0]$

$$\sup_{k\in[bnt_0,(1-\delta)nt_0]} \frac{|g(k/n)n\sqrt{t_0}-k|t_0}{nt_0-k} \le \sup_{k\in[bnt_0,(1-\delta)nt_0]} \frac{|g(k/n)n\sqrt{t_0}-k|}{nt_0-k} \le C(L,\delta).$$

По условию теоремы в некоторой δ-окрестности точки $t = t_0$ функция $g(t)$ непрерывно дифференцируема и исходя из условия, что функция $G(t)$ убывает слева, $g'(t) \le \sqrt{t_0}/2$ равномерно в указанной окрестности. Поэтому для всех $k \in [(1-\delta)nt_0, N_n]$ в силу формулы конечных приращений имеем $g(k/n) = \sqrt{t_0} + g'(\theta)(k/n - t_0)$, где $(1-\delta)t_0 \le k/n \le \theta_n \le t_0$, откуда немедленно следует оценка

$$\frac{g(k/n)n\sqrt{t_0}-k}{nt_0-k} = \frac{nt_0-k+g'(\theta)(k/n-t_0)n\sqrt{t_0}}{nt_0-k}$$
$$= 1-\sqrt{t_0}g'(\theta) \in [1/2, 1-\inf_{(1-\delta)t_0<t<t_0} g'(t)].$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\sup_{k\in[bnt_0,N_n]} \frac{|g(k/n)n\sqrt{t_0}-k|t_0}{nt_0-k} \le \tilde{C}(g,\delta).$$

Стало быть, из (27) для всех $k \in [bnt_0, N_n]$ следует оценка

$$\left|k\Lambda_0\left(\frac{g(k/n)x}{k}\right) - nt_0\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right| \le C_6\left(\frac{x}{n}\right)^3 (nt_0-k). \tag{28}$$

Далее, мы без ограничения общности полагали, что функция $G(t) = g^2(t)/t$ в окрестности точки t_0 убывает слева и $G(t_0) = 1$. Выберем достаточно малое число $\delta > 0$, чтобы отрезок $[(1-\delta)nt_0, N_n]$ включался в такую окрестность. Так что для всех $k \in [(1-\delta)nt_0, N_n]$ получаем

$$\frac{g^2(k/n)x^2}{2k} - \frac{x^2}{2n} = \frac{x^2}{2n}\left(G(k/n)-1\right) = \frac{x^2}{2n}\left(G(k/n)-G(t_0)\right) \ge \frac{x^2}{2n^2}|G'(\theta_0)|(nt_0-k). \tag{29}$$

Если же $k \in [bnt_0, (1-\delta)nt_0]$ (при условии $b < 1-\delta$), то в силу условия 1 имеем $G(k/n) > 1 + c(\delta)$, где $c(\delta) > 0$, откуда вытекает оценка снизу

$$\frac{g^2(k/n)x^2}{2k} - \frac{x^2}{2n} = \frac{x^2}{2n}\left(G(k/n) - 1\right) \geq c(\delta)\frac{x^2}{2n^2}. \tag{30}$$

Из (28)—(30) и условия 3 следует равномерная по $k \in [bnt_0, N_n]$ оценка сверху

$$\left| k\Lambda\left(\frac{g(k/n)x}{k}\right) - nt_0\Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right| \leq C_7\left(\frac{x}{n}\right)^2 (nt_0 - k).$$

Тогда в (26) для всех $k \in [bnt_0, N_n]$ при достаточно больших n получаем

$$\frac{\mathbf{P}(S_k \geq g(k/n)x)}{\mathbf{P}(S_{nt_0} \geq x\sqrt{t_0})} \leq C_8 \exp\left\{-C_9\left(\frac{x}{n}\right)^2 (nt_0 - k)\right\}.$$

Таким образом, принимая во внимание (6), получаем

$$\sum_{k=bnt_0}^{N_n-1} \mathbf{P}\{S_k \geq g(k/n)x\} \leq C_8\mathbf{P}(S_{nt_0} \geq x\sqrt{t_0}) \sum_{k=bnt_0}^{N_n} \exp\left\{-C_9\left(\frac{x}{n}\right)^2 (nt_0 - k)\right\}$$

$$\sim C_8\mathbf{P}(S_{nt_0} \geq x\sqrt{t_0}) \int_{bnt_0}^{N_n} \exp\left\{-C_9\frac{x^2}{n^2}(nt_0 - t)\right\} dt$$

$$= C_8\mathbf{P}(S_{nt_0} \geq x\sqrt{t_0}) \int_{nt_0-N_n}^{(1-b)nt_0} \exp\left\{-C_9\frac{x^2}{n^2}s\right\} ds$$

$$= O\left(\mathbf{P}(S_{nt_0} \geq x\sqrt{t_0})\frac{n^2}{x^2}\exp\left\{-C_9\frac{x^2}{n^2}(nt_0 - N_n)\right\}\right)$$

$$= O\left(\frac{n^{5/2}}{x^3}e^{-C_9t_0^2/\varepsilon_{1,n}}\exp\left\{-nt_0\Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_0}}\right)\right\}\right) = o(R_1). \tag{31}$$

Из оценок (23) и (31) следует что $R_5 = o(R_1)$.

Нам осталось оценить R_6. Справедлива очевидная оценка

$$R_6 \leq \sum_{k=1}^{bnt_0} \mathbf{P}\{S_k \geq rx\} \equiv \mathbf{E}\tau_{[bnt_0]}(rx).$$

Из [13] следует, что

$$\mathbf{E}\tau_{[bnt_0]}(rx) \sim \frac{\sqrt{2}(bnt_0)^{5/2}}{\sqrt{\pi}(rx)^3} e^{-bnt_0\Lambda(rx/(bnt_0))}, \quad n \to \infty.$$

Так как $rx/(bnt_0) \to 0$, то в окрестности нуля можно использовать оценку для функции уклонений (см. (7))

$$\Lambda(rx/(bnt_0)) \geq c\frac{(rx)^2}{2(bnt_0)^2}, \tag{32}$$

а это значит, что

$$\exp\{-bnt_0\Lambda(rx/(bnt_0))\} \leq \exp\left\{-c\frac{(rx)^2}{2bnt_0}\right\}.$$

Положим теперь $b = r^2/(2t_0)$. Таким образом, для такого b имеем

$$R_6 = o(R_1),$$

что является завершающим шагом в соотношения $R_3 = o(R_1)$.

Доказательство утверждения $R_4 = o(R_2)$ полностью аналогично уже доказанному для $R_3 = o(R_1)$. Теорема 1 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 2.

Мы также, как и выше, будем полагать, без ограничения общности, что функция $g(t)$ равномерно ограничена, $\sigma = 1$ и $g(t) = \sqrt{t}$ для всех $t \in [t_1, t_2]$. Разобьем $\mathbf{E}\tau_n(xg)$ на три подсуммы: $\mathbf{E}\tau_n(xg) = S_1 + S_2 + S_3$, где

$$S_1 := \sum_{k=1}^{[nt_1]} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\}, \qquad S_2 := \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\},$$

$$S_3 := \sum_{k=[nt_2]+1}^{n} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\}.$$

Всюду далее предполагается, что $t_1 \neq 0$ и $t_2 \neq 1$, в противном случае доказательство будет только упрощаться, т.к. хотя бы одна из двух сумм S_1 и S_3 будет равна 0.

Построим верхние оценки для сумм S_1 и S_3, воспользовавшись условием $1'$:

$$S_1 \leq \sum_{k=1}^{[nt_1]} \mathbf{P}\left\{S_k \geq x\sqrt{\frac{k}{n}c_0\left(\frac{k}{n}\right)}\right\} := S_1',$$

$$S_3 \leq \sum_{k=[nt_2]+1}^{n} \mathbf{P}\left\{S_k \geq x\sqrt{\frac{k}{n}c_0\left(\frac{k}{n}\right)}\right\} := S_3'.$$

Поведение сумм S_1' и S_3' при $n \to \infty$ было изучено при доказательстве теоремы 1. Рассмотрим это на примере S_1'. Применяя рассуждения при доказательстве теоремы 1 к сумме S_1', мы получаем для нее следующую асимптотику:

$$S_1' \sim \frac{n^{3/2+1/m_1}(2m_1!)^{1/m_1}}{\sqrt{2\pi}x^{1+2/m_1}|c_0^{(m_1)}(t_1-0)|^{1/m_1}}\Gamma\left(\frac{m_1+1}{m_1}\right)\exp\left\{-nt_1\Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_1}}\right)\right\}. \quad (33)$$

Для S_3' верна следующая асимптотика:

$$S_3' \sim \frac{n^{3/2+1/m_2}(2m_2!)^{1/m_2}}{\sqrt{2\pi}x^{1+2/m_2}|c_0^{(m_2)}(t_2+0)|^{1/m_2}}\Gamma\left(\frac{m_2+1}{m_2}\right)\exp\left\{-nt_2\Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_2}}\right)\right\}. \quad (34)$$

Теперь перейдем к нахождению асимптотики суммы S_2. Заметим, что при данных условиях $g(k/n) = \sqrt{k/n}$ для всех $k \in [[nt_1]+1, [nt_2]]$. Применяя (6) к каждой вероятности, участвующей в сумме S_2, мы получаем, что для всех $k \in [[nt_1]+1, [nt_2]]$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\} &\sim \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}xg(k/n)}\exp\{-k\Lambda(xg(k/n)/k)\} \\ &\sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2n} - k\Lambda_0(x/\sqrt{kn})\right\} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2n} - nt_{n,k}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{n,k}}}\right)\right\}. \quad (35)\end{aligned}$$

Отсюда следует представление для суммы S_2:

$$S_2 = \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \mathbf{P}\{S_k \geq xg(k/n)\}$$

$$\sim \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{-\frac{x^2}{2n} - nt_{n,k}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{n,k}}}\right)\right\}$$

$$= \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2n}} \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n} \exp\left\{-nt_{n,k}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{n,k}}}\right)\right\}. \quad (36)$$

Заметим, что сумма, стоящая в конце формулы (36), представляет собой интегральную сумму Римана. Докажем следующий аналог (14).

$$\left| \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n} \exp\left\{-nt_{n,k}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{n,k}}}\right)\right\} - \int_{t_1}^{t_2} e^{-nt\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t}}\right)}\, dt \right|$$

$$= o\left(\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n} \exp\left\{-nt_{n,k}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{n,k}}}\right)\right\} \right). \quad (37)$$

Воспользуемся элементарной оценкой приближения интеграла Римана (15):

$$\left| \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n} f(t_{n,k}) - \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt \right| \leq \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \frac{1}{n^2} \max_{t_{n,k-1} \leq t \leq t_{n,k}} |f'(t)|.$$

Далее, полагая $f(t) = e^{-nt\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t}}\right)}$, покажем, что k-е слагаемое суммы в правой части последнего неравенства представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, чем соответствующее слагаемое суммы в (37). Воспользовавшись представлением функции уклонений через ряд Крамера, имеем

$$f(t) = \exp\left\{-nt\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t}}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{\mathbf{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2\sqrt{t}}(1 + o(1))\right\}.$$

После вычисления производной $f'(t)$ можно легко убедиться в том, что для доказательства (37) нам достаточно лишь заметить, что

$$\frac{1}{n^2}\frac{\mathbf{E}\xi_1^3 x^3}{12n^2t^{3/2}} = O\left(\frac{x^3}{n^4}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно по всем t из области интегрирования. Соотношение (37) доказано.

Нам осталось доказать, что $S_1 = o(S_2)$ и $S_3 = o(S_2)$, или, другими словами, показать, что именно S_2 определяет асимптотику всей суммы. Покажем это для $S_1 = o(S_2)$. Доказательство $S_3 = o(S_2)$ будет полностью аналогично приведенному ниже.

Прежде всего построим нижнюю оценку на S_2.

$$S_2' := \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2n}}\sum_{k=[nt_1]+1}^{\left[nt_1+\frac{n^2t_1^2}{\varepsilon_{1,n}x^2}\right]}\frac{1}{n}\exp\left\{-nt_{n,k}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{n,k}}}\right)\right\} \le S_2, \qquad (38)$$

где последовательность $\varepsilon_{1,n}$ была введена при доказательстве теоремы 1.

Заметим, что аналогично (8) выполнена следующая эквивалентность для всех $k \in \left[[nt_1]+1, \left[nt_1+\frac{n^2t_1^2}{\varepsilon_{1,n}x^2}\right]\right]$:

$$\exp\left\{-nt_{n,k}\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_{n,k}}}\right)\right\} \sim \exp\left\{-nt_1\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_1}}\right)\right\}. \qquad (39)$$

Из (38) и (39) следует, что

$$S_2' \sim \frac{n^{3/2}}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2n}}\frac{nt_1^2}{\varepsilon_{1,n}x^2}\exp\left\{-nt_1\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t_1}}\right)\right\}$$
$$= \frac{n^{5/2}t_1^2}{\sqrt{2\pi}x^3\varepsilon_{1,n}}\exp\left\{-nt_1\Lambda\left(\frac{x}{n\sqrt{t_1}}\right)\right\}. \qquad (40)$$

Нам осталось лишь убедиться, что $S_1' = o(S_2')$, сравнив между собой множители, стоящие перед экспонентой в (33) и (40). Доказательство этого факта эквивалентно следующему соотношению, верного в силу условий на последовательность $\varepsilon_{1,n}$:

$$\frac{\varepsilon_{1,n}x^{2-2/m_1}}{n^{1-1/m_1}} = \varepsilon_{1,n}\beta_n^{2-2/m_1} = \delta_n \to 0.$$

Отсюда немедленно вытекает основное утверждение теоремы.

Далее уже отмечалось, что при $m > 1$ мы имеем $\frac{x^4}{n^3} \to 0$. Тогда

$$-nt\Lambda_0\left(\frac{x}{n\sqrt{t}}\right) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{t}} + o(1), \quad \text{где } \alpha_n := \frac{\mathbf{E}\xi_1^3 x^3}{6n^2}.$$

Найдем асимптотику интеграла $I_n := \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha_n/\sqrt{t}}\,dt$. Рассмотрим 2 случая:

Случай 1: $\mathbf{E}\xi_1^3 = 0$ *или* $\frac{x^3}{n^2} \to 0$. Если $\mathbf{E}\xi_1^3 = 0$, то $\alpha_n = 0$ для всех n. Поэтому $I_n \sim t_2 - t_1$. При $\frac{x^3}{n^2} \to 0$ мы имеем $\alpha_n \to 0$, что снова дает нам $I_n \sim t_2 - t_1$ по теореме Лебега.

Случай 2: $\frac{x^3}{n^2} \to \infty$ *и* $\mathbf{E}\xi_1^3 \neq 0$. Вычислим асимптотику интеграла I_n:

$$I_n = \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha_n/\sqrt{t}}\,dt = 2\alpha_n^2 \int_{\alpha_n/\sqrt{t_2}}^{\alpha_n/\sqrt{t_1}} \frac{e^y}{y^3}\,dy = 2\alpha_n^2\left(\left.\frac{e^y}{y^3}\right|_{\alpha_n/\sqrt{t_2}}^{\alpha_n/\sqrt{t_1}} + 3\int_{\alpha_n/\sqrt{t_2}}^{\alpha_n/\sqrt{t_1}} \frac{e^y}{y^4}\,dy\right)$$

$$= 2\alpha_n^2\left(L_n + O\left(\frac{L_n}{\alpha_n}\right)\right) = 2\alpha_n^2\left(L_n + o(L_n)\right) \sim 2\alpha_n^2 L_n, \tag{41}$$

где

$$L_n := \left.\frac{e^y}{y^3}\right|_{\alpha_n/\sqrt{t_2}}^{\alpha_n/\sqrt{t_1}}.$$

Из (41) получаем

$$I_n \sim \frac{2t_1^{3/2}}{\alpha_n}e^{-\alpha_n/\sqrt{t_1}} - \frac{2t_2^{3/2}}{\alpha_n}e^{-\alpha_n/\sqrt{t_2}}$$
$$= \frac{12n^2t_1^{3/2}}{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}\exp\left\{\frac{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}{6n^2\sqrt{t_1}}\right\} - \frac{12n^2t_2^{3/2}}{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}\exp\left\{\frac{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}{6n^2\sqrt{t_2}}\right\}.$$

Нетрудно заметить, что

$$I_n \sim \begin{cases} \frac{12n^2t_1^{3/2}}{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}\exp\left\{\frac{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}{6n^2\sqrt{t_1}}\right\}, & \text{если } \mathbf{E}\xi_1^3 > 0, \\ -\frac{12n^2t_2^{3/2}}{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}\exp\left\{\frac{\mathbf{E}\xi_1^3x^3}{6n^2\sqrt{t_2}}\right\}, & \text{если } \mathbf{E}\xi_1^3 < 0. \end{cases}$$

Теорема 2 доказана.

ГЛАВА 2.
Асимптотика хвоста распределения времени пребывания траектории случайного блуждания не ниже удаляющегося прямолинейного уровня

Глава посвящена изучению асимптотического поведения при $n \to \infty$ хвоста распределения нормированной случайной величины $\tau_n(x)/n$, т.е. вероятности

$$\mathbf{P}\{\tau_n(x)/n \geq y\} = \mathbf{P}\{\tau_n(x) \geq ny\}$$

для любого фиксированного $y \in (0,1)$ в случае, когда $x \equiv x(n)$ неограниченно возрастает с некоторой скоростью, соответствующей так называемой зоне умеренно больших уклонений. В силу того, что $\tau_n(x)$ — целочисленная случайная величина, принимающая значения от 0 до n, то всюду в дальнейшем считаем, что ny — целое число, в противном случае мы всегда может взять целую часть от ny.

Основной результат главы содержится в первом параграфе. Второй параграф содержат результаты, посвященные так называемому *закону арксинуса* для времени пребывания случайного блуждания на положительной полуоси. Эти результаты играют центральную роль при доказательстве основных результатов текущей главы. В третьем параграфе приведены доказательства основных утверждений этой главы.

§ 1. Формулировка основных результатов

Относительно моментных условий на ξ_i и зоны уклонений для x предполагается следующее: для некоторых $\lambda > 0$ и $r \in [1,2]$ выполнено

(A_r) $\frac{x}{\sqrt{n}} \to \infty$, $x = o\Big(\min\big\{n^{(r+1)/(r+2)}, (n/\log n)^{3/4}\big\}\Big)$;

(B_r) $\mathbf{E}e^{\lambda|\xi_1|} < \infty$ и $\mathbf{E}\big\{e^{\lambda\xi_1^r} I(\xi_1 \geq 0)\big\} < \infty$.

Нетрудно заметить, что условие (B_r) при $r = 1$ перейдет в классическое условие Крамера, при этом зона уклонений будет иметь порядок $x = o(n^{2/3})$.

Теорема 3. *При выполнении условий (A_r) и (B_r) для любого фиксированного $y \in (0,1)$ и $n \to \infty$ имеет место следующее асимптотическое соотношение*:

$$\mathbf{P}\{\tau_n(x) \geq ny\} \sim \frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}}\frac{n\sigma^2}{x^2} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}, \tag{42}$$

при этом в соотношении (42) для $r = 1$ показатель степени у экспоненты может быть заменен на $-x^2/(2\sigma^2 n(1-y))$, а в случае $r \in (1,2]$ — на величину

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2 n(1-y)} + \frac{x^3 \mathbf{E}\xi_1^3}{6\sigma^6 n^2 (1-y)^2}.$$

Рассмотрим отдельно два класса распределений ξ_1.

(I): *Одностороннее показательное* распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in dt\} = p\alpha e^{-\alpha t},\ t > 0,$$

где $p > 0, \alpha > 0$. При этом неположительная компонента распределения может быть произвольной, удовлетворяющей условию Крамера и $\mathbf{E}\xi_1 = 0$.

(II): *Одностороннее обобщенное геометрическое* распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \alpha p^{k-1},\ k \in \mathbb{N},$$

где $p \geq 0, \alpha > 0$ при соглашении $0^0 = 1$. При этом неположительная компонента распределения должна быть арифметической, удовлетворяющей условию Крамера и $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. Заметим, что в случае $p = 0$ мы имеем дело с полунепрерывным сверху случайным блужданием.

Отметим, что для вышеупомянутых распределений, кроме случая полунепрерывного сверху блуждания, условие (B_r) не выполнено при любом $r > 1$. В этом случае хорошо известен феномен *отсутствия последействия*, когда распределение перескока совпадает с исходным показательным распределением ξ_1. Это замечательное свойство позволяет нам улучшить результат теоремы 3 в этом частном случае, заменив условие (A_r) на (A_2) и отказавшись от условия (B_r).

Теорема 4. *Пусть* ξ_1 *имеет распределение из классов* (I) *или* (II). *Тогда при выполнении условия* (A_2) *для любого фиксированного* $y \in (0,1)$ *и* $n \to \infty$ *имеет место утверждение теоремы* 3.

Теперь мы рассмотрим случай *простейшего симметричного случайного блуждания*, т.е. $\xi_1 = \pm 1$ с вероятностями $1/2$. Отметим, что это распределение является частным случаем распределения класса (II), введенного выше.

В этом случае асимптотическое соотношение (42) верно для всей зоны умеренно больших уклонений: $xn^{-1/2} \to \infty$ и $x = o(n)$.

Теорема 5. *Для простейшего симметричного случайного блуждания и всех последовательностей* $x \equiv x(n)$, *удовлетворяющих условию* (A), *имеет место следующее асимптотическое соотношение для любого фиксированного* $y \in (0,1)$:

$$\mathbf{P}\{\tau_n(x) \geq ny\} \sim \frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}} \frac{n}{x^2} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\},$$

где

$$\Lambda(z) = \frac{1+z}{2}\log(1+z) + \frac{1-z}{2}\log(1-z), \quad |z| < 1.$$

§ 2. Оценки скорости сходимости в законе арксинуса

Для измеримой траектории $f(t)$ того или иного случайного процесса обозначим

$$T_s^z(f) := \int_0^s I(f(t) \geq z)\, dt,$$

где $s \in (0,1]$. Иными словами, функционал $T_s^z(f)$ есть время нахождения траектории $f(t)$ не ниже уровня z за время наблюдения от нуля до s.

Лемма 1. *Для любых вещественных* $z_1 < z_2$

$$(i) \quad 0 \le T_s^{z_1}(W) - T_s^{z_2}(W) \le (z_2 - z_1)\mathcal{L}(s),$$

$$(ii) \quad \sup_{0\le y\le s}\big|\mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) > y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) > y\right\}\big| \le \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\tfrac{z_2-z_1}{\sqrt{s}},$$

где $\mathcal{L}(s)$ *— максимальное локальное время для стандартного винеровского процесса* $W(\cdot)$ *на временно́м интервале* $[0,s]$.

Замечание 4. Известно, что для любого $h \ge 1$ (см. (4.6) в [9])

$$\mathbf{P}\{\mathcal{L}(s) \ge h\} \le A\frac{h^2}{s}\exp\left\{-\frac{h^2}{2s}\right\}, \tag{43}$$

где A — абсолютная положительная постоянная.

Введем в рассмотрение нормированный процесс частичных сумм $S_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]}$, определенный для всех $t \in [0,1]$. В следующей теореме мы предполагаем, что выполнены основные предположения на распределение скачков ξ_i случайного блуждания в условиях теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть случайные процессы* $S_n(t)$ *и* $W(t)$ *заданы на одном вероятностном пространстве. Тогда для любых* $\delta > 0$ *и* $n > 1$ *имеет место следующее неравенство:*

$$\sup_{0\le y\le s,\, z\in\mathbb{R}}\big|\mathbf{P}\{T_s^z(S_n) < y) - \mathbf{P}(T_s^z(W) < y\}\big| \le \frac{8(\log n)^{1/4}\sqrt{2\delta}}{\pi\sqrt{3s}} + A\frac{\log n}{s\sqrt{n}} + \mathbf{P}\left\{\max_{t\in[0,1]}|S_n(t) - W(t)| > \delta\right\}, \tag{44}$$

где постоянная A *определена в* (43).

Замечание 5. Как известно [14], при сделанных предположениях случайные процессы $S_n(t)$ и $W(t)$ при каждом n можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\sup_{t\in[0,1]} |S_n(t) - W(t)| \geq \delta(n)) = 0$$

для некоторой последовательности $\delta(n) \to 0$. Ясно, что скорость этой сходимости зависит от близости траекторий случайных процессов $S_n(t)$ и $W(t)$, т.е. от способа задания этих процессов на одном вероятностном пространстве. Существует немало таких способов. При выполнении условия (B) в известном смысле оптимальное построение указанных процессов на одном вероятностной пространстве приведено в работах Я. Комлоша, П. Майора и Г. Тушнади [26, 27] В этом случае в (44) нужно положить $\delta(n) := Kn^{-1/2}\log n$ для подходящей константы K. Тогда правая часть в (44) будет иметь порядок $O(n^{-1/4}(\log n)^{3/4})$.

Теперь перейдем к рассмотрению простейшего случайного блуждания. Введем в рассмотрение следующие функционалы от случайного блуждания $\{S_k,\ k \leq n\}$:

$$\tau_n := \sum_{k=1}^{n} I\{S_k \geq 0\}, \tag{45}$$

который естественно называть *временем пребывания простейшего случайного блуждания* $\{S_k\}$ *на неотрицательной полуоси до момента времени* n *включительно*;

$$\tau'_n := \sum_{k=1}^{n} I\{S_{k-1} \geq 0, S_k \geq 0\}, \tag{46}$$

который можно интерпретировать как *время нахождения не ниже нулевого уровня траектории случайной ломаной с узлами в точках* (k, S_k), $k =$

$0, 1, \ldots, n$;

$$\tau''_n := \sum_{k=1}^{n} I\{S_k > 0\}, \tag{47}$$

который назовем *временем пребывания простейшего случайного блуждания на положительной полуоси до момента времени n включительно.*

Исследованию распределений функционалов типа времени пребывания на полуоси посвящено множество работ. Одной из первых работ по данной тематике является результат П. Леви [28], в котором установлено распределение $\tau(0)$, а также доказано, что $\frac{\tau''_n}{n}$ слабо сходится к $\tau(0)$. П. Эрдёшем и М. Кацом [24] результат П. Леви был обобщен на случай, когда независимые $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$ имеют нулевое среднее и единичную дисперсию. К. Л. Чжун и У. Феллер [21] нашли распределение функционала τ'_n и доказали, что имеет место слабая сходимость $\frac{\tau'_n}{n}$ к τ в случае простейшего случайного блуждания. Э. Спарре–Андерсен [29] нашел способ вычисления распределения τ''_n для широкого класса распределений скачков $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$ случайного блуждания, в том числе для симметричных случайных блужданий.

Ясно, что

$$\tau_n - \tau'_n = \sum_{m:\, 2m \le n} I\{S_{2m-1} = -1, S_{2m} = 0\} \le \sum_{m:\, 2m \le n} I\{S_{2m} = 0\} = \tau_n - \tau''_n,$$

причем τ'_n принимает лишь четные значения, не превосходящие n, а также и само значение n, если оно четно. Если n четное, то распределение τ'_n совпадает с распределением $n - \tau'_n$. Отметим также, что распределение τ'_n хорошо известно (например, см. [17]):

$$\mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2k\} = 2^{-2m} C_{2k}^{k} C_{2(m-k)}^{m-k},\ \ k = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{48}$$

Нетрудно заметить, что распределение τ''_n совпадает с распределением $n - \tau_n$ для любых $n \ge 1$.

Как следует из принципа инвариантности Донскера–Прохорова, при $n \to \infty$ распределения $\frac{\tau_n}{n}$, $\frac{\tau'_n}{n}$ и $\frac{\tau''_n}{n}$ слабо сходятся к распределению функционала

$$\tau := \tau(0) = T_1^0(W) = \int\limits_0^1 I(W(t) \geq 0)\, dt, \tag{49}$$

т.е. к распределению *времени нахождения траектории стандартного винеровского процесса $W(t)$ на положительной полуоси за период наблюдения от нуля до* 1.

Зачастую результаты, иллюстрирующие указанную выше сходимость, принято называть *(дискретным) законом арксинуса.* Этот термин обязан своим названием функции распределения τ:

$$\mathbf{P}\{\tau < t\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t},\ t \in [0,1].$$

Далее будут сформулированы результаты работы, устанавливающие скорость поточечной, равномерной и неравномерной сходимости функций распределения (для полуинтервалов из открытого множества $(0,1)$) процессов $\frac{\tau_n}{n}$ и $\frac{\tau'_n}{n}$ к функции распределения τ.

Известна следующая оценка [22, 25] скорости сходимости $\frac{\tau'_n}{n}$ к τ в терминах метрики Канторовича–Рубинштейна (чаще называемой метрикой Вассерштейна):

$$d_W\left(\frac{\tau'_n}{n}, \tau\right) := \sup_{h \in Lip(1)} \left| \mathbf{E}h\left(\frac{\tau'_n}{n}\right) - \mathbf{E}h(\tau) \right| \leq \frac{C_1}{n}, \tag{50}$$

где C_1 — некоторая положительная константа.

Из (50) можно получить оценку

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} |\mathbf{P}\{\tau'_n < ny\} - \mathbf{P}\{\tau < y\}| \leq \frac{C_2}{n^{1/3}},$$

где C_2 — некоторая положительная константа. Однако в действительности скорость сходимости в метрике Колмогорова оказалась значительно лучше, чем

$O(n^{-1/3})$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится распределение τ_n. Несмотря на то, что нахождение этого распределения легко следует из результата [29], автору не удалось найти точного распределения этого функционала в литературе.

Лемма 2. *Для любых $n \geq 1$ и $0 \leq k \leq n$ верно следующее:*

если n четное, то

$$\mathbf{P}\{\tau_n = k\} = \begin{cases} C_k^{k/2} C_{n-k-2}^{(n-k-2)/2} 2^{-n+1} \frac{n-k-1}{n-k}, & \text{если } k \text{ четное и } k \neq n, \\ C_{k-1}^{(k-1)/2} C_{n-k-1}^{(n-k-1)/2} 2^{-n+1} \frac{k}{k+1}, & \text{если } k \text{ нечетное}, \\ C_n^{n/2} 2^{-n}, & \text{если } k = n; \end{cases} \tag{51}$$

если n нечетное, то

$$\mathbf{P}\{\tau_n = k\} = \begin{cases} C_k^{k/2} C_{n-k-1}^{(n-k-1)/2} 2^{-n}, & \text{если } k \text{ четное}, \\ C_{k-1}^{(k-1)/2} C_{n-k-2}^{(n-k-2)/2} 2^{-n+2} \frac{k(n-k-1)}{(k+1)(n-k)}, & \text{если } k \text{ нечетное и } k \neq n, \\ C_{n-1}^{(n-1)/2} 2^{-n+1} \frac{n}{n+1}, & \text{если } k = n. \end{cases} \tag{52}$$

Нетрудно проверить, что имеет место следующее свойство распределения τ_n для всех $n \geq 1$: $\mathbf{P}\{\tau_n = k\} = \mathbf{P}\{\tau_n = n - k - 1\}, k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Приведем далее результаты, которые посвящены построению неравномерных оценок скорости локальной сходимости в законе арксинуса.

Лемма 3. *При $n \geq 5$ для $2 \leq k \leq n - 3$ верно следующее:*

$$\left| \mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{\pi n \sqrt{t_{n,k}(1 - t_{n,k})}} \right| < \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}(\min\{k-1, n-k-2\})^{3/2}}. \tag{53}$$

Лемма 4. *При $m \ge 1$ для $1 \le k \le m-1$ верно следующее:*

$$\left|\mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2k\} - \frac{1}{\pi m\sqrt{t_{m,k}(1-t_{m,k})}}\right| < \frac{\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{m}(\min\{k, m-k\})^{3/2}}. \qquad (54)$$

Из полученных выше оценок следуют равномерные оценки скорости слабой сходимости процессов $\frac{\tau_n}{n}$ и $\frac{\tau'_n}{n}$ к τ.

Теорема 7. *Имеет место следующая оценка для любых $n \ge 1$:*

$$\sup_{0\le y\le 1} |\mathbf{P}\{\tau_n < ny\} - \mathbf{P}\{\tau < y\}| \le \left(5\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{16\sqrt{2}}{\pi} + \frac{3\sqrt{5}}{\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (55)$$

Теорема 8. *Имеет место следующая оценка для любых четных $n = 2m$:*

$$\sup_{0\le y\le 1} |\mathbf{P}\{\tau'_{2m} < 2my\} - \mathbf{P}\{\tau < y\}| \le \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} + \frac{3\sqrt{5}}{\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{m}}. \qquad (56)$$

Отметим, что порядок скорости сходимости $O\left(n^{-1/2}\right)$ в равномерных оценках скорости сходимости функций распределения является неулучшаемым. Нетрудно построить нижнюю оценку на рассматриваемое расстояние Колмогорова:

$$\sup_{0\le y\le 1} |\mathbf{P}\{\tau_n < ny\} - \mathbf{P}\{\tau < y\}| \ge |\mathbf{P}\{\tau_n < n\} - \mathbf{P}\{\tau < 1\}| = \mathbf{P}\{\tau_n = n\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для слабой сходимости $\frac{\tau'_n}{n}$ и $\frac{\tau''_n}{n}$ к τ.

Введем в рассмотрение следующий функционал для всех $s \in (0, 1]$:

$$\tau^s := T^0_s(W) = \int_0^s I(W(t) \ge 0)dt, \qquad (57)$$

т.е. *время нахождения траектории стандартного винеровского процесса* $W(t)$ *на положительной полуоси за период наблюдения от нуля до* $s \le 1$. Нетрудно заметить, что распределение τ^s совпадает с распределением $s\tau$ для любых $s \in (0,1]$.

В качестве следствия теоремы 7 можно получить аналогичную оценку скорости сходимости $\frac{\tau_{ns}}{n}$ к τ^s по распределению. Далее мы полагаем, что ns — целое число.

Следствие 2. *Имеет место следующая оценка для любых* $s \in (0,1]$ *и* $n \ge 1$:

$$\sup_{0\le y\le s} |\mathbf{P}\{\tau_{ns} < ny\} - \mathbf{P}\{\tau^s < y\}| \le \left(5\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{16\sqrt{2}}{\pi} + \frac{3\sqrt{5}}{\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{ns}}. \qquad (58)$$

Доказательство этого следствия следует из тождеств:

$$\sup_{0\le y\le s} |\mathbf{P}\{\tau_{ns} < ny\} - \mathbf{P}\{\tau^s < y\}| = \sup_{0\le y\le s} \left|\mathbf{P}\{\tau_{ns} < ns\frac{y}{s}\} - \mathbf{P}\{\tau < \frac{y}{s}\}\right|$$

$$= \sup_{0\le z\le 1} |\mathbf{P}\{\tau_{ns} < nsz\} - \mathbf{P}\{\tau < z\}|\,.$$

Аналогичным образом устанавливается следующее утверждение:

Следствие 3. *Имеет место следующая оценка для любых* $s \in (0,1]$ *и* $n \ge 1$:

$$\sup_{0\le y\le s} |\mathbf{P}\{\tau'_{2ms} < 2my\} - \mathbf{P}\{\tau^s < y\}| \le \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} + \frac{3\sqrt{5}}{\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{ms}}. \qquad (59)$$

Теперь мы построим неравномерные оценки скорости сходимости распределений $\frac{\tau_n}{n}$ и $\frac{\tau'_n}{n}$ к распределению τ для полуинтервалов из открытого множества $(0,1)$. Эти неулучшаемые оценки оказались существенно сильнее, нежели для расстояния Колмогорова.

Теорема 9. *Для любых* $0 < x < y < 1$ *выполняется неравенство:*

$$|\mathbf{P}\{nx \le \tau_n < ny\} - \mathbf{P}\{x \le \tau < y\}| < \left(\frac{8\sqrt{2}(y-x)}{3\pi(\min\{x, (1-y)\})^{3/2}} + \frac{14}{\pi\sqrt{x(1-y)}} \right) \frac{1}{n}. \quad (60)$$

Теорема 10. *Для любых* $0 < x < y < 1$ *выполняется неравенство:*

$$|\mathbf{P}\{2mx \le \tau'_{2m} < 2my\} - \mathbf{P}\{x \le \tau < y\}| < \left(\frac{4\sqrt{2}(y-x)}{3\pi(\min\{x, (1-y)\})^{3/2}} + \frac{4}{\pi\sqrt{x(1-y)}} \right) \frac{1}{m}. \quad (61)$$

Стоит отметить, что существуют и другие функционалы от случайного блуждания, имеющие распределение, совпадающее с τ'_{2m}. Примером такого функционала служит $Z_{2m} := \max\{k \le 2m : S_k = 0\}$, т.е. *последнее время попадания простейшего случайного блуждания в начальное состояние* (например, см. [17]). Поэтому все вышеуказанные результаты, сформулированные для τ'_n, окажутся справедливыми и для таких функционалов.

§ 3. Доказательство основных результатов.

3.1 Доказательство теоремы 3

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\sigma = 1$ и величина $n(1-y)$ — целое число. Если это число окажется не целым, то мы всегда можем взять целую часть от него. Сразу заметим, что из условия (B_r) следует:

$$\mathbf{E}e^{\lambda|\xi_1|} < \infty, \quad (62)$$

т.е. для распределения скачков ξ_i выполнено классическое двустороннее условие Крамера (B).

Выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$ таким образом, чтобы выполнялись следующие два соотношения:

$$\frac{n}{\varepsilon_n x^2} \to 0, \quad \frac{x}{\varepsilon_n n} \to 0.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq ny\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(x - S_{\eta(x)}\right) \geq ny, \eta(x) = k\right\}, \tag{63}$$

где $\tau_{n-k,n}(z) := \sum\limits_{j=k+1}^{n} I\left\{S_j - S_k \geq z\right\}$, $\eta(x) := \inf\{k : S_k \geq x\}$, $0 \leq S_{\eta(x)} - x$ — величина перескока. В силу того, что события $\{\eta(x) = k\}$ и $\{\tau_{n-k,n}(b) \geq a\}$ независимы при любых постоянных a и b, справедлива следующая оценка снизу на искомую вероятность:

$$\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq ny\right\} \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}(0) \geq ny\right\} \mathbf{P}\left\{\eta(x) = k\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n(1-y)} A_k(y) \mathbf{P}\{\eta(x) = k\} := L_n, \tag{64}$$

где $A_k(y) := \mathbf{P}\{\tau_{n-k,n}(0) \geq ny\}$.

Построим верхнюю оценку для каждого слагаемого правой части (63), используя очевидное неравенство $S_{\eta(x)} - x \leq \xi_{\eta(x)}$:

$$\mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(x - S_{\eta(x)}\right) \geq ny, \eta(x) = k\right\}$$

$$= \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(x - S_{\eta(x)}\right) \geq ny, \xi_{\eta(x)} \leq c_0 \frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}, \eta(x) = k\right\}$$

$$+ \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}(x - S_{\eta(x)}) \geq ny, \xi_{\eta(x)} > c_0 \frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}, \eta(x) = k\right\}$$

$$\le \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(-c_0\frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}\right) \ge ny, \eta(x)=k\right\} + \mathbf{P}\left\{\xi_{\eta(x)} > c_0\frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}, \eta(x)=k\right\}$$

$$\le \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(-c_0\frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}\right) \ge ny\right\}\mathbf{P}\left\{\eta(x)=k\right\} + \mathbf{P}\left\{\xi_k > c_0\frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}\right\} \qquad (65)$$

для всех $k \le n(1-y)$, где c_0 — некоторая положительная константа, не зависящая от n. Мы выберем ее позднее. Из (63) и (65) мы получим следующую верхнюю оценку искомой вероятности:

$$\mathbf{P}\{\tau_n(x) \ge ny\} \le U_n^{(1)} + U_n^{(2)} =: U_n,$$

где

$$U_n^{(1)} := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(-c_0\frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}\right) \ge ny\right\}\mathbf{P}\{\eta(x)=k\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n(1-y)} \overline{A_k}(y)\mathbf{P}\{\eta(x)=k\},$$

$$U_n^{(2)} := n\mathbf{P}\left\{\xi_1 > c_0\frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}\right\}, \qquad (66)$$

где $\overline{A_k}(y) := \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(-c_0\frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}\right) \ge ny\right\}$. Отметим, что $A_k(y) = \overline{A_k}(y) = 0$ при всех $k > n(1-y)$.

Перейдем к нахождению асимптотики нижней оценки L_n. Через $W(t)$ обозначим стандартный винеровский процесс. Нам понадобится следующий известный результат — закон арксинуса (см., например, [12]):

$$B_k(y) := \mathbf{P}\left\{\int_0^{1-k/n} I\{W(t)\ge 0\}\,dt \ge y\right\} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-k/n}}. \qquad (67)$$

Другими словами, $B_k(y)$ — хвост распределения времени пребывания траектории стандартного винеровского процесса на положительной полуоси на временном промежутке $[0, 1-k/n]$.

Представим L_n следующим образом:

$$L_n = \widetilde{L_n} + R_2,$$

где

$$\widetilde{L_n} := \sum_{k=1}^{n(1-y)} B_k(y)\mathbf{P}\{\eta(x)=k\},$$

$$R_2 := \sum_{k=1}^{n(1-y)} \left(A_k(y) - B_k(y)\right)\mathbf{P}\{\eta(x)=k\}. \tag{68}$$

Отметим, что $B_{n(1-y)}(y) = 0$. Применяя формулу суммирования Абеля к $\widetilde{L}_n$, получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{L_n} = \sum_{k=1}^{n(1-y)} B_k(y)\left(\mathbf{P}\{\eta(x)\le k\} - \mathbf{P}\{\eta(x)\le k-1\}\right)\\ = B_{n(1-y)}(y)\mathbf{P}\{\eta(x)\le n(1-y)\} - B_1(y)\mathbf{P}\{\eta(x)\le 1\}\\ - \sum_{k=1}^{n(1-y)-1}(B_{k+1}(y) - B_k(y))\mathbf{P}\{\eta(x)\le k\}\\ = \sum_{k=2}^{n(1-y)}(B_{k-1}(y) - B_k(y))\mathbf{P}\{\eta(x)\le k\} - B_1(y)\mathbf{P}\{\eta(x)\le 1\}.\end{aligned} \tag{69}$$

Далее, разобьем последнюю сумму в (69) на три части:

$$R_1 := \sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon_n}]}(B_{k-1}(y) - B_k(y))\mathbf{P}\{\eta(x)\le k\},$$

$$R_3 := \sum_{k=[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon_n}]+1}^{n(1-y)}(B_{k-1}(y) - B_k(y))\mathbf{P}\{\eta(x)\le k\},$$

$$R_4 := \sum_{k=2}^{N_y-1}(B_{k-1}(y) - B_k(y))\mathbf{P}\{\eta(x)\le k\} - B_1(y)\mathbf{P}\{\eta(x)\le 1\}, \tag{70}$$

где $N_y := \left[n - ny - \frac{n^2}{\varepsilon_n x^2}\right]$.

Таким образом, $L_n = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Далее будет показано, что основной вклад в асимптотику искомой вероятности вносит именно R_1, т.е. $R_2 = o(R_1)$, $R_3 = o(R_1)$ и $R_4 = o(R_1)$. Сначала изучим предельное поведение величины R_1.

Лемма 5. *Для всех $x \equiv x(n)$, удовлетворяющих условию (A), справедливо следующее асимптотическое соотношение при выполнении условия Крамера (B):*

$$R_1 \sim \frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}}\frac{n}{x^2}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}.$$

Доказательство леммы 5.

Из результатов [1] следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta(x) \le k\} = \mathbf{P}\{\overline{S_k} \ge x\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{k}}{x}\exp\{-k\Lambda(x/k)\} \tag{71}$$

при $k \to \infty$. В частности, это асимптотическое соотношение будет выполняться равномерно для всех $k \in [N_y, n(1-y)]$ при $n \to \infty$.

В силу условия (62) функция $\Lambda(z)$ аналитична в окрестности нуля. Прежде всего отметим, что из условия (B) равномерно по всем $k \in [N_y, n(1-y)]$ имеет место предельное соотношение $\frac{x}{k} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при выполнении условий (A) и (B) нормированная функция уклонений при разложении в ряд Тейлора в окрестности нуля примет вид

$$k\Lambda\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{x^2}{2k} + \sum_{i=3}^{\infty} a_i \frac{x^i}{k^{i-1}},$$

где $a_i = \frac{\Lambda^{(i)}(0)}{i!}$. Обозначим

$$\Lambda_0\left(\frac{x}{k}\right) := k^{-1}\sum_{i=3}^{\infty} a_i \frac{x^i}{k^{i-1}}.$$

Из соотношения (8) следует асимптотическое соотношение, равномерное для всех $k \in [N_y, n(1-y)]$:

$$\exp\left\{-k\Lambda_0\left(\frac{x}{k}\right)\right\} \sim \exp\left\{-n(1-y)\Lambda_0\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}. \tag{72}$$

Доказательство этого факта напрямую следует из (8), заменив t_0 на $1-y$. Поэтому в силу (71) и (72) имеет место следующее асимптотическое представление вероятности $\mathbf{P}\{\eta(x) \le k\}$ равномерно по всем $k \in [N_y, n(1-y)]$:

$$\mathbf{P}\{\eta(x) \le k\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{k}}{x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2k}\right\}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda_0\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}. \tag{73}$$

Из формул (67) и (73) мы получаем следующее представление суммы R_1:

$$R_1 \sim \sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon n}]} \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-k/n}} - \arcsin\sqrt{\frac{y}{1-(k-1)/n}}\right)$$

$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{k}}{x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2k}\right\}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda_0\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{n}}{x}\sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon n}]}\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t_{n,k}}} - \arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t_{n,k-1}}}\right)$$

$$\times\sqrt{t_{n,k}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2nt_{n,k}}\right\}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda_0\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}. \tag{74}$$

В силу формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$\sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon n}]}\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t_{n,k}}} - \arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t_{n,k-1}}}\right)\sqrt{t_{n,k}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x^2}{2nt_{n,k}}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon n}]}\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t^*_{n,k}}}\right)'\sqrt{t_{n,k}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2nt_{n,k}}\right\},$$

где $t^*_{n,k}$ — некоторая точка из интервала $[t_{n,k-1}, t_{n,k}]$. Отметим, что сумма, стоящая в правой части (74), представляет собой не что иное, как интегральную сумму Римана для соответствующего интеграла. Поэтому имеет место следующее асимптотическое соотношение при $n \to \infty$:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon_n}]}\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t^*_{n,k}}}\right)'\sqrt{t_{n,k}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2nt_{n,k}}\right\}\right.$$
$$\left.-\int_{N_y/n}^{1-y-\frac{1}{n\varepsilon_n}}\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t}}\right)'\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{2nt}}\,dt\right|$$
$$= o\left(\frac{1}{n}\sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon_n}]}\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t^*_{n,k}}}\right)'\sqrt{t_{n,k}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2nt_{n,k}}\right\}\right). \tag{75}$$

В самом деле, известна следующая оценка погрешности приближения интеграла Римана, введенная ранее в (15):

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon_n}]} f(k) - \int_{N_y/n}^{1-y-\frac{1}{n\varepsilon_n}} f(t)\,dt\right| \quad\le\quad \sum_{k=N_y}^{[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon_n}]}\frac{1}{n^2}\max_{t_{n,k-1}\le t\le t_{n,k}} f'(t). \tag{76}$$

Положим $f(t) = \left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t}}\right)'\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{2nt}}$. После вычисления производной нам достаточно убедиться, что выполняется следующее:

$$\frac{f'(t)}{n} = \left(\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t}}\right)''\Big/\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t}}\right)' + \frac{1}{2t} + \frac{x^2}{2nt^2}\right)\frac{f(t)}{n}$$
$$= \left(\frac{1}{2(1-t-y)} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2t} + \frac{x^2}{2nt^2}\right)\frac{f(t)}{n} \le Cf(t)\varepsilon_n = o(f(t))$$

равномерно по всем t из области интегрирования, что немедленно доказывает (75).

Обозначим через I_n полученный в (75) интеграл и вычислим его асимптотику:

$$I_n := \int_{N_y/n}^{1-y-\frac{1}{n\varepsilon_n}}\left(\arcsin\sqrt{\frac{y}{1-t}}\right)'\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{2nt}}\,dt$$

$$= \int_{N_y/n}^{1-y-\frac{1}{n\varepsilon_n}} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{1-t-y}(1-t)} \sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{2nt}}\, dt. \tag{77}$$

Заметим, что для всех t из области интегрирования $[N_y/n, 1-y-\frac{1}{n\varepsilon_n}]$ выполнено

$$y \le 1-t \le 1 - \frac{N_n}{n} \le 1 - (1 - y - \frac{n}{\varepsilon_n x^2}) \to y.$$

Применяя теорему о среднем для интеграла (77), получаем следующую эквивалентность:

$$\int_{N_y/n}^{1-y-\frac{1}{n\varepsilon_n}} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{1-t-y}(1-t)} \sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{2nt}}\, dt$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{N_y/n}^{1-y-\frac{1}{n\varepsilon_n}} \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t-y}} e^{-\frac{x^2}{2nt}}\, dt. \tag{78}$$

В интеграле в правой части (78) проведем замену переменной интегрирования по формуле $z = \frac{1}{t} - \frac{1}{1-y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \int_{N_y/n}^{1-y-\frac{1}{n\varepsilon_n}} \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t-y}} e^{-\frac{x^2}{2nt}}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{\overline{K_n}}^{\overline{N_n}} \frac{1}{2\sqrt{z}\sqrt{1-y}} \frac{(1-y)^2}{(1+z(1-y))^2} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2n(1-y)} - \frac{x^2}{2n} z \right\} dz$$
$$= \frac{(1-y)^{3/2}}{2\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2n(1-y)}} \int_{\overline{K_n}}^{\overline{N_n}} \frac{1}{\sqrt{z}(1+z(1-y))^2} e^{-\frac{x^2}{2n} z}\, dz, \tag{79}$$

где $\overline{K_n} := \frac{1}{n\varepsilon_n(1-y-1/(n\varepsilon_n))(1-y)}$, $\overline{N_n} := \frac{n}{N_n} - \frac{1}{1-y}$.

Покажем, что $1 + z(1-y) \sim 1$ для всех $z \in [\overline{K_n}, \overline{N_n}]$:

$$1 \le 1 + z(1-y) \le 1 + \overline{N_n}(1-y)$$
$$= 1 + \frac{n}{N_n}(1-y) - 1 = (1-y) \Big/ \left(1 - y - \frac{n}{\varepsilon_n x^2}\right) \to 1, \tag{80}$$

так как $\frac{n}{\varepsilon_n x^2} \to 0$ из условий на ε_n. Поэтому из формул (79) и (80) получаем

$$I_n \sim \frac{(1-y)^{3/2}}{2\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2n(1-y)}} \int_{\overline{K_n}}^{\overline{N_n}} \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\frac{x^2}{2n} z}\, dz. \tag{81}$$

Нам осталось лишь провести замену переменной интегрирования по формуле $u = \frac{x^2}{2n} z$, но прежде зафиксируем поведение верхнего предела интегрирования после этой замены:

$$\frac{x^2}{2n}\overline{N_n} = \frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{1-y-n/(\varepsilon_n x^2)} - \frac{1}{1-y}\right)$$
$$\sim \frac{x^2}{2n}\frac{n}{\varepsilon_n x^2 (1-y)^2} = \frac{1}{\varepsilon_n (1-y)^2} \to \infty. \quad (82)$$

Аналогично рассмотрим нижний предел интегрирования в (81):

$$\frac{x^2}{2n}\overline{K_n} = \frac{x^2}{2n}\frac{1}{n\varepsilon_n\left(1-y-1/(n\varepsilon_n)\right)(1-y)} \sim \frac{x^2}{2\varepsilon_n n^2 (1-y)^2} \to 0. \quad (83)$$

Отметим, что

$$\int_0^{\frac{x^2}{2\varepsilon_n n^2(1-y)^2}} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u}\, du \le \int_0^{\frac{x^2}{2\varepsilon_n n^2(1-y)^2}} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$
$$= 2\sqrt{\frac{x^2}{2\varepsilon_n^2 n^2 (1-y)^2}}\sqrt{\varepsilon_n} = \sqrt{2\varepsilon_n}\frac{x}{\varepsilon_n n(1-y)} \to 0. \quad (84)$$

Из формул (81)—(84) получаем

$$I_n \sim \frac{(1-y)^{3/2}}{2\sqrt{y}}\frac{\sqrt{2n}}{x} e^{-\frac{x^2}{2n(1-y)}} \int_{\frac{x^2}{2n}\overline{K_n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u}\, du$$

$$\sim \frac{(1-y)^{3/2}}{2\sqrt{y}}\frac{\sqrt{2n}}{x} e^{-\frac{x^2}{2n(1-y)}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(1-y)^{3/2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2y}}\frac{\sqrt{n}}{x} e^{-\frac{x^2}{2n(1-y)}}. \quad (85)$$

Подставляя выражение из (85) в (74) мы получаем следующую асимптотику для R_1:

$$R_1 \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{n}}{x}\frac{(1-y)^{3/2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2y}}\frac{\sqrt{n}}{x} e^{-\frac{x^2}{2n(1-y)}}$$
$$\times \exp\left\{-n(1-y)\Lambda_0\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}$$
$$= \frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}}\frac{n}{x^2} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}. \quad (86)$$

Лемма доказана.

Для нахождения асимптотики L_n нам осталось показать, что $R_2 = o(R_1)$, $R_3 = o(R_1)$ и $R_4 = o(R_1)$. Всюду в дальнейшем через C_i будем обозначать положительные константы, не зависящие от n.

Докажем лемму 1, которая наряду с теоремой 6 играет важнейшую роль в дальнейших рассуждениях.

Доказательство леммы 1.

Имеем (см. [9] и [10])

$$T_s^{z_1}(W) - T_s^{z_2}(W) = \int_0^s I(z_1 \le W(t) \le z_2)\, dt = \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{T}(s,z)\, dz,$$

где $\mathcal{T}(s,z)$ — локальное время нахождения траектории стандартного винеровского процесса $W(\cdot)$ в точке z за время наблюдения от нуля до s. Поскольку $\mathcal{L}(s) = \sup_{z\in R} \mathcal{T}(s,z)$, утверждение (i) доказано.

Докажем утверждение (ii). Мы рассмотрим три случая в зависимости от знаков z_1 и z_2.

Случай 1: $z_1 \le 0 \le z_2$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) > y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) > y\right\} = \Big(\mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) > y\right\} \\ - \mathbf{P}\left\{T_s^{0}(W) > y\right\}\Big) + \mathbf{P}\left\{T_s^{0}(W) > y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) > y\right\}; \quad (87)\end{aligned}$$

при этом каждая из трех разностей вероятностей будет, очевидно, неотрицательной. Докажем, что

$$\mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) > y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^{0}(W) > y\right\} \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{|z_1|}{\sqrt{s}}$$

равномерно по всем $y \in (0,s)$. Известны распределения функционалов $T_s^0(W)$ и $T_s^{z_1}(W)$ (см. [11, с. 170, (1.4.4)]):

$$\mathbf{P}\left\{T_s^{0}(W) \in dv\right\} = \frac{1}{\pi\sqrt{v(s-v)}}\, dv, \quad 0 \le v \le s,$$

$$\mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) \in\, dv\right\} = \frac{1}{\pi\sqrt{v(s-v)}} \exp\left\{-\frac{z_1^2}{2v}\right\} dv,$$
$$0 \le v < s,$$
$$\mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) = s\right\} = N_2\left(\frac{|z_1|}{\sqrt{s}}\right),$$

где $N_2(u)$ — функция распределения двойного нормального закона; при этом

$$N_2\left(\frac{|z_1|}{\sqrt{s}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{|z_1|/\sqrt{s}} e^{-t^2/2}\, dt \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|z_1|}{\sqrt{s}}$$

для всех $k < n(1-y)$. Поэтому будет верна оценка

$$\mathbf{P}\{T_s^{z_1}(W) > y\} - \mathbf{P}\{T_s^0(W) > y\}$$
$$\le \int_y^s \frac{1}{\pi\sqrt{v(s-v)}} \left(\exp\left\{-\frac{z_1^2}{2v}\right\} - 1\right) dv + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|z_1|}{\sqrt{s}}$$
$$\le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|z_1|}{\sqrt{s}}. \tag{88}$$

Аналогично найдем оценку для

$$\mathbf{P}\left\{T_s^0(W) > y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) > y\right\} = \mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^0(W) < y\right\}.$$

Воспользуемся известным распределением функционала $T_s^{z_2}(W)$ при $z_2 \ge 0$ (см. [11]):

$$\mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) \in\, dv\right\} = \frac{1}{\pi\sqrt{v(s-v)}} \exp\left\{-\frac{z_2^2}{2(s-v)}\right\} dv, \ \ 0 < v \le s,$$
$$\mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) = 0\right\} = N_2\left(\frac{z_2}{\sqrt{s}}\right).$$

Отсюда аналогично (88) получаем

$$\mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^0(W) < y\right\}$$
$$\le \int_0^y \frac{1}{\pi\sqrt{v(s-v)}} \left(\exp\left\{-\frac{z_2^2}{2(s-v)}\right\} - 1\right) dv + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z_2}{\sqrt{s}} \le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z_2}{\sqrt{s}}. \tag{89}$$

Из (88) и (89) следует утверждение (ii) леммы 1 в случае 1.

Случай 2: $z_1 < z_2 < 0$. Вновь используя явный вид распределений функционалов $T_s^{z_1}(W)$ и $T_s^{z_2}(W)$, получаем оценку:

$$\mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) > y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) > y\right\}$$
$$\leq \int_y^s \frac{1}{\pi\sqrt{v(s-v)}}\left(\exp\left\{-\frac{z_1^2}{2v}\right\} - \exp\left\{-\frac{z_2^2}{2v}\right\}\right) dv$$
$$+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z_2/\sqrt{s}}^{-z_1/\sqrt{s}} e^{-t^2/2}\, dt \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z_2 - z_1}{\sqrt{s}}. \tag{90}$$

Случай 3: $0 < z_1 < z_2$. Аналогично (90) выводится следующая оценка:

$$\mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) > y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) > y\right\}$$
$$= \mathbf{P}\left\{T_s^{z_2}(W) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_s^{z_1}(W) < y\right\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{z_2 - z_1}{\sqrt{s}}. \tag{91}$$

Заметим, что правая часть оценок (88)—(91) не зависит от y, т. е. получена равномерная оценка по y, которая верна для всех трех случаев. Отсюда немедленно следует утверждение (ii).

Лемма 1 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. С помощью теоремы 6 теперь нетрудно получить следующее неравенство:

$$|A_k(y) - B_k(y)| = \left|\mathbf{P}\left\{T^0_{1-k/n}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^0_{1-k/n}(W) < y\right\}\right|$$
$$\leq C_1\frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}}. \tag{92}$$

для всех $k \leq n(1-y)$. В самом деле, построим случайные процессы $S_n(t)$ и $W(t)$ на одном вероятностном пространстве методом работы [27]. В рассматриваемой схеме при выполнении условия Крамера полагаем $\delta = Kn^{-1/2}\log n$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\overline{\Omega}_\delta\} \equiv \mathbf{P}\left\{\max_{t\in[0,1]} |S_n(t) - W(t)| > \delta\right\} \leq C_2 n^{-b}, \tag{93}$$

причем показатель степени b может быть сделан сколь угодно большим выбором постоянной K. Нам достаточно будет лишь выбрать такое K, чтобы b оказалось больше, чем $1/2$. Применяя неравенство (93) для третьего слагаемого правой части (44), мы немедленно получаем (92).

Используя (92) и (71), мы получим следующую оценку для R_2:

$$\left|\sum_{k=1}^{n(1-y)} (A_k(y) - B_k(y))\,\mathbf{P}\{\eta(x) = k\}\right| \leq C_1 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} \mathbf{P}\{\eta(x) \leq n(1-y)\}$$

$$\sim C_1 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{n(1-y)}}{x} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}$$
$$= o\left(\frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}} \frac{n}{x^2} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}\right). \quad (94)$$

Последнее верно в силу условия (A_r). Соотношение $R_2 = o(R_1)$ доказано.

Докажем, что R_3 также не будет вносить существенного вклада в основную асимптотику. Имеем

$$\sum_{k=[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon n}]+1}^{n(1-y)} (B_{k-1}(y) - B_k(y))\mathbf{P}\{\eta(x) \leq k\}$$
$$\leq \sum_{k=[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon n}]+1}^{n(1-y)} (B_{k-1}(y) - B_k(y))\mathbf{P}\{\eta(x) \leq n(1-y)\}$$
$$= B_{\left[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon n}\right]}(y)\mathbf{P}\{\eta(x) \leq n(1-y)\}. \quad (95)$$

Нам также понадобится следующая оценка, которую мы получаем из вида распределения функционала $T_s^0(W)$:

$$B_{\left[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon n}\right]} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{y}{y + 1/(n\varepsilon_n)}}$$
$$= \int_{\frac{y}{y+1/(n\varepsilon_n)}}^{1} \frac{1}{\pi\sqrt{t}\sqrt{1-t}}\,dt \leq C_3 \sqrt{1 - \frac{y}{y + 1/(n\varepsilon_n)}} \leq \frac{C_4}{\sqrt{n\varepsilon_n}}. \quad (96)$$

Подставив оценку (96) в (95), получаем

$$B_{\left[n(1-y)-\frac{1}{\varepsilon_n}\right]}(y)\mathbf{P}\{\eta(x)\le n(1-y)\}\le\frac{C_4}{\sqrt{n}\sqrt{\varepsilon_n}}\mathbf{P}\{\eta(x)\le n(1-y)\}$$

$$\sim\frac{C_4}{\sqrt{n}\sqrt{\varepsilon_n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{n(1-y)}}{x}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}$$

$$=o\left(\frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}}\frac{n}{x^2}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}\right);\qquad(97)$$

последнее асимптотическое равенство следует из оценки $\frac{x}{n\sqrt{\varepsilon_n}}$ $=\sqrt{\varepsilon_n}\frac{x}{n\varepsilon_n}\to 0$ в силу условий на ε_n. Соотношение $R_3=o(R_1)$ доказано.

Для R_4 с помощью (71) имеем

$$\sum_{k=2}^{N_y-1}(B_{k-1}(y)-B_k(y))\mathbf{P}\{\eta(x)\le k\}-B_1(y)\mathbf{P}\{\eta(x)\le 1\}$$

$$<N_y\mathbf{P}\{\eta(x)\le N_y\}\sim N_y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{N_y}}{x}\exp\{-N_y\Lambda(x/N_y)\}.$$

Покажем, что $\exp\{-N_y\Lambda(x/N_y)\}=o\left(\exp\left\{-n(1-y)\Lambda(\frac{x}{n(1-y)}\right\}\right)$. В самом деле, используя (72) и (86), получаем

$$\frac{\exp\{-N_y\Lambda(x/N_y)\}}{\exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}}=\exp\left\{\frac{x^2}{2N_y}-\frac{x^2}{2n(1-y)}\right\}$$

$$\le\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{n(1-y)-n^2/(\varepsilon_n x^2)}-\frac{1}{n(1-y)}\right)\right\}$$

$$<\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{n^2}{\varepsilon_n x^2 n^2(1-y)^2}\right)\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_n(1-y)^2}\right\}\to 0.$$

Поэтому будет верна следующая оценка:

$$N_y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{N_y}}{x}\exp\{-N_y\Lambda(x/N_y)\}<N_y^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_n(1-y)^2}\right\}$$

$$\times\exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}=o(R_1).\qquad(98)$$

Соотношение $R_4 = o(R_1)$ доказано.

Из формул (86), (94), (97) и (98) мы получаем следующую асимптотику нижней оценки L_n из формулы (64):

$$L_n \sim \frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}} \frac{n}{x^2} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}.$$

Нам осталось показать, что выполняется соотношение $U_n - L_n = o(L_n)$, равносильное $L_n \sim U_n$. Мы покажем это, доказав два соотношения: $U_n^{(1)} - L_n = o(L_n)$ и $U_n^{(2)} = o(L_n)$. Докажем первое из них. Нам понадобится для дальнейших оценок следующая вероятность, аналогичная ранее введенной $B_k(y)$:

$$\overline{B_k}(y) := \mathbf{P}\left\{\int_0^{1-k/n} I\left\{W(t) \geq -\overline{C_0}\right\} dt > y\right\},$$

где $k \leq n(1-y)$, $\overline{C_0} := \frac{c_0 x^{2/r}}{n^{1/r+1/2}}$. Заметим, что в силу теоремы 6 имеет место следующее неравенство, аналогичное (92):

$$\left|\overline{A_k}(y) - \overline{B_k}(y)\right|$$
$$= \left|\mathbf{P}\left\{T^{-\overline{C_0}}_{1-k/n}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^{-\overline{C_0}}_{1-k/n}(W) < y\right\}\right| \leq C_1 \frac{\log^{3/4} n}{n^{1/4}}, \quad (99)$$

которое справедливо для всех $k \leq n(1-y)$. Сначала разобьем сумму $U_n^{(1)}$ в (66) на две части $U_n^{(1)} = \overline{R_1} + \overline{R_2}$, где

$$\overline{R_1} := \sum_{k=1}^{n(1-y)} \overline{B_k}(y)\mathbf{P}\{\eta(x) = k\},$$

$$\overline{R_2} := \sum_{k=1}^{n(1-y)} \left(\overline{A_k}(y) - \overline{B_k}(y)\right)\mathbf{P}\{\eta(x) = k\}.$$

Из (99) следует, что $\overline{R_2} = o(L_n)$. Вывод необходимой для этого оценки аналогичен (94). Поэтому нам осталось показать следующее соотношение:

$$\left|\sum_{k=1}^{n(1-y)} \left(\overline{B_k}(y) - B_k(y)\right)\mathbf{P}\{\eta(x)=k\}\right|$$
$$= o\left(\frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}}\frac{n}{x^2}e^{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)}\right). \quad (100)$$

Воспользовавшись леммой 1, получаем

$$\left|\overline{B_k}(y) - B_k(y)\right| \le \frac{2}{\sqrt{\pi y}}\overline{C_0} = C_5\frac{x^{2/r}}{n^{1/2+1/r}} = o\left(\frac{\sqrt{n}}{x}\right)$$

для всех $k < n(1-y)$. Последнее соотношение эквивалентно требованию, что $x = o\left(n^{(r+1)/(r+2)}\right)$, т.е. оно следует из условия (A_r) теоремы. Отсюда получаем оценку для суммы в левой части (100):

$$\left|\sum_{k=1}^{n(1-y)} \left(\overline{B_k}(y) - B_k(y)\right)\mathbf{P}\{\eta(x)=k\}\right| \le C_5\frac{x^{2/r}}{n^{1/2+1/r}}\mathbf{P}\{\eta(x)\le n(1-y)\}$$

$$\sim C_5\frac{x^{2/r}}{n^{1/2+1/r}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{n(1-y)}}{x}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\} = o(L_n). \quad (101)$$

Соотношение $U_n^{(1)} - L_n = o(L_n)$ доказано.

Нам осталось лишь показать, что $U_n^{(2)} = o(L_n)$. В силу моментного неравенства Маркова для функции $g(t) = e^{\lambda t^r}$ и условия (B_r) верна следующая оценка:

$$n\mathbf{P}\left\{\xi_1 > c_0\frac{x^{2/r}}{n^{1/r}}\right\} \le n\mathbf{E}e^{\lambda\xi_1^r}e^{-\frac{\lambda c_0^r x^2}{n}} \le C_6 n e^{-\frac{\lambda c_0^r x^2}{n}}. \quad (102)$$

Возьмем теперь $c_0 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/r}$. При таком выборе c_0 мы получаем, что $U_n^{(2)} = o(L_n)$. Из формул (101) и (102) следует, что $U_n - L_n = o(L_n)$. А это означает, что мы доказали эквивалентность верхней и нижней оценок искомой вероятности.

Теорема доказана.

3.2 Доказательство теоремы 4

Аналогично доказательству теоремы 3 мы без ограничения общности рассуждений считаем, что $\sigma = 1$ и величина $n(1-y)$ — целое число. При доказательстве этой теоремы мы будем пользоваться обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 3. Воспользуемся формулой полной вероятности

$$\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq ny\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(x - S_{\eta(x)}\right) \geq ny, \eta(x) = k\right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(-\chi_{\eta(x)}\right) \geq ny\right\} \mathbf{P}\left\{\eta(x) = k\right\}, \quad (103)$$

где $\chi_{\eta(x)} := S_{\eta(x)} - x$ — величина перескока. Последнее равенство выполнено в силу упомянутого свойства отсутствия последействия. Тогда мы сразу, без построения верхних или нижних оценок, можем разбить $\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq ny\right\}$ на четыре части:

$$\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq ny\right\} = R_1 + \widetilde{R}_2 + R_3 + R_4,$$
$$\widetilde{R}_2 := \sum_{k=1}^{n(1-y)} \left(\widetilde{A}_k(y) - B_k(y)\right) \mathbf{P}\{\eta(x) = k\},$$

$\widetilde{A}_k(y) := \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}\left(-\chi_{\eta(x)}\right) \geq ny\right\}$, а суммы R_1, R_3 и R_4 определены в (70).

Из рассуждений при доказательстве теоремы 3 следует, что

$$R_1 + R_3 + R_4 \sim \frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}} \frac{n}{x^2} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}.$$

Поэтому для доказательства теоремы нам осталось установить, что $\widetilde{R}_2$ не вносит вклада в асимптотику. Докажем следующее утверждение, аналогичное (92):

$$\left|\widetilde{A}_k(y) - B_k(y)\right| = \left|\mathbf{P}\left\{T_{1-k/n}^{-\chi_{\eta(x)}/\sqrt{n}}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T_{1-k/n}^{0}(W) < y\right\}\right|$$
$$\leq C_7 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} \quad (104)$$

для всех $k \leq n(1-y)$. Воспользовавшись формулой полной вероятности, мы получим следующее:

$$\mathbf{P}\left\{T^{-\chi_{\eta(x)}/\sqrt{n}}_{1-k/n}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^{0}_{1-k/n}(W) < y\right\}$$
$$= \int_0^\infty \left(\mathbf{P}\left\{T^{-u/\sqrt{n}}_{1-k/n}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^{0}_{1-k/n}(W) < y\right\}\right) dF_{\chi_{\eta(x)}}(u). \tag{105}$$

Теперь оценим разность под интегралом для всех $u > 0$ равномерно по всем $k \le n(1-y)$, используя лемму 1 и теорему 6:

$$\mathbf{P}\left\{T^{-u/\sqrt{n}}_{1-k/n}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^{0}_{1-k/n}(W) < y\right\}$$
$$\le \left|\mathbf{P}\left\{T^{-u/\sqrt{n}}_{1-k/n}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^{-u/\sqrt{n}}_{1-k/n}(W) < y\right\}\right|$$
$$+ \left|\mathbf{P}\left\{T^{-u/\sqrt{n}}_{1-k/n}(W) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^{0}_{1-k/n}(W) < y\right\}\right|$$
$$\le C_8 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{\sqrt{1-k/n}} \le C_8 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} + \sqrt{\frac{2}{\pi n y}} u. \tag{106}$$

Применяя неравенство (106) к подынтегральной функции в правой части (105), получим оценку:

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{P}\left\{T^{-u/\sqrt{n}}_{1-k/n}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^{0}_{1-k/n}(W) < y\right\}\right) dF_{\chi_{\eta(x)}}(u)$$
$$\le \int_0^\infty \left(C_8 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} + \sqrt{\frac{2}{\pi n y}} u\right) dF_{\chi_{\eta(x)}}(u) \le C_8 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi n y}} \mathbf{E}\chi_{\eta(x)} \le C_7 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}}$$

равномерно по всем $k \le n(1-y)$. Неравенство (104) доказано. Воспользовавшись только что полученным неравенством и (71) мы докажем что $\widetilde{R}_2$ не вносит вклада в асимптотику.

$$\left|\sum_{k=1}^{n(1-y)} \left(\widetilde{A}_k(y) - B_k(y)\right) \mathbf{P}\{\eta(x) = k\}\right| \le C_7 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} \mathbf{P}\{\eta(x) \le n(1-y)\}$$

$$\sim C_7 \frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{n(1-y)}}{x} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}$$
$$= o\left(\frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}} \frac{n}{x^2} \exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}\right).$$

Последнее верно в силу условия (A_2). Теорема 4 доказана.

3.3 Доказательство теоремы 5

Аналогично доказательству двух предыдущих теорем мы считаем, что $n(1-y)$ — целое число. Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq ny\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left\{\tau_{n-k,n}(0) \geq ny\right\} \mathbf{P}\left\{\eta(x) = k\right\}, \tag{107}$$

Далее мы аналогичным образом представим $\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq ny\right\}$ в виде четырех сумм:

$$\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq ny\right\} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

где эти суммы определены в (68) и (70). Поведение суммы R_1 исследовано в лемме 6. Из (97) и (98) следует, что $R_3 = o(R_1)$ и $R_4 = o(R_1)$.

При доказательстве соотношения $R_2 = o(R_1)$ мы замечаем, что из следствия 2 следует выполнение неравенства, аналогичного (92) и (100):

$$|A_k(y) - B_k(y)| = \left|\mathbf{P}\left\{T^0_{1-k/n}(S_n) < y\right\} - \mathbf{P}\left\{T^0_{1-k/n}(W) < y\right\}\right|$$
$$= \left|\mathbf{P}\left\{\tau_{n-k} < ny\right\} - \mathbf{P}\left\{\tau^{1-k/n} < y\right\}\right| \leq C_8 \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{108}$$

равномерно по всем $k \leq n(1-y)$. Тогда, воспользовавшись (71), для R_2 справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{n(1-y)} \left(A_k(y) - B_k(y)\right) \mathbf{P}\{\eta(x) = k\}\right| \leq C_8 \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{P}\{\eta(x) \leq n(1-y)\}$$

$$\sim C_8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{1-y}}{x}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}$$
$$= o\left(\frac{2(1-y)^{3/2}}{\pi\sqrt{y}}\frac{n}{x^2}\exp\left\{-n(1-y)\Lambda\left(\frac{x}{n(1-y)}\right)\right\}\right).$$

Последнее равенство выполнено в силу условия (A).

Таким образом, теорема 5 доказана.

3.4 Доказательство теоремы 6.

Для любого $\nu > 0$ имеем

$$\mathbf{P}\big\{T_s^z(S_n) < y\big\} - \mathbf{P}\big\{T_s^z(W) < y\big\}$$
$$\leq \mathbf{P}\big\{T_s^z(W) < y+\nu, \big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| \leq \nu\big\}$$
$$+\mathbf{P}\big\{\big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| > \nu\big\} - \mathbf{P}\big\{T_s^z(W) < y\big\}$$
$$\leq \mathbf{P}\big\{\big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| > \nu\big\} + \mathbf{P}\big\{y \leq T_s^z(W) \leq y+\nu\big\}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}\big\{T_s^z(W) < y\big\} - \mathbf{P}\big\{T_s^z(S_n) < y\big\}$$
$$\leq \mathbf{P}\big\{T_s^z(W) < y\big\} - \mathbf{P}\big\{T_s^z(S_n) < y, \big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| \leq \nu\big\}$$
$$\leq \mathbf{P}\big\{T_s^z(W) < y\big\} - \mathbf{P}\big\{T_s^z(W) < y-\nu, \big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| \leq \nu\big\}$$
$$\leq \mathbf{P}\big\{\big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| > \nu\big\} + \mathbf{P}\big\{y-\nu \leq T_s^z(W) \leq y\big\}.$$

Из этих двух оценок получаем

$$\sup_{0\leq y\leq s}\left|\mathbf{P}\{T_s^z(S_n) < y\} - \mathbf{P}\{T_s^z(W) < y\}\right|$$
$$\leq \mathbf{P}\big\{\big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| > \nu\big\} + \sup_{0\leq y\leq s}\mathbf{P}\big\{y-\nu \leq T_s^z(W) \leq y+\nu\big\}$$
$$\leq \mathbf{P}\big\{\big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| > \nu,\, \Omega_\delta\big\} + \mathbf{P}(\overline{\Omega}_\delta)$$
$$+ \sup_{0\leq y\leq s}\mathbf{P}\big\{y-\nu \leq T_s^z(W) \leq y+\nu\big\}, \quad (109)$$

где $\Omega_\delta := \{\sup_{t\in[0,1]} |S_n(t) - W(t)| \le \delta\}$.

Далее, для оценки первой вероятности правой части (109) нетрудно видеть, что на множестве элементарных исходов Ω_δ имеет место неравенство

$$|I\{S_n(t) \ge z\} - I\{W(t) \ge z\}| \le I\{z - \delta \le W(t) \le z + \delta\},$$

которое справедливо для любых $t \in [0,1]$. Поэтому для таких исходов из пункта (i) леммы 1 следует оценка

$$\big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| \le \int_0^s I\{z - \delta \le W(t) \le z + \delta\}\,dt \le 2\delta\mathcal{L}(s).$$

$$\mathbf{P}\big\{\big|T_s^z(S_n) - T_s^z(W)\big| > \nu,\, \Omega_\delta\big\} \\ \le \mathbf{P}\left(\mathcal{L}(s) > \nu/(2\delta)\right) \le A\frac{\nu^2}{4\delta^2 s}\exp\left\{-\frac{\nu^2}{8\delta^2 s}\right\}. \quad (110)$$

Наконец, используя явный вид распределения случайной величины $T_s^z(W)$ (см. [11, с. 170, (1.4.4)]), получаем оценку для последнего слагаемого правой части (109) в случае $z \ge 0$. В самом деле, для любых y и ν таких, что $y \ge \nu > 0$ и $y + \nu < s$, имеем

$$\mathbf{P}\big\{y - \nu \le T_s^z(W) \le y + \nu\big\} = \int_{y-\nu}^{y+\nu} \frac{1}{\pi\sqrt{v(s-v)}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2(s-v)}\right\}dv \\ \le \mathbf{P}\big\{y - \nu \le T_s^0(W) \le y + \nu\big\}. \quad (111)$$

Аналогичное утверждение будет верно и в случае $z \le 0$:

$$\mathbf{P}\big\{y - \nu \le T_s^z(W) \le y + \nu\big\} = \int_{y-\nu}^{y+\nu} \frac{1}{\pi\sqrt{v(s-v)}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2v}\right\}dv \\ \le \mathbf{P}\big\{y - \nu \le T_s^0(W) \le y + \nu\big\}. \quad (112)$$

С другой стороны, покажем, что функция распределения

$$F_0(x) := \mathbf{P}\big\{T_s^0(W) \le x\big\} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x/s}, \;\; x \in [0, s],$$

удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$, хотя на любом внутреннем отрезке $[\delta, s-\delta]$ она удовлетворяет условию Липшица. Очевидно, $F_0(x)$ обладает свойством симметрии относительно точки $x = s/2$, т.е. $F_0(x) = 1-F_0(s-x)$. Так что доказательство гёльдеровости достаточно провести для всех $x \in [0, s/2]$.

Прежде всего заметим, что для $x \le s/4$

$$F_0'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(s-x)}} \le \frac{2}{\pi\sqrt{3sx}}.$$

Так что для любого положительного $z < z+\Delta \le s/4$ имеем

$$F_0(z+\Delta) - F_0(z) \le \frac{2}{\pi\sqrt{3s}} \int_z^{z+\Delta} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{4\Delta}{\pi\sqrt{3s}(\sqrt{z+\Delta}+\sqrt{z})} \le \frac{4\sqrt{\Delta}}{\pi\sqrt{3s}}.$$

Кроме того, универсальная константа Липшица для функции $F_0(x)$ на отрезке $[s/4, s/2]$ равна

$$\max_{s/4 \le x \le s/2} F_0'(x) = F_0'(s/4) = \frac{4}{\pi s\sqrt{3}}.$$

Поэтому для $s/4 \le z < z+\Delta \le s/2$ с учетом оценки $\Delta \le s/4$ имеем

$$F_0(z+\Delta) - F_0(z) \le \frac{4\Delta}{\pi s\sqrt{3}} \le \frac{2\sqrt{\Delta}}{\pi\sqrt{3s}}.$$

Наконец, в случае $z < s/4 < z+\Delta \le s/2$ из вышеприведенных оценок нетрудно вычислить универсальную константу в условии Гёльдера с показателем $1/2$:

$$F_0(z+\Delta) - F_0(z) \le \frac{8\sqrt{\Delta}}{\pi\sqrt{6s}}. \tag{113}$$

Таким образом, из (109)—(113) мы получаем следующую оценку, справедливую для всех $\delta \le \nu$:

$$\sup_{0\le y\le s,\, z\in\mathbb{R}} \left|\mathbf{P}\{T_s^z(S_n) < y\} - \mathbf{P}\{T_s^z(W) < y\}\right|$$
$$\le \frac{8\sqrt{2\nu}}{\pi\sqrt{3s}} + A\frac{\nu^2}{4\delta^2 s}\exp\left\{-\frac{\nu^2}{8\delta^2 s}\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_{t\in[0,1]} |S_n(t) - W(t)| > \delta\right\}, \tag{114}$$

где положительная постоянная A определена в (43).

Положим теперь $\nu = 2\delta\sqrt{\log n}$ при $n > 1$. Очевидно, в этом случае $\delta \le \nu$. Тогда, принимая во внимание неравенство $s \le 1$, получаем оценку для второго слагаемого правой части (114):

$$A\frac{\nu^2}{4\delta^2 s}\exp\left\{-\frac{\nu^2}{8\delta^2 s}\right\} = A\frac{\log n}{s}\exp\left\{-\frac{1}{2s}\log n\right\} \le A\frac{\log n}{s\sqrt{n}}.$$

Теорема 6 доказана.

3.5 Доказательство теоремы 7.

Доказательство этой теоремы начнем с доказательства лемм 2 и 3, которые играют определяющую роль при доказательстве теоремы 7.

Доказательство леммы 2.

Рассмотрим случай, когда n четное:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = n\} = \mathbf{P}\{S_1 \ge 0, S_2 \ge 0, \ldots, S_n \ge 0\} = \mathbf{P}\{\tau_n' = n\} = C_n^{n/2}2^{-n}. \tag{115}$$

Теперь рассмотрим случай когда n нечетное. Имеем:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = n\} = \mathbf{P}\{\tau_{n-1} = n-1, S_n \ge 0\} = \mathbf{P}\{\tau_{n-1} = n-1\} - \mathbf{P}\{\tau_{n-1} = n-1, S_n < 0\}.$$

Рассмотрим вычитаемое в правой части последнего равенства. Воспользовавшись теоремой о равнораспределенности [17, с. 113], мы получим:

$$\mathbf{P}\{\tau_{n-1} = n-1, S_n < 0\} = \mathbf{P}\{\tau_{n-1} = n-1, S_{n-1} = 0, \xi_n = -1\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{P}\{\tau_{n-1} = n-1, S_{n-1} = 0\}$$

$$= \frac{1}{2}C_{n-1}^{(n-1)/2}2^{-n+1}\frac{1}{(n-1)/2+1} = C_{n-1}^{(n-1)/2}2^{-n+1}\frac{1}{n+1}. \tag{116}$$

Из (115) и (116) следует:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = n\} = \begin{cases} C_n^{n/2} 2^{-n}, & \text{если } n \text{ четное}, \\ C_{n-1}^{(n-1)/2} 2^{-n+1} \frac{n}{n+1}, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases} \tag{117}$$

Воспользуемся теоремой Спарре–Андерсена [15, с. 259]:

$$\mathbf{P}\{\tau_n'' = k\} = \mathbf{P}\{\tau_k'' = k\}\mathbf{P}\{\tau_{n-k}'' = 0\},\ 0 \le k \le n.$$

Здесь мы полагаем, что $\mathbf{P}\{\tau_0'' = 0\} = \mathbf{P}\{\tau_0 = 0\} = 1$. Напомним, что распределение $n - \tau_n$ совпадает с распределением τ_n'' для любых $n \ge 1$. Используя этот факт легко увидеть, что верно следующее:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = k\} = \mathbf{P}\{\tau_k = k\}\mathbf{P}\{\tau_{n-k} = 0\},\ 0 \le k \le n. \tag{118}$$

Исследуем второй множитель правой части (118), для которого верно:

$$\mathbf{P}\{\tau_{n-k} = 0\} = \mathbf{P}\{S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{n-k} < 0\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{P}\{S_1 \le 0, S_2 \le 0, \dots, S_{n-k-1} \le 0\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{P}\{S_1 \ge 0, S_2 \ge 0, \dots, S_{n-k-1} \ge 0\} = \frac{1}{2}\mathbf{P}\{\tau_{n-k-1} = n-k-1\}$$

$$= \begin{cases} C_{n-k-2}^{(n-k-2)/2} 2^{-n+k+1} \frac{n-k-1}{n-k}, & \text{если } n-k \text{ четное}, \\ C_{n-k-1}^{(n-k-1)/2} 2^{-n+k}, & \text{если } n-k \text{ нечетное}. \end{cases} \tag{119}$$

Из формул (117)—(119) следует утверждение леммы.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3.

Введем следующее обозначение:

$$J_{u,v} := \exp\left\{\frac{1}{12u + \theta_u} + \frac{1}{12v + \theta_v} - \frac{2}{6u + \theta_{u/2}} - \frac{2}{6v + \theta_{v/2}}\right\}, \tag{120}$$

где $u, v > 0, 0 < \theta_u, \theta_v, \theta_{u/2}, \theta_{v/2} < 1$. Последние четыре константы, как будет замечено далее, будут связаны с выражением, возникающим при использовании формулы Стирлинга. Поэтому эти константы однозначно задаются параметрами u и v.

Мы рассмотрим 4 случая в зависимости от четности n и k. В них оценки будут построены аналогичными способами.

Случай 1*: n четное и k четное.* Из леммы 2 следует, воспользовавшись формулой Стирлинга, выражение:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = k\} = C_k^{k/2} C_{n-k-2}^{(n-k-2)/2} 2^{-n+1} \frac{n-k-1}{n-k}$$

$$= \frac{k!(n-k-2)!}{((k/2)!)^2(((n-k-2)/2)!)^2} 2^{-n+1} \frac{n-k-1}{n-k}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi k}(k)^k e^{-k} e^{\frac{1}{12k+\theta_k}} \sqrt{2\pi(n-k-2)}(n-k-2)^{n-k-2} e^{-(n-k-2)} e^{\frac{1}{12(n-k-2)+\theta_{n-k-2}}}}{\pi k (k/2)^k e^{-k} e^{\frac{2}{6k+\theta_{k/2}}} \pi(n-k-2)((n-k-2)/2)^{n-k-2} e^{-(n-k-2)} e^{\frac{2}{6(n-k-2)+\theta_{(n-k-2)/2}}}}$$

$$\times 2^{-n+1} \frac{n-k-1}{n-k} = \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k-2)}} \frac{n-k-1}{n-k} J_{k,n-k-2}$$

$$= \frac{1}{\pi n \sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}} \frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}} J_{k,n-k-2}. \tag{121}$$

Ясно, что правая часть (121) отличается от $\frac{1}{\pi n \sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}}$ на множитель, стоящий после него. Значит, нам нужно оценить сверху следующую разность:

$$\left| \frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}} J_{k,n-k-2} - 1 \right|$$

$$\le \left| \frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}} J_{k,n-k-2} - J_{k,n-k-2} \right| + \left| J_{k,n-k-2} - 1 \right|. \tag{122}$$

Оценим сверху каждое слагаемое из правой части (122). Сначала выведем общую оценку для $|J_{u,v} - 1|$ при $u, v \ge 1$. Построим для $J_{u,v}$ оценку сверху:

$$J_{u,v} < \exp\left\{ \frac{1}{12u} + \frac{1}{12v} - \frac{2}{6u+1} - \frac{2}{6v+1} \right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{-18u+6}{12u(6u+1)} + \frac{-18v+6}{12v(6v+1)}\right\} < 1. \tag{123}$$

Оценка снизу будет следующей:

$$J_{u,v} > \exp\left\{-\frac{1}{3u} - \frac{1}{3v}\right\} \geq \exp\left\{-\frac{2}{3\min\{u,v\}}\right\}. \tag{124}$$

Из (123) и (124) следует оценка, благодаря элементарному неравенству $1 - e^{-x} < x$ для всех $x > 0$:

$$|J_{u,v} - 1| < 1 - \exp\left\{-\frac{2}{3\min\{u,v\}}\right\} < \frac{2}{3\min\{u,v\}} \tag{125}$$

для любых $u, v \geq 1$.

Заметим, что справедливы следующие два неравенства:

$$\frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}} = \frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k-1)^2-1}} > 1; \tag{126}$$

$$\frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}} < \frac{\sqrt{n-k-1}}{\sqrt{n-k-2}} < \frac{n-k-1}{n-k-2}. \tag{127}$$

Из оценок (123), (125)—(127) следует:

$$\left|\frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}}J_{k,n-k-2} - 1\right| \leq \left|\frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}}J_{k,n-k-2} - J_{k,n-k-2}\right|$$

$$+ |J_{k,n-k-2} - 1| = J_{k,n-k-2}\left|\frac{(n-k-1)}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}} - 1\right| + |J_{k,n-k-2} - 1|$$

$$< \frac{n-k-1}{n-k-2} - 1 + \frac{2}{3\min\{k, n-k-2\}} \leq \frac{5}{3\min\{k, n-k-2\}}. \tag{128}$$

Приведем здесь оценку, важную для дальнейших рассуждений:

$$\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}\sqrt{\min\{k, n-k\}}}. \tag{129}$$

Из неравенств (128), (129) и элементарного неравенства $ab \geq \min\{a^2, b^2\}$, верного для всех $a, b > 0$, следует оценка:

$$\left|\mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}}\right| < \frac{5\sqrt{2}}{3\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}\min\{k, n-k-2\}}$$

$$\leq \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}(\min\{k, n-k-2\})^{3/2}}. \qquad (130)$$

Отсюда следует утверждение леммы в случае 1.

Случай 2: n четное и k нечетное. Воспользовавшись формулой Стирлинга и определением функционала $J_{u,v}$, получаем следующее:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = k\} = C_{k-1}^{(k-1)/2} C_{n-k-1}^{(n-k-1)/2} 2^{-n+1} \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{k}{\pi(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-1)}} J_{k-1,n-k-1}$$

$$= \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}} \frac{k\sqrt{k(n-k)}}{(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-1)}} J_{k-1,n-k-1}. \qquad (131)$$

Мы будем применять схему оценивания, аналогичную (122), (128) и (130) . Для этого построим оценки:

$$\frac{k\sqrt{k(n-k)}}{(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-1)}} > \frac{k}{k+1}; \qquad (132)$$

$$\frac{k\sqrt{k(n-k)}}{(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-1)}} < \frac{\sqrt{k(n-k)}}{\sqrt{(k-1)(n-k-1)}} \leq \max\left\{\frac{k}{k-1}, \frac{n-k}{n-k-1}\right\}. \qquad (133)$$

В неравенстве (133) мы воспользовались элементарным неравенством $ab \leq \max\{a^2, b^2\}$, верного для всех $a, b > 0$. Из оценок (132) и (133) следует:

$$\left|\frac{k\sqrt{k(n-k)}}{(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-1)}} - 1\right| < \max\left\{1 - \frac{k}{k+1}, \frac{n-k}{n-k-1} - 1, \frac{k}{k-1} - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{\min\{k-1, n-k-1\}}. \tag{134}$$

Из (125), (129) и (134) мы получим оценку:

$$\left|\mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}}\right| < \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}\sqrt{\min\{k, n-k\}}\min\{k-1, n-k-1\}}$$

$$\leq \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}(\min\{k-1, n-k-1\})^{3/2}}. \tag{135}$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы в случае 2.

Случай 3*: n нечетное и k четное.* Воспользовавшись формулой Стирлинга и определением функционала $J_{u,v}$, получаем следующее:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = k\} = C_k^{k/2} C_{n-k-1}^{(n-k-1)/2} 2^{-n} = \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k-1)}} J_{k,n-k-1}$$

$$= \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}} \frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{n-k-1}} J_{k,n-k-1}. \tag{136}$$

Верна следующая оценка:

$$1 < \frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{n-k-1}} < \frac{n-k}{n-k-1}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{n-k-1}} - 1\right| < \frac{1}{n-k-1}. \tag{137}$$

Из оценок (125), (129) и (137) мы получим:

$$\left|\mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}}\right|$$

$$< \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}\sqrt{\min\{k-1, n-k-2\}}\min\{k, n-k-1\}}$$

$$\leq \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}(\min\{k-1, n-k-2\})^{3/2}}.$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы в случае 3.

Случай 4: n нечетное и k нечетное. В этом случае мы имеем:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = k\} = C_{k-1}^{(k-1)/2} C_{n-k-2}^{(n-k-2)/2} 2^{-n+2} \frac{k(n-k-1)}{(k+1)(n-k)}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{(k-1)(n-k-2)}} \frac{k(n-k-1)}{(k+1)(n-k)} J_{k-1,n-k-2}$$

$$= \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}} \frac{k(n-k-1)\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-2)(n-k)}} J_{k-1,n-k-2}. \qquad (138)$$

Верны следующие оценки:

$$\frac{k(n-k-1)\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-2)(n-k)}} = \frac{k}{\sqrt{(k-1)(k+1)}}$$

$$\times \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \frac{n-k-1}{\sqrt{(n-k)(n-k-2)}} > \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} > \frac{k}{k+1};$$

$$\frac{k(n-k-1)\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-2)(n-k)}} < \frac{\sqrt{k(n-k-1)}}{\sqrt{(k-1)(n-k-2)}}$$

$$\le \max\left\{\frac{k}{k-1}, \frac{n-k-1}{n-k-2}\right\}.$$

Из этих двух неравенств получаем:

$$\left|\frac{k(n-k-1)\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{(k-1)(n-k-2)(n-k)}} - 1\right| < \max\left\{\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{n-k-2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\min\{k-1, n-k-2\}}. \qquad (139)$$

Из (125), (129) и (139) мы получим оценку:

$$\left|\mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}(1-t_{n,k})}}\right| < \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}\sqrt{\min\{k, n-k\}}\min\{k-1, n-k-2\}}$$

$$\le \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}(\min\{k-1, n-k-2\})^{3/2}}.$$

Отсюда следует утверждение леммы в случае 4.

Лемма 3 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Будем рассматривать только случай $n \geq 5$, т.к. иначе утверждение теоремы выполнено автоматически. Докажем следующее неравенство:

$$\sup_{\frac{3}{n}\leq y\leq 1}\left|\mathbf{P}\{\tau_n < ny\} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{ny-1}\frac{1}{\pi\sqrt{t_{n,k}\left(1-t_{n,k}\right)}}\right| < \left(5\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{10\sqrt{2}}{\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (140)$$

Воспользуемся неравенством

$$\sup_{\frac{3}{n}\leq y\leq 1}\left|\mathbf{P}\{\tau_n < ny\} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{ny-1}\frac{1}{\pi\sqrt{t_{n,k}\left(1-t_{n,k}\right)}}\right| \leq \mathbf{P}\{\tau_n = 0\}$$

$$+\left|\mathbf{P}\{\tau_n = 1\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,1}\left(1-t_{n,1}\right)}}\right| + \sum_{k=2}^{n-3}\left|\mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}\left(1-t_{n,k}\right)}}\right|$$

$$+\left|\mathbf{P}\{\tau_n = n-2\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,n-2}\left(1-t_{n,n-2}\right)}}\right|$$

$$+\left|\mathbf{P}\{\tau_n = n-1\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,n-1}\left(1-t_{n,n-1}\right)}}\right| + \mathbf{P}\{\tau_n = n\}. \quad (141)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (141). Верно следующее:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = 0\} = \mathbf{P}\{\tau_n = n-1\} = \begin{cases} C_{n-2}^{(n-2)/2}2^{-n+1}\frac{n-1}{n}, & \text{если } n \text{ четно},\\ C_{n-1}^{(n-1)/2}2^{-n}, & \text{если } n \text{ нечетно},\end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{n-1}{n\sqrt{2\pi(n-2)}}, & \text{если } n \text{ четно},\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)}}, & \text{если } n \text{ нечетно},\end{cases} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}; \quad (142)$$

$$\mathbf{P}\{\tau_n = 1\} = \mathbf{P}\{\tau_n = n-2\} = \begin{cases} C_{n-2}^{(n-2)/2}2^{-n+1}\frac{1}{2}, & \text{если } n \text{ четно},\\ C_{n-3}^{(n-3)/2}2^{-n+2}\frac{n-2}{2(n-1)}, & \text{если } n \text{ нечетно},\end{cases}$$

$$\le \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8\pi(n-2)}}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{n-2}{(n-1)\sqrt{8\pi(n-3)}}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases} \le \sqrt{\frac{2}{\pi n}}; \tag{143}$$

$$\mathbf{P}\{\tau_n = n\} = \begin{cases} C_n^{n/2} 2^{-n}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ C_{n-1}^{(n-1)/2} 2^{-n+1} \frac{n}{n+1}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases} \le \sqrt{\frac{2}{\pi n}}. \tag{144}$$

Из (129), (142) и (143) следует неравенство, верное для $k = 1, n-2, n-1$:

$$\left| \mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{\pi n \sqrt{t_{n,k}\left(1 - t_{n,k}\right)}} \right| \le \max\left\{ \mathbf{P}\{\tau_n = k\}, \frac{1}{\pi n \sqrt{t_{n,k}\left(1 - t_{n,k}\right)}} \right\}$$

$$\le \max\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}. \tag{145}$$

Из леммы 3 следует оценка:

$$\sum_{k=2}^{n-3} \left| \mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{n} \frac{1}{\pi \sqrt{t_{n,k}\left(1 - t_{n,k}\right)}} \right| \le \sum_{k=2}^{n-3} \frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}(\min\{k-1, n-k-2\})^{3/2}}$$

$$< \frac{10\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-4} \frac{1}{k^{3/2}} < \frac{10\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < \frac{10\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}. \tag{146}$$

Последнее неравенство верно в силу того, что там стоит сходящийся ряд, который представляет собой дзета-функцию Римана с аргументом $3/2$ и для которого верна оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < 3.$$

Теперь применим полученные неравенства (142), (144), (145) и (146) к правой части (141):

$$\mathbf{P}\{\tau_n=0\}+\left|\mathbf{P}\{\tau_n=1\}-\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,1}(1-t_{n,1})}}\right|$$
$$+\sum_{k=2}^{n-3}\left|\mathbf{P}\{\tau_n=k\}-\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}\left(1-t_{n,k}\right)}}\right|$$
$$+\left|\mathbf{P}\{\tau_n=n-2\}-\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,n-2}(1-t_{n,n-2})}}\right|$$
$$+\left|\mathbf{P}\{\tau_n=n-1\}-\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,n-1}(1-t_{n,n-1})}}\right|+\mathbf{P}\{\tau_n=n\}$$
$$<5\sqrt{\frac{2}{\pi n}}+\frac{10\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}=\left(5\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\frac{10\sqrt{2}}{\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Эта оценка верна для всех $y\in\left[\frac{3}{n},1\right]$, а значит неравенство (140) доказано.

Имеет место следующее неравенство:

$$|\mathbf{P}\{\tau_n<ny\}-\mathbf{P}\{\tau<y\}|\le\left|\mathbf{P}\{\tau_n<ny\}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{ny-1}\frac{1}{\pi\sqrt{t_{n,k}\left(1-t_{n,k}\right)}}\right|$$
$$+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{ny-1}\frac{1}{\pi\sqrt{t_{n,k}\left(1-t_{n,k}\right)}}-\mathbf{P}\{\tau<y\}\right| \tag{147}$$

для всех $y\in\left[\frac{3}{n},1\right]$.

Первое слагаемое в правой части (147) было оценено в (140). Займемся теперь построением оценки для второго:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{ny-1}\frac{1}{\pi\sqrt{t_{n,k}\left(1-t_{n,k}\right)}}-\mathbf{P}\{\tau<y\}\right|\le\mathbf{P}\left\{\tau<1/n\right\}$$
$$+\left|\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,1}\left(1-t_{n,1}\right)}}-\mathbf{P}\left\{1/n\le\tau<2/n\right\}\right|$$
$$+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{ny-1}\frac{1}{\pi\sqrt{t_{n,k}\left(1-t_{n,k}\right)}}-\mathbf{P}\left\{2/n\le\tau<y-1/n\right\}\right|+\mathbf{P}\left\{y-1/n\le\tau<y\right\}. \tag{148}$$

Оценим первое и последнее слагаемые в правой части (148):

$$\mathbf{P}\left\{y - 1/n \le \tau < y\right\} = \int_{y-1/n}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,dt \le \int_{0}^{1/n} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$$

$$\le \sqrt{\frac{n}{n-1}} \int_0^{1/n} \frac{1}{\pi\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\frac{2}{\pi\sqrt{n}} \le \frac{\sqrt{5}}{\pi\sqrt{n}} \tag{149}$$

равномерно по всем $y \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

В силу только что полученной оценки (149) мы получаем также и оценку на второе слагаемое в правой части (148):

$$\left|\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,1}\left(1-t_{n,1}\right)}} - \mathbf{P}\left\{1/n \le \tau < 2/n\right\}\right|$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,1}\left(1-t_{n,1}\right)}}, \mathbf{P}\left\{1/n \le \tau < 2/n\right\}\right\}$$

$$\le \max\left\{\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{5}}{\pi\sqrt{n}}\right\} = \frac{\sqrt{5}}{\pi\sqrt{n}}. \tag{150}$$

Теперь рассмотрим третье слагаемое из правой части (148) . Нетрудно заметить, что эта разность есть не что иное как погрешность приближения интегральной суммой Римана соответствующего интеграла, для которой верна оценка:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{ny-1} f(t_{m,k}) - \int\limits_{2/n}^{y-1/n} f(t)dt\right| \le \sum_{k=2}^{ny-1} \frac{1}{n^2} \max_{t_{n,k-1}\le t\le t_{n,k}} |f'(t)|, \tag{151}$$

где $f(t) := \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$.

Вычислим производную и оценим ее сверху, пользуясь тем, что $\max\{t, 1-t\} \ge \frac{1}{2}$ для всех $t \in (0,1)$.

$$|f'(t)| = \left|\frac{2t-1}{2\pi t^{3/2}(1-t)^{3/2}}\right| \le \frac{1}{2\pi\min\{t^{3/2},(1-t)^{3/2}\}\max\{t^{3/2},(1-t)^{3/2}\}}$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{\pi(\min\{t,(1-t)\})^{3/2}}.$$

Отсюда делаем вывод, что

$$\max_{t_{n,k-1}\le t\le t_{n,k}} |f'(t)| \le \frac{\sqrt{2}n^{3/2}}{\pi(\min\{(k-1),(n-k)\})^{3/2}} \tag{152}$$

для $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Поэтому будет верна оценка:

$$\sum_{k=2}^{ny-1} \frac{1}{n^2} \max_{t_{n,k-1}\le t\le t_{n,k}} f'(t) \le \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^{3/2}} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(n-k)^{3/2}} \right)$$

$$< \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < \frac{6\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}. \tag{153}$$

равномерно по всем $\frac{3}{n} \le y \le 1$.

Применив неравенства (140), (149)—(153) к правой части (148), мы получаем итоговую оценку из формулировки теоремы, равномерную по всем $y \in [\frac{3}{n}, 1]$.

Теперь рассмотрим случай, когда $y \in \left[0, \frac{3}{n}\right)$. Имеем:

$$\sup_{0\le y<\frac{3}{n}} |\mathbf{P}\{\tau_n < ny\} - \mathbf{P}\{\tau < y\}| \le \mathbf{P}\{\tau_n = 0\} + \mathbf{P}\{\tau_n = 1\} + \mathbf{P}\{\tau_n = 2\}$$

$$+\mathbf{P}\left\{\tau < \frac{3}{n}\right\} \le 3\sqrt{\frac{2}{\pi n}} + \frac{3\sqrt{5}}{\pi\sqrt{n}}.$$

Последнее неравенство верно в силу (144) и (149).

Таким образом, теорема 7 доказана.

3.6 Доказательство теоремы 8

Прежде, чем переходить непосредственно к доказательству теоремы, докажем лемму 4, которая играет важную в доказательстве теоремы.

Доказательство леммы 4.

Аналогично доказательству леммы 3, мы, воспользовавшись формулой Стирлинга, получим следующее:

$$\mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2k\} = 2^{-2m} C_{2k}^{k} C_{2(m-k)}^{m-k} = \frac{(2k)!(2(m-k))!}{(k!)^2((m-k)!)^2} 2^{-2m}$$

$$= \frac{1}{\pi m\sqrt{t_{m,k}(1-t_{m,k})}} J_{2k,2(m-k)}, \tag{154}$$

где $J_{2k,2(m-k)}$ было определено в (120). Из (125) мы получаем оценку:

$$\left| J_{2k,2(m-k)} - 1 \right| < \frac{1}{3\min\{k, m-k\}}.$$

Из только что полученного неравенства, (129) и (154) следует оценка:

$$\left| \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2k\} - \frac{1}{\pi m\sqrt{t_{m,k}(1-t_{m,k})}} \right| = \frac{1}{\pi m\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} \left| J_{2k,2(m-k)} - 1 \right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{m}(\min\{k, m-k\})^{3/2}}.$$

Лемма 4 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Докажем следующее утверждение:

$$\sup_{\frac{1}{m}\leq y\leq 1} \left| \mathbf{P}\{\tau'_{2m} < 2my\} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{my-1} \frac{1}{\pi\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} \right| < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{155}$$

Имеет место неравенство:

$$\sup_{\frac{1}{m}\leq y\leq 1} \left| \mathbf{P}\{\tau'_{2m} < 2my\} - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{my-1} \frac{1}{\pi\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} \right| \leq \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 0\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \left| \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2k\} - \frac{1}{\pi m\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} \right| + \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2m\}. \tag{156}$$

Оценим первое и последнее слагаемые правой части (156):

$$\mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 0\} = \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2m\} = 2^{-2m}C_{2m}^{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}2^{-2m} < \frac{1}{\sqrt{\pi m}}. \tag{157}$$

Из леммы 4 следует неравенство:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left| \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2k\} - \frac{1}{\pi m\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} \right| < \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{m}(\min\{k, m-k\})^{3/2}}$$

$$< \frac{2\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} < \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{m}}. \tag{158}$$

Из (156)—(158) следует оценка (155).

Имеет место следующее неравенство, аналогичное (147):

$$|\mathbf{P}\{\tau'_{2m} < 2my\} - \mathbf{P}\{\tau < y\}| \leq \left|\mathbf{P}\{\tau'_{2m} < 2my\} - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{my-1} \frac{1}{\pi\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}}\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{my-1} \frac{1}{\pi\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} - \mathbf{P}\{\tau < y\}\right| \tag{159}$$

для всех $y \in [\frac{1}{m}, 1]$.

Первое слагаемое правой части (159) оценено в (155). Оценка на второе слагаемое была получена в (148)—(153). Поэтому будет верно следующее неравенство:

$$\sup_{\frac{1}{m} \leq y \leq 1} |\mathbf{P}\{\tau'_{2m} < 2my\} - \mathbf{P}\{\tau < y\}| < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{8\sqrt{2}}{\pi} + \frac{3\sqrt{5}}{\pi}\right) \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{160}$$

Выполнено следующее неравенство

$$\sup_{0 \leq y \leq \frac{1}{m}} |\mathbf{P}\{\tau'_{2m} < 2my\} - \mathbf{P}\{\tau < y\}| \leq \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 0\}$$

$$+ \mathbf{P}\left\{\tau < 1/m\right\} < \sqrt{\frac{2}{\pi m}} + \frac{\sqrt{5}}{\pi\sqrt{m}}, \tag{161}$$

которое верно в силу тождества $\mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 0\} = \mathbf{P}\{\tau_{2m} = 2m\}$, (144) и (149). Из (160) и (161) следует утверждение теоремы.

Таким образом, теорема 8 доказана.

3.7 Доказательство теоремы 9.

Мы будем полагать, что $n \geq 5$, т.к. в противном случае неравенство (60) выполнено автоматически. Будет выполнено следующее неравенство:

$$|\mathbf{P}\{nx \leq \tau_n < ny\} - \mathbf{P}\{x \leq \tau < y\}| \leq |\mathbf{P}\{nx' \leq \tau_n < ny'\} - \mathbf{P}\{x' \leq \tau < y'\}|$$

$$+\int_x^{x'} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,dt + \int_{y'}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,dt, \tag{162}$$

где $x' := \frac{\lceil nx \rceil}{n}$, $y' := \frac{\lceil ny \rceil}{n}$. Здесь $\lceil a \rceil := \min\{l \in \mathbb{Z} : a \le l\}$.

Оценим сумму интегралов в правой части (162), используя очевидные неравенства $y - y' < \frac{1}{n}$ и $x' - x < \frac{1}{n}$:

$$\int_x^{x'} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}dt + \int_{y'}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}dt < \frac{2}{\pi n\sqrt{x(1-y)}}. \tag{163}$$

Мы рассмотрим два случая в зависимости от разности y' и x'.

Случай 1: $y' - x' \ge \frac{3}{n}$. Воспользуемся следующим неравенством:

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{P}\{nx' \le \tau_n < ny'\} - \mathbf{P}\{x' \le \tau < y'\}| \\
&\quad \le \sum_{k=nx'+1}^{ny'-2} \left| \mathbf{P}\{\tau_n = k\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}\,(1-t_{n,k})}} \right| \\
&\quad + \left| \mathbf{P}\{\tau_n = nx'\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,nx'}\,(1-t_{n,nx'})}} \right| \\
&\quad + \left| \mathbf{P}\{\tau_n = ny'-1\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,ny'-1}\,(1-t_{n,ny'-1})}} \right| \\
&\quad + \frac{1}{\pi n\sqrt{y'(1-y')}} + \left| \frac{1}{\pi n\sqrt{x'(1-x')}} - \int_{x'}^{x'+1/n} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}dt \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=nx'+1}^{ny'} \frac{1}{\pi\sqrt{t_{n,k}\,(1-t_{n,k})}} - \int_{x'+1/n}^{y'} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}dt \right|.
\end{aligned} \tag{164}$$

Из леммы 3 следует оценка:

$$\sum_{k=nx'+1}^{ny'-2}\left|\mathbf{P}\{\tau_n=k\}-\frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,k}\,(1-t_{n,k})}}\right|$$
$$\le\sum_{k=nx'+1}^{ny'-2}\frac{5\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{n}(\min\{k-1,n-k-2\})^{3/2}}$$
$$<\frac{5\sqrt{2}(y'-x')}{3\pi n(\min\{x',(1-y')\})^{3/2}}\le\frac{5\sqrt{2}(y-x)}{3\pi n(\min\{x,(1-y)\})^{3/2}}. \tag{165}$$

В силу леммы 2 и двойного неравенства $C_{2l}^{l}\le\frac{1}{2}C_{2l+2}^{l+1}<\frac{2^{2l+1}}{\sqrt{\pi(l+1)}}$, верного для всех целых $l\ge 0$:

$$\mathbf{P}\{\tau_n=nx'\}\le\begin{cases}C_{nx'}^{nx'/2}C_{n(1-x')}^{n(1-x')/2}2^{-n}, & \text{если } nx' \text{ четное и } n \text{ четное},\\ C_{nx'+1}^{(nx'+1)/2}C_{n(1-x')+1}^{(n(1-x')+1)/2}2^{-n-1}, & \text{если } nx' \text{ нечетное и } n \text{ четное},\\ C_{nx'}^{nx'/2}C_{n(1-x')+1}^{(n(1-x')+1)/2}2^{-n-1}, & \text{если } nx' \text{ четное и } n \text{ нечетное},\\ C_{nx'+1}^{(nx'+1)/2}C_{n(1-x')}^{n(1-x')/2}2^{-n}, & \text{если } nx' \text{ нечетное и } n \text{ нечетное}.\end{cases}$$

$$<\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{nx'n(1-x')}}, & \text{если } nx' \text{ четное и } n \text{ четное},\\ \frac{4}{\pi\sqrt{(nx'+1)(n(1-x')+1)}}, & \text{если } nx' \text{ нечетное и } n \text{ четное},\\ \frac{2}{\pi\sqrt{nx'(n(1-x')+1)}}, & \text{если } nx' \text{ четное и } n \text{ нечетное},\\ \frac{4}{\pi\sqrt{(nx'+1)n(1-x')}}, & \text{если } nx' \text{ нечетное и } n \text{ нечетное}.\end{cases}<\frac{4}{\pi n\sqrt{x(1-y)}}. \tag{166}$$

Аналогичным образом нетрудно получить неравенство

$$\mathbf{P}\{\tau_n=ny'-1\}<\frac{4}{\pi n\sqrt{x(1-y)}}. \tag{167}$$

Из (166) и (167) следует:

$$\left|\mathbf{P}\{\tau_n = nx'\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,nx'}\,(1-t_{n,nx'})}}\right|$$
$$+\left|\mathbf{P}\{\tau_n = ny'-1\} - \frac{1}{\pi n\sqrt{t_{n,ny'-1}\,(1-t_{n,ny'-1})}}\right|$$
$$< 2\max\left\{\mathbf{P}\{\tau_n = nx'\}, \mathbf{P}\{\tau_n = ny'-1\}, \frac{1}{\pi n\sqrt{x'(1-y')}}\right\}$$
$$< \frac{8}{\pi n\sqrt{x(1-y)}}. \quad (168)$$

Верно следующее неравенство:

$$\frac{1}{\pi n\sqrt{y'(1-y')}} + \left|\frac{1}{\pi n\sqrt{x'\,(1-x')}} - \int_{x'}^{x'+1/n}\frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}dt\right| < \frac{1}{\pi n\sqrt{x'(1-y')}}$$
$$+\max\left\{\frac{1}{\pi n\sqrt{x'(1-x')}}, \frac{1}{\pi n\sqrt{x'(1-y')}}\right\} \leq \frac{2}{\pi n\sqrt{x(1-y)}}. \quad (169)$$

Снова воспользуемся оценкой погрешности приближения интегральной суммой Римана соответствующего интеграла, изученной в (151) и (152) :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=nx'+1}^{ny'}\frac{1}{\pi\sqrt{t_{n,k}\,(1-t_{n,k})}} - \int_{x'+1/n}^{y'}\frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}dt\right|$$
$$< \sum_{k=nx'+1}^{ny'}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}(\min\{(k-1),(n-k)\})^{3/2}} < \frac{\sqrt{2}(y-x)}{\pi n(\min\{x,(1-y)\})^{3/2}}. \quad (170)$$

Из неравенств (162)—(165), (168)—(170) следует утверждение теоремы в случае 1.

Случай 2: $y' - x' < \frac{3}{n}$. Заметим, что в этом случае справедливо следующее неравенство:

$$|\mathbf{P}\{nx' \leq \tau_n < ny'\} - \mathbf{P}\{x' \leq \tau < y'\}|$$

$$\leq \max\left\{\sum_{k=nx'}^{nx'+2}\mathbf{P}\{\tau_n = k\}, \int_x^y \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}dt\right\}. \tag{171}$$

Полностью аналогичным образом неравенству (166) устанавливаются неравенства:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = nx'+1\} < \frac{4}{\pi n\sqrt{x(1-y)}}, \quad \mathbf{P}\{\tau_n = nx'+2\} < \frac{4}{\pi n\sqrt{x(1-y)}}. \tag{172}$$

Интеграл в правой части (171) допускает элементарную оценку:

$$\int_x^y \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}dt < \frac{3}{\pi n\sqrt{x(1-y)}}. \tag{173}$$

Из (162), (163), (166), (171)—(173) следует утверждение теоремы в случае 2.

Таким образом, теорема 9 доказана.

3.8 Доказательство теоремы 10

Аналогично (162) выполнено неравенство:

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{P}\{2mx \leq \tau'_{2m} < 2my\} - \mathbf{P}\{x \leq \tau < y\}| \\
&\qquad \leq |\mathbf{P}\{2mx' \leq \tau'_{2m} < 2my'\} - \mathbf{P}\{x' \leq \tau < y'\}| \\
&\qquad\qquad + \int_x^{x'} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,dt + \int_{y'}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,dt,
\end{aligned} \tag{174}$$

где $x' := \frac{[mx]}{m}$, $y' := \frac{[my]}{m}$.

Оценка на сумму двух интегралов следует из (163):

$$\int_x^{x'} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,dt + \int_{y'}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,dt < \frac{2}{\pi m\sqrt{x(1-y)}}. \tag{175}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от разности x' и y'.

Случай 1: $y' - x' \geq \frac{1}{m}$. Воспользуемся неравенством

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{P}\{2mx' \leq \tau'_{2m} < 2my'\} - \mathbf{P}\{x' \leq \tau < y'\}| \\
&\qquad \leq \sum_{k=mx'}^{my'-1} \left| \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2k\} - \frac{1}{\pi m \sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} \right| \\
&\quad + \frac{1}{\pi m \sqrt{y'(1-y')}} + \left| \frac{1}{\pi m \sqrt{x'\,(1-x')}} - \int_{x'}^{x'+1/m} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} dt \right| \\
&\qquad + \left| \frac{1}{m} \sum_{k=mx'+1}^{my'} \frac{1}{\pi\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} - \int_{x'+1/m}^{y'} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} dt \right|. \qquad (176)
\end{aligned}
$$

Из леммы 4 следует оценка:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=mx'}^{my'-1} \left| \mathbf{P}\{\tau'_{2m} = 2k\} - \frac{1}{\pi m \sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} \right| \leq \sum_{k=mx'}^{my'-1} \frac{\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{m}(\min\{k, m-k\})^{3/2}} \\
&\quad < \frac{\sqrt{2}m(y'-x')}{3\pi\sqrt{m}(\min\{mx', m(1-y')\})^{3/2}} \leq \frac{\sqrt{2}(y-x)}{3\pi m(\min\{x, (1-y)\})^{3/2}}. \qquad (177)
\end{aligned}
$$

Верно следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi m' \sqrt{y'(1-y')}} + \left| \frac{1}{\pi m \sqrt{x'(1-x')}} - \int_{x'}^{x'+1/m} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} dt \right| < \frac{1}{\pi m \sqrt{x(1-y)}} \\
&\quad + \max\left\{ \frac{1}{\pi m\sqrt{x'(1-x')}}, \frac{1}{\pi m \sqrt{x(1-y)}} \right\} = \frac{2}{\pi m\sqrt{x(1-y)}}. \qquad (178)
\end{aligned}
$$

Оценим последнее слагаемое правой части (176), которое является ничем иным как погрешностью приближения интегральной суммой Римана соответствующего интеграла, которая уже была исследована в (151) и (152):

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{m} \sum_{k=mx+1}^{my} \frac{1}{\pi\sqrt{t_{m,k}\,(1-t_{m,k})}} - \int_{x+1/m}^{y} \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} dt \right| \\
&< \sum_{k=mx'+1}^{my'} \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{m}(\min\{(k-1), (n-k)\})^{3/2}} < \frac{\sqrt{2}(y-x)}{\pi m(\min\{x, (1-y)\})^{3/2}}. \qquad (179)
\end{aligned}
$$

Из оценок (175)—(179) следует утверждение теоремы в случае 1.

Случай 2: $y' - x' < \frac{1}{m}$. В этом случае утверждение теоремы будет выполнено, для этого достаточно лишь заметить, что при этом условии

$$|\mathbf{P}\{2mx' \leq \tau'_{2m} < 2my'\} - \mathbf{P}\{x' \leq \tau < y'\}| \leq \frac{2}{\pi m\sqrt{x(1-y)}}$$

в неравенстве (174).

Теорема 10 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации посвящены асимптотическому анализу распределения случайной величины $\tau_n(xg)$ — времени пребывания траектории классического случайного блуждания $S_1, ..., S_n$ выше уровня $xg(\cdot)$ для достаточно широкого класса функций $g(\cdot)$, определяющих конфигурацию граничного уровня, при условии, что $x = x(n)$ при $n \to \infty$ неограниченно возрастает со скоростью, соответствующей зоне умеренно больших уклонений. При выполнении условия Крамера на распределение скачка случайного блуждания получены точные асимптотические соотношения при $n \to \infty$ для математического ожидания $\mathbf{E}\tau_n(xg)$, а в случае $g(\cdot) \equiv 1$ и для хвоста распределения $\mathbf{P}\left\{\tau_n(x) \geq y\right\}$ при любом фиксированном y.

Кроме того, получен ряд оценок скорости сходимости в законе арксинуса для классического случайного блуждания. При этом для простейшего симметричного случайного блуждания эти оценки неулучшаемые, что позволило получить асимптотическое представление для хвоста распределения времени пребывания траектории указанного случайного блуждания выше удаляющегося прямолинейного уровня x со скоростью, соответствующей всему диапазону умеренно больших уклонений. Для более общего случайного блуждания соответствующее асимптотическое представление удалось доказать для несколько более узкой зоны уклонений. Вопрос о распространении последнего результата на всю зону умеренно больших уклонений пока остается открытым.

В качестве перспективного исследования можно выделить поиск асимптотики хвоста распределения $\mathbf{P}\left\{\tau_n(xg) \geq y\right\}$ в случае гладкой криволинейной границы, которая определяется функцией $g(\cdot)$.

Список литературы

1. *Алешкявичене А. К.* О вероятностях больших уклонений максимума сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. — 1979. — Т. 24. — В. 1. — С. 18–33.

2. *Баскакова П. Е., Бородин А. Н.* Таблицы распределений функционалов от процесса броуновского движения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1992. — Т. 194. — С. 8–20.

3. *Борисов И. С., Шефер Е. И.* Асимптотика распределения времени пребывания случайного блуждания в области умеренно больших уклонений // Матем. Труды. — 2020. — Т. 23. — В. 2. — С. 3–23.

4. *Борисов И. С., Шефер Е. И.* Асимптотика среднего времени пребывания случайного блуждания в области больших уклонений // Матем. Труды. — 2019. — Т. 22. — В. 2. — С. 3–20.

5. *Борисов И. С., Шефер Е. И.* Асимптотический анализ времени пребывания случайного блуждания в области умеренно больших уклонений // Материалы научной конференции “Современные проблемы стохастического анализа”, посвященной 100 летию академика С. Х. Сираждинова. — Ташкент. — 21–22 сентября 2020 г. — С. 168–169.

6. *Борисов И. С., Шойсоронов А. М.* Теорема непрерывности в задаче о разорении // Сиб. матем. журнал. — 2011. — Т. 52. — В. 4. — С. 765–776.

7. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М.: Либроком, 2009.

8. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Т.1. Медленно убывающие распределения скачков. — М.: Физматлит, 2008.

9. *Бородин А. Н.* Броуновское локальное время. I // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44. — В. 2. (266) — С. 7—48.

10. *Бородин А. Н., Ибрагимов И. А.* Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Тр. МИАН СССР. — 1994. — Т. 195. — С. 3—285.

11. *Бородин А. Н., Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. — Санкт-Петербург: Лань, 2016.

12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.

13. *Лотов В. И, Тарасенко А. С.* Об асимптотике среднего времени пребывания случайного блуждания на полуоси // Изв. РАН, Сер. матем. — 2015. — Т. 12. — С. 23–40.

14. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятн. и ее примен. — 1956. — Т. 1. — В. 2. — С. 177–238.

15. *Спитцер Ф.* Принципы случайного блуждания. — М.: Мир, 1969.

16. *Тарасенко А. С.* Неравенства для времени пребывания случайного блуждания выше некоторой границы // Сиб. электрон. матем. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 434–451.

17. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1984.

18. *Шефер Е. И.* Асимптотика распределения времени пребывания случайного блуждания в области умеренно больших уклонений // Материалы 58-й Международной научной студенческой конференции. — 2020. — С. 176.

19. *Шефер Е. И.* Асимптотика среднего времени пребывания траектории случайного блуждания выше удаляющейся криволинейной границы // Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции. — 2017. — С. 109.

20. *Borisov I. S., Shefer E. I.* The Asymptotic behavior of the mean sojourn time for a random walk above a receding curvilinear boundary // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — V. 237. — № 4. — P. 511–520.

21. *Chung K. L., Feller W.* On fluctuations in-coin tossing // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1949. — V. 35. — № 10. — P. 605–608.

22. *Döbler Ch.* A rate of convergence for the arcsine law by Stein's method // ArXiv:1207:2401 — 2012.

23. *Donsker M.* An invariance principle for certain limit theorems // Mem. Amer. Math. Soc. — 1951. — V. 6. — P. 1–12.

24. *Erdös P., Kac M.* On the number of positive sums of independent random variables // Bull. Amer. Math. Soc. — 1947. — V. 53. — № 10. — P. 1011–1020.

25. *Goldstein E., Reinert G.* Stein's method for the Beta distribution and the Polya-Eggenberger urn // J. Appl. Prob. — 2013. — V.50. — № 4. — P. 1187–1205.

26. *Komlos J., Major P., Tusnady G.* An approximation of partial sums of independent RV'-s, and the sample DF. I // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. — 1975. — B. 32. — H. 1. — P. 111—131.

27. *Komlos J., Major P., Tusnady G.* An approximation of partial sums of independent RV'-s, and the sample DF. II // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.

Gebiete. — 1976. — B. 34. — H. 1. — P. 33—58.

28. *Levy P.* Sur certains processus stochastiques homogenes // Compos. Math. — 1939. — V. 7. — P. 283–339.

29. *Sparre Andersen E.* On the fuctuations of sums of random variables // Math. Scand. — 1954. — V. 2. — P. 195–223.

30. *Yor M.* The Distribution of Brownian Quantiles // J. Appl. Prob. — 1995. —V. 32. — № 2. — P. 405–416.