ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Мархабатов Нурлан Дарханулы

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВ ТЕОРИЙ

Специальность 01.01.06 —
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Судоплатов Сергей Владимирович

Новосибирск — 2021

Оглавление

Стр.

Введение

Вопросы изучения топологических свойств объектов дискретной математики и теории моделей привлекают внимание широкого круга специалистов. В этой связи следует отметить монографию Ю.Л. Ершова [1], в которой изложен ряд результатов о топологических пространствах, применяемых в дискретной математике. Е. Лось [2] в 1954 г. высказал гипотезу, что если полная теория категорична в некоторой несчетной мощности, то она категорична во всех других несчетных мощностях. В 1965 г. М. Морли [3] подтвердил гипотезу Лося и доказал однородность всех моделей категоричных теорий, одновременно изменив качество исследований в теории моделей, систематически вводя методы работы с типами (локально совместными множествами формул), вводя ранги типов и формул на основе изучения категории топологических пространств n-типов и элементарных вложений.

Классическая теорема Фефермана – Воота [4] для логики первого порядка объясняет, как вычислить значение истинности предложения первого порядка в обобщенном произведении структур первого порядка, сводя это вычисление к вычислению значений истинности других предложений первого порядка в факторах и оценке монадического предложения второго порядка в индексной структуре.

Семейства теорий в общем виде впервые начал исследовать С.В. Судоплатов в 2016 году введя E-операторы и P-операторы [5] на классы структур, порождающих структуры и аппроксимирующие заданные структуры. Эти операторы связаны с естественными топологическими свойствами, относящимися к семействам теорий. Также исследованы комбинация структур, для данных семейств структур, относительно семейств одноместных предикатов и отношений эквивалентности. Охарактеризованы условия сохранения ω-категоричности и эренфойхтовости для этих комбинаций. Введены понятия e-спектров и описаны возможности для e-спектров.

С.В. Судоплатовым в работе [6] исследованы операторы замыкания и описаны свойства для E-оператора и P-оператора систем и их теорий, включая отрицание конечного характера и свойство замены. Введено понятие сигнатурно однородной теории [7] и изучены топологические свойства, относящиеся к семействам сигнатурно однородных теорий и их E-комбинациям, а также, показано, что семейства сигнатурно однородных теорий задают произвольный ранг Кантора – Бендиксона и произвольную степень относительно этого ранга. Доказано, что решетки для семейств теорий с наименьшими порождающими множествами являются дистрибутивными [8]. Изучены аппроксимация структур конечными в контексте структурных комбинаций. Рассмотрены и охарактеризованы классы конечных и счетно категоричных структур и их теории, сохраняющиеся при E-операторах и P-операторах [9]. Определены понятия относительных e-спектров [10] по отношению к E-операторам, относительным замыканиям и относительным порождающим множествам.

Исследованы аппроксимации теорий [11] как в общем контексте, так и по отношению к некоторым естественным классам теорий. Рассмотрены некоторые виды аппроксимаций, найдены связи с конечно аксиоматизируемыми теориями и минимальными порождающими множествами теорий, а также их спектрами. Поставлена следующая проблема:

Проблема 1. *Описать мощности и виды аппроксимаций для естественных классов теорий.*

Изучение семейств элементарных теорий дает информацию о поведении и взаимосвязях теорий внутри семейств, возможности порождения и их сложности. Эта сложность выражается ранговыми характеристиками как для семейств, так и для их элементов внутри семейств.

В 2019 году продолжено изучение семейств теорий и их аппроксимации, введением рангов и степеней для семейств теорий [12], аналогичных рангу и степени Морли, а также рангу и степени Кантора-Бендиксона, кроме того введено понятие тотально трансцендентного семейства теорий. Эти ранги и степени играют аналогичную роль для семейств теорий, с иерархиями для определимых семейств теорий, как иерархии Морли для фиксированной теории, хотя они имеют свои особенности. Поставлена следующая проблема:

Проблема 2. *Описать иерархию рангов $RS(\cdot)$ для естественных семейств теорий.*

Ранг для семейств теорий, можно рассматривать как меру сложности или богатства семейств. Таким образом, повышая ранг за счет расширения семейств, можно производить более богатые семейства, получая семейства с бесконечным рангом, который можно считать «достаточно богатым».

Следует отметить активно развивающуюся в последнее время область исследования *псевдоконечных структур*, связанную с аппроксимациями структур. В 1950-60 годы активно исследованы элементарные теории конечных полей, особенно, поля F, обладающих тем свойством, что *каждое абсолютно неприводимое многообразие над* F *имеет точку, определенную над* F. В 1967 году Ю.Л. Ершов поле с таким свойством назвал *регулярно замкнутым* [13]. Примерами регулярно замкнутых полей являются сепарабельно замкнутые поля и бесконечные поля, удовлетворяющие всем аксиомам теории конечных полей. Регулярная замкнутость последних является следствием глубокого факта — теоремы Вейля о гипотезе Римана для кривых над конечными полями. Это было также отмечено независимо Дж. Аксом.

Дж. Акс [14] показал, что ультрапроизведения, которые преобразуют классы конечных структур в бесконечные «регулярно замкнутые» структуры наследуют свойства классов и поддаются теоретико-модельным методам с приложениями для конечных структур. Следует отметить, что в разных статьях это понятие называется по-разному (Σ-поля, аксовы поля), позже в зарубежных работах такие поля стали в основном называться *псевдоалгебраически замкнутыми* (PAC) [15; 16]. Алгебраические свойства регулярно замкнутых полей (PAC) достаточно полно изучены в работах Ю.Л. Ершова [17—19], Г. Черлина, Л. ван ден Дриса и А. Макинтайра [20], З. Шатзидакис [21], А. Пиллэя и Д. Полковска [22], Э. Хрушовского [23].

Интересные классы регулярно замкнутых (PAC) полей более сильными свойствами, а также алгебраические и теоретико-модельные свойства псевдоалгебраически замкнутых полей неявно изучены в работах М. Жардена [24—26], М. Жардена совместно С. Шелахом [27], Г. Фрея [28], К. Кифа [29], У.Г. Уиллера [30; 31]. Более подробно это изучено в книге М. Фрида и М. Жардена [32].

В 1968 году Дж. Акс впервые ввел понятие *псевдоконечности* [33], чтобы показать разрешимость теории всех конечных полей, обобщая алгоритм разработанной в [14] и используя теорему Вейля о гипотезе Римана для кривых над конечными полями, а также теорему плотности Чеботарева. Он назвал поле F *псевдоконечным*, если оно является *квазиконечным* [34] (совершенным с единственным расширением каждой положительной степени), и *псевдоалгебраически замкнутым* (PAC) (каждое абсолютно неприводимое многообразие над F имеет точку, определенную над F, то есть, регулярно замкнутым). Свойство *псевдоалгебраической замкнутости* или *регулярной замкнутости* выражается конъюнкцией предложений первого порядка, каждое из которых, по оценкам Ленга-Вейля [35], имеет место в достаточно больших конечных полях, и поэтому каждое из них должно выполнятся в любом псевдоконечном поле. Важным фактом является обратное: любое поле, удовлетворяющее этим двум условиям, удовлетворяет каждому предложению, истинному для всех конечных полей. Дж. Акс установил, что псевдоконечное поле элементарно эквивалентно бесконечному ультрапроизведению конечных полей. Также показал, что существует алгоритм, позволяющий решить, выполняется ли данное предложение для всех конечных полей. После этого появилась новая область исследования — бесконечные структуры, удовлетворяющие аксиомам теории конечных структур. Такие структуры называются *псевдоконечными.*

Псевдоконечные структуры в явном виде после Дж. Акса долгое время не изучались. До 1990-х годов получены лишь несколько результатов по этой тематике и самым первым результатом является результат Б.И. Зильбера [36; 37] утверждающий, что тотально категоричные структуры псевдоконечны.

Теорема Ж. Дюре [38] гласит, что теория любого псевдоалгебраически замкнутого (PAC) поля, не являющегося сепарабельно замкнутым, обладает свойством независимости, то есть, Ж. Дюре показал, что теория псевдоконечных полей нестабильна.

Одним из первых результатов в теории классификации псевдоконечных структур является знаменитая теорема Г. Черлина, Л. Харрингтона и А. Лахлана [39], обобщающая теорему Зильбера на класс $\aleph_0$-стабильных $\aleph_0$-категоричных структур, о том, что ω-категоричные ω-стабильные теории являются псевдоконечными. Также они доказали, что такие структуры гладко аппроксимируются конечными структурами.

Гладко аппроксимируемые структуры являются естественным обощением $\aleph_0$-категоричных $\aleph_0$-стабильных структур. В 1989 году У. М. Кантором, М. У. Либеком и Д. Макферсоном [40] дана классификация примитивных $\aleph_0$-категоричных структур, которые гладко аппроксимируются цепочкой конечных однородных подструктур. А в 1991 году Д. Макферсон [41] предположил, что конечно аксиоматизируемая $\aleph_0$-категоричная теория обладает свойством строгого порядка, что в дальнейшем обобщит часть результата Г. Черлина, Л. Харрингтона и А. Лахлана.

Измеримая структура [42] — это структура, снабженная функцией, которая присваивает размерность и меру каждому определимому множеству, которое является равномерно определимым в терминах своих параметров и удовлетворяет определенным условиям, аналогичным тем, которым удовлетворяют ультрапроизведения конечных полей. Некоторые измеримые структуры могут быть построены как ультрапроизведения структур в одномерном асимптотическом классе и являются псевдоконечными SU-ранга 1. Изучение *асимптотических классов* проистекает из глубокого применения З. Шатзидакис, Л. ван ден Дрисом и А. Макинтайром [43] оценок Ленга – Вейля и работы Дж. Акса. Существует интересный пример Р. Элвеса [44] измеримой структуры, состоящей из структуры с двумя различными псевдоконечными полевыми структурами (на непересекающихся языках) с разными простыми характеристиками, которая не элементарно эквивалентна никакому ультрапроизведению асимптотического класса. Асимптотические классы конечных структур и измеримых структур были введены Д. Макферсоном и Ч. Стэйнхорном [45] с целью разработки теории моделей для классов конечных структур, которая отражает современные теоретические разделы бесконечных моделей. Более подробно это представлено в обзоре Р. Элвеса, Д. Макферсона, З. Шатзидакис, А. Пиллэя, А. Уилки [46].

Теория *геометрической стабильности* родилась на основе псевдоконечных структур. Основным инструментом Б. Зильбера была *теория размерности* [47], основанная на ранге Морли и старшем коэффициенте полинома Зильбера, подсчитывающем точки в конечных аппроксимациях. Хрушовский [48] исследует понятие *псевдоконечной размерности* [49], введенное вместе с Ф. Вагнером, которое формирует точку входа в связь теории моделей и комбинаторики. Также обновляются открытые проблемы псевдоконечных (квазиконечных) структур из [50] в контексте теории геометрической стабильности. В 2015 году Д. Макферсон, Д. Гарсия и Ч. Стейнхорн в работе [51] исследует понятие псевдоконечной размерности (называемое *квазиконечной размерностью*), примененное Хрушовским в [52] для аппроксимации подгрупп с перспективными дальнейшими направлениями. А. Пиллэй доказал [53], что сильно минимальная псевдоконечная структура унимодулярна, следовательно, по теореме Хрушовского [54] локально модулярна. А. Пиллэем [55] введены понятия *слабо, строго и сильно псевдоконечной* структуры. Значительный обзор в теорию моделей конечных структур дан в работе Э. Росена [56]. В работе Ю. Вяанянена [57] утверждается, что псевдоконечные структуры являются хорошой основой для изучения логики первого порядка на конечных структурах. Б.Ш. Кулпешов и С.В. Судоплатов [58] доказали, что теория T бесконечной линейно упорядоченной структуры $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M}; < \rangle$ псевдоконечна тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ не имеет плотных частей и $\mathcal{M}$ имеет как наибольшие, так и наименьшие элементы.

Работа Дж. Акса привела к важным достижениям в теории моделей полей и в арифметике полей. Фактически в псевдоконечных полях размерность соответствует SU-рангу. Это было по существу известно Хрушовскому, который разработал анализ псевдоконечных полей в стиле стабильности [23]. З. Шатзидакис, Э. Хрушовский и Я. Петерзил в работе [59] показали, что псевдоконечное поле имеет SU-ранг 1. Э. Хрушовский и Г. Черлин изучают псевдоконечные структуры как гладко аппроксимируемые структуры, которые аппроксимируются конечными структурами [50; 60]. В 1997 году З. Шатзидакис [61] дала полный обзор полученных результатов в теории моделей конечных и псевдоконечных полей. В последние годы теоретико-модельные и алгебраические свойства конечных и псевдоконечных полей активно изучаются М. Райтеном [62], В. С. Лопесом и Л. ван ден Дрисом [63], О. Бейарсланом и Э. Хрушовским [64], Тинсян Цзоу [65], Э. Хрушовским [66] и А. Крюкманом [67].

Теория моделей конечных и псевдоконечных полей изучается достаточно. В своей диссертации Р. Белло-Агирре [68] представляет результаты, способствующие началу изучения теории моделей конечных и псевдоконечных колец.

С 1993 года обнаружена тесная связь между алгебраическими и теоретико-модельными свойствами псевдоконечных полей и псевдоконечных групп. Дж. Вильсон [69] показал, что существует тесная связь между простыми псевдоконечными группами и псевдоконечными полями. В частности, он доказал, что всякая простая псевдоконечная группа элементарно эквивалентна группе Шевалле над псевдоконечным полем. Результаты, полученные Ф. Пуан [70] в 1999 году, могут быть использованы для классификации простых псевдоконечных групп. Алгебраические и теоретико-модельные свойства конечных и псевдоконечных групп исследованы Э. Хрушовским с А. Пиллэем [71], Д. Макферсоном и К. Тент [72; 73], Д. Макферсоном, Р. Элвесом, Э. Жалигот и М. Райтеном [74]. В 2018 году Д. Макферсон делает большой обзор [75] по теории моделей конечных и псевдоконечных групп с открытыми вопросами и дополнительными направлениями по этой тематике. Ин.И. Павлюк и С.В. Судоплатов [76] охарактеризовали псевдоконечные абелевы группы в терминах шмелёвских инвариантов.

Целью данной работы является исследование теоретико-модельных и топологических свойств семейств теорий.

Научная новизна: Все основные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами и своевременно опубликованы.

Методология и методы исследования. Для достижения поставленной цели исследования предлагаются методы теории моделей, основанные на использовании классических и новых понятий общей теории моделей, таких как аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, стабильность, тотально трансцендентность, псевдоконечность; различные теоретико-модельные конструкции, такие как прямые произведения, ультрапроизведения, элементарные расширения; методы общей топологии.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построены семейства теорий подстановок, имеющее данный счетный ранг и данную степень n. Доказано, что в семействе теорий подстановок любая теория является теорией конечной структуры или аппроксимируется теориями конечных структур. Получен критерий псевдоконечности локально свободных алгебр. Результаты получены лично и опубликованы в [1; 2].
2. Получены характеристики и динамика относительно ранга и степени определимых предложениями и определимых диаграммами подсемейств заданных семейств теорий, а также исчисления для этих подсемейств. Охарактеризованы топологические свойства и ранги алгебр, связанные с определимыми предложениями и диаграммами подсемейств семейств теорий. Результаты получены в неразделимом соавторстве с Судоплатовым С.В. и опубликованы в [3; 4].
3. Описаны топологические свойства, ранги, замыкания и их динамика для семейств теорий. Дана характеризация видов топологий семейств теорий. Установлена связь рангов с топологиями для семейств теорий. Рассмотрены булевы комбинации s-определимых семейств теорий, определены ранги и степени относительно этих семейств, описаны значения этих характеристик. Изучены замыкания семейств теорий относительно s-определимых подсемейств и их булевых комбинаций, описаны свойства операторов замыкания, а также охарактеризовано условие существования наименьшего порождающего множества. Описаны ранги и степени для семейств всех теорий произвольно заданных сигнатур. Ре-

зультаты получены в неразделимом соавторстве с Судоплатовым С.В. и опубликованы в [5-7].

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах «Теория моделей» имени Е.А. Палютина Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, на семинарах «Алгебра и Логика» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Результаты работы также докладывались на конференциях: Традиционная международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2018-2020 гг.), Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, (Алматы, 2019-2020 гг.), Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», (г. Казань, 24-28 июня 2019 г.), 16-я Азиатская логическая конференция (Нур-султан, Казахстан, 2019 г.), 13-я Международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (Эрлагол-2019, Алтай), 14-я Международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры», посвященная 75-летию профессора Б. Пуаза (Эрлагол-2021, Алтай), 16-й Международный конгресс по логике, методологии и философии науки и технологий, г. Прага, 5–10 августа 2019 г.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в работах [1–15]. Работы [1] и [3–6] изданы в журналах, рекомендованных ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, а также индексируемых в наукометрических системах (Scopus, Web of Science и т.д.), работа [2] — в сборнике Эрлаголской конференции «Algebra and Model Theory 12», работа [7] — в журнале, индексируемый базами Scopus и Web of Science не из списка ВАК РФ. Работы [3–9] и [11–15] написаны в неразрывном сотрудничестве с Судоплатовым С.В.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключений. Полный объём диссертации составляет 107 страниц. Список литературы содержит 88 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., доценту Судоплатову Сергею Владимировичу за ценные советы и замечания при планировании исследования и всестороннюю помощь при работе над диссертацией. Автор выражает признательность всем участникам семинара «Теория моделей» им. Е.А. Палютина за множество ценных замечаний и предложений.

Глава 1. Предварительные сведения

1.1 Сведения из общей топологии

Напомним основные понятия общей топологии из книги [77].

Определение 1.1.1. *Топологическое пространство* — это пара $(X,\mathcal{O})$, состоящая из множества X и семейства $\mathcal{O}$ *открытых* подмножеств множества X, удовлетворяющих следующим условиям:

(O1) $\varnothing \in \mathcal{O}$ и $X \in \mathcal{O}$;

(O2) если $U_1 \in \mathcal{O}$ и $U_2 \in \mathcal{O}$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$;

(O3) если $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, то $\bigcup \mathcal{O}' \in \mathcal{O}$.

Определение 1.1.2. Топологическое пространство $(X,\mathcal{O})$ называется T_0*-пространством*, если для любой пары различных элементов $x_1,x_2 \in X$ существует открытое множество $U \in \mathcal{O}$, содержащее ровно один из этих элементов.

Определение 1.1.3. Топологическое пространство $(X,\mathcal{O})$ называется T_1*-пространством*, если для любой пары различных элементов $x_1,x_2 \in X$ существует открытое множество $U \in \mathcal{O}$, для которого $x_1 \in U$ и $x_2 \notin U$.

Определение 1.1.4. Топологическое пространство $(X,\mathcal{O})$ называется T_2*-пространством* или *хаусдорфовым* пространством, если для любой пары различных точек $x_1,x_2 \in X$ существуют открытые множества $U_1,U_2 \in \mathcal{O}$ такие, что $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

1.2 Сведения о семействах полных теорий

Всюду мы рассматриваем семейства $\mathcal{T}$ полных теорий первого порядка языка $\Sigma = \Sigma(\mathcal{T})$ и полные теории T первого порядка на языках предикатов $\Sigma(T)$.

Определение 1.2.1. [5] Пусть $P = (P_i)_{i\in I}$ — семейство непустых унарных предикатов, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ — семейство структур, в которых P_i является носителем семейства $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, а символы P_i не пересекаются с языками для структур

$\mathcal{A}_j$, $j \in I$. Структура $\mathcal{A}_P \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$, расширенная предикатами P_i, является P-*объединением* структур $\mathcal{A}_i$, а оператор отображения $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ в $\mathcal{A}_P$ является P-*оператором.* Структура $\mathcal{A}_P$ называется P-*комбинацией* структур $\mathcal{A}_i$ и обозначается $Comb_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$, если $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_P \upharpoonright A_i) \upharpoonright \Sigma(\mathcal{A}_i)$, $i \in I$. Структуры $\mathcal{A}'$, которые являются элементарно эквивалентным к $Comb_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$, также будут рассматриваться как P-комбинации.

Ясно, что все структуры $\mathcal{A}' \equiv Comb_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ представляются как объединения их ограничений $\mathcal{A}'_i = (\mathcal{A}' \upharpoonright P_i) \upharpoonright \Sigma(\mathcal{A}_i)$ тогда и только тогда, когда множество $p_\infty(x) = \{\neg P_i(x) \mid i \in I\}$ несовместно. Если $\mathcal{A}' \neq Comb_P(\mathcal{A}'_i)_{i \in I}$, мы пишем $\mathcal{A}' = Comb_P(\mathcal{A}'_i)_{i \in I \cup \{\infty\}}$, где $\mathcal{A}'_\infty = \mathcal{A}' \upharpoonright \bigcap\limits_{i \in I} \overline{P_i}$, возможно, применяя Морлейзацию. Кроме того, мы пишем $Comb_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I \cup \{\infty\}}$ для $Comb_P(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ с пустой структурой $\mathcal{A}_\infty$.

Отметим, что если все предикаты P_i непересекаются, то структура $\mathcal{A}_P$ является P-комбинацией и дизъюнктным объединением структур $\mathcal{A}_i$. В этом случае P-комбинация $\mathcal{A}_P$ называется *дизъюнктной.* Ясно, что для любой дизъюнктной P-комбинации $\mathcal{A}_P$ имеет место $Th(\mathcal{A}_P) = Th(\mathcal{A}'_P)$, где $\mathcal{A}'_P$ получается из $\mathcal{A}_P$, заменяя $\mathcal{A}_i$ попарно непересекающимися $\mathcal{A}'_i \equiv \mathcal{A}_i$, $i \in I$. Таким образом, в этом случае, аналогично структурам P-оператор работает для теорий $T_i = Th(\mathcal{A}_i)$, создающих теорию $T_P = Th(\mathcal{A}_P)$, представляющую собой P-*комбинацию* T_i, которая обозначается через $Comb_P(T_i)_{i \in I}$.

Отметим, что P-комбинации представлены обобщенными произведениями структур [4].

Определение 1.2.2. [5] Для отношения эквивалентности E, заменяя непересекающиеся предикаты P_i на E-классы, получим структуру $\mathcal{A}_E$, которая является E-объединением структур $\mathcal{A}_i$. В этом случае оператор отображения $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ на $\mathcal{A}_E$ является E-*оператором.* Структура $\mathcal{A}_E$ также называется E-*комбинацией* структур $\mathcal{A}_i$ и обозначается через $Comb_E(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$; здесь $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_E \upharpoonright A_i) \upharpoonright \Sigma(\mathcal{A}_i)$, $i \in I$. Аналогично, структуры $\mathcal{A}'$, элементарно эквивалентные $\mathcal{A}_E$, обозначаются через $Comb_E(\mathcal{A}'_j)_{j \in J}$, где $\mathcal{A}'_j$ — ограничения $\mathcal{A}'$ на его E-классы. E-оператор работает для теорий $T_i = Th(\mathcal{A}_i)$, создающих теорию $T_E = Th(\mathcal{A}_E)$, представляющую собой E-*комбинацию* T_i, которая обозначается через $Comb_E(T_i)_{i \in I}$ или $Comb_E(\mathcal{T})$, где $\mathcal{T} = \{T_i \mid i \in I\}$.

Ясно, что $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_P$, реализующая $p_\infty(x)$, не элементарно вложима в $\mathcal{A}_P$ и не может быть представлена как дизъюнктная P-комбинация $\mathcal{A}'_i \equiv \mathcal{A}_i$, $i \in I$.

В то же время, существуют E-комбинации такие, что все $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ могут быть представлены в виде E-комбинаций некоторого $\mathcal{A}'_j \equiv \mathcal{A}_i$. Мы называем эту представимость $\mathcal{A}'$ *E-представимостью.*

Определение 1.2.3. [5] Если существует $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$, которая не является E-представимой, мы имеем E'-представимость, заменяющую E на E', такую, что E' получается из E, добавляя классы эквивалентности с моделями для всех теорий T, где T — теория ограничения $\mathcal{B}$ из структуры $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ некоторому E-классу и $\mathcal{B}$ не элементарно эквивалентна структурам $\mathcal{A}_i$. В результате структура $\mathcal{A}_{E'}$ (с представимостью E') представляет собой *e-полноту* или *e-насыщение* $\mathcal{A}_E$. Сама структура $\mathcal{A}_{E'}$ называется *e-полной*, или *e-насыщенной*, или *e-универсальной*, или *e-наибольшей.*

Определение 1.2.4. [5] Для структуры $\mathcal{A}_E$ число новых структур относительно структур $\mathcal{A}_i$, т.е. структур $\mathcal{B}$, которые попарно элементарно неэквивалентны и элементарно неэквивалентны структурам $\mathcal{A}_i$, называется *e-спектром* структуры $\mathcal{A}_E$ и обозначается через $e\text{-}Sp(\mathcal{A}_E)$. Значение $sup\{e\text{-}Sp(\mathcal{A}')) \mid \mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E\}$ называется *e-спектром* теории $Th(\mathcal{A}_E)$ и обозначается через $e\text{-}Sp(Th(\mathcal{A}_E))$. Если структуры $\mathcal{A}_i$ представляют теории T_i, семейства $\mathcal{T}$, состоящего из T_i, $i \in I$, то -спектр $e\text{-}Sp(\mathcal{A}_E)$ обозначается через $e\text{-}Sp(\mathcal{T})$.

Определение 1.2.5. [5] Если $\mathcal{A}_E$ не имеет E-классов $\mathcal{A}_i$, которые можно удалить, со всеми E-классами $\mathcal{A}_j \equiv \mathcal{A}_i$, сохраняя теорию $Th(\mathcal{A}_E)$, то $\mathcal{A}_E$ называется *e-простой* или *e-минимальной.* Для структуры $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$ обозначим через $TH(\mathcal{A}')$ множество всех теорий $Th(\mathcal{A}_i)$ E-классов $\mathcal{A}_i$ в $\mathcal{A}'$. По определению, e-минимальная структура $\mathcal{A}'$ состоит из E-классов с минимальным множеством $TH(\mathcal{A}')$. Если $TH(\mathcal{A}')$ является наименьшим для моделей $Th(\mathcal{A}')$, то $\mathcal{A}'$ называется *e-наименьшей.*

Определение 1.2.6. [6] Пусть $\overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ — множество всех полных элементарных теорий реляционного языка Σ. Для множества $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ обозначим через $Cl_E(\mathcal{T})$ множество всех теорий $Th(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — структура некоторого E-класса в $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{A}_E$, $\mathcal{A}_E = Comb_E(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, $Th(\mathcal{A}_i) \in \mathcal{T}$. Как обычно, если $\mathcal{T} = Cl_E(\mathcal{T})$, то $\mathcal{T}$ называется *E-замкнутым.* Оператор Cl_E E-замыкания может быть естественным образом расширен до классов $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$, где $\overline{\mathcal{T}}$ — объединение всех $\overline{\mathcal{T}}_\Sigma$ следующим образом: $Cl_E(\mathcal{T})$ — объединение всех $Cl_E(\mathcal{T}_0)$ для подмножеств $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$, где новые символы языка относительно теорий в $\mathcal{T}_0$ является пустым.

Определение 1.2.7. [6] Для множества $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}}$ теорий на языке Σ и для предложения φ с $\Sigma(\varphi) \subseteq \Sigma$ обозначим через $\mathcal{T}_\varphi$ множество $\{T \in \mathcal{T} \mid \varphi \in T\}$. Любое множество $\mathcal{T}_\varphi$ называется φ-*окрестностью* или просто *окрестностью* для $\mathcal{T}$ или *(φ-)определимым* подмножеством $\mathcal{T}$. Множество $\mathcal{T}_\varphi$ также называется *определимым(по формуле или предложением φ)* относительно $\mathcal{T}$, или *определимым-$\mathcal{T}$-(предложением)* или просто *s-определимым.*

Предложение 1.2.8. [6] *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство полных теорий языка Σ. Тогда $Cl_E(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ для конечного $\mathcal{T}$ и для бесконечного $\mathcal{T}$, теория T принадлежит $Cl_E(\mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда T является полной теорией языка Σ и $T \in \mathcal{T}$, или $T \notin \mathcal{T}$ и для любой формулы $\varphi \in T$ множество $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно.*

Если T является точкой накопления для $\mathcal{T}$, то мы также говорим, что T является *точкой накопления* для $Cl_E(\mathcal{T})$.

Теорема 1.2.9. [6] *Для любых семейств $\mathcal{T}_0$,$\mathcal{T}_1$ полных теорий, $Cl_E(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1) = Cl_E(\mathcal{T}_0) \cup Cl_E(\mathcal{T}_1)$.*

Определение 1.2.10. [6] Пусть $\mathcal{T}_0$ — замкнутое множество в топологическом пространстве $(\mathcal{T},\mathcal{O}_E(\mathcal{T}))$, где $\mathcal{O}_E(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T} \setminus Cl_E(\mathcal{T}') \mid \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}\}$. Подмножество $\mathcal{T}'_0 \subseteq \mathcal{T}_0$ называется *генерирующим*, если $\mathcal{T}_0 = Cl_E(\mathcal{T}'_0)$. Генерирующее множество $\mathcal{T}'_0$ (для $\mathcal{T}_0$) *минимален*, если $\mathcal{T}'_0$ не содержит подходящих генерирующих подмножеств. Минимальное генерирующее множество $\mathcal{T}'_0$ является *наименьшим*, если $\mathcal{T}'_0$ содержится в каждом генерирующем множестве для $\mathcal{T}_0$.

Теорема 1.2.11. [6] *Если $\mathcal{T}'_0$ является генерирующим множеством для E-замкнутого множества $\mathcal{T}_0$, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{T}'_0$ — наименьшее генерирующее множество для $\mathcal{T}_0$;*

(2) *$\mathcal{T}'_0$ — минимальнее генерирующее множество для $\mathcal{T}_0$;*

(3) *любая теория в $\mathcal{T}'_0$ изолирована некоторым множеством $(\mathcal{T}'_0)_\varphi$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}'_0$ существует $\varphi \in T$ такое, что $(\mathcal{T}'_0)_\varphi = \{T\}$;*

(4) *любая теория в $\mathcal{T}'_0$ изолирована некоторым множеством $(\mathcal{T}_0)_\varphi$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}'_0$ существует такое $\varphi \in T$, что $(\mathcal{T}_0)_\varphi = \{T\}$.*

1.2.1 Сведения из теории аппроксимаций и теории моделей псевдоконечных структур

В работе Дж. Акса [33] впервые было определено понятие псевдоконечности. Полученные на сегодняшний день фундаментальные работы для псевдоконечных структур напрямую зависят от результатов Дж. Акса.

Определение 1.2.12. [33; 55] Σ-структура $\mathcal{M}$ называется *псевдоконечной*, если для всех Σ-предложений φ из $\mathcal{M} \models \varphi$ следует, что существует конечная $\mathcal{M}_0$ такая, что $\mathcal{M}_0 \models \varphi$. Структура $\mathcal{M}$ *строго псевдоконечна*, если $\mathcal{M}$ псевдоконечна и бесконечно. Теория $T = Th(\mathcal{M})$ строго псевдоконечной структуры $\mathcal{M}$ называется псевдоконечной.

Непротиворечивая Σ-теория T *слабо псевдоконечна*, если всякий раз, когда $T \models \varphi$, то φ истинна в некоторой конечной структуре (не обязательно модели T).

Теория T *сильно псевдоконечна*, если всякий раз, когда φ совместно с T, существует конечная модель $\mathcal{M}_0$ такая, что $\mathcal{M}_0 \models \varphi$.

Например, теория пустой сигнатуры слабо псевдоконечна, но не сильно псевдоконечна.

Теорема 1.2.13 [33], (Ax,1968) *Поле F является* псевдоконечным *тогда и только тогда, когда выполняются все следующие условия:*

(i) *F является совершенным;*

(ii) *F квазиконечно (то есть внутри фиксированного алгебраического замыкания, F имеет единственное расширение каждой конечной степени);*

(iii) *F псевдо-алгебраически замкнуто (PAC), т. е. каждое абсолютно неприводимое многообразие, определенное над F, имеет F-рациональную точку.*

Фиксируя язык Σ, обозначим через T_f общую теорию всех конечных Σ-структур. То есть $\varphi \in T_f$ тогда и только тогда, когда φ истинно для любой конечной Σ-структуры.

Существуют и другие, эквивалентные определения псевдоконечности, о чем свидетельствует следующий результат:

Предложение 1.2.14 [14; 33] *Зафиксируем язык Σ и Σ-структуру $\mathcal{M}$. Тогда следующие эквиваленты:*

1. *Σ-структура $\mathcal{M}$ псевдоконечна;*

2. $\mathcal{M} \models T_f$

3. *$\mathcal{M}$ элементарно эквивалентно ультрапроизведению конечных Σ-структур.*

Предложение 1.2.15 [14; 33] *Пусть $\mathcal{M}$ — псевдоконечная структура, а $f : M^k \to M^k$ — определимая функция. Тогда f инъективна тогда и только тогда, когда f сюръективна.*

Определение 1.2.16. [11] Пусть $\mathcal{T}$ — семейство теорий, а T — теория, $T \notin \mathcal{T}$. Теория T называется *$\mathcal{T}$-аппроксимируемой* или *аппроксимируемой по $\mathcal{T}$* или *$\mathcal{T}$-аппроксимируемый* или *псевдо-$\mathcal{T}$-теорией*, если для любой формулы $\varphi \in T$ существует $T' \in \mathcal{T}$ такое, что $\varphi \in T'$.

Если T $\mathcal{T}$-аппроксимируется, то $\mathcal{T}$ называется *аппроксимирующим семейством* для T, теории $T' \in \mathcal{T}$ являются *аппроксимациями* для T, а T является *точкой накопления* для $\mathcal{T}$. Аппроксимирующее семейство $\mathcal{T}$ называется *e-минимальным*, если для любого предложения $\varphi \in \Sigma(T)$, $\mathcal{T}_\varphi$ конечна или $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ конечна.

Определение 1.2.17. [11] Для семейства $\mathcal{T}$ теория T является *$\mathcal{T}$-конечно аксиоматизируемой* или *конечно-аксиоматизируемой относительно $\mathcal{T}$* или *конечно-аксиоматизируемой по $\mathcal{T}$*, если $\mathcal{T}_\varphi = \{T\}$ для некоторого $\Sigma(\mathcal{T})$-предложений φ.

В [11] показано, что любое e-минимальное семейство $\mathcal{T}$ имеет единственную точку накопления T относительно окрестностей $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T} \cup \{T\}$ также называется *e-минимальным.*

Теорема 1.2.18. [11] *Семейство теорий $\mathcal{T}$ содержит аппроксимирующее подсемейство тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ бесконечно.*

Обозначим через $\overline{\mathcal{T}}$ класс всех полных элементарных теорий данного языка Σ, через $\overline{\mathcal{T}}_{fin}$ подкласс $\overline{\mathcal{T}}$, состоящий из всех теорий с конечными моделями.

Предложение 1.2.19. [11] *Для любой теории T языка Σ следующие условия эквивалентны:*

(1) *T псевдоконечна;*

(2) *T является $\overline{\mathcal{T}}_{fin}$-аппроксимируемой;*

(3) $T \in Cl_E(\overline{\mathcal{T}}_{fin}) \setminus \overline{\mathcal{T}}_{fin}$.

1.2.2 Ранги для семейств полных теорий

В работе С.В. Судоплатова индуктивно определен *ранг* $RS(\cdot)$ [12] для семейств теорий, аналогичный рангу Морли [3], и иерархия по этим рангам следующим образом.

Определение 1.2.20. [12] Для пустого семейства $\mathcal{T}$ полагаем ранг $RS(\mathcal{T}) = -1$, для конечных непустых семейств $\mathcal{T}$ полагаем $RS(\mathcal{T}) = 0$ и для бесконечных семейств $\mathcal{T}$ — $RS(\mathcal{T}) \geqslant 1$.

Для семейства $\mathcal{T}$ и ординала $\alpha = \beta + 1$ полагаем $RS(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$, если есть попарно несовместные $\Sigma(\mathcal{T})$ -предложения φ_n, $n \in \omega$, такие, что $RS(\mathcal{T}_{\varphi_n}) \geqslant \beta$, $n \in \omega$.

Если α — предельный ординал, то $RS(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$, если $RS(\mathcal{T}) \geqslant \beta$ для любого $\beta < \alpha$.

Полагаем $RS(\mathcal{T}) = \alpha$, если $RS(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$ и $RS(\mathcal{T}) \ngeqslant \alpha + 1$.

Если $RS(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$ для любого α, полагаем $RS(\mathcal{T}) = \infty$.

Семейство $\mathcal{T}$ называется *e-тотально трансцендентным* или *тотально трансцендентным*, если $RS(\mathcal{T})$ является ординалом.

Предложение 1.2.21. [12] *Если бесконечное семейство $\mathcal{T}$ не имеет e-минимальных подсемейств $\mathcal{T}_\varphi$, то $\mathcal{T}$ не является e-тотально трансцендентным.*

Если $\mathcal{T}$ e-тотально трансцендентно, то $RS(\mathcal{T}) = \alpha \geqslant 0$, определим *степень* $ds(\mathcal{T})$ $\mathcal{T}$ как максимальное число попарно несовместных предложений φ_i таких, что $RS(\mathcal{T}_{\varphi_i}) = \alpha$.

Предложение 1.2.22. [12] *Семейство $\mathcal{T}$ e-минимально тогда и только тогда, когда $RS(\mathcal{T}) = 1$ и $ds(\mathcal{T}) = 1$.*

Предложение 1.2.23. [12] *Для любого семейства $\mathcal{T}$, $RS(\mathcal{T}) = RS(Cl_E(\mathcal{T}))$, а если $\mathcal{T}$ — непусто и e-тотально трансцендентно, то $ds(\mathcal{T}) = ds(Cl_E(\mathcal{T}))$.*

Аналогично [3] для непустого семейства $\mathcal{T}$ обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ булеву алгебру, состоящую из всех подсемейств $\mathcal{T}_\varphi$, где φ —предложения на языке $\Sigma(\mathcal{T})$.

Следуя [3], мы видим, что $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ является суператомным [78; 79] для любого e-тотально трансцендентного $\mathcal{T}$ с хорошо упорядоченными цепями. И наоборот, имея суператомную $\mathcal{B}(\mathcal{T})$, мы постепенно определим ординалы $RS(\mathcal{T}_\varphi)$ для $\mathcal{T}_\varphi$, подразумевая, что $\mathcal{T}$ является e-тотально трансцендентным. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.24. [3; 12] *Непустое семейство $\mathcal{T}$ является e-тотально трансцендентным тогда и только тогда, когда булева алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ является суператомной.*

Напомним определение ранга Кантора-Бендиксона.

Определение 1.2.25. Ранг определяется по индукции на элементах топологического пространства X: $CB_X(p) \geqslant 0$ для всех $p \in X$; $CB_X(p) \geqslant \alpha$ тогда и только тогда, когда для любого $\beta < \alpha$, p является точкой накопления точек CB_X-ранга не менее β. $CB_X(p) = \alpha$ тогда и только тогда, когда оба $CB_X(p) \geqslant \alpha$ и $CB_X(p) \ngeqslant \alpha + 1$ выполняются; если такого ординала α не существует, то $CB_X(p) = \infty$. Изолированные точки X — это как раз те, которые имеют ранг 0, точки ранга 1 — это те, которые изолированы в подпространстве всех неизолированных точек и т.д. Для непустого $C \subseteq X$ определим $CB_X(C) = \sup\{CB_X(p) \mid p \in C\}$; таким образом определяется $CB_X(X)$ и выполняется $CB_X(\{p\}) = CB_X(p)$. Если X компактно, а C замкнуто в X, то достигается sup: $CB_X(C)$ — максимальное значение $CB_X(p)$ для $p \in C$; в C имеется бесконечно много точек максимального ранга, и число таких точек — *CB_X-степень C*, обозначаемая через $n_X(C)$.

Если X счетно и компактно, то $CB_X(X)$ является счетным ординалом, и каждое замкнутое подмножество имеет ординально-значный ранг и конечная CB_X-степень $n_X(X) \in \omega \setminus \{0\}$.

Для любого ординала α множество $\{p \in X \mid CB_X(p) \geqslant \alpha\}$ называется α-й *CB-производной* X_α из X.

Элементы $p \in X$ с $CB_X(p) = \infty$ образуют *совершенное ядро* X_∞ из X. Ясно, что $X_\alpha \supseteq X_{\alpha+1}$, $\alpha \in Ord$ и $X_\infty = \bigcap\limits_{\alpha \in Ord} X_\alpha$.

Аналогично, для нетривиальной суператомной булевой алгебры $\mathcal{A}$ характеристики $CB_\mathcal{A}(A), n_\mathcal{A}(A)$ и $CB_\mathcal{A}(p)$ для $p \in A$ определяются [79], начиная с атомных элементов, являющихся изолированными точками. Следуя [79], $CB_\mathcal{A}(A)$ и $n_\mathcal{A}(A)$ называются *инвариантами Кантора–Бендиксона* или *CB-инвариантами* алгебры $\mathcal{A}$.

Теорема 1.2.26 [79]. *Счетные суператомные булевы алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые CB-инварианты.*

В силу теоремы 1.2.24 любое e-тотально трансцендентное семейство T определяет суператомную булеву алгебру $\mathcal{B}(\mathcal{T})$, и шаг за шагом легко заметить, что $RS(\mathcal{T}) = CB_{\mathcal{B}(\mathcal{T})}(B(\mathcal{T})), ds(\mathcal{T}) = n_{\mathcal{B}(\mathcal{T})}(B(\mathcal{T}))$, т. е. пара $(RS(\mathcal{T}), ds(\mathcal{T}))$ состоит из CB-инвариантов для $\mathcal{B}(\mathcal{T})$.

В частности, по теореме 1.2.26 для любого счетного e-тотально трансцендентного семейства $\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{T})$ однозначно с точностью до изоморфизма определяется парой $(RS(\mathcal{T}), ds(\mathcal{T}))$ CB-инвариантов.

По определению для любого e-тотально трансцендентного семейства $\mathcal{T}$ каждая теория $T \in \mathcal{T}$ получает CB-ранга $CB_{\mathcal{T}}(T)$, начиная с $\mathcal{T}$-изолированных точек T_0, $CB_{\mathcal{T}}(T_0) = 0$. Обозначим значения $CB_{\mathcal{T}}(T)$ через $RS_{\mathcal{T}}(T)$ как ранг для точки T в топологическом пространстве над $\mathcal{T}$, которая определяется относительно $\Sigma(\mathcal{T})$-предложений.

Определение 1.2.27. [12] Пусть α — ординал. Семейство $\mathcal{T}$ ранга α называется *α-минимальным*, если для любого предложения $\varphi \in \Sigma(T)$, $RS(\mathcal{T}_\varphi) < \alpha$ или $RS(\mathcal{T}_{\neg\varphi}) < \alpha$.

Предложение 1.2.28. [12] (1) *Семейство $\mathcal{T}$ является 0-минимальным тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ является одноэлементным.*

(2) *Семейство $\mathcal{T}$ — 1-минимально тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ — e-минимально.*

(3) *Для любого ординала α семейство $\mathcal{T}$ α-минимально тогда и только тогда, когда $RS(\mathcal{T}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}) = 1$.*

Предложение 1.2.29. [12] *Для любого семейства $\mathcal{T}$, $RS(\mathcal{T}) = \alpha$, причем $ds(\mathcal{T}) = n$, если и только если $\mathcal{T}$ представлен в виде непересекающегося(дизъюнктного) объединения подсемейств $\mathcal{T}_{\varphi_1}, \ldots, \mathcal{T}_{\varphi_n}$, для некоторых попарно несовместных предложений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, такой, что каждая $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ является α-минимальной.*

Следующая теорема характеризует E-замыкания с континуальным множеством теорий в терминах e-спектров и значений RS-ранга для семейства полных теорий счетного языка.

Теорема 1.2.30. [12]. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ полных теорий счетного языка следующие условия эквивалентны:*

(1) $|Cl_E(\mathcal{T})| = 2^\omega$;

(2) $e\text{-}Sp(\mathcal{T}) = 2^\omega$;

(3) $RS(\mathcal{T}) = \infty$.

Глава 2. Определимые подсемейства полных теорий

2.1 Ранги для семейств теорий в зависимости от заданных языков

Пусть Σ — язык. Через $\mathcal{T}_\Sigma$ обозначим семейство всех теорий языка Σ. Если Σ содержит функциональные символы f, то $\mathcal{T}_\Sigma$ является семейством всех теорий языка Σ', которое получается заменой всех n-арных символов f на $(n+1)$-арифметические предикатные символы R_f, интерпретированные $R_f = \{(\bar{a},b) \mid f(\bar{a}) = b\}$.

Теорема 2.1.1. *Для любого языка Σ семейство $\mathcal{T}_\Sigma$ является e-минимальным тогда и только тогда, когда $\Sigma = \varnothing$ или Σ состоит из одного константного символа.*

Доказательство. Если $\Sigma = \varnothing$ или Σ состоит из одного константного символа, то $\mathcal{T}_\Sigma$ счетно и состоит из теорий T_n с n-элементными моделями, $n \in \omega\backslash 0$ и теории T_∞ с бесконечными моделями. Теории T_n конечно аксиоматизируемы предложениями, свидетельствующими о мощностях моделей, а T_∞ — уникальная точка накопления для $\mathcal{T}_\Sigma$. Таким образом, $\mathcal{T}_\Sigma$ является e-минимальным.

Теперь предположим, что $\Sigma \neq \varnothing$ и не исчерпывается одним константным символом. Ниже мы рассмотрим все возможные случаи.

Если Σ имеет реляционный символ P, то $\mathcal{T}_\Sigma$ делится на бесконечно определимые части: с пустым P и с непустым P. Поэтому существует предложение φ с бесконечным $(\mathcal{T}_\Sigma)_\varphi$ и бесконечным $(\mathcal{T}_\Sigma)_{\neg\varphi}$. Следовательно, $\mathcal{T}_\Sigma$ не является e-минимальным.

Если Σ имеет по крайней мере два константных символа c_1 и c_2, то семейство $\mathcal{T}_\Sigma$ делится на две бесконечные части: $c_1 = c_2$ и $c_1 \neq c_2$. Это означает, что снова $\mathcal{T}_\Sigma$ не является e-минимальным.

Наконец, если Σ содержит n-арный функциональный символ $f, n \geqslant 1$, то $\mathcal{T}_\Sigma$ делится на две бесконечные части: с одинаковым f для каждого элемента $a : f(a,\ldots,a) = a$ и с $f(a,\ldots,a) \neq a$ для некоторого a. Это означает, что снова $\mathcal{T}_\Sigma$ не является e-минимальным.□

Согласно предложениям 1.2.28 и 1.2.29 каждая теория T в e-минимальном $\mathcal{T}_\Sigma$ имеет $RS_{\mathcal{T}_\Sigma}(T) \leqslant 1$, причем единственная теория имеет RS-ранг 1. Здесь, следуя теореме 2.1.1, $RS_{\mathcal{T}_\Sigma}(T) = 1$ тогда и только тогда, когда T имеет бесконечное число моделей.

Предложение 2.1.2. *Если Σ является языком 0-арных предикатов, то либо $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 1$ с $ds(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^n$, если Σ состоит из $n \in \omega$ символов или $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, если Σ имеет бесконечное число символов.*

Доказательство. Если Σ состоит из $n \in \omega$ 0-арных предикатов $P_1, \ldots, P_n$, то $\mathcal{T}_\Sigma$ имеет 2^n точек накопления T_i таких, что каждый T_i имеет бесконечные модели и $(P_1, \ldots, P_n)$ имеет значения $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0,1\}^n$.

Если Σ состоит из бесконечного множества 0-арных предикатов P_i, то существует бесконечное 2-дерево [80], образованное независимыми значениями для P_i в $\{0,1\}$, свидетельствуя о том, что не существует e-минимальных подсемейств $\mathcal{T}_\varphi$ и порождающий $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$ по предложению 1.2.21. □

Используя предложение 2.1.2, тотально трансцендентное семейство $\mathcal{T}_\Sigma$ для языка Σ из n 0-арных предикатов имеет 2^n теорий RS-ранга 1, каждая из которых имеет бесконечные модели.

Предложение 2.1.3. *Если Σ — язык 0-арных и унарных предикатов, с хотя бы одним унарным символом P, то либо $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^k$ с $ds(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^m$, если Σ состоит из $k \in \omega$ унарных символов и $m \in \omega$ 0-арных предикатов, или $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, если Σ имеет бесконечное число символов.*

Доказательство. Если Σ содержит $k \in \omega$ унарные символы P_i, то универсумы можно разделить на 2^k частей по P_i так, чтобы мощности этих частей могли варьироваться от 0 до бесконечности. Таким образом, варьируя конечные мощности частей, мы получаем бесконечно много попарно несовместимых предложений, позволяющих варьировать мощности других частей. Продолжая процесс для оставшихся частей, мы имеем 2^n шагов, образующие $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^k$. Имея $m \in \omega$ 0-арные предикаты Q_j, предложения, свидетельствующие о $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^k$, подразумеваются 2^m попарно несосовместными предложениями, описывающими значения для Q_j. Таким образом, $ds(\mathcal{T}_\Sigma) = 2^m$.

Если Σ содержит бесконечное число предикатных символов, 0-арных и унарных, мы строим бесконечное 2-дерево предложений, созданных независимыми значениями предикатов. Следовательно, $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, используя предложение 1.2.21. □

В силу предложения 2.1.3 существует 2^m теорий T в $\mathcal{T}_\Sigma$, имеющих максимальную $RS_{\mathcal{T}_\Sigma}(T) = 2^k$. Каждый такой T имеет только бесконечные части относительно предикатов P_i. Также заметим, что $RS_{\mathcal{T}_\Sigma}(T) = s \leqslant 2^k$, если и только если T имеет модели с ровно s бесконечными частями.

Предложение 2.1.4. *Если Σ — язык константных символов, то либо $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 1$ с $ds(\mathcal{T}_\Sigma) = P(n)$, где $P(n)$ — это число разбиений упорядоченных n-элементов, если Σ состоит из символов $n \in \omega$, или $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, если Σ имеет бесконечное число символов.*

Доказательство. Если Σ состоит из константных символов $c_1, \ldots, c_n$, то в предложениях мы можем записать, что эти константы могут сколь угодно совпадать или не совпадать. Предложения $(c_i \approx c_j)^\delta$, $\delta \in \{0,1\}$, определим разбиения множества $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Число $P(n)$ этих разбиений [**SO1**] определяет все возможности для $ds(\mathcal{T}_\Sigma)$. Поскольку все Σ-предложения сводятся к описаниям φ этих разбиений, а также к описаниям ψ из мощностей множеств $\overline{C} = M \setminus C$, где M - универсумы моделей теорий в $\mathcal{T}_\Sigma$, имеем $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 1$, засвидетельствованный ψ, и $ds(\mathcal{T}_\Sigma) = P(n)$, засвидетельствованный φ.

Если Σ содержит бесконечно много константных символов, мы строим бесконечное 2-дерево предложений, образованных независимыми (в) равенствами констант. Следовательно, $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, используя предложение 1.2.21. $\square$

Согласно предложению 2.1.4, для $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 1$ существует $P(n)$ теорий T в $\mathcal{T}_\Sigma$ с $RS_{\mathcal{T}_\Sigma}(T) = 1$. Для каждого такого T характерно существование бесконечных моделей.

Предложение 2.1.5. *Если Σ — язык 0-арных и унарных предикатов и константных символов, то либо $RS(\mathcal{T}_\Sigma)$ конечно, если Σ состоит из конечного числа символов, либо $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, если Σ имеет бесконечное число символов.*

Доказательство. Если Σ конечно, то мы можем увеличить $RS(\mathcal{T}_\Sigma)$ до 2^k с помощью унарных предикатов $P_1, \ldots, P_k$ повторяя рассуждения для предложения 2.1.3. Степень $ds(\mathcal{T}_\Sigma)$ ограничена конечным числом возможностей для значений 0-арных предикатов и для разбиений констант, скомбинирующих предложения 2.1.3 и 2.1.4.

Если Σ имеет бесконечно много символов, то оно имеет либо бесконечно много 0-арных предикатов, либо унарных предикатов, либо константных символов. В любом случае можно построить бесконечное 2-дерево, как и для предложений 2.1.3 и 2.1.4, гарантируя $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$. $\square$

Как и выше, RS-ранги для теорий T в тотально трансцендентном семействе $\mathcal{T}_\Sigma$ в предложении 2.1.5 характеризуются количеством бесконечных P_i-частей в моделях T.

Предложение 2.1.6. *Если Σ — язык, содержащий символы m-арных предикатов, для $m \geqslant 2$ или n-арных функциональных символов для $n \geqslant 1$, то $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$.*

Доказательство. Используя аргументы для приведенных выше предложений, достаточно показать, что с бинарным предикатным символом Q или унарным функциональным символом f можно определить бесконечно много независимых определимых подмножеств X_n, $n \in \omega$, из универсумов M для моделей теорий в $\mathcal{T}_\Sigma$, можно кодировать этих множеств X_n даже ациклическими ориентированными графами по наличием путей от некоторых элементов a без прообразов к элементам $b \in X_n$ таких, что (a,b)-путь имеет длину n. Кодируя множества X_n, мы можем образовать бесконечное 2-дерево для элементов из $Y = \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$ таких, что некоторые предложения делят Y на континуум на многие части по (не) существованию путей, имеющих длины n. Существование этого 2-дерева означает, что $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, используя предложение 1.2.21. $\Box$

Замечание 2.1.7. Аргументы для предложения 2.1.6 позволяют ограничить семейства $\mathcal{T}_\Sigma$ бинарными реляционными символами R на семейства $\mathcal{T}_{\{R\},ag}$ в языках графов $\{R\}$, теорий ациклических графов и таких, что $RS(\mathcal{T}_{\{R\},ag}) = \infty$.

Суммируя приведенные выше рассуждения, получаем следующую теорему.

Теорема 2.1.8. *Для любого языка Σ либо $RS(\mathcal{T}_\Sigma)$ конечен, если Σ состоит из конечного числа 0-арных и унарных предикатов, и константных символов или $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$, в противном случае.*

Доказательство. Если Σ состоит из бесконечного множества 0-арных и унарных предикатов и константных символов, то $RS(\mathcal{T}_\Sigma)$ по предложению 2.1.5. В противном случае $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$ по предложениям 2.1.5 и 2.1.6. $\Box$

Техника подсчета рангов $RS(\mathcal{T}_\Sigma)$ может быть применена для семейств $\mathcal{T}_{\Sigma,n}$ всех теорий в языках Σ и имеющих n-элементных моделей $n \in \omega$, а также для семейств $\mathcal{T}_{\Sigma,\infty}$ всех теорий в языках Σ и имеющих бесконечные модели.

Ясно, что для любого языка Σ, $\mathcal{T}_\Sigma = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{T}_{\Sigma,n} \cup \mathcal{T}_{\Sigma,\infty}$. Поэтому по монотонности RS для любого $n \in \omega$:

$$RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) \leqslant RS(\mathcal{T}_\Sigma), \tag{2.1}$$

$$RS(\mathcal{T}_{\Sigma,\infty}) \leqslant RS(\mathcal{T}_\Sigma). \tag{2.2}$$

Используя (2.1) и (2.2), следующие теоремы и их аргументы позволяют считать ранги $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n})$ и $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,\infty})$ в зависимости от Σ.

Теорема 2.1.9. *Для любого языка Σ либо $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = 0$, если Σ конечна или $n = 1$ и Σ имеет конечное число предикатных символов, или $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = \infty$, в противном случае.*

Доказательство. Если Σ конечно, то $\mathcal{T}_{\Sigma,n}$ конечно для любого $n \in \omega$, так как существует конечное число типов изоморфизма для n-элементных структур в языке Σ. Если $n = 1$ и Σ имеет конечное число предикатных символов, то снова существует конечное число типов изоморфизма для 1-элементных структур $\langle A; \Sigma\rangle$, так как существует конечное число возможностей для распределений пустых предикатов, все непустые предикаты полны, все константы имеют одинаковые интерпретации, а все функции одинаковы.

Если Σ имеет бесконечно много предикатных символов P_i, мы можем сформировать бесконечное 2-дерево предложений, позволяющих P_i независимо быть пустым или полным. Если Σ имеет бесконечное число постоянных символов c_i, то для $n \geqslant 2$ и $c_0 \neq c_1$, мы снова можем сформировать бесконечное 2-дерево предложений, позволяющее c_i независимо быть равным c_0 или c_1. Наконец, если Σ имеет бесконечно много функциональных символов f_i, то при $n \geqslant 2$ мы можем сформировать бесконечное 2-дерево предложений, позволяющее f_i быть (не) идентичным. Каждая возможность выше сразу следует $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = \infty$. □

Теорема 2.1.10. *Для любого языка Σ либо $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,\infty})$ конечен, если Σ конечен и не имеет предикатных символов арности $m \geqslant 2$, а также без функциональных символов арности $n \geqslant 1$ или $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = \infty$, в противном случае.*

Доказательство. Пусть Σ конечна и не имеет предикатных символов арности $m \geqslant 2$, а также без функциональных символов арности $n \geqslant 1$, т.е. содержит только конечное число 0-арных и унарных предикатных символов, а также конечное число константных символов. Тогда, применяя предложения 2.1.2 – 2.1.5 и неравенство (2.2), мы имеем $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,\infty}) < \omega$.

Если Σ имеет предикатные символы арности $m \geqslant 2$ или функциональные символы арности $n \geqslant 1$, то $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = \infty$ повторяющихся аргументов для предложения 2.1.6 и построения 2-дерева предложений.

Если Σ бесконечно, то в предыдущем случае достаточно рассматривать языки с бесконечным числом 0-арных предикатов или бесконечно много унарных предикатов или бесконечно много констант. В этих случаях мы повторяем аргументы для предложений 2.1.2–2.1.5 и строим 2-деревья предложений, гарантирующих $RS(\mathcal{T}_{\Sigma,n}) = \infty$. $\square$.

Заметим, что, подобно замечанию после предложения 2.1.5, RS-ранги для теорий T в тотально трансцендентном семействе $\mathcal{T}_{\Sigma,\infty}$ характеризуются числом бесконечных частей в моделях T относительно унарных предикатов.

2.2 Исчисления для семейств теорий.

Определение 2.2.1. Для семейства $\mathcal{T}$ и предложений φ и ψ будем говорить, что φ $\mathcal{T}$*-(forces)(форсирует, влечет)выводит* ψ, записывается $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$, если $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_\psi$.

Положим $\vdash_{\mathcal{T}} \psi$ если $\mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}$, и $\varphi \vdash_{\mathcal{T}}$, если $\mathcal{T}_\varphi = \varnothing$. Для $\vdash_{\mathcal{T}} \psi$ мы говорим, что ψ является $\mathcal{T}$*-доказуемым*, а если $\varphi \vdash_{\mathcal{T}}$, то мы говорим, что φ является $\mathcal{T}$*-противоречивым* или $\mathcal{T}$*-несовместимым.*

По определению отношение $\vdash_{\mathcal{T}} \psi$ эквивалентно $\chi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ для любого тождественно истинного предложения χ, а $\varphi \vdash_{\mathcal{T}}$ эквивалентно $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \theta$ для любого тождественно ложного предложения θ. Итак, ниже мы рассмотрим только отношения вида $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$.

Обычные аксиомы и правила исчисления предложений могут быть естественным образом преобразованы для отношений $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$, получающих $\mathcal{T}$*-исчисления*, т. е. исчисления по семействам $\mathcal{T}$.

Ясно, что $\varphi \vdash_{\varnothing} \psi$ для любых предложений φ и ψ. Поэтому существуют предложения φ и ψ такие, что $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$, но $\varphi \nvdash \psi$. Действительно, если φ и ψ - предложения в сигнатуре Σ, удовлетворяющие $\vdash \varphi$ и $\nvdash \psi$, то имеем $\varphi \nvdash \psi$, тогда как $\varphi \vdash_{\varnothing} \psi$. Помимо, для множества $\mathcal{T}_\Sigma$ всех теорий в сигнатуре Σ и для $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_\Sigma)_\psi$ имеем $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$. Кроме того, для любого предложения φ, непринадлежащего теориям в семействе $\mathcal{T}$, т.е. $\mathcal{T}_\varphi = \varnothing$, и для любого предложения ψ имеем $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$.

Следующее очевидное предложение утверждает, что отношение $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ монотонно под $\vdash$ и включение:

Предложение 2.2.2. *Если $\varphi' \vdash \varphi$, $\psi \vdash \psi'$, и $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, то $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ влечет $\varphi' \vdash_{\mathcal{T}'} \psi'$.*

Следующее предложение утверждает конечный характер для отношений $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$.

Предложение 2.2.3. *Для любых предложений φ, ψ и семейства $\mathcal{T}$ теорий следующие условия эквивалентны:*

(1) $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$;

(2) $\varphi \vdash_{\mathcal{T}_0} \psi$ *для любого конечного* $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$*;*

(3) $\varphi \vdash_{\{T\}} \psi$ *для любого одноэлементного* $\{T\} \subseteq \mathcal{T}$*.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (3) выполняются по предложению 2.2.2.

(3) $\Rightarrow$ (1). Ввиду $\varphi \vdash_{\varnothing} \psi$ достаточно показать $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ для непустого $\mathcal{T}$, имеющего $\varphi \vdash_{\{T\}} \psi$ для любого синглтона $\{T\} \subseteq \mathcal{T}$. Но если $T \in \mathcal{T}_\varphi$, то $T \in \{T\}_\varphi$ и, используя $\varphi \vdash_{\{T\}} \psi$, мы получаем $T \in \{T\}_\psi$, подразумевая $T \in \mathcal{T}_\psi$. Таким образом, $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$. $\square$

Предложение 2.2.4. *Для любых предложений φ и ψ в сигнатуре Σ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\varphi \vdash \psi$;

(2) $\varphi \vdash_{\mathcal{T}_\Sigma} \psi$;

(3) $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ *для любого (конечного) семейства (одноэлементного)* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$*;*

(4) $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ *для любого (конечного) семейства (одноэлементного)* $\mathcal{T}$*.*

(5) $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ *для любого* $T \in \mathcal{T}_\Sigma$*.*

Доказательство. (4) $\Rightarrow$ (3) и (3) $\Rightarrow$ (2) очевидны используя предложение 2.2.3.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное, что $\varphi \vdash_{\mathcal{T}_\Sigma} \psi$ и $\varphi \nvdash \psi$. Тогда $\varphi \wedge \neg\psi$ совместны. Расширяя $\{\varphi \wedge \neg\psi\}$ до полной теории T в сигнатуре Σ мы получаем $T \in (\mathcal{T}_\Sigma)_\varphi$ и $T \notin (\mathcal{T}_\Sigma)_\psi$, противоречащие $\varphi \vdash_{\mathcal{T}_\Sigma} \psi$.

(1) $\Rightarrow$ (4). Если $\varphi \vdash \psi$, то для любой теории T с $\varphi \in T$ имеем $\psi \in T$, следовательно, $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_\psi$ для любого семейства $\mathcal{T}$, т. е. $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$.

(3) $\Leftrightarrow$ (5). $\varphi \vdash_{\{T\}} \psi$ означает, что $\varphi \in T$ предполагает $\psi \in T$. Так что, если $\varphi \in T$, то $T \vdash \psi$ полагающий $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. В противном случае, если $\varphi \notin T$, то $\neg\varphi \in T$. Следовательно, мы имеем $\{\varphi,\neg\varphi\} \vdash \psi$ пологающий $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. И наоборот, если предположить, что $\varphi \nvdash_{\{T\}} \psi$ имеем $\varphi \in T$ и $\psi \notin T$, то есть $\neg\psi \in T$. Следовательно, $T \cup \{\varphi\} \nvdash \psi$, поскольку T полная теория и содержащий $\neg\psi$, оно не может вывести ψ, т.е. T не может содержать ψ. $\square$

Определение 2.2.5. Если $\mathcal{T}$ - это семейство теорий, а Φ - множество предложений, то пологаем $\mathcal{T}_\Phi = \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} \mathcal{T}_\varphi$, и множество $\mathcal{T}_\Phi$ называется *определимым (-по типу или -по диаграмму) (множеством* Φ*)* относительно $\mathcal{T}$, или *(диаграмно-)*$\mathcal{T}$*-определимое* или просто *d-определимое.*

По определению имеем следующие свойства:

1. $\mathcal{T}_{\{\varphi\}} = \mathcal{T}_\varphi$.

2. $\mathcal{T}_\Phi = \{T \in \mathcal{T} \mid \Phi \subseteq T\}$.

3. $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $\Phi \subseteq \cap\mathcal{T}$. В частности, $\mathcal{T}_\varnothing = \mathcal{T}$.

4. $\mathcal{T}_{\Phi\cup\Psi} = \mathcal{T}_\Phi \cap \mathcal{T}_\Psi$.

5. $\mathcal{T}_\Phi = (\mathcal{T}_\Phi)_\Psi$ для любого Ψ состоящего из предложений ψ с $\Phi \vdash \psi$. В частности, операция $(\cdot)_\Phi$ идемпотентна: $(\mathcal{T}_\Phi)_\Phi = \mathcal{T}_\Phi$.

6. $\mathcal{T}_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}} = \mathcal{T}_{\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n}$, т.е. определимые множества $\mathcal{T}_\Phi$ по конечными Φ являются определимым по предложению.

7. $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}_\Psi$, где Ψ - замыкание Φ относительно конъюнкции.

По последнему свойству, изучая d-определимые множества, мы обычно будем рассматривать множества Φ, замкнутые относительно конъюнкции. Более того, в силу свойства 5, учитывая d-определимые семейства, мы можем также предположить, что любая Φ замкнуто относительно логических выводов относительно $\vdash$.

8. Для любых множеств Φ и Ψ, содержащих все их логические выводы, $\mathcal{T}_{\Phi\cap\Psi} = \mathcal{T}_\Phi \cup \mathcal{T}_\Psi$.

Действительно, если $T \in \mathcal{T}_{\Phi\cap\Psi}$, то $\Phi \cap \Psi \subseteq T$. Предполагая, что $T \notin \mathcal{T}_\Phi \cup \mathcal{T}_\Psi$, мы имеем $\Phi \nsubseteq T$ и $\Psi \nsubseteq T$. Поэтому существует предложения $\varphi \in \Phi\backslash T$ и $\psi \in \Psi\backslash T$. Тогда $\varphi\vee\psi \notin T$. Но по предположению $\varphi\vee\psi \in \Phi\cap\Psi$ противоречащее $\Phi \cap \Psi \subseteq T$. Наоборот, если $T \in \mathcal{T}_\Phi \cup \mathcal{T}_\Psi$, то $\Phi \subseteq T$ или $\Psi \subseteq T$ полагая $\Phi \cap \Psi \subseteq T$ и $T \in \mathcal{T}_{\Phi\cap\Psi}$.

9. Для любого $T \in \mathcal{T}$ и $\Phi \subseteq T$ с $\Phi \vdash \varphi$ для всех $\varphi \in T$, $\mathcal{T}_\Phi = \{T\}$. Таким образом, любой набор аксиом для T изолирует T в $\mathcal{T}$. В частности, поскольку T является ультрафильтром и аксиоматизирован сам по себе, $\mathcal{T}_T = \{T\}$.

Следующее предложение дает очевидные критерии того, что d-определимые множества являются s-определимыми.

Предложение 2.2.6. *Для любого d-определимого множества $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Phi$ и предложение $\varphi \in \Phi$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{T}$ является s-определимым по φ: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\varphi$;*

(2) *$\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ для любого $\psi \in \Phi$;*

(3) *каждое $\psi \in \Phi$ с $\psi \vdash \varphi$ удовлетворяет $\mathcal{T}_\varphi = \mathcal{T}_\psi$*

(3) *не существует $T \in \mathcal{T}$, содержащего $\varphi \wedge \neg\psi$ для любого $\psi \in \Phi$.*

Предложение φ с $\mathcal{T}_\varphi \neq \varnothing$, удовлетворяющее условиям предложении 2.2.6, называется $\mathcal{T}$*-изолирующим*, $\mathcal{T}$*-главным* или $\mathcal{T}$*-полным* для предложении Φ и Φ называется $\mathcal{T}$*-изолированным* или $\mathcal{T}$*-главным*.

В силу предложении 2.2.4 $\mathcal{T}_\Sigma$-изолирующие предложения являются изолирующим для Φ в обычном смысле. Кроме того, если Φ форсируется некоторым $\varphi \in \Phi$, то для любого семейства $\mathcal{T}$, Φ является $\mathcal{T}$-изолированным, но не наоборот.

Ясно, что каждое d-определимое множество $\mathcal{T}_\Phi$ равно множеству $\mathcal{T}_\Theta$, где $\Theta = \bigwedge \Phi$ с возможной бесконечной конъюнкцией, а $\mathcal{T}_\Theta$ - это множество всех теорий $T \in \mathcal{T}$, содержащих конъюнктивные члены из Θ.

По свойству 8 конечные объединения d-определимых множеств снова d-определимы. Рассматривая бесконечные объединения $\mathcal{T}'$ из d-определимых множеств $\mathcal{T}_{\Phi_i}, i \in I$, мы можем представить их множествами формул с бесконечными дизъюнкциями $\bigvee_{i\in I} \varphi_i, \varphi_i \in \Phi_i$. Мы называем эти объединения $\mathcal{T}'$ как d_∞-определимые множества.

Теперь определимость для подсемейств T может быть расширена для бесконечных объединений, пересечений и их дополнений. Отметим, что, поскольку все одноэлементные $\{T\} \subseteq T$ являются d-определимыми, каждое подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ является d_∞-определимыми.

Соотношения $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ могут быть естественным образом распределены на множества предложений Φ и Ψ, создающих отношения $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$, что влечет $\mathcal{T}_\Phi \subseteq \mathcal{T}_\Psi$.

По предложению 2.2.2 соотношения $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$ снова монотонны:

Предложение 2.2.7. *Если* $\Phi' \vdash \Phi$, $\Psi \vdash \Psi'$ *и* $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, *то из* $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$ *означает* $\Phi' \vdash_{\mathcal{T}'} \Psi'$.

Из Предложений 2.2.3 вытекает следующее:

Предложение 2.2.8. *Для любых множеств* Φ *и* Ψ *предложений и семейства* $\mathcal{T}$ *теорий следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$;

(2) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}_0} \Psi$ *для любого конечного* $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$;

(3) $\Phi \vdash_{\{T\}} \Psi$ *для любого одноэлементного* $\{T\} \subseteq \mathcal{T}$.

Из предложения 2.2.4 немедленно вытекает

Предложение 2.2.9. *Для любых множеств* Φ *и* Ψ *предложений в сигнатуре* Σ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Phi \vdash \Psi$, *т.е. каждое предложение в* Ψ *форсируется некоторой конъюнкцией предложений в* Φ;

(2) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}_\Sigma} \Psi$;

(3) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$ *для любого (конечного) семейства (одноэлементного)* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$;

(4) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$ *для любого (конечного) семейства (одноэлементнного)* $\mathcal{T}$..

Расширяя список критериев $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$, имеем следующее:

Теорема 2.2.10. *Для любых множеств предложений* Φ *и* Ψ *и семейства* $\mathcal{T}$ *теорий следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$;

(2) $\Phi \vdash_{Cl_E(\mathcal{T})} \Psi$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{T} \subseteq Cl_E(\mathcal{T})$, по предложению 2.2.7 имеем (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$. Достаточно показать, что если $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ с $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_\psi$, то $(Cl_E(\mathcal{T}))_\varphi \subseteq (Cl_E(\mathcal{T}))_\psi$. Пусть $T \in (Cl_E(\mathcal{T}))_\varphi$. По условию можно считать, что $T \in Cl_E(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ и, используя предложение 1.2.8, мы имеем бесконечное $\mathcal{T}_\chi$ для любого $\chi \in T$. Поскольку $\varphi \in T$, $(\mathcal{T}_\varphi)_\chi = \mathcal{T}_{\varphi\wedge\chi}$ также бесконечны для любого $\chi \in T$, поэтому $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_\psi$ означает, что все $(\mathcal{T}_\psi)_\chi$ бесконечны. Таким образом, снова по предложению 1.2.8 $T \in Cl_E(\mathcal{T}_\psi) = (Cl_E(\mathcal{T}))_\psi$. $\square$

Из теоремы 2.2.10 немедленно вытекает следующее:

Следствие 2.2.11. *Для любых множеств предложений* Φ *и* Ψ *и семейств теорий* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$, *что* $\mathcal{T}'$ *порождает* $Cl_E(\mathcal{T})$ *и* $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}'' \subseteq Cl_E(\mathcal{T})$, *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$;

(2) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}'} \Psi$;

(3) $\Phi \vdash_{\mathcal{T}''} \Psi$.

Замечание 2.2.12. Отметим, что в общем случае следствие 2.2.11 нельзя расширять на семейства $\mathcal{T}'' \not\subseteq Cl_E(\mathcal{T})$. Действительно, взяв любую теорию $T \notin Cl_E(\mathcal{T})$, мы по предложению 1.2.8 имеем предложение $\chi \in T$ такое, что $(Cl_E(\mathcal{T}))_\chi$ конечно. Поскольку $T \notin (Cl_E(\mathcal{T}))_\chi$ и $(Cl_E(\mathcal{T}))_\chi$ конечно, существует предложение $\theta \in T$ такое, что $(Cl_E(\mathcal{T}))_\theta = \varnothing$. Таким образом, для любого несовместного предложения φ имеем $\theta \vdash_{Cl_E(\mathcal{T})} \varphi$, тогда как $\theta \nvdash_{Cl_E(\mathcal{T})\cup\{T\}} \varphi$. $\square$

Приведенные выше утверждения показывают, что для любого семейства $\mathcal{T}$ существуют *исчисления*, связанные с обычными исчислениями для предложений первого порядка [81], оба для соотношений $\varphi \vdash_{\mathcal{T}} \psi$ и $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$, которые удовлетворяют монотонным свойствам, являются рефлексивными ($\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Phi$) и транзитивными (если $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$ и $\Psi \vdash_{\mathcal{T}} X$, то $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} X$).

Определение 2.2.13. Множества предложений Φ и Ψ называются $\mathcal{T}$ *-эквивалентными*, записанными $\Phi \equiv_{\mathcal{T}} \Psi$, если $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} \Psi$ и $\Psi \vdash_{\mathcal{T}} \Phi$.

Предложения φ и ψ называются $\mathcal{T}$ *-эквивалентными*, записанными $\varphi \equiv_{\mathcal{T}} \psi$, если $\{\varphi\} \equiv_{\mathcal{T}} \{\psi\}$.

Ясно, что отношения $\equiv_{\mathcal{T}}$ являются эквивалентными отношениями как для предложений, так и для множеств предложений.

Из предложения 2.2.9 и теоремы 2.2.10 немедленно вытекает следующее:

Предложение 2.2.14. *Для любых множеств* Φ *и* Ψ *предложений в языке* Σ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Phi \vdash \Psi$ *и* $\Psi \vdash \Phi$, *то есть* Φ *и* Ψ *форсирует друг друга;*

(2) $\Phi \equiv_{\mathcal{T}_\Sigma} \Psi$;

(3) $\Phi \equiv_{\mathcal{T}} \Psi$ *для любого семейства* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$;

(4) $\Phi \equiv_{\mathcal{T}} \Psi$ *для любого семейства* $\mathcal{T}$.

Следствие 2.2.15. *Для любых предложений* φ *и* ψ *в языке* Σ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\varphi \vdash \psi$ и $\psi \vdash \varphi$;

(2) $\varphi \equiv_{\mathcal{T}_\Sigma} \psi$;

(3) $\varphi \equiv_{\mathcal{T}} \psi$ *для любого семейства* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$;

(4) $\varphi \equiv_{\mathcal{T}} \psi$ *для любого семейства* $\mathcal{T}$.

Из теоремы 2.2.10 вытекает

Следствие 2.2.16. *Для любых множеств* Φ *и* Ψ *предложений и семейств* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ *теорий, что* $\mathcal{T}'$ *порождает* $Cl_E(\mathcal{T})$ *и* $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}'' \subseteq Cl_E(\mathcal{T})$, *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Phi \equiv_{\mathcal{T}} \Psi$;

(2) $\Phi \equiv_{\mathcal{T}'} \Psi$;

(3) $\Phi \equiv_{\mathcal{T}''} \Psi$.

2.2.1 Компактность и E-замкнутые семейства

Определение 2.2.17. d-определимое множество $\mathcal{T}_\Phi$ называется *$\mathcal{T}$-совместным*, если $\mathcal{T}_\Phi \neq \varnothing$, а $\mathcal{T}_\Phi$ называется *локально $\mathcal{T}$-совместным*, если для любого конечного $\Phi_0 \subseteq \Phi$, $\mathcal{T}_{\Phi_0}$ является $\mathcal{T}$-совместным.

Ясно, что локально $\mathcal{T}$-совместные $\mathcal{T}$ -главные множества $\mathcal{T}_\Phi$ является $\mathcal{T}$-совместным.

Отметим также, что существуют локально $\mathcal{T}$ -совместные d-определимые множества $\mathcal{T}_\Phi$, которые не являются $\mathcal{T}$-совместными. Действительно, пусть, например, $\mathcal{T}$ — e-минимальное семейство, которое не содержит своей уникальной точки накопления T. Тогда по определению точки накопления $\mathcal{T}_T$ локально $\mathcal{T}$-совместно, тогда как $\mathcal{T}_T = \varnothing$.

Следующая *теорема компактности* показывает, что этот эффект не имеет места для E-замкнутых семейств.

Теорема 2.2.18. *Для любого непустого E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ каждое локально $\mathcal{T}$-совместное d-определимое множество $\mathcal{T}_\Phi$ является $\mathcal{T}$-совместным.*

Доказательство. Если все окрестности $\mathcal{T}_\varphi$, $\varphi \in \Phi$, содержат одну и ту же теорию $T \in \mathcal{T}$, то $\mathcal{T}_\Phi$ является $\mathcal{T}$ -совместным. Таким образом, мы можем предположить, что Φ бесконечна, замкнута относительно конъюнкций, не-$\mathcal{T}$-главной, и для любого $\varphi \in \Phi$, $\mathcal{T}_\varphi$ содержит бесконечно много теорий в $\mathcal{T}$. Теперь пошагово расширим множество Φ до неосновного ультрафильтра T

предложений языка $\Sigma(\mathcal{T})$, чтобы каждый $\psi \in T$ удовлетворял $|\mathcal{T}_\psi| \geqslant \omega$. Применяя предложение 1.2.8, получаем, что $T \in Cl_E(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$, а по $T \supset \Phi$ имеем $T \in \mathcal{T}_\Phi$, т.е. $\mathcal{T}_\Phi$ является $\mathcal{T}$-совместным. $\square$

Теории $T \in \mathcal{T}$, принадлежащие локально $\mathcal{T}$-совместным d-определимым множествам $\mathcal{T}_\Phi$, называются их *реализациями.*

Следующее предложение, наряду с предложением 1.2.8 и компактностью выше, проясняет механизм построения $Cl_E(\mathcal{T})$ через реализации d-определимых подсемейств $\mathcal{T}$.

Предложение 2.2.19. *Для любого семейства $\mathcal{T}$, $Cl_E(\mathcal{T})$ состоит из элементов $\mathcal{T}$ и точек накопления, реализующих локально $\mathcal{T}$-совместные d-определимые множества $\mathcal{T}_\Phi$.*

Доказательство. В силу свойства монотонности в предложении 2.2.7, полагающего $\mathcal{T}_\Phi \supseteq \mathcal{T}_\Psi$ для $\Phi \subseteq \Psi$, достаточно заметить, что для любой теории T, $T \in Cl_E(\mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда T является (единственной) реализацией локально $\mathcal{T}$-совместного d- определимого подсемейство $\mathcal{T}_T$. $\square$

Следующая теорема дает критерий существования d-определяемого семейства, которое не является s-определяемым.

Теорема 2.2.20. *Для любого E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ существует d-определяемое семейство $\mathcal{T}_\Phi$, которое не является s-определяемым тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ бесконечно.*

Доказательство. Если $\mathcal{T}$ конечно, то каждая теория $T \in \mathcal{T}$ изолирована некоторым предложением φ. Таким образом, каждое непустое подсемейство из $\mathcal{T}$ является s-определимым некоторой дизъюнкцией предложений φ. Таким образом, поскольку пустое подсемейство $\mathcal{T}$ является s-определимым по несовместному предложению, то каждое d-определимое семейство $\mathcal{T}_\Phi$ является s-определимым.

Теперь предположим, что $\mathcal{T}$ бесконечно. В силу компактности, поскольку $\mathcal{T}$ — E-замкнуто и бесконечно, множество Φ всех предложений φ такое, что $|\mathcal{T}_{\neg\varphi}| = 1$ является $\mathcal{T}$-совместным. Взяв произвольную теорию $T \in \mathcal{T}_\Phi$, мы получим d-определимое одноэлементное $\mathcal{T}_T = \{T\}$, который не может быть s-определимым по выбору из Φ. $\square$

Замечание 2.2.21. Теорема 2.2.20 не выполняется для семейств $\mathcal{T}$, которые не являются E-замкнутыми. Действительно, возьмем произвольное e-минимальное семейство $\mathcal{T}$, которое не содержит его (единственную) точку накопления T. Повторяя рассуждения для доказательства теоремы 2.2.20, мы найдем множество Φ, локально $\mathcal{T}$ -совместное, но $\mathcal{T}_\Phi = \varnothing$ с учетом $T \notin \mathcal{T}$. Поскольку все s-отклоняемые подсемейства в $\mathcal{T}$ конечны или коконечны, единственной возможностью для нового d-определимого подсемейства $\mathcal{T}$ является $\mathcal{T}_\Phi$. Поскольку $\mathcal{T}_\Phi$ пусто, $\mathcal{T}$ не имеет d-определимых подсемейств, которые не являются s-определимыми. $\square$

2.2.2 Динамика рангов относительно определимых подсемейств теорий

Пусть $\mathcal{T}$ — семейство теорий, Φ — множество предложений, α — ординал $\leqslant RS(\mathcal{T})$ или -1.

Определение 2.2.22. Множество Φ называется α-ранжирующим для $\mathcal{T}$, если $RS(\mathcal{T}_\Phi) = \alpha$. Предложение φ называется *α-ранжирующим* для $\mathcal{T}$, если $RS(\mathcal{T}_{\{\varphi\}}) = \alpha$.

Множество Φ (предложение φ) называется *ранжирующим* для $\mathcal{T}$, если оно является α-ранжирующим для $\mathcal{T}$ с некоторым α.

Для семейства $\mathcal{T}$ языка Σ предложение φ языка Σ называется *$\mathcal{T}$-полным*, если φ изолирует единственную теорию в $\mathcal{T}$, т.е. $\mathcal{T}_\varphi$ является одноэлементным.

Предложение 2.2.23. (1) *Множество Φ (предложение φ) является (-1)-ранжирующим для $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T} = \varnothing$ или Φ (соответственно φ) несовместимо с теориями в $\mathcal{T}$.*

(2) *Множество Φ (предложение φ) является 0-ранжирующим для $\mathcal{T}$, причем $ds(\mathcal{T}_\Phi) = n$, тогда и только тогда, когда Φ (соответственно φ) совместно ровно с некоторыми $n \in \omega \setminus \{0\}$ теорий в $\mathcal{T}$.*

(3) *Любое 0-ранжирующее предложение φ для $\mathcal{T}$, где $ds(\mathcal{T}_\varphi) = n$, $\mathcal{T}$-эквивалентно дизъюнкции n (попарно несовместных) $\mathcal{T}$-полных предложений.*

Доказательство. (1) и (2) сразу следует из определения.

(3) В силу $RS(\mathcal{T}_\varphi) = 0$ и $ds(\mathcal{T}_\varphi) = n$ имеем $\mathcal{T}_\varphi = \{T_1, \ldots, T_n\}$ для некоторых различных теорий $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$. Так как теории T_i различны, то

существуют предложения $\psi_i \in T_i$ такие, что $\neg\psi_i \in T_j$ для $j \neq i$. Таким образом, формулы

$$(\varphi \wedge \psi_1 \wedge \neg\psi_2 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_n),$$

$$\ldots,$$

$$(\varphi \wedge \neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_{n-2} \wedge \psi_{n-1} \wedge \neg\psi_n),$$

$$(\varphi \wedge \neg\psi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_{n-1})$$

являются $\mathcal{T}$-полными, попарно несовместными и такими что их дизъюнкция $\mathcal{T}$-эквивалентна φ. $\Box$

Замечание 2.2.24. По предложению 2.2.23, если $T \in \mathcal{T}$, то $\Phi = T$ является 0-ранжирующим, причем $\mathcal{T}_T = \{T\}$. В более общем смысле, для любых различных $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$ множество $T_1 \vee \ldots \vee T_n = \{\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \mid \varphi_i \in T_i\}$ является 0-ранжирующим, причем $ds(\mathcal{T}_{T_1 \vee \ldots \vee T_n}) = n$.

Как показано в замечании 2.2.24, каждое конечное подмножество $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$ является d-определимым, а предложение 2.2.23 дает характеризацию для $\mathcal{T}_0$ как s-определимых.

Следующая теорема дает характеристику для d-определимости подсемейства $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Теорема 2.2.25. *Подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ является d-определимым в $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}'$ E-замкнуто в $\mathcal{T}$, т.е. $\mathcal{T}' = Cl_E(\mathcal{T}') \cap \mathcal{T}$.*

Доказательство. В силу замечания 2.2.24 можно считать, что $\mathcal{T}'$ бесконечна. Пусть $\mathcal{T}'$ d-определимо, т.е. $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_\Phi$ для некоторого множества Φ. В силу предложения 1.2.8 все теории в $Cl_E(\mathcal{T}')$ содержат множество Φ, т.е. $Cl_E(\mathcal{T}') \cap \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Phi$. Действительно, если теория $T \in Cl_E(\mathcal{T}')$ не содержит предложения $\varphi \in \Phi$, то $\neg\varphi \in T$ и $(\mathcal{T}')_{\neg\varphi} = \varnothing$, что противоречит $T \in Cl_E(\mathcal{T}')$. Поскольку $\mathcal{T}' \subseteq Cl_E(\mathcal{T}') \cap \mathcal{T}$, имеем $\mathcal{T}' = Cl_E(\mathcal{T}') \cap \mathcal{T}$, т.е. Подсемейство $\mathcal{T}'$ E-замкнуто в $\mathcal{T}$.

Пусть теперь подсемейство $\mathcal{T}'$ E-замкнуто в $\mathcal{T}$. Обозначим через Φ множество $\bigcap \mathcal{T}'$, т.е. множество всех $\Sigma(\mathcal{T})$ -предложений, принадлежащих всем теориям в $\mathcal{T}'$. Ясно, что $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_\Phi$. Если $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_\Phi$, т.е. $T \in \mathcal{T}_\Phi \setminus \mathcal{T}'$, то $T \notin Cl_E(\mathcal{T}')$. Применяя предложение 1.2.8, найдем такое предложение $\varphi \in T$, что $(\mathcal{T}')_\varphi$ конечно, скажем, $(\mathcal{T}')_\varphi = \{T_1, \ldots, T_n\}$. Так как $T_i \neq T$, то существуют предложения $\psi_i \in T \setminus T_i$, $i = 1, \ldots, n$. Для предложения $\chi = \varphi \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ имеем $\chi \in T$ and $(\mathcal{T}')_\chi = \varnothing$. Отсюда следует $\neg\chi \in \Phi$, что противоречит $T \in \mathcal{T}_\Phi$. $\Box$

Следующее предложение показывает, что s-определимые подмножества семейства $\mathcal{T}$, свидетельствующие о $RS(\mathcal{T}) = \beta$, создают иерархию α-ранжирующих предложений для всех ординалов $\alpha \leqslant \beta$.

Предложение 2.2.26. *Для любых ординалов $\alpha \leqslant \beta$, если $RS(\mathcal{T}) = \beta$, тогда $RS(\mathcal{T}_\varphi) = \alpha$ для некоторого (α-ранжирующего) предложение φ. Более того, существуют $ds(\mathcal{T})$ попарно $\mathcal{T}$-несовместных β-ранжирующих предложений для $\mathcal{T}$, а если $\alpha < \beta$, то для $\mathcal{T}$ существует бесконечно много попарно несовместных α-ранжирующих предложений.*

Доказательство. Так как булева алгебра $F(\mathcal{T})$ суператомна по теореме 1.2.8, то каждый $\mathcal{T}_\varphi$ принадлежит иерархии относительно ранга $RS(\cdot)$, начиная с одноэлементов, e-минимальных подсемейств и т.д. Таким образом, каждый $\mathcal{T}_\varphi$ получает значение $RS(\mathcal{T}_\varphi) = \alpha$ в этой иерархии, так что все $\alpha \leqslant \beta$ засвидетельствованы некоторым $\mathcal{T}_\varphi$. По определению $RS(\cdot)$, $\mathcal{T}$ можно разделить на $ds(\mathcal{T})$ непересекающиеся части $\mathcal{T}_\varphi$, имеющие ранг β. Опять же по определению, если $\alpha < \beta$, то существует бесконечно много попарно $\mathcal{T}$-несовместных α-ранжирующих предложений для $\mathcal{T}$. $\Box$

В силу предложения 2.2.26 для любого семейства $\mathcal{T}$ с $RS(\mathcal{T}) = \beta \geqslant 0$ возможности для $RS(\mathcal{T}')$ с $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ реализуются посредством s-определимых подмножеств $\mathcal{T}_\varphi$ с $RS(\mathcal{T}_\varphi) = \alpha$ для всех $\alpha \leqslant \beta$. Таким образом, для семейств $\mathcal{T}$, которые не являются e-тотально трансцендентными, возникает следующий естественный вопрос.

Вопрос. *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство с $RS(\mathcal{T}) = \infty$. Каковы RS-возможности для s-определимых / d-определимых подсемейств $\mathcal{T}$?*

Как показано в замечании 2.2.24, каждое конечное подмножество $\mathcal{T}$ является d-определимым и 0-ранжирующим. Поэтому на самом деле возникает вопрос о $\alpha \geqslant 0$ с s-определимыми подсемействами и при $\alpha > 0$ с d-определимыми подсемействами.

Частично отвечая на вопрос, мы замечаем, что, получив s-определимое / d-определимое подсемейство $\mathcal{T}_\beta$ из $\mathcal{T}$ с $RS(\mathcal{T}_\beta) = \beta \geqslant 0$, по предложению 2.2.26 s-определимые / d-определимые подсемейства $\mathcal{T}_\alpha$ из $\mathcal{T}$ с $RS(\mathcal{T}_\alpha) = \alpha$, для всех ординалов $\alpha \leqslant \beta$. Таким образом, требуемые ординалы α образует начальный сегмент.

Иллюстрируя вопрос мы замечаем, что в некоторых более или менее общих случаях возможность $\alpha = 0$ с s-определимыми подсемействами может быть реализована.

Замечание 2.2.27. Если семейство $\mathcal{T}$ имеет α-ранжирующее предложение, то при $\alpha \geqslant 0$ это не означает, что $\mathcal{T}$ является e-тотально трансцендентным. Действительно, любое семейство $\mathcal{T}$, например, функционального языка, e-тотально трансцендентное или не e-тотально трансцендентное, и с теорией T одноэлементной алгебры имеет 0-ранжирующее предложение φ, говорящее, что универсум является одноэлементной. Ясно, что $\mathcal{T}_\varphi = \{T\}$.

В то же время существует множество примеров семейств теорий без непустых s-определимых e-тотально трансцендентных подсемейств. Действительно, если взять, например, семейство $\mathcal{T}_\Sigma$ всех теорий на языке Σ, содержащее бесконечное количество предикатных символов, мы не можем управлять предложением связями между всеми предикатами. В частности, существует, по крайней мере, континуум многих возможностей, произвольно варьирующих пустые / непустые предикаты. Эти вариации дают неограниченные ранги для любых непустых s-определимых подсемейств $\mathcal{T}_\varphi$, подразумевающих $RS(\mathcal{T}_\varphi) = \infty$.

Следующая теорема дает ответ на вопрос для d-определимых подсемейств теорий в счетных языках. Аргументы для этого ответа могут быть естественно распространены для произвольных языков.

Теорема 2.2.28. *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство счетного языка Σ и $RS(\mathcal{T}) = \infty$, $\alpha \in \{0,1\}$, $n \in \omega \setminus \{0\}$. Тогда существует d-определимое подсемейство $\mathcal{T}_\Phi$ такое, что $RS(\mathcal{T}_\Phi) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}_\Phi) = n$.*

Доказательство. Зафиксируем семейство $\mathcal{T}$ счетного языка Σ с $RS(\mathcal{T}) = \infty$, счетным ординалом α и $n \in \omega \setminus \{0\}$. По теореме 2.2.25 достаточно найти E-замкнутое подсемейство $\mathcal{T}'$ в $\mathcal{T}$ с $RS(\mathcal{T}') = 1$ и $ds(\mathcal{T}') = n$.

Если $\alpha = 0$, то $\mathcal{T}'$ существует по замечанию 2.2.24.

Если $\alpha = 1$, возьмем n попарно несовместных предложений φ_i, $i = 1,\ldots,n$, таких что $RS(\mathcal{T}_{\varphi_i}) = \infty$ и для каждого $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ найдем E-замкнутое в $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ (и так в $\mathcal{T}$) e-минимальное подсемейство $\mathcal{T}'_i$ следующим образом. Перечислим множество всех Σ-предложений, которые форсирует φ_i: ψ_{ik}, $k \in \omega$ и постепенно образует $\mathcal{T}'_i$ по отношению к этому перечислению, используя следующие подсемейства $\mathcal{T}_{ik}$ из $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ с $\mathcal{T}_{ik} \supseteq \mathcal{T}_{i,k+1}$.

На начальном этапе, если $\mathcal{T}_{\psi_{i0}}$ коконечен в $\mathcal{T}_{\varphi_i}$, положим $\mathcal{T}_{i0} = \mathcal{T}_{\psi_{i0}}$, если $\mathcal{T}_{\varphi_i} = \mathcal{T}_{\psi_{i0}}$, а $\mathcal{T}_{i0} = \mathcal{T}_{\psi_{i0}} \cup \{T_0\}$, с произвольной теорией $T_0^i \in \mathcal{T}_i \setminus \mathcal{T}_{\psi_{i0}}$, если $\mathcal{T}_i \neq \mathcal{T}_{\psi_{i0}}$. Если $\mathcal{T}_{\psi_{i0}}$ является ко-бесконечным, мы повторяем процесс, заменяя ψ_{i0} на $\varphi_i \wedge \neg\psi_{i0}$: для бесконечного $\mathcal{T}_{\varphi_i \wedge \neg\psi_{i0}}$ вместо $\mathcal{T}_{\psi_{i0}}$.

Пусть на шаге k уже сформировано семейство $\mathcal{T}_{ik}$ с некоторыми теориями $T_0^i, \ldots, T_r^i$ добавлено в семейства $\mathcal{T}_{\psi_{is}}$ или $\mathcal{T}_{\varphi_i \wedge \neg\psi_{is}}$. Теперь рассмотрим предложение $\psi_{i,k+1}$. Если $(\mathcal{T}_{ik})_{\psi_{i,k+1}}$ коконечно в $\mathcal{T}_{ik}$, то положим $\mathcal{T}_{i,k+1} = \mathcal{T}_{ik}$, если $\mathcal{T}_{ik} = (\mathcal{T}_{ik})_{\psi_{i,k+1}}$ по модулю $\{T_0^i, \ldots, T_r^i\}$ и $\mathcal{T}_{i,k+1} = (\mathcal{T}_{ik})_{\psi_{i,k+1}} \cup \{T_{r+1}^i\}$, с произвольной теорией $T_{r+1}^i \in \mathcal{T}_{i,k+1} \setminus ((\mathcal{T}_{ik})_{\psi_{i,k+1}} \cup \{T_0^i, \ldots, T_r^i\})$, если $\mathcal{T}_{ik} \neq (\mathcal{T}_{ik})_{\psi_{i,k+1}}$ по модулю $\{T_0^i, \ldots, T_r^i\}$. Если $(\mathcal{T}_{ik})_{\psi_{i,k+1}}$ ко-бесконечно, мы повторяем процесс для бесконечного $(\mathcal{T}_{ik})_{\varphi_i \wedge \neg\psi_{i,k+1}}$.

По построению подсемейства $\mathcal{T}'_i$, состоящие из теорий $T_0^i, \ldots, T_r^i, \ldots$, бесконечны и не могут быть разделены на две бесконечные части Σ-предложениями. Действительно, $\mathcal{T}'_i$ бесконечно, потому что каждое множество $\{T_0^i, \ldots, T_r^i\}$ расширяется в какой-то мере новой теорией, поскольку $\mathcal{T}_{ik} \neq (\mathcal{T}_{ik})_{\psi_{i,k+1}}$ по модулю $\{T_0^i, \ldots, T_r^i\}$ для некоторого $\psi_{i,k+1}$, отрицая все теории в $\{T_0^i, \ldots, T_r^i\}$ и некоторые теории в $\mathcal{T}_{ik}$. Подсемейства $\mathcal{T}'_i$ являются e-минимальными, поскольку каждое Σ-предложение эквивалентно некоторому ψ_{ik} по модулю φ_i и каждый ψ_{ik} может делить только $\mathcal{T}_{i0}, \ldots, \mathcal{T}_{i,k-1}$ по модулю $\{T_0^i, \ldots, T_r^i\}$.

Таким образом, подсемейства $\mathcal{T}'_i$ в $\mathcal{T}$ является e-минимальным, $i = 1, \ldots, n$. По предложению 1.2.22 имеем $RS(\mathcal{T}'_i) = 1$ и $ds(\mathcal{T}'_i) = 1$, а по предложению 1.2.23 можно считать, что семейства $\mathcal{T}'_i$ E-замкнуты в $\mathcal{T}$. Следовательно, для $\mathcal{T}' = \mathcal{T}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{T}'_n$, d-определимо по теореме 2.2.28, имеем $RS(\mathcal{T}') = 1$ и $ds(\mathcal{T}') = n$. $\square$

Замечание 2.2.29. Обратите внимание, что рассуждения в доказательстве теоремы 2.2.28 не работают при $\alpha \geqslant 2$, поскольку, принимая бесконечно много непересекающихся s-определимых бесконечных подсемейств $\mathcal{T}_{\varphi_i}$, мы не можем гарантировать, что $\varphi_i \not\vdash_{\mathcal{T}} \psi_j$ для бесконечного числа $\mathcal{T}$-непересекающихся предложений ψ_j. Таким образом, построив d-определяемые e-минимальные подсемейства $\mathcal{T}_i$ из $\mathcal{T}_{\varphi_i}$, можно получить $RS\left(\bigcup\limits_i \mathcal{T}_i\right) \geqslant 3$, а не $RS\left(\bigcup\limits_i \mathcal{T}_i\right) = 2$. $\square$

В то же время, построив счетное число d-определимых подсемейств $\mathcal{T}_i$ из $\mathcal{T}_{\varphi i}, i \in \omega$, с попарно несовместным φ_i, мы можем выбрать некоторую бесконечную $I \subseteq \omega$, такую, что точки накопления T_i для $\mathcal{T}_i, i \in I$, образуют e-

минимальное семейство. Таким образом, возможно, ослабив d-определимость, мы получим d_∞-определимое подсемейство $\mathcal{T}' = \bigcup_{i\in I}\mathcal{T}_i$ с $RS(\mathcal{T}') = 2$ и $ds(\mathcal{T}') = 1$. Взяв некоторое n непересекающихся $\mathcal{T}'$, мы получим подсемейство $\mathcal{T}''$, являющиеся объединением $\mathcal{T}'$, с $RS(\mathcal{T}') = 2$ и $ds(\mathcal{T}') = n$.

Теперь мы можем продолжить процесс для больших счетных ординалов α, получая d_∞ подсемейство $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ с $RS(\mathcal{T}^*) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}^*) = n$ для заданного $n \in \omega\backslash\{0\}$. $\square$

Из теоремы 2.2.28 и замечания 2.2.29 вытекает следующее:

Теорема 2.2.30. *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство счетного языка Σ и $RS(\mathcal{T}) = \infty$, α счетный ординал, $n \in \omega\backslash\{0\}$. Тогда существует d_*-определимое подсемейство $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ такое, что $RS(\mathcal{T}^*) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}^*) = n$.*

Пример 2.2.31. Пусть $\mathcal{T}_\Sigma$ - семейство всех теорий счетного языка Σ с $RS(\mathcal{T}^*) = \infty$, скажем, унарных предикатов $Q_n, n \in \omega$. Взяв счетное d-определимое подсемейство $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\Sigma$ с пустыми или полными предикатами Q_n так, что полные предикаты в $\mathcal{T}$ линейно упорядочены, а индексы для полных предикатов образуют бесконечное множество $I \subset \omega$ с бесконечным $\omega\backslash I$, можно предположить, что $\mathcal{T}$ является e -минимальным, которое имеет уникальную точку накопления, свидетельствующую о $RS(\mathcal{T}) = 1$ и $ds(\mathcal{T}) = 1$. Взяв индексы в $\omega\backslash I$, мы можем определить счетное число непересекающихся e-минимальных d-определимых подсемейств $\mathcal{T}_k$ с уникальной точкой накопления для множества всех точек накоплений $\mathcal{T}_k$, свидетельствующие о $RS = 2$ и $ds = 1$. Теперь, применив теорему 2.2.30, мы можем продолжить процесс, получив $RS = \alpha$ и $ds = n$ для произвольного счетного ординала α и $n \in \omega\backslash\{0\}$. $\square$

Определение 2.2.32. α-ранжирующее множество Φ (предложение φ) для $\mathcal{T}$ называется $\mathcal{T}$ *-неприводимым*, если для любого попарно $\mathcal{T}$-несовместного $\Psi, X \supseteq \Phi$, т.е. с $\mathcal{T}_\Psi \cap \mathcal{T}_X$, $RS(\mathcal{T}_\Psi) < \alpha$ или $RS(\mathcal{T}_X) < \alpha$. α-ранжирующее предложение φ для $\mathcal{T}$ называется $\mathcal{T}$ *-неприводимым*, если одноэлементное $\{\varphi\}$ является $\mathcal{T}$ -неприводимым.

Если $\mathcal{T}$ фиксировано, $\mathcal{T}$-неприводимые множества называются *просто неприводимыми.*

По определению каждое $\mathcal{T}$-несогласованное множество Φ с $\mathcal{T}_\Phi = \varnothing$ неприводимо, так же как и синглетоны $\mathcal{T}_\Phi$.

Более того, непустые E-замкнутые семейства $\mathcal{T}_\Phi$ ранга α неприводимы тогда и только тогда, когда $ds(\mathcal{T}_\Phi) = 1$.

Действительно, если $\mathcal{T}_\Phi$ неприводимо, то оно не может быть разделено предложением на две части ранга α, пологающий $ds(\mathcal{T}_\Phi) = 1$. Наоборот, имея $\mathcal{T}$-несовместное $\Psi, X \supseteq \Phi$ с $\mathcal{T}_\Psi \cap \mathcal{T}_X \supseteq \mathcal{T}_\Phi$, $RS(\mathcal{T}_\Psi) = \alpha$ и $RS(\mathcal{T}_X) = \alpha$, по компактности получаем некоторые $\mathcal{T}$-несовместные $\psi \in \Psi$ и $\chi \in X$ такие, что $RS((\mathcal{T}_\Phi)_\psi) = \alpha$ и $RS((\mathcal{T}_\Phi)_\chi) = \alpha$, противоречащие $ds(\mathcal{T}_\Phi) = 1$.

Поскольку каждое семейство $\mathcal{T}$ с $RS(\mathcal{T}) = \alpha \geqslant 0$ имеет конечную степень $ds(\mathcal{T}) = n$, существуют попарно несовместимые предложения $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ такое, что $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\varphi_1} \dot\cup \ldots \dot\cup \mathcal{T}_{\varphi_n}$, $RS(\mathcal{T}_{\varphi_i}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}_{\varphi_i}) = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, все e-тотально трансцендентные E-замкнутые семейства и, в частности, d-определимые α-ранжирующие E-замкнутые семейства сводятся к неприводимым:

Предложение 2.2.33. *Любое e-тотально трансцендентное E-замкнутое семейство $\mathcal{T}$ представляется в виде конечного дизъюнктного объединения s-определимых неприводимых подсемейств ранга $\alpha = RS(\mathcal{T})$.*

2.3 Алгебры для определимых подсемейств теорий

В [12] замечено, что для любого непустого семейства $\mathcal{T}$ множество всех s-определимых подсемейств $\mathcal{T}_\varphi$ образует булеву алгебру $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$, являющуюся алгеброй Линденбаума–Тарского [82; 83], с соотношением $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_\psi$, $0 = \mathcal{T}_\varphi$ для несовместного φ, $1 = \mathcal{T} = \mathcal{T}_{\forall x (x \approx x)}$ и теоретико-множественные операции $\mathcal{T}_\varphi \cup \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\varphi \vee \psi}$, $\mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\varphi \wedge \psi}$, $\overline{\mathcal{T}_\varphi} = \mathcal{T}_{\neg\varphi}$.

Алгебра $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ изоморфна фактору $\mathcal{S}(\Sigma)/\equiv_\mathcal{T}$ алгебры $\mathcal{S}(\Sigma)$ на множестве всех Σ-предложений, с $\Sigma = \Sigma(\mathcal{T})$ и логическими операциями $\vee$, $\wedge$,$\neg$. Этот изоморфизм определяется правилом $\mathcal{T}_\varphi \mapsto \{\psi \in \mathcal{S}(\Sigma) \mid \psi \equiv_\mathcal{T} \varphi\}$, где $\psi \equiv_\mathcal{T} \varphi \Leftrightarrow \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_\varphi$.

Так как всякие разные теории $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ разделены некоторыми непересекающимися окрестностями $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$, все атомные элементы в $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ являются одноэлементными. Поэтому, применяя теорему 1.2.11, мы имеем следующее:

Теорема 2.3.1. *Для любого непустого E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ булева алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ является атомарной тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ имеет наименьшее / минимальное порождающее подсемейство.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ атомарно. Рассмотрим множество всех атомных элементов в $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$, которые, как было отмечено выше, являются одноэлементами и образуют подсемейство $\mathcal{T}_0$ в $\mathcal{T}$, состоящее из всех элементов этих одноэлементов. Мы утверждаем, что $\mathcal{T}_0$ порождает $\mathcal{T}$. Действительно, согласно предложению 1.2.8 достаточно показать, что если $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0$, то для каждого $\varphi \in T$, $(\mathcal{T}_0)_\varphi$ бесконечно. Напротив, если предположить, что для некоторого $\varphi \in T$, $(\mathcal{T}_0)_\varphi$ конечно. Таким образом, мы можем отделить T от $(\mathcal{T}_0)_\varphi$ некоторым предложением $\psi \vdash \varphi$: $T \in \mathcal{T}_\psi$, тогда как $(\mathcal{T}_0)_\psi = \varnothing$. Но $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ является атомным, поэтому существует одноэлемент $\{T_0\} = \mathcal{T}_\chi \subseteq \mathcal{T}_\psi$, с некоторыми $\chi \vdash \psi$. Таким образом, мы имеем $T_0 \in \mathcal{T}_\psi$ и $T_0 \in (\mathcal{T}_0)_\psi$ противоречащие $(\mathcal{T}_0)_\psi = \varnothing$.

Поскольку $\mathcal{T}_0$ порождает $\mathcal{T}$, по теореме 1.2.11 множество $\mathcal{T}_0$ является наименьшим / минимальным порождающим подсемейством $\mathcal{T}$.

Теперь предположим, что $\mathcal{T}$ имеет наименьшее / минимальное порождающее подсемейство $\mathcal{T}_0$. Пусть $\mathcal{T}_\varphi \neq \varnothing$ содержит теорию T. Если $T \in \mathcal{T}_0$, то существует одноэлемент $\mathcal{T}_\psi = \{T\}$, который является атомным элементом при $\mathcal{T}_\varphi$. Если $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0$, то согласно предложению 1.2.8, $\mathcal{T}_\varphi$ содержит бесконечно много теорий в $\mathcal{T}_0$. Итак, снова $\mathcal{T}_\varphi$ имеет атомный элемент $\mathcal{T}_\psi \subseteq \mathcal{T}_\varphi$. $\square$

Теперь мы расширим алгебру $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ до алгебры $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ всех d-определимых подсемейств $\mathcal{T}$. По свойствам 4 и 8 d-определимых множеств алгебра $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ сохраняет операции $\cap$ и $\cup$, тогда как дополнения определяются только для $\mathcal{T}$-главных d-определимых множеств. Следовательно, $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ содержит операции $\cap$ и $\cup$, являющиеся частичной алгеброй относительно $\bar{\ }$. Таким образом, $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ образуют дистрибутивную решетку, частично для $\mathcal{T}$-главных семейств, с дополнениями. Кроме того, в силу свойства 9 каждая алгебра $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ является атомной, содержащей все одноэлементы $\{T\} \subseteq \mathcal{T}$. Ясно, что эти атомарные элементы $\{T\}$ имеют (ко-атомные) дополнения тогда и только тогда, когда они $\mathcal{T}$-изолированы.

В то время как структуры $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ хорошо известны, а также $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ для конечного $\mathcal{T}$ и некоторых дополнительных частных случаев, естественно классифицировать структуры $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ в общем случае.

Частично отвечая на вопрос классификации, мы рассматриваем тотально трансцендентные семейства $\mathcal{T}$ малых рангов. Отметим, что алгебры $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ для этих семейств являются атомарными ввиду теоремы 2.3.1.

Предложение 2.3.2. *Для любого непустого семейства $\mathcal{T}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$;

(2) *булева алгебра $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ состоит из 2^n элементов с n атомами, порождающими эту алгебру;*

(3) *$\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ - булева алгебра, состоящая из 2^n элементов с n атомами, порождающими эту алгебру.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3). Достаточно отметить, что имея $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$, $\mathcal{T}$ состоит из некоторых теорий T_i, $i = 1,\ldots,n$, чьи изолирующие значения порождают как $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$, так и $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ с атомными элементами $\{T_i\}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) очевидна, поскольку в таком случае каждое d-определяемое множество s-определимо.

(2) $\Rightarrow$ (1). Поскольку $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ конечно с n атомными элементами и каждый атомный элемент является одноэлементом, мы имеем $|\mathcal{T}| = n$, дающее $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$. $\Box$

Теорема 2.3.3. *Для любого непустого E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ и $n \in \omega \setminus \{0\}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $RS(\mathcal{T}) = 1$ и $ds(\mathcal{T}) = n$;

(2) *булева алгебра $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ изоморфна прямому произведению n бесконечных булевых алгебр $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n$, каждый из которых генерируется атомными элементами;*

(3) *алгебра $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ содержит n новых атомных элементов относительно $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). По предположению $\mathcal{T}$ делится на n непересекающихся e-минимальных s-определимых подсемейств $\mathcal{T}_{\varphi_1},\ldots,\mathcal{T}_{\varphi_n}$. По e-минимальности булевы алгебры $\mathcal{B}_s\left(\mathcal{T}_{\varphi_i}\right)$ порождаются атомными элементами. Взяв

$$\mathcal{B}_s = \mathcal{B}_s\left(\mathcal{T}_{\varphi_1}\right) \times \ldots \times \mathcal{B}_s\left(\mathcal{T}_{\varphi_n}\right),$$

мы получим булеву алгебру, представляющую все s-определимые подсемейства $\mathcal{T}$ как булевы комбинации (ко) конечных подсемейств $\mathcal{T}_{\varphi_i}$. Поскольку эти логические комбинации также представляют элементы $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$, мы имеем естественный изоморфизм между $\mathcal{B}_s$ и $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Поскольку $\mathcal{T}$ делится на n непересекающихся e-минимальных s-определимых подсемейств $\mathcal{T}_{\varphi_1},\ldots,\mathcal{T}_{\varphi_n}$ для $\mathcal{T}$ существует n точек накопления, и каждый $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ имеет ровно одну из этих точек накопления T_i. Каждый T является d-определимым атомным элементом в $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$, который не принадлежит $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$. Поскольку все одноэлементы $\{T\}$, для $T \in \mathcal{T} \setminus \{T_1,\ldots,T_n\}$, принадлежащие $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$, $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ содержит n новых элементов, порождающих атомы относительно $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ изоморфно прямому произведению n бесконечных булевых алгебр $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n$ которая каждая из них порождена атомными элементами , то она имеет n бесконечных частей, не пересекающихся по модулю $\varnothing$, являющиеся булевыми алгебрами, так что единицы этих алгебр могут быть разделены только на конечные и коконечные части. Это означает, что существуют попарно несовместимые предложения φ такие, что эти части соответствуют e-минимальным s-определимым семействам $\mathcal{T}_{\varphi}$. Более того, поскольку $\mathcal{B}_s(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n$, каждое s-определимое семейство в $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ определяется некоторой логической комбинацией предложений φ и предложений ψ изолирующих атомных элементов. Это означает, что $\mathcal{T}$ разбивается на n непересекающихся e-минимальных s-определимых подсемейств $\mathcal{T}$, порождающих $RS(\mathcal{T}) = 1$ и $ds(\mathcal{T}) = n$.

(3) $\Rightarrow$ (1). По предложению 2.3.2 $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ бесконечно. Поскольку он содержит n новых атомных элементов относительно $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$, в $\mathcal{T}$ есть n теорий, которые не изолированы предложениями. Поскольку каждое бесконечное семейство имеет точку накопления, это означает, что $\mathcal{T}$ разбивается на непересекающиеся e-минимальные s-определимые части, дающие $RS(\mathcal{T}) = 1$ и $ds(\mathcal{T}) = n$. $\square$

Замечание 2.3.4. Каждой алгебре $\mathcal{B}_i$ в теореме 2.3.3 соответствует 1-минимальное семейство, и оно изоморфно объединению направленного вверх семейства конечных алгебр $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ в предложении 2.3.2, в котором мощность этого семейства равна $|\mathcal{B}_i|$. Алгебрам $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ соответствуют конечные подсемейства $\mathcal{T}$ данного семейства $\mathcal{T}'$ теорий, такие что все теории в $\mathcal{T}$ являются $\mathcal{T}'$-изолированными некоторыми предложениями. Здесь есть n теорий в $\mathcal{T}'$ и вне всех $\mathcal{T}$, являющихся неглавными ультрафильтрами относительно $\mathcal{T}'$.

Замечание 2.3.5. Аналогично замечанию 2.3.4 класс алгебр $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ в теореме 2.3.3 содержит направленные вверх семейства, объединения которых порождают алгебры $\mathcal{B}_s(\mathcal{T}_2)$ для a-минимальных, т.е. 2-минимальных семейств $\mathcal{T}_2$, с $RS(\mathcal{T}_2) = 2$ и $ds(\mathcal{T}_2) = 1$. Взяв прямые произведения n алгебр $\mathcal{B}_s(\mathcal{T}_2)$, получим алгебры $\mathcal{B}_s(\mathcal{T}_{2,n})$ для непересекающихся объединений $\mathcal{T}_{2,n}$ 2-минимальных семейств $\mathcal{T}_2$, с $RS(\mathcal{T}_{2,n}) = 2$ и $ds(\mathcal{T}_{2,n}) = n, n \in \omega\setminus\{0\}$.

Теперь мы можем продолжить процесс, чередуя пошаговые объединения восходящих семейств рангов $< \alpha$, получая α-ранжированные алгебры $\mathcal{B}_s(\mathcal{T}_\alpha)$ для α-минимальных семейств $\mathcal{T}_\alpha$ и прямые произведения n алгебр $\mathcal{B}_s(\mathcal{T}_\alpha)$, для a-минимальных семейств $\mathcal{T}_\alpha$, получающие свое непересекающееся объединение $\mathcal{T}_{\alpha,n}$ с $RS(\mathcal{T}_{\alpha,n}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}_{\alpha,n}) = n, n \in \omega\setminus\{0\}$.

Здесь каждый шаг от $\mathcal{T}_\beta, \beta < \alpha$ до $\mathcal{T}_{\alpha,n}$ создает n новых атомных элементов для $\mathcal{B}_d(\mathcal{T}_{\alpha,n})$, так что эти новые элементы имеют CB-ранг α и представляют собой беспринципные ультрафильтры относительно элементов рангов $< \alpha$.

Собирая рассуждения выше, мы обобщаем теорему 2.3.3 для произвольного e-тотально трансцендентного E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$:

Теорема 2.3.6. *Для любого непустого E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$, ординала $\alpha \geqslant 1$ и $n \in \omega\setminus\{0\}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $RS(\mathcal{T}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}) = n$;

(2) *булева алгебра $\mathcal{B}_s(\mathcal{T})$ изоморфна прямому произведению n булевых алгебр $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$, каждый из которых порожден элементами рангов $< \alpha$ такими, что каждый $\mathcal{B}_n$ содержит бесконечно много элементов каждого ранга $\beta < \alpha$;*

(3) *алгебра $\mathcal{B}_d(\mathcal{T})$ состоит из бесконечного числа атомных элементов каждого ранга $\beta < \alpha, \beta \geqslant 0$ и ровно n атомных элементов ранга α, эти n атомных элементов соответствуют неглавным ультрафильтрам относительно элементов рангов $< \alpha$.*

Глава 3. Топологии, ранги и замыкания для семейств полных теорий

Определение 1.20 естественным образом переносятся на семейства $\mathcal{T}$ теорий различных языков, не обязательно полных. В этом случае имеется некоторое различие для понятия e-минимальности: для полных теорий либо $\mathcal{T}_\varphi$ конечно, либо $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ конечно и ровно одно из этих множеств бесконечно, в то время как для неполных теорий оба множества $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ могут быть конечными, даже пустыми. По определению в любом случае каждое бесконечное подсемейство e-минимального семейства $\mathcal{T}$ снова e-минимально.

Определение 3.1. [81; 84] Теория T называется *позитивной*, если T аксиоматизируется позитивными предложениями, т.е. предложениями, не содержащими символы $\neg$, $\to$.

Предложение 3.2. *Любое бесконечное семейство $\mathcal{T}$ позитивных теорий e-минимально.*

Доказательство. Так как все предложения теорий $T \in \mathcal{T}$ выводятся из позитивных предложений и тавтологий из этих теорий T, достаточно заметить, что для любого позитивного предложения φ окрестность $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ пуста. Воспользуемся индукцией по числу шагов вывода предложений $\psi \in T$ из порождающих позитивных предложений φ и тавтологий, задающих $\neg\psi \notin T$. Если φ — порождающее позитивное предложение или тавтология, то $\neg\varphi \notin T$, поскольку теория T совместна. Для индукционного перехода рассмотрим правила 1–16 [81]. Следуя этим правилам, достаточно рассмотреть переход от $\Gamma,\psi \vdash$ к $\Gamma \vdash \neg\psi$, где $\Gamma \subset T$ и $\psi \in T$. Из совместности теории T следует $\Gamma \nvdash \neg\psi$ и $\neg\psi \notin T$. $\square$

В дальнейшем мы рассмотрим три вида топологической отделимости для семейств теорий $\mathcal{T}$ с семействами $\mathcal{O}$, состоящими из окрестностей $\mathcal{T}_\varphi$. Таким образом будут исследоваться отделимости для гиперграфов $(\mathcal{T},\mathcal{O})$, подобные [85; 86]. Следуя соответствующим определениям, будем называть семейства $\mathcal{T}$ T_i*-пространствами*, T_i*-семействами* для $i \in \{0,1,2\}$. Свойства для гиперграфов $(\mathcal{T},\mathcal{O})$ влекут соответствующие свойства для топологических пространств на $\mathcal{T}$ с базами $\mathcal{O}$.

3.1 Топологии для семейств полных теорий

Предложение 3.1.1. *Любое семейство $\mathcal{T}$ образует T_0-пространство.*

Доказательство. Пусть T и T' — две различные теории из $\mathcal{T}$. Без ограничения общности можно считать, что существует предложение $\varphi \in T$, для которого $\varphi \notin T'$. Тогда $T \in \mathcal{T}_\varphi$ и $T' \notin \mathcal{T}_\varphi$, что свидетельствует о том, что $\mathcal{T}$ является T_0-пространством. $\square$

Предложение 3.1.2. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{T}$ является T_1-пространством;*

(2) *$\mathcal{T}$ не содержит теории T, T', для которых $T \subsetneqq T'$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если $\mathcal{T}$ является T_1-пространством, то для любых различных теорий $T{,}T' \in \mathcal{T}$ существуют окрестности $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_\psi$ такие, что $T \in \mathcal{T}_\varphi \setminus \mathcal{T}_\psi$ и $T' \in \mathcal{T}_\psi \setminus \mathcal{T}_\varphi$. Следовательно, $\varphi \in T \setminus T'$ и $\psi \in T' \setminus T$, откуда вытекает, что не выполняется ни условие $T \subsetneqq T'$, ни условие $T' \subsetneqq T$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если $T \subsetneqq T'$ для теорий $T{,}T' \in \mathcal{T}$, то не существует предложений $\varphi \in T \setminus T'$. Тогда T не принадлежит окрестностям, отделяющим T', следовательно, $\mathcal{T}$ не является T_1-пространством. $\square$

Определение 3.1.3. Будем говорить, что семейство $\mathcal{T}$ не содержит *нетривиальных* T_1-подсемейств, если все подсемейства, образующие T_1-пространства, одноэлементны.

Из предложении 3.1.2 непосредственно вытекает:

Следствие 3.1.4. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{T}$ не содержит нетривиальных T_1-подсемейств;*

(2) *$\mathcal{T}$ состоит из теорий, образующих цепь по включению.*

Замечание 3.1.5. Семейства $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ всегда дизъюнктны, для предложений φ, принадлежащих некоторой теории из $\mathcal{T}$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ состоит из совместных теорий относительно их $\Sigma(\varphi)$-ограничений. Действительно, если все теории T из $\mathcal{T}$ совместны, то эти теории содержат не более одного из предложений φ и $\neg\varphi$, откуда следует $\mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_{\neg\varphi} = \varnothing$. В противном случае T содержит одновременно φ и $\neg\varphi$ для любого предложения $\varphi \in Sent(\Sigma(\mathcal{T}))$, тогда $T \in \mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_{\neg\varphi}$. Таким образом, если $\mathcal{T}$ содержит несовместную теорию T

сигнатуры Σ, то T не может отделяться от других теорий из $\mathcal{T}$ посредством Σ-предложений. Единственная возможность отделимости состоит в использовании предложений других сигнатур.

В силу замечания 3.1.5 в дальнейшем будем предполагать, что семейства $\mathcal{T}$ состоят из совместных теорий.

Определение 3.1.6. Пусть $\mathcal{T}$ — семейство теорий. Предложение φ называется *$\mathcal{T}$-совместным*, если $\varphi \in T$ для некоторой $T \in \mathcal{T}$, в противном случае φ называется *$\mathcal{T}$-несовместным.*

Предложение 3.1.7. *T_1-пространство $\mathcal{T}$ является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда для любых различных теорий $T,T' \in \mathcal{T}$ существуют предложения $\varphi \in T$, $\psi \in T'$ такие, что $\varphi \wedge \psi$ является $\mathcal{T}$-несовместным.*

Доказательство. Пусть $T,T' \in \mathcal{T}$ — различные теории. Так как $\mathcal{T}$ является T_1-пространством, то по предложению 3.1.2 существуют предложения $\varphi \in T \setminus T'$ и $\psi \in T' \setminus T$. Если предложения $\varphi \wedge \psi$ всегда $\mathcal{T}$-совместны, то T и T' не отделяются непересекающимися окрестностями $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_\psi$, что противоречит хаусдорфовости семейства $\mathcal{T}$. Обратно, если существуют $\varphi \in T$, $\psi \in T'$, для которых предложение $\varphi \wedge \psi$ $\mathcal{T}$-несовместно, то $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_\psi$ дизъюнктны и отделяют T и T', свидетельствуя о том, что $\mathcal{T}$ хаусдорфово. $\square$

Предложение 3.1.8. *Если семейство $\mathcal{T}$ состоит из теорий T таких, что для некоторой сигнатуры Σ ограничения $T \upharpoonright \Sigma$ полны и оператор $T \mapsto T \upharpoonright \Sigma$ инъективен, то $\mathcal{T}$ хаусдорфово.*

Доказательство. Так как для любых различных теорий $T,T' \in \mathcal{T}$ существует предложение $\varphi \in Sent(\Sigma)$, для которого $\varphi \in T$ и $\neg\varphi \in T'$, то $T \in \mathcal{T}_\varphi$ и $T' \in \mathcal{T}_{\neg\varphi}$ для дизъюнктных окрестностей $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$. Утверждение также непосредственно вытекает из предложения 3.1.7. $\square$

Следствие 3.1.9. *Любое семейство $\mathcal{T}$, состоящее из полных теорий фиксированной сигнатуры Σ хаусдорфово.*

Следующее предложение вытекает из общего топологического факта.

Предложение 3.1.10. *Любое конечное T_1-семейство $\mathcal{T}$ хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть семейство $\mathcal{T}$ состоит из теорий $T^1,\ldots,T^n$. По предложению 3.1.2 каждая теория T^i не содержится в остальных теориях T^j. Тогда существуют предложения $\varphi^i_j \in T^i \setminus T^j$. Обозначив $\bigwedge\limits_{j\neq i} \varphi^i_j$ через ψ^i, заметим, что окрестности $\mathcal{T}_{\psi^i} = \{T^i\}$ свидетельствуют о хаусдорфовости семейства $\mathcal{T}$. $\square$

Определение 3.1.11. Двухэлементное подсемейство $\{T^1,T^2\} \subseteq \mathcal{T}$ называется *хаусдорфовым* (в $\mathcal{T}$), если существуют дизъюнктные окрестности $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_\psi$ такие, что $T^1 \in \mathcal{T}_\varphi$ и $T^2 \in \mathcal{T}_\psi$.

По определению семейство $\mathcal{T}$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда для любых различных теорий $T^1,T^2 \in \mathcal{T}$ подсемейство $\{T^1,T^2\}$ хаусдорфово. Повторяя аргументы для доказательства предложения 3.1.10, получаем:

Предложение 3.1.12. *Если различные теории $T^1,T^2 \in \mathcal{T}$ имеют окрестности $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_\psi$, для которых $T^1 \in \mathcal{T}_\varphi$, $T^2 \in \mathcal{T}_\psi$ и семейство $\mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_\psi$ конечно, то $\{T^1,T^2\}$ хаусдорфово в $\mathcal{T}$.*

В силу предложения 3.1.8 существует много хаусдорфовых семейств $\mathcal{T}$. Более точно, рассмотрев сигнатуру Σ бесконечной мощности λ, получаем 2^λ полных теорий. Беря эти теории, можно сформировать хаусдорфово семейство произвольной мощности.

Доказательство следующего утверждения проясняет механизм построения T_1-семейств, которые не являются хаусдорфовыми.

Предложение 3.1.13. *Существует T_1-семейство $\mathcal{T}$, которое не является хаусдорфовым.*

Доказательство. По предложению 3.1.10. искомое семейство $\mathcal{T}$ должно быть бесконечным, более того, по предложению 3.1.12. для некоторых различных теорий $T^1,T^2 \in \mathcal{T}$ все их окрестности $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_\psi$ с условиями $T^1 \in \mathcal{T}_\varphi$, $T^2 \in \mathcal{T}_\psi$ должны иметь бесконечные пересечения. Теперь рассмотрим некоторую совместную теорию T^0 и расширим ее новыми сигнатурными символами до теорий T^1 и T^2 так, что $\Sigma(T^1)\cap\Sigma(T^2) = \Sigma(T^0)$, $|\Sigma(T^1)\setminus\Sigma(T^0)| \geqslant \omega$, $|\Sigma(T^2)\setminus\Sigma(T^0)| \geqslant \omega$ и обе теории T^1 и T^2 выводятся из T^0. Заметим, что для любых предложений $\varphi \in T^1$ и $\psi \in T^2$ предложение $\varphi \wedge \psi$ совместно. Действительно, так как T^0 порождает обе теории T^1 и T^2 относительно соответствующих сигнатур $\Sigma(T^1)$ и $\Sigma(T^2)$, то оба предложения φ и ψ, как и $\varphi\wedge\psi$, выводятся из некоторой конечной части T^0, Поскольку теория T^0 совместна, эта теория не может влечь несовместное $\varphi\wedge\psi$. Теперь для любого предложения $\varphi\wedge\psi$ рассмотрим теорию $T(\varphi\wedge\psi)$ сигнатуры $\Sigma_{\varphi\wedge\psi} \supsetneqq \Sigma(T^0)\cup\Sigma(\varphi\wedge\psi)$, порожденную множеством $T^0\cup\{\varphi\wedge\psi\}$. В силу конструкции семейство $\mathcal{T} = \{T^1,T^2\} \cup \{T(\varphi \wedge \psi) \mid \varphi \in T^1,\psi \in T^2\}$ содержит теории T^1,T^2 такие, что все их окрестности $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_\psi$ имеют общую теорию $T(\varphi \wedge \psi)$. Таким образом, семейство $\mathcal{T}$ не является хаусдорфовым, в то время как $\mathcal{T}$ является T_1-семейством в силу предложения 3.1.2. Приведенные аргументы могут быть легко модифицированы для семейств теорий фиксированной сигнатуры Σ введением для теорий T^1, T^2, $T(\varphi \wedge \psi)$ новых 0-местных предикатов R^1, R^2, $R^{\varphi \wedge \psi}$ таких, что $T^1 \vdash R^1$, $T^1 \nvdash R^2$, $T^2 \vdash R^2$, $T^2 \nvdash R^1$, $T^1 \nvdash R^{\varphi \wedge \psi}$, $T^2 \nvdash R^{\varphi \wedge \psi}$, $T(\varphi \wedge \psi) \vdash R^{\varphi \wedge \psi}$, $T(\varphi \wedge \psi) \nvdash R^1$, $T(\varphi \wedge \psi) \nvdash R^2$. Такое введение новых предикатов дает тот же эффект для фиксированной сигнатуры, что и выше для различных сигнатур, где предложения φ,ψ берутся из $Sent(\Sigma)$. $\square$

Замечание 3.1.14. По определению классы T_i-пространств замкнуты относительно ограничений, $i \in \{0,1,2\}$. В то же время дополнения классов T_1-пространств и T_2-пространств не замкнуты относительно ограничений, даже при рассмотрении нетривиальных ограничений. Действительно, если $\mathcal{T}$ не является T_1-пространством, что свидетельствуется теориями $T,T' \in \mathcal{T}$ с условием $T \subsetneqq T'$ в силу предложения 3.1.2, то, удаляя T или T' для каждой такой пары (T,T'), можно получить подсемейство семейства $\mathcal{T}$, образующее T_1-пространство. Аналогично, если теории $T,T' \in \mathcal{T}$ свидетельствуют о том, что $\mathcal{T}$ не является хаусдорфовым, следуя предложению 3.1.5, то ограничение $\{T,T'\}$ семейства $\mathcal{T}$ хаусдорфово по предложению 3.1.10. Заметим, что ограничение $\mathcal{T} \upharpoonright \Sigma$ семейства $\mathcal{T}$ до подсигнатуры Σ может не быть T_1- или T_2-пространством. Действительно, по предложению 3.1.2 можно получить $T \upharpoonright \Sigma \subsetneqq T' \upharpoonright \Sigma$ для некоторых теорий T и T' без условий $T \subsetneqq T'$ и $T' \subsetneqq T$. Поэтому $\mathcal{T} \upharpoonright \Sigma = \{T \upharpoonright \Sigma, T' \upharpoonright \Sigma\}$ не является T_1-пространством, в то время как $\mathcal{T} = \{T,T'\}$ является T_1-пространством. Нарушив хаусдорфовость, можно рассмотреть некоторое обогащение $\mathcal{T}'$ T_1-семейства $\mathcal{T}$ из доказательства предложения 3.1.13 некоторыми новыми 0-местными отношениями R^1, R^2 для T^1 и T^2 так, что T^1 расширяется предложением $R^1 \wedge \neg R^2$, T^2 расширяется предложением $R^2 \wedge \neg R^1$ и все остальные теории из $\mathcal{T}$ расширяются предложением $\neg R^1 \wedge \neg R^2$. Тем самым образуются дизъюнктные окрестности $\mathcal{T}'_{R^1}$ и $\mathcal{T}'_{R^2}$, отделяющие обогащения теорий T^1 и T^2. Аналогично все различные теории из $\mathcal{T}$ могут быть отделены подходящими обогащениями, при которых получается хаусдорфово семейство T'', в то время как ограничение $T'' \upharpoonright \Sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ не хаусдорфово.

Следующее предложение показывает, что можно построить неограниченно большое семейство без нетривиальных T_1-подсемейств:

Предложение 3.1.15. *Для любой мощности λ существует семейство $\mathcal{T}$ без нетривиальных T_1-подсемейств.*

Доказательство. Достаточно взять семейство $\mathcal{T}$, образующее возрастающую цепь полных теорий T^i, $i < \lambda$, сигнатур Σ_i так, что $\Sigma_i \subsetneqq \Sigma_j$ для $i < j$. По предложению 3.1.2 различные теории из $\mathcal{T}$ не являются T_1-отделимыми окрестностями. Таким образом, подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ является T_1-пространством тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}'$ одноэлементно. $\square$

В силу рассмотренных выше утверждений естественно рассмотреть следующие две характеристики для непустых семейств $\mathcal{T}$: $A(\mathcal{T})$ — супремум мощностей T_1-подсемейств $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, и $C(\mathcal{T})$ — супремум мощностей подсемейств $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ без нетривиальных T_1-подсемейств. По предложению 3.1.2 значение $A(\mathcal{T})$ есть супремум мощностей антицепей в $\mathcal{T}$, а $C(\mathcal{T})$ — супремум мощностей цепей в $\mathcal{T}$. В частности, имеет место:

Предложение 3.1.16. *Для любого непустого семейства $\mathcal{T}$ выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\mathcal{T}$ является T_1-семейством тогда и только тогда, когда $C(\mathcal{T}) = 1$, в этом случае $|\mathcal{T}| = A(\mathcal{T})$;*

(2) *$\mathcal{T}$ не имеет нетривиальных T_1-подсемейств тогда и только тогда, когда $A(\mathcal{T}) = 1$, в этом случае $|\mathcal{T}| = C(\mathcal{T})$.*

Так как каждое семейство $\mathcal{T}$ представляется в виде непересекающегося объединения (анти)цепей $\mathcal{T}_i$, $i \in I$ ($\mathcal{T}'_j$, $j \in J$), можно разложить $\mathcal{T}$ как в виде T_1-частей, так и частей без нетривиальных T_1-подсемейств. Таким образом, из предложения 3.1.16. вытекает:

Следствие 3.1.17. $|\mathcal{T}| = \sum\limits_{i\in I} C(\mathcal{T}_i) = \sum\limits_{j\in J} A(\mathcal{T}'_j)$.

Замечание 3.1.18. По предложению 3.1.16 для конечного семейства $\mathcal{T}$, $|\mathcal{T}| = A(\mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ является T_1-семейством, и $|\mathcal{T}| = C(\mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ не имеет нетривиальных T_1-подсемейств. В частности, из $|\mathcal{T}| = A(\mathcal{T}) = C(\mathcal{T})$ следует $|\mathcal{T}| = 1$. Ясно, что для бесконечных семейств $\mathcal{T}$ эти эквивалентности могут нарушаться. Например, можно построить счетные цепи C_i теорий непересекающихся сигнатур Σ_i, $i \in I$. Для семейства $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{i\in I} C_i$ и $\lambda = |I|$ имеет место $A(\mathcal{T}) = \lambda$, $C(\mathcal{T}) = \omega$, $|\mathcal{T}| = \lambda \cdot \omega$, и для $\lambda = \omega$ справедливо $|\mathcal{T}| = A(\mathcal{T})$ и $|\mathcal{T}| = C(\mathcal{T})$, в то время как $\mathcal{T}$ не является T_1-семейством и имеет нетривиальные T_1-подсемейства. Так как имеются цепи C_i произвольной мощности μ, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.1.19. *Для любых положительных мощностей* λ *и* μ *существует семейство* $\mathcal{T}$, *для которого* $A(\mathcal{T}) = \lambda$ *и* $C(\mathcal{T}) = \mu$.

3.2 Ранги и топологии

В дальнейшем будем рассматривать непустые семейства $\mathcal{T}$. Изучим значения ранга $RS(\mathcal{T})$ для семейств теорий относительно их топологий, начиная с $RS(\mathcal{T}) = 0$.

Замечание 3.2.1. Ранг RS и степень ds свидетельствуют об иерархии T_2-отделимости для данного семейства $\mathcal{T}$. В частности, для конечного хаусдорфова семейства $\mathcal{T}$ имеет место $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = |\mathcal{T}|$.

Замечание 3.2.2. Ранг RS и степень ds, для фиксированного значения RS, монотонны для семейств полных теорий фиксированной сигнатуры. В то же время конструкция для доказательства предложения 3.1.13 показывает, что монотонность может нарушиться для семейств неполных теорий. Действительно, семейство $\mathcal{T}$ из доказательства предложения 3.1.13 может быть расширено до семейства $\mathcal{T}'$ без T_2-отделимых теорий. В этом случае $RS(\mathcal{T}') = 0$ и $ds(\mathcal{T}') = 1$. Вместе с тем любое двухэлементное семейство $\{T^1,T^2\} \subset \mathcal{T}$ хаусдорфово и $RS(\{T^1,T^2\}) = 0$, $ds(\{T^1,T^2\}) = 2$. Ясно, что конструкция для доказательства предложения 3.1.13 может быть расширена, для $n \in \omega \setminus \{0\}$, до получения семейства $\mathcal{T}''$ с условиями $RS(\mathcal{T}'') = 0$ и $ds(\mathcal{T}'') = 1$, для которого некоторое хаусдорфово ограничение $\mathcal{T}'''$ имеет $RS(\mathcal{T}''') = 0$ и $ds(\mathcal{T}''') = n$.

Предложение 3.2.3. *Для любого семейства* $\mathcal{T}$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{T}$ *образует цепь по включению;*

(2) $RS(\mathcal{T}') = 0$ *и* $ds(\mathcal{T}') = 1$ *для любого непустого подсемейства* $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если $\mathcal{T}$ образует цепь, то никакое непустое подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ не имеет дизъюнктных непустых окрестностей $(\mathcal{T}')_{\varphi}$. Следовательно, $RS(\mathcal{T}') = 0$ и $ds(\mathcal{T}') = 1$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если $RS(\mathcal{T}') = 0$ и $ds(\mathcal{T}') = 1$ для любого непустого подсемейства $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, то по предложению 3.1.10 не существует теорий T^1 и T^2 из $\mathcal{T}$ с непустыми $T^1 \setminus T^2$ и $T^2 \setminus T^1$. Следовательно, $\mathcal{T}$ образует цепь. $\square$

Теорема 3.2.4. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ и $n \in \omega \setminus \{0\}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$;

(2) *$\mathcal{T}$ имеет n-элементное хаусдорфово подсемейство $\{T^1, \ldots, T^n\}$ такое, что каждый элемент $T \in \mathcal{T} \setminus \{T^1, \ldots, T^n\}$ не является T_2-отделимым от $T^1, \ldots, T^n$ в семействе $\mathcal{T}$;*

(3) *$\mathcal{T}$ содержит цепи $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ такие, что их некоторые представители $T^1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, T^n \in \mathcal{C}_n$ образуют n-элементное хаусдорфово подсемейство и каждый элемент $T \in \mathcal{T} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n)$ не является T_2-отделимым от $T^1, \ldots, T^n$ в $\mathcal{T}$;*

(4) *$\mathcal{T}$ делится на n дизъюнктных непустых частей $\mathcal{T}_{\varphi_1}, \ldots, \mathcal{T}_{\varphi_n}$ так, что каждая часть $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ содержит некоторую цепь $\mathcal{C}_i$ и каждый элемент $T \in \mathcal{T}_{\varphi_i} \setminus \mathcal{C}_i$ не является T_2-отделимым от элементов из $\mathcal{C}_i$.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из определения RS и ds.

(1) $\Rightarrow$ (3). Если $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$, то $\mathcal{T}$ делится на n непустых непересекающихся частей $\mathcal{T}_{\varphi_1}, \ldots, \mathcal{T}_{\varphi_n}$ таких, что нет большего числа возможностей для деления. Тогда можно выбрать цепи $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{T}_{\varphi_i}$, $i = 1, \ldots, n$, имеющие $RS = 0$ и $ds = 1$ по предложению 3.2.3, и имеющие представителей $T^1 \in \mathcal{C}_1, \ldots, T^n \in \mathcal{C}_n$, образующих n-элементное хаусдорфово подсемейство. Так как $ds(\mathcal{T}) = n$, не существует большего числа элементов в $\mathcal{T} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n)$ с условием T_2-отделимости.

(3) $\Rightarrow$ (2). По предположению семейство $\mathcal{T}$ имеет n-элементное хаусдорфово подсемейство $\{T^1, \ldots, T^n\}$. Так как теории $T \in \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n$ не могут расширять $\{T^1, \ldots, T^n\}$ с сохранением T_2-отделимости, по предположению каждый элемент $T \in \mathcal{T} \setminus \{T^1, \ldots, T^n\}$ не является T_2-отделимым от $T^1, \ldots, T^n$ в $\mathcal{T}$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Если $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$, то $\mathcal{T}$ делится на n дизъюнктных непустых частей $\mathcal{T}_{\varphi_1}, \ldots, \mathcal{T}_{\varphi_n}$ таких, что каждая часть $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ имеет $RS = 0$ и $ds = 1$. Теперь рассмотрим максимальную цепь $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{T}_{\varphi_i}$. Поскольку $ds(\mathcal{T}_{\varphi_i}) = 1$, каждый элемент $T \in \mathcal{T}_{\varphi_i} \setminus \mathcal{C}_i$ не является T_2-отделимым от элементов из $\mathcal{C}_i$. Для доказательства импликации (4) $\Rightarrow$ (2) повторяем аргументы импликации (3) $\Rightarrow$ (2). $\Box$

Теперь мы рассмотрим общую динамику рангов и степеней.

Замечание 3.2.5. Эффект, описанный в замечании 3.2.2, может быть обобщен для семейства $\mathcal{T} = \{T^i \mid i < \lambda\}$ произвольной мощности λ. Действительно, можно выбрать сигнатуру Σ^0 мощности $\lambda+\omega$ такую, что любая пара (T^i,T^j), для $i<j$, удовлетворяет тому же свойству, что и (T^1,T^2), и с бесконечным числом общих теорий $T(\varphi_i\wedge\varphi_j)$, для $\varphi_i\in T^i$, $\varphi_j\in T^j$, как в доказательстве предложения 3.1.13. Расширяя семейство $\mathcal{T}$ теориями $T(\varphi_i\wedge\varphi_j)$, получаем семейство $\mathcal{T}'$ с хаусдорфовым ограничением $\mathcal{T}$ мощности λ. Если мощность λ достаточно большая, с условием $>|\alpha+\omega|$ для некоторого ординала α, теории T^i можно пометить дополнительными предикатами $R^{(0)}_k$, свидетельствующими, для некоторого обогащения $\mathcal{T}''$ семейства $\mathcal{T}$, о том, что $RS(\mathcal{T}'')=\alpha$ и $ds(\mathcal{T}'')=n$, в то время как соответствующее обогащение $\mathcal{T}'''$ семейства $\mathcal{T}'$ не имеет дизъюнктных непустых окрестностей, т.е. $RS(\mathcal{T}''')=0$ и $ds(\mathcal{T}''')=1$. Семейство $\mathcal{T}'''$ может быть расширено до некоторого семейства $\mathcal{T}^{(4)}$ теориями дизъюнктной сигнатуры Σ^d, относительно $\Sigma(\mathcal{T}''')$, так, что для некоторого ординала $\beta\geqslant\alpha$ и натурального m, где $m\leqslant n$ при $\beta=\alpha$, выполняются следующие соотношения:

1) $RS(\mathcal{T}^{(4)})=\alpha$ и $ds(\mathcal{T}^{(4)})=m$;

2) $RS(\mathcal{T}^{(5)})=\beta$ и $ds(\mathcal{T}^{(5)})=n$ для некоторого ограничения $\mathcal{T}^{(5)}$ семейства $\mathcal{T}^{(4)}$ до подсигнатуры семейства $\mathcal{T}^{(5)}$, содержащей Σ^d. Переименовав $\mathcal{T}^{(4)}$ на $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^{(5)}$ на $\mathcal{T}'$, получаем следующую теорему.

Теорема 3.2.6. *Для любых ординалов $\alpha\leqslant\beta$ и натуральных чисел $m,n\in\omega\setminus\{0\}$, где $m\leqslant n$ при $\beta=\alpha$, существует семейство $\mathcal{T}$ и его Σ'-ограничение $\mathcal{T}'$ такие, что $RS(\mathcal{T})=\alpha$, $ds(\mathcal{T})=m$, $RS(\mathcal{T}')=\beta$, $ds(\mathcal{T}')=n$.*

Так как ограничения хаусдорфовых семейств могут произвольно уменьшить значения RS и ds в силу теоремы 3.2.6, значения RS и ds могут как увеличиться, так и уменьшиться относительно ограничений данных семейств. Следующая теорема показывает, что возможно даже увеличение до бесконечности.

Теорема 3.2.7. *Для любого ординала α и натурального числа $m\in\omega\setminus\{0\}$ существует семейство $\mathcal{T}$ и его ограничение $\mathcal{T}'$, для которых $RS(\mathcal{T})=\alpha$, $ds(\mathcal{T})=m$, $RS(\mathcal{T}')=\infty$.*

Доказательство. Построим шаг за шагом 2-дерево попарно совместных 0-местных предикатов R_δ, $\delta\in{}^{<\omega}2$, задающее семейство $\mathcal{T}'$ теорий T_ε, $\varepsilon\in 2^\omega$, аксиоматизируемых формулами R_δ для $\delta\subset\varepsilon$. Заметим, что для каждого $\delta\in{}^{<\omega}2$ формулы $R_{\delta\hat{}0}$ и $R_{\delta\hat{}1}$ $\mathcal{T}'$-несовместны, откуда следует $RS(\mathcal{T}')=\infty$. Теперь, используя подход к доказательству предложения 3.1.13, расширим семейство $\mathcal{T}'$

до семейства $\mathcal{T}''$ расширенной сигнатуры так, чтобы формулы $R_{\delta\hat{}0}$ и $R_{\delta\hat{}1}$ стали $\mathcal{T}''$-совместными и не существовало T_2-отделимых теорий в $\mathcal{T}''$. Это означает, что $RS(\mathcal{T}'') = 0$, $ds(\mathcal{T}) = 1$. Искомое семейство $\mathcal{T}$ с $RS(\mathcal{T}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}) = m$ получается из $\mathcal{T}''$ подходящим расширением теориями новой сигнатуры, свидетельствующими о требуемом ранге α и степени m. Ограничением семейства $\mathcal{T}$ до $\mathcal{T}'$ получаем ранг, равный бесконечности. $\square$

Следующее утверждение дает оценки числа T_2-отделимых теорий в семействах полных теорий.

Предложение 3.2.8. (1) *Если $\mathcal{T}$ — семейство полных теорий с $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$, то $\mathcal{T}$ имеет n T_2-отделимых теорий.*

(2) *Если $\mathcal{T}$ — семейство полных теорий с $RS(\mathcal{T}) = \alpha > 0$, для некоторого ординала α, то $\mathcal{T}$ имеет по крайней мере $\alpha \cdot \omega$ T_2-отделимых теорий.*

Доказательство. (1) Если $RS(\mathcal{T}) = 0$ и $ds(\mathcal{T}) = n$, то существует n дизъюнктных окрестностей $\mathcal{T}_{\varphi_1}, \ldots, \mathcal{T}_{\varphi_n}$, каждая из которых одноэлементна. По определению семейство $\mathcal{T}$ хаусдорфово с n T_2-отделимыми элементами.

(2) Если $RS(\mathcal{T}) = \alpha > 0$, то, как показано в разделе 2.3, E-замыкание семейства $\mathcal{T}$ образует суператомную булеву алгебру, у которой атомы соответствуют дизъюнктным одноэлементным окрестностям $\mathcal{T}_\varphi$. Эти окрестности шаг за шагом объединяются, свидетельствуя о значении $RS = \alpha$, и каждый шаг объединяет в совокупность по крайней мере ω T_2-отделимых теорий. Таким образом, объединяя в совокупности эти теории, получаем семейство $\mathcal{T}$, имеющее по крайней мере $\alpha \cdot \omega$ T_2-отделимых теорий. $\square$

Замечание 3.2.9. Обратное утверждение для предложения 3.2.8, (2) не выполняется. Действительно, можно построить семейство $\mathcal{T}$ полных теорий в сигнатуре с произвольным числом, скажем $\lambda \geqslant \omega$, дизъюнктных одноместных предикатов так, чтобы эти предикаты были либо пустыми, либо одноэлементными, и для любого предиката R существовало конечное число теорий с $R \neq \varnothing$. Семейство $\mathcal{T}$ e-минимально, с $RS(\mathcal{T}) = 1$ и $ds(\mathcal{T}) = 1$, в то время как $\mathcal{T}$ хаусдорфово с λ T_2-отделимыми теориями.

3.3 $\overline{e}$-минимальные и Bs-минимальные подсемейства, ранги и степени

Следующее определение обобщает вышеприведенное понятие e-минимальности для полных теорий.

Определение 3.3.1. Бесконечное семейство $\mathcal{T}$ (возможно неполных) теорий называется *$\overline{e}$-минимальным*, если для любого предложения $\varphi \in Sent(\Sigma(\mathcal{T}))$, $\mathcal{T}_\varphi$ конечно или $\overline{\mathcal{T}_\varphi} = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_\varphi$ конечно.

По определению любое бесконечное подсемейство $\overline{e}$-минимального семейства снова $\overline{e}$-минимально.

Замечание 3.3.2 Если $\mathcal{T}$ — бесконечное семейство полных теорий сигнатуры Σ, то $\overline{\mathcal{T}_\varphi} = \mathcal{T}_{\neg\varphi}$. Поэтому для предложений $\varphi \in Sent(\Sigma(\mathcal{T}))$, "$\overline{\mathcal{T}_\varphi}$ конечно тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ конечно, и в этом случае понятия e-минимальности и $\overline{e}$-минимальности совпадают. В общем случае, поскольку $\mathcal{T}_{\neg\varphi} \subseteq \overline{\mathcal{T}_\varphi}$, любое $\overline{e}$-минимальное семейство e-минимально. Но не наоборот: например, каждое бесконечное семейство позитивных теорий e-минимально, хотя при этом могут быть бесконечными $\mathcal{T}_\varphi$ и $\overline{\mathcal{T}_\varphi}$, где φ помечает бесконечную и кобесконечную часть семейства $\mathcal{T}$.

Далее мы определим понятия $\overline{RS}$-ранга и $\overline{ds}$-степени, подобные RS-рангу и ds-степени, но более подходящие для семейств неполных теорий. Свойство $\overline{e}$-минимальности будет охарактеризовано в терминах этих характеристик.

Замечание 3.3.3. Для любого семейства теорий $\mathcal{T}$ и предложений $\varphi,\psi \in \Sigma(\mathcal{T})$, $\mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\varphi\wedge\psi}$. Действительно, если $T \in \mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_\psi$, то $\varphi \in T$ и $\psi \in T$. Так как T замкнуто относительно конъюнкций, то $\varphi \wedge \psi \in T$, следовательно, $T \in \mathcal{T}_{\varphi\wedge\psi}$. Обратно, если $T \in \mathcal{T}_{\varphi\wedge\psi}$, то $\varphi \wedge \psi \in T$. Поскольку T замкнуто относительно выводимости, получаем $\varphi \in T$ и $\psi \in T$, откуда $T \in \mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_\psi$. Таким образом семейства $\mathcal{T}_\varphi$ образуют нижнюю полурешетку относительно операции $\cap$. Заметим, что для семейства $\mathcal{T}$ неполных теорий равенства $\mathcal{T}_{\varphi\vee\psi} \subseteq \mathcal{T}_\varphi \cup \mathcal{T}_\psi$ и $\mathcal{T}_\varphi \cup \mathcal{T}_\psi \subseteq \mathcal{T}_{\varphi\vee\psi}$ могут нарушаться. Действительно, из $T \in \mathcal{T}_{\varphi\vee\psi}$ не следует $\varphi \in T$ или $\psi \in T$ для теории T, аксиоматизируемой дизъюнкцией совместных предложений φ и ψ. Соответственно, если $T \in \mathcal{T}_\varphi \cup \mathcal{T}_\psi$, то T может содержать предложение φ с условием $\Sigma(\psi) \nsubseteq \Sigma(T)$, из которого вытекает $T \notin \mathcal{T}_{\varphi\vee\psi}$.

Таким образом, любая булева комбинация s-определимых подсемейств семейства $\mathcal{T}$ сводится к объединению множеств вида $\mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_1}} \cap \ldots \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_n}}$, которое в общем случае не может записываться короче. Эти булевы комбинации называются *Bs-определимыми* подсемействами семейства $\mathcal{T}$. По определению каждое Bs-определимое подсемейство соответствует подходящей булевой комбинации формул. Например, объединение U множеств вида $\mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_1}} \cap \ldots \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_n}}$ соответствует дизъюнкции χ формул $\varphi \wedge \neg\psi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_n$. При этом, как замечено выше, s-определимое подсемейство $\mathcal{T}_\chi$ может отличаться от U.

Для семейства $\mathcal{T}$ обозначим через $Bs_\mathcal{T}$ множество всех Bs-определимых подсемейств $\mathcal{T}$. Ясно, что, $Bs_\mathcal{T}$ образует булеву алгебру. Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3.4. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ пара $(\mathcal{T}, Bs_\mathcal{T})$ хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть $T, T' \in \mathcal{T}$, $T \neq T'$. Тогда имеется предложение φ с условием $\varphi \in T \setminus T'$ или $\varphi \in T' \setminus T$. В любом случае Bs-определимые подсемейства $\mathcal{T}_\varphi$ и $\overline{\mathcal{T}_\varphi}$ T_2-отделяют T и T'. $\square$

Как показано в [12], характеристики RS и ds задают меру сложности для семейств полных теорий. Из результатов раздела 3 следует, что эти характеристики не согласуются с мерой сложности для семейств неполных теорий. Поэтому понятия для RS и ds необходимо модифицировать с целью получения подходящей меры сложности и характеризации достаточно богатых семейств теорий. Далее мы определим ранг $\overline{RS}$ и степень $\overline{ds}$, обобщающие RS и ds и задающие более адекватную меру сложности для семейств $\mathcal{T}$ неполных теорий.

Определение 3.3.5. Для пустого семейства $\mathcal{T}$ полагаем $\overline{RS}(\mathcal{T}) = -1$, и для конечных непустых семейств $\mathcal{T}$ — $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 0$.

Для семейства $\mathcal{T}$ и ординала $\alpha = \beta + 1$ полагаем $\overline{RS}(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$, если существуют попарно дизъюнктные Bs-определимые подсемейства $\mathcal{T}_n$ семейства $\mathcal{T}$, $n \in \omega$, для которых $\overline{RS}(\mathcal{T}_n) \geqslant \beta$, $n \in \omega$.

Если α — предельный ординал, то $\overline{RS}(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$, если $\overline{RS}(\mathcal{T}) \geqslant \beta$ для любого $\beta < \alpha$.

Полагаем $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$, если $\overline{RS}(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$ и $\overline{RS}(\mathcal{T}) \not\geqslant \alpha + 1$.

Если $\overline{RS}(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$ для любого ординала α, то полагаем $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \infty$.

Семейство $\mathcal{T}$ называется *$\bar{e}$-тотально трансцендентным*, если $\overline{RS}(\mathcal{T})$ является ординалом.

Если семейство $\mathcal{T}$ является $\overline{e}$-тотально трансцендентным, с $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \alpha \geqslant 0$, определим *степень* $\overline{ds}(\mathcal{T})$ семейства $\mathcal{T}$ как максимальное число попарно дизъюнктных Bs-определимых подсемейств $\mathcal{T}_i$, для которых $\overline{RS}(\mathcal{T}_i) = \alpha$. По определению, если $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$ для ординала α, то $\overline{ds}(\mathcal{T}) \in \omega \setminus \{0\}$.

Замечание 3.3.6. Если $\mathcal{T}$ — семейство полных теорий сигнатуры Σ, то любое Bs-определимое подсемейство семейства $\mathcal{T}$ является s-определимым. Действительно, в этом случае $\mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\varphi\wedge\psi}$, $\mathcal{T}_\varphi \cup \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\varphi\vee\psi}$, $\overline{\mathcal{T}_\varphi} = \mathcal{T}_{\neg\varphi}$ для любых предложений φ и ψ, откуда следует сведение Bs-определимых подсемейств к s-определимым. Таким образом, в этом случае справедливо $\overline{RS}(\mathcal{T}) = RS(\mathcal{T})$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = ds(\mathcal{T})$. Так как все возможности $(\alpha,n) = (RS(\mathcal{T}),ds(\mathcal{T}))$, для ординалов α и натуральных чисел $n \neq 0$, реализуются семействами $\mathcal{T}$ полных теорий [12], все возможности $(\alpha,n) = (\overline{RS}(\mathcal{T}),\overline{ds}(\mathcal{T}))$ также реализуются.

Предложение 3.3.7. *Для любого конечного непустого семейства $\mathcal{T}$ выполняется $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 0$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = |\mathcal{T}|$.*

Доказательство. Как показано в лемме 3.3.5, для любых различных теорий $T,T' \in \mathcal{T}$ существует предложение $\varphi_{T,T'}$, T_2-отделяющее T и T': $T \in \mathcal{T}_{\varphi_{T,T'}}$ и $T' \in \overline{\mathcal{T}_{\varphi_{T,T'}}}$, или $T \in \overline{\mathcal{T}_{\varphi_{T,T'}}}$ и $T' \in \mathcal{T}_{\varphi_{T,T'}}$. Обозначив через $U_{T'}$ семейство $\mathcal{T}_{\varphi_{T,T'}}$ в первом случае, и $\overline{\mathcal{T}_{\varphi_{T,T'}}}$ во втором случае, получим одноэлементное множество $\bigcap\limits_{T'\neq T} U_{T'} = \{T\}$. Эти одноэлементные множества свидетельствуют о том, что $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 0$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = |\mathcal{T}|$. $\square$

Предложение 3.3.8. *Семейство $\mathcal{T}$ $\overline{e}$-минимально тогда и только тогда, когда $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 1$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = 1$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ — $\overline{e}$-минимальное семейство. Тогда каждое предложение φ либо принадлежит всем теориям из $\mathcal{T}$, либо не принадлежит никаким теориям из $\mathcal{T}$, либо делит $\mathcal{T}$ на конечную и коконечную части. Аналогично доказательству предложения 3.3.8 каждая конечная Bs-определимая часть сводится к Bs-определимым одноэлементным множествам, отделяющим все элементы этой части. Так как любые две теории отделяются Bs-определимыми множествами, получаем $\overline{RS}(\mathcal{T}) \geqslant 1$. В то же время $\mathcal{T}$ не делится Bs-определимыми множествами на две бесконечные части, поскольку конечные пересечения и объединения (ко)конечных множеств снова (ко)конечны. Тогда $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 1$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = 1$. Обратно, если $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 1$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = 1$, то семейство $\mathcal{T}$ бесконечно по определению $\overline{RS}$. Если семейство $\mathcal{T}$ не является $\overline{e}$-минимальным, то $\mathcal{T}$ делится некоторым предложением на две бесконечные части, поэтому $\mathcal{T}$ делится на две бесконечные части Bs-определимыми множествами, следовательно, $\overline{ds}(\mathcal{T}) \geqslant 2$, а это противоречит предположению. □

Ясно, что любое $\overline{e}$-минимальное семейство задает единственную точку накопления относительно Bs-определимых множеств. В силу предложения 3.3.8 эта единственность характеризуется в терминах $\overline{RS}$-ранга и $\overline{ds}$-степени.

Замечание 3.3.9. Точка накопления T $\overline{e}$-минимального семейства $\mathcal{T}$, состоящая из предложений, принадлежащих бесконечному числу теорий из $\mathcal{T}$, имеет *естественное расширение* T', определяемое по следующему правилу. Для предложения $\varphi \in Sent(\Sigma(\mathcal{T}))$ положим $\neg\varphi \in T'$, если $\mathcal{T}_\varphi$ конечно. В противном случае, если $\overline{\mathcal{T}_\varphi}$ конечно, положим $\varphi \in T'$. Имеем $T \subseteq T'$, так как T состоит из предложений φ с бесконечным множеством $\mathcal{T}_\varphi$, а это влечет конечность множества $\overline{\mathcal{T}_\varphi}$. По определению для любого предложения $\varphi \in Sent(\Sigma(\mathcal{T}))$, $\varphi \in T'$ или $\neg\varphi \in T'$. Поэтому если множество T' совместно, то T' — полная теория, расширяющая T. Заметим, что в этом случае $T = T'$. Действительно, пусть $\varphi \in T'$. Тогда $\overline{\mathcal{T}_\varphi}$ конечно, т.е. $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно, откуда следует $\varphi \in T$. Ясно, что естественное расширение T' однозначно определяется семейством $\mathcal{T}$. Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 3.3.10. *Для любого $\overline{e}$-минимального семейства $\mathcal{T}$ существует единственная точка накопления T. Эта точка накопления T имеет единственное естественное расширение, и T полна и совпадает со своим естественным расширением, если это расширение совместно.*

Теперь после начального рассмотрения конечных и $\overline{e}$-минимальных семейств, изучим иерархию семейств теорий относительно ранга $\overline{RS}$ и степени $\overline{ds}$, аналогично иерархии относительно RS и ds [12].

Определение 3.3.11. Пусть α — ординал. Семейство $\mathcal{T}$ $\overline{RS}$-ранга α называется *$\overline{\alpha}$-минимальным*, если для любого предложения $\varphi \in Sent(\Sigma(\mathcal{T}))$, $\overline{RS}(\mathcal{T}_\varphi) < \alpha$ или $\overline{RS}(\overline{\mathcal{T}_\varphi}) < \alpha$. Аналогично предложениям 3.13 и 3.14 из [12] с использованием предложений 3.3.7 и 3.3.8 получаем:

Предложение 3.3.12. (1) *Семейство $\mathcal{T}$ $\overline{0}$-минимально тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ одноэлементно.*

(2) *Семейство $\mathcal{T}$ $\overline{1}$-минимально тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ $\overline{e}$-минимально.*

(3) *Для любого ординала* α *семейство* $\mathcal{T}$ $\overline{\alpha}$*-минимально тогда и только тогда, когда* $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$ *и* $\overline{ds}(\mathcal{T}) = 1$.

Предложение 3.3.13. *Для любого семейства* $\mathcal{T}$ *имеет место* $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \alpha$ *и* $\overline{ds}(\mathcal{T}) = n$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{T}$ *представляется в виде дизъюнктного объединения* Bs*-определимых подсемейств* $\mathcal{T}_1,\ldots,\mathcal{T}_n$ *таких, что каждое* $\mathcal{T}_i$ $\overline{\alpha}$*-минимально.*

В силу предложения 3.2 каждое бесконечное семейство $\mathcal{T}$ позитивных теорий e-минимально. Вместе с тем можно получить семейство $\mathcal{T}$ позитивных теорий с произвольной парой $(\alpha,n) = (\overline{RS}(\mathcal{T}),\overline{ds}(\mathcal{T}))$ пошаговым введением 0-местных предикатов $R_{\beta,i}$, $\beta \leqslant \alpha$, $i \in \omega$ при $\beta < \alpha$ и $i < n$ при $\beta = \alpha$, и формированием $\overline{e}$-минимальных подсемейств сигнатуры Σ, состоящей из предикатов $R_{\beta,i}$, согласно следующим правилам:

1) каждая теория $T \in \mathcal{T}$ имеет единственный предикат $R_{0,i} \neq \varnothing$, и каждый предикат $R_{0,i} \neq \varnothing$ представляется некоторой теорией $T \in \mathcal{T}$;

2) теории из $\mathcal{T}$ объединены дизъюнктными счетными $\overline{e}$-минимальными подсемействами $\mathcal{T}_{1,i}$ посредством условий $R_{1,i} \neq \varnothing$;

3) если $\overline{\beta}$-минимальные семейства $\mathcal{T}_{\beta,i}$ построены относительно предикатов $R_{\gamma,i}$, $\gamma \leqslant \beta$, сформируем из этих семейств дизъюнктные семейства $\mathcal{T}_{\beta+1,i}$ с условиями $R_{\beta+1,i} \neq \varnothing$;

4) если $\beta \leqslant \alpha$ — предельный ординал, то объединим семейства $\mathcal{T}_{\gamma,i}$, $\gamma < \beta$, задаваемые предикатами $R_{\gamma,i} \neq \varnothing$, посредством предикатов $R_{\beta,i} \neq \varnothing$. Окончательно $\overline{\beta}$-минимальные подсемейства $\mathcal{T}_{\beta,i}$ свидетельствуют о том, что $\overline{RS}(\mathcal{T}) \geqslant \beta$, и в силу конструкции получаем $(\overline{RS}(\mathcal{T}),\overline{ds}(\mathcal{T})) = (\alpha,n)$.

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.14. *Для любого ординала* α *и натурального числа* $n \neq 0$ *существует семейство* $\mathcal{T}$ *позитивных теорий такое, что* $(\overline{RS}(\mathcal{T}),\overline{ds}(\mathcal{T})) = (\alpha,n)$.

Замечание 3.3.15. В силу предложения 3.2 и теоремы 3.3.14 семейства позитивных теорий могут иметь мало точек накопления относительно s-определимых подсемейств и неограниченное число точек накопления относительно Bs-определимых подсемейств.

3.4 Замыкания относительно s-определимых и Bs-определимых подсемейств

Упомянутые выше точки накопления, получаемые с помощью s-определимых и Bs-определимых подсемейств семейства $\mathcal{T}$, образуют следующие виды замыканий.

Определение 3.4.1. Будем говорить, что теория T *принадлежит замыканию* $Cl_s(\mathcal{T})$ (соответственно, $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$), если $T \in \mathcal{T}$ или T аксиоматизируется максимальным множеством предложений φ (соответственно, $\varphi\wedge\neg\psi_1\wedge\ldots\wedge\neg\psi_n$) таких, что $\mathcal{T}_\varphi$ (соответственно, $\mathcal{T}_\varphi\cap\overline{\mathcal{T}_{\psi_1}}\cap\ldots\cap\overline{\mathcal{T}_{\psi_n}}$) непусто. В этом случае будем говорить, что подсемейства $\mathcal{T}_\varphi$, $\mathcal{T}_{\psi_1}$, $\mathcal{T}_{\psi_2},\ldots$, используемые в определении, *порождают* теорию T. Семейство $\mathcal{T}$ называется *s-замкнутым* (соответственно, *Bs-замкнутым*), если $\mathcal{T} = Cl_s(\mathcal{T})$ ($\mathcal{T} = Cl_{Bs}(\mathcal{T})$).

Замечание 3.4.2. Заметим, что если $T \in Cl_s(\mathcal{T})$ порождается множеством T подсемейств $\mathcal{T}_\varphi$ и $T' \in Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ порождается множеством $T' \supseteq T$ подсемейств $\mathcal{T}_\varphi$, $\mathcal{T}_{\psi_1}$, $\mathcal{T}_{\psi_2},\ldots$, то $T \subseteq T'$. Таким образом, некоторые ограничения теорий из $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ образуют $Cl_s(\mathcal{T})$.

Замечание 3.4.3. Любая теория $T \in \mathcal{T}$ принадлежит $Cl_s(\mathcal{T})$ посредством механизма замыкания, если $\mathcal{T}$ не содержит теории $T' \supsetneq T$. Это выполняется в силу равенства $\{T\} = \bigcap\{\mathcal{T}_\varphi \mid \varphi \in T\}$. В общем случае $\bigcap\{\mathcal{T}_\varphi \mid \varphi \in T\}$ содержит все теории T' с условием $T' \supseteq T$, и из максимальности множества предложений φ с условием $\mathcal{T}_\varphi \neq \varnothing$ следует, что точка накопления строго содержит T.

Замечание 3.4.4. Ясно, что $Cl_s(\mathcal{T}) = Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ для любого семейства $\mathcal{T}$ полных теорий, хотя $Cl_s(\mathcal{T})$ и $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ могут различаться в общем случае в силу замечания 3.3.15: $Cl_s(\mathcal{T})$ определяется на основе предложений из $\bigcup\mathcal{T}$, в то время как $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ базируется на булевых комбинациях предложений из $\bigcup\mathcal{T}$. Например, если $\mathcal{T}$ имеет мощность > 1 и состоит из позитивных теорий, то Bs-определимые множества для отделимости теорий из $\mathcal{T}$ образуют теории из $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$, которые уже не являются позитивными. Более того, теории T из $\mathcal{T}$ преобразуются в теории $T^* \in Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ с условием $T^* \supset T$ посредством добавления T_2-отделяющих предложений: если T,$T' \in \mathcal{T}$ с условием $T \neq T'$, то существует предложение $\varphi \in T^*$ с условием $\neg\varphi \in (T')^*$, или $\neg\varphi \in T^*$ с условием $\varphi \in (T')^*$.

Таким образом, семейство $\mathcal{T}$ получает в $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ соответствующее семейство $\mathcal{T}^*$, состоящее из теорий T^* для теорий $T\in\mathcal{T}$ и являющееся T_2-отделимым. Оператор $\mathcal{T}\mapsto\mathcal{T}^*$ в рамках семейства $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ называется *хаусдорфизацией* семейства $\mathcal{T}$.

Так как $Cl_s(\mathcal{T})$ определяется с помощью предложений из $\bigcup\mathcal{T}$ и $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ определяется булевыми комбинациями предложений из $\bigcup\mathcal{T}$, семейства $Cl_s(\mathcal{T})$ и $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ замкнуты, и справедливо следующее:

Предложение 3.4.5. $Cl_s(\mathcal{T})=Cl_s(Cl_s(\mathcal{T}))$ и $Cl_{Bs}(\mathcal{T})=Cl_{Bs}(Cl_{Bs}(\mathcal{T}))$.

Предложение 3.4.6. (1) (Рефлексивность) *Для любого семейства* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}\subseteq Cl_s(\mathcal{T})\cap Cl_{Bs}(\mathcal{T})$.

(2) (Отрицание конечного характера) *Для некоторой теории* $T\in Cl_s(\mathcal{T})\setminus\mathcal{T}$ *(соответственно,* $T\in Cl_{Bs}(\mathcal{T})\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{T}^*)$*) (не) существует конечное* $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$ *такое, что* $T\in Cl_s(\mathcal{T}_0)$ *(*$T\in Cl_{Bs}(\mathcal{T}_0)$*).*

Доказательство. (1) очевидно.

(2) Пусть семейство $\mathcal{T}$ состоит из двух теорий T^1 и T^2 таких, что $T^1\nsubseteq T^2$, $T^2\nsubseteq T^1$ и $T^1\cup T^2$ совместно. Тогда $Cl_s(\mathcal{T})$ содержит теорию T, аксиоматизируемую множеством $T^1\cup T^2$ и не принадлежащую $\mathcal{T}$. Соответственно $(T'')^*\in Cl_{Bs}(\mathcal{T})\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{T}^*)$. Теперь если $\mathcal{T}$ — семейство позитивных теорий, $\subseteq$-упорядоченное по типу ω, то $Cl_s(\mathcal{T})$ содержит теорию $\bigcup\mathcal{T}$, которая не принадлежит $Cl_s(\mathcal{T}_0)$ для конечных $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$. Эта теория также подтверждает, что существует теория из $Cl_{Bs}(\mathcal{T})\setminus(\mathcal{T}\cup\mathcal{T}^*)$, которая не принадлежит $Cl_{Bs}(\mathcal{T}_0)$ для конечных $\mathcal{T}_0\subset\mathcal{T}$. $\square$

Следующее свойство отличается от соответствующего свойства для семейств полных теорий.

Предложение 3.4.7. (Немонотонность) *Существуют семейства* $\mathcal{T}_0,\mathcal{T}_1$ *такие, что* $\mathcal{T}_0\subseteq\mathcal{T}_1$, $Cl_s(\mathcal{T}_0)\nsubseteq Cl_s(\mathcal{T}_1)$ *и* $Cl_{Bs}(\mathcal{T}_0)\nsubseteq Cl_{Bs}(\mathcal{T}_1)$.

Доказательство. Достаточно взять семейства $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_0\cup\{T\}$ такие, что найдутся теории $T'\in Cl_s(\mathcal{T}_0)\setminus\mathcal{T}_0$, $T''\in Cl_{Bs}(\mathcal{T}_0)\setminus\mathcal{T}_0$ и T содержит новый 0-местный предикат R относительно $\mathcal{T}_0$. Так как $(\mathcal{T}_1)_R$ непусто, T' и T'' должны расширяться до некоторых теорий T''' и $T^{(4)}$ из $Cl_s(\mathcal{T}_1)$ и $Cl_{Bs}(\mathcal{T}_1)$ соответственно. Таким образом, $T'\in Cl_s(\mathcal{T}_0)\setminus Cl_s(\mathcal{T}_1)$ и $T''\in Cl_{Bs}(\mathcal{T}_0)\setminus Cl_{Bs}(\mathcal{T}_1)$. $\square$

В силу предложения 3.4.7 пересечения (Bs-) s-замкнутых семейств могут быть не (Bs-) s-замкнутыми. Действительно, уменьшая семейства теорий можно потерять некоторые предложения, используемые для замыканий. Таким образом, пересечения могут задавать более узкие теории в замыканиях, и ограничивая семейства, должны ограничиваться теории для замыканий.

Определение 3.4.8. Семейство $\mathcal{T}$ называется *специальным*, если теории T в $\mathcal{T}$ содержат все предложения $\varphi \wedge \neg\psi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\psi_n$, для которых $T \in \mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_1}} \cap \ldots \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_n}}$.

Замечание 3.4.9. Свойство немонотонности не выполняется для специальных семейств теорий T данной сигнатуры, поскольку, расширяя семейства теорий, мы не получаем новые булевы комбинации для Bs-определимых подсемейств: все эти комбинации представлены предложениями в T. Таким образом, для специальных семейств Bs-определимые подсемейства сводятся к s-определимым.

Предложение 3.4.10. *Если $\mathcal{T}$ — бесконечное специальное семейство, то для любой теории $T \notin \mathcal{T}$, $T \in Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ (т.е. T является точкой накопления для $\mathcal{T}$ относительно Bs-замыкания Cl_{Bs}) тогда и только тогда, когда T состоит из максимального множества предложений φ, для которых множество $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно.*

Доказательство. Предположим, что существует предложение $\varphi \in T$, принадлежащее лишь конечному числу теорий из $\mathcal{T}$, скажем $T_1, \ldots, T_n$. Так как $T \notin \mathcal{T}$, то существует $\psi \in T$, для которого $\psi \notin T_1 \cup \ldots \cup T_n$. Тогда $(\varphi \wedge \psi) \in T$ не принадлежит никакой теории из $\mathcal{T}$. По определению Bs-замыкания получаем $T \notin Cl_{Bs}(\mathcal{T})$. Если T состоит из максимального числа предложений φ, для которых множество $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно и $T \notin \mathcal{T}$, то $T \in Cl_{Bs}(\mathcal{T})$, поскольку семейство $\mathcal{T}$ специальное. $\square$

Определение 3.4.11. Пусть $\mathcal{T}$ — Bs-замкнутое семейство теорий. Подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_0$ называется *порождающим*, если $\mathcal{T} = Cl_{Bs}(\mathcal{T}')$. Порождающее множество $\mathcal{T}'$ (для $\mathcal{T}$) называется *минимальным*, если $\mathcal{T}'$ не содержит собственных порождающих подмножеств. Минимальное порождающее множество $\mathcal{T}'$ называется *наименьшим*, если $\mathcal{T}'$ содержится в каждом порождающем множестве для $\mathcal{T}$.

Следующая теорема обобщает теорему 3.2 из [6] с заменой E-замкнутых семейств полных теорий на специальные Bs-замкнутые семейства.

Теорема 3.4.12. *Если $\mathcal{T}'$ — порождающее подсемейство для специального Bs-замкнутого семейства $\mathcal{T}$, то следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{T}'$ — *наименьшее порождающее множество для* $\mathcal{T}$*;*

(2) $\mathcal{T}'$ — *минимальное порождающее множество для* $\mathcal{T}$*;*

(3) *любая теория из* $\mathcal{T}'$ *изолируется некоторым* Bs*-определимым подмножеством* X *семейства* $\mathcal{T}'$*, т.е. для любого* $T \in \mathcal{T}'$ *существует* Bs*-определимое подмножество* $X \subseteq \mathcal{T}'$ *вида* $(\mathcal{T}')_\varphi \cap \overline{(\mathcal{T}')_{\psi_1}} \cap \ldots \cap \overline{(\mathcal{T}')_{\psi_n}}$ *такое, что* $X = \{T\}$*;*

(4) *любая теория из* $\mathcal{T}'$ *изолируется некоторым* Bs*-определимым подмножеством* X *семейства* $\mathcal{T}$*, т.е. для любого* $T \in \mathcal{T}'$ *существует* Bs*-определимое подмножество* $X \subseteq \mathcal{T}$ *такое, что* $X = \{T\}$*.*

(5) *любая теория из* $\mathcal{T}'$ *изолируется некоторым* s*-определимым подмножеством* X *семейства* $\mathcal{T}'$*, т.е. для любого* $T \in \mathcal{T}'$ *существует* s*-определимое подмножество* $X \subseteq \mathcal{T}'$ *вида* $(\mathcal{T}')_\varphi$ *такое, что* $X = \{T\}$*;*

(6) *любая теория из* $\mathcal{T}'$ *изолируется некоторым* s*-определимым подмножеством* X *семейства* $\mathcal{T}$*, т.е. для любого* $T \in \mathcal{T}'$ *существует* s*-определимое подмножество* $X \subseteq \mathcal{T}$ *такое, что* $X = \{T\}$*.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2), (4) $\Rightarrow$ (3) и (6) $\Rightarrow$ (5) очевидны.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) и (4) $\Leftrightarrow$ (6) выполняются в силу замечания 5.7.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mathcal{T}'$ — минимальное, но не наименьшее порождающее множество. Тогда существует порождающее множество $\mathcal{T}''$ такое, что $\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}'' \neq \varnothing$ и $\mathcal{T}'' \setminus \mathcal{T}' \neq \varnothing$. Рассмотрим теорию $T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}''$. Покажем, что $T \in Cl_{Bs}(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$, т.е. T — точка накопления семейства $\mathcal{T}' \setminus \{T\}$. Для этого достаточно доказать, что для любого предложения $\varphi \in T$ множество $(\mathcal{T}' \setminus \{T\})_\varphi$ бесконечно. Предположим напротив, что для некоторого $\varphi \in T$ множество $(\mathcal{T}' \setminus \{T\})_\varphi$ конечно. Тогда $(\mathcal{T}')_\varphi$ конечно и, более того, поскольку $\mathcal{T}'$ — порождающее множество для $\mathcal{T}$, то $\mathcal{T}_\varphi$ также конечно. Поэтому $(\mathcal{T}'')_\varphi$ конечно и T не принадлежит замыканию $Cl_{Bs}(\mathcal{T}'')$, что противоречит соотношению $Cl_{Bs}(\mathcal{T}'') = \mathcal{T}$. Так как $T \in Cl_{Bs}(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$ и $\mathcal{T}'$ — порождающее множество для $\mathcal{T}$, тогда $\mathcal{T}' \setminus \{T\}$ также является порождающим множеством для $\mathcal{T}$, что противоречит минимальности $\mathcal{T}'$.

(2) $\Rightarrow$ (5). Если $\mathcal{T}'$ конечно, то $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Так как семейство $\mathcal{T}$ конечно и является специальным, то для любого $T \in \mathcal{T}$ существует формула $\varphi \in T$, отрицающая все теории из $\mathcal{T} \setminus \{T\}$. Тогда $\mathcal{T}_\varphi = (\mathcal{T}')_\varphi$ — одноэлементное множество, содержащее T, и таким образом $(\mathcal{T}')_\varphi$ изолирует T. Теперь предположим, что $\mathcal{T}'$ бесконечно. Допустим, что некоторая теория $T \in \mathcal{T}'$ не изолируется множествами $(\mathcal{T}')_\varphi$. Отсюда следует, что для любого предложения $\varphi \in T$

множество $(\mathcal{T}' \setminus \{T\})_\varphi$ бесконечно. По определению Bs-замыкания получаем $T \in Cl_{Bs}(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$, что противоречит минимальности $\mathcal{T}'$.

(5) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что каждая теория T из $\mathcal{T}'$ изолируется некоторым множеством $(\mathcal{T}')_\varphi$. Тогда $T \notin Cl_{Bs}(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$. Следовательно, $\mathcal{T}'$ — минимальное порождающее множество для $\mathcal{T}$.

(5) $\Rightarrow$ (6) очевидно для конечного $\mathcal{T}'$. Если $\mathcal{T}'$ бесконечно и любая теория T из $\mathcal{T}'$ изолируется некоторым множеством $(\mathcal{T}')_\varphi$, то теория T изолируется множеством $\mathcal{T}_\varphi$, поскольку в противном случае, в силу того, что $\mathcal{T}'$ порождает $\mathcal{T}$, существует бесконечно много теорий из $\mathcal{T}'$, содержащих φ, а это противоречит условию $|(\mathcal{T}')_\varphi| = 1$. $\square$

3.5 Алгебры для Bs-определимых подсемейств семейств теорий

В этом разделе мы распространим результаты раздела 2.3 для булевых и сопутствующих алгебр от случая семейств полных теорий до случая специальных семейств. Для любого непустого специального семейства $\mathcal{T}$ множество всех s-определимых подсемейств $\mathcal{T}$ образуют булеву алгебру $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$, будучи алгеброй Линденбаума – Тарского [82; 83], с отношением "$\subseteq 0 = \mathcal{T}_\varphi$ для несовместного предложения φ, $1 = \mathcal{T} = \mathcal{T}_{\forall x(x\approx x)}$ и теоретико-множественных операций $\mathcal{T}_\varphi \cup \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\varphi\vee\psi}$, $\mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\varphi\wedge\psi}$, $\overline{\mathcal{T}_\varphi} = \mathcal{T}_{\neg\varphi}$. Алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ изоморфна фактор-алгебре $\mathcal{S}(\mathcal{T})/\equiv_\mathcal{T}$ алгебры $\mathcal{S}(\mathcal{T})$ на множестве всех Σ-предложений в $\bigcup\mathcal{T}$, с $\Sigma = \Sigma(\mathcal{T})$ и логическими операциями $\vee, \wedge, \neg$. Этот изоморфизм определяется правилом $\mathcal{T}_\varphi \mapsto \{\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{T}) \mid \psi \equiv_\mathcal{T} \varphi\}$, где $\psi \equiv_\mathcal{T} \varphi \Leftrightarrow \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_\varphi$. Поскольку все различные теории $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ отделены некоторыми непересекающимися окрестностями $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ посредством хаусдорфизации, все атомные элементы в $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ являются одноэлементными. Поэтому, применяя теорему 3.4.12, имеем следующее:

Предложение 3.5.1. *Для любого непустого Bs-замкнутого специального семейства $\mathcal{T}$ булева алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ атомна тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ имеет наименьшее/минимальное порождающее подсемейство.*

Доказательство. Пусть алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ является атомной. Рассмотрим множество всех атомных элементов в $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$, которые, как отмечалось выше, являются одноэлементными и образуют подсемейство $\mathcal{T}'$ в $\mathcal{T}$, состоящее из всех элементов этих одноэлементных множеств. Мы утверждаем, что $\mathcal{T}'$ порождает $\mathcal{T}$. Действительно, согласно предложению 3.4.10 достаточно показать, что если $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$, то для каждого $\varphi \in T$, $(\mathcal{T}')_\varphi$ бесконечно. Предположим противное, т.е. для некоторого $\varphi \in T$ множество $(\mathcal{T}')_\varphi$ конечно. Тогда мы можем отделить T от $(\mathcal{T}')_\varphi$ некоторым предложением $\psi \vdash \varphi$: $T \in \mathcal{T}_\psi$, тогда как $(\mathcal{T}')_\psi = \varnothing$. Но алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ является атомной, поэтому существует одноэлементное множество $\{T_0\} = \mathcal{T}_\chi \subseteq \mathcal{T}_\psi$ для некоторого $\chi \vdash \psi$. Тогда имеем одновременно $T_0 \in \mathcal{T}_\psi$ и $T_0 \in (\mathcal{T}')_\psi$, что противоречит условию $(\mathcal{T}')_\psi = \varnothing$. Поскольку $\mathcal{T}'$ порождает $\mathcal{T}$, по теореме 3.4.12 множество $\mathcal{T}'$ является наименьшим/минимальным порождающим подсемейством $\mathcal{T}$. Теперь предположим, что $\mathcal{T}$ имеет наименьшее/минимальное порождающее подсемейство $\mathcal{T}'$. Пусть $\mathcal{T}_\varphi \neq \varnothing$ содержит теорию T. Если $T \in \mathcal{T}'$, то существует одноэлементное $\mathcal{T}_\psi = \{T\}$, которое является атомным элементом в $\mathcal{T}_\varphi$. Если $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$, то по предложению 3.4.10 $\mathcal{T}_\varphi$ содержит бесконечное число теорий в $\mathcal{T}'$. Таким образом снова $\mathcal{T}_\varphi$ имеет атомный элемент $\mathcal{T}_\psi \subseteq \mathcal{T}_\varphi$. $\square$

Как в разделе 2.2, пересечения, возможно бесконечные, Bs-определимых подсемейств $\mathcal{T}$ назовем *Bs-диаграммно определимыми* или *Bd-определимым.* Теперь расширим алгебру $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ до алгебры $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ всех Bd-определимых подсемейств в $\mathcal{T}$. Ясно, что алгебра $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ сохраняет операции $\cap$ и $\cup$, тогда как дополнения определены только для Bs-определимых множеств. Поэтому $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ содержит операции $\cap$ и $\cup$, являясь частичной алгеброй относительно $\bar{\ }$. Таким образом, $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ образуют дистрибутивную решетку, частично, для Bs-определимых множеств, с дополнениями. Кроме того, каждая алгебра $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ является атомной, содержащей все одноэлементные множества $\{T\} \subseteq \mathcal{T}$. Ясно, что эти атомные элементы $\{T\}$ имеют (коатомные) дополнения тогда и только тогда, когда они $\mathcal{T}$-изолированы. Алгебра $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ допускает естественное расширение до алгебры $\mathcal{B}_{Bd_\infty}(\mathcal{T})$ всех Bd_∞-определимых подсемейств $\mathcal{T}$, т.е. всех подсемейств $\mathcal{T}$. В то время как структуры $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{B}_{Bd_\infty}(\mathcal{T})$ хорошо известны, а также $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ для конечного $\mathcal{T}$ и некоторых дополнительных частных случаев, естественно классифицировать структуры $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ в общем случае. Частично отвечая на вопрос классификации, рассмотрим $\overline{e}$-тотально трансцендентные семейства $\mathcal{T}$ малых рангов. Отметим, что алгебры $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ для этих семейств являются атомными в силу теоремы 3.5.1.

Предложение 3.5.2. *Для любого непустого специального семейства $\mathcal{T}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 0$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = n$;

(2) *булева алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ состоит из 2^n элементов с n атомами, порождающими эту алгебру;*

(3) *$\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ является булевой алгеброй, состоящей из 2^n элементов с n атомами, порождающими эту алгебру.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3). Достаточно отметить, что при $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 0$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = n$ семейство $\mathcal{T}$ состоит из некоторых теорий T_i, $i = 1,\ldots,n$, изолирующие предложения которых порождают как $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$, так и $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ с атомными элементами $\{T_i\}$.

(3) $\Rightarrow$ (2) очевидно, поскольку в этом случае каждое Bd-определимое множество Bs-определимо.

(2) $\Rightarrow$ (1). Так как $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ конечно с n атомными элементами и каждый атомный элемент является одноэлементным, то $|\mathcal{T}| = n$, откуда следует $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 0$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = n$ по предложению 3.3.7. $\Box$

Теорема 3.5.3. *Для любого непустого специального Bs-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ и $n \in \omega \setminus \{0\}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 1$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}) = n$;

(2) *булева алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ изоморфна прямому произведению n бесконечных булевых алгебр $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n$, каждая из которых порождается атомными элементами;*

(3) *алгебра $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ содержит n новых атомных элементов относительно $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). По предположению $\mathcal{T}$ делится на n непересекающихся $\overline{e}$-минимальных Bs-определимых подсемейств $\mathcal{T}_{\varphi_1},\ldots,\mathcal{T}_{\varphi_n}$. В силу $\overline{e}$-минимальности булевы алгебры $\mathcal{B}_{Bs}\left(\mathcal{T}_{\varphi_i}\right)$ порождаются атомными элементами. Беря

$$\mathcal{B}_{Bs} = \mathcal{B}_{Bs}\left(\mathcal{T}_{\varphi_1}\right) \times \ldots \times \mathcal{B}_{Bs}\left(\mathcal{T}_{\varphi_n}\right),$$

получаем булеву алгебру, представляющую все Bs-определимые подсемейства $\mathcal{T}$ как булевы комбинации (ко)конечных подсемейств $\mathcal{T}_{\varphi_i}$. Так как эти булевы комбинации также представляют элементы $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$, имеется естественный изоморфизм между $\mathcal{B}_{Bs}$ и $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Поскольку $\mathcal{T}$ делится на n непересекающихся $\bar{e}$-минимальных Bs-определимых подсемейств $\mathcal{T}_{\varphi_1},\ldots,\mathcal{T}_{\varphi_n}$, существует n точек накопления для $\mathcal{T}$, и каждое множество $\mathcal{T}_{\varphi_i}$ имеет ровно одну из этих точек накопления T_i. Каждая теория T_i задает Bd-определимый атомный элемент $\{T_i\}$ в алгебре $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$, который не принадлежит $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$. Поскольку все одноэлементные множества $\{T\}$, для $T\in\mathcal{T}\setminus\{T_1,\ldots,T_n\}$, принадлежат $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$, $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ содержит n новых атомных порождающих элементов относительно $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ изоморфна прямому произведению n бесконечных булевых алгебр $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n$, каждая из которых порождается атомными элементами, то она имеет n бесконечных частей, не пересекающихся по модулю $\varnothing$, являющихся булевыми алгебрами такими, что единицы этих алгебр можно разделить только на конечные и коконечные части. Это означает, что существуют попарно несовместные предложения φ, такие что эти части соответствуют $\bar{e}$-минимальным Bs-определимым семействам $\mathcal{T}_\varphi$. Более того, так как $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})\simeq\mathcal{B}_1\times\ldots\times\mathcal{B}_n$, то каждое Bs-определимое семейство в $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ определяется некоторой булевой комбинацией предложений φ и предложений ψ, изолирующих атомные элементы. Это означает, что $\mathcal{T}$ делится на n непересекающихся $\bar{e}$-минимальных Bs-определимых подсемейств, задающих $\overline{RS}(\mathcal{T})=1$ и $\overline{ds}(\mathcal{T})=n$.

(3) $\Rightarrow$ (1). По предложению 3.5.2 алгебра $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ бесконечна. Поскольку она содержит n новых атомных элементов относительно $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$, в $\mathcal{T}$ существует n теорий, которые не изолируются предложениями. Поскольку каждое бесконечное семейство имеет точку накопления, это означает, что $\mathcal{T}$ делится на n непересекающихся $\bar{e}$-минимальных Bs-определимых частей, дающих $\overline{RS}(\mathcal{T})=1$ и $\overline{ds}(\mathcal{T})=n$. $\square$

Замечание 3.5.4. Каждая алгебра $\mathcal{B}_i$ в теореме 3.5.3 соответствует $\bar{1}$-минимальному семейству и изоморфна объединению направленного вверх семейства конечных алгебр $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ из предложения 3.5.2 так, что мощность этого семейства равна $|\mathcal{B}_i|$. Алгебры $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ соответствуют конечным подсемействам $\mathcal{T}$ данного семейства $\mathcal{T}'$ теорий, таких что все теории из $\mathcal{T}$ $\mathcal{T}'$-изолированы некоторыми предложениями. При этом существует n теорий в $\mathcal{T}'$, не принадлежащих всем $\mathcal{T}$ и являющихся неглавными ультрафильтрами относительно $\mathcal{T}'$.

Замечание 3.5.5. Аналогично замечанию 3.5.4 алгебры $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ в теореме 3.5.3 содержат направленные вверх семейства, объединения которых порождают алгебры $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T}_2)$ для $\overline{2}$-минимальных семейств $\mathcal{T}_2$, с $\overline{RS}(\mathcal{T}_2)=2$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}_2)=1$. Беря прямые произведения n алгебр $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T}_2)$, мы получим алгебры $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T}_{2,n})$ для непересекающихся объединений $\mathcal{T}_{2,n}$ $\overline{2}$-минимальных семейств $\mathcal{T}_2$ с условием $\overline{RS}(\mathcal{T}_{2,n})=2$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}_{2,n})=n$, $n\in\omega\setminus\{0\}$. Теперь мы можем продолжить процесс, чередуя пошаговые объединения направленных вверх семейств рангов $<\alpha$ и получая α-*ранжированные* алгебры $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T}_\alpha)$ для $\overline{\alpha}$-минимальных семейств $\mathcal{T}_\alpha$, а также прямые произведения n алгебр $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T}_\alpha)$, для $\overline{\alpha}$-минимальных семейств $\mathcal{T}_\alpha$, с получением их дизъюнктных объединений $\mathcal{T}_{\alpha,n}$, где $\overline{RS}(\mathcal{T}_{\alpha,n})=\alpha$ и $\overline{ds}(\mathcal{T}_{\alpha,n})=n$, $n\in\omega\setminus\{0\}$. При этом каждый переход от $\mathcal{T}_\beta$, $\beta<\alpha$ до $\mathcal{T}_{\alpha,n}$ создает n новых атомных элементов для $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T}_{\alpha,n})$ так, что эти новые элементы представляют неглавные ультрафильтры относительно элементов рангов $<\alpha$.

Объединяя рассуждения выше, обобщаем теорему 3.5.3 для произвольного $\overline{e}$-тотально трансцендентного Bs-замкнутого специального семейства $\mathcal{T}$:

Теорема 3.5.6. *Для любого непустого Bs-замкнутого специального семейства $\mathcal{T}$, ординала $\alpha\geqslant 1$ и натурального числа $n\in\omega\setminus\{0\}$, следующие условия эквивалентны:*

(1) $\overline{RS}(\mathcal{T})=\alpha$ и $\overline{ds}(\mathcal{T})=n$;

(2) *булева алгебра $\mathcal{B}_{Bs}(\mathcal{T})$ изоморфна прямому произведению n булевых алгебр $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_n$, каждая из которых порождается элементами рангов $<\alpha$ так, что каждая алгебра $\mathcal{B}_n$ содержит бесконечное число элементов каждого ранга $\beta<\alpha$;*

(3) *алгебра $\mathcal{B}_{Bd}(\mathcal{T})$ состоит из бесконечного числа атомных элементов каждого ранга $\beta<\alpha$ для $\beta\geqslant 0$ и ровно n атомных элементов ранга α, эти n атомных элементов соответствуют неглавным ультрафильтрам по отношению к элементам рангов $<\alpha$.*

3.6 Замыкания

Всюду рассматриваются семейства $\mathcal{T}$ непротиворечивых теорий фиксированной сигнатуры Σ. Определим и изучим свойства оператора $Cl_1(\mathcal{T})$ для замыкания, отличного от $Cl_s(\mathcal{T})$, но также использующего предложения только из $\bigcup\mathcal{T}$.

Напомним, что E-замыкание $Cl_E(\mathcal{T})$ [6] для семейства полных теорий $\mathcal{T}$ характеризуется предложением 1.2.8.

Замечание 3.6.1. Понятие E-замыкания семейства теорий $\mathcal{T}$ в терминах s-определимых множеств, охарактеризованное в предложении 1.2.8, становится неподходящим, если $\mathcal{T}$ содержит неполные теории. Действительно, если $T \notin \mathcal{T}$ и для любого предложения $\varphi \in T$ множество $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно, то $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно для любого предложения $\varphi \in T'$, где T' — произвольная подтеория T. Таким образом, одна теория вместе с некоторыми своими подтеориями (в бесконечном количестве) может дать большие E-замыкания, в то время как E-замыкания для одноэлементных множеств тождественны.

Теперь введем следующее понятие Cl_1-замыкания для семейств $\mathcal{T}$, возможно, неполных теорий, дающее свойства, аналогичные многим свойствам Cl_E для семейств полных теорий.

Определение 3.6.2. Для семейства теорий $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ и теории T полагаем $T \in Cl_1(\mathcal{T})$, если $T \in \mathcal{T}$, или T непусто и

$$T = \{\varphi \in Sent(\Sigma) \mid (\mathcal{T}')_\varphi \text{ бесконечно}\} \tag{3.1}$$

для некоторого $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Если $\mathcal{T}'$ фиксировано, мы говорим, что T *принадлежит Cl_1-замыканию семейства $\mathcal{T}$ относительно $\mathcal{T}'$*, а T является *точкой накопления* $\mathcal{T}$ относительно $\mathcal{T}'$. Семейство $\mathcal{T}$ называется *Cl_1-замкнутым* или просто *замкнутым*, если $\mathcal{T} = Cl_1(\mathcal{T})$. Мы предполагаем, что любая теория $T \in Cl_1(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ не пуста, поскольку в противном случае пустая теория всегда принадлежит $Cl_1(\mathcal{T})$ посредством $\mathcal{T}' = \varnothing$. Это предположение вводится для согласования свойств замыканий Cl_1 и Cl_E, где $Cl_E(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ для любого конечного семейства полных теорий $\mathcal{T}$. При данном предположении имеем $Cl_1(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ для любого конечного семейства $\mathcal{T}$.

Замечание 3.6.3. Любое множество T, удовлетворяющее соотношению (3.1), всегда является теорией. Действительно, если $\varphi \in T$ и $\varphi \vdash \psi$ для предложения $\psi \in Sent(\Sigma)$, то $|(\mathcal{T}')_\varphi| \geqslant \omega$ и $(\mathcal{T}')_\varphi \subseteq (\mathcal{T}')_\psi$, поэтому $|(\mathcal{T}')_\psi| \geqslant \omega$, откуда следует $\psi \in T$.

Замечание 3.6.4. Поскольку рассматриваемые семейства $\mathcal{T}$ состоят из непротиворечивых теорий, в семейства $Cl_1(\mathcal{T})$ входят только непротиворечивые теории T, так как в противном случае $\neg x \approx x \in T$, откуда следует $|(\mathcal{T}')_{\neg x \approx x}| \geqslant \omega$, а это противоречит непротиворечивости всех теорий из $\mathcal{T}$.

Замечание 3.6.5. Если теория T принадлежит Cl_1-замыканию $\mathcal{T}$ относительно $\mathcal{T}'$, то T принадлежит Cl_1-замыканию $\mathcal{T}$ относительно $\mathcal{T}''$ для каждого коконечного $\mathcal{T}'' \subset \mathcal{T}'$ и относительно $\mathcal{T}'''$ для каждого конечного расширения $\mathcal{T}''' \subset \mathcal{T}$ подсемейства $\mathcal{T}'$. Таким образом, условие $T \in Cl_1(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ свидетельствуется бесконечным числом семейств $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. В то же время бесконечные сужения и расширения подсемейства $\mathcal{T}'$ могут задавать другие точки накопления для Cl_1. Действительно, если $\mathcal{T}'$ расширяется его копией $\mathcal{T}''$ с 0-местным предикатом R таким, что $R \in T$ для $T \in \mathcal{T}''$ и $R \notin T$ для $T \in \mathcal{T}'$, то $\mathcal{T}' \cup \mathcal{T}''$ задает точку накопления T', содержащую R, тогда как $\mathcal{T}'$ не может порождать теорию, содержащую предложение R.

Пример 3.6.6. 1. Если $\mathcal{T}$ — семейство теорий T_n групп с условием $\forall x(\neg x \approx e \to \neg x^m \approx e)$, $n \in \omega$, $1 \leqslant m \leqslant n$, то Cl_1-замыкание $Cl_1(\mathcal{T})$ состоит из теорий T_n и теории T_∞ групп без кручения.

2. Если $\mathcal{T}$ — семейство теорий T_n графов без циклов длин $\leqslant n$, то Cl_1-замыкание $Cl_1(\mathcal{T})$ состоит из теорий T_n и теории T_∞ ациклических графов.

3. Если $\mathcal{T}$ — семейство теорий T_n векторных пространств над конечным полем F, имеющих размерности $\geqslant n$, то Cl_1-замыкание $Cl_1(\mathcal{T})$ состоит из теорий T_n и теории T_∞ векторных пространств над конечным полем F и бесконечных размерностей.

По определению имеют место следующие свойства для оператора Cl_1 и замкнутых семейств.

Предложение 3.6.7. (1) (Рефлексивность) *Для любого семейства $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \subseteq Cl_1(\mathcal{T})$.*

(2) (Монотонность) *Если $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1$, то $Cl_1(\mathcal{T}_0) \subseteq Cl_1(\mathcal{T}_1)$.*

(3) (Отрицание конечного характера) *Для любой теории $T \in Cl_1(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ не существует конечного $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ такого, что $T \in Cl_1(\mathcal{T}_0)$.*

(4) (Замкнутость для пересечений) *Любое пересечение замкнутых семейств замкнуто.*

Замечание 3.6.8. Рассматривая произвольные семейства $\mathcal{T}_0$,$\mathcal{T}_1$ (возможно, неполных) теорий сигнатуры Σ, в силу монотонности (предложение 3.6.7 (2))имеем

$$Cl_1(\mathcal{T}_0) \cup Cl_1(\mathcal{T}_1) \subseteq Cl_1(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1). \tag{3.2}$$

В то же время существуют семейства $\mathcal{T}_0$,$\mathcal{T}_1$ и теории $T \in Cl_1(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1)$ с условием $T \notin Cl_1(\mathcal{T}_0) \cup Cl_1(\mathcal{T}_1)$, т. е. в отличие от теоремы 1.2.9 включение (3.2) может быть строгим. Действительно, пусть $\mathcal{T}_i$ — $\overline{e}$-минимальное семейство теорий T_i^n, выполняемых конечными структурами $\mathcal{M}_i^n$ сигнатуры $\{R_0^{(0)}, R_1^{(0)}\}$ с $\mathcal{M}_i^n \models R_i$ и аксиоматизируемых предложением R_i, а также предложением, утверждающим, что в M_i^n, $i = 0,1$, $n \in \omega \setminus \{0\}$, имеется ровно n элементов. Семейство $\mathcal{T}_i$ имеет единственную точку накопления T_i с бесконечной моделью, удовлетворяющей R_i, $i = 0,1$. В то же время семейство $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1$ имеет три точки накопления: T_0, T_1, T_{01}, где T_{01} содержит предложения R_0 и R_1. Таким образом, $T_{01} \in Cl_1(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1) \setminus (Cl_1(\mathcal{T}_0) \cup Cl_1(\mathcal{T}_1))$.

Замечание 3.6.9. Отметим, что

$$Cl_1(\mathcal{T}_0) \cup Cl_1(\mathcal{T}_1) = Cl_1(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1), \tag{3.3}$$

если $\mathcal{T}_0$ или $\mathcal{T}_1$ конечно, так как конечные семейства замкнуты и принадлежность к Cl_1-замыканию относительно подсемейства $\mathcal{T}'$ не зависит от добавления или удаления конечного подсемейства для $\mathcal{T}'$.

Предложение 3.6.10. *Заметим, что*

$$Cl_1(\mathcal{T}_0) \cup Cl_1(\mathcal{T}_1) = Cl_1(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1), \tag{3.4}$$

если $\mathcal{T}_0$ или $\mathcal{T}_1$ конечно, так как конечные семейства замкнуты и принадлежность к Cl_1-замыканию относительно подсемейства $\mathcal{T}'$ не зависит от добавления или удаления конечного подсемейства для $\mathcal{T}'$.

Доказательство. Поскольку $T_1 \in Cl_1(\mathcal{T} \cup \{T_2\}) = Cl_1(\mathcal{T}) \cup \{T_2\}$ в силу равенству (3.4) для одноэлементного множества $\{T_2\}$ и $T_1 \notin Cl_1(\mathcal{T})$, то $T_1 = T_2$ и, следовательно, $T_2 \in Cl_1(\mathcal{T} \cup \{T_1\})$. □

Предложение 3.6.11. *Если теория T принадлежит Cl_1-замыканию $\mathcal{T}$ относительно семейства $\mathcal{T}'$, то семейство $\mathcal{T}'$ является e-минимальным.*

Доказательство. Поскольку теория T не пуста, то $(\mathcal{T}')_\varphi$ бесконечно для некоторого φ, в частности, $|\mathcal{T}'| \geqslant \omega$. Предположим, что $\mathcal{T}'$ не e-минимально. Тогда существует предложение $\varphi \in Sent(\Sigma)$, такое что оба множества $(\mathcal{T}')_\varphi$ и $(\mathcal{T}')_{\neg\varphi}$ бесконечны. По определению (3.1) теории T получаем $\varphi, \neg\varphi \in T$, что невозможно в силу непротиворечивости теории T. □

Предложение 3.6.12. *Любое e-минимальное семейство $\mathcal{T}$ имеет некоторую точку накопления T относительно $\mathcal{T} \setminus \{T\}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $T = \{\varphi \in Sent(\Sigma) \mid (\mathcal{T})_\varphi$ бесконечно$\}$. По e-минимальности семейства $\mathcal{T}$ множество T непротиворечиво и в силу замечания 3.6.3 является теорией. Таким образом,

$T \in Cl_1(\mathcal{T} \setminus \{T\})$ относительно $\mathcal{T} \setminus \{T\}$. Это означает, что T является точкой накопления. $\square$

Замечание 3.6.13. Как показано в [11, Теорема 7.3], любое e-минимальное семейство полных теорий имеет единственную точку накопления. По определению подсемейства $\mathcal{T}'$ семейства $\mathcal{T}$ определяют единственные точки накопления $T \in Cl_1(\mathcal{T})$, удовлетворяющие равенству (3.1). В общем случае, следуя предложению 3.6.12, можно найти несколько точек накопления, например, рассматривая e-минимальное семейство $\mathcal{T}$ позитивных теорий с предложением φ таким, что $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно, и для некоторого бесконечного $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ множество $(\mathcal{T}')_\varphi$ пусто. При этом $\mathcal{T}$ имеет точку накопления T относительно $\mathcal{T} \setminus \{T\}$, и семейство $\mathcal{T}'$ также e-минимально, с точкой накопления T', для которой $T \neq T'$, поскольку $\varphi \in T$ и $\varphi \notin T'$.

Используя достаточно большие сигнатуры, описанный подход позволяет создавать неограниченное количество точек накопления для e-минимальных семейств.

Из предложения 3.6.11 и 3.6.12 вытекает:

Следствие 3.6.14. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ и бесконечного подсемейства $\mathcal{T}'$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *семейство $\mathcal{T}$ имеет точку накопления относительно $\mathcal{T}'$;*

(2) *подсемейство $\mathcal{T}'$ является e-минимальным.*

В силу следствия 3.6.14 описание множества точек накопления для семейства $\mathcal{T}$ относительно подсемейств сводится к описанию e-минимальных подсемейств $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ и их точек накопления.

Предложение 3.6.15. *Если $\mathcal{T}$ является $\overline{e}$-минимальным семейством теорий, то существует единственная точка накопления $T \in Cl_1(\mathcal{T})$ семейства $\mathcal{T}$, удовлетворяющая (3.1). Эта точка накопления T определяется любым бесконечным подсемейством $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.*

Доказательство. Пусть $T' = \{\varphi \in Sent(\Sigma) \mid |(\mathcal{T}')_\varphi| \geqslant \omega\}$ и $T'' = \{\varphi \in Sent(\Sigma) \mid |(\mathcal{T}'')_\varphi| \geqslant \omega\}$ для бесконечных подсемейств $\mathcal{T}', \mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}$. Покажем, что $T' = T''$. По симметричности достаточно доказать, что $T' \subseteq T''$. Пусть $\varphi \in T'$, т.е. $|(\mathcal{T}')_\varphi| \geqslant \omega$. В силу $\overline{e}$-минимальности семейства $\mathcal{T}$ лишь конечное число теорий $\mathcal{T}$ не содержит φ. Следовательно, $|(\mathcal{T}'')_\varphi| \geqslant \omega$ и, значит, $\varphi \in T''$. $\square$

Замечание 3.6.16. Используя теорему 3.3.16 и предложение 3.6.15, получаем конечное число точек накопления для семейств $\mathcal{T}$ с $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \alpha \leqslant 1$.

В противном случае $\bar{e}$-тотально трансцендентные семейства задают $max\{\alpha,\omega\}$ точек накопления. Как показывает следующий пример, существуют семейства $\mathcal{T}$ больших сигнатур, которые не являются $\bar{e}$-тотально трансцендентными и при этом не имеют точек накопления относительно своих подсемейств.

Пример 3.6.17. Пусть $\mathcal{T}$ — бесконечное семейство, расширенное для любого $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, 0-местным предикатом $R_{\mathcal{T}'}$ таким, что $R_{\mathcal{T}'}$ принадлежит каждой теории в $\mathcal{T}'$, а $\neg R_{\mathcal{T}'}$ принадлежит каждой теории из $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$. Теперь, если мы возьмем бесконечное подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, то это подсемейство не сможет сформировать непротиворечивую теорию $T \in Cl_1(\mathcal{T})$, так как $\mathcal{T}'$ делится на два бесконечных подсемейства $\mathcal{T}''$ и $\mathcal{T}''' = \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}''$. По определению оба подсемейства $(\mathcal{T}')_{R_{\mathcal{T}''}}$ и $(\mathcal{T}')_{\neg R_{\mathcal{T}''}}$ бесконечны, откуда следует $R_{\mathcal{T}''} \in T$ и $\neg R_{\mathcal{T}''} \in T$, а это невозможно в силу непротиворечивости T.

В силу конструкции семейства в примере 3.6.17 имеют сигнатуры мощности не менее 2^ω. Возникает естественный вопрос о существовании бесконечных семейств с тривиальными Cl_1-замыканиями в сигнатурах мощности $< 2^\omega$, в частности, ω_1. Частично отвечая на этот поставленный выше вопрос, мы получаем следующую теорему.

Теорема 3.6.18. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ полных теорий не более чем счетной сигнатуры Σ имеет место равенство $Cl_1(\mathcal{T}) = Cl_E(\mathcal{T})$.*

Доказательство. Для проверки искомого равенства можно предполагать, что $T \notin \mathcal{T}$. Пусть $T \in Cl_E(\mathcal{T})$. Покажем, что $T \in Cl_1(\mathcal{T}')$ для подходящего счетного e-минимального подсемейства $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Поскольку сигнатура Σ не более чем счетна, мы можем перенумеровать все предложения из $Sent(\Sigma)$: φ_i, $i \in \omega$. Теперь по шагам построим требуемое e-минимальное семейство $\mathcal{T}' = \{T_m \mid m \in \omega\}$ следующим образом. Рассмотрим предложение φ_0. Поскольку T теория полна, $\varphi_0 \in T$ или $\neg\varphi_0 \in T$. В первом случае выберем $T_0 \in \mathcal{T}_{\varphi_0}$, а во втором случае $T_0 \in \mathcal{T}_{\neg\varphi_0}$. Обозначим формулу $\varphi_0^{\delta_0} \in T$ через ψ_0. Теперь мы сформируем индукционный шаг, предполагая, что семейство $\mathcal{T}_n = \{T_0, \ldots, T_k\}$ выбрано после того, как рассмотрены предложения $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ с подходящей формулой $\psi_n = \varphi_0^{\delta_0} \wedge \ldots \wedge \varphi_n^{\delta_n} \in T$, $\delta_0, \ldots, \delta_n \in \{0,1\}$. Возьмем предложение $\varphi_{n+1}^{\delta_{n+1}} \in T$, $\delta_{n+1} \in \{0,1\}$. Имеем $\psi_{n+1} = \varphi_0^{\delta_0} \wedge \ldots \wedge \varphi_n^{\delta_n} \wedge \varphi_{n+1}^{\delta_{n+1}} \in T$. Если $(\mathcal{T}_n)_{\psi_{n+1}} \neq \varnothing$, полагаем $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n$. В противном случае, выберем теорию $T_{k+1} \in \mathcal{T}_{\psi_{n+1}}$ и положим $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{T_{k+1}\}$. Рассмотрим искомое семейство $\mathcal{T}' = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathcal{T}_n$. Это семейство бесконечно, поскольку в противном случае, теория

T отделяется некоторым предложением $\chi \in T$ от конечного $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_n$. Поскольку $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_n$ и $\chi = \varphi^\delta_m \in T$ для некоторого m, то по построению мы выбираем некоторую теорию $T_l \in \mathcal{T}_\chi$ для $\mathcal{T}'$, что противоречит условию $(\mathcal{T}')_\chi = \varnothing$. Заметим, что подсемейство $\mathcal{T}'$ является e-минимальным. Действительно, для любого предложения $\varphi \in Sent(\Sigma)$ имеем $\varphi = \varphi_n$ для некоторого n. Если $\varphi \in T$, то $\mathcal{T}_{\neg\varphi} \subseteq \mathcal{T}_n$, откуда следует $|\mathcal{T}_{\neg\varphi}| < \omega$. Если $\varphi \notin T$, то $\neg\varphi \in T$ с $\neg\varphi = \varphi_r$ для некоторого r, и тогда $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_r$, значит, $|\mathcal{T}_\varphi| < \omega$. Поскольку по построению каждое предложение $\varphi \in T$ принадлежит бесконечному числу теорий в $\mathcal{T}'$, то e-минимальное семейство $\mathcal{T}'$ аппроксимирует теорию T и $T \in Cl_1(\mathcal{T})$ относительно $\mathcal{T}'$ в силу предложения 3.6.12. Обратно, если $T \in Cl_1(\mathcal{T})$ относительно подсемейства $\mathcal{T}'$, то $\mathcal{T}'$ является e-минимальным по предложению 3.6.11 и $\mathcal{T}'$ аппроксимирует T, откуда следует $T \in Cl_E(\mathcal{T})$ по предложению 1.2.8. $\square$

Из теорем 1.2.9 и 3.6.18 непосредственно вытекает:

Следствие 3.6.19. *Для любых семейств $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_1$ полных теорий не более чем счетной сигнатуры Σ, $Cl_1(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1) = Cl_1(\mathcal{T}_0) \cup Cl_1(\mathcal{T}_1)$.*

Замечание 3.6.20. Следуя теореме 3.6.18 для семейств полных теорий счетной сигнатуры, имеем одни и те же точки накопления относительно Cl_1 и относительно Cl_E. Ясно, что для неполных теорий различие может быть неограниченным, поскольку, например, в силу предложения 3.2 бесконечные семейства позитивных теорий имеют единственные точки накопления относительно Cl_E, хотя, беря $\bar{e}$-тотально трансцендентные семейства позитивных теорий с большими рангами $\overline{RS} = \alpha$, получаем существование $max\{\alpha,\omega\}$ точек накопления относительно Cl_1.

Теперь сравним семейства $Cl_1(\mathcal{T})$ и $Cl_1(Cl_1(\mathcal{T}))$. По рефлексивности имеем $Cl_1(\mathcal{T}) \subseteq Cl_1(Cl_1(\mathcal{T}))$, аналогично тому, что $Cl_E(\mathcal{T}) \subseteq Cl_E(Cl_E(\mathcal{T}))$ для семейства полных теорий.

Замечание 3.6.21. Если $T \in Cl_E(Cl_E(\mathcal{T}))$ для семейства полных теорий, то либо $T \in Cl_E(\mathcal{T})$, либо, согласно предложению 1.2.8, для любого $\varphi \in T$, $(Cl_E(\mathcal{T}))_\varphi$ бесконечно, откуда следует, что $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно. Действительно, если $\mathcal{T}_\varphi$ конечно, то каждая теория из $(Cl_E(\mathcal{T}))_\varphi$ принадлежит $\mathcal{T}$, откуда вытекает $T \in \mathcal{T}$. В любом случае $T \in Cl_E(\mathcal{T})$. Таким образом, $Cl_E(\mathcal{T}) \supseteq Cl_E(Cl_E(\mathcal{T}))$, следовательно, $Cl_E(\mathcal{T}) = Cl_E(Cl_E(\mathcal{T}))$. В силу теоремы 1.19 получаем

$$Cl_1(\mathcal{T}) = Cl_1(Cl_1(\mathcal{T})) \tag{3.5}$$

для любого семейства полных теорий $\mathcal{T}$ счетной сигнатуры.

Оператор замыкания Cl_1 на семействах, удовлетворяющий равенству (3.5), называется *транзитивным.*

Замечание 3.6.21 допускает следующее обобщение для произвольного семейства счетной сигнатуры.

Теорема 3.6.22. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ не более чем счетной сигнатуры Σ оператор замыкания Cl_1 транзитивен.*

Доказательство. Поскольку по рефлексивности имеет место $Cl_1(Cl_1(\mathcal{T})) \supseteq Cl_1(\mathcal{T})$, то достаточно показать, что любая теория $T \in Cl_1(Cl_1(\mathcal{T}))$ принадлежит $Cl_1(\mathcal{T})$. Без ограничения общности будем считать, что $T \notin \mathcal{T}$. Докажем, что T удовлетворяет равенству (3.1) для некоторого счетного $\overline{e}$-минимального $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Учитывая $|\Sigma| \leqslant \omega$, мы можем перечислить как предложения из T: φ_n, $n \in \omega$, так и предложения из $Sent(\Sigma(\mathcal{T}))$: φ'_n, $n \in \omega$. Теперь построим семейство $\mathcal{T}' = \{T_k \mid k \in \omega\}$ следующим образом. Обозначим через ψ_0 предложение φ_0 и возьмем произвольную теорию $T_0 \in \mathcal{T}_{\psi_0}$: $\mathcal{T}_{\psi_0} \neq \varnothing$, поскольку каждое предложение χ из T задает бесконечную окрестность $(Cl_1(\mathcal{T}))_\chi$, и если эта окрестность имеет теорию из $Cl_1(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$, то эта теория снова имеет бесконечную χ-окрестность в $\mathcal{T}$. Если семейство $\mathcal{T}'_m = \{T_0, \ldots, T_m\}$ уже построено, для предложения $\psi_n = \varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, то рассмотрим предложение $\psi_{n+1} = \psi_n \wedge \varphi_{n+1}$. Если $\mathcal{T}_{\psi_n} \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_{n+1}}} = \varnothing$, мы не расширяем $\mathcal{T}'_m$ и продолжим процесс для $n+1$. В противном случае найдем теорию $T_{m+1} \in \mathcal{T}_{\psi_{n+1}}$, которая не содержит предложения из $\{\varphi'_0, \ldots, \varphi'_{n+1}\} \setminus T$ (эта теория существует по определению теории T), и положим $\mathcal{T}'_{m+1} = \mathcal{T}'_m \cup \{T_{m+1}\}$. Поскольку теория $T \notin \mathcal{T}$ аппроксимируется как семейством $Cl_1(\mathcal{T})$, так и семейством $\mathcal{T}$, процесс задает счетную возрастающую цепочку $(\mathcal{T}'_m)_{m\in\omega}$. Покажем, что $\mathcal{T}' = \bigcup\limits_{m\in\omega} \mathcal{T}'_m$ — искомое семейство. Действительно, по построению для любого предложения $\varphi \in T$ семейство $(\mathcal{T}')_\varphi$ содержит бесконечно много теорий. Обратно, если $(\mathcal{T}')_\varphi$ бесконечно, то $\varphi \in T$, поскольку мы не выбираем бесконечно много T_m, которые не содержат φ. Таким образом, теория T удовлетворяет соотношению(3.1) относительно $\mathcal{T}'$. Наконец, заметим, что подсемейство $\mathcal{T}'$ является $\overline{e}$-минимальным, поскольку для любого предложения $\varphi \in Sent(\Sigma(\mathcal{T}))$ либо конечное число теорий T_m содержат φ, если $\varphi \notin T$, либо коконечное число теорий T_m содержат φ, если $\varphi \in T$. $\square$

Следующий пример показывает, что равенство (3.5), означающее транзитивность, может не выполняться для семейств несчетных сигнатур.

Пример 3.6.23. Пусть $\mathcal{T}_i = \{T_{ij} \mid j \in \omega\}$ — непересекающиеся $\overline{e}$-минимальные семейства не более чем счетной сигнатуры Σ_0 с различными точками накопления T_i^∞, $i \in \omega$ и метками, отделяющими эти семейства. Например, пусть каждая теория T_{ij} имеет $(j+1)$-элементную структуру с единственным 0-местным предикатным символом P_i, удовлетворяющим $\models P_i$ для всех моделей T_{ij}, $j \in \omega$ и $\models \neg P_k$ для $k \neq i$. Очевидно, что семейство $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{i\in\omega} \mathcal{T}_i$ удовлетворяет условию $\overline{RS}(\mathcal{T}) = 2$, $\overline{ds}(\mathcal{T}) = 1$ с единственной дополнительной точкой накопления T^∞, удовлетворяющей $\models \neg P_k$ для всех $k \in \omega$. По теореме 3.6.22 теория T^∞ принадлежит как $Cl_1(Cl_1(\mathcal{T}))$, так и $Cl_1(\mathcal{T})$ ввиду их равенства. Теперь расширим теории T_{ij} следующим образом, используя эффект, описанный в примере 3.6.17, сохраняя расширения T_i^∞ в Cl_1-замыкании и получая $T \in Cl_1(Cl_1(\mathcal{T})) \setminus Cl_1(\mathcal{T})$ для соответствующего расширения T в T^∞. Счетное подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ будем называть $(\infty,1)$-*специальным*, если существует бесконечно много непустых пересечений $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}_i$ и каждое непустое пересечение этого вида является одноэлементным. Ясно, что каждое подсемейство $\mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}$ с бесконечным числом непустых пересечений $\mathcal{T}'' \cap \mathcal{T}_i$ содержит $(\infty,1)$-специальное подсемейство, и каждое $(\infty,1)$-специальное подсемейство $\mathcal{T}'$ делится на два непересекающихся $(\infty,1)$-специальных подсемейства $\mathcal{T}''$ и $\mathcal{T}'''$, таких, что $\mathcal{T}'' \cup \mathcal{T}''' = \mathcal{T}'$. Теперь для любого $(\infty,1)$-специального подсемейства $\mathcal{T}'$ и его разбиения на $(\infty,1)$-специальные непересекающиеся подсемейства $\mathcal{T}''$ и $\mathcal{T}'''$ мы введем новый 0-местный предикат $R_{\mathcal{T}',\mathcal{T}''}$ такой, что $R_{\mathcal{T}',\mathcal{T}''}$ принадлежит расширению любой теории из $\mathcal{T}''$ и $\neg R_{\mathcal{T}',\mathcal{T}''}$ принадлежит расширению любой теории из $\mathcal{T}'''$. Рассмотрим семейство $\widehat{\mathcal{T}}$, состоящее из указанных выше расширений теорий из $\mathcal{T}$ до сигнатуры Σ, содержащей предикаты $R_{\mathcal{T}',\mathcal{T}''}$. Каждое семейство $\widehat{\mathcal{T}_i}$, состоящее из расширений $\widehat{\mathcal{T}_i}$ теорий из $\mathcal{T}_i$, имеет единственную точку накопления $\widehat{T_i^\infty}$, которая получается из T_i^∞ добавлением тавтологий. Эти точки накопления задают единственную точку накопления $\widehat{T^\infty}$, которая получается из T^∞ добавлением тавтологий. Таким образом, $\widehat{T_i^\infty} \in Cl_1(\widehat{\mathcal{T}})$, $i \in \omega$ и $\widehat{T^\infty} \in Cl_1(Cl_1(\widehat{\mathcal{T}}))$. В то же время, $\widehat{T^\infty} \notin Cl_1(\widehat{\mathcal{T}})$, так как теория $\widehat{T^\infty}$ должна аппроксимироваться относительно подсемейства $\widehat{\mathcal{T}'}$ семейства $\widehat{\mathcal{T}}$, содержащего $(\infty,1)$-специальное подсемейство, а по построению расширенной сигнатуры семейства, содержащие $(\infty,1)$-специальные подсемейства, не дают совместных точек накопления. Таким образом, существуют семейства $\mathcal{T}$ сигнатур мощности 2^ω, для которых равенство (3.5) не выполняется.

Замечание 3.6.24. В силу примера 3.6.23 существуют семейства $Cl_1(\mathcal{T})$, которые не являются Cl_1-замкнутыми. Кроме того, модификация примера 3.6.23 может задать семейство $\mathcal{T}_0$ и семейства $\mathcal{T}_n = Cl_n(\mathcal{T}_0)$, $n \geqslant 1$ такие, что $\mathcal{T}_{n+1} = Cl_1(\mathcal{T}_n)$ и $\mathcal{T}_n \subsetneqq \mathcal{T}_{n+1}$, $n \in \omega$, т.е. каждое семейство $\mathcal{T}_n$ не является Cl_1-замкнутым. По определению для любого семейства $\mathcal{T}_0$ объединение $\bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{T}_n$ указанных выше семейств является Cl_1-замкнутым. В то же время по замечанию 3.6.21 и по теореме 3.6.22 семейства $Cl_1(\mathcal{T})$ полных теорий или теорий счетной сигнатуры замкнуты, т.е. определенное выше семейство $\mathcal{T}_1$ является Cl_1-замкнутым.

3.7 e_1-спектры и порождающие подсемейства

Определение 3.7.1. Для семейства $\mathcal{T}$ значение $sup\{|Cl_1(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}'| \mid Cl_1(\mathcal{T}') = Cl_1(\mathcal{T})\}$ называется *e_1-спектром* для $\mathcal{T}$ и обозначается через e_1-$Sp(\mathcal{T})$. Подсемейство $\mathcal{T}'$ семейства $\mathcal{T}$ называется *порождающим* для семейства $Cl_1(\mathcal{T})$, если $Cl_1(\mathcal{T}') = Cl_1(\mathcal{T})$. Порождающее подсемейство $\mathcal{T}'$ семейства $\mathcal{T}$ называется *минимальным (наименьшим)*, если $\mathcal{T}'$ не имеет собственного подсемейства $\mathcal{T}'' \subset \mathcal{T}'$ с условием $Cl_1(\mathcal{T}'') = Cl_1(\mathcal{T})$ (соответственно, $\mathcal{T}'$ является наименьшим по включению подсемейством $\mathcal{T}$, порождающим $Cl_1(\mathcal{T})$).

Ясно, что если $\mathcal{T}'$ является наименьшим порождающим подсемейством Cl_1-замкнутого семейства $\mathcal{T}$, то e_1-$Sp(\mathcal{T}) = |\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'|$. Кроме того, по теореме 3.6.18,

$$e_1\text{-}Sp(\mathcal{T}) = e\text{-}Sp(\mathcal{T}) \tag{3.6}$$

для семейство $\mathcal{T}$ полных теорий не более чем счетной сигнатуры. Поскольку e-спектры могут иметь произвольные значения [5, предложение 4.3], равенство (3.6) приводит к следующему предложению.

Предложение 3.7.2. *Для любой мощности λ существует семейство $\mathcal{T}$ такое, что e_1-$Sp(\mathcal{T}) = \lambda$.*

Определение 3.7.3. Порождающее подсемейство $\mathcal{T}'$ для семейства $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ называется (Bs,∞)*-порождающим теорией* или *tbsig-подсемейством*, если для любой точки накопления $T \in \mathcal{T}$ и бесконечного Bs-определимого множества $X \subseteq \mathcal{T}$, содержащего T, теория T является точкой накопления относительно подсемейства $X \cap \mathcal{T}'$.

По предложению 1.2.8 любое порождающее подсемейство $\mathcal{T}'$ для E-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ полных теорий является *tbsig*-подсемейством.

Следующая теорема аналогична теореме 3.4.12, при дополнительных условиях для семейств теорий.

Теорема 3.7.4. *Если $\mathcal{T}'$ — порождающее tbsig-подсемейство Cl_1-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ с транзитивным оператором Cl_1 для подсемейств семейства $\mathcal{T}$, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{T}'$ является наименьшим порождающим множеством для $\mathcal{T}$;*

(2) *$\mathcal{T}'$ является минимальным порождающим множеством для $\mathcal{T}$;*

(3) *любая теория в $\mathcal{T}'$ изолирована некоторым Bs-определимым подмножеством X в $\mathcal{T}'$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}'$ существует Bs-определимое подмножество $X \subseteq \mathcal{T}'$, вида*

$$(\mathcal{T}')_{\varphi_0} \cap \overline{(\mathcal{T}')_{\varphi_1}} \cap \ldots \cap \overline{(\mathcal{T}')_{\varphi_n}}, \tag{3.7}$$

такое, что $X = \{T\}$;

(4) *любая теория в $\mathcal{T}'$ изолирована некоторым Bs-определимым подмножеством X в $\mathcal{T}$, т.е. для любого $T \in \mathcal{T}'$ существует Bs-определимое подмножество $X \subseteq \mathcal{T}$ такое, что $X = \{T\}$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) и (4) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $\mathcal{T}'$ минимально, но не является наименьшим. Тогда существует порождающее множество $\mathcal{T}''$ такое, что $\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}'' \neq \varnothing$ и $\mathcal{T}'' \setminus \mathcal{T}' \neq \varnothing$. Возьмем $T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}''$. Мы утверждаем, что $T \in Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$, т.е. T является точкой накопления для $\mathcal{T}' \setminus \{T\}$. Действительно, по определению Cl_1 и равенству $\mathcal{T} = Cl_1(\mathcal{T}')$ каждая теория из $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'$ принадлежит $Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$, откуда следует $\mathcal{T} \setminus \{T\} \subseteq Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$. В частности, $\mathcal{T}'' \subseteq Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$. Так как $\mathcal{T}''$ является порождающим множеством для $\mathcal{T}$, то по монотонности имеем $T \in Cl_1(Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\}))$. Поскольку оператор Cl_1-замыкания предполагается транзитивным, получаем $T \in Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$. Так как $T \in Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$ и семейство $\mathcal{T}' \setminus \{T\}$ является порождающим для $\mathcal{T} \setminus \{T\}$, то $\mathcal{T}' \setminus \{T\}$ также является порождающим для $\mathcal{T}$, что противоречит минимальности $\mathcal{T}'$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Если семейство $\mathcal{T}'$ конечно, то по определению Cl_1 имеем $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Поскольку $\mathcal{T}$ конечно, то для любой теории $T \in \mathcal{T}$ существует Bs-определимое подмножество X, которое является одноэлементным и содержащим T. Действительно, если $\mathcal{T} = \{T_0, \ldots, T_n\}$ с условием $T = T_0$, $\varphi_i \in T_1 \div T_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, то $X = \bigcap\limits_{\varphi_i \in T_1} \mathcal{T}_{\varphi_i} \cap \bigcap\limits_{\varphi_i \notin T_1} \overline{\mathcal{T}_{\varphi_i}}$. Так как $\mathcal{T}_\varphi \cap \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\varphi\wedge\psi}$, X представляется в виде (3.7). Пусть теперь семейство $\mathcal{T}'$ бесконечно. Предположим, что некоторая теория $T \in \mathcal{T}'$ не изолирована Bs-определимыми подмножествами $\mathcal{T}'$. Это означает, что Bs-определимые подмножества X в $\mathcal{T}'$, содержащие T, бесконечны. Поскольку $\mathcal{T}'$ является порождающим $tbsig$-подсемейством для $\mathcal{T}$, $X \cap \mathcal{T}'$ является порождающим подсемейством для X, включая теорию T. Таким образом, $T \in Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$. Последнее соотношение противоречит минимальности $\mathcal{T}'$. Ясно, что изолируемость теории Bs-определимым подмножеством сводится к Bs-определимому подмножеству вида (3.7).

(3) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что любая теория T из $\mathcal{T}'$ изолирована некоторым Bs-определимым подсемейством. Тогда $T \notin Cl_1(\mathcal{T}' \setminus \{T\})$. Таким образом, $\mathcal{T}'$ является минимальным порождающим множеством для $\mathcal{T}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) очевидно для конечного $\mathcal{T}'$. Если $\mathcal{T}'$ бесконечно и любая теория T из $\mathcal{T}'$ изолирована некоторым Bs-определимым подсемейством $X' = (\mathcal{T}')_{\varphi_0} \cap \overline{(\mathcal{T}')_{\varphi_1}} \cap \ldots \cap \overline{(\mathcal{T}')_{\varphi_n}}$ семейства $\mathcal{T}'$, то T изолируется Bs-определимым подсемейством $X = \mathcal{T}_{\varphi_0} \cap \overline{\mathcal{T}_{\varphi_1}} \cap \ldots \cap \overline{\mathcal{T}_{\varphi_n}}$, поскольку в противном случае, используя то, что $\mathcal{T}'$ — порождающее $tbsig$-подсемейство для $\mathcal{T}$, в $\mathcal{T}'$ существует бесконечно много теорий, содержащих φ_0 и не содержащих $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, т.е. принадлежащих X'. Это противоречит условию $|X'| = 1$. $\Box$

Замечание 3.7.5. Как отмечалось выше, существование наименьшего порождающего подсемейства $\mathcal{T}'$ из Cl_1-замкнутого семейства $\mathcal{T}$ дает значение e_1-спектра: $e_1\text{-}Sp(\mathcal{T}) = |\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}'|$. Таким образом, в некоторых естественных условиях теорема 3.7.4 характеризует это значение e_1-спектра в топологических терминах.

Применяя предложение 3.3.10 и теорему 3.7.4, получаем:

Предложение 3.7.6. *Любое Cl_1-замкнутое $\overline{e}$-минимальное семейство удовлетворяет условиям теоремы 3.7.4 и состоит из изолированных теорий и единственной точки накопления.*

Докажем следующую аналогичную теореме 1.2.30 теорему для Cl_1-замкнутых семейств.

Теорема 3.7.7. *Для любого семейства* $\mathcal{T}$ *теорий счетной сигнатуры следующие условия эквивалентны:*

(1) $|Cl_1(\mathcal{T})| = 2^\omega$;

(2) e_1-$Sp(\mathcal{T}) = 2^\omega$;

(3) $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \infty$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Поскольку сигнатура счетная, в силу теоремы 3.6.22 оператор Cl_1 транзитивен. Снова в силу счетности сигнатуры оба бесконечных семейства $\mathcal{T}$ и $Cl_1(\mathcal{T})$ являются счетно порожденными, то есть, содержат счетное семейство $\mathcal{T}'$, порождающее как $\mathcal{T}$, так и $Cl_1(\mathcal{T})$. Действительно, поскольку существует счетное число $\Sigma(\mathcal{T})$-предложений φ, достаточно сформировать $\mathcal{T}'$ посредством объединения всех конечными s-определимых семейств $\mathcal{T}_\varphi$ и произвольных счетных подсемейств $\mathcal{T}_\varphi$, если $\mathcal{T}_\varphi$ бесконечно. Таким образом, если $|Cl_1(\mathcal{T})| = 2^\omega$, то e_1-$Sp(\mathcal{T}) = 2^\omega$. Обратно, из e_1-$Sp(\mathcal{T}) = 2^\omega$ очевидно следует $|Cl_1(\mathcal{T})| = 2^\omega$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Достаточно построить 2-дерево $\mathcal{T}$-совместных предложений, свидетельствующих о $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \infty$. Шаги построения основаны на возможности разделить $\mathcal{T}' \subseteq Cl_1(\mathcal{T})$ с условием $|\mathcal{T}'| = 2^\omega$ на две непересекающиеся части $(\mathcal{T}')_\varphi$ и $\mathcal{T}' \setminus (\mathcal{T}')_\varphi$ с континуумом элементов, посредством некоторого предложения φ. В самом деле, если каждое $\mathcal{T}'$ делится таким образом посредством некоторого предложения φ, то мы можем продолжить процесс деления на ω шагов, получая 2-дерево, которое влечет 2^ω последовательностей $\mathcal{T}$-совместных предложений. Предполагая противное, т.е. то, что $\mathcal{T}'$ нельзя разделить на две непересекающиеся части $(\mathcal{T}')_\varphi$ и $\mathcal{T}' \setminus (\mathcal{T}')_\varphi$ с континуумом элементов, получим каждый раз одну не более чем счетную часть и другую часть с 2^ω теориями. Так как сигнатура счетная и тем самым имеется счетное число предложений, то существует последовательность предложений φ_i, $i \in \omega$, с $\varphi_{i+1} \vdash \varphi_i$ такими, что $\{\varphi_i \mid i \in \omega\}$ задает единственную теорию T в $Cl_1(\mathcal{T})$, а каждое φ_i порождает окрестность $(\mathcal{T}')_{\varphi_i}$ или $\mathcal{T}' \setminus (\mathcal{T}')_{\varphi_i}$ с континуумом элементов. Поскольку существует бесконечно много возможностей для $(\mathcal{T}')_{\varphi_i}$ или $\mathcal{T}' \setminus (\mathcal{T}')_{\varphi_i}$ с континуумом элементов, мы можем предположить, что всегда $(\mathcal{T}')_{\varphi_i}$ имеет континуум много элементов или всегда $\mathcal{T}' \setminus (\mathcal{T}')_{\varphi_i}$ имеет континуум много элементов. Тогда пересечение $(\mathcal{T}')_{\varphi_i}$ (или $\mathcal{T}' \setminus (\mathcal{T}')_{\varphi_i}$) имеет континуум элементов, тогда как каждое дополнение $\mathcal{T}' \setminus (\mathcal{T}')_{\varphi_i}$ ($(\mathcal{T}')_{\varphi_i}$) не более чем счетно. Собирая теории из этих дополнений и теорию T, мы получаем счетное число теорий, образующих $\mathcal{T}'$. Это противоречит предположению, что $\mathcal{T}'$ содержит континуум теорий.

(3) $\Rightarrow$ (1). Поскольку $\overline{RS}(\mathcal{T}) = \infty$, существует 2-дерево Bs-определимых множеств X таких, что различные цепочки X_i, $i \in \omega$ с $X_{i+1} \subset X_i$ дают различные точки накопления относительно Cl_1. Поскольку существует континуум различных цепочек, имеется 2^ω точек накопления, откуда следует $|Cl_1(\mathcal{T})| = 2^\omega$. $\square$

3.8 Замыкания и ранги для линейно упорядоченных семейств теорий

В этом разделе мы изучим линейно $\subseteq$-упорядоченные семейства $\mathcal{T}$ и их замыкания. Эти семейства не имеют нетривиальных T_1-подсемейств в силу следствия 3.1.4. Кроме того, по определению $Cl_s(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \cup \{\bigcup \mathcal{T}\}$, то есть Cl_s-замыкание расширяет $\mathcal{T}$ только на $\bigcup \mathcal{T}$. Также заметим, что $Cl_{Bs}(\mathcal{T})$ для линейно $\subseteq$-упорядоченного $\mathcal{T}$ состоит из теорий, определенных объединениями $\bigcup \mathcal{T}'$ и пересечениями $\bigcap \mathcal{T}'$ для подсемейств $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, включая сечения для линейно упорядоченного множества $\langle \mathcal{T}, \subseteq \rangle$. Это означает, что $Cl_{Bs}(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ может быть сколь угодно большим.

Предложение 3.8.1. *Любое бесконечное линейно $\subseteq$-упорядоченное семейство $\mathcal{T}$ является e-минимальным.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\mathcal{T}$ не является e-минимальным. Тогда существует предложение φ такое, что $\mathcal{T}_\varphi$ и $\mathcal{T}_{\neg\varphi}$ бесконечны. В частности, существуют $T \in \mathcal{T}_\varphi$ и $T' \in \mathcal{T}_{\neg\varphi}$, откуда следует $\varphi \in T$ и $\neg\varphi \in T'$. Если $T \subset T'$, то $\varphi, \neg\varphi \in T'$, в противном случае, если $T' \subset T$, то $\varphi, \neg\varphi \in T$. В любом случае T или T' противоречиво, а это противоречит предположению, что $\mathcal{T}$ состоит из непротиворечивых теорий. $\square$

Замечание 3.8.2. Пусть $\mathcal{T}$ — семейство теорий T_n с условием $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in \omega$. По предложению 3.8.1 семейство $\mathcal{T}$ является e-минимальным. Покажем, что теория $T = \bigcup\limits_{n\in\omega} T_n$ принадлежит $Cl_1(\mathcal{T})$ относительно $\mathcal{T}$. Действительно, если $\psi \in T$, то $\psi \in T_n$ для некоторого n и $\psi \in T_m$ для каждого $m \geqslant n$, поэтому $\psi \in \{\varphi \mid \mathcal{T}_\varphi \text{ бесконечно}\}$. И наоборот, если $\psi \notin T$, то $\psi \notin T_n$ для всех n, откуда следует $\mathcal{T}_\psi = \varnothing$ и $\psi \notin \{\varphi \mid \mathcal{T}_\varphi \text{ бесконечно}\}$. Таким образом, $T = \{\varphi \mid \mathcal{T}_\varphi \text{ бесконечно}\}$, что влечет $T \in Cl_1(\mathcal{T})$ относительно $\mathcal{T}$.

Аналогично замечанию 3.8.2 получим точку накопления как пересечение убывающей счетной цепи теорий.

Замечание 3.8.3. Пусть $\mathcal{T}$ — семейство теорий T_n с условием $T_n \supset T_{n+1}$, $n \in \omega$. По предложению 3.8.1 семейство $\mathcal{T}$ является e-минимальным. Заметим, что $T = \bigcap\limits_{n\in\omega} T_n$ принадлежит $Cl_1(\mathcal{T})$ относительно $\mathcal{T}$. Действительно, если $\psi \in T$, то $\psi \in T_n$ для всех n, поэтому $\psi \in \{\varphi \mid \mathcal{T}_\varphi$ бесконечно$\}$. И наоборот, если $\psi \notin T$, то $\psi \notin T_n$ для некоторых n и $\psi \notin T_m$ для всех $m \geqslant n$, откуда следует $|\mathcal{T}_\psi| < \omega$ и $\psi \notin \{\varphi \mid \mathcal{T}_\varphi$ бесконечно$\}$.

Замечание 3.8.4. Замечания 3.8.2 и 3.8.3 показывают, что счетные семейства $\mathcal{T}$, $\subseteq$-упорядоченные по типам ω или ω^*, имеют точки накопления в виде объединений $\bigcup\mathcal{T}$ и пересечений $\bigcap\mathcal{T}$ соответственно. Ясно, что эти точки накопления единственны, поскольку каждое бесконечное подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ производит ту же точку накопления, что и для $\mathcal{T}$. Имеем аналогичные эффекты при рассмотрении линейно $\subseteq$-упорядоченного типа $\mu \notin \{\omega,\omega^*\}$ семейства $\mathcal{T}$ с единственным пределом в качестве бесконечного пересечения или объединения. Например, в замечании 3.8.1 мы можем добавить к семейству $\mathcal{T}$ конечное число теорий, содержащих объединение T или счетную убывающую цепочку T'_n, $n \in \omega$ с $\bigcup\limits_{n\in\omega} T_n = \bigcap\limits_{n\in\omega} T'_n$. В то же время бесконечные линейно $\subseteq$-упорядоченные семейства $\mathcal{T}$ с порядком ν, обладающим единственными значениями для бесконечных объединений и пересечений, имеют как минимум две точки накопления. Например, если $\mathcal{T}$ имеет порядок $\subseteq$ с типом Z, то имеется ровно две точки накопления: $\bigcap\mathcal{T}$ и $\bigcup\mathcal{T}$.

Из замечаний 3.8.2 и 3.8.3 также следует:

Предложение 3.8.5. *Для любого линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$, $Cl_1(\mathcal{T})$ содержит все объединения и пересечения счетной подцепи семейства $\mathcal{T}$, упорядоченной по типу ω или ω^*.*

Предложение 3.8.6. *Любое бесконечное линейно $\subseteq$-упорядоченное семейство $\mathcal{T}$, замкнутое относительно счетных объединений и пересечений, является $\overline{e}$-минимальным тогда и только тогда, когда для любых $T,T' \in \mathcal{T}$ с условием $T \subset T'$, существует конечное число теорий $T'' \in \mathcal{T}$, для которых $T'' \subset T$, или конечное число теорий $T''' \in \mathcal{T}$, для которых $T''' \supset T'$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ — $\overline{e}$-минимальное семейство, $T,T' \in \mathcal{T}$, $T \subset T'$. Предположим, что существует бесконечно много $T'' \in \mathcal{T}$ с условием $T'' \subset T$

и существует бесконечно много $T''' \in \mathcal{T}$ с условием $T''' \supset T'$. Поскольку $T \subset T'$, существует $\varphi \in T' \setminus T$. Так как $T'' \subset T$ и $T''' \supset T'$, то найдется $\varphi \in T''' \setminus T''$. Поэтому $\mathcal{T}_\varphi$ и $\overline{\mathcal{T}_\varphi}$ бесконечны, что противоречит $\bar{e}$-минимальности семейства $\mathcal{T}$. Обратно, если предположить противное, то имеется предложение φ с бесконечными $\mathcal{T}_\varphi$ и $\overline{\mathcal{T}_\varphi}$. Это означает, что существует теория $T_0 \in \mathcal{T}$ с бесконечным числом $T''' \supset T_0$, $T''' \in \mathcal{T}$, содержащая φ, хотя бесконечно много теорий $T'' \in \mathcal{T}$ с условием $T'' \subset T_0$ не содержат φ. Мы можем выбрать счетное число теорий T'' и взять их объединение T с условием $\varphi \notin T$, а также счетное число T''' и взять их пересечение T' с условием $\varphi \in T'$. Следовательно, существуют $T,T' \in \mathcal{T}$ с $T \subseteq T'$, для которых существует бесконечно много $T'' \in \mathcal{T}$ с $T'' \subset T$ и существует бесконечно много $T''' \in \mathcal{T}$ с $T''' \supset T'$, что противоречит предположению. $\square$

Из предложения 3.8.6 непосредственно вытекает:

Следствие 3.8.7. *Любое бесконечное линейно $\subseteq$-упорядоченное семейство $\mathcal{T}$, замкнутое относительно счетных объединений и пересечений, является $\bar{e}$-минимальным тогда и только тогда, когда $\langle \mathcal{T}, \subseteq \rangle$ имеет тип $\omega + n$, либо $n + \omega^*$, либо $\omega + 1 + \omega^*$, для некоторого натурального n.*

Предложение 3.8.8. *Для любого семейства $\mathcal{T}$ сигнатуры Σ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{T}$ линейно $\subseteq$-упорядочено;*

(2) *семейство множеств $\mathcal{T}_\varphi$ для предложений $\varphi \in Sent(\Sigma)$ линейно $\subseteq$-упорядочено.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть семейство $\mathcal{T}$ линейно $\subseteq$-упорядочено, $\varphi,\psi \in Sent(\Sigma)$. Докажем, что $\mathcal{T}_\varphi \subseteq \mathcal{T}_\psi$ или $\mathcal{T}_\psi \subseteq \mathcal{T}_\varphi$. Предполагая противное, находим теории $T \in \mathcal{T}_\varphi \setminus \mathcal{T}_\psi$ и $T' \in \mathcal{T}_\psi \setminus \mathcal{T}_\varphi$. Тогда $\varphi \in T \setminus T'$ и $\psi \in T' \setminus T$, подразумевающие $T \not\subseteq T'$ и $T' \not\subseteq T$, т.е. $\mathcal{T}$ не является линейно $\subseteq$-упорядоченным.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть семейство X множеств $\mathcal{T}_\varphi$ линейно $\subseteq$-упорядочено. Если $\mathcal{T}$ не является линейно $\subseteq$-упорядоченным, то существуют $T,T' \in \mathcal{T}$ с $T \not\subseteq T'$ и $T' \not\subseteq T$. Тогда существуют $\varphi \in T \setminus T'$ и $\psi \in T' \setminus T$, откуда следует $\mathcal{T}_\varphi \not\subseteq \mathcal{T}_\psi$ и $\mathcal{T}_\psi \not\subseteq \mathcal{T}_\varphi$. Таким образом, X не линейно упорядочено. $\square$

Следствие 3.8.9. *Если семейство $\mathcal{T}$ линейно $\subseteq$-упорядочено, то любое Bs-определимое подмножество в $\mathcal{T}$ является конечным объединением множеств вида $\mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_\psi}$.*

Доказательство. В силу замечания 3.3.3 каждое Bs-определимое подмножество представляется в виде объединения некоторых множеств $\mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_1}} \cap$

$\ldots \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_n}}$. Используя предложение 3.8.8, для каждого такого множества мы можем выбрать наименьшее множество $\overline{\mathcal{T}_{\psi_i}}$, откуда следует $\mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_1}} \cap \ldots \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_n}} = \mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_{\psi_i}}$. $\square$

В силу следствия 3.8.9, аналогично понятию o-минимальной теории [**PilSt**], каждое Bs-определимое подмножество в $\mathcal{T}$ представляется в виде конечного объединения одноэлементных множеств и *интервалов* вида $\mathcal{T}_\varphi \cap \overline{\mathcal{T}_\psi}$. Таким образом, для линейно $\subseteq$-упорядоченных семейств $\mathcal{T}$ понятие $\overline{RS}$-ранга допускает следующую модификацию.

Определение 3.8.10. Для пустого семейства $\mathcal{T}$ полагаем $\overline{RS}'(\mathcal{T}) = -1$, для конечных непустых линейно $\subseteq$-упорядоченных семейств $\mathcal{T}$ — $\overline{RS}'(\mathcal{T}) = 0$.

Для линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$ и ординала $\alpha = \beta + 1$ полагаем $\overline{RS}'(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$, если существуют попарно непересекающиеся Bs-определимые интервалы $\mathcal{T}_n$ на семействе $\mathcal{T}$, $n \in \omega$, такие, что $\overline{RS}'(\mathcal{T}_n) \geqslant \beta$, $n \in \omega$.

Если α — предельный ординал, то $\overline{RS}'(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$ если $\overline{RS}'(\mathcal{T}) \geqslant \beta$ для любого $\beta < \alpha$.

Полагаем $\overline{RS}'(\mathcal{T}) = \alpha$, если $\overline{RS}'(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$ и $\overline{RS}'(\mathcal{T}) \not\geqslant \alpha + 1$.

Если $\overline{RS}'(\mathcal{T}) \geqslant \alpha$ для любого α, то полагаем $\overline{RS}'(\mathcal{T}) = \infty$.

Если $\overline{RS}'(\mathcal{T})$ является ординалом α, определим *степень* $\overline{ds}'(\mathcal{T})$ семейства $\mathcal{T}$ как максимальное число попарно непересекающихся Bs-определимых подинтервалов $\mathcal{T}_i$, таких что $\overline{RS}'(\mathcal{T}_i) = \alpha$.

Замечание 3.8.11. По определению и следствию 3.8.9 имеем $\overline{RS}'(\mathcal{T}) = \overline{RS}(\mathcal{T})$ и $\overline{ds}'(\mathcal{T}) = \overline{ds}(\mathcal{T})$ для линейно $\subseteq$-упорядоченных семейств $\mathcal{T}$. Это означает, что иерархия Bs-определимых интервалов создает меру сложности для линейно $\subseteq$-упорядоченных семейств.

Теорема 3.8.12. *Для любого линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$, $Cl_1(\mathcal{T})$ состоит из объединений подсемейств $\mathcal{T}$ и пересечений счетных подсемейств $\mathcal{T}$, упорядоченных по типу ω^*.*

Доказательство. Поскольку и $Cl_1(\mathcal{T})$, и множество объединений подсемейств $\mathcal{T}$ содержат все теории в $\mathcal{T}$, достаточно показать:

1) для каждой теории T, принадлежащей $Cl_1(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ относительно подсемейства $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, $T = \bigcup \mathcal{T}''$ для некоторого бесконечного $\mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}'$ или $T = \bigcap \mathcal{T}''$ для некоторого счетного $\mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}'$, упорядоченного по типу ω^*;

2) для каждого подсемейства $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, $\bigcup \mathcal{T}'$ принадлежит $Cl_1(\mathcal{T})$ и $\bigcap \mathcal{T}'$ принадлежит $Cl_1(\mathcal{T})$, если $\mathcal{T}'$ упорядочен по типу ω^*. Для доказательства пункта 1) рассмотрим теорию T, которая принадлежит $Cl_1(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{T}$ относительно $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. По уравнению (3.1) и линейной $\subseteq$-упорядоченности $\mathcal{T}$ каждая теория T' из $\mathcal{T}'$ с бесконечным числом теорий $T'' \in \mathcal{T}'$, содержащих T', содержится в T. Поэтому имеются следующие случаи для $\mathcal{T}'$, формирующих T:

а) существует цепь $\mathcal{C}$ теорий в $\mathcal{T}'$, такая, что каждая теория из $\mathcal{C}$ строго содержится в какой-то другой теории из $\mathcal{C}$ и каждая теория $\mathcal{T}'$ содержится в некоторой теории $\mathcal{C}$; в таком случае $T = \bigcup \mathcal{C} = \bigcup \mathcal{T}'$, так как T состоит из предложений, входящих в $\bigcup \mathcal{T}'$, и каждое предложение из $\bigcup \mathcal{T}'$ принадлежит бесконечному числу теорий из $\mathcal{C}$;

б) существует цепь $\mathcal{C}$ теорий в $\mathcal{T}'$, упорядоченная по типу ω^* и удовлетворяющая условию $\bigcup C \supseteq \bigcup \mathcal{T}'$; в этом случае $T = \bigcap \mathcal{C}$, поскольку предложение $\varphi \in \bigcup \mathcal{T}'$ принадлежит бесконечному числу теорий из $\mathcal{T}'$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \bigcap \mathcal{C}$;

в) случай б) не выполняется, и существует конечное число теорий $T^1, \ldots, T^n$ в $\mathcal{T}'$, содержащих все другие теории из $\mathcal{T}'$; в этом случае $T = \bigcup (\mathcal{T}' \setminus \{T^1, \ldots, T^n\})$, поскольку предложение $\varphi \in \bigcup \mathcal{T}'$ принадлежит бесконечному числу теорий в $\mathcal{T}'$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \bigcup (\mathcal{T}' \setminus \{T^1, \ldots, T^n\})$.

В любом случае T является объединением или пересечением теорий из некоторой цепи $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}'$, где пересечения получаются из подсемейств, упорядоченных по типу ω^*.

Теперь мы используем случаи а)–в) для доказательства пункта 2). Если $\mathcal{T}'$ имеет наибольший элемент T, то этот элемент представляется в виде $\bigcup \mathcal{T}'$, откуда следует утверждение для объединения. В противном случае каждое предложение из $\bigcup \mathcal{T}'$ принадлежит бесконечному числу теорий $\mathcal{T}'$, и наоборот, откуда следует $\bigcup \mathcal{T}' \in Cl_1(\mathcal{T})$. Если семейство $\mathcal{T}'$ упорядочено по типу ω^*, то $\bigcap \mathcal{T}' \in Cl_1(\mathcal{T})$ в силу замечания 3.8.3. □

Следствие 3.8.13. *Для любого счетного линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$, $Cl_1(\mathcal{T})$ состоит из объединений и пересечений подсемейств семейства $\mathcal{T}$.*

Доказательство. По теореме 3.8.12 достаточно показать, что пересечения $\bigcap \mathcal{T}' \notin \mathcal{T}$ для $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ сводятся к пересечениям подсемейств, упорядоченных по типу ω^*. Рассмотрим произвольное подсемейство $\mathcal{T}'$, как указано выше. Так как $\bigcap \mathcal{T}' \notin \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}$ счетно, то $\mathcal{T}'$ тоже счетно: $\mathcal{T}' = \{T_i \mid i \in \omega\}$, и $\mathcal{T}'$ не имеет наименьшего элемента. По индукции построим искомое подсемейство $\mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}'$, упорядоченное по типу ω^*, и удовлетворяющее условию $\bigcap \mathcal{T}'' = \bigcap \mathcal{T}'$ следующим образом. На начальном этапе $n = 0$ мы включаем T_0 с $k_0 = 0$ в $\mathcal{T}''$. Если теории $T_{k_0} \supsetneqq \ldots \supsetneqq T_{k_n}$ уже включены в $\mathcal{T}''$ на некотором шаге n, то на следующем шаге $n+1$ мы включаем в $\mathcal{T}''$ теорию $T_{k_{n+1}} \in \mathcal{T}'$ такую, что $T_{k_{n+1}} \subsetneqq T_{k_n} \cap T_0 \cap T_1 \cap \ldots \cap T_n$. По построению семейство $\mathcal{T}'' = \{T_{k_n} \mid n \in \omega\}$ упорядочено по типу ω^* и удовлетворяет условию $\bigcap \mathcal{T}'' = \bigcap \mathcal{T}'$. $\square$

Следствие 3.8.14. *Для любого счетного линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$, $Cl_1(\mathcal{T})$ состоит из теорий $T \in \mathcal{T}$, объединений для подсемейств семейства $\mathcal{T}$, упорядоченных по типу ω, и пересечений подсемейств семейства $\mathcal{T}$, упорядоченных по типу ω^*.*

Доказательство. По теореме 3.8.12 достаточно заметить, что объединения $\bigcup \mathcal{T}' \notin \mathcal{T}$ для подсемейств $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ сводятся к упорядоченным объединениям по типу ω. Это устанавливается заменой $\supsetneqq$ на $\subsetneqq$ и наоборот в рассуждении для доказательства следствия 3.8.13. $\square$

Поскольку объединения и пересечения семейств, ограниченные на подсемейства, сводятся к объединениям и пересечениям подсемейств, из теоремы 3.8.12 непосредственно вытекает:

Следствие 3.8.15. *Любое порождающее подсемейство $\mathcal{T}'$ для линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$ является tbsig-подсемейством.*

Теорема 3.8.16. *Для любого линейно $\subseteq$-упорядоченного семейства $\mathcal{T}$, $Cl_1(Cl_1(\mathcal{T})) = Cl_1(\mathcal{T})$.*

Доказательство. Поскольку $Cl_1(Cl_1(\mathcal{T})) \supseteq Cl_1(\mathcal{T})$, достаточно показать, что каждая теория $T \in Cl_1(Cl_1(\mathcal{T})) \setminus \mathcal{T}$ принадлежит $Cl_1(\mathcal{T})$. По определению можно считать, что $T \notin \mathcal{T}$ и существует бесконечное подсемейство $\mathcal{T}' \subseteq Cl_1(\mathcal{T})$ такое, что T принадлежит $Cl_1(Cl_1(\mathcal{T}))$ относительно $\mathcal{T}'$. Поскольку $Cl_1(\mathcal{T})$ линейно $\subseteq$-упорядочено, в силу теоремы 3.8.12 мы можем предполагать, что $T = \bigcup \mathcal{T}'$ для строго возрастающего $\mathcal{T}'$ или $T = \bigcap \mathcal{T}'$ для строго убывающего $\mathcal{T}'$, упорядоченного по типу ω^*. В первом случае мы утверждаем, что $T = \bigcup \mathcal{T}''$ для $\mathcal{T}'' = \{T'' \in \mathcal{T} \mid T'' \subset T\}$. Действительно, $T \supseteq \bigcup \mathcal{T}''$, поскольку каждая теория $T'' \in \mathcal{T}''$ содержится в T. Обратно, если $\varphi \in T$, то φ принадлежит бесконечному числу теорий $T' \in \mathcal{T}'$. Если $\varphi \notin \bigcup \mathcal{T}''$, то $\mathcal{T}_\varphi$ отделяет T от $\mathcal{T}''$. Так как $T = \bigcup \mathcal{T}'$, то $(\mathcal{T}')_\varphi$ не отделяет T от $\mathcal{T}'$. Это означает, что существует точка накопления $T^* \in (\mathcal{T}')_\varphi$ семейства $\mathcal{T}$ такая, что $T^* \subset T$ и

$T^* \supset \bigcup \mathcal{T}''$. Так как $Cl_1(Cl_1(\mathcal{T}))$ линейно упорядочено и $T^* \subset T$, то $\mathcal{T}_\varphi$ должно содержать теорию T^{**} с условием $T^{**} \subset T$, а это противоречит $\varphi \notin \bigcup \mathcal{T}''$. Теперь докажем, что если $T = \bigcap \mathcal{T}'$ для строго убывающего $\mathcal{T}' \subseteq Cl_1(\mathcal{T})$, упорядоченного по типу ω^*, то T является точкой накопления для $\mathcal{T}$. Поэтому мы предполагаем, что $\mathcal{T}' = \{T'_k \mid k \in \omega\}$, $T'_k \supset T'_{k+1}$, $k \in \omega$. Если $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}$ бесконечно, то оно образует строго убывающее подсемейство $\mathcal{T}'$, которое снова упорядочено по типу ω^* и задает точку накопления T. В противном случае, поскольку бесконечно много теорий из $\mathcal{T}'$, скажем, T'_{k_i}, $i \in \omega$, являются точками накопления семейства $\mathcal{T}$, мы можем найти, используя рассуждение для первого случая, теории $T_{k_i} \in \mathcal{T}$ такие, что $T'_{k_{i+1}} \subset T_{k_i} \subset T'_{k_i}$, $i \in \omega$. Эти теории T_{k_i} образуют семейство $\mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}$, упорядоченное по типу ω^* и с условием $T = \bigcap \mathcal{T}''$, которое свидетельствует о том, что $T \in Cl_1(\mathcal{T})$. $\square$

Замечание 3.8.17. Из следствия 3.8.15 и теоремы 3.8.16 следует, что линейно $\subseteq$-упорядоченные Cl_1-замкнутые семейства удовлетворяют условиям теоремы 3.7.4, позволяющей охарактеризовать существование наименьшего порождающего подсемейства.

Глава 4. Приложения

4.1 Ранги для семейств теорий подстановок

Ранг для семейств теорий, аналогичный рангу Морли и определенный в работе [12], можно рассматривать как меру сложности или богатства этих семейств. Таким образом, повышая ранг за счет расширения семейства, мы получаем более богатые семейства, включая семейство с бесконечным рангом, который можно считать «достаточно богатым».

Теории подстановок и теории на языке одной унарной функции изучались в ряде работ. В настоящей статье для семейств теорий подстановок мы описываем ранги и степени, частично отвечая на вопрос из [12].

Всюду в дальнейшем мы рассматриваем семейства $\mathcal{T}$ полных теорий первого порядка языка $\Sigma = \Sigma(\mathcal{T})$.

Пусть язык Σ состоит из подстановки f. Обозначим через $\mathcal{T}_\Sigma$ семейство всех теорий подстановок языка Σ.

Каждая подстановка f имеет аксиому $\forall y \exists^{=1} x (f(x) = y)$. *Длиной* цикла подстановки называется число элементов в ней. *Типом* подстановки f называется вектор $\lambda(f) = (\lambda_1(f), \ldots, \lambda_n(f), \ldots)$, где $\lambda_i(f)$ – число циклов длины i в подстановке f. Заметим, что для любой подстановки f значение $\sum_{i=1}^{n} i \cdot \lambda_i(f)$ равно мощности множества элементов, составляющих циклы.

Пусть T — теория подстановок, $\mathcal{M} \models T$. Элемент $a \in M$ называется *ациклическим*, если a не принадлежит никакому циклу.

Заметим, что по теореме компактности теории с неограниченной длины циклов порождают ациклические элементы в некоторых своих моделях. Если же длины циклов ограничены в совокупности, то существуют теории как с ациклическими элементами, так и без ациклических элементов.

Для данной теории T подстановок можно рассмотреть множество пар (n,λ_n), где $n \in \omega$ и $\lambda_n \in \omega \cup \{\infty\}$ — число циклов длины n. В качестве $\varepsilon \in \{0,1\}$, указывающего на отсутствие/наличие функций следования, можно взять значение 0, если функции следования нет и 1, если такая функция есть. При этом $\varepsilon = 1$, если $\{\lambda_n > 0 \mid n \in \omega\}$ бесконечно. В частности, замыкание содержит теорию с $\varepsilon = 1$, если в данном семействе найдутся теории с $\lambda_n > 0$ для бесконечного количества значений n.

Отметим, что характеристики (n,λ_n), $n \in \omega$, и ε однозначно определяют данную теорию подстановки. Ранги семейств теорий подстановок задаются наборами этих характеристик. Ниже рассмотрим все возможные случаи.

Семейства с ограниченным количеством положительных λ_n и $\varepsilon = 0$.

Семейство $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$ подстановок может быть бесконечным только при наличии неограниченных значений λ_n, при этом если семейство имеет конечное число вариантов для λ_n, то оно конечно, $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 0$ и $ds(\mathcal{T}_\Sigma)$ равна числу этих вариантов; если λ_n имеет бесконечное количество вариантов в теориях из данного семейства, то нужно смотреть количество предельных точек, с $\lambda_n = \infty$, в зависимости от того, фиксированы или нет остальные λ_n. Если количество предельных точек конечно, то $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = 1$ и $ds(\mathcal{T}_\Sigma)$ равна числу этих предельных точек. Если количество предельных точек бесконечно, то $RS(\mathcal{T}_\Sigma) \geqslant 2$ и нужно смотреть, сколько предельных точек порождают сами предельные точки.

Пример 4.1.1. Пусть $\mathcal{T}'_\Sigma$ — семейство тождественных подстановок. Тогда $RS(\mathcal{T}'_\Sigma) = 1$ и $ds(\mathcal{T}'_\Sigma) = 1$, следовательно, $\mathcal{T}'_\Sigma$ является e-минимальным. Единственной предельной точкой является теория тождественной подстановки на бесконечном множестве.

Пример 4.1.2. Если рассмотреть циклы длины n_0 и n_1 и количество этих циклов удовлетворяет $\lambda_{n_0} < k,\lambda_{n_1} < l$, то для семейства $\mathcal{T}_{\lambda_{n_0},\lambda_{n_1}}$ теорий с этими соотношениями мы имеем $k \cdot l$ вариантов и $RS(\mathcal{T}_{\lambda_{n_0},\lambda_{n_1}}) = 0$, а $ds(\mathcal{T}_{\lambda_{n_0},\lambda_{n_1}}) = k \cdot l$.

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ множество всех теорий из $\mathcal{T}_\Sigma$ с одним произвольным значением λ_n, где $\lambda_m = 0$ при $m \neq n$ и модели этих теорий не имеют ациклических элементов.

Предложение 4.1.3. *Каждое семейство $\mathcal{T}_n$ является e-минимальным.*

Доказательство. Семейство $\mathcal{T}_n$ состоит из теорий T_m с $m \in \omega\setminus\{0\}$ циклами длины n и теории T_∞ с бесконечным количеством циклов длины n. Теория T_∞ является единственной предельной точкой для $\mathcal{T}_n$. Таким образом, $RS(\mathcal{T}_n) = 1$, $ds(\mathcal{T}_n) = 1$ и следовательно, семейство $\mathcal{T}_n$ является e-минимальным. $\square$

Пример 4.1.4. Если допустить циклы разной длины n_0 и n_1, то получится счетное число вариантов $(\lambda_{n_0},\lambda_{n_1})$, где λ_{n_0} — количество циклов длины n_0, λ_{n_1} — количество циклов длины n_1. Таким образом, имеется счетное число теорий с циклами длины n_0 и n_1, образующее семейство $\mathcal{T}_{n_0,n_1}$. Здесь каждая теория с одним бесконечным λ_{n_0} или λ_{n_1} имеет $RS(\mathcal{T}_{n_0,n_1}) = 1$, а единственная предельная точка с $\lambda_{n_0} = \lambda_{n_1} = \infty$, имеет бесконечно много циклов длины n_0, бесконечно много циклов длины n_1 и $RS(\mathcal{T}_{n_0,n_1}) = 2$. Таким образом, для данного семейства $\mathcal{T}_{n_0,n_1}$ получается $RS(\mathcal{T}_{n_0,n_1}) = 2$ и $ds(\mathcal{T}_{n_0,n_1}) = 1$. Следовательно, семейство является a-минимальным.

Пример 4.1.5. Если рассмотреть циклы разной длины n_0, n_1 и n_2, то также получится счетное число вариантов $(\lambda_{n_0},\lambda_{n_1},\lambda_{n_2})$, где λ_{n_0} — количество циклов длины n_0, λ_{n_1} — количество циклов длины n_1, λ_{n_2} — количество циклов длины n_2. Каждое e-минимальное подсемейство с одним бесконечным $\lambda_{n_0},\lambda_{n_1}$ или λ_{n_2} содержащее теории лишь с одним положительным λ_{n_i} имеет ранг $RS = 1$. Теории с ненулевыми $\lambda_{n_i},\lambda_{n_j}$ и $\lambda_{n_k} = 0$, $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$ имеют $RS = 2$ и $ds = 1$. Семейство всех теорий с $\lambda_m = 0$ при $m \notin \{n_0,n_1,n_2\}$ имеет $RS = 3$ и $ds = 1$.

Таким образом, добавляя новые λ_n для циклов определенной длины, можно неограниченно увеличивать ранг до любого наперед заданного натурального числа.

Семейства с ограниченным количеством положительных λ_n и $\varepsilon = 1$.

Как и в предыдущем случае семейства являются e-тотально трансцендентными и могут содержать e-минимальные, a-минимальные, α-минимальные подсемейства. А также их модели могут содержать копии функции следования $(\mathbb{Z},s)$ на целых числах. В данном случае ранг семейства является ординальнозначным. Повторяя рассуждение для предыдущего случая, получаем ранги $RS = \alpha$ и $ds = m$.

По определению α-минимальности и предложению 4.1.3, семейство теорий $\mathcal{T}$ подстановок с $RS(\mathcal{T}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}) = m$ можно представить в виде непересекающихся объединения подсемейств $\mathcal{T}_{\lambda_{n_0}}, \ldots, \mathcal{T}_{\lambda_{n_{m-1}}}$, для некоторых различных $\lambda_{n_0}, \ldots, \lambda_{n_{m-1}}$, такой, что каждое $\mathcal{T}_{\lambda_i}$ является α-минимальным.

Следующая теорема показывает, что существует семейство теории подстановок, имеющее счетный ранг.

Теорема 4.1.6. *Для любого счетного ординала α и натурального $k \geqslant 1$ существует семейство $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$, что $RS(\mathcal{T}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}) = k$.*

Доказательство. Реализации конечных рангов семействами теорий подстановок показывают, что для доказательства теоремы достаточно построить семейство теорий, имеющее данный счетный ранг и данную степень n.

Выберем число $s \in \omega \setminus \{0\}$ и позволим рассматриваемым теориям подстановок T иметь произвольное количество циклов длины s и не более одного цикла длины m для каждого $m \neq s$.

Данный счетный ранг α для семейства теорий подстановок T можно построить с помощью счетных множеств X, состоящих из натуральных чисел $m \neq s$, каждое из которых символизирует наличие в моделях теории T единственного цикла длины m и отсутствие циклов длины $m' \neq s$ при $m' \notin X$. Поскольку равенство $RS = \alpha$ предполагает суператомность соответствующей булевой алгебры, семейства X должны сформировать иерархию, при которой каждый переход от множества X, задающего семейство ранга $\beta \leqslant \alpha$, к множествам X_i, $i \in \omega$, задающим дизъюнктные подсемейства теорий меньшего ранга, должны удовлетворять следующим условиям:

$$X \subset X_i, |X_i \setminus X| = \omega,$$

$$(X_i \cap X_j) \setminus X = \varnothing,$$

где $i,j \in \omega, i \neq j$. При этом цепи по отношению включения, состоящие из множеств X, должны быть вполне упорядочены. Множества X индексируем парами $\langle\beta,k\rangle$, где $\beta \leqslant \alpha$, $k < m$ для $\beta = \alpha$, и $k \in \omega$ для $\beta < \alpha$. Таким образом, множества X_β для ординала $\beta = \gamma + 1$ расширяются счетным семейством попарно непересекающихся над X_β множеств $X_{\langle\gamma,k\rangle}$.

Каждое множество $X_{\langle 1,k\rangle}$ определяет подходящее e-минимальное семейство $\mathcal{T}_{\langle 1,k\rangle}$ теорий, имеющих по одному циклу каждой длины $m \in X_{\langle 1,k\rangle}$ и произвольное количество циклов длины s. Обозначим через $\mathcal{T}$ объединение всех семейств $\mathcal{T}_{\langle 1,k\rangle}$. С помощью индукции нетрудно показать, что формулы φ_β, описывающие наличие циклов длины $m' \in \langle\beta,k'\rangle$, задают окрестности $\mathcal{T}_{\varphi_\beta}$, имеющие ранг β. Тем самым, устанавливается $RS(\mathcal{T}) = \alpha$ и $ds(\mathcal{T}) = n$.

Семейства с неограниченным количеством положительных λ_n.

В семействе теории $\mathcal{T}_\Sigma$ подстановок имеется теорий с бесконечными циклами и циклы с неограниченными длинами. А также в моделях этих теорий автоматический присутствует копия функции следования $(\mathbb{Z},s)$ на целых числах. В этом случае, существует бесконечное 2-дерево, образованное Таким образом, семейство имеет $RS(\mathcal{T}_\Sigma) = \infty$.

Теорема 4.1.7. *Любая теория T подстановки на бесконечном множестве является псевдоконечной.*

Доказательство. *Случай 1.* Пусть T имеет конечное число циклов. Тогда T имеет модели $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{M}_1$, где $\mathcal{M}_0$ — подсистема, состоящая из циклов, и $\mathcal{M}_1$ — подсистема без циклов. Для этой модели верно $\mathcal{M} = \lim_{i\to\infty} \mathcal{M}'_i$, где $\mathcal{M}'_i = \mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{N}_i$ — конечная структура и $\mathcal{N}_i$ — структура, состоящая из одного цикла длины i. Таким образом $\{Th(\mathcal{N}_i)|i \in \omega\}$ аппроксимирует теорию $Th(\mathcal{M}_1)$, а $\{Th(\mathcal{M}_i) \mid i \in \omega\}$ аппроксимирует теорию T.

Случай 2. Пусть теория T имеет бесконечное число циклов и длины циклов ограничены в совокупности. Пусть $n_0, \ldots, n_k$ — длины циклов, $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ — число циклов длины $n_0, \ldots, n_k$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ конечных, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_k$ бесконечных, $r < k$ и $\mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{N}_i$, где $\mathcal{N}_i$ состоит из i циклов длины $n_{r+1}, \ldots, n_k$. Тогда множество $\{Th(\mathcal{N}_i)|r \in \omega\}$ аппроксимирует теорию $Th(\mathcal{M}_1)$, где $\mathcal{M}_1$ состоит из бесконечного числа циклов длины $n_{r+1}, \ldots, n_k$. Таким образом, $\{Th(\mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{N}_i)|i \in \omega\}$ аппроксимирует теорию $T = Th(\mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{N}_\omega)$.

Случай 3. Пусть T имеет бесконечно много циклов и длины циклов не ограничены в совокупности. Пусть $n_0, \ldots, n_k, \ldots$ — длины циклов. В этом случае теория $T = Th(\mathcal{M}_0 \sqcup \mathcal{M}_1)$, где $\mathcal{M}_0$ — подсистема, состоящая из циклов, и $\mathcal{M}_1$ — подсистема без циклов. Подсистема $\mathcal{N}_i$ состоит из $\leqslant i$ циклов длины $j \leqslant i$ и не содержит циклы длины $> i$. Пусть n_s — длина цикла, λ_s — число циклов длины n_s в модели теории T. Тогда $\mathcal{N}_i$ содержит $min\{i, \lambda_s\}$ циклов длины n_s. Подсистема $\mathcal{M}_1$ получается по теореме компактности. Таким образом, теория T аппроксимируется множеством теорий $Th(\mathcal{N}_i)$.

Так как при E-замыкании семейства теорий сохраняется ранг [12, теорема 2.10], теорема 4.1.7 показывает, что для подсчета рангов семейств теорий подстановок достаточно рассматривать подходящие семейства теорий подстановок на конечных множествах.

4.2 Локально свободные алгебры

Напомним определения и некоторые теоретико-модельные свойства локально свободных алгебр. Зафиксируем некоторый функциональный язык

$$\Sigma = \langle f_1^{(n_1)}, \ldots, f_r^{(n_r)}, \ldots; c_0, \ldots, c_k, \ldots \rangle.$$

Через $T(\Sigma)$ обозначим множество всех термов этого языка над множеством переменных $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Определение 4.2.1 На множестве $T(\Sigma)$ мы можем определить действие сигнатурных функций $f_i^{s_i}$, задав значение функции f_i на элементах $t_1(\bar{x}_1), \ldots, t_{s_i}(\bar{x}_{s_i})$, равных терму $f_i(t_1(\bar{x}_1), \ldots, t_{s_i}(\bar{x}_{s_i}))$. Интерпретируя константные символы c_i сигнатуры Σ через самими этими константами c_i в $T(\Sigma)$, мы получаем алгебру языка Σ с основным множеством $T(\Sigma)$.

Мы называем эту алгебру *абсолютно свободной алгеброй языка* Σ и обозначаем ее $F(\Sigma) = \langle T(\Sigma); \Sigma \rangle$. Очевидно, алгебра $F(\Sigma)$ порождается множеством X.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ — произвольная алгебра языка σ, а ψ — некоторое отображение множества X в множество A. Это отображение ψ допускает продолжение некоторого гомоморфизма φ_ψ алгебры $F(\Sigma)$ в алгебру $\mathfrak{A}$, т.е. существует гомоморфизм φ_ψ алгебры $F(\Sigma)$ в алгебру $\mathfrak{A}$, совпадающую с отображением ψ на множестве $X \subseteq F(\Sigma)$. Отображение $\varphi_\psi : T(\Sigma) \to A$ определяется следующим естественным образом:

$$\varphi_\psi(t(x_1, \ldots, x_n)) = t_{\mathfrak{A}}(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)),$$

где $t(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает произвольный терм языка Σ, и $t_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ — термический функция алгебры $\mathfrak{A}$, соответствующая терму $t(x_1, \ldots, x_n)$. Отображение φ_ψ является гомоморфизмом алгебры $F(\Sigma)$ в алгебру $\mathfrak{A}$, продолжая отображение ψ. Подобный гомоморфизм (алгебры $F(\Sigma)$ в алгебру $\mathfrak{A}$, продолжающий отображение ψ) единственен.

Отсюда, в частности, следует, что любая не более чем счетная алгебра языка Σ изоморфна некоторой фактор-алгебре абсолютно свободной алгебры $F(\Sigma)$. Действительно, пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ конечны или счетны, пусть ψ — произвольное отображение множества X на множество A. В этом случае описанный выше гомоморфизм φ_ψ алгебры $F(\Sigma)$ в алгебру $\mathfrak{A}$ будет эпиморфизмом. Таким образом, если θ является ядром гомоморфизма φ_ψ, то $\mathfrak{A} \cong F(\Sigma)/\theta$. Выбирая различные отображения множества X на A, мы получаем различные представления алгебры $\mathfrak{A}$ в виде фактор-алгебр алгебры $F(\Sigma)$. Все алгебры, изоморфные $\mathfrak{A}$, также абсолютно свободны.

Определение 4.2.2 [87; 88] Алгебра называется *локально свободной*, если каждая конечно порожденная подалгебра свободна. Свободная алгебра — это алгебра, изоморфная алгебре всех термов.

Из приведенной выше конструкции ясно, что в абсолютно свободных алгебрах языка Σ верны следующие аксиомы:

i) $f_i(x_1,\ldots,x_{n_i}) = f_i(y_1,\ldots,y_{n_i}) \to x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{n_i} = y_{n_i}\ i = 1,\ldots,s;$

ii) $f_i(x_1,\ldots,x_{n_i}) \neq f_j(y_1,\ldots,y_{n_i})\ i \neq j, i,j = 1,\ldots,s;$

iii) $\varphi(x, x_1, \ldots, x_m) \neq x$, где φ — терм длины строго больше 1 и отличный от x, фактически содержащий переменную x.

Теорема 4.2.3 [87] *Для того чтобы алгебра языка Σ была локально абсолютно свободной, необходимо и достаточно, чтобы в ней выполнялись аксиомы (i, ii, iii).*

Пусть T — полная теория первого порядка локально свободных алгебр языка $\Sigma = \{f_1^{(n_1)}, \ldots, f_r^{(n_r)}, \ldots; c_1, \ldots, c_k, \ldots,\}$.

Предложение 4.2.5. *Если язык Σ состоит из константных символов или из константных символов и одного унарного функционального символа, то локально свободная алгебра A псевдоконечна.*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{c_1, \ldots, c_k\}$. Эти константы соответствуют некоторым элементам (термам) $\{a_1, \ldots, a_k\}$, которые свободно порождают алгебру A. Мы можем писать через предложения $c_i \approx c_j$ или $\neg c_i \approx c_j$. Поскольку эти предложения верны для A и некоторой конечной алгебры, по определению A псевдоконечно.

Теперь пусть $\Sigma = \{f^{(1)}, c_1, \ldots, c_k\}$. Поскольку разные термины соответствуют разным элементам, каждый элемент имеет не более одного прообраза. Следовательно, отображение $f^{(1)} : A \to A$ биективно, а A псевдоконечно. Следовательно, теория $Th(A)$ псевдоконечна. Как и в теореме 4.1.7, модели теории $Th(A)$ образуют бесконечные магистрали, которые можно аппроксимировать конечными структурами. $\square$

Пример 4.2.6. Важный пример свободной унарной алгебры возникает из группового гомоморфизма $\varphi : G \to S_A$ произвольной группы G в группу всех перестановок множества A. Такой гомоморфизм называется *действием* группы G над A. Определение для каждого элемента $g \in G$ унарной операции $f_g : A \to A$ как перестановки $\varphi(g)$ в S_A для соответствующего элемента g при гомоморфизме φ дает свободную унарную алгебру $\langle A, \{f_g^{(1)} \mid g \in G\}\rangle$, в которой

$f_1(x) = x, f_g(f_h(x)) = f_{gh}(x), x \in A, g, h \in G$. Используя аргументы теоремы 4.1.7, такую алгебру можно аппроксимировать конечными структурами. Таким образом, свободная унарная алгебра $\langle A, \{f_g^{(1)} \mid g \in G\}\rangle$ псевдоконечна.

Теорема 4.2.7. *Бесконечная локально свободная алгебра A псевдоконечна тогда и только тогда, когда язык содержит не более одного унарного символа и не содержит символов арности $n > 1$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим, что бесконечная локально свободная алгебра A псевдоконечна и $\Sigma = \{f_1^{(1)}, f_2^{(1)}\}$. Зафиксируем положительное целое число n и выберем произвольное предложение φ из теории $Th(A)$, которое описывает, согласно аксиомам i) -iii) связь между значениями термов языка Σ, содержащая не более n символов языка. Рассмотрим конечную алгебру B наименьшей возможной мощности s, в которой справедливо предложение φ. Поскольку B конечно, некоторые значения различных термов с функциональными символами оказываются равными, что означает равенство термов меньшей длины из аксиом i) и ii). Это противоречит минимальности выбора s. Следовательно, алгебра A не является псевдоконечной.

Теперь рассмотрим локально свободную алгебру A языка $\Sigma = \{g^{(n)}\}$, $n \geqslant 2$. Чтобы аппроксимировать алгебру $\mathfrak{A}$ конечными алгебрами, необходимо задать циклы неограниченной длины. Рассмотрим следующие функции:

$$g_1(x) = g(g(x,x), x, x, \ldots, x),$$

$$g_2(x) = g(x, g(x,x), x \ldots, x).$$

Используя аксиомы i), получаем

$$g(g(x,x), x, x, \ldots, x) = g(x, g(x,x), x, \ldots, x) \to g(x,x) = x.$$

Это показывает, что если есть две разные операции g_1 и g_2 при зацикливании, они отождествляются, что противоречит локальной свободе алгебры A. Следовательно, локально свободная алгебра с одной функциональной символьной арностью $\geqslant 2$ не является псевдоконечной.

($\Leftarrow$) Пусть $\Sigma = \{c_1, \ldots, c_k\}$ или $\Sigma = \{f^{(1)}, c_1, \ldots, c_k\}$. Тогда по предложению 4.2.5 локально свободная алгебра A языка Σ псевдоконечна. $\square$

Следствие 4.2.8. *Локально свободный группоид не является псевдоконечным.*

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию теоретико-модельных и топологических свойств семейств теорий. Получены следующие результаты:

1. Построены семейства теорий подстановок, имеющее данный счетный ранг и данную степень n. Доказано, что в семействе теорий подстановок любая теория является теорией конечной структуры или аппроксимируется теориями конечных структур. Получен критерий псевдоконечности локально свободных алгебр.

2. Получены характеристики и динамика относительно ранга и степени определимых предложениями и определимых диаграммами подсемейств заданных семейств теорий, а также исчисления для этих подсемейств. Охарактеризованы топологические свойства и ранги алгебр, связанные с определимыми предложениями и диаграммами подсемейств семейств теорий.

3. Описаны топологические свойства, ранги, замыкания и их динамика для семейств теорий. Дана характеризация видов топологий семейств теорий. Установлена связь рангов с топологиями для семейств теорий. Рассмотрены булевы комбинации s-определимых семейств теорий, определены ранги и степени относительно этих семейств, описаны значения этих характеристик. Изучены замыкания семейств теорий относительно s-определимых подсемейств и их булевых комбинаций, описаны свойства операторов замыкания, а также охарактеризовано условие существования наименьшего порождающего множества. Описаны ранги и степени для семейств всех теорий произвольно заданных сигнатур.

Результаты могут быть использованы для классификации различных естественных классов структур и дальнейшего изучения семейств теорий, как в общем виде, так и для естественных алгебраических структур, а также при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Список литературы

1. *Ершов, Ю. Л.* Топология для дискретной математики / Ю. Л. Ершов. — Сибирское отделение Российской академии наук (Новосибирск), 2020. — отв. ред. В.Л. Селиванов; Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН, 334 с.
2. *Lo's, J.* On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems / J. Lo's // Colloquium Mathematicum. — 1954. — No. 3. — P. 58—62.
3. *Morley, M.* Categoricity in Power / M. Morley // Transactions of the American Mathematical Society. — 1965. — Vol. 114, no. 2. — P. 514—538.
4. *Feferman, S.* The first order properties of products of algebraic systems / S. Feferman, R. Vaught // Fundam. Math. — 1959. — Vol. 47. — P. 57—103.
5. *Sudoplatov, S. V.* Combinations of structures / S. V. Sudoplatov // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2018. — Vol. 24. — P. 82—101.
6. *Sudoplatov, S. V.* Closures and generating sets related to combinations of structures / S. V. Sudoplatov // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2016. — Vol. 16. — P. 131—144.
7. *Sudoplatov, S. V.* Families of language uniform theories and their generating sets / S. V. Sudoplatov // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2016. — Vol. 17. — P. 62—76.
8. *Sudoplatov, S. V.* On semilattices and lattices for families of theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — Vol. 14. — P. 980—985.
9. *Sudoplatov, S. V.* Combinations related to classes of finite and countably categorical structures and their theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — Vol. 14. — P. 135—150.
10. *Sudoplatov, S. V.* Relative e-spectra and relative closures for families of theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — Vol. 14. — P. 296—307.

11. *Sudoplatov, S. V.* Approximations of theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2020. — Vol. 17. — P. 715—725.

12. *Sudoplatov, S. V.* Ranks for families of theories and their spectra / S. V. Sudoplatov // Lobachevskii Journal of Mathematics (to appear) arXiv:1901.08464v1[math.LO]. — 2019.

13. *Ершов, Ю. Л.* О полях с разрешимой теорией / Ю. Л. Ершов // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 174, № 1. — С. 19—20.

14. *Ax, J.* Solving diophantine problems modulo every prime / J. Ax // Ann. Math. — 1967. — Vol. 85, no. 2. — P. 161—183.

15. *Fried, M.* Solving diophantihe problems over all residue class fields / M. Fried, G. Sacerdote // Ann. Math. — 1976. — Vol. 104. — P. 203—233.

16. *Jarden, M.* An analogue of Chebotarev density theorem for fields of finite corank / M. Jarden // J. Math. Kyoto Univ. — 1980. — Vol. 20, no. 1. — P. 141—147.

17. *Ершов, Ю. Л.* Регулярно замкнутые поля / Ю. Л. Ершов // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 251, № 4. — С. 783—785.

18. *Ершов, Ю. Л.* Неразрешимость регулярно замкнутых полей / Ю. Л. Ершов // Алгебра и логика. — 1981. — Т. 20, № 4. — С. 389—394.

19. *Ершов, Ю. Л.* Алгебраические свойства регулярно замкнутых полей / Ю. Л. Ершов // Тр. МИАН СССР. — 1981. — Т. 158. — С. 80—86.

20. *Cherlin, G.* The elementary theory of regularly closed fields / G. Cherlin, L. van den Dries, A. Macintyre. —. — preprint.

21. *Chatzidakis, Z.* Perfect pseudo-algebraically closed fields are algebraically bounded / Z. Chatzidakis, E. Hrushovski // Journal of Algebra. — 2004. — Vol. 271, no. 2. — P. 627—637.

22. *Pillay, A.* On PAC and bounded substructures of a stable structure / A. Pillay, D. Polkowska // The Journal of Symbolic Logic. — 2006. — Vol. 71, no. 2. — P. 460—472.

23. *Hrushovski, E.* Pseudofinite fields and related structures / E. Hrushovski // In: Bélair, L., Chatzidakis, Z., d'Aquino, P., Marker, D., Otero, M., Point, F., Wilkie, A.J. (eds.) Model Theory and Applications. Quaderni di Matematica, Aracne, Rome (2002). — 1991. — Vol. 11. — P. 151—212.

24. *Jarden, M.* Elementary statements over large algebraic fields / M. Jarden // Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — Vol. 164. — P. 67—91.

25. *Jarden, M.* Algebraic extensions of finite corank of Hilbertian fields / M. Jarden // Israel J. Math. — 1974. — Vol. 18. — P. 279—307.

26. *Jarden, M.* The elementary theory of ω-free Ax fields / M. Jarden // Invent.Math. — 1976. — Vol. 38. — P. 187—206.

27. *Jarden, M.* Pseudo-algebraically closed fields over rational function fields / M. Jarden, S. Shelah // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1983. — Vol. 87, no. 2. — P. 223—223.

28. *Frey, G.* Pseudo algebraically closed fields with non-archimedian real valuations / G. Frey // Journal of Algebra. — 1973. — Vol. 26. — P. 202—207.

29. *Kiefe, C.* Sets definable over finite fields: their zeta-functions / C. Kiefe // Trans. Am. Math. Soc. — 1976. — Vol. 223. — P. 45—59.

30. *Wheeler, W. H.* Model-complete theories of e-free Ax fields / W. H. Wheeler, M. Jarden // The Journal of Symbolic Logic. — 1983. — Vol. 48, no. 4. — P. 1125—1129.

31. *Wheeler, W. H.* Model-complete theories of pseudo-algebrically closed fields / W. H. Wheeler // Ann.Math. Log. — 1979. — Vol. 17, no. 3. — P. 205—226.

32. *Fried, M.* Field Arithmetic. Vol. 11 / M. Fried, M. Jarden. — 3rd ed. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — (Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics).

33. *Ax, J.* The elementary theory of finite fields / J. Ax // Ann. Math. — 1968. — Vol. 88. — P. 239—271.

34. *Artin, E.* Class Field Theory / E. Artin, J. Tate. — 2nd ed. — Harvard University, Department of Mathematics, 2009. — Notes from the Artin-Tate seminar on class field theory given a Princeton University 1951–1952, Reprinted as 1968c, 1990b.

35. *Lang, S.* Number of points of varieties in finite fields / S. Lang, A. Weil // American Journal of Mathematics. — 1954. — Vol. 76. — P. 819—827.

36. *Zilber, B.* Totally categorical theories; structural properties and non-finite axiomatizability / B. Zilber // Proceedings of Conference held at Karpacz Poland: Model Theory of Algebra and Arithmetic (L. Pacholski et al., editors), Lecture Notes in Math. 834 (Springer, Berlin, 1980). — 1979. — P. 381—410.

37. *Zilber, B.* On the problem of finite axiomatizability for theories categorical in all infinite powers (Russian) / B. Zilber // in: B. Baijanov, ed., Investigations in Theoretical Programming (Alma Ata 1981). — 1981. — P. 69—75.

38. *Duret, J.* Les corps pseudo-finis ont la propriété d'indépendance / J. Duret // C. R. Acad. Sei. Paris Sér. — 1980. — Vol. 290. — P. 981—903.

39. *Cherlin, G.* $\aleph_0$-categorical, $\aleph_0$-stable structures / G. Cherlin, L. Harrington, A. H. Lachlan // Ann. Pure Appl. Logic. — 1985. — Vol. 28. — P. 103—135.

40. *Kantor, W. M.* $\aleph_0$-categorical structures smoothly approximable by finite substructures / W. M. Kantor, M. W. Liebeck, H. D. Macpherson // Proc. London Math. Soc. — 1989. — Vol. 59. — P. 439—463.

41. *Macpherson, H. D.* Finite axiomatizability and theories with trivial algebraic closure / H. D. Macpherson // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1991. — Vol. 32. — P. 188—192.

42. *Macpherson, D.* Definability in the classes of finite structures / D. Macpherson, C. Steinhorn // London Matheematical Society Lecture Notes Series. — 2011. — Vol. 379. — P. 140—176.

43. *Chatzidakis, Z.* Definable sets over finite fields / Z. Chatzidakis, L. van den Dries, A. Macintyre // Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik. — 1992. — Vol. 427. — P. 107—136.

44. *Elwes, R.* Asymptotic classes of finite structures / R. Elwes // The Journal of Symbolic Logic. — 2007. — Vol. 72, no. 02. — P. 418—438.

45. *Macpherson, D.* One-dimensional asymptotic classes of finite structures / D. Macpherson, C. Steinhorn // Transactions of the American Mathematical Society. — 2008. — Vol. 360. — P. 411—448.

46. A survey of asymptotic classes and measurable structures / R. Elwes [et al.] // Model Theory with Applications to Algebra and Analysis, Zoe Chatzidakis, Dugald Macpherson, Anand Pillay, Alex Wilkie (eds.) — 2008. — Vol. 2. — P. 125—160. — (London Mathematical Society Lecture Note Series 350).

47. *Zilber*, *B.* Perfect infinities and finite approximations / B. Zilber // Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore. — 2013. — P. 199—223.

48. *Hrushovski*, *E.* On pseudofinite dimensions / E. Hrushovski // Notre Dame J. Formal Logic. — 2013. — Vol. 54, no. 3/4. — P. 463—495.

49. *Hrushovski*, *E.* Counting and dimensions / E. Hrushovski, F. Wagner // Model Theory with Applications to Algebra and Analysis, Eds. Z. Chatzidakis, H.D. Macpherson, A. Pillay, A.J. Wilkie, Cambridge University Press, Cambridge. — 2008. — Vol. 2. — P. 161—176.

50. *Cherlin*, *G.* Finite Structures with Few Types / G. Cherlin, E. Hrushovski // Annals of Math. Studies, Princeton University Press. — 2003. — Vol. 152.

51. *Macpherson*, *H.* Pseudofinite structures and simplicity / H. Macpherson, D. Garcia, C. Steinhorn // J. Math. Logic. — 2015. — Vol. 15, no. 1.

52. *Hrushovski*, *E.* Stable group theory and approximate subgroups / E. Hrushovski // J. Amer. Math. Soc. — 2012. — Vol. 25. — P. 189—243.

53. *Pillay*, *A.* Strongly minimal pseudofinite structures / A. Pillay // Preprint, Available at http://arxiv.org/pdf/1411.5008v2.pdf. — 2014.

54. *Hrushovski*, *E.* Unimodular minimal structures / E. Hrushovski // Journal London Math. Soc. — 1992. — Vol. 46. — P. 385—396.

55. *Pillay*, *A.* Lecture notes on pseudofinite Model Theory / A. Pillay, (friends) // Available at `https://www3.nd.edu/ apillay/notes_greg-final.pdf`. —.

56. *Rosen*, *E.* Some Aspects of Model Theory and Finite Structures / E. Rosen // The Bulletin of Symbolic Logic. — 2002. — Vol. 8, no. 3. — P. 380—403.

57. *Vaananen*, *J.* Pseudo-finite model theory / J. Vaananen // Matematica Contemporanea. — 2003. — Vol. 24. — P. 169—183.

58. *Kulpeshov*, *B. S.* Ranks and approximations for families of ordered theories / B. S. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov // Algebra and Model Theory 12. Collection of papers // eds. A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov. — Novosibirsk: NSTU. — 2019. — P. 32—40.

59. *Chatzidakis*, *Z.* Model theory of difference fields II. Periodic ideals and the trichotomy in all characteristics / Z. Chatzidakis, E. Hrushovski, Y. Peterzil // Proc. Lond. Math. Soc. — 1997. — Vol. 85, no. 3. — P. 257—311.

60. *Cherlin*, *G.* Smoothly approximable structures / G. Cherlin, E. Hrushovski // manuscript. — 1994.

61. *Chatzidakis*, *Z.* Model theory of finite fields and pseudofinite fields / Z. Chatzidakis // Ann. Pure Appl. Logic. — 1997. — Vol. 88. — P. 95—108.

62. *Ryten*, *M.* Model Theory of Finite Difference Fields and Simple Groups : PhD thesis / Ryten M. — PhD Thesis : University of Leeds, 2007. — http://www1.maths.leeds.ac.uk/~pmthdm/ryten1.pdf.

63. *Lopes*, *V. C.* Division rings whose vector spaces are pseudofinite / V. C. Lopes, L. van den Dries // J. Symbolic Logic. — 2010. — Vol. 75, no. 3. — P. 1087—1090.

64. *Beyarslan*, *Ö.* On algebraic closure in pseudofinite fields / Ö. Beyarslan, E. Hrushovski // The Journal of Symbolic Logic. — 2012. — Vol. 77, no. 4. — P. 1057—1066.

65. *Tingxiang*, *Z.* Pseudofinite Difference Fields / Z. Tingxiang. — 2018. — https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01831524.

66. *Hrushovski*, *E.* Ax's theorem with an additive character / E. Hrushovski. — 2019. — https://arxiv.org/pdf/1911.01096.pdf.

67. *Kruckman*, *A.* Disjoint n-Amalgamation and Pseudofinite Countably Categorical Theories / A. Kruckman // Notre Dame J. Formal Logic. — 2019. — Vol. 60, no. 1. — P. 139—160.

68. *Bello-Aguirre*, *R.* Model Theory of Finite and Pseudofinite Rings : PhD thesis / Bello-Aguirre R. — University of Leeds, 2016. — Ph.D. thesis.

69. *Wilson*, *J.* On pseudofinite simple groups / J. Wilson // J. Lond. Math. Soc. — 1995. — Vol. 51, no. 2. — P. 471—490.

70. *Point*, *F.* Ultraproducts and Chevalley groups / F. Point // Arch. Math. Logic. — 1999. — Vol. 38. — P. 355—372.

71. *Hrushovski*, *E.* Groups definable in local fields and pseudofinite fields / E. Hrushovski, A. Pillay // Israel Journal of Mathematics. — 1994. — Vol. 85, no. 1—3. — P. 203—262.

72. *Macpherson*, *H.* Stable pseudofinite groups / H. Macpherson, K. Tent // J. Algebra. — 2007. — Vol. 312. — P. 550—561.

73. *Macpherson, H.* Pseudofinite groups with NIP theory and definability in finite simple groups / H. Macpherson, K. Tent // In: Strüngmann L., Droste M., Fuchs L., Tent K. (eds.) Groups and Model Theory. Contemp. Math. Soc., American Mathematical Society, Providence (2012). — 2012. — Vol. 576. — P. 255—267.

74. Groups in supersimple and pseudofinite theories / R. Elwes [et al.] // Proc. Lond. Math. Soc. — 2011. — Vol. 103, no. 3. — P. 1049—1082.

75. *Macpherson, D.* Model theory of finite and pseudofinite groups / D. Macpherson // Arch. Math. Logic. — 2018. — Vol. 57. — P. 159—184.

76. *Pavlyuk, I. I.* Approximations for Theories of Abelian Groups / I. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov // Mathematics and Statistics. — 2020. — Vol. 8, no. 2. — P. 220—224.

77. *Энгелькинг, Р.* Общая топология / Р. Энгелькинг. — Москва : Мир, 1986. — 752 с.

78. *Day, G. W.* Superatomic Boolean algebras / G. W. Day // Pacific J. Math. — 1967. — Vol. 23, no. 3. — P. 479—489.

79. *Koppelberg, S.* Handbook of Boolean Algebras. Vol. 1 / S. Koppelberg. — Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, Nort-Holland, 1989. : eds. J. D. Monk, R. Bonnet., 2019. — 342 p.

80. *Palyutin, E.* Spectrum and structure of models of complete theories. In: Handbook of mathematical logic. Vol. 1. Model Theory (Eds. J. Barwise, Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin, A. D. Taimanov). / E. Palyutin // Nauka, Moscow, 1982. — 1982. — P. 320—387. — (in russian).

81. *Ершов, Ю.* Математическая логика, 6-е изд., / Ю. Ершов, Е. Палютин. — Москва : Физматлит, 2011. — 356 с.

82. *Block, W.* Algebraizable logics. Vol. 77 / W. Block, D. Pigozzi. — Mem. Am. Math. Soc., 1989. — (No.396).

83. *Hinman, P.* Fundamentals of mathematical logic / P. Hinman. — Wellesley, MA, A K Peters, 2005.

84. *Poizat, B.* Positive Jonsson theories / B. Poizat, A. Yeshkeyev // Log. Univers. — 2018. — Vol. 12, no. 1/2. — P. 101—127.

85. *Sudoplatov, S.* On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory / S. Sudoplatov // Bull. Karaganda Univ., Ser. Math. — 2016. — Vol. 82, no. 2. — P. 113—120.

86. *Kulpeshov, B.* On relative separability in hypergraphs of models of theories / B. Kulpeshov, S. Sudoplatov // Eurasian Math. J. — 2018. — Vol. 9, no. 4. — P. 68—78.

87. *Mal'tsev, A.* Axiomatizable Classes of Locally Free Algebras of Some Types / A. Mal'tsev // Sib. Mat. Z. — 1962. — Vol. 3, no. 5. — P. 729—743. — (in russian).

88. *Belegradek, O. V.* Theory of Locally Free Algebras / O. V. Belegradek // Model Theory and its Applications, American Mathematical Society translations. — 1999. — Vol. 195, no. 2. — P. 117—143.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Markhabatov, N. D.* Ranks for families of permutation theories / N. D. Markhabatov // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2019. — Т. 28. — С. 85—94. — (Scopus, WoS(ESCI), ВАК).

2. *Markhabatov, N. D.* Pseudofiniteness of locally free algebras / N. D. Markhabatov // Algebra and model theory 12 : coll. of papers. – Novosibirsk : NSTU publ. — 2019. — Т. 12. — С. 41—46. — (РИНЦ).

3. *Markhabatov, N. D.* Algebras for definable families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2019. — Т. 16. — С. 600—608. — (Scopus, WoS, РИНЦ).

4. *Markhabatov, N. D.* Definable families of theories, related calculi and ranks / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2020. — Т. 17. — С. 700—714. — (Scopus, WoS, РИНЦ).

5. *Мархабатов, Н. Д.* Топологии, ранги и замыкания для семейств теорий. I / Н. Д. Мархабатов, С. В. Судоплатов // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, № 6. — С. 649—679. — N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, “Topologies, ranks, and closures for families of theories. I”, Algebra and Logic, 59:6 (2021), 437–455. — (переведенная версия(Scopus, WoS), ВАК).

6. *Мархабатов, Н. Д.* Топологии, ранги и замыкания для семейств теорий. II / Н. Д. Мархабатов, С. В. Судоплатов // Алгебра и логика. — 2021. — Т. 60, № 1. — С. 57—80. — N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, “Topologies, ranks, and closures for families of theories. II”, Algebra and Logic, 60:1 (2021), 38-52. — (переведенная версия(Scopus, WoS), РИНЦ, ВАК).

7. *Markhabatov, N. D.* Ranks for families of all theories of given languages / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Eurasian Mathematical Journal. — 2021. — Т. 12, № 2. — С. 52—58. — (Scopus, WoS, РИНЦ).

8. *Markhabatov, N. D.* On ranks for families of all theories of given languages / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Мальцевские чтения = Mal’tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск, 19–22 нояб. — 2018. — С. 213.

9. *Markhabatov, N. D.* On compactness for closed families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», Казахстан, Алматы, 3–5 апреля : тез. докл. – Алматы: ИМММ. — 2019. — С. 18—19.

10. *Markhabatov, N. D.* On ranks for families of permutation theories / N. D. Markhabatov // 16 Asian logic conference, 14 international conference on computability and randomness (CCR 2019) : progr. and abstr., Kazakhstan, Nur-Sultan, 17–21 June. — 2019. — С. 40—41.

11. *Markhabatov, N. D.* On ranks for families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Алгебра и математическая логика: теория и приложения : материалы междунар. конф. : тез. докл., Казань: Изд-во КФУ, 24–28 июня. — 2019. — С. 50—51.

12. *Markhabatov, N. D.* On calculi and ranks for definable families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // 16 International congress on logic, methodology and philosophy of science and technology (CLMPST) : book of abstr., Czech Technical, Prague, 5–10 Aug. — 2019. — С. 311.

13. *Markhabatov, N. D.* On algebras for definable families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск : Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 19–23 авг. — 2019. — С. 200.

14. *Markhabatov, N. D.* On topologies and ranks for families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования : тез. докл., Республики Казахстан, Алматы. — 2020. — С. 15—17.

15. *Markhabatov, N. D.* On closures for families of theories / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Мальцевские чтения = Mal'tsev meeting : тез. докл. междунар. конф., Новосибирск : Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 16–20 нояб. — 2020. — С. 244.