Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»

На правах рукописи

Красицкая Анастасия Игоревна

Делимые полигоны с примитивно нормальными и стабильными теориями

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент
А.А. Степанова

Владивосток — 2021

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Тема диссертационной работы относится к теоретико-модельной алгебре. Предметом исследования являются некоторые классы полигонов, при этом акцент делается на классы делимых полигонов. С помощью классических методов теории моделей, среди которых теория стабильности, различные теоретико-модельные конструкции, изучаются такие свойства этих классов, как примитивная нормальность, примитивная связность, стабильность и P-стабильность.

Полигоны над моноидами, т.е. множества, на которых действуют моноиды, встречаются в разных разделах математики и ее приложений. Например, всякая универсальная алгебра является полигоном над моноидом своих эндоморфизмов; всякий моноид является полигоном над собой. Полигонам посвящены работы [6,7,24]. Следует отметить, что полигон над моноидом является унарной алгеброй, так как умножение на элементы моноида можно рассматривать как унарные операции. Обратное тоже верно: любая унарная алгебра является полигоном над свободным моноидом с сигнатурными операциями в качестве свободных порождающих этого моноида. В частности, унар можно рассматривать как полигон над циклическим моноидом. В этом смысле работы, посвященные теоретико-модельным свойствам унаров, относятся к работам по теории моделей полигонов. Это работы А.А. Иванова [4], А.Н. Рялскина [16] и других.

В теории полигонов большое число исследований посвящено делимым полигонам, которые обобщают делимые группы. *Делимым*

S-полигоном называется полигон над моноидом S (S-полигон) ${}_SA$, удовлетворяющий условию $cA = A$ для любого сократимого справа элемента $c \in S$. Понятие делимого S-полигона было введено Э. Феллером и Р. Гантос в работе [22]. Делимые расширения S-полигонов впервые были рассмотрены В. Гоулд в [23]. В этой же работе получена характеризация моноидов, над которыми все S-полигоны делимы [23].

Понятие нормальной теории было введено независимо А. Пиллайем и в неявной форме Е.А. Палютиным. При этом А. Пиллай исходил из нормальности теории любого модуля, а Е.А. Палютин — из нормальности произвольной стабильной хорновой теории. Примитивно связные теории являются по определению примитивно нормальными теориями. Эти теории достаточно близки к теории модулей. Вопросы примитивной нормальности классов всех S-полигонов, свободных, проективных, сильно плоских, регулярных S-полигонов изучаются в работах А.А. Степановой [17–19], Д.О. Птахова [14]. Вопросам примитивной связности посвящены работы А.А. Степановой [17, 20]. В [17] дается характеризация моноидов S таких, что класс всех S-полигонов примитивно нормален или примитивно связен. В [18] описывается строение S-полигонов с примитивно нормальной теорией. В диссертации вопросы примитивной нормальности и примитивной связности рассмотрены для класса делимых S-полигонов.

Понятие стабильной теории было введено С. Шелахом и явилось обобщением понятия тотально трансцендентной теории, введенного М. Морли. Для классов регулярных, проективных, сильно плоских S-полигонов вопросы стабильности, суперстабильности, ω-стабильности рассмотрены в работах Т.Г. Мустафина [1, 9, 10], В.С. Богомолова [1], А.В. Михалева [2, 8], Е.В. Овчинниковой [8], А.А. Степановой [2, 8], В. Гоулд [2]. В работе Т.Г. Мустафина [9] доказано, что теория любого S-полигона стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид (вполне упорядоченный моноид). В диссертации рассмотрены вопросы стабильности, суперстабильности, ω-стабильности для класса делимых S-полигонов.

Понятие P-стабильности является частным случаем обобщенной стабильности полных теорий [11]. Абелевы группы с P-стабильной теорий описаны в работе Е.А. Палютина [12]. В [15] М.А. Русалеев дает полное описание $(P, 1)$-стабильных теорий в терминах определимой интерпретируемости в теории языка одноместных предикатов. В работе Д.О. Птахова [13] рассмотрены S-полигоны с $(P, 1)$-стабильной теорией. Кроме того, доказано, что (P, s)-, (P, a)-, (P, e)-стабильность класса всех S-полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S — группа. В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с P-стабильностью некоторых классов S-полигонов. В частности, получено описание моноида S, над которым классы свободных, проективных, сильно плоских, делимых, регулярных S-полигонов P-стабильны.

Цели и задачи данной работы заключаются в изучении строения моноидов с точки зрения теоретико-модельных свойств класса делимых S-полигонов над ними; исследование таких свойств класса делимых S-полигонов, как примитивная нормальность, примитивная связность, стабильнось, P-стабильность.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории моделей такие, как теория стабильности, различные теоретико-модельные конструкции, а также методы теории

S-полигонов.

Новизна и научная значимость работы. Результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теоретико-модельной алгебре, в теории S-полигонов, при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследованы моноиды, над которыми класс делимых S-полигонов примитивно нормален или примитивно связен. Показано, что для произвольного моноида S класс делимых S-полигонов примитивно нормален тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид, примитивно связен тогда и только тогда, когда S — группа. Результаты опубликованы в [25].

2. Дано описание моноидов S, таких что теория любого делимого S-полигона стабильна, суперстабильна, ω-стабильна. В частности, доказано, что теория любого делимого S-полигона стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно (вполне) упорядоченный моноид. Также показано, что для коммутативного моноида S теория любого делимого S-полигона ω-стабильна тогда и только тогда, когда либо S — абелева группа с не более чем счетным числом подгрупп, либо S конечен и имеет единственный собственный идеал. Результаты опубликованы в [26].

3. Рассмотрены вопросы, связанные с P-стабильностью некоторых классов S-полигонов. Доказано, что классы $S\text{-}Act$ всех S-полигонов, $\mathcal{F}$ всех свободных S-полигонов, $\mathcal{SF}$ всех сильно плоских S-полигонов, $\mathcal{P}$ всех проективных S-полигонов, $S\text{-}Div$ всех делимых S-полигонов

$(P,1)$-стабильны только в том случае, когда S — одноэлементный моноид. Описаны моноиды, над которыми класс $\mathcal{R}$ всех регулярных полигонов $(P,1)$-стабилен. Показано, что классы S-Act всех S-полигонов, S-Div всех делимых S-полигонов (P,s)-, (P,a)-, (P,e)-стабильны в том и только том случае, когда S — группа. Приведена характеризация коммутативных моноидов, для которых класс $\mathcal{R}$ всех регулярных полигонов (P,s)-, (P,a)-, (P,e)-стабилен. Результаты опубликованы в [27].

Апробация работы. Результаты диссертации излагались автором на семинаре «Алгебра и логика» Института им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск), семинаре «Теория моделей» имени Е.А. Палютина Института им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск), а также на международных конференциях «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 2017–2020), Региональных научно-практических конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам (г. Владивосток, 2017–2019), Научно-практических конференциях на английском языке студентов, магистрантов и аспирантов Школы естественных наук ДВФУ (г. Владивосток, 2017, 2018).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [25–35]. Работы [25–27] опубликованы в изданиях, которые входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, а так же индексируемых в наукометрических системах (SCOPUS и т.д.). Работы [25, 27, 29] написаны в неразрывном сотрудничестве со А.А. Степановой.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Компьютерный набор выполнен с использованием пакета LaTeX. Общий объем диссертации 58 страниц. Библиография включает 35 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** приводится обзор основных результатов научных работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с темой диссертации, и кратко приводятся основные результаты диссертации.

В **первой главе** дается описание моноидов, над которыми класс делимых S-полигонов примитивно нормален или примитивно связен.

Под *левым S-полигоном* ${}_SA$ (или просто *S-полигоном*) понимается алгебраическая система $\langle A; L_S\rangle$ языка $L_s = \{f_s^{(1)} | s \in S\}$ такая, что $f_s(f_t(a)) = f_{st}(a)$ и $f_1(a) = a$ для любых $a \in A$, $s, t \in S$. Аналогично определяется понятие правого S-полигона. Подсистема ${}_SB$ S-полигона ${}_SA$ называется *подполигоном полигона* ${}_SA$. В этом случае используем обозначение ${}_SB \subseteq {}_SA$. Для любого $s \in S$ унарную операцию $f_s \in L_s$ на A будем обозначать через s. Класс всех S-полигонов обозначим через $S\text{-}Act$.

Элемент $c \in S$ называется *сократимым справа*, если из равенства $ac = bc$ следует равенство $a = b$ для любых $a, b \in S$. *Делимый* S-полигон — это S-полигон ${}_SA$, удовлетворяющий условию $cA = A$ для любого сократимого справа элемента $c \in S$. Класс всех делимых S-полигонов обозначим через $S\text{-}Div$.

Моноид S называется *линейно (вполне) упорядоченным*, если множество $\{Sa \mid a \in S\}$ линейно (вполне) упорядочено относительно $\supseteq$.

Формула вида

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n (\Phi_0 \wedge \cdots \wedge \Phi_k),$$

где Φ_i , $i \leq k$, — атомарные формулы, называется *примитивной.*

Пусть $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула языка L, $\bar{a}$ — кортеж элементов и $|\bar{a}| = |\bar{y}|$. Множество вида $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ называется *примитивным.* Если $\bar{b}$ — кортеж элементов и $|\bar{b}| = |\bar{y}|$, то множества $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathcal{C}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями.*

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из $\mathcal{C}$, определенная в $\mathcal{C}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, называется *примитивной эквивалентностью.* Область определения X такой эквивалентности α определяется в $\mathcal{C}$ примитивной формулой $\Phi(\bar{x}, \bar{x})$, и обозначается через $\mathrm{dom}\,(\alpha)$. Если $\bar{a} \in X$, то через $\bar{a}/\alpha$ будем обозначать класс эквивалентности α с представителем a. Эквивалентность α называется *нулевой*, если все α-классы одноэлементны.

Теория T называется *примитивно нормальной,* если для любых примитивных копий X, Y выполнено $X = Y$ или $X \cap Y = \emptyset$. Класс структур K языка L называется *примитивно нормальным,* если теория $Th(\mathcal{A})$ примитивно нормальна для любой структуры $\mathcal{A}$ класса K.

Теория T называется *примитивно связной,* если она примитивно нормальна и любые обобщенно примитивные копии либо примитивно связаны, либо обе одноэлементны. Класс структур K языка L называется *примитивно связным,* если теория $Th(\mathcal{A})$ примитивно связна для любой структуры $\mathcal{A}$ класса K.

Для моноидов, над которыми класс делимых S-полигонов примитивно нормален, был получен следующий результат:

Теорема 1.10 *Для моноида S эквивалентны следующие условия:*

(1) класс S-Div примитивно нормален;

(2) класс S-Act примитивно нормален;

(3) S — линейно упорядоченный моноид.

Также было получено описание моноидов, над которыми класс делимых S-полигонов примитивно связен:

Теорема 1.14 *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) класс S-Div примитивно связен;

(2) класс S-Act примитивно связен;

(3) S — группа.

Во **второй главе** исследуются моноиды, над которыми теория класса делимых S-полигонов стабильна, суперстабильна, ω-стабильна.

Теория T называется *стабильной в мощности* κ или κ–стабильной, если $|S(X)| \leq \kappa$ для любой модели $\mathcal{A}$ теории T и любого $X \subseteq A$ мощности κ. Если теория T κ–стабильна для некоторого бесконечного κ, то T называется *стабильной*. Если теория T κ–стабильна для всех $\kappa \geq 2^{|T|}$, то T называется *суперстабильной*. Если теория T не является стабильной, то T называется *нестабильной*.

Пусть K — класс S-полигонов. Моноид S называется *K-стабилизатором* (K-суперстабилизатором, K-ω-стабилизатором), если $Th({}_SA)$ стабильна (суперстабильна, ω-стабильна) для любого S-полигона ${}_SA \in K$. Если $K = S$-Act, то K-стабилизатор (K-суперстабилизтор, K-ω-стабилизатор) будем называть стабилизатором (суперстабилизатором, ω-стабилизатором).

Доказано, что теория класса всех делимых S-полигонов стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно (вполне) упорядоченный моноид:

Теорема 2.6 *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S является S-Div-стабилизатором;

(2) S является стабилизатором;

(3) S является линейно упорядоченным моноидом.

Теорема 2.7 *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S является S-Div-суперстабилизатором;

(2) S является суперстабилизатором;

(3) S является вполне упорядоченым моноидом.

Также показано, что для коммутативного моноида S теория класса всех делимых S-полигонов ω-стабильна тогда и только тогда, когда либо S — абелева группа с не более чем счетным числом подгрупп, либо S конечен и имеет единственный собственный идеал:

Теорема 2.8 *Для коммутативного счетного моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S является S-Div-ω-стабилизатором;

(2) S является ω-стабилизатором;

(3) либо S — абелева группа с не более чем счетным числом подгрупп, либо S конечен и имеет единственный собственный идеал.

В **третьей главе** рассматриваются вопросы, связанные с P-стабильностью некоторых классов S-полигонов. Помимо класса делимых SS-полигонов исследуются классы свободных, проективных, сильно плоских, делимых, регулярных S-полигонов. В частности, получено описание моноида S, над которым классы свободных, проективных, сильно плоских, делимых, регулярных S-полигонов P-стабильны.

Пусть T — теория языка L, $\mathcal{C}$ — монстр-модель, т.е. насыщенная в достаточно большой мощности модель теории T,

$$T(X) = \{\varphi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X, \mathcal{C} \models \varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{x}) - \text{формула языка } L\},$$

язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P, Δ — некоторое множество предложений языка L_P. Теория T называется P_Δ*-стабильной в мощности* λ, если для любого множества X в теории T мощности $\leqslant \lambda$ множество

$$T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$$

имеет не более λ пополнений в языке $(L(X))_P$. Теория T называется P_Δ*-стабильной*, если она P_Δ-стабильна в некоторой бесконечной мощности λ.

Теория T называется (P,s)*-стабильной*, если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определимых функциональными символами языка L. Теория T называется (P,a)*-стабильной*, если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, т.е. содержит все конечные множества, определимые в алгебраической системе $\mathcal{C}$ формулами языка L с параметрами из предиката P. Теория T называется (P,e)*-стабильной*, если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является элементарной подсистемой. Класс K алгебраических систем языка L называется $(P,1)-$ $((P,s)$-$,(P,a)$-$,(P,e)-)$ стабильным, если теория $Th(A)$ $(P,1)-$ $((P,s)$-$,(P,a)$-$,(P,e))$ стабильна для любого $\mathcal{A} \in K$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка L называется $(P,1)-$ ((P,s)-, (P,a)-, (P,e)-) стабильной, если $Th(A)$ $(P,1)-$ ((P,s)-, (P,a)-, (P,e)-) стабильна.

Результаты третьей главы относятся помимо класса делимых S-полигонов, также к классам свободных, проективных, сильно плоских, регулярных S-полигонов.

Свободным S-полигоном (с множеством свободных образующих $X \subseteq F$) в классе S-Act называется S-полигон ${}_SF$ такой, что для любого S-полигона ${}_SA$ и отображения $\theta : X \to A$ существует единственный гомоморфизм $\overline{\theta} :{}_S F \to {}_SA$ такой, что $\overline{\theta}\iota = \theta$, где $\iota : X \to F$ — это вложение. Класс всех свободных S-полигонов обозначим через $\mathcal{F}$.

Проективным S-полигоном ${}_SP$ называется такой S-полигон, что для любой диаграммы S-полигонов и гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} & {}_SP \arrow[d, "\theta"] \\ {}_SM \arrow[r, "\varphi"] & {}_SN, \end{tikzcd}$$

где φ — эпиморфизм, существует существует гомоморфизм
$\psi :{}_S P \to_S M$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & {}_SP \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\theta"] \\ {}_SM \arrow[r, "\varphi"] & {}_SN \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Если A_S — правый S-полигон и ${}_SB$ — левый S-полигон, то *тензорное произведение* A_S и ${}_SB$, обозначаемое через $A_S \otimes {}_SB$, это фактор-множество множества $A \times B$ относительно эквивалентности, порожденной множеством $\{((as,b),(a,sb)) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$. Для $a \in A$ и $b \in B$ класс эквивалентности с представителем (a,b) будем обозначать через $a \otimes b$. Отображение $- \otimes B$ является функтором из категории $Act - S$ всех правых S-полигонов в категорию множеств. *Сильно плоским* S-полигоном называется S-полигон ${}_S B$ такой, что функтор $- \otimes B$ сохраняет универсальные квадраты. Обозначим класс всех сильно плоских S-полигонов через $\mathcal{SF}$.

Пусть ${}_S A$ — S-полигон. Элемент $a \in A$ называется *act–регулярным*, если существует гомоморфизм $\varphi : {}_S Sa \longrightarrow {}_S S$ такой, что $\varphi(a)a = a$. *Регулярным* S-полигоном называется S-полигон, все элементы которого act–регулярны.

Теорема 3.13 *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и существуют S-полигон ${}_S A \in K$ и $e^2 = e \in S$, такие что ${}_S Se \subseteq {}_S A$. Если класс K является $(P, 1)$-стабильным, то полигон ${}_S Se$ одноэлементен.*

Из теоремы 3.13 получаем следующее следствие:

Следствие 3.14 *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и существует S-полигон ${}_S A \in K$, такой что ${}_S S \subseteq {}_S A$. Класс K является $(P, 1)$-стабильным тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Так как классы $S\text{-}Act$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$, $S\text{-}Div$ замкнуты относительно копроизведений и содержат S-полигон ${}_S A \in K$, такой что ${}_S S \subseteq {}_S A$, то из следствия 3.14 получаем

Следствие 3.15 *Пусть K — один из классов: $S\text{-}Act$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$, $S\text{-}Div$. Класс K является $(P, 1)$-стабильным тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Для класса всех регулярных S-полигонов получаем:

Следствие 3.16 *Пусть $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Класс $\mathcal{R}$ $(P, 1)$-стабилен тогда и* *только тогда, когда* $|Se| = 1$ *для любого* $e = e^2 \in R$, *где* R *— регулярный центр моноида* S.

Для (P, e)-стабильности получен следующий результат:

Теорема 3.17 *Пусть класс* K S*-полигонов замкнут относительно копроизведений и склеек и существуют* S*-полигон* ${}_SA \in K$ *и* $e^2 = e \in S$, *такие что* ${}_SSe \subseteq {}_SA$. *Если класс* K *является* (P, e)*-стабильным, то* $Ste = Se$ *для любого* $t \in S$.

Основываясь на теореме 3.17, получаем

Следствие 3.18 *Пусть класс* K S*-полигонов замкнут относительно копроизведений и склеек* S*-полигонов и существует* S*-полигон* ${}_SA \in K$, *такой что* ${}_SS \subseteq {}_SA$. *Для моноида* S *следующие условия эквивалентны:*

1) класс K (P, s)*-стабилен;*

2) класс K (P, a)*-стабилен;*

3) класс K (P, e)*-стабилен;*

4) S *— группа.*

Так как классы S-Act и S-Div замкнуты относительно копроизведений и склеек и содержат S-полигон ${}_SA \in K$, такой что ${}_SS \subseteq {}_SA$, то из следствия 3.18 получаем

Следствие 3.19 *Пусть* K *— один из классов:* S-Act, S-Div. *Для моноида* S *следующие условия эквивалентны:*

1) класс K (P, s)*-стабилен;*

2) класс K (P, a)*-стабилен;*

3) класс K (P, e)*-стабилен;*

4) S *— группа.*

Для класса всех регулярных S-полигонов получаем:

Теорема 3.21 *Пусть класс $\mathcal{R}$ аксиоматизируем и удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{R}$ (P, s)-стабилен;

2) класс $\mathcal{R}$ (P, a)-стабилен;

3) класс $\mathcal{R}$ (P, e)-стабилен;

4) $Ste = Se$ для любого идемпотента $e \in R$, где R — регулярный центр моноида S.

Следствие 3.22 *Пусть S — коммутативный моноид. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{R}$ (P, s)-стабилен;

2) класс $\mathcal{R}$ (P, a)-стабилен;

3) класс $\mathcal{R}$ (P, e)-стабилен;

4) $Ste = Se$ для любого идемпотента $e \in R$, где R — регулярный центр моноида S.

В заключении приводятся основные результаты диссертации.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н., доценту Степановой Алене Андреевне за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

1 Примитивная нормальность и примитивная связность класса делимых S-полигонов

В данной главе исследуются моноиды, над которыми класс делимых S-полигонов примитивно нормален или примитивно связен. Показано, что для произвольного моноида S класс делимых S-полигонов примитивно нормален тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид (теорема 1.10), примитивно связен тогда и только тогда, когда S — группа (теорема 1.14).

1.1 Предварительные сведения

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем определения и утверждения из теории S-полигонов, которые необходимы, чтобы сформулировать результаты исследования в этой и последующих главах (см. [24], [2], [8]).

Пусть S — моноид, 1 — единица S. Моноид S называется *линейно (вполне) упорядоченным*, если множество $\{Sa \mid a \in S\}$ линейно (вполне) упорядочено относительно $\supseteq$. Говорят, что элемент $c \in S$ *сократим справа*, если из равенства $ac = bc$ следует равенство $a = b$ для любых $a, b \in S$. Элемент $s \in S$ *обратим справа*, если существует элемент $t \in S$, такой что $st = 1$.

Под *левым S-полигоном* ${}_SA$ (или просто *S-полигоном*) понимается алгебраическая система $\langle A; L_S \rangle$ языка $L_s = \{f_s^{(1)} | s \in S\}$ такая, что $f_s(f_t(a)) = f_{st}(a)$ и $f_1(a) = a$ для любых $a \in A$, $s, t \in S$. Аналогично определяется понятие правого S-полигона. Подсистема ${}_SB$ S-полигона

${}_S A$ называется *подполигоном полигона* ${}_S A$. В этом случае используем обозначение ${}_S B \subseteq {}_S A$. Для любого $s \in S$ унарную операцию $f_s \in L_s$ на A будем обозначать через s. Класс всех S-полигонов обозначим через $S\text{-}Act$.

Замечание 1.1. *Если t — обратимый справа элемент моноида S и ${}_S A$ — S-полигон, то $tA = A$.*

Конгруэнция на S-полигоне A — это отношение эквивалентности ρ на A, такое что из $(a, a') \in \rho$ следует $(sa, sa') \in \rho$ для любых $a, a' \in A$, $s \in S$. Вместо $(a, a') \in \rho$ часто будем использовать запись $a\rho a'$. Наименьшая относительно $\subseteq$ конгруэнция на S-полигоне ${}_S A$, содержащая множество $X \subseteq A \times A$, называется *конгруэнцией S-полигона ${}_S A$, порожденной множеством X*. *Копроизведением* S-полигонов ${}_S A_i$, $i \in I$, называется их дизъюнктное объединение; копроизведение S-полигонов ${}_S A_i, i \in I$, обозначается через $\bigsqcup\limits_{i \in I} {}_S A_i$.

Теорема 1.2. *[24] Пусть ${}_S A$ — S-полигон, $X \subseteq A \times A$ и $\rho = \rho(X)$. Для любых $a, b \in A$ соотношение $a \,\rho\, b$ имеет место в том и только том случае, если либо $a = b$, либо существуют $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in A$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, такие что $(p_i, q_i) \in X$ или $(q_i, p_i) \in X$ для любых i, $1 \le i \le n$, и*

$$a = s_1 p_1,\ s_1 q_1 = s_2 p_2,\ \ldots\ , s_n q_n = b.$$

Элемент $c \in S$ называется *сократимым справа*, если из равенства $ac = bc$ следует равенство $a = b$ для любых $a, b \in S$. *Делимый* S-полигон — это S-полигон ${}_S A$, удовлетворяющий условию $cA = A$ для любого сократимого справа элемента $c \in S$. Класс всех делимых S-полигонов обозначим через $S\text{-}Div$.

Отображение $\theta : A \to B$, такое что $\theta(sa) = s\theta(a)$ для любых $a \in A, s \in S$ называется гомоморфизмом из S-полигона A в S-полигон B. *Свободным* (с множеством свободных образующих X в S-Act) S-полигоном называется S-полигон F, такой что для любого S-полигона A и отображения $\theta : X \to A$ существует единственный гомоморфизм $\overline{\theta} : F \to A$, такой что $\iota\overline{\theta} = \theta$, где $\iota : X \to F$ — это вложение.

Через T обозначим множество всех сократимых справа, но необратимых справа элементов S. Пусть ${}_SA$ — S-полигон,

$$X = \{(t, a) \in T \times A \mid a \text{ не делится на } t\},$$

${}_SF(X)$ — свободный S-полигон с множеством свободных образующих X,

$$H = \{(t(t, a), a) | (t, a) \in X, a \in A\} \subseteq (F(X) \bigsqcup A) \times (F(X) \bigsqcup A),$$

$\rho(H)$ — конгруэнция S-полигона ${}_S(F(X) \bigsqcup A)$, порожденная множеством H, ${}_SU(T, A) = {}_S(F(X) \bigsqcup A)/\rho(H)$. Заметим, что существует естественное вложение $\pi : {}_SA \to {}_SU(T, A)$, поэтому элементы $a \in A$ можно отождествлять с $\pi(a)$.

Введем обозначения: ${}_SA_0 = {}_SA$, ${}_SA_i ={}_S U(T, A_{i-1})$ для $i \in \mathbb{N}$, $D(A) = \bigcup_{i\in\omega} A_i$.

Предложение 1.3. *[24] Если $a\rho(H)b$ для некоторых $a, b \in A$, то $a = b$.*

Положим ${}_SA_0 = {}_SA$, ${}_SA_i ={}_S U(T, A_{i-1})$ для $i \in \mathbb{N}$, $D(A) = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$.

Теорема 1.4. *[24] S-полигон ${}_SD(A)$ является делимым S-полигоном.*

Делимым расширением S-полигона ${}_SA$ называется S-полигон ${}_SD(A)$.

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 1.4.

Теорема 1.5. *Для любого S-полигона ${}_SA$ существует делимый S-полигон ${}_SB(A)$, такой что ${}_SA \subseteq {}_SB(A)$.*

Приводимые ниже сведения из теории моделей можно найти в [5], [3]. Для алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка L и $a_1, \ldots, a_n \in A$ вместо $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n$ будем писать $\bar{a} \in A$; длину кортежей $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ и $\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, будем обозначать через $|\bar{a}|$ и $|\bar{x}|$ соответственно, т.е. $|\bar{a}| = n$ и $|\bar{x}| = n$. Пусть T — полная теория языка L. Пусть $\bar{s}, \bar{t}$ — кортежи элементов или переменных. Тогда $\bigcup \bar{s}$ — множество, состоящее из элементов кортежа $\bar{s}$. Вместо $s \in \bigcup \bar{s}$ пишем $s \in \bar{s}$; вместо $\bigcup \bar{s} \cup \bigcup \bar{t}$ — просто $\bar{s} \cup \bar{t}$; вместо $\bigcup \bar{s} \cap \bigcap \bar{t}$ — просто $\bar{s} \cap \bar{t}$. Зафиксируем некоторую достаточно большую и насыщенную модель $\mathcal{C}$ теории T, она называется *монстр-моделью*, т.к. предполагается, что все рассматриваемые модели теории T являются ее элементарными подмоделями. Считаем, что все элементы, кортежи элементов и множества содержатся в носителе монстр-модели $\mathcal{C}$. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула языка L, $\mathcal{A}$ — модель теории T, $\bar{a}$ — кортеж элементов из $\mathcal{A}$ и $|\bar{a}| = |\bar{y}|$, то положим $\Phi(\mathcal{A}, \bar{a}) = \{\bar{b} \mid \mathcal{A} \models \Phi(\bar{b}, \bar{a})\}$.

Класс K структур называется *аксиоматизируемым*, если существуют язык L и множество предложений Z языка L, такие что для любой структуры $\mathcal{A}$ справедливо

$$\mathcal{A} \in K \Longleftrightarrow (\text{язык } \mathcal{A} \text{ равен } L \text{ и } \mathcal{A} \models \Phi \text{ для всех } \Phi \in Z).$$

Формула вида

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n(\Phi_0 \wedge \cdots \wedge \Phi_k),$$

где Φ_i , $i \leq k$, — атомарные формулы, называется *примитивной.*

Пусть $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула языка L, $\bar{a}$ — кортеж элементов и $|\bar{a}| = |\bar{y}|$. Множество вида $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ называется *примитивным.* Если $\bar{b}$ — кортеж элементов и $|\bar{b}| = |\bar{y}|$, то множества $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathcal{C}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями.*

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из $\mathcal{C}$, определенная в $\mathcal{C}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, называется *примитивной эквивалентностью.* Область определения X такой эквивалентности α определяется в $\mathcal{C}$ примитивной формулой $\Phi(\bar{x}, \bar{x})$, и обозначается через $\mathrm{dom}\,(\alpha)$. Если $\bar{a} \in X$, то через $\bar{a}/\alpha$ будем обозначать класс эквивалентности α с представителем a. Эквивалентность α называется *нулевой*, если все α-классы одноэлементны.

Теория T называется *примитивно нормальной,* если для любых примитивных копий X, Y выполнено $X = Y$ или $X \cap Y = \emptyset$. Класс структур K языка L называется *примитивно нормальным,* если теория $Th(\mathcal{A})$ примитивно нормальна для любой структуры $\mathcal{A}$ класса K.

Теорема 1.6. *[17] Класс S-Act всех S-полигонов является примитивно нормальным тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид.*

Множество X называется Δ*–примитивным*, если существует семейство S примитивных множеств, такое что

$$X = \bigcap \{Y \mid Y \in S\}.$$

Эквивалентность α называется Δ*-примитивной*, если существует множество E примитивных эквивалентностей, такое что

$$\alpha = \bigcap\{\beta \mid \beta \in E\}.$$

Классы X и Y одной Δ-примитивной эквивалентности α называются Δ*-примитивными копиями.* Множество вида $X = X^*/\alpha = \{a/\alpha \mid a \in X^*\}$, где X^* — Δ-примитивное множество, α — примитивная эквивалентность и $X^* \subseteq \operatorname{dom}(\alpha)$, называется *обобщенно примитивным*, при этом X^* — *основа*, а α — *образующая эквивалентность* обобщенно примитивного множества X. Отождествляя одноэлементное множество $\{a\}$ с элементом a, будем считать, что Δ-примитивное и примитивное множества являются обобщенно примитивными. Обобщенно примитивные множества X_1, X_2 называются *обобщенно примитивными копиями*, если у них есть общая образующая эквивалентность, а их основы X_1^*, X_2^* являются Δ–примитивными копиями.

Формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $|\bar{x}| = |\bar{y}|$, называется $(\bar{x}, \bar{y})$*-рефлексивной*, если

$$T \vdash \forall\bar{x}\forall\bar{y}\forall\bar{z}(\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \to (\exists\bar{z}\Phi(\bar{x}, \bar{x}, \bar{z}) \wedge \exists\bar{z}\Phi(\bar{y}, \bar{y}, \bar{z}))).$$

Пусть обобщенно примитивные множества X_0 и X_1 являются обобщенно примитивными копиями, α — их образующая эквивалентность. Говорят, что X_0 *примитивно связано с* X_1, если существует примитивная $(\bar{x}, \bar{y})$-рефлексивная формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ (с параметрами $\bar{c}$), такая что

(a) для любых $\bar{a}_0 \in X_0^*$ и $\bar{b}_0 \in X_0^*$ существуют $\bar{a}_1 \in X_0^*$ и $\bar{b}_1 \in X_1^*$, такие что в $\mathcal{C}$ истинны $\Phi(\bar{a}_0, \bar{b}_1, \bar{c})$ и $\Phi(\bar{a}_1, \bar{b}_0, \bar{c})$;

(b) для любого $\bar{a} \in X_0^*$ множество $\Phi(\bar{a}, \mathcal{C}, \bar{c})$ не содержит X_1^* и верно $\bar{b}/\alpha \subseteq \Phi(\bar{a}, \mathcal{C}, \bar{c})$ для любого $\bar{b} \in \Phi(\bar{a}, \mathcal{C}, \bar{c})$;

(c) для любого $\bar{b} \in X_1^*$ множество $\Phi(\mathcal{C}, \bar{b}, \bar{c})$ не содержит X_0^* и верно $\bar{a}/\alpha \subseteq \Phi(\mathcal{C}, \bar{b}, \bar{c})$ для любого $\bar{a} \in \Phi(\mathcal{C}, \bar{b}, \bar{c})$.

Теория T называется *примитивно связной,* если она примитивно нормальна и любые обобщенно примитивные копии либо примитивно связаны, либо обе одноэлементны. Класс структур K языка L называется *примитивно связным,* если теория $Th(\mathcal{A})$ примитивно связна для любой структуры $\mathcal{A}$ класса K.

Теорема 1.7. *[17] Класс S-Act всех S-полигонов является примитивно связным тогда и только тогда, когда S — группа.*

1.2 Примитивная нормальность класса делимых S-полигонов

Пусть ${}_SA$ — S-полигон. Напомним, что через T обозначается множество всех сократимых справа, но необратимых справа элементов S,

$$X = \{(t, a) \in T \times A \mid a \text{ не делится на } t\},$$

${}_SF(X)$ — свободный S-полигон с множеством свободных образующих X,

$$H = \{(t(t, a), a) | (t, a) \in X, a \in A\} \subseteq (F(X) \bigsqcup A) \times (F(X) \bigsqcup A),$$

$\rho(H)$ — конгруэнция S-полигона ${}_S(F(X) \bigsqcup A)$, порожденная множеством H, ${}_SU(T, A) = {}_S(F(X) \bigsqcup A)/\rho(H)$.

Лемма 1.8. *Пусть ${}_SA$ — S-полигон, $a \in A$, $u \in S$, $(t, c) \in X$, $a \in Sd$, $d = u(t, c)/\rho(H) \in U(T, A)$. Тогда $a \in Sc$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются и $a = rd$, где $r \in S$. В силу $a\rho(H)ru(t, c)$ и теоремы 1.2 существуют

$x_0, ..., x_n, y_0, ..., y_n \in A \bigsqcup F(X)$, $s_0, ..., s_n \in S$, такие что

$$ru(t,c) = s_0x_0, a = s_ny_n, s_iy_i = s_{i+1}x_{i+1},$$

причем $(x_i, y_i) \in H$ или $(y_i, x_i) \in H$ $(0 \leq i < n)$. Так как $ru(t,c) \in F(X)$, то $x_0 \in F(X)$. Так как $(x_0, y_0) \in H$, то $y_0 \in A$. Следовательно, $s_0y_0 \in A$, т.е. $s_0y_0\rho(H)a$. По предложению 1.3 $s_0y_0 = a$.

Поскольку $(x_0, y_0) \in H$, то $x_0 = s(s, y_0)$ для некоторого $s \in T$, где $(s, y_0) \in X$. Тогда $ru(t,c) = s_0s(s, y_0)$. Так как S-полигон $F(X)$ свободный, то $(t,c) = (s, y_0)$, т.е. $y_0 = c$. Следовательно, $a = s_0c \in Sc$.

Лемма 1.9. *Пусть ${}_SA$ — S-полигон, $a, b \in A$, $d \in D(A) \backslash A$, $a, b \in Sd$. Тогда $a, b \in Sc$ для некоторого $c \in A$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$, $d \in D(A) \backslash A$, $a, b \in Sd$. Тогда $d \in A_k$ для некоторого $k > 0$. Обозначим d через c_k. Индукцией по $i \leq k$ покажем, что $a, b \in Sc_{k-i}$ для некоторого $c_{k-i} \in A_{k-i}$. Пусть $i < k$, $a, b \in Sc_{k-i}$, $c_{k-i} \in A_{k-i} = U(T, A_{k-(i+1)})$ и $c_{k-i} \notin A_{k-(i+1)}$. Тогда $c_{k-i} = u(t, c_{k-(i+1)})/\rho(H_{k-i})$, где $t \in T$, $u \in S, c_{k-(i+1)} \in A_{k-(i+1)}$ и $c_{k-(i+1)}$ не делится на t. В силу $a, b \in Sc_{k-i}$, $c_{k-i} = u(t, c_{k-(i+1)})/\rho(H_{k-i})$ и леммы 1.8 имеет место $a, b \in Sc_{k-(i+1)}$. Следовательно, $a, b \in Sc_0$ для некоторого $c_0 \in A$.

Теорема 1.10. *Для моноида S эквивалентны следующие условия:*

(1) класс S-Div примитивно нормален;

(2) класс S-Act примитивно нормален;

(3) S — линейно упорядоченный моноид.

Доказательство. Утверждение $(2) \Rightarrow (1)$ очевидно.

Утверждение $(2) \Leftrightarrow (3)$ следует из теоремы 1.6.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть S-Div — примитивно нормальный класс. Предположим, что моноид S не является линейно упорядоченным, т.е. существуют $s, t \in S$, такие что $St \nsubseteq Ss$ и $Ss \nsubseteq St$. Пусть ${}_SS_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ — попарно непересекающиеся копии S-полигона ${}_SS$, a_i — копия элемента $a \in S$ в S_i, Θ — конгруэнция S-полигона $\coprod\limits_{i=1}^{4} {}_SS_i$, порожденная множеством $\{\langle t_1, t_3\rangle, \langle t_2, t_4\rangle, \langle s_1, s_2\rangle\}$. Через ${}_SA$ обозначим полигон $\coprod\limits_{i=1}^{4} {}_SS_i/\Theta$. Пусть

$$\Phi(x, y) \rightleftharpoons \exists u(su = x \wedge tu = y).$$

Тогда

$${}_SD(A) \models \Phi(s_3/\Theta, t_3/\Theta) \wedge \Phi(s_1/\Theta, t_3/\Theta) \wedge \Phi(s_1/\Theta, t_4/\Theta).$$

Теория $Th({}_SA)$ примитивно нормальная, поэтому

$${}_SD(A) \models \Phi(s_3/\Theta, t_4/\Theta).$$

Тогда существует $a \in D(A)$, такой что $sa = s_3/\Theta$ и $ta = t_4/\Theta$. Понятно, что $a \in D(A) \setminus A$. Следовательно $s_3/\Theta, t_4/\Theta \in Sa$. По лемме 1.9, $s_3/\Theta, t_4/\Theta \in Sc$ для некоторого $c \in A$. Противоречие.

1.3 Примитивная связность класса делимых S-полигонов

Пусть ${}_SA$ — S-полигон, $t \in S$. Определим на S-полигоне ${}_SA$ примитивную эквивалентность α_t^A следующим образом:

$$a \ \alpha_t^A \ b \Longleftrightarrow ta = tb.$$

Лемма 1.11. *Пусть класс S-Div примитивно связен. Если ${}_SA \in S - Div$, то α_t^A является нулевой примитивной эквивалентностью на S-полигоне ${}_SA$ для любого $t \in S$.*

Доказательство. Пусть класс $S\text{-}Div$ примитивно связен, T — теория класса $S\text{-}Div$, ${}_SA \in S\text{-}Div$, $t \in S$ и для некоторого $a \in A$ класс a/α_t^A неодноэлементен. Через ${}_SA_1$ и ${}_SA_2$ обозначим копии S-полигона ${}_SA$, через $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$ обозначим копии элемента $a \in A$. Заметим, что ${}_SB = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2 \in S\text{-}Div$. В силу примитивной связности класса $S\text{-}Div$ существует примитивная формула $\Phi(x, y, \bar{c})$, где $\bar{c} \in B$, примитивно связывающая примитивные копии a_1/α_t^B и a_2/α_t^B. Положим

$$\Phi(x, y, \bar{z}) \leftrightharpoons \exists \bar{u} \Psi(x, y, \bar{z}, \bar{u}).$$

Подполигоны ${}_SA_1$ и ${}_SA_2$ S-полигона ${}_SB$ не пересекаются, поэтому в формуле $\Psi(x, y, \bar{z}, \bar{u})$ нет подформул, эквивалентных формулам вида

$$rx = s_0 v_0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} r_i v_i = s_{i+1} v_{i+1} \wedge r_k v_k = sy,$$

где $v_i \in \bar{z} \cup \bar{u}$ $(0 \le i \le k)$. Тогда

$$\Psi(x, y, \bar{z}, \bar{u}) \equiv \Psi_1(x, \bar{z}, \bar{v}) \wedge \Psi_2(y, \bar{z}, \bar{w}),$$

причем $\bar{v} \cap \bar{w} = \emptyset$. Это означает, что в теории T

$$\Phi(x, y, \bar{z}) \equiv \exists \bar{v} \Psi_1(x, \bar{z}, \bar{v}) \wedge \exists \bar{w} \Psi_2(y, \bar{z}, \bar{w}).$$

Следовательно,

$${}_SB \models \exists \bar{v} \Psi_1(x_0, \bar{c}, \bar{v}) \wedge \exists \bar{w} \Psi_2(y_0, \bar{c}, \bar{w})$$

для любых $x_0 \in a_1/\alpha_t^B$, $y_0 \in a_2/\alpha_t^B$, что противоречит определению примитивной связности класса $S\text{-}Div$.

Лемма 1.12. *Пусть класс $S\text{-}Div$ примитивно связен. Если ${}_SA$ — S-полигон, $t \in S$ и $a \in A$, то $Sta = Sa$.*

Доказательство. Пусть класс $S\text{-}Div$ примитивно связен, ${}_SA$ — S-полигон, $t \in S$ и $a \in A$. Через Sa_1 и Sa_2 обозначим непересекающиеся копии S-полигона Sa, sa_1 и sa_2 — копии элемента $sa \in Sa$ для любого $s \in S$, ${}_SB = ({}_SSa_1 \sqcup_S Sa_2)/\theta$, где конгруэнция θ порождается парой $\langle ta_1, ta_2 \rangle$. Так как $B \subseteq D(B)$, в S-полигоне ${}_SD(B)$ имеет место равенство $ta_1/\theta = ta_2/\theta$. По лемме 1.11 $a_1/\theta = a_2/\theta$. Следовательно, $a \in Sta$, т.е. $Sta = Sa$.

Лемма 1.13. *Если $St = S$ для любого $t \in S$, то S — группа.*

Доказательство. Пусть $St = S$ для любых $t \in S$ и $r \in S$. Так как $Sr = S$, то $1 = r'r$ для некоторого $r' \in S$. В силу $Sr' = S$ верно $1 = r''r'$ для некоторого $r'' \in S$. Значит, $r = r''(r'r) = r''1 = r''$, и $1 = rr'$, т.е. $r' = r^{-1}$. Таким образом, S — группа.

Теорема 1.14. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) класс $S\text{-}Div$ примитивно связен;

(2) класс $S\text{-}Act$ примитивно связен;

(3) S — группа.

Доказательство. Утверждение $(2) \Rightarrow (1)$ очевидно. Утверждение $(1) \Rightarrow (3)$ следует из лемм 1.12, 1.13. Утверждение $(3) \Rightarrow (2)$ вытекает из теоремы 1.7.

2 Стабильность класса делимых S-полигонов

В данной главе исследуются моноиды S, такие что теория любого делимого S-полигона стабильна, суперстабильна, ω-стабильна. В частности, доказано, что теория любого делимого S-полигона стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно (вполне) упорядоченный моноид (теоремы 2.6, 2.7). Также показано, что для коммутативного моноида S теория любого делимого S-полигона ω-стабильна тогда и только тогда, когда либо S — абелева группа с не более чем счетным числом подгрупп, либо S конечен и имеет единственный собственный идеал (теорема 2.8).

2.1 Предварительные сведения

Следующие сведения из теории моделей можно найти в [5]. Пусть T — непротиворечивая теория языка L, $X = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $L_n = L_X$. Любое множество предложений p языка L_n называется *n–типом языка L*. Если теория $p \cup T$ непротиворечива, то p называется *n–типом над T*. Если p является полной теорией, то p называется *полным n–типом языка L*. Если к тому же $T \subseteq p$, то p называется *полным n–типом над T*. Множество всех полных n–типов над T обозначается $S_n(T)$.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебраическая система языка L, $X \subseteq A$, $a \in A$. Обозначим обогащение $(\mathcal{A}, x)_{x \in X}$ алгебраической системы $\mathcal{A}$ константами из X через $\mathcal{A}_X$. *Типом элемента a* над множеством X называется множество $tp(a, X) = \{\Phi(x) \mid \mathcal{A}_X \models \Phi(a)\}$. Нетрудно понять, что $tp(a, X)$ – полный 1–тип над $Th(\mathcal{A}_X)$. Через $S(X)$ обозначим $S_1(Th(\mathcal{A}_X))$.

Теория T называется *стабильной в мощности* κ или κ–стабильной, если $|S(X)| \leq \kappa$ для любой модели $\mathcal{A}$ теории T и любого $X \subseteq A$ мощности κ. Если теория T κ–стабильна для некоторого бесконечного κ, то T называется *стабильной.* Если теория T κ–стабильна для всех $\kappa \geq 2^{|T|}$, то T называется *суперстабильной.* Если теория T не является стабильной, то T называется *нестабильной.*

Предложение 2.1. *[8] Полная теория нестабильна тогда и только тогда, когда существует формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ от $2n$ переменных, модель $\mathcal{A}$ теории T и $\bar{a}_i \in A^n$, $i \in \omega$, такие, что для любых i, j, $i \neq j$,*

$$i < j \iff \mathcal{A} \models \Phi(\bar{a}_i, \bar{a}_j).$$

Пусть K — класс S-полигонов. Моноид S называется *K-стабилизатором* (K-суперстабилизатором, K-ω-стабилизатором), если $Th({}_S A)$ стабильна (суперстабильна, ω-стабильна) для любого S-полигона ${}_S A \in K$. Если $K = S\text{-}Act$, то K-стабилизатор (K-суперстабилизтор, K-ω-стабилизатор) будем называть стабилизатором (суперстабилизатором, ω-стабилизатором).

Введем обозначение

$$\exists^n y \Phi(x, y) \leftrightharpoons \exists y_1 \ldots \exists y_n \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg (y_i = y_j) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Phi(x, y_i) \wedge$$
$$\wedge \forall y \big(\Phi(x, y) \to \bigvee_{1 \leq i \leq n} y = y_i\big)\Big).$$

Теорема 2.2. *[9] Моноид S является стабилизатором тогда и только тогда, когда S – линейно упорядоченный моноид.*

Теорема 2.3. *[9] Моноид S является суперстабилизатором тогда и только тогда, когда S – вполне упорядоченный моноид.*

Теорема 2.4. *[5] Если теория T является стабильной в счетной мощности (ω-стабильной), то она стабильна во всех бесконечных мощностях.*

Теорема 2.5. *[1] Пусть S — произвольный счетный коммутативный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) S является ω-стабилизатором;

2) либо S — абелева группа с не более чем счетным числом подгрупп, либо S конечен и имеет единственный собственный идеал.

2.2 Стабильность класса делимых S-полигонов

Теорема 2.6. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S является S-Div-стабилизатором;

(2) S является стабилизатором;

(3) S является линейно упорядоченным моноидом.

Доказательство. Утверждение $(2) \Rightarrow (1)$ очевидно.

Утверждение $(2) \Leftrightarrow (3)$ следует из теоремы 2.2.

Докажем утверждение $(1) \Rightarrow (3)$.

Предположим, что S является S-Div-стабилизатором, не являющимся линейно упорядоченным моноидом, т.е. существуют $t, s \in S$ такие, что $St \not\subseteq Ss$ и $Ss \not\subseteq St$. Пусть $K = \{\langle i, j\rangle \mid j \leqslant i < \omega\}$; ${}_SS_{ij}$ – копия S-полигона ${}_SS$ ($\langle i, j\rangle \in K$), причем $S_{ij} \cap S_{kl} = \emptyset$, если $\langle i, j\rangle \neq \langle k, l\rangle$; d_{ij} – копия элемента $d \in S$ в S_{ij}. Через ${}_SA$ обозначим S-полигон $\bigcup\limits_{\langle i,j\rangle\in K} {}_SS_{ij}/\theta$, где θ – конгруэнция полигона $\bigcup\limits_{\langle i,j\rangle\in K} {}_SS_{ij}$, порожденная множеством

$$\{\langle t_{ij}, t_{il}\rangle \mid \langle i, j\rangle \in K, \langle i, l\rangle \in K\} \cup \{\langle s_{ij}, s_{lj}\rangle \mid \langle i, j\rangle, \langle l, j\rangle \in K\};$$

через t_i – класс эквивалентности θ с представителем t_{ij}; через s_j – класс эквивалентности θ с представителем s_{ij}; через $\varphi(x,y)$ – формулу $\exists z(x=tz \wedge y=sz)$. Ясно, что ограничение θ на S-полигон ${}_SA_{ij}$ ($\langle i,j\rangle \in K$) является нулевой конгруэнцией.

Докажем, что

$$ {}_SD(A) \models \varphi(t_i,s_j) \Longleftrightarrow i \geqslant j. \tag{1} $$

Если $i \geqslant j$, то $t_i = t1_{ij}/\theta$ и $s_i = s1_{ij}/\theta$, т.е. ${}_SD(A) \models \varphi(t_i,s_j)$. Пусть $i<j$. Предположим, что $t_i = tu$ и $s_j = su$ для некоторого $u \in D(A)$. Тогда по лемме 1.9 $t_i, s_j \in Sc/\theta$ для некоторого $c/\theta \in A$, что не так.

По предложению 2.1 соотношение (1) противоречит стабильности $Th({}_SD(A))$. Следовательно, S — линейно упорядоченный моноид.

2.3 Суперстабильность класса делимых S-полигонов

Теорема 2.7. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S является S-Div-суперстабилизатором;

(2) S является суперстабилизатором;

(3) S является вполне упорядоченым моноидом.

Доказательство. Утверждение (2) $\Rightarrow$ (1) очевидно.

Утверждение (2) $\Leftrightarrow$ (3) следует из теоремы 2.3.

Докажем утверждение (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть S является S-Div-суперстабилизатором. Тогда моноид S является S-Div-стабилизатором и по теореме 2.6 линейно упорядочен. Покажем, что S — вполне упорядоченный моноид. Предположим противное, т.е. существуют $a_i \in S$ такие, что $Sa_i \subset Sa_{i+1}$ ($i \in \omega$). Пусть T – теория класса S-Div, κ – произвольный кардинал, $\kappa \geqslant 2^{|T|}$. Для $\eta \in \kappa^\omega$ через ${}_SS_\eta$ обозначим копии S-полигона ${}_SS$, через $c_\eta \in S_\eta$ — копии элементов $c \in S$. Положим

$\eta|0=\emptyset$, $\eta|i=(\eta(0),\eta(1),\ldots,\eta(i-1))$, где $i\in\omega\setminus\{0\}$.

Пусть ${}_SA = \coprod\limits_{\eta\in\kappa^\omega} {}_SS_\eta/\Theta$, где Θ — конгруэнция S-полигона $\coprod\limits_{\eta\in\kappa^\omega} {}_SS_\eta$, порожденная множеством $\{((a_i)_\eta,(a_i)_\varepsilon) \mid \eta,\varepsilon\in\kappa^\omega, \eta|i=\varepsilon|i\}$, $b_{\eta|i}=(a_i)_\eta/\Theta$, $b_\eta=1_\eta/\Theta$, где $\eta\in\kappa^\omega$, $B=\{b_{\eta|i}\mid \eta\in\kappa^\omega, i\in\omega\}$. Ясно, что $|b_\eta|=1$ для любого $\eta\in\kappa^\omega$ и $|B|=\kappa^\omega$. Пусть $\eta,\varepsilon\in\kappa^\omega$, $\eta\neq\varepsilon$. Покажем, что $tp(b_\eta,B)$ и $tp(b_\varepsilon,B)$ являются различными 1-типами над теорией $Th(D({}_SA))$. Так как $\eta\neq\varepsilon$, то $\eta|i\neq\varepsilon|i$ для некоторого $i\in\omega$ и $b_{\eta|i}\neq b_{\varepsilon|i}$. Кроме того, $b_{\eta|i}=a_ib_\eta$ и $b_{\varepsilon|i}=a_ib_\varepsilon$. Тогда $b_{\eta|i}=a_ix\in tp(b_\eta,B)\setminus tp(b_\varepsilon,B)$. Следовательно, $|S(B)|\geq|\{b_\eta\mid\eta\in\kappa^\omega\}|=\kappa^\omega>\kappa$ и теория $Th(D({}_SA))$ не суперстабильна. Таким образом, моноид S не является S-Div-суперстабилизатором. Противоречие. Следовательно, S — вполне упорядоченный моноид.

2.4 ω-стабильность класса делимых S-полигонов

Теорема 2.8. *Для коммутативного счетного моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S является S-Div-ω-стабилизатором;

(2) S является ω-стабилизатором;

(3) либо S — абелева группа с не более чем счетным числом подгрупп, либо S конечен и имеет единственный собственный идеал.

Доказательство. Пусть S — коммутативный счетный моноид.

Утверждение $(2)\Rightarrow(1)$ очевидно.

Утверждение $(2)\Leftrightarrow(3)$ следует из теоремы 2.5.

Докажем утверждение $(1)\Rightarrow(3)$.

Предположим, что S является S-Div-ω-стабилизатором. Тогда по теореме 2.4 S является $S\text{-}Div$-суперстабилизатором и по теореме 2.7 S — вполне упорядоченный моноид.

Если в S нет сократимых необратимых элементов, то из определения делимого S-полигона следует $S-Div = S-Act$. Тогда S — ω-стабилизатор.

Предположим, что в S существует сократимый необратимый элемент. Так как S — вполне упорядоченный моноид, то существует сократимый и необратимый элемент $g \in S$ такой, что

$$\forall a \in S(Sg \subset Sa \Rightarrow a \text{ несократим или обратим}). \tag{2}$$

Через g^0 обозначим $1 \in S$.

Пусть $i \in \omega$. Покажем, что

$$\forall a \in S(Sg^{i+1} \subset Sa \subseteq Sg^i \Rightarrow Sa = Sg^i). \tag{3}$$

Предположим, что $Sg^{i+1} \subset Sa \subseteq Sg^i$. Тогда $a = sg^i$ и $s \notin Sg$. В силу линейной упорядоченности моноида S имеем $Sg \subset Ss$ и $g = ts$ для некоторого $t \in S$. По (2) s несократим или обратим. Покажем, что s — сократимый элемент моноида S. Действительно, если $xs = ys$ для некоторых $x, y \in S$, то $xts = yts$, т.е. $xg = yg$ и $x = y$. Следовательно, s — обратимый элемент и $Ss = S$. Таким образом, $Sa = Ssg^i = Sg^i$ и (3) доказано.

Покажем, что $Sg^{i+1} \subset Sg^i$. Предположим, что $Sg^i = Sg^{i+1}$. Тогда $g^i = sg^{i+1}$ для некоторого $s \in S$. Поскольку g — сократимый элемент, то $1 = sg$, что противоречит необратимости g.

Пусть $s, t \in S$. Покажем, что

$$s \in Sg^i \setminus Sg^{i+1} \wedge t \in Sg^j \setminus Sg^{j+1} \Longrightarrow st \in Sg^{i+j} \setminus Sg^{i+j+1}. \tag{4}$$

Пусть $s \in Sg^i \setminus Sg^{i+1}$, $t \in Sg^j \setminus Sg^{j+1}$. Так как $s \in Sg^i$, то $s = s_1g^i$ для некоторого $s_1 \in S$. Так как $t \in Sg^j$, то $t = t_1g^j$ для некоторого $t_1 \in S$. Тогда $st = s_1t_1g^{i+j} \in Sg^{i+j}$. Так как $s \notin Sg^{i+j}$, то $s_1 \notin Sg$. Так как $t \notin Sg^{i+j}$, то $t_1 \notin Sg$. Тогда в силу линейной упорядоченности моноида S имеем $Sg \subset Ss_1$, $Sg \subset St_1$ и по (3) $Ss_1 = S$ и $St_1 = S$. Предположим, что $st \in Sg^{i+j+1}$, т.е. $st = rg^{i+j+1}$ для некоторого $r \in S$. Тогда $rg^{i+j+1} = s_1t_1g^{i+j}$. Поскольку g — сократимый элемент, то $rg = s_1t_1$. Следовательно $s_1t_1 \in Sg$, т.е. $S = Ss_1t_1 \subseteq Sg$, противоречие. Таким образом, $st \in Sg^{i+j} \setminus Sg^{i+j+1}$.

Зададим отношение $\sim$ на множестве S следующим образом:

$$a \sim b \Longleftrightarrow \exists i \in \omega : a, b \in Sg^i \setminus Sg^{i+1}.$$

Ясно, что $\sim$ является отношением эквивалентности. Докажем, что $\sim$ является конгруэнцией S-полигона ${}_SS$. Пусть $a, b, s \in S$, $s \in Sg^i \setminus Sg^{i+1}$, где $i \in \omega$, и $a \sim b$. Необходимо показать, что $sa \sim sb$. Поскольку $a \sim b$, то $a, b \in Sg^j \setminus Sg^{j+1}$ для некоторого $j \in \omega$. По (4) $sa, sb \in Sg^{i+j} \setminus Sg^{i+j+1}$, т.е. $sa \sim sb$.

Рассмотрим S-полигон ${}_S\bar{S} = {}_S S/_\sim$. Для $a \in S$ через $\bar{a}$ обозначим класс конгруэнции $\sim$ с представителем a. Тогда по (3) $\bar{S} = \{\bar{g}^i \mid i \in \omega\}$.

На множестве $A = \{\bar{g}^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ определим действие моноида S. Пусть $s \in S$. Тогда $s \sim g^k$ для некоторого $k \in \omega$. Полагаем $s\bar{g}^n = \bar{g}^{n+k}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Покажем, что $s(t\bar{g}^n) = (st)\bar{g}^n$ для любых $s, t \in S$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $s \sim g^k$, $t \sim g^m$. По (4) $st \sim g^{m+k}$. По определению действия моноида S на множестве A имеем $(st)\bar{g}^n = \bar{g}^{n+m+k}$, $t\bar{g}^n = \bar{g}^{m+n}$ и $s(t\bar{g}^n) = s\bar{g}^{m+n} = \bar{g}^{k+m+n}$. Следовательно, ${}_SA$ — S-полигон. Заметим, что ${}_S\bar{S}$ — подполигон S-полигона ${}_SA$.

Покажем, что ${}_SA \in S - Div$. Пусть t — сократимый элемент S. Покажем, что $tA = A$. По замечанию 1.1 можем считать, что t необратим. Пусть $\bar{g}^n \in A$ и $t \sim g^i$. Тогда, $\bar{g}^n = t\bar{g}^{n-i} \in tA$. Таким образом, $tA = A$.

Покажем, что теория $Th({}_SA)$ не ω-стабильна. Пусть ${}_SA_i$ $(i \in \mathbb{N})$ — копии S-полигона ${}_SA$, $a_i \in A_i$ — копии элемента $a \in A$. Каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставим S-полигон ${}_SA^n = \coprod\limits_{i \leq n} {}_SA_i/\Theta^n$, где Θ^n — конгруэнция S-полигона $\coprod\limits_{i \leq n} {}_SA_i$, порожденная множеством $\{\bar{g}_i^{-2} \mid i \leq n\}$. Заметим, что для $m \geq -2$ элементы $\bar{g}_1^m/\Theta^n$, $\ldots$,$\bar{g}_n^m/\Theta^n$ совпадают. Элемент $\bar{g}_i^m/\Theta^n$ $(m \geq -2)$ обозначим через $(g^m)_n$. Каждому $K \subseteq \mathbb{N}$ поставим в соответствие S-полигон ${}_SA^K = \coprod\limits_{n \in K} {}_SA_n/\eta^K$, где η^K — конгруэнция S-полигона $\coprod\limits_{n \in K} {}_SA_n$, порожденная множеством $\{(\bar{g}^{-1})_n \mid n \in K\}$. Заметим, что для $m \geq -1$ элементы $(g^m)_n/\eta^K$, $n \in K$, совпадают. Элемент $(g^m)_n/\eta^K$ обозначим через $(g^m)_K$.

Пусть ${}_SB = \coprod\limits_{K \subseteq \mathbb{N}} {}_SA^K/\xi$, где ξ — конгруэнция S-полигона $\coprod\limits_{K \subseteq \mathbb{N}} A^K$, порожденная множеством $\{ (g^0)_K \mid K \subseteq \mathbb{N}\}$. Заметим, что для $m \geq 0$ элементы $(g^m)_K/\xi$, $K \subseteq \omega$, совпадают. Для $m \geq 0$ элемент $(g^m)_K/\xi$ обозначим через g^m. Для любого $n \in \mathbb{N}$ введем обозначение:

$$\varphi_n(y) \leftrightharpoons \exists^n z(gz = y).$$

Пусть $K_1 \neq K_2$. Покажем, что $tp((g^{-1})_{K_1}, \emptyset) \neq tp((g^{-1})_{K_2}, \emptyset)$. Предположим, что существует n такой, что $n \in K_1 \backslash K_2$. Тогда

$${}_SD(B) \models \varphi_n((g^{-1})_{K_1}) \wedge \neg\varphi_n((g^{-1})_{K_2}).$$

Следовательно, $|S(\emptyset)| \geq 2^{\mathbb{N}}$ и теория $Th({}_SD(B))$ не ω-стабильна. Таким образом, моноид S не являеся Div-ω-стабилизатором.

3 P-стабильность некоторых классов S-полигонов

В данной главе рассматриваются вопросы, связанные с P-стабильностью некоторых классов S-полигонов. Доказано, что классы $S\text{-}Act$ всех S-полигонов, $\mathcal{F}$ всех свободных S-полигонов, $\mathcal{SF}$ всех сильно плоских S-полигонов, $\mathcal{P}$ всех проективных S-полигонов, $S\text{-}Div$ всех делимых S-полигонов $(P,1)$-стабильны только в том случае, когда S — одноэлементный моноид (следствие 3.15). Описаны моноиды, над которыми класс $\mathcal{R}$ всех регулярных полигонов $(P,1)$-стабилен (следствие 3.16). Показано, что классы что классы $S\text{-}Act$ всех S-полигонов, $S\text{-}Div$ всех делимых S-полигонов (P,s)-, (P,a)-, (P,e)-стабильны в том и только том случае, когда S — группа (следствие 3.19). Приведена характеризация коммутативных моноидов, для которых класс $\mathcal{R}$ всех регулярных полигонов (P,s)-, (P,a)-, (P,e)-стабилен (следствие 3.22).

3.1 Предварительные сведения

Следующие сведения из теории моделей и теории полигонов можно найти в [11–13]. Пусть $L(X)$ — язык, который получается из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант. Пусть T — теория языка L, $\mathcal{C}$ — монстр-модель, т.е. насыщенная в достаточно большой мощности модель теории T,

$$T(X) = \{\varphi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X, \mathcal{C} \models \varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{x}) - \text{формула языка } L\},$$

язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P, Δ — некоторое множество предложений языка

L_P. Теория T называется *P_Δ-стабильной в мощности* λ, если для любого множества X в теории T мощности $\leqslant \lambda$ множество

$$T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$$

имеет не более λ пополнений в языке $(L(X))_P$. Теория T называется *P_Δ-стабильной*, если она P_Δ-стабильна в некоторой бесконечной мощности λ.

Пусть U – некоторое множество в теории T, X, Y – некоторые множества кортежей элементов из U длины n. Пара $\langle X, Y\rangle$ называется *отделимой в теории* $T(U)$, если существует $\Phi(\bar{z})$ языка $L(U), |\bar{z}| = n$, такая, что

$$\{\Phi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X\} \cup \{\neg\Phi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in Y\} \subseteq T(U).$$

При этом говорят, что формула $\Phi(\bar{z})$ отделяет X от Y (или отделяет пару $\langle X, Y\rangle$) в T.

Теорема 3.1. *[11] Пусть T – полная теория языка L и Δ – некоторое множество предложений языка L_P. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) теория T является P_Δ-стабильной;

(b) для любого множества U в теории T каждая пара $\langle X, Y\rangle$ множеств кортежей из U одинаковой длины, отделимая в $T_\Delta(U)$, является отделимой в теории $T(U)$.

Теория T называется *(P, s)-стабильной*, если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определимых функциональными символами языка L. Теория T называется *(P, a)-стабильной*, если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, т.е. содержит все конечные множества, определимые в алгебраической системе $\mathcal{C}$ формулами языка L с параметрами из предиката P. Теория T называется (P,e)*-стабильной*, если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является элементарной подсистемой. Класс K алгебраических систем языка L называется $(P,1)-$ ((P,s)-, (P,a)-, $(P,e)-$) стабильным, если теория $Th(A)$ $(P,1)-$ ((P,s)-, (P,a)-, (P,e)) стабильна для любого $\mathcal{A}\in K$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка L называется $(P,1)-$ ((P,s)-, (P,a)-, (P,e)-) стабильной, если $Th(A)$ $(P,1)-$ ((P,s)-, (P,a)-, (P,e)-) стабильна.

Из этих определений следует

Замечание 3.2. *Имеют место следующие импликации:*

$$(P,1)-\textit{стабильность} \Rightarrow (P,s)-\textit{стабильность} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P,a)-\textit{стабильность} \Rightarrow (P,e)-\textit{стабильность}.$$

Для S-полигона ${}_SA$ и $t\in S$ введем обозначение

$$R_A^t=(tA\backslash\{a\in A\mid ta=a\})\cup\{a\in A\mid ta=a\wedge\exists b(tb=a\wedge b\neq a)\}.$$

Следующая теорема дает критерий $(P,1)$-стабильности S-полигонов.

Теорема 3.3. *[13] S-полигон ${}_SA$ является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда для любого $t\in S$ множество R_A^t конечно.*

Следующие две теоремы дают характеризацию моноидов S, класс всех S-полигонов над которыми P-стабилен.

Теорема 3.4. *[13] Класс S-Act является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Теорема 3.5. *[21] Класс S-Act является (P,s)-стабильным тогда и только тогда, когда S — группа.*

Теорема 3.6. *[5] Пусть $\mathcal{A}$ – алгебраическая система языка L и $\mathcal{B}$ – подсистема алгебраической системы $\mathcal{A}$. Для того, чтобы имело место $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы для любой формулы $\Phi(x_0,\ldots,x_n)$ языка L и любых $b_1,\ldots,b_n \in B$*

$$\mathcal{A} \models \exists x_0 \Phi(x_0, b_1 \ldots, b_n) \Longrightarrow \textit{существует}\, b_0 \in B : \mathcal{A} \models \Phi(b_0, b_1 \ldots, b_n).$$

Множество элементов X называется *неразличимым* в $\mathcal{A}$ (по отношению к упорядочению $<$), если $\mathcal{A}(\{x_0,\ldots,x_n\}) \equiv \mathcal{A}(\{y_0,\ldots,y_n\})$ для всех n и для любых последовательностей $x_1 < \ldots < x_n$ и $y_1 < \ldots < y_n$ из множества X.

Теорема 3.7. *[5] Пусть $\langle X, < \rangle$ – некоторое линейно упорядоченное подмножество алгебраической системы $\mathcal{A}$. Предположим, что для любых двух упорядоченных по возрастанию n-к $x_1 < \ldots < x_n$ и $y_1 < \ldots < y_n$ из X существует такой автоморфизм f алгебраической системы $\mathcal{A}$, что $f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$. Тогда X – множество неразличимых в $\mathcal{A}$ элементов.*

Введем дополнительные понятия из теории S-полигонов (см. [24]), так как результаты данной главы относятся помимо класса делимых S-полигонов, также к классам свободных, проективных, сильно плоских, регулярных S-полигонов.

Свободным S-полигоном (с множеством свободных образующих $X \subseteq F$) в классе $S\text{-}Act$ называется S-полигон ${}_SF$ такой, что для любого S-полигона ${}_SA$ и отображения $\theta : X \to A$ существует единственный гомоморфизм $\overline{\theta} :{}_S F \to {}_SA$ такой, что $\overline{\theta}\iota = \theta$, где $\iota : X \to F$ — это вложение. Класс всех свободных S-полигонов обозначим через $\mathcal{F}$.

Теорема 3.8. *[24] S-полигон ${}_SF$ является свободным тогда и только тогда, когда ${}_SF$ изоморфен копризведению S-полигонов, изоморфных S-полигону ${}_SS$.*

Из теоремы 3.8 следует, что S-полигон ${}_SS$ является свободным и класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно копроизведений.

Проективным S-полигоном ${}_SP$ называется такой S-полигон, что для любой диаграммы S-полигонов и гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} & {}_SP \arrow[d, "\theta"] \\ {}_SM \arrow[r, "\varphi"] & {}_SN, \end{tikzcd}$$

где φ — эпиморфизм, существует существует гомоморфизм
$\psi :{}_S P \to{}_S M$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & {}_SP \arrow[d, "\theta"] \arrow[dl, "\psi"'] \\ {}_SM \arrow[r, "\varphi"] & {}_SN \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Теорема 3.9. *[24] S-полигон ${}_SP$ проективен тогда и только тогда, когда ${}_SP \cong \bigsqcup_{i\in I} {}_SSe_i$, где $I \neq \emptyset$ и $e_i = e_i^2$ для всех $i \in I$.*

Из теоремы 3.9 следует, что S-полигон ${}_SS$ является проективным и класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно копроизведений.

Если A_S — правый S-полигон и ${}_SB$ — левый S-полигон, то *тензорное произведение* A_S и ${}_SB$, обозначаемое через $A_S \otimes_S B$, это фактор-множество множества $A \times B$ относительно эквивалентности, порожденной множеством $\{((as, b), (a, sb)) \mid a \in A, b \in B, s \in S\}$. Для $a \in A$ и $b \in B$ класс эквивалентности с представителем (a, b) будем обозначать через $a \otimes b$. Отображение $- \otimes B$ является функтором из категории $Act{-}S$ всех правых S-полигонов в категорию множеств. *Сильно плоским* S-полигоном называется S-полигон ${}_SB$ такой, что функтор $- \otimes B$ сохраняет универсальные квадраты. Обозначим класс всех сильно плоских S-полигонов через $\mathcal{SF}$.

Теорема 3.10. *[24] S-полигон ${}_SB$ является сильно плоским тогда и только тогда, когда ${}_SB$ удовлетворяет условиям (P) и (E):*

(P): если $x, y \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = ty$, то существует элемент $z \in B$ и элементы $s', t' \in S$ такие, что $x = s'z, y = t'z$ и $ss' = tt'$;

(E): если $x \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = tx$, то существуют $z \in B$ и $s' \in S$ такие, что $x = s'z$ и $ss' = ts'$.

Ясно, что имеют место следущие включения:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{SF}.$$

Из теоремы 3.10 следует, что S-полигон ${}_SS$ является сильно плоским и класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно копроизведений.

Из определения делимого S-полигона следует, что класс $S\text{-}Div$ замкнут относительно копроизведений и склеек. Из теоремы 1.5 следует, что существует делимый S-полигон ${}_SQ$ такой, что ${}_SS \subseteq {}_SQ$.

Пусть ${}_SA$ — S-полигон. Элемент $a \in A$ называется *act–*

регулярным, если существует гомоморфизм $\varphi : {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ такой, что $\varphi(a)a = a$. *Регулярным* S-полигоном называется S-полигон, все элементы которого act–регулярны.

Утверждение 3.11. *[24] Следующие условия для полигона S-полигона ${}_SA$ эквивалентны:*

1) S-полигон ${}_SA$ регулярен;

2) для любого $a \in A$ существуют идемпотент $e \in S$ и изоморфизм $\psi : {}_SSa \to {}_SSe$ такие, что $\psi(a) = e$;

3) для любого $a \in A$ существуют идемпотент $e \in S$ такой, что ${}_SA \cong_S Se$.

Класс всех регулярных S-полигонов обозначим через $\mathcal{R}$. Заметим, что класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно копроизведений и склеек.

Пусть в S-полигоне ${}_SA$ существует регулярный подполигон. Объединение всех регулярных подполигонов S-полигона ${}_SA$ есть регулярный подполигон, который называется регулярным центром S-полигона ${}_SA$ и обозначается через $R({}_SA)$. Вместо $R({}_SS)$ будем писать ${}_SR$. Подполугруппа R моноида S называется регулярным центром моноида S.

Теорема 3.12. *[8] Класс $\mathcal{R}$ регулярных S-полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда*

1) полугруппа R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами;

2) для любых $n \geqslant 1$, $s_i, t_i \in S$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ множество $\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x = t_i x\}$ пусто или конечно-порождено как правый идеал полугруппы R.

Пусть ${}_SB_i \subseteq {}_SA_i$ и $\varphi_{ij} : {}_SB_i \to {}_SB_j$ — изоморфизм, причем $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ и $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} : B_i \to B_i$ — тождественное отображение $(i, j, k \in I)$. Тогда S-полигон $\coprod_{i\in I} {}_SA_i/\eta$, где η — конгруэнция S-полигона $\coprod_{i\in I} {}_SA_i$, порожденная множеством $\{(a_i, \varphi_{ij}(a_i))|a_i \in B_i, i, j \in I\}$, называется *склейкой* S-полигонов ${}_SA_i$ по подполигонам ${}_SB_i$ $(i \in I)$. Класс K S-полигонов называется *замкнутым относительно копроизведений (склеек)*, если копроизведение (склейка) любых S-полигонов из K принадлежит K.

3.2 $(P,1)$-стабильность некоторых классов S-полигонов

Теорема 3.13. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и существуют S-полигон ${}_SA \in K$ и $e^2 = e \in S$, такие что ${}_SSe \subseteq {}_SA$. Если класс K является $(P,1)$-стабильным, то полигон ${}_SSe$ одноэлементен.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, класс K является $(P,1)$-стабильным, ${}_SB = \coprod_{i\in\omega} {}_SA_i \in K$, где ${}_SA_i$ – копии S-полигона ${}_SA$, $a_i \in A_i$ — копии элемента $a \in A$ $(i \in \omega)$. Предположим, что существует $s \neq e$, такой что $s \in Se$. Тогда $se = tee = te = s$ для некоторого $t \in S$.

Если $s^2 = s$, то из $ss = s$, $se = s$ и $e \neq s$ получаем

$$s \in \{t \in Se|st = t \wedge \exists r(sr = t \wedge r \neq t)\} \subseteq R^s_{Se} \subseteq R^s_A,$$

т.е. $s_i \in R^s_B$ для любого $i \in \omega$.

Если $s^2 \neq s$, то из $s = se$ и $ss \neq s$ получаем

$$s \in sSe \backslash \{t \in Se|st = t\} \subseteq R^s_{Se} \subseteq R^s_A,$$

т.е. $s_i \in R_B^s$ для любого $i \in \omega$.

Следовательно, $|R_B^s| \geq \omega$, что по теореме 3.3 противоречит $(P,1)$-стабильности класса K. Таким образом, $|Se| = 1$.

Из теорем 3.13 и 3.4 получаем

Следствие 3.14. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и существует S-полигон ${}_SA \in K$, такой что ${}_SS \subseteq {}_SA$. Класс K является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Так как классы $S\text{-}Act$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$, $S\text{-}Div$ замкнуты относительно копроизведений и содержат S-полигон ${}_SA \in K$, такой что ${}_SS \subseteq {}_SA$, то из следствия 3.14 получаем

Следствие 3.15. *Пусть K — один из классов: $S\text{-}Act$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{SF}$, $\mathcal{P}$, $S\text{-}Div$. Класс K является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Следствие 3.16. *Пусть $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Класс $\mathcal{R}$ $(P,1)$-стабилен тогда и только тогда, когда $|Se| = 1$ для любого $e = e^2 \in R$, где R — регулярный центр моноида S.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $e = e^2 \in R$, где R — регулярный центр моноида S. Так как ${}_SSe \in \mathcal{R}$ и класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно копроизведений, то по теореме 3.13 $|Se| = 1$.

Достаточность. Предположим, что $|Se| = 1$ для любого $e = e^2 \in R$. Тогда любой связный регулярный S-полигон одноэлементен. Следовательно, любой регулярный S-полигон — это копроизведение одноэлементных S-полигонов.

Пусть ${}_SA \in \mathcal{R}$ и $t \in S$. Тогда ${}_SA \cong \coprod_{i\in I} Se_i$, где $e_i = e_i^2 \in R$. Так как $|Se_i| = 1$, то $te_i = e_i$ для любого $i \in I$, т.е. $\{a \in A | ta = a\} = A$ и $tA \setminus \{a \in A | ta = a\} = \emptyset$. Из равенства $tb = a$ следует $b = a$ для любых $a, b \in A$. Поэтому $\{a \in A \mid ta = a \wedge \exists b(tb = a \wedge b \neq a)\} = \emptyset$. Следовательно, $R_A^t = \emptyset$. По теореме 3.3 S-полигон ${}_SA$ $(P,1)$-стабилен. Таким образом, класс $\mathcal{R}$ $(P,1)$-стабилен.

3.3 (P,s)-, (P,a)-, (P,e)-стабильность некоторых классов S-полигонов

Теорема 3.17. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и склеек и существуют S-полигон ${}_SA \in K$ и $e^2 = e \in S$, такие что ${}_SSe \subseteq {}_SA$. Если класс K является (P,e)-стабильным, то $Ste = Se$ для любого $t \in S$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются, класс K (P,e)-стабилен и существует $t \in S$ такой, что $e \notin Ste$. Пусть $T = \{s \in S \mid Sse = Se\}$. Ясно, что $e \in T$, $T \cap Ste = \emptyset$ и ${}_SS^1 = {}_S(Se \backslash T)$ – собственный подполигон S-полигона ${}_SSe \in {}_SA$. Пусть ${}_SA_{ij}$ — попарно непересекающиеся копии S-полигона ${}_SA$, ${}_SS_{ij}^1$ – копии подполигона ${}_SS^1$ в S-полигоне ${}_SA_{ij}$, a_{ij} – копии элемента $a \in A$ в S-полигоне ${}_SA_{ij}$ $(i,j \in \omega)$. Для $i \in \omega$ через ${}_SA_i$ обозначим склейку S-полигонов ${}_SA_{ij}$ по подполигонам ${}_SS_{ij}^1$, где $j \in \omega$; через A_i^1 — склейку S-полигонов ${}_SA_{ij}$ по подполигонам ${}_SS_{ij}^1$, где $j \in 2\omega$. Будем отождествлять S-полигоны ${}_SA_{ij}$ и ${}_SS_{ij}^1$ $(j \in \omega)$ с соответствующими подполигонами S-полигона ${}_SA_i$. Тогда ${}_SA_i^1 \subseteq A_i$. Пусть

$$ {}_SB = \coprod_{i\in\omega} {}_SA_i,\ {}_SP = \coprod_{i\in\omega} {}_SA_{2i}^1 \sqcup \coprod_{i\in\omega} {}_SA_{2i+1}. $$

Покажем, что ${}_SP \preceq {}_SB$. Пусть $\Phi(x, \bar{x})$ – формула языка L_S, $\bar{x} = \langle x_0, \ldots x_n \rangle$, $\bar{b} = \langle b_0, \ldots b_n \rangle \in P$, ${}_SB \models \Phi(a_{2i,2j+1}, \bar{b})$ для некоторого $a_{2i,2j+1} \in B \setminus P$. Пусть $k \in \omega$ таково, что $\{b_0, \ldots b_n\} \cap (A_{2i,2k} \setminus S^1_{2i,2k}) = \emptyset$. Очевидно, отображение $\varphi : {}_SB \longrightarrow {}_SB$, где

$$\varphi(d) = \begin{cases} ra_{2i,2k}, & \text{если } d = ra_{2i,2j+1}; \\ ra_{2i,2j+1}, & \text{если } d = ra_{2i,2k}; \\ d, & \text{иначе} \end{cases}$$

является автоморфизмом. Следовательно, по теореме 3.6, ${}_SP \preceq_S B$.

Так как $T \cap Ste = \emptyset$, то $(te)_{ij} \in S^1_{ij} \subseteq A_i$, т.е. $(te)_{ij} = (te)_{ik}$ в S-полигоне ${}_SA_i$ для любых $i, j, k \in \omega$. Через t_i обозначим элемент $(te)_{ij}$ S-полигона ${}_SA_i$, где j — любой элемент из ω. Пусть

$$U = \{t_i \in A_i \mid i \in \omega\},\ X = \{t_{2i} \in A_{2i} \mid i \in \omega\},$$

$$Y = \{t_{2i+1} \in A_{2i+1} \mid i \in \omega\},\ \Phi(x) \leftrightharpoons \exists y(ty = x \wedge \neg P(y)),$$

где $\Phi(x)$ — формула языка $L_S \cup \{P\}$. Так как $te_{2i,2j+1} = t_{2i}$ в ${}_SA_{2i}$ и $e_{2i,2j+1} \notin P$ $(i, j \in \omega)$, то $X \subseteq \Phi(B)$. Так как ${}_SA_{2i+1}$ — компонента связности S-полигона ${}_SB$ и $A_{2i+1} \subseteq P$ $(i \in \omega)$, то $Y \cap \Phi(B) = \emptyset$. Таким образом, $\Phi(x)$ отделяет X и Y.

Предположим, что существует формула $\Psi(x, \bar{u})$ языка $L_S \cup U$, отделяющая X и Y, т.е. $X \subseteq \Psi(B, \bar{u})$ и $Y \cap \Psi(B, \bar{u}) = \emptyset$, где $\bar{u} = \langle u_0, \ldots, u_n \rangle \in U$. Пусть $u_0, \ldots, u_n \in \bigcup_{i=0}^k A_i$ для некоторого $k \in \omega$. Для различных $t_{i_1}, \ldots, t_{i_m} \in \bigcup_{i>k} A_i$ и различных $t_{j_1}, \ldots, t_{j_m} \in \bigcup_{i>k} A_i$ существует автоморфизм φ алгебраической системы $\langle B; L_S(\bar{u}) \rangle$, такой что $\varphi(t_{i1}) = t_{j1}, \ldots, \varphi(t_{im}) = t_{jm}$. Тогда по теореме 3.7 множество $\{t_i \mid i > k\}$ является множеством неразличимых элементов в алгебраической системе $\langle B; L_S(\bar{u}) \rangle$. Поскольку $t_{2k+2} \in X$, то $t_{2k+2} \in \Psi(B, \bar{u})$ и из неразличимости множества $\{t_i \mid i > k\}$ следует $t_{2k+1} \in \Psi(B, \bar{u})$, что противоречит равенству $Y \cap \Psi(B, \bar{u}) = \emptyset$. Следовательно, по теореме 3.1 класс K не является (P, e)-стабильным. Противоречие. Таким образом, $Ste = Se$ для любого $t \in S$.

Из теорем 3.17, 3.5, замечания 3.2, и леммы 1.13 получаем

Следствие 3.18. *Пусть класс K S-полигонов замкнут относительно копроизведений и склеек S-полигонов и существует S-полигон ${}_SA \in K$, такой что ${}_SS \subseteq {}_SA$. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс K (P, s)-стабилен;

2) класс K (P, a)-стабилен;

3) класс K (P, e)-стабилен;

4) S – группа.

Так как классы $S\text{-}Act$ и $S\text{-}Div$ замкнуты относительно копроизведений и склеек и содержат S-полигон ${}_SA \in K$, такой что ${}_SS \subseteq {}_SA$, то из следствия 3.18 получаем

Следствие 3.19. *Пусть K — один из классов: $S\text{-}Act$, $S\text{-}Div$. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс K (P, s)-стабилен;

2) класс K (P, a)-стабилен;

3) класс K (P, e)-стабилен;

4) S – группа.

Пусть ${}_SA$, ${}_SB$ — S-полигоны. Если для элементов $a \in A$ и $b \in B$ существует изоморфизм $f : {}_SSa \to {}_SSb$ такой, что $f(a) = b$, то этот факт будем обозначать через ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSb$.

Будем говорить, что класс $\mathcal{R}$ *удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит* (см. [8]), если для каждого идемпотента $e \in R$, где R — регулярный центр моноида S, существует формула $\Phi_e(x)$ такая, что для любого регулярного S-полигона ${}_SA$ и любого $a \in A$

$$ {}_SA \models \Phi_e(a) \iff {}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe. $$

Лемма 3.20. *Пусть класс $\mathcal{R}$ удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит и $Ste = Se$ для любого $e = e^2 \in \mathcal{R}$ и $t \in S$. Тогда*

$$ {}_SSe \equiv {}_SSf \iff {}_SSe \cong {}_SSf $$

для любых идемпотентов $e, f \in R$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются и $e, f \in R$. Если ${}_SSe \cong_S Sf$, то очевидно ${}_SSe \equiv {}_SSf$. Пусть ${}_SSe \equiv {}_SSf$. Тогда ${}_SSe \models \Phi_e(e)$, т.е. ${}_SSf \models \Phi_e(a)$ для некоторого $a \in Sf$. Следовательно, ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe$. Так как $af = a$, то по условию $Sa = Sf$. Тогда ${}_SSe \cong_S Sf$.

Теорема 3.21. *Пусть класс $\mathcal{R}$ аксиоматизируем и удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{R}$ (P, s)-стабилен;

2) класс $\mathcal{R}$ (P, a)-стабилен;

3) класс $\mathcal{R}$ (P, e)-стабилен;

4) $Ste = Se$ для любого идемпотента $e \in R$, где R — регулярный центр моноида S.

Доказательство. Из замечания 3.2 следуют импликации $1) \Rightarrow 2)$,

$2) \Rightarrow 3)$. Так как класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно копроизведений и склеек S-полигонов, то из теоремы 3.17 следует $3) \Rightarrow 4)$.

Докажем $4) \Rightarrow 1)$. Пусть $\{e_i | i \in I\}$ — множество всех идемпотентов множества R, таких что $Se_i \ncong Se_j$ $(i \neq j)$. Покажем, что любой регулярный S-полигон изоморфен копроизведению S-полигонов ${}_SSe$, где $e = e^2 \in R$. Действительно, если ${}_SA$ — регулярный S-полигон и ${}_SSa \subset_S Sb \subseteq_S A$ для некоторых $a, b \in A$, то поскольку существует $e = e^2 \in R$ такой, что ${}_SSb \cong_S Se$, в S-полигоне ${}_SSe$ есть собственный подполигон, что противоречит условию $4)$.

Для любого множества $J \subseteq I$ и любой функции $\varphi_J : J \longrightarrow \omega \cup \{\omega\}$ определим S-полигон

$$ {}_SA_{J,\varphi_J} = \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{l \in \varphi_J(j)} {}_SS^l e_j, $$

где ${}_SS^l e_j$ $(l \in \varphi_J(j))$ — копии S-полигонов ${}_SSe_j$ $(j \in J)$. Например, если $J = \{j_0, j_1\} \subseteq I$, $\varphi_J(j_0) = 1 = \{0\}$, $\varphi_J(j_1) = 2 = \{0, 1\}$, то ${}_SA_{J,\varphi_J} = {}_SS^0 e_{j_0} \sqcup {}_SS^0 e_{j_1} \sqcup {}_SS^1 e_{j_1}$.

Пусть ${}_SB$ — регулярный S-полигон. Тогда существуют $J \subseteq I$ и функция $\psi_J : J \longrightarrow Ord$, где Ord — множество всех ординалов, такие что

$$ {}_SB \cong \bigsqcup_{j \in J} \bigsqcup_{l \in \psi_J(j)} {}_SS^l e_j. $$

Функцию φ_J определим следующим образом:

$$ \varphi_J(j) = \begin{cases} \psi_J(j), & \text{если } \psi_J(j) < \omega; \\ \omega, & \text{иначе.} \end{cases} $$

Тогда ${}_SB \equiv {}_SA_{J,\varphi_J}$. Таким образом, любой регулярный S-полигон элементарно эквивалентен S-полигону типа ${}_SA_{J,\varphi_J}$.

Пусть ${}_SA \in \mathcal{R}$, P — одноместный предикат, $\lambda = max\{2^{2^{|S|}}, \omega\}$, $T = Th({}_SA)$, X — множество в T, $|X| \le \lambda$, $T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$, где $\Delta = \{\forall x(P(x) \to P(sx)) \mid s \in S\}$. Пусть T_1 — пополнение теории $T_\Delta(X)$ в языке $(L_S(X))_P$, $\mathcal{B} = \langle B; (L_S(X))_P \rangle$ — модель теории T_1. Поскольку $\mathcal{R}$ — аксиоматизируемый класс, то любая модель теории T является регулярным S-полигоном, следовательно, элементарно эквивалентна S-полигону типа ${}_SA_{J,\varphi_J}$. Так как $\mathcal{B}$ — модель $T_\Delta(X)$, то $X \subseteq P$. Так как X — множество в теории T, т.е. подмножество носителя монстр-модели $\mathcal{C}$, то

$$ {}_SSX \cong \coprod_{j \in J} \coprod_{l \in \psi_J(j)} {}_SS^l e_j $$

для некоторых фиксированных $J \subseteq I$ и $\psi_J : J \longrightarrow Ord$. Так как ${}_S(P \setminus SX)$ и ${}_S(B \setminus P)$ — регулярные S-полигоны, то существуют $K, L \subseteq I$ и функции φ_K, φ_L такие, что ${}_S(P \setminus SX) \equiv {}_SA_{K,\varphi_K}$, ${}_S(B \setminus P) \equiv {}_SA_{L,\varphi_L}$. Поскольку

$$ |\{\langle K, \varphi_K \rangle\} \mid K \subseteq I, \varphi_K : K \longrightarrow \omega \cup \{\omega\}| \le 2^I \omega^{2^I} \le \max\{\omega, 2^{2^S}\} = \lambda, $$

то число пополнений теории $T_\Delta(X)$ не больше, чем λ. Следовательно, теория T является (P, s)-стабильной.

Следствие 3.22. *Пусть S — коммутативный моноид. Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{R}$ (P, s)-стабилен;

2) класс $\mathcal{R}$ (P, a)-стабилен;

3) класс $\mathcal{R}$ (P, e)-стабилен;

4) $Ste = Se$ для любого идемпотента $e \in R$, где R — регулярный центр моноида S.

Доказательство. Из замечания 3.2 следуют импликации $1) \Rightarrow 2)$, $2) \Rightarrow 3)$. Так как класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно копроизведений и склеек, то из теоремы 3.17 следует $3) \Rightarrow 4)$.

Докажем $4) \Rightarrow 1)$. Пусть $e, f \in R$. Тогда $Se = Sfe = Sef = Sf$. Поскольку $Ste = Se$ для любого $t \in S$, то любой регулярный S-полигон изоморфен копроизведению копий S-полигона ${}_S Se$.

Покажем, что $\mathcal{R}$ — аксиоматизируемый класс. Поскольку $Se = eS$ — единственный правый идеал R, порожденный идемпотентом, то полугруппа R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами. Пусть $sr = tr$ для некоторых $s, t \in S$, $r \in R$. Так как ${}_S Sr \cong {}_S Se$, где $e = e^2 \in R$, то $r = re$, $Sr = Sre = Se$ и $e = ur = ru$ для некоторого $u \in S$. Тогда $se = te$. Следовательно, множество $\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x = t_i x\}$ либо пусто, либо совпадает с eS и поэтому конечно-порождено как правый идеал полугруппы R. По теореме 3.12 класс $\mathcal{R}$ аксиоматизируем.

Повторяя рассуждения из доказательства импликации $4) \Rightarrow 1)$ теоремы 3.21 для $|I| = 1$ получаем (P, s)-стабильность класса $\mathcal{R}$.

Заключение

В диссертации изучено строение моноидов с точки зрения теоретико-модельных свойств класса делимых S-полигонов над ними, исследованы такие свойства класса делимых S-полигонов, как примитивная нормальность, примитивная связность, стабильнось, P-стабильность. Были получены следующие результаты:

1. Исследованы моноиды, над которыми класс делимых S-полигонов примитивно нормален или примитивно связен. Показано, что для произвольного моноида S класс делимых S-полигонов примитивно нормален тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид, примитивно связен тогда и только тогда, когда S — группа. Результаты опубликованы в [25].

2. Дано описание моноидов S, таких что теория любого делимого S-полигона стабильна, суперстабильна, ω-стабильна. В частности, доказано, что теория любого делимого S-полигона стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно (вполне) упорядоченный моноид. Также показано, что для коммутативного моноида S теория любого делимого S-полигона ω-стабильна тогда и только тогда, когда либо S — абелева группа с не более чем счетным числом подгрупп, либо S конечен и имеет единственный собственный идеал. Результаты опубликованы в [26].

3. Рассмотрены вопросы, связанные с P-стабильностью некоторых классов S-полигонов. Доказано, что классы $S\text{-}Act$ всех S-полигонов, $\mathcal{F}$ всех свободных S-полигонов, $\mathcal{SF}$ всех сильно плоских S-полигонов, $\mathcal{P}$ всех проективных S-полигонов, $S\text{-}Div$ всех делимых S-полигонов

$(P,1)$-стабильны только в том случае, когда S — одноэлементный моноид. Описаны моноиды, над которыми класс $\mathcal{R}$ всех регулярных полигонов $(P,1)$-стабилен. Показано, что классы что классы $S\text{-}Act$ всех S-полигонов, $S\text{-}Div$ всех делимых S-полигонов (P,s)-, (P,a)-, (P,e)-стабильны в том и только том случае, когда S — группа. Приведена характеризация коммутативных моноидов, для которых класс $\mathcal{R}$ всех регулярных полигонов (P,s)-, (P,a)-, (P,e)-стабилен. Результаты опубликованы в [27].

Список литературы

[1] Богомолов, В.С., Мустафин Т.Г. Описание коммутативных моноидов, все полигоны над которыми ω-стабильны. *Алгебра и логика,* 28(4): 371–381, 1989.

[2] Гоулд, В., Михалев, А.В., Палютин, Е.А., Степанова А.А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S -полигонов. *Фунд. прикл. матем.,* 14(7): 63–110, 2008.

[3] Ершов, Ю.Л., Палютин, Е.А. *Математическая логика.* Физматлит, 2011.

[4] Иванов, А.И. Полные теории унаров. *Алгебра и логика,* 23(1): 48–73, 1984.

[5] Кейслер, Г., Чен., Ч. *Теория моделей.* Мир, 1977.

[6] Комарницький, М.Я. *Елементи теорii напiвгруп та полiгонiв. Курс лекцiй.* Львiв, 2011.

[7] Кожухов, И.Б., Михалев, А.В. Полигоны над полугруппами. *Фундаментальная и прикладная математика,* 23(2): 81–140, 2020.

[8] Михалев, А.В., Овчинникова, Е.В., Палютин, Е.А., Степанова, А.А. Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов. *Фундаментальная и прикладная математика*, 10(4):107–157, 2004.

[9] Мустафин, Т.Г. О стабильностной теории полигонов. *Теория моделей и ее применение*, 8:92–108, 1988.

[10] Мустафин, Т.Г. К описанию моноидов, над которыми все полигоны имеют ω-стабильную теорию. *Алгебра и логика,* 29(6): 675–695, 1990.

[11] Палютин, Е.А. E^*-стабильные теории. *Алгебра и логика,* 42(2): 194–210, 2003.

[12] Палютин, Е.А. P-стабильные абелевы группы. *Алгебра и логика,* 52(5): 606–631, 2013.

[13] Птахов, Д.О. Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией. *Алгебра и логика,* 56(6): 712–720, 2017.

[14] Птахов, Д.О. Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов. *Алгебра и логика,* 53(5): 614–624, 2014.

[15] Русалеев, М.А. Характеризация $(P,1)$-стабильных теорий. *Алгебра и логика,* 46(2): 346–359, 2007.

[16] Ряскин, А.Н. Структура моделей полных теорий унаров: Авореферат дис. ... канд. физико-математических наук: 01.01.06. Новосибирск, 1989.

[17] Степанова, А.А. Примитивно связные и аддитивные теории полигонов. *Алгебра и логика,* 45(3): 300–313, 2006.

[18] Степанова, А.А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями. *Алгебра и логика,* 47(4): 491–508, 2008.

[19] Степанова, А.А., Батурин, Г.И. Регулярные полигоны с примитивно нормальными и антиаддитивными теориями. *Фундамент. и прикл. матем.,* 17(1): 223–232, 2012.

[20] Степанова, А.А. Регулярные полигоны с примитивно связными теориями. Сибирский математический журнал, 55(3): 666–671, 2014.

[21] Степанова, А.А., Птахов, Д.О. P-стабильные полигоны. *Алгебра и логика,* 56(4): 486–505, 2017.

[22] Feller, E.H., Gantos, R.L. Indecomposable and injective S-systems with zero. *Math. Nachr.,* 41: 37–48, 1969.

[23] Gould, V.A.R. Divisible S-systems and R-modules. Proc. Edinburgh Math. Soc., 30(2): 187–200, 1987.

[24] Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A.V. Monoids, Acts and Categories. Walter De Gruyter, 2000.

Список работ автора по теме исследования

[25] Красицкая, А.И., Степанова, А.А., Примитивная нормальность и примитивная связность класса делимых полигонов. *Алгебра и логика,* 58(5): 650–658, 2019.

[26] Krasitskaya, A.I. Stability of the class of divisible S-acts. *Сибирские электронные математические известия,* 17: 726–731, 2020.

[27] Красицкая, А.И., Степанова, А.А., P–стабильность некоторых классов S–полигонов. *Сибирский математический журнал,* 62(2): 441–449, 2021.

[28] Красицкая, А.И. Полные классы делимых полигонов. *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам*, 257–258. Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2017.

[29] Krasitskaya, A.I., Stepanova, A.A., Gorodetskaya, Ye.Ya. Complete classes of divisible S-acts. *The 4th Annual Student Scientific Conference in English, Vladivostok, 3 – 15 May 2017: conference proceedings*, 28. Vladivostok: Far Eastern Federal University, 2017.

[30] Красицкая, А.И. Примитивная нормальность класса делимых полигонов. *Международная конференция «Мальцевские чтения»,* 150. Новосибирск, 2017.

[31] Красицкая, А.И. Стабильность класса делимых полигонов. *Материалы региональной научно-практической конференции студен-*

тов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам, 222–223. Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2018.

[32] Krasitskaya, A.I. Monoids with stable theories of divisible S-acts. *The 5th Annual Student Scientific Conference in English, Vladivostok, 21 – 24 May 2018: conference proceedings,* 104–105. Vladivostok: Far Eastern Federal University, 2018.

[33] Красицкая, А.И. Стабильность и суперстабильность класса делимых полигонов. *Международная конференция «Мальцевские чтения»,* 197. Новосибирск, 2018.

[34] Красицкая, А.И. (P,1)-стабильность класса делимых полигонов. *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по естественным наукам,* 253-254. Владивосток : Дальневост. федерал. ун-т, 2019.

[35] Красицкая, А.И. P-стабильность класса делимых полигонов. *Международная конференция «Мальцевские чтения»,* 189. Новосибирск, 2019.