Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Авилович Анна Сергеевна

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СЕКТОРИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Федоров Владимир Евгеньевич

ЧЕЛЯБИНСК — 2021

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

В последние десятилетия неизменно растет интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, систематизация различных свойств и применения таких производных представлены, например, в ряде монографий [32, 33, 37, 44, 89, 91, 112]. Интерес к таким уравнениям обусловлен развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования [6, 26–28, 30, 75, 76, 98, 101, 105, 116] с целью обобщения знаний и создания математических моделей таких процессов, для которых классическое дифференциальное исчисление не дает приемлемого результата, а также необходимостью исследовать приложения таких конструкций в различных областях науки [87,100,117,125]. Математические модели, основанные на дробных производных и интегралах, находят свое применение в физике [55,123], математической биологии [31], гидрогеологии [12], при моделировании процессов тепло- и массопереноса в сильно неоднородных средах [118], в задачах вязкоупругости [97] и др.

Степень разработанности темы исследования

История использования интегро-дифференциальных операторов дробного порядка в математическом анализе начинается в XVII веке. Первые упоминания о производных дробного порядка связаны с именами Я. Бернулли, Лейбница, Лопиталя, в XVIII веке — с именами Лагранжа и Эйлера. В XIX и начале XX века появляются публикации на данную тему таких знаменитых исследователей, как Лаплас, Фурье, Абель, Лиувилль, Риман, Грюнвальд, Летников, Хэвисайд, Зигмунд, Курант и др. Во второй половине XX века интерес к дробному исчислению возрос, появились научно-технические конференции, посвященные вопросам дробного исчисления, начали появляться специализированные журналы.

На сегодняшний день известно несколько десятков определений дробной производной. Отметим посвященные изучению дробных производных работы K. B. Oldham, J. Spanier [103], С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева [44], А. А. Килбаса, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo [91], I. Podlubny [112], А. М. Нахушева [31–33], А. В. Псху [37–41], K. Diethelm [80], M. Kostić [92,93], С. М. Ситника, Э. Л. Шишкиной [48, 120, 121] и др.

Уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной, как правило, по времени, изучались в работах А. Пуанкаре [113], C. W. Oseen [104], J. Leray [94], E. Hopf [90], О. А. Ладыженской [25] в связи с исследованием системы уравнений Навье — Стокса, описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости. Работы С. Л. Соболева [49–52] середины XX века, посвященные динамике идеальной равномерно вращающейся жидкости, привлекли повышенное внимание исследователей к не разрешенным относительно старшей производной по времени уравнениям, которые теперь часто называют уравнениями соболевского типа [15, 29]. В последние десятилетия отметим в этом направлении работы R. E. Showalter [119], Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева [46, 47, 57, 96], Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой [2, 14, 15], Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова, А. А. Щегловой [3–5, 72], А. И. Кожанова [20–22], С. Г. Пяткова, И. Е. Егорова, С. В. Попова и их учеников [16,42,115], А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера [23,24,29] и их учеников (см. [73,74] и др.), И. А. Шишмарева, Е. И. Кайкиной, П. И. Наумкина [18, 19].

Отметим, что в случае, когда оператор при старшей производной по времени не обратим, мы будем называть эволюционные уравнения вырожденными. Отдельный интерес представляют вырожденные эволюционные уравнения в банаховых и локально выпуклых пространствах, результаты исследования которых используются при изучении начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных. Один из подходов к исследованию вырожденных эволюционных уравнений первого порядка в банаховых пространствах, т. е. уравнений с вырожденным оператором при производной, предполагает применение методов теории полугрупп операторов. Он используется в работах различных авторов: A. Favini, A. Yagi [81–83], Г. А. Свиридюка [45], И. В. Мельниковой [99], М. В. Фалалеева [56, 57], В. Е. Федорова и его учеников [13, 54, 58–68, 70, 84–86].

В последние десятилетия теория полугрупп операторов получила свое обобщение на случай уравнений дробного порядка, разрешенных относительно производной [75]. При этом разрешающие семейства операторов уже не обладают полугрупповым свойством. Теория разрешающих семейств уравнений дробного порядка в свою очередь укладывается в рамки теории разрешающих семейств интегральных эволюционных уравнений Вольтерра, разрешенных относительно производной, развитой в монографии J. Prüss [114]. Отметим в этом направлении также работы А. В. Глушака и его соавторов (см. [8–11] и др.)

Отдельные результаты о вырожденных эволюционных уравнениях дробного порядка (т. е. уравнениях, содержащих вырожденный оператор при дробной производной) получены в работах [66, 76, 95], причем, в последних двух работах используется условие непрерывной обратимости оператора при старшей дробной производной, т. е., по сути, условие невырожденности уравнения, его разрешимости относительно дробной производной. Также отметим работы М. В. Плехановой и ее учеников [1, 106–111], в которых вырожденные уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто в банаховых пространствах исследуются при условии относительной ограниченности пары операторов в уравнении, а также работы М. Костича [92, 93], в которых методами теории разрешающих операторов исследуются интегродифференциальные эволюционные уравнения, включая вырожденные [93].

Цели и задачи

Целью диссертационной работы является исследование вопросов разрешимости для новых классов дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные.

В задачи диссертационной работы входит исследование однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейных неоднородных и полулинейных уравнений, разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля, с неограниченным линейным оператором, порождающим аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов, а также задач типа Коши и типа Шоуолтера — Сидорова для линейных неоднородных уравнений с вырожденным оператором при производной Римана — Лиувилля, с парой линейных операторов в уравнении (при дробной производной и при искомой функции), порождающей вырожденное аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов, а также для полулинейных уравнений соответствующего класса.

Научная новизна

Получены условия существования и единственности решения задачи типа Коши для линейных неоднородных и полулинейных уравнений, разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля, с оператором, порождающим аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов, и полулинейных уравнений того же класса. Также исследована однозначная разрешимость задач типа Коши и типа Шоуолтера — Сидорова для линейных неоднородных и полулинейных вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной Римана — Лиувилля и с парой линейных операторов, порождающей аналитическое в секторе семейство вырожденных разрешающих операторов.

Абстрактные результаты использованы для исследования однозначной разрешимости ряда новых начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных дробного порядка по времени, в частности для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времени, классической и квазистационарной систем уравнений фазового поля дробного порядка по времени, одного класса уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора, включающего в себя уравнения теории фильтрации, уравнения теории финансовых рынков.

Все результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Абстрактные результаты, полученные в работе, являются обобщением соответствующих результатов теории аналитических полугрупп операторов на случай уравнений дробного порядка. Тем самым они вносят вклад в развитие теории уравнений с дробными производными и соответствующего раздела функционального анализа.

В диссертационной работе развиваются методы качественного исследования основанных на дробном дифференциальном исчислении математических моделей. Такие модели описывают широкий класс процессов и явлений, имеющих место в системах со степенной нелокальностью, со степенной памятью и фрактальностью. Найдены условия однозначной разрешимости начально-краевых задач для моделирующих такие процессы уравнений в частных производных дробного порядка по времени. Результаты работы можно использовать при исследовании конкретных прикладных задач, в частности, для их корректной постановки.

Методология и методы исследования

При исследовании линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с дробной производной использованы методы теории преобразования Лапласа и теории разрешающих семейств операторов для эволюционных уравнений. Для исследования вырожденных эволюционных уравнений при этом используется метод пар инвариантных подпространств, когда два линейных оператора из уравнения определяют представление двух банаховых пространств (одно из них содержит области определения операторов, во второе они действуют) в виде прямых сумм двух подпространств, а действие каждого из операторов пары согласовано с этими представлениями. Как результат предложено условие принадлежности пары операторов (L, M) классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, которое оказалось достаточным и в определенном смысле необходимым для существования аналитического разрешающего семейства операторов линейного вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t)$$

так же, как в невырожденном случае принадлежность операторов A классу $\mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ необходима и достаточна [75] для существования аналитического разрешающего семейства для уравнения дробного порядка

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t).$$

Здесь D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$, A — линейный замкнутый плотно определенный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$, действующий в $\mathcal{Z}$, L, M — линейные замкнутые плотно определенные операторы в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, действующие в банахово пространство $\mathcal{Y}$.

Отметим, что при исследовании линейных неоднородных уравнений

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t),$$

а потому и при дальнейшем изучении полулинейных уравнений, как и в теории аналитических полугрупп операторов, естественным образом возникает условие непрерывности в норме графика оператора A неоднородности f, либо, как альтернатива, условие гельдеровости этой функции.

Однозначная локальная разрешимость задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(t_0) = z_k, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots m-1,$$

либо задачи типа Шоуолтера — Сидорова (в вырожденном случае) для соответствующих полулинейных уравнений вида

$$D_t^{\alpha}z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha-m}z(t), D_t^{\alpha-m+1}z(t), \dots, D_t^{\alpha-1}z(t)),$$

$$D_t^{\alpha}Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \dots, D_t^{\alpha-1}x(t)),$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, исследуется путем редукции этих задач к интегродифференциальным эволюционным уравнениям с последующим применением теоремы о неподвижной точке в пространстве $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций. При этом используется условие локальной липшицевости нелинейного оператора.

Уравнения и системы уравнений в частных производных с дробной производной Римана — Лиувилля по времени исследуются путем редукции различных начально-краевых задач для них к задаче типа Коши, либо к задаче типа Шоуолтера — Сидорова для соответствующего линейного или полулинейного уравнения дробного порядка в банаховом пространстве с последующим применением полученного в диссертационной работе абстрактного результата.

Положения, выносимые на защиту

1. Исследована однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейных неоднородных уравнений, разрешенных относительно дробной про-

изводной Римана — Лиувилля, с неограниченным оператором, порождающим аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов.

2. Получены условия локального существования единственного решения задачи типа Коши для разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля полулинейных уравнений, линейная часть которых обладает аналитическим в секторе разрешающим семейством операторов.

3. Исследованы вопросы однозначной разрешимости задач типа Коши и типа Шоуолтера — Сидорова для вырожденных линейных неоднородных эволюционных уравнений дробного порядка с парой операторов, порождающей аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов.

4. Получены условия однозначной локальной разрешимости задач типа Коши и типа Шоуолтера — Сидорова для полулинейных эволюционных уравнений с вырожденным оператором при дробной производной Римана — Лиувилля, линейная часть которых обладает аналитическим в секторе разрешающим семейством операторов.

5. Общие результаты использованы для исследования однозначной разрешимости ряда начально-краевых задач для встречающихся в приложениях уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешимых, так и не разрешимых относительно дробной производной Римана — Лиувилля по времени.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обоснована строгостью применяемых математических методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на конференциях: Международная научная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXIX», посвященная 90-летию академика РАН В. А. Ильина, Москва, 2018; Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2018, 2019, 2020, 2021; International Conference in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems, Santiago de Compostela, Spain, 2018; Международная школа-конференция «Соболевские чтения», посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева, Новосибирск, 2018; Международный симпозиум «Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование», посвященная 100-летию математического образования в Восточной Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О. В. Васильева, Иркутск, 2019; Российско-французский семинар «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Ханты-Мансийск, 2019; International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS'19, Белгород, 2019; Международная научная конференция по математическому моделированию, посвященная 75-летию со дня рождения проф. В. Н. Врагова, Якутск, 2020.

Исследования по теме диссертации поддержаны грантом РФФИ конкурса на лучшие проекты фундаментальных научных исследований, выполняемые молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре («Аспиранты»), код проекта 19-31-90008, тема «Исследование эволюционных уравнений дробного порядка, линейная часть которых порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов» под руководством Федорова В. Е., 2019–2021 гг.

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 работах [126–139], из которых 3 статьи [126–128] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus. Во всех работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит постановка задачи и общее руководство. Из работ, выполненных в соавторстве с Д.М. Гордиевских [126] и Л.В. Борель [128], в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору диссертации.

1. Уравнения, разрешенные относительно дробной производной Римана — Лиувилля

1.1. Введение

В данной главе исследуется однозначная разрешимость задачи типа Коши, в которой в отличие от задачи Коши в начальный момент задаются производные не целых порядков, а порядков $\alpha - m + k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, для линейного неоднородного уравнения, разрешенного относительно дробной производной Римана — Лиувилля

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \tag{1.1.1}$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, а также однозначная локальная разрешимость задачи типа Коши для полулинейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha-m} z(t), D_t^{\alpha-m+1} z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1} z(t)). \tag{1.1.2}$$

Решение понимается в классическом смысле (непрерывность всех входящих в уравнение выражений), оператор A предполагается линейным, замкнутым, плотно определенным, вообще говоря, неограниченным. При этом используется условие принадлежности оператора A классу $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, операторов, порождающих аналитические в секторе разрешающие семейства операторов однородного уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$ (см. [75]). Этот класс при $\alpha = 1$ состоит из инфинитезимальных генераторов аналитических полугрупп операторов, являющихся важным объектом исследования в классической теории полугрупп операторов [17, 34]. Отметим, что в целом изложение главы выдержано в духе обобщения теории аналитических полугрупп операторов на случай уравнений дробного порядка, в котором разрешающие семейства операторов уже не обладают полугрупповым свойством.

Сначала построена система аналитических в секторе семейств операторов, которые используются при задании решения задачи типа Коши для однородного уравнения дробного порядка (в отличие от теории полугрупп операторов здесь аналитическое семейство операторов не одно, их целый набор). Затем еще одно такое аналитическое семейство операторов используется в свертке с функцией f для построения решения неоднородного уравнения (1.1.1). При этом, как и в случае теории аналитических полугрупп, по сути минимальными условиями гладкости на функцию f, гарантирующими существование решения уравнения (1.1.1), являются либо условие ее непрерывности в норме графика оператора A (дополнительная гладкость по пространственным переменным, если говорить о приложениях абстрактных результатов), либо условие гельдеровости f (дополнительная гладкость по временно́й переменной).

Условия непрерывности в норме графика оператора A или локальной гельдеровости по t уже для оператора B, а также условие его локальной липшицевости используются уже при исследовании полулинейного уравнения (1.1.2). Сначала доказана эквивалентность задачи типа Коши для уравнения (1.1.2) задаче Коши для соответствующего интегро-дифференциального уравнения для функции $D_t^{\alpha-m}z(t) = y(t)$, однозначная локальная разрешимость которого в пространстве $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций исследована с помощью теоремы о неподвижной точке и с использованием установленных свойств упомянутых выше аналитических семейств операторов. Отметим, что при использовании условия локальной гельдеровости по t оператора B приходится требовать независимости оператора B от старшей производной порядка $\alpha-1$ искомой функции, чтобы на решениях соответствующая сложная функция $B(t, D_t^{\alpha-m}z(t), D_t^{\alpha-m+1}z(t), \dots, D_t^{\alpha-2}z(t))$ также была локально гельдеровой по временно́й переменной.

Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании вопросов разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, разрешенных или разрешимых относительно дробной производной Римана — Лиувилля по временно́й переменной. В частности исследован класс начально-краевых задач для линейного уравнения с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора, один многочлен — при искомой функции, второй — при ее производной Римана — Лиувилля. При этом предполагается разрешимость уравнения относительно производной. Доказана также однозначная разрешимость некоторых полулинейных уравнений соответствующего класса. Кроме того, исследована однозначная разрешимость начально-краевых задач для линеаризованной и нелинейной систем уравнений фазового поля дробного порядка по времени, а также линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса с производной Римана — Лиувилля по времени.

1.2. Дробная производная Римана — Лиувилля

Сформулируем основные определения и свойства дробных производных, используемые в работе. Подробные доказательства приведенных здесь утверждений могут быть найдены, например, в [75, 112].

Обозначим $g_\delta(t) := t^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ при $\delta > 0$, $t > 0$, где $\Gamma(\delta)$ — гамма-функция. Множество таких функций обладает полугрупповым свойством относительно операции свертки: $g_\beta * g_\delta = g_{\beta+\delta}$.

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ для функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ определяется как

$$J_t^\alpha f(t) := (g_\alpha * f)(t) := \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds, \quad t > 0.$$

Определим $J_t^0 f(t) = f(t)$. Операторы дробного интегрирования подчиняются полугрупповому свойству относительно композиции:

$$J_t^\alpha J_t^\beta = J_t^{\alpha+\beta}, \; \alpha, \beta \geq 0.$$

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$, где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, для функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ имеет вид

$$^R D_t^\alpha f(t) := D_t^m (g_{m-\alpha} * f)(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t),$$

где $D_t^m = \frac{d^m}{dt^m}$ — обычная производная целого порядка. Как и в случае дифференцирования и интегрирования целого порядка, $^R D_t^\alpha$ является обращением J_t^α слева:

$$^R D_t^\alpha J_t^\alpha f = f, \quad J_t^{\alpha R} D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} {}^R D_t^{\alpha-m+k} f(0) g_{\alpha-m+k+1}(t). \quad (1.2.1)$$

Под производной Римана — Лиувилля отрицательного порядка $-\alpha < 0$ здесь (первое слагаемое в сумме в правой части равенства) и далее понимается дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ и наоборот:

$$^R D_t^{-\alpha} f := J_t^\alpha f, \quad J_t^{-\alpha} f := {}^R D_t^\alpha f, \quad \alpha > 0.$$

Это согласуется со свойствами этих операторов.

Дробная производная Герасимова — Капуто [7, 79, 102] порядка $\alpha > 0$, где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, определена следующим образом:

$$^C D_t^\alpha f(t) := J_t^{m-\alpha} D_t^m f(t). \quad (1.2.2)$$

Часто в качестве определения дробной производной Герасимова — Капуто используют эквивалентное равенство

$$^C D_t^\alpha f(t) := {}^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t) \right),$$

для выполнения которого требуется меньшая гладкость от $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{Z}$. Отображение $^C D_t^\alpha$ также является обратным к J_t^α лишь слева:

$$^C D_t^\alpha J_t^\alpha f = f, \quad J_t^\alpha {}^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t).$$

Для $\alpha, \beta, t > 0$ имеем

$$J_t^\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta}, \; {}^R D_t^\alpha g_\beta = g_{\beta-\alpha}, \; \beta > \alpha. \tag{1.2.3}$$

Отметим также, что ${}^R D_t^\alpha 1 = g_{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, в то время как ${}^C D_t^\alpha 1 = 0$ для любого $\alpha > 0$.

Через $\mathfrak{L}[f]$ обозначим преобразование Лапласа функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, а через $\mathfrak{L}^{-1}[F]$ — обратное преобразование Лапласа функции $F : \Omega \to \mathcal{Z}$, $\Omega \supset \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu > \omega\}$ при некотором $\omega \in \mathbb{R}$.

Используя свойства преобразований Лапласа и равенство $\mathfrak{L}[g_\alpha](\lambda) = \lambda^{-\alpha}$, получим

$$\mathfrak{L}[{}^R D_t^\alpha] f(\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[f](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} {}^R D_t^{\alpha-m+k} f(0) \lambda^{m-1-k},$$

$$\mathfrak{L}[{}^C D_t^\alpha] f(\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[f](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \lambda^{\alpha-1-k}.$$

Поскольку далее будет использоваться в основном только дробная производная Римана — Лиувилля, то для удобства сократим ее обозначение:

$$D_t^\alpha := {}^R D_t^\alpha.$$

1.3. Линейное уравнение, разрешенное относительно дробной производной

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, через D_A будем обозначать область определения оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, снабженную его нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}$. В силу замкнутости оператора A множество D_A с нормой графика является банаховым пространством.

Резольвентным множеством $\rho(A)$ оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ называется совокупность всех $\mu \in \mathbb{C}$, для которых существует непрерывный обратный оператор $R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Спектром оператора $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ называется множество $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Будем использовать также обозначения

$$S_{\theta_0,a_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta,\ \lambda \neq a_0\},$$

$$\Sigma_\varphi := \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \varphi,\ \tau \neq 0\}.$$

Теорема 1.3.1. [114, 124].

Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a \in \mathbb{R}$, $R : (a, +\infty) \to \mathcal{Z}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) *Функция* R *имеет аналитическое продолжение* $\widetilde{R} : S_{\theta_0,a} \to \mathcal{Z}$, *при этом*

$$\forall \theta \in (\pi/2, \theta_0) \quad \exists K = K(\theta) > 0 \quad \forall \lambda \in S_{\theta,a} \quad \|\widetilde{R}(\lambda)\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{K(\theta)}{|\lambda - a|}.$$

2) *Существует такая аналитическая функция* $S : \Sigma_{\theta_0-\pi/2} \to \mathcal{Z}$, *что*

$$\forall \theta \in (\pi/2, \theta_0) \quad \exists C = C(\theta) \quad \forall t \in \Sigma_{\theta-\pi/2} \quad \|S(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C(\theta)e^{a\mathrm{Re}t},$$

и $\mathfrak{L}[S](\lambda) = R(\lambda)$ *при всех* $\lambda > a$.

1.3.1. Линейное однородное уравнение

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.3.1}$$

Функция $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A)$, для которой $J_t^{m-\alpha} z \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, называется решением уравнения (1.3.1)), если при всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство (1.3.1)).

Пусть $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a_0 \geq 0$. Через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ обозначим класс операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия

(i) для любого $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a \geq a_0$ найдется такое $K = K(\theta, a) > 0$, что

$$\forall \lambda \in S_{\theta,a} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Замечание 1.3.1. Условия (i), (ii) на оператор A, необходимые и достаточные в силу теоремы J. Prüss [114] для существования аналитического в секторе разрешающего семейства уравнения, т. е. для принадлежности оператора классу $\mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ в обозначениях работы [75], в данном случае напрямую используются для определения класса операторов $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Замечание 1.3.2. При $\alpha = 1$ оператор класса $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ часто называется секториальным (см. [17, 34, 71]). Для краткости иногда и операторы из $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при произвольных $\alpha > 0$ будем называть секториальными, если это не может привести к недоразумению.

Лемма 1.3.1. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$Z_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ *при* $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. *Тогда* Z_β *допускает аналитическое продолжение в сектор* $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ *и при всех* $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ *существует такое* $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, *что для всех* $\tau \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}\tau} (|\tau|^{-1} + a)^\beta, \quad \beta \ge 0, \tag{1.3.2}$$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}\tau} |\tau|^{-\beta}, \quad \beta < 0. \tag{1.3.3}$$

При этом

$$\frac{d^k}{dt^k} Z_\beta = Z_{\beta+k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.3.4}$$

$$\lim_{t\to 0+} Z_\beta(t) = 0 \text{ при } \beta < 0. \tag{1.3.5}$$

Доказательство. Для $\varepsilon \in (0, \theta - \pi/2)$, $\tau \in \Sigma_{\theta-\pi/2-\varepsilon}$, $\mu \in \Gamma_\pm$ имеем

$$\mathrm{Re}(\mu\tau) = a\mathrm{Re}\tau + r|\tau| \cos(\arg \tau \pm \theta) \le a\mathrm{Re}\tau - r|\tau| \sin \varepsilon,$$

а в случае $\mu \in \Gamma_0$ $\mathrm{Re}(\mu\tau) = a\mathrm{Re}\tau + \delta|\tau| \cos(\arg \tau \pm \varphi)$, поэтому при $\beta \ge 0$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}}{\pi} \int_\delta^\infty \frac{(r+a)^\beta}{r} e^{-r|\tau|\sin\varepsilon} dr +$$

$$+\frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}(\delta+a)^\beta}{2\pi}\int\limits_{-\theta}^{\theta} e^{\delta|\tau|\cos(\arg\tau\pm\varphi)}d\varphi \le$$

$$\le \frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{(r+a)^\beta}{r}e^{-r|\tau|\sin\varepsilon}dr + \frac{Ke^{\delta|\tau|+a\mathrm{Re}\tau}(\delta+a)^\beta\theta}{\pi}.$$

При $\beta < 0$ аналогичная оценка будет иметь следующий вид:

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}c^\beta}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\infty} r^{\beta-1}e^{-r|\tau|\sin\varepsilon}dr + \frac{Ke^{\delta|\tau|+a\mathrm{Re}\tau}c^\beta\delta^\beta\theta}{\pi}.$$

При этом использовано неравенство $|\mu| \ge c|\mu - a|$, очевидно справедливое при некотором $c = c(\theta, a) > 0$ для всех $\mu \in \Gamma$. Таким образом, при любом $\beta \in \mathbb{R}$ соответствующий интеграл сходится равномерно на любом компактном подмножестве сектора $\Sigma_{\theta-\pi/2}$, а значит, определяет в нем аналитическую функцию переменной τ.

Возьмем $\delta = |\tau|^{-1}$, тогда при $\beta \ge 0$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\mu^{\alpha-1+\beta}(\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu\tau}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{Ke^{1+a\mathrm{Re}\tau}(|\tau|^{-1}+a)^\beta\theta}{\pi},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm}\mu^{\alpha-1+\beta}(\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu\tau}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}}{2\pi}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(r|\tau|^{-1}+a)^\beta}{r}e^{-r\sin\varepsilon}dr \le$$

$$\le \frac{Ke^{a\mathrm{Re}\tau}(|\tau|^{-1}+a)^\beta}{2\pi}\int\limits_{1}^{\infty} r^{\beta-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

Таким образом, выполняется неравенство (1.3.2) при

$$C_\beta(\theta, a) = \frac{K\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}, a\right)(\theta+\theta_0)e}{2\pi} + \frac{K\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}, a\right)}{\pi}\int\limits_{1}^{\infty} r^{\beta-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr,$$

если взять $\varepsilon = \min\left\{\frac{\theta-\pi/2}{2}, \frac{\theta_0-\theta}{2}\right\}$, $\theta' = \theta - \varepsilon$ и переобозначить θ' назад на θ.

При $\delta = |\tau|^{-1}$, $\beta < 0$, рассуждая, как при доказательстве аналитичности Z_β, получим неравенства

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \mu^{\alpha-1+\beta}(\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu\tau} d\mu \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K e^{1+a\mathrm{Re}\tau} c^\beta |\tau|^{-\beta}\theta}{\pi},$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\pm} \mu^{\alpha-1+\beta}(\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu\tau} d\mu \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K e^{a\mathrm{Re}\tau} c^\beta |\tau|^{-\beta}}{2\pi} \int\limits_1^\infty r^{\beta-1} e^{-r\sin\varepsilon} dr,$$

из которых следует (1.3.3) при

$$C_\beta(\theta, a) = \frac{K\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}, a\right) c\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}, a\right)^\beta (\theta+\theta_0) e}{2\pi} +$$

$$+ \frac{K\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}, a\right) c\left(\frac{\theta+\theta_0}{2}, a\right)^\beta}{\pi} \int\limits_1^\infty r^{\beta-1} e^{-r\sin\varepsilon} dr,$$

если взять $\varepsilon = \min\left\{\frac{\theta-\pi/2}{2}, \frac{\theta_0-\theta}{2}\right\}$.

Из (1.3.3) следуют равенства (1.3.5). Равенства (1.3.4) очевидны в силу доказанной аналитичности Z_β. $\square$

Здесь и далее $D_t^{\alpha-k-1}h(0) := \lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha-k-1}h(t)$.

Замечание 1.3.3. *При $\beta \in (0,1)$ и, например, $A = \mathbb{O}$ имеем $Z_\beta(t) = t^{-\beta}/\Gamma(1-\beta)$ и не существует предела $\lim\limits_{t\to 0+} Z_\beta(t)$. При этом*

$$\lim_{t\to 0+} D_t^{-\beta} Z_\beta(t) = 1, \quad \lim_{t\to 0+} D_t^{k-\beta} Z_\beta(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Определение 1.3.1. Множество операторов $\{Z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется семейством разрешающих операторов уравнения (1.3.1), если

(i) $Z(\cdot)$ сильно непрерывно на $\mathbb{R}_+$, $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} J_t^{m-\alpha} Z(t) = I$;

(ii) для всех $t \in \mathbb{R}_+$ $Z(t)[D_A] \subset D_A$, $Z(t)Az_0 = AZ(t)z_0$ при каждом $z_0 \in D_A$;

(iii) для любого $z_0 \in D_A$ функция $Z(t)z_0$ является решением задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m}z(0) = z_0$, $D_t^{\alpha-m+k}z(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, для уравнения (1.3.1).

Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{1.3.6}$$

для уравнения (1.3.1) называется решение уравнения (1.3.1), для которого $J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([0,T);\mathcal{Z})$ и выполняются условия (1.3.6).

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. *Тогда семейство операторов* $\{Z_{m-\alpha}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *является разрешающим для уравнения* (1.3.1) *и при любых* $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ *функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)z_k$$

является единственным решением задачи (1.3.1), (1.3.6).

Доказательство. При некотором $z_0 \in D_A$ рассмотрим отображение из $\mathbb{R}_+$ в пространство $\mathcal{Z}$, которое задается равенством

$$w_0(t) = Z_{m-\alpha}(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1}(\mu^\alpha I - A)^{-1}z_0 e^{\mu t}d\mu.$$

Имеем при $\mathrm{Re}\lambda > a$, где $a > a_0$ взято из определения контура Γ,

$$\mathfrak{L}[w_0](\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}dt \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1}(\mu^\alpha I - A)^{-1}z_0 e^{\mu t}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\mu^{m-1}}{\lambda-\mu}(\mu^\alpha I - A)^{-1}z_0 d\mu = \lambda^{m-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_0,$$

так как

$$\left\|\frac{\mu^{m-1}}{\lambda-\mu}(\mu^\alpha I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{K_1}{|\mu|^{2+\alpha-m}}, \quad 2+\alpha-m > 1.$$

Понятно, что функция $\lambda^{m-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_0$ аналитически продолжима в S_{θ_0,a_0}. Из полученного следует, что $\mathfrak{L}[J_t^{m-\alpha}w_0](\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_0$, поэтому для $z_0 \in D_A$, $t > 0$

$$J_t^{m-\alpha}w_0(t) = Z_0(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{\mu t}z_0}{\mu}d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{-1}(\mu^\alpha I - A)^{-1}Az_0 e^{\mu t}d\mu =$$

$= z_0 + Z_{-\alpha}(t)Az_0$, $J_t^{m-\alpha}w_0(0) = \lim\limits_{t\to 0+} J_t^{m-\alpha}w_0(t) = z_0$ в силу (1.3.5).

Далее, если $\alpha > 1$, то $m \geq 2$,

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+1}w_0](\lambda) = \lambda^\alpha(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_0 - J_t^{m-\alpha}w_0(0) =$$

$$= \lambda^\alpha(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_0 - z_0 = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}Az_0,$$

$$D_t^{\alpha-m+1}w_0(t) = Z_{1-\alpha}(t)Az_0, \quad D_t^{\alpha-m+1}w_0(0) = 0.$$

При $\alpha > 2$, получим $m \geq 3$,

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+2}w_0](\lambda) = \lambda^{\alpha+1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_0 - \lambda z_0 = \lambda(\lambda^\alpha I - A)^{-1}Az_0,$$

$$D_t^{\alpha-m+2}w_0(t) = Z_{2-\alpha}(t)Az_0, \quad D_t^{\alpha-m+2}w_0(0) = 0.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$D_t^{\alpha-1}w_0(t) = Z_{m-\alpha-1}(t)Az_0, \quad D_t^{\alpha-1}w_0(0) = 0,$$

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha}w_0](\lambda) = \lambda^{\alpha-1+m}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_0 - \lambda^{\alpha-1+m}z_0 = \lambda^{m-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}Az_0,$$

$$D_t^{\alpha}w_0(t) = Z_{m-\alpha}(t)Az_0 = AZ_{m-\alpha}(t)z_0 = Aw_0(t).$$

Предпоследнее равенство следует из замкнутости оператора A, поэтому функция $Aw_0(\cdot)$ непрерывна на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим функцию $w_1(t) = Z_{m-\alpha-1}(t)z_1$ при $z_1 \in D_A$:

$$w_1(t) = Z_{m-\alpha-1}(t)z_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-2}(\mu^\alpha I - A)^{-1}z_1 e^{\mu t}d\mu.$$

Имеем при $\mathrm{Re}\lambda > a$, а значит и при $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$

$$\mathfrak{L}[w_1](\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}dt \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-2}(\mu^\alpha I - A)^{-1}z_1 e^{\mu t}d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\mu^{m-2}}{\lambda-\mu}(\mu^\alpha I - A)^{-1}z_1 d\mu = \lambda^{m-2}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_1,$$

так как

$$\left\|\frac{\mu^{m-2}}{\lambda-\mu}(\mu^\alpha I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K_2}{|\mu|^{3+\alpha-m}}, \quad 3+\alpha-m > 1.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{L}[J_t^{m-\alpha}w_1](\lambda) = \lambda^{\alpha-2}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_1$, поэтому для $z_1 \in D_A$

$$J_t^{m-\alpha}w_1(t) = Z_{-1}(t)z_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{\mu t}z_1}{\mu^2}d\mu + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{-2}(\mu^\alpha I - A)^{-1}Az_1e^{\mu t}d\mu =$$

$= tz_1 + Z_{-\alpha-1}(t)Az_1$, $J_t^{m-\alpha}w_1(0) = 0$ в силу (1.3.5).

Далее, если $\alpha > 1$, то $m \geq 2$,

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+1}w_1](\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_1 - J_t^{m-\alpha}w_1(0) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_1 =$$

$$= \lambda^{-1}z_1 + \lambda^{-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}Az_1,$$

$D_t^{\alpha-m+1}w_1(t) = z_1 + Z_{-\alpha}(t)Az_1$, $D_t^{\alpha-m+1}w_1(0) = z_1$.

При $\alpha > 2$, получим $m \geq 3$,

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+2}w_1](\lambda) = \lambda^\alpha(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_1 - z_1 = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}Az_1,$$

$$D_t^{\alpha-m+2}w_1(t) = Z_{1-\alpha}(t)Az_1, \quad D_t^{\alpha-m+2}w_1(0) = 0.$$

Продолжая этот процесс, как и с функцией w_0, получим

$$D_t^{\alpha-1}w_1(t) = Z_{m-\alpha}(t)Az_1, \quad D_t^{\alpha-1}w_1(0) = 0,$$

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha w_1](\lambda) = \lambda^{\alpha+m-2}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_1 - \lambda^{m-2}z_1 = \lambda^{m-2}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}Az_1,$$

$$D_t^\alpha w_1(t) = Z_{m-\alpha-1}(t)Az_1 = AZ_{m-\alpha-1}(t)z_1 = Aw_1(t),$$

поэтому функция $Aw_1(\cdot)$ непрерывна на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Теперь возьмем

$$w_k = Z_{m-\alpha-k}(t)z_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1-k}(\mu^\alpha I - A)^{-1}z_ke^{\mu t}d\mu, \; k \in \{2, 3, \dots, m-1\}.$$

Тогда имеем при $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$

$$\mathfrak{L}[w_k](\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\mu^{m-1-k}}{\lambda - \mu}(\mu^\alpha I - A)^{-1}z_kd\mu = \lambda^{m-1-k}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}z_k,$$

так как

$$\left\|\frac{\mu^{m-1-k}}{\lambda-\mu}(\mu^\alpha I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K_1}{|\mu|^{2+\alpha-m+k}}, \quad 2+\alpha-m+k > 1.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{L}[J_t^{m-\alpha}w_k](\lambda)=\lambda^{\alpha-1-k}(\lambda^\alpha I-A)^{-1}z_k$, поэтому для $z_k\in D_A$, $t>0$

$$J_t^{m-\alpha}w_k(t)=Z_{-k}(t)z_k,\quad J_t^{m-\alpha}w_k(0)=Z_{-k}(0)z_k=0.$$

Понятно, что

$$D_t^{\alpha-m+l}w_k(t)=Z_{l-k}(t)z_k,\ D_t^{\alpha-m+l}w_k(0)=Z_{l-k}(0)z_k=0,\ l=1,2,\dots,k-1.$$

Далее

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+k}w_k](\lambda)=\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I-A)^{-1}z_k,$$

$$D_t^{\alpha-m+k}w_k(t)=Z_0(t)z_k=z_k+Z_{-\alpha}(t)Az_k,\quad D_t^{\alpha-m+k}w_k(0)=z_k,$$

$$D_t^{\alpha-m+k+1}w_k(t)=Z_{1-\alpha}(t)Az_k,\quad D_t^{\alpha-m+k+1}w_k(0)=0,\quad \dots,$$

$$D_t^{\alpha-1}w_k(t)=Z_{m-\alpha-k-1}(t)Az_k,\quad D_t^{\alpha-1}w_k(0)=0,$$

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha}w_k](\lambda)=\lambda^{\alpha-1+m-k}(\lambda^\alpha I-A)^{-1}z_k-\lambda^{m-1-k}z_k=\lambda^{m-1-k}(\lambda^\alpha I-A)^{-1}Az_k,$$

$$D_t^{\alpha}w_k(t)=Z_{m-\alpha-k}(t)Az_k=AZ_{m-\alpha-k}(t)z_k=Aw_k(t).$$

Докажем единственность решения.

Если задача (1.3.1), (1.3.6) имеет 2 решения $z_1(t)$ и $z_2(t)$, то их разность $z(t):=z_1(t)-z_2(t)$ является решением однородной задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0)=0,\quad k=0,1,\dots,m-1, \tag{1.3.7}$$

для уравнения (1.3.1), эквивалентного интегральному уравнению

$$z(t)=\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Az(s)ds. \tag{1.3.8}$$

Но $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, т. е. оператор A удовлетворяет условиям теоремы 1.3.1 [114] о порождении разрешающих семейств интегральных уравнений. Поэтому задача (1.3.7), (1.3.8) имеет единственное решение $z\equiv 0$. $\square$

Замечание 1.3.4. Понятно, что в силу леммы 1.3.1 решение задачи (1.3.6) для однородного уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$ в условиях теоремы 1.3.2 аналитично в секторе $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.

Замечание 1.3.5. Возникает вопрос, существуют ли пределы

$$\lim_{t\to 0+} D_t^\alpha Z_{m-\alpha-k}(t)z_k,\ \ k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Возьмем $k = 0$, $z_0 \in D_A$, тогда

$$Z_{m-\alpha}(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1-\alpha}(\mu^\alpha I - A + A)(\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu t}z_0 d\mu =$$

$$= \frac{t^{\alpha-m}z_0}{\Gamma(\alpha-m+1)} + Z_{m-2\alpha}(t)Az_0.$$

В силу (1.3.5) при $\alpha > 1/2$ существует предел $\lim\limits_{t\to 0+} Z_{m-2\alpha}(t)Az_0 = 0$, в таком случае при дробных α не существует предела $\lim\limits_{t\to 0+} Z_{m-\alpha}(t)z_0$. При $\alpha = 1/2$, $z_0 \in D_{A^2}$ также существует предел $\lim\limits_{t\to 0+} Z_{m-2\alpha}(t)Az_0 = Az_0$ и потому не существует предела $\lim\limits_{t\to 0+} Z_{m-\alpha}(t)z_0$. Таким образом, в условиях теоремы 1.3.2, вообще говоря, не существует предела $\lim\limits_{t\to 0+} D_t^\alpha z(t)$, а значит, и предела $\lim\limits_{t\to 0+} Az(t)$, где z — единственное решение задачи (1.3.6) для уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$.

1.3.2. Линейное неоднородное уравнение

Пусть $T \in (0, \infty]$. Рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T), \tag{1.3.9}$$

при заданной функции $f : [0, T) \to \mathcal{Z}$. Сначала рассмотрим случай повышенной гладкости функции f по пространственным переменным, которая в данном случае определяется условием непрерывности этой функции в норме графика неограниченного оператора.

Функция $z \in C((0, T); D_A)$, для которой $J_t^{m-\alpha}z \in C^m((0, T); \mathcal{Z})$, называется решением уравнения (1.3.9), если при всех $t \in (0, T)$ справедливо равенство (1.3.9).

Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{1.3.10}$$

для уравнения (1.3.9) называется решение уравнения (1.3.9), для которого $J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([0,T);\mathcal{Z})$ и выполняются условия (1.3.10).

Теорема 1.3.3. *Пусть* $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C([0,T);D_A)$. *Тогда при любых* $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ *функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)z_k + \int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds$$

является единственным решением задачи типа Коши (1.3.10) *для уравнения* (1.3.9).

Доказательство. В теореме 1.3.2 доказано, что сумма $\sum\limits_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)z_k$ при $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, является решением задачи типа Коши (1.3.10) для однородного уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$. Найдем решение неоднородного уравнения с однородными начальными условиями.

Доопределим f нулем вне полуинтервала $[0,T)$ с конечным $T > 0$, тогда

$$Z_f(t) := \int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds = Z_{1-\alpha} * f.$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.3.2, получим

$$\mathfrak{L}[Z_f](\lambda) = \mathfrak{L}[Z_{1-\alpha}](\lambda)\mathfrak{L}[f](\lambda) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathfrak{L}[f](\lambda),$$

$$\mathfrak{L}[J_t^{m-\alpha}Z_f](\lambda) = \lambda^{\alpha-m}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathfrak{L}[f](\lambda),$$

$$J_t^{m-\alpha}Z_f(t) = \int\limits_0^t Z_{1-m}(t-s)f(s)ds, \quad J_t^{m-\alpha}Z_f(0) = 0,$$

при этом использованы неравенства (1.3.2), (1.3.3).

Далее, при $\alpha > 1$

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+1}Z_f](\lambda) = \lambda^{\alpha-m+1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathfrak{L}[f](\lambda),$$

$$D_t^{\alpha-m+1}Z_f(t) = \int\limits_0^t Z_{2-m}(t-s)f(s)ds, \quad D_t^{\alpha-m+1}Z_f(0) = 0.$$

При $k = 2, 3, \ldots, m-1$

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+k}Z_f](\lambda) = \lambda^{\alpha-m+k}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathfrak{L}[f](\lambda),$$

$$D_t^{\alpha-m+k}Z_f(t) = \int\limits_0^t Z_{k+1-m}(t-s)f(s)ds, \quad D_t^{\alpha-m+k}Z_f(0) = 0.$$

Наконец,

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha Z_f](\lambda) = \lambda^\alpha(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathfrak{L}[f](\lambda) = \mathfrak{L}[f](\lambda) + (\lambda^\alpha I - A)^{-1}A\mathfrak{L}[f](\lambda),$$

$$D_t^\alpha Z_f(t) = f(t) + \int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)Af(s)ds = f(t) + AZ_f(t),$$

так как $f \in C([0,T); D_A)$ и поэтому $Z_f \in C([0,T); D_A)$, $AZ_f = Z_{Af}$.

Доказательство единственности решения ничем не отличается от доказательства единственности решения однородной задачи в теореме 1.3.2. $\square$

Теперь рассмотрим случай повышенной гладкости функции f по временно́й переменной — ее гельдеровости.

Через $C^\gamma([0,T); \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$, будем обозначать множество таких функций $f : [0,T) \to \mathcal{Z}$, что для некоторого $C > 0$ и для всех $t, s \in [0,T)$ выполняется неравенство $\|f(t) - f(s)\|_\mathcal{Z} \leq C|t-s|^\gamma$, при этом по определению

$$\|f\|_{C^\gamma([0,T);\mathcal{Z})} = \inf_{t,s\in[0,T)} \frac{\|f(t) - f(s)\|_\mathcal{Z}}{|t-s|^\gamma}.$$

Теорема 1.3.4. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C^\gamma([0,T); \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0,1]$. Тогда при любых $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in D_A$ функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)z_k + \int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)f(s)ds \qquad (1.3.11)$$

является единственным решением задачи типа Коши (1.3.10) *для уравнения* (1.3.9).

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, получим при $k = 0, 1, \dots, m-1$

$$D_t^{\alpha-m+k} Z_f(t) = \int\limits_0^t Z_{k+1-m}(t-s) f(s) ds, \quad D_t^{\alpha-m+k} Z_f(0) = 0.$$

В силу (1.3.2) при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$

$$\|D_t^{\alpha-1} Z_f(t)\| \le t \max_{s\in[0,t]} \|Z_0(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \max_{s\in[0,t]} \|f(s)\|_{\mathcal{Z}} \le C_0(\theta, a) e^{at} t \|f\|_{C([0,T);\mathcal{Z})} \to 0$$

при $t \to 0+$.

Поскольку

$$AZ_{1-\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma A(\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (A - \mu^\alpha I + \mu^\alpha I)(\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^\alpha (\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t} d\mu = Z_1(t),$$

то $\mathrm{im} Z_{1-\alpha}(t) \subset D_A$ при $t > 0$. Более того, для $\varepsilon > 0$ с учетом (1.3.4)

$$\int\limits_0^{t-\varepsilon} AZ_{1-\alpha}(t-s) f(s) ds = \int\limits_0^{t-\varepsilon} Z_1(t-s)(f(s) - f(t)) ds + \int\limits_0^{t-\varepsilon} Z_1(t-s) f(t) ds =$$

$$= \int\limits_0^{t-\varepsilon} Z_1(t-s)(f(s) - f(t)) ds - \int\limits_0^{t-\varepsilon} \frac{d}{ds} Z_0(t-s) f(t) ds =$$

$$= \int\limits_0^{t-\varepsilon} Z_1(t-s)(f(s) - f(t)) ds + (Z_0(t) - Z_0(\varepsilon)) f(t). \tag{1.3.12}$$

Из условия на функцию f и неравенства (1.3.2) следует, что

$$\|Z_1(t-s)(f(s) - f(t))\|_{\mathcal{Z}} \le C_1 |t-s|^{\gamma-1},$$

следовательно, $Z_f(t) \in D_A$, выражение (1.3.12) стремится к

$$\int\limits_0^t Z_1(t-s)(f(s)-f(t))ds + (Z_0(t)-I)f(t) = AZ_f(t)$$

при $\varepsilon \to 0+$. Кроме того, $AZ_f(t) \to 0$ при $t \to 0+$. Использован тот факт, что $\lim\limits_{t\to 0+} Z_0(t) = I$. Таким образом, $Z_f \in C([0,T);D_A)$.

Имеем $Z_f = Z_{1-\alpha} * f$, $\mathfrak{L}[Z_f] = \mathfrak{L}[Z_{1-\alpha}]\mathfrak{L}[f]$, для $\mathrm{Re}\lambda > a_0$

$$\mathfrak{L}[Z_{1-\alpha}] = \int\limits_0^t \frac{e^{-\lambda t}}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{1}{\lambda-\mu}(\mu^\alpha I - A)^{-1}d\mu = R_{\lambda^\alpha}(A),$$

следовательно, $\mathfrak{L}[Z_f] = R_{\lambda^\alpha}(A)\mathfrak{L}[f]$ на полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > a_0\}$. Используя формулу преобразования Лапласа для производной Римана — Лиувилля [75], получим

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha Z_f](\lambda) = \lambda^\alpha(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\mathfrak{L}[f](\lambda) = \mathfrak{L}[f](\lambda) + (\lambda^\alpha I - A)^{-1}A\mathfrak{L}[f](\lambda).$$

Действуя на обе части равенства с помощью обратного преобразования Лапласа, получаем, что Z_f является решением задачи (1.3.10) с $z_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, для уравнения (1.3.9), поэтому (1.3.11) является решением общей задачи (1.3.9), (1.3.10).

Если существуют два решения задачи $z_1(t)$ и $z_2(t)$ (1.3.9), (1.3.10), то их разность $z(t) = z_1(t) - z_2(t)$ является решением задачи (1.3.9) с $z_k = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$ для уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$. Действуя с помощью преобразования Лапласа на обе части этого уравнения, получим $\mathfrak{L}[D^\alpha z] = \lambda^\alpha\mathfrak{L}[z] = A\mathfrak{L}[z]$, следовательно, $\mathfrak{L}[z] \equiv 0$ on $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > a_0\}$, поскольку $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Таким образом, $z(t) \equiv 0$. $\square$

1.4. Полулинейное уравнение, разрешенное относительно дробной производной

В этом разделе будем рассматривать дробные интегралы и дробные производные Римана — Лиувилля с началом в точке $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$J_t^\alpha f(t) := \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds, \quad D_t^\alpha f(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t), \quad t > t_0,$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$.

Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^m$, $B : Z \to \mathcal{Z}$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $z_k \in \mathcal{Z}$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим полулинейное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha-m} z(t), D_t^{\alpha-m+1} z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1} z(t)). \tag{1.4.1}$$

Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.4.2}$$

для уравнения (1.4.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ называется функция $z \in C((t_0, t_1]; D_A)$, такая, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, выполнены условия (1.4.2), при $t \in (t_0, t_1]$ $(t, D_t^{\alpha-m} z(t), D_t^{\alpha-m+1} z(t), \ldots, D_t^{\alpha-1} z(t)) \in Z$ и равенство (1.4.1) верно.

Введем обозначения $\overline{x} := (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathcal{Z}^m$, $S_\delta(\overline{x}) = \{\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m-1} : \|y_k - x_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta,\ k = 0, 1, \ldots, m-1\}$. Отображение $B : Z \to \mathcal{Z}$ называется локально липшицевым по $\overline{x}$, если для всех $(t, \overline{x}) \in Z$ существуют такие $\delta > 0$, $l > 0$, что $[t-\delta, t+\delta] \times S_\delta(\overline{x}) \subset Z$, и для любых $(s, \overline{y}), (s, \overline{v}) \in [t-\delta, t+\delta] \times S_\delta(\overline{x})$ выполнено неравенство

$$\|B(s, \overline{y}) - B(s, \overline{v})\|_{\mathcal{Z}} \leq l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - v_k\|_{\mathcal{Z}}.$$

Отображение $B : Z \to \mathcal{Z}$ называется локально гельдеровым по t с показателем $\gamma \in (0, 1]$, если для любого $(t, \overline{x}) \in Z$ существует такое $\delta > 0$, что $[t-\delta,t+\delta]\times\{\overline{x}\}\subset Z$, и для любых $r,s\in[t-\delta,t+\delta]$ выполнено неравенство

$$\|B(r,\overline{x})-B(s,\overline{x})\|_{\mathcal{Z}}\leq C|r-s|^{\gamma}.$$

Замечание 1.4.1. Сложная функция $B(t,\overline{x}(t))$, где $B:Z\to\mathcal{Z}$ локально липшицево по $\overline{x}$ и локально гельдерово по t, а $\overline{x}$ локально гельдерова по переменной t, является локально гельдеровой по t, так как

$$\|B(r,\overline{x}(r))-B(s,\overline{x}(s))\|_{\mathcal{Z}}\leq$$

$$\leq\|B(r,\overline{x}(r))-B(r,\overline{x}(s))\|_{\mathcal{Z}}+\|B(r,\overline{x}(s))-B(s,\overline{x}(s))\|_{\mathcal{Z}}\leq$$

$$\leq l\sum_{k=0}^{m-1}\|x_k(r)-x_k(s)\|_{\mathcal{Z}}+C|r-s|^{\gamma}\leq lmC_1|t-s|^{\gamma_1}+C|r-s|^{\gamma}\leq C_2|r-s|^{\gamma_2},$$

где $\gamma_2=\min\{\gamma,\gamma_1\}$. Отсюда с помощью теоремы о конечном подпокрытии можно получить гельдеровость этой сложной функции на любом отрезке.

1.4.1. Уравнение с нелинейностью, непрерывной в норме графика

Лемма 1.4.1. *Пусть* $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in D_A$, $k=0,1,\dots,m-1$, Z *— открытое множество в* $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $B\in C(Z;D_A)$, $(t_0,z_0,z_1,\dots,z_{m-1})\in Z$. *Тогда* z *является решением задачи* (1.4.1), (1.4.2) *на отрезке* $[t_0,t_1]$, *если и только если* $J_t^{m-\alpha}z\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ *и для всех* $t\in[t_0,t_1]$

$$z(t)=\sum_{k=0}^{m-1}Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}Z_{1-\alpha}(t-s)B(s,D_t^{\alpha-m}z(s),D_t^{\alpha-m+1}z(s),\dots,D_t^{\alpha-1}z(s))ds. \qquad (1.4.3)$$

Доказательство. Если z является решением задачи (1.4.1), (1.4.2), то обозначим $y:=J_t^{m-\alpha}z\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$. Тогда, можно сказать, что отображение

$$t\to B(t,y(t),y^{(1)}(t),\dots,y^{(m-1)}(t))$$

действует из $[t_0, t_1]$ в D_A непрерывно. Поэтому, как при доказательстве теоремы 1.3.3, можно показать, что z удовлетворяет равенству (1.4.3).

Обозначим

$$B_z(t) := B(t + t_0, D_t^{\alpha-m} z(t + t_0), D_t^{\alpha-m+1} z(t + t_0), \dots, D_t^{\alpha-1} z(t + t_0)),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s) B(s, D_t^{\alpha-m} z(s), D_t^{\alpha-m+1} z(s), \dots, D_t^{\alpha-1} z(s)) ds =$$

$$= \int\limits_0^{\tau} Z_{1-\alpha}(\tau - \sigma) B_z(\sigma) d\sigma := Z_B(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

где $\tau = t - t_0$, $\sigma = s - t_0$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.3.3, получим

$$\mathfrak{L}[Z_B](\lambda) = \mathfrak{L}[Z_{1-\alpha}](\lambda) \mathfrak{L}[B_z](\lambda) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1} \mathfrak{L}[B_z](\lambda),$$

$$\mathfrak{L}[J_\tau^{m-\alpha} Z_B](\lambda) = \lambda^{\alpha-m} (\lambda^\alpha I - A)^{-1} \mathfrak{L}[B_z](\lambda),$$

$$J_\tau^{m-\alpha} Z_B(\tau) = \int\limits_0^{\tau} Z_{1-m}(\tau - \sigma) B_z(\sigma) d\sigma, \quad J_t^{m-\alpha} Z_B(0) = 0.$$

При $k = 1, 2, \dots, m-1$

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha-m+k} Z_B](\lambda) = \lambda^{\alpha-m+k} (\lambda^\alpha I - A)^{-1} \mathfrak{L}[B_z](\lambda),$$

$$D_t^{\alpha-m+k} Z_B(\tau) = \int\limits_0^{\tau} Z_{k+1-m}(\tau - \sigma) B_z(\sigma) ds, \quad D_t^{\alpha-m+k} Z_B(0) = 0.$$

Наконец,

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha Z_B](\lambda) = \lambda^\alpha (\lambda^\alpha I - A)^{-1} \mathfrak{L}[B_z](\lambda) = \mathfrak{L}[B_z](\lambda) + (\lambda^\alpha I - A)^{-1} A \mathfrak{L}[B_z](\lambda),$$

$$D_t^\alpha Z_B(\tau) = B(t, D_t^{\alpha-m} z(s), D_t^{\alpha-m+1} z(s), \dots, D_t^{\alpha-1} z(s)) +$$

$$+ A \int\limits_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s) B(s, y(s), y^{(1)}(s), \dots, y^{(m-1)}(s)) ds.$$

Поэтому функция (1.4.3) является решением задачи (1.4.1), (1.4.2). $\square$

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in D_A$, $k=0,1,\dots,m-1$, Z *— открытое множество в* $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $(t_0,z_0,z_1,\dots,z_{m-1})\in Z$, *отображение* $B\in C(Z;D_A)$ *является локально липшицевым по* $\overline{x}$. *Тогда существует такое* $t_1>t_0$, *что задача* (1.4.1), (1.4.2) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. По лемме 1.4.1, достаточно показать, что уравнение

$$y(t)=\sum_{k=0}^{m-1}J_t^{m-\alpha}Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k+$$

$$+J_t^{m-\alpha}\int\limits_{t_0}^{t}Z_{1-\alpha}(t-s)B(s,y(s),y^{(1)}(s),\dots,y^{(m-1)}(s))ds, \tag{1.4.4}$$

полученное из интегро-дифференциального уравнения (1.4.3) с помощью действия оператора $J_t^{m-\alpha}$, имеет единственное решение $y\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ для некоторого $t_1>t_0$. Здесь $y(t)=J_t^{m-\alpha}z(t)$, следовательно, $y^{(k)}(t)=D_t^{\alpha-m+k}z(t)$, $k=1,2,\dots,m-1$. Зная $y(t)$, мы сможем однозначно определить $z(t)=D_t^{m-\alpha}y(t)$.

Поскольку $\|\lambda^{\alpha-k-1}R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leq C|\lambda|^{-1}$ при $k=0,1,\dots,m-1$, то

$$\mathfrak{L}[J_t^{m-\alpha}Z_{m-\alpha-k}]=\lambda^{\alpha-k-1}R_{\lambda^\alpha}(A),\quad J_t^{m-\alpha}Z_{m-\alpha-k}(t)=Z_{-k}(t)$$

и уравнение (1.4.4) имеет вид

$$y(t)=\sum_{k=0}^{m-1}Z_{-k}(t-t_0)z_k+$$

$$+J_t^{m-\alpha}\int\limits_{t_0}^{t}Z_{1-\alpha}(t-s)B(s,y(s),y^{(1)}(s),\dots,y^{(m-1)}(s))ds, \tag{1.4.5}$$

Выберем такие $\tau>0$ и $\delta>0$, что $[t_0,t_0+\tau]\times S_\delta(\overline{z})\subset Z$, где $\overline{z}$ состоит из начальных векторов z_0, z_1, $\dots$, z_{m-1} из условий (1.4.2). Обозначим через $\mathcal{S}$ множество функций $y\in C^{m-1}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$, таких, что $\|y^{(k)}(t)-z_k\|_{\mathcal{Z}}\leq\delta$

при $t_0 \le t \le t_0 + \tau$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Определим на $\mathcal{S}$ метрику

$$d(y, v) := \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \|y^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)\|_{\mathcal{Z}},$$

тогда S — полное метрическое пространство.

Определим для $y \in \mathcal{S}$

$$G(y)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} Z_{-k}(t - t_0) z_k +$$

$$+J_t^{m-\alpha} \int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s) B(s, y(s), y^{(1)}(s), \dots, y^{(m-1)}(s))\, ds$$

при $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ и докажем, что G отображает метрическое пространство $\mathcal{S}$ в себя и является оператором сжатия, если $\tau > 0$ достаточно мало. Действительно, для $n = 0, 1, \dots, m-1$

$$[G(y)]^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{n-k}(t - t_0) z_k +$$

$$+D_t^{\alpha-m+n} \int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s) B(s, y(s), y^{(1)}(s), \dots, y^{(m-1)}(s)) ds.$$

По теореме 1.3.3 $G(y) \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $[G(y)]^{(n)}(t_0) = z_n$, $n = 0, 1, \dots, m-1$. Следовательно, при $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ выполнено $\|[G(y)]^{(n)}(t) - z_n\|_{\mathcal{Z}} \le \delta$ для достаточно малого τ. Как следствие, $G : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Обозначим

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s) B(s, y(s), y^{(1)}(s), \dots, y^{(m-1)}(s)) ds,$$

тогда $f^{(k)}(t_0) = 0$, в соответствии с (1.3.5) $Z_{k-\alpha}(0) = 0$, $k = 1, \dots, m-1$. Следовательно, для $n = 0, 1, \dots, m-1$, учитывая (1.3.4), получим

$$D_t^{\alpha-m+n} f(t) = J_t^{m-\alpha} f^{(n)}(t) =$$

$$= J_t^{m-\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha+n}(t-s) B(s, y(s), y^{(1)}(s), \dots, y^{(m-1)}(s)) ds.$$

Из неравенства (1.3.2) и обобщенного неравенства Бернулли при $t > 0$

$$\|Z_{m-\alpha}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_{m-\alpha}(\theta, a) e^{at} (t^{-1} + a)^{m-\alpha} =$$

$$= C_{m-\alpha}(\theta, a) e^{at} (1 + at)^{m-\alpha} t^{\alpha-m} \leq C e^{at} (t^{\alpha-m} + (m-\alpha) a t^{\alpha-m+1})$$

для некоторых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0 \geq 0$, поскольку $m - \alpha \in [0, 1)$. Следовательно, для достаточно малого τ и для всех $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, $y, v \in \mathcal{S}$ мы имеем

$$\|[G(y)]^{(m-1)}(t) - [G(v)]^{(m-1)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq \frac{\tau^{m-\alpha} C_{m-\alpha}(\theta, a) e^{a(t_0+\tau)}}{\Gamma(m-\alpha+1)} \left((t_0+\tau)^{\alpha-m} + (m-\alpha) a (t_0+\tau)^{\alpha-m+1} \right) l d(y, v) \leq$$

$$\leq \frac{d(y, v)}{2m}.$$

В соответствии с (1.3.3) для $n = 0, 1, \dots, m-2$, $y, v \in \mathcal{S}$

$$\|[G(y)]^{(n)}(t) - [G(v)]^{(n)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq \frac{\tau^{m-\alpha} C_{1-\alpha+n}(\theta, a) e^{a(t_0+\tau)} (t_0+\tau)^{\alpha-n-1}}{\Gamma(m-\alpha+1)} l \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \|y^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq$$

$$\leq \frac{d(y, v)}{2m}$$

для достаточно малого $\tau > 0$. Следовательно, $d(G(y), G(v)) \leq d(y, v)/2$ и оператор G имеет единственную неподвижную точку $y_0 \in \mathcal{S}$. Таким образом, существует единственное решение задачи (1.4.1), (1.4.2) на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ равное $z = D_t^{m-\alpha} y_0$. $\square$

1.4.2. Уравнение с гельдеровой правой частью

Пусть Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m-1}$, $B : Z \to \mathcal{Z}$ — нелинейный оператор, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим полулинейное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha-m}z(t), D_t^{\alpha-m+1}z(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}z(t)). \qquad (1.4.6)$$

Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad (1.4.7)$$

для уравнения (1.4.6) на отрезке $[t_0, t_1]$ называется функция $z \in C((t_0, t_1]; D_A)$, такая, что $J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, условия (1.4.7) выполнены, при $t \in (t_0, t_1]$ $(t, D_t^{\alpha-m}z(t), D_t^{\alpha-m+1}z(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}z(t)) \in Z$ и равенство (1.4.6) верно.

Лемма 1.4.2. *Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m-1}$, отображение $B \in C(Z; \mathcal{Z})$ является локально гельдеровым относительно t и локально липшицевым по переменным $\overline{z}$, $(t_0, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) \in Z$. Тогда z является решением задачи (1.4.6), (1.4.7) на отрезке $[t_0, t_1]$, если и только если $J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ и для всех $t \in [t_0, t_1]$*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} Z_{1-\alpha}(t-s)B(s, D_t^{\alpha-m}z(s), D_t^{\alpha-m+1}z(s), \ldots, D_t^{\alpha-2}z(s))ds. \qquad (1.4.8)$$

Доказательство. Если z является решением задачи (1.4.6), (1.4.7), то $y := J_t^{m-\alpha}z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. Следовательно, отображение

$$t \to B(t, y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(m-2)}(t)) \qquad (1.4.9)$$

действует из $[t_0, t_1]$ в $\mathcal{Z}$ непрерывно. Более того, в силу замечания 1.4.1 это гельдерово на отрезке отображение, поскольку B является локально гельдеровым по переменной t и локально липшицевым по $\overline{x}$, $x_k = y^{(k)} \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$,

$k = 0, 1, \ldots, m-2$, также являются липшицевыми функциями. Поэтому по теореме 1.3.4 уравнение (1.4.8) выполнено.

Пусть $y := J_t^{m-\alpha} z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ и z удовлетворяет (1.4.8). Тогда $D_t^{\alpha-m+k} z = y^{(k)} \in C^1([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$, отображение (1.4.9) является гельдеровым. Непосредственно, как и при доказательстве теоремы 1.3.4, можно показать, что z является решением задачи (1.4.6), (1.4.7). $\square$

Доказательство следующей теоремы абсолютно аналогично доказательству теоремы 1.4.1, только опирается на лемму 1.4.2 вместо леммы 1.4.1.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, Z *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m-1}$, $(t_0, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) \in Z$, $B \in C(Z; \mathcal{Z})$ *является локально гельдеровым отображением относительно* t *и локально липшицевым относительно переменных* $\bar{x}$. *Тогда существует такое* $t_1 > t_0$, *что задача* (1.4.6), (1.4.7) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, t_1]$.

1.5. Приложения к начально-краевым задачам

В этом параграфе полученные результаты при исследовании начальных задач для уравнений дробного порядка в банаховых пространствах будут использованы для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка по времени.

1.5.1. Уравнения с многочленами от самосопряженного оператора

Пусть $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$, $Q_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} d_j \lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, \varrho$, $c_n \ne 0$, $d_\varrho \ne 0$, $n < \varrho$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ является ограниченной областью с гладкой границей $\partial\Omega$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярно эллиптический [53], где

$$(\Lambda z)(s) = \sum_{|q|\leq 2r} \frac{a_q(s)\partial^{|q|}z(s)}{\partial^{q_1}s_1\partial^{q_2}s_2\dots\partial^{q_d}s_d}, \ \ a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l z)(s) = \sum_{|q|\leq r_l} \frac{b_{lq}(s)\partial^{|q|}z(s)}{\partial^{q_1}s_1\partial^{q_2}s_2\dots\partial^{q_d}s_d}, \ \ b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \dots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + q_2 + \dots + q_d$.

Определим оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{z \in H^{2r}(\Omega) : B_l z(s) = 0,\ l = 1, 2, \dots, r,\ s \in \partial\Omega\}$$

[53] равенством $\Lambda_1 z = \Lambda z$. Пусть Λ_1 является самосопряженным оператором с ограниченным справа спектром. Тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 вещественный, дискретный и сгущается только на $-\infty$. Пусть $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системой собственных функций оператора Λ_1, занумерованной в порядке неубывания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Для $\alpha \in (1, 2)$, рассмотрим задачу

$$D_t^{\alpha-2}v(s, 0) = v_0(s), \quad D_t^{\alpha-1}v(s, 0) = v_1(s), \quad s \in \Omega, \tag{1.5.1}$$

$$B_l\Lambda^k v(s, t) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho-1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ (s, t) \in \partial\Omega\times(0, T), \tag{1.5.2}$$

$$D_t^\alpha P_n(\Lambda)v(s, t) = Q_\varrho(\Lambda)v(s, t) + g\,(s, t)\,,\ (s, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{1.5.3}$$

где $v_0, v_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ заданы, функция $v : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ неизвестна.

Положим $\mathcal{Z} = \{z \in H^{2rn}(\Omega) : B_l\Lambda^k z(s) = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ s \in \partial\Omega\}$. Пусть оператор $P_n(\Lambda_1) : \mathcal{Z} \to L_2(\Omega)$ непрерывно обратим, определим оператор $Az := [P_n(\Lambda_1)]^{-1}Q_\varrho(\Lambda)z$ с областью определения $D_A = \{z \in H^{2r\varrho}(\Omega) : B_l\Lambda^k z(s) = 0, k = 0, \dots, \varrho-1,\ l = 1, \dots, r,\ s \in \partial\Omega\}$. Очевидно, что оператор $P_n(\Lambda_1) : \mathcal{Z} \to L_2(\Omega)$ непрерывно обратим, если и только если множество нулей многочлена $P_n(\lambda)$ не пересекается со спектром $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1.

Лемма 1.5.1. *Пусть* $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $\alpha > 1$,

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi) \ \exists a_1 \geq 0 \ \forall \mu \in S_{a_1,\theta_1} \ \mu^\alpha \in \rho(A);$$

$$\exists C > 0 \ \forall \mu \in S_{a_1,\theta_1} \ \|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\mu^\alpha - a_1|}.$$

Тогда $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $a_0 \geq a_1$, $a_0 > 1$.

Доказательство. Имеем $\min\{|\mu| : \mu \in S_{\theta_0,a_0}\} = a_0 \sin\theta_0$. При $\alpha > 1$ можно выбрать достаточно близкое к $\pi/2$ число θ_0, $a_0 \geq a_1$, $a_0 > 1$, для которых

$$\sin\theta_0 > a_0^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \ \sin^\alpha\theta_0 > a_0^{1-\alpha}, \ 0 < 1 - \frac{a_0^{1-\alpha}}{\sin^\alpha\theta_0} = \left|1 - \frac{a_0}{(a_0\sin\theta_0)^\alpha}\right| \leq \left|1 - \frac{a_0}{|\mu|^\alpha}\right|$$

при всех $\mu \in S_{\theta_0,a_0}$. Обозначим

$$s := \sup\left\{\left|1 - \frac{a_0}{\mu}\right| : \mu \in S_{\theta_0,a_0}\right\}, \quad C_1 = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{a_0}{(a_0\sin\theta_0)^\alpha}\right) > 0,$$

тогда

$$\left|1 - \frac{a_0}{|\mu|^\alpha}\right| \geq 1 - \frac{a_0}{(a_0\sin\theta_0)^\alpha} \geq C_1\left|1 - \frac{a_0}{\mu}\right| = C_1\frac{|\mu - a_0|}{|\mu|},$$

$$|\mu - a_0\mu^{1-\alpha}| = |\mu||1 - a_0\mu^{-\alpha}| \geq |\mu|\left|1 - \frac{a_0}{|\mu|^\alpha}\right| \geq C_1|\mu - a_0|,$$

$$\frac{1}{|\mu^\alpha - a_0|} = \frac{1}{|\mu|^{\alpha-1}|\mu - a_0\mu^{1-\alpha}|} \leq \frac{C_1^{-1}}{|\mu|^{\alpha-1}|\mu - a_0|}.$$

Так как $a_0 \geq a_1$, то для всех $\mu \in S_{\theta_0,a_0}$ имеем $|\mu^\alpha - a_1| \geq C_2|\mu^\alpha - a_0|$ при некотором $C_2 > 0$. Поэтому для всех $\mu \in S_{\theta_0,a_0}$

$$\|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\mu^\alpha - a_1|} \leq \frac{CC_2^{-1}}{|\mu^\alpha - a_0|} \leq \frac{CC_1^{-1}C_2^{-1}}{|\mu|^{\alpha-1}|\mu - a_0|}.$$

$\square$

Лемма 1.5.2. *Пусть* $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $\alpha \in (0,1)$,

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi) \ \exists a_0 \in [0,1) \ \forall \mu \in S_{a_0,\theta_1} \ \mu^\alpha \in \rho(A);$$

$$\exists C > 0 \ \forall \mu \in S_{a_0,\theta_1} \ \|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\mu^\alpha - a_0|}.$$

Тогда $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *для некоторого* $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$.

Доказательство. При $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1]$, достаточно близком к $\pi/2$, получим $\sin^\alpha \theta_0 > a_0^{1-\alpha}$. Далее, рассуждая, как в предыдущем доказательстве, получим

$$\frac{1}{|\mu^\alpha - a_0|} \le \frac{C_1^{-1}}{|\mu|^{\alpha-1}|\mu - a_0|},$$

следовательно, при всех $\mu \in S_{\theta_0, a_0}$

$$\|R_{\mu^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{CC_1^{-1}}{|\mu|^{\alpha-1}|\mu - a_0|}.$$

□

Теорема 1.5.1. *Пусть $\varrho > n$, $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, он не содержит нулей полинома $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, оператор $Az := [P_n(\Lambda_1)]^{-1}Q_\varrho(\Lambda)z$ с областью определения $D_A = \{z \in H^{2r\varrho}(\Omega) : B_l\Lambda^k z(s) = 0, k = 0, \ldots, \varrho - 1,\ l = 1, \ldots, r,\ s \in \partial\Omega\}$ действует в пространстве $\mathcal{Z} = \{z \in H^{2rn}(\Omega) : B_l\Lambda^k z(s) = 0, k = 0, \ldots, n-1,\ l = 1, \ldots, r,\ s \in \partial\Omega\}$. Тогда при $\alpha \in [1, 2)$ существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \ge 0$, что $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$. Если, кроме того,*

$$\max_{k\in\mathbb{N}} \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} < 1, \tag{1.5.4}$$

то $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 1)$. В обоих случаях $\sigma(A) = \{\mu \in \mathbf{C} :\ \mu = Q_\varrho(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)\}$.

Доказательство. Имеем

$$\mu I - A = \sum_{k=1}^{\infty}(\mu - \mu_k)\langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k, \quad \mu_k := \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = -\infty$, то $\mu_k \sim (d_\varrho/c_n)\lambda_k^{\varrho-n}$ при $k \to \infty$. При $\alpha \in [1, 2)$ возьмем $\varepsilon < \pi/\alpha - \pi/2$, $\theta_1 = \pi/\alpha - \varepsilon$, $a = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu_k$, $a_1 = \max\{0, a\}$. Для $\mu \ne \mu_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ получим

$$(\mu I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu - \mu_k} : \mathcal{Z} \to D_A,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, поэтому при $\mu \in S_{\theta_1,a_1}$, $z \in \mathcal{Z}$

$$\|(\mu^\alpha I - A)^{-1}z\|_{\mathcal{Z}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\lambda_k^{2n})|\langle z,\varphi_k\rangle|^2}{|\mu^\alpha - \mu_k|^2} = \frac{\sin^{-2}(\alpha\varepsilon)\|z\|_{\mathcal{Z}}^2}{|\mu^\alpha - a_1|^2},$$

поскольку $|\arg(\mu^\alpha)| < \alpha\theta_1 < \pi$, $|\mu^\alpha - \mu_k| \ge \sin(\alpha\varepsilon)|\mu^\alpha - a_1|$. При $\alpha = 1$ получено требуемое, при $\alpha \in (1,2)$ осталосься сослать на лемму 1.5.1.

Для $\alpha \in (0,1)$ возьмем $\theta_1 \in (\pi/2,\pi)$, в силу (1.5.4) имеем $a \in (-\infty,1)$, выберем $a_0 = \max\{0,a\}$, проведем аналогичные предыдущим рассуждения и сошлемся на лемму 1.5.2. □

Теорема 1.5.2. *Пусть $\alpha \in (1,2)$, $(-1)^{p-n}(d_r/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей многочлена $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $v_k \in D_A$ при $k = 0,1$, $g \in C^1([0,T];\mathcal{Z})$. Тогда задача (1.5.1)–(1.5.3) имеет единственное решение.*

Доказательство. В силу теорем 1.5.1 и 1.3.4 с $f(t) = g(\cdot,t)$ получим требуемое. □

Замечание 1.5.1. При $\alpha \in (0,1)$ аналогичный результат справедлив при дополнительном условии (1.5.4).

Рассмотрим теперь полулинейное уравнение

$$D_t^\alpha P_n(\Lambda)v(s,t) = Q_\varrho(\Lambda)v(s,t) + F\left(s, D_t^{\alpha-2}v(s,t)\right) \tag{1.5.5}$$

с краевыми условиями (1.5.2) и начальными условиями

$$D_t^{\alpha-2}v(s,0) = v_0(s), \quad D_t^{\alpha-1}v(s,0) = v_1(s), \quad s \in \Omega. \tag{1.5.6}$$

Теорема 1.5.3. *Пусть $\alpha \in (1,2)$, $\varrho > n > d/(4r)$, $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей многочлена $P_n(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $v_k \in D_A$ при $k = 0,1$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R};\mathbb{R})$. Тогда существует такое $t_1 \in (0,T]$, что задача (1.5.2), (1.5.5), (1.5.6) имеет единственное решение на $[t_0,t_1]$.*

Доказательство. Нелинейный оператор $B(t,z) := F(\cdot, z(\cdot))$ не зависит явно от t и в силу условия теоремы $d < 4rn$ $B \in C^\infty(\mathcal{Z}; H^{2rn}(\Omega))$ в силу [88]. Таким образом, по теореме 1.5.1 и теореме 1.4.2 существует единственное локальное решение задачи (1.5.1)–(1.5.3). $\square$

Пусть $n = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $\varrho = 1$, $Q_1(\lambda) = \lambda$, тогда получим уравнение

$$D_t^\alpha v(s,t) = \Lambda v(s,t) + F\left(s, D_t^{\alpha-2} v(s,t)\right). \tag{1.5.7}$$

Если $r = 1$, $\Lambda = \Delta = \sum\limits_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2}$ — оператор Лапласа, $B_1 = I$, то выполнены условия теоремы 1.5.1. В этом случае (1.5.7) является полулинейным уравнением супердиффузии.

1.5.2. Одно полулинейное уравнение в частных производных

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-2} v(s,t_0) = v_0(s), \ \ s \in (0,\pi), \tag{1.5.8}$$

$$D_t^{\alpha-1} v(s,t_0) = v_1(s), \ s \in (0,\pi), \tag{1.5.9}$$

$$\frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(0,t) = \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(\pi,t) = 0, \ l = 0,1,2, \ t > t_0, \tag{1.5.10}$$

$$D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^2 v = \sum_{l=0}^{3} a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}} + b(t)\left(D_t^{\alpha-2} v\right)^\eta \left(D_t^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial s}\right)^\zeta \tag{1.5.11}$$

при $s \in (0,\pi)$, $t > t_0$. Здесь $\alpha \in (0,2)$, $\beta, a_l, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2,3$, $b : [t_0,T] \to \mathbb{R}$ для некоторого $T > t_0$.

Теорема 1.5.4. *Пусть $\beta \neq -k^2$ для любых $k \in \mathbb{N}$, $a_3 > 0$ $\eta, \zeta \geq 1$, $b \in C([t_0,T];\mathbb{R})$ для некоторого $T > t_0$, $v_k \in \{v \in H^6(0,\pi) : v^{(2l)}(0) = v^{(2l)}(\pi) = 0,\ l = 0,1,2\}$, $k = 0,1$. Тогда при $\alpha \in (1,2)$ для некоторого $t_1 \in (t_0,T]$ задача (1.5.8)–(1.5.11) имеет единственное решение на $[t_0,t_1]$.*

Более того, если $\alpha \in (0,1)$ и выполняется неравенство

$$\max_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sum\limits_{l=0}^{3} (-1)^l a_l k^{2l}}{(\beta + k^2)^2} < 1, \tag{1.5.12}$$

то для некоторого $t_1 \in (t_0, T]$ задача (1.5.9)–(1.5.11) с $\eta = 0$ имеет единственное решение на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} := \{z \in H^4(0,\pi) : z^{(2l)}(0) = z^{(2l)}(\pi) = 0,\, l = 0, 1\}$, $\mathcal{Y} = L_2(0,\pi)$,

$$L := \beta^2 - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^4}{\partial s^4} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad M := \sum_{l=0}^{3} a_l \frac{\partial^{2l}}{\partial s^{2l}} : D_M \to \mathcal{Y},$$

$$D_M := \{z \in H^6(0,\pi) : z^{(2l)}(0) = z^{(2l)}(\pi) = 0,\, l = 0, 1, 2\},$$

$$N(t, x_0, x_1) = b(t) x_0^\eta \left(\frac{\partial x_1}{\partial s} \right)^\zeta .$$

Тогда существует непрерывный обратный оператор $L^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, следовательно, задача (1.5.8)–(1.5.11) имеет вид (1.4.1), (1.4.2) при $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A = L^{-1}M$, $D_A = D_M$, $B(t, x_0, x_1) = L^{-1} N(t, x_0, x_1)$.

По теореме 1.5.1 имеем $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Отметим, что существует конечный максимум для (1.5.12), так как $a_3 > 0$.

Для любого $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$ имеем

$$\|L^{-1} N(t, x_0, x_1)\|^2_{H^6(0,\pi)} \leq C_1 \|N(t, x_0, x_1)\|^2_{H^2(0,\pi)} \leq$$
$$\leq C_2 |b(t)|^2 \|x_0\|^{2\zeta}_{W^2_{2q\zeta}(0,\pi)} \|x_1\|^{2\eta}_{W^3_{2q'\eta}(0,\pi)},$$

поскольку по теореме вложения Соболева $H^4(0,\pi) \subset W^2_{2q\zeta}(0,\pi)$, $H^4(0,\pi) \subset W^3_{2q'\eta}(0,\pi)$ для $q > 1$, $q' = \frac{q}{q-1}$. Следовательно, $B(t, x_0, x_1) \in D_A$ для $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$. Более того, $\mathcal{X} \subset C[0,\pi]$, поэтому для любых пар $(x_0, x_1), (u_0, u_1)$ из малой окрестности пары $(y_0, y_1) \in \mathcal{X}^2$

$$\|u_0^\eta u_{1s}^\zeta - x_0^\eta x_{1s}^\zeta\|^2_{H^2(0,\pi)} \leq 2\|u_0^\eta u_{1s}^\zeta - x_0^\eta u_{1s}^\zeta\|^2_{H^2(0,\pi)} + 2\|x_0^\eta u_{1s}^\zeta - x_0^\eta x_{1s}^\zeta\|^2_{H^2(0,\pi)} \leq$$
$$\leq 2\eta \|(\theta u_0 + (1-\theta) x_0)^{\eta-1} u_{1s}^\zeta (u_0 - x_0)\|^2_{H^2(0,\pi)} +$$
$$+ 2\zeta \|x_{k_0}^\eta (\theta u_{1s} + (1-\theta) x_{1s})^{\zeta-1} (u_{1s} - x_{1s})\|^2_{H^2(0,\pi)} \leq$$
$$\leq l \left(\|u_0 - x_0\|^2_{H^4(0,\pi)} + \|u_1 - x_1\|^2_{H^4(0,\pi)} \right),$$

где $\theta \in [0, 1]$. Таким образом, оператор $B : Z = [t_0, T] \times \mathcal{X}^2 \to D_A$ локально липшицев по x_0, x_1. По теореме 1.4.1 получаем требуемое. $\square$

1.5.3. Система уравнений фазового поля

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\beta, \gamma, \delta, \nu \in \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-2}u(s,0) = u_0(s), \quad D_t^{\alpha-2}v(s,0) = v_0(s), \quad s \in \Omega, \tag{1.5.1}$$

$$D_t^{\alpha-1}u(s,0) = u_1(s), \quad D_t^{\alpha-1}v(s,0) = v_1(s), \quad s \in \Omega, \tag{1.5.2}$$

$$(1-\delta)u(s,t) + \delta\frac{\partial u}{\partial n}(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.5.3}$$

$$(1-\delta)v(s,t) + \delta\frac{\partial v}{\partial n}(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.5.4}$$

для системы уравнений

$$D_t^{\alpha}u(s,t) = \Delta u(s,t) - \Delta v(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1.5.5}$$

$$D_t^{\alpha}v(s,t) = \nu\Delta v(s,t) + \beta u(s,t) + \gamma v(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1.5.6}$$

при $\alpha = 1$ с точностью до линейной замены неизвестных функций $u(s,t) = \widetilde{u}(s,t) + \frac{l}{2}\widetilde{v}(s,t)$, $v(s,t) = \frac{l}{2}\widetilde{v}(s,t)$, $l \in \mathbb{R}$, и растяжения по временно́й переменной совпадающей с линеаризацией системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [77, 78].

Положим $\mathcal{Z} = (L_2(\Omega))^2$,

$$A = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \beta I & \gamma I + \nu\Delta \end{pmatrix}, \quad D_A = (H_\delta^2(\Omega))^2,$$

$$H_\delta^2(\Omega) := \left\{ z \in H^2(\Omega) : \left(\delta\frac{\partial}{\partial n} + (1-\delta)\right) z(s) = 0,\ s \in \partial\Omega \right\}.$$

Таким образом, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$.

Обозначим $\Lambda_1 z = \Delta z$, $D_{\Lambda_1} = H_\delta^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора Λ_1, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема 1.5.5. *Пусть* $\alpha \in [1,2)$, $\nu > 0$, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, *тогда существуют такие* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, *что* $A \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$. *При* $\alpha \in (0,1)$, $\nu > 0$ *это утверждение справедливо, если выполняются дополнительные условия* $\beta > 0$ *и*

$$\max_{k\in\mathbb{N}}(\lambda_k(1+\nu)+\gamma \pm \sqrt{(\gamma+\lambda_k(\nu-1))^2-4\beta\lambda_k}) < 2. \tag{1.5.7}$$

В обоих случаях

$$\sigma(A) = \{\mu \in \mathbb{C}: \ \mu = \frac{1}{2}(\lambda_k(1+\nu)+\gamma \pm \sqrt{(\gamma+\lambda_k(\nu-1))^2-4\beta\lambda_k})\}.$$

Доказательство. Используя разложение по базису $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и обозначение $\mu_k^\pm := \frac{1}{2}(\lambda_k(1+\nu)+\gamma \pm \sqrt{(\gamma+\lambda_k(\nu-1))^2-4\beta\lambda_k})$, получим при $\mu^\alpha \neq \mu_k^\pm$, $k \in \mathbb{N}$, операторы

$$\mu^\alpha I - A = \begin{pmatrix} \mu^\alpha I - \Delta & \Delta \\ -\beta I & (\mu^\alpha - \gamma)I - \nu\Delta \end{pmatrix},$$

$$(\mu^\alpha I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mu^\alpha - \gamma - \nu\lambda_k & -\lambda_k \\ \beta & \mu^\alpha - \lambda_k \end{pmatrix} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\mu^\alpha - \mu_k^+)(\mu^\alpha - \mu_k^-)},$$

При $\nu > 0$ $\lim\limits_{k\to\infty} \arg \mu_k^\pm = \pi$, поэтому существует $\mu_0 = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}\mu_k^\pm$. Таким образом, при заданном $\alpha \in [1,2)$ можно выбрать достаточно большое $a_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$, достаточно близкое к $\pi/2$, чтобы при малом $\varepsilon > 0$ и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнялось условие

$$\mu_k^\pm \notin \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \mu^\alpha, \, |\arg(\mu - a_1)| < \theta_1 + \varepsilon, \mu \neq a_1\},$$

а при достаточно больших k $|\arg \mu_k^\pm| > \theta_1 + \varepsilon$. Тогда для $\mu \in S_{\theta_1, a_1}$ и k, бóльших некоторого N, имеем

$$\left|\frac{\mu^\alpha - \beta - \nu\lambda_k}{\mu^\alpha - \mu_k^+}\right| \leq 1 + \frac{1 + \left|\frac{\beta+\nu\lambda_k}{\mu_k^+}\right|}{\left|\frac{\mu^\alpha}{\mu_k^+} - 1\right|} \leq 1 + \frac{C}{\sin\varepsilon}.$$

Аналогичным образом оцениваем величины

$$\left|\frac{\lambda_k}{\mu^\alpha - \mu_k^+}\right|, \quad \left|\frac{\beta}{\mu^\alpha - \mu_k^+}\right|, \quad \left|\frac{\mu^\alpha - \lambda_k}{\mu^\alpha - \mu_k^+}\right|.$$

Поэтому для всех $\mu \in S_{\theta_1,a_1}$, $z \in (L_2(\Omega))^2$

$$\|R_{\mu^\alpha}(A)z\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C_1^2 \sin^{-2}\varepsilon}{|\mu^\alpha - a|},$$

где

$$C_1^2 = 4\left(1 + \frac{C}{\sin\varepsilon}\right)^2 +$$

$$+4 \sup_{k=1,2,\dots,N} \sup_{\mu \in S_{\theta_1,a_1}} \left\{ \left|\frac{\mu^\alpha - \beta - \nu\lambda_k}{\mu^\alpha - \mu_k^+}\right|^2, \left|\frac{\lambda_k}{\mu^\alpha - \mu_k^+}\right|^2, \left|\frac{\beta}{\mu^\alpha - \mu_k^+}\right|^2, \left|\frac{\mu^\alpha - \lambda_k}{\mu^\alpha - \mu_k^+}\right|^2 \right\}.$$

В силу леммы 1.5.1 получаем требуемое при $\alpha \in [1,2)$. При $\alpha \in (0,1)$ лемму 1.5.2 можно применить, если выполняются дополнительные условия $\beta > 0$ и (1.5.7). В таком случае мы можем в проведенных выше рассуждениях выбрать $a_1 < 1$. $\square$

Замечание 1.5.2. Если при некотором $j \in \mathbb{N}$ выбрать $\mathcal{Z} = (H^j(\Omega))^2$, взять оператор A того же вида с областью определения $D_A = (H_\delta^{2+j}(\Omega))^2$, где $H_\delta^{2+j}(\Omega) := \left\{z \in H^{2+j}(\Omega) : \left(\delta\frac{\partial}{\partial n} + (1-\delta)\right) z(s) = 0,\ s \in \partial\Omega\right\}$, то таким же образом можно доказать утверждение, аналогичное утверждению теоремы 1.5.5.

По теореме 1.3.2 с учетом теоремы 1.5.5 получаем следующие два утверждения.

Следствие 1.5.1. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $\nu > 0$, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. *Тогда для любых* $u_0, u_1, v_0, v_1 \in H_\delta^2(\Omega)$ *существует единственное решение задачи* (1.5.1)–(1.5.6).

Следствие 1.5.2. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\nu, \beta > 0$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, *выполняется условие* (1.5.7). *Тогда для любых* $u_1, v_1 \in H_\delta^2(\Omega)$ *существует единственное решение задачи* (1.5.2)–(1.5.6).

При $\alpha \in (1,2)$ рассмотрим саму нелинейную систему уравнений фазового поля

$$D_t^\alpha u(s,t) = \Delta u(s,t) - \Delta v(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1.5.8}$$

$$D_t^\alpha v(s,t) = \nu\Delta v(s,t)+\beta u(s,t)+\gamma v(s,t)-\kappa v^3 = 0, \quad (s,t)\in\Omega\times(0,T). \quad (1.5.9)$$

Здесь $\kappa\in\mathbb{R}$.

Теорема 1.5.6. *Пусть* $\alpha\in(1,2)$, $\nu>0$, $\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $\kappa\in\mathbb{C}$, $j\in\mathbb{N}$, $j>d/2$. *Тогда для любых* $u_0,u_1,v_0,v_1\in H_\delta^{2+j}(\Omega)$ *существует единственное решение задачи* (1.5.1)–(1.5.4), (1.5.8), (1.5.9).

Доказательство. При $j\in\mathbb{N}$, $j>d/2$ выберем пространство $\mathcal{Z}=(H^j(\Omega))^2$, оператор A прежнего вида с областью определения $D_A=(H_\delta^{2+j}(\Omega))^2$, где $H_\delta^{2+j}(\Omega) := \left\{z\in H^{2+j}(\Omega) : \left(\delta\frac{\partial}{\partial n}+(1-\delta)\right)z(s)=0,\ s\in\partial\Omega\right\}$, тогда в силу теоремы вложения Соболева $\mathcal{Z}\subset(C(\overline{\Omega}))^2$. В таком случае нелинейный оператор $N(v)=-\kappa v^3$ действует из $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{Z}$ и является локально липшицевым. С помощью теорем 1.4.2, 1.5.5 и замечания 1.5.2 получаем требуемое. □

1.5.4. Линеаризованная система уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времени

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k}v(s,0)=z_k(s), \quad s\in\Omega, \quad k=0,1,\dots,m-1, \quad (1.5.10)$$

$$v(s,t)=0, \quad (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \quad (1.5.11)$$

$$D_t^\alpha v(s,t)=\nu\Delta v(s,t)-r(s,t)+g(s,t), \quad (s,t)\in\Omega\times(0,T), \quad (1.5.12)$$

$$\nabla\cdot v(s,t)=0, \quad (s,t)\in\Omega\times(0,T). \quad (1.5.13)$$

Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu>0$. Неизвестны вектор-функции скорости $v=(v_1,v_2,\dots,v_d)$ и градиента давления $r=(r_1,r_2,\dots,r_d)=\nabla p$, вектор функция g задана.

Замечание 1.5.3. При $\alpha=1$ система уравнений (1.5.12), (1.5.13) является линеаризованной системой уравнений Навье — Стокса.

Пусть $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 := (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 := (W_2^2(\Omega))^n$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} := \{v\in(C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla\cdot v=0\}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме $\mathbb{H}^1$ — символом $\mathbb{H}^1_\sigma$. Также будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{H}^2_\sigma = \mathbb{H}^1_\sigma \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Оператор $B := \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}^2_\sigma$, имеет действительный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [25]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения этого оператора, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Ортонормированная система соответствующих собственных функций $\{\varphi_k\}$ образует базис в $\mathbb{H}_\sigma$ [25].

Учитывая уравнение несжимаемости (1.5.13), имеем $v(\cdot, t) \in \mathbb{H}_\sigma$ при фиксированных t, при этом $r(\cdot, t) \in \mathbb{H}_\pi$ в силу свойств этого подпространства. Подействуем поочередно на уравнение (1.5.12) проекторами Σ и Π и получим два уравнения

$$D^\alpha_t v(s, t) = \nu B v(s, t) + \Sigma g(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{1.5.14}$$

$$r(s, t) = \nu \Pi \Delta v(s, t) + \Pi g(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{1.5.15}$$

на подпространствах $\mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi$ соответственно. Отсюда видно, что для нахождения пары (v, r) достаточно найти v из уравнения (1.5.14), которое имеет вид (1.3.9) при $\mathcal{Z} = \mathbb{H}_\sigma$, $A = \nu B$, $f(t) = \Sigma g(\cdot, t)$, $z(t) = v(\cdot, t)$.

Лемма 1.5.3. *Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $\nu > 0$, $\mathcal{Z} = \mathbb{H}_\sigma$. Тогда $\nu B \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$.*

Доказательство. Возьмем $\alpha \in [1, 2)$, $\delta \in (0, \pi(1/\alpha - 1/2))$, $\theta_1 = \pi/2 + \delta$, $a_1 = 0$. Тогда $(\mu^\alpha I - \nu B)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$ при всех $\mu \in S_{0,\theta_1}$, так как $|\arg \mu^\alpha| \in (\pi/2, \pi)$ и спектр оператора νB действителен и отрицателен. Следовательно, для $\mu \in S_{0,\theta_1}$, $z \in \mathbb{H}_\sigma$

$$\|(\mu^\alpha I - \nu B)^{-1} z\|^2_{\mathbb{H}_\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle z, \varphi \rangle|^2}{|\mu^\alpha - \nu\lambda_k|^2} \leq \frac{\|z\|^2_{\mathbb{H}_\sigma}}{\sin^2 \theta_1 |\mu^\alpha|^2},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}_\sigma$. Таким образом, $\nu B \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $a_0 > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$ согласно лемме 1.5.1.

При $\alpha \in (0,1)$ предыдущие рассуждения справедливы при любом $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$ и поэтому $\nu B \in \mathcal{A}_\alpha(0, \theta_0)$ с некоторым $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ в силу леммы 1.5.2. $\square$

Теорема 1.5.7. *Пусть* $\alpha \in (0,2)$, $\nu > 0$, $z_k \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $\Sigma f \in C([0,T]; \mathbb{H}^2_\sigma) \cup C^\gamma([0,T]; \mathbb{L}_2)$, $\gamma \in [0,1)$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1.5.10)–(1.5.13).

Доказательство. Заметим, что $D_A = \mathbb{H}^2_\sigma$ в данном случае. В силу леммы 1.5.3 и теорем 1.3.3 и 1.3.4 получим требуемое. $\square$

Замечание 1.5.4. В данном случае решение

$$v \in C((0,T); \mathbb{H}^2_\sigma) \cap C^{m-1}([0,T]; \mathbb{H}_\sigma)$$

удовлетворяет условию $D^\alpha_t v \in C((0,T); \mathbb{H}_\sigma)$. Гладкость же решения r определяется гладкостью функции Πg и равенством (1.5.15).

2. Уравнения, не разрешимые относительно дробной производной Римана — Лиувилля

2.1. Введение

В главе исследуется однозначная разрешимость начальных задач для линейного неоднородного уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + g(t), \tag{2.1.16}$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, а также вопросы существования единственного локального решения таких задач для полулинейного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-1}x(t)). \tag{2.1.17}$$

Решение, как и в первой главе, понимается в классическом смысле, операторы L, M предполагаются линейными, замкнутыми, плотно определенными в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, действующими в банахово пространство $\mathcal{Y}$, вообще говоря, неограниченными. При этом предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, это условие вырожденности рассматриваемых уравнений.

Предполагается принадлежность пары операторов (L, M) классу пар $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$. Ранее в работах В. Е. Федорова, Е. А. Романовой, А. Дебуша [43, 69, 70] показано, что в случае $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ существует аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов уравнения $D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t)$, при этом имеют место представления пространств $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$ и расщепления действия операторов L и M в соответствии с этими представлениями. Другими словами, операторы из подпространства $\mathcal{X}^k$ действуют в подпространство $\mathcal{Y}^k$, $k = 0, 1$. При этом $L_0 = 0$, существует обратный непрерывный оператор M_0^{-1} и обратный замкнутый плотно определенный в $\mathcal{Y}^1$ оператор L_1^{-1}, где $L_k = L|_{D_L \cap \mathcal{X}^k}$, $M_k = L|_{D_M \cap \mathcal{X}^k}$, $k = 0, 1$. Важным при этом является включение $L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, которое позволяет свести рассматриваемые в данной главе уравнения к системе разрешенного относительно дробной производной уравнения из предыдущей главы и уравнения $(I-P)x(t) = -M_0^{-1}g(t)$ или

$$(I-P)x(t) = -M_0^{-1}N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-1}x(t)).$$

Это дает возможность при получении результатов данной главы существенным образом использовать результаты главы 1. Здесь и далее P — проектор вдоль $\mathcal{X}^0$, Q — проектор вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$.

Помимо задачи типа Коши, которая имеет недостаток в виде необходимых условий согласования правой части уравнения и начальных данных на подпространстве $\mathcal{X}^0$, рассматривается задача типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k}Lx(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

или обобщенная задача типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k}Px(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

которые эквивалентны между собой в условиях данной работы. Эти две задачи уже не требуют согласования данных и поэтому являются естественными для вырожденных уравнений, рассматриваемых во второй главе. Отметим, что все три названные задачи имеют решения одного и того же вида, отличие лишь в необходимости дополнительных условий для существования решения задачи типа Коши.

В случае $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ также построена система аналитических в секторе семейств операторов на пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, в данном случае вырождающихся на подпространстве $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{Y}^0$ соответственно. С их помощью представлены решения задачи типа Коши или задачи Шоуолтера — Сидорова линейного неоднородного уравнения (2.1.16).

При исследовании полулинейных уравнений (2.1.17) помимо условий из главы 1 используется либо условие принадлежности образа нелинейного оператора N подпространству $\mathcal{Y}^1$, в этом случае в правой части уравнения добавляется функция $f(t)$, лишенная этого ограничения, либо условие независимости нелинейного оператора от элементов подпространства $\mathcal{X}^0$. В последнем случае рассматривается только случай локально гельдерового по t нелинейного оператора N, поэтому N не зависит от старшей проиизводной порядка $\alpha - 1$ (см. введение к главе 1).

Результаты главы для уравнений в банаховых пространствах применяются для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешимых относительно производной Римана — Лиувилля по времени. Как и в первой главе, рассматривается класс начально-краевых задач для линейного уравнения с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора, но при условии обращения в нуль многочлена при дробной производной на спектре эллиптического оператора. Доказаны существование и единственность решения для линейных и некоторых полулинейных уравнений данного класса. Также изучены вопросы однозначной разрешимости начально-краевых задач для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля дробного порядка по времени. Кроме того, в рамках вырожденного эволюционного уравнения рассмотрена линеаризованная система уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времено́й переменной.

2.2. Вырожденное линейное уравнение

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, через $D_L, D_M \subset \mathcal{X}$ будем обозначать область определения оператора $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ соответственно.

Обозначим $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) := L(\mu L - M)^{-1}$. Через $\rho^L(M)$ обозначим множество таких $\mu \in \mathbb{C}$, что отображение

$$\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathcal{Y}$$

инъективно и при этом $R^L_\mu(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L^L_\mu(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

2.2.1. Линейное однородное уравнение

При $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2.1}$$

Предполагается, что выполняется условие $\ker L \neq \{0\}$, поэтому (2.2.1) будем называть вырожденным эволюционным уравнением.

Функция $x : \mathbb{R}_+ \to D_M \cap D_L$ называется решением уравнения (2.2.1), если $J_t^{m-\alpha} Lx \in C^m(\mathbb{R}_+;\mathcal{Y})$, $Mx \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Y})$ и выполняется (2.2.1).

Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.2.2}$$

для уравнения (2.2.1) называется такое решение уравнения (2.2.1), для которого $J_t^{m-\alpha} x \in C^{m-1}([0,T);\mathcal{X})$ и выполняются равенства (2.2.2).

Определение 2.2.1. [70]. Пусть $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Будем говорить, что $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

(i) существуют $a_0 \geq 0$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, такие, что для всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K = K(\theta, a) > 0$, что для всех $\mu \in S_{\theta,a}$

$$\max\{\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\mu^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|}.$$

Замечание 2.2.1. Если существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, то $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда $L^{-1}M \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Замечание 2.2.2. Если $(L, M) \in \mathcal{H}_1(\theta_0, a_0)$, то в [122] оператор M называется $(L, 0)$-секториальным. По этой причине пара операторов из $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при произвольном $\alpha > 0$ для краткости иногда также будет называться секториальной, если из контекста ясно, о чем идет речь.

Так же, как в лемме 1.3.1, но с использованием определения 2.2.1 зададим контур $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$ с $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

Лемма 2.2.1. *Пусть* $\alpha > 0$, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ X_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : \, t \in \mathbb{R}_+ \right\},$$

$$\left\{ Y_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} L^L_{\mu^\alpha}(M) e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}) : \, t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Тогда X_β, Y_β *допускают аналитическое продолжение в сектор* Σ_{θ_0} *и при любых* $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ *существует такое* $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, *что для всех* $\tau \in \Sigma_{\theta - \pi/2}$

$$\|X_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \le C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}\tau} (|\tau|^{-1} + a)^\beta, \quad \beta \ge 0,$$

$$\|X_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \le C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}\tau} |\tau|^{-\beta}, \quad \beta < 0,$$

$$\|Y_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})} \le C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}\tau} (|\tau|^{-1} + a)^\beta, \quad \beta \ge 0,$$

$$\|Y_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})} \le C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re}\tau} |\tau|^{-\beta}, \quad \beta < 0.$$

При этом

$$\frac{d^k}{dt^k} X_\beta = X_{\beta+k}, \quad \frac{d^k}{dt^k} Y_\beta = Y_{\beta+k}, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{t \to 0+} X_\beta(t) = 0, \quad \lim_{t \to 0+} Y_\beta(t) = 0 \quad \textit{при } \beta < 0.$$

Понятно, что доказательство этой леммы абсолютно аналогично доказательству леммы 1.3.1.

Подпространства $\ker R^L_\mu(M) = \ker L$, $\mathrm{im} R^L_\mu(M)$, $\ker L^L_\mu(M)$, $\mathrm{im} L^L_\mu(M)$ не зависят от параметра $\mu \in \rho^L(M)$. Введем обозначения $\ker R^L_\mu(M) = \mathcal{X}^0$, $\ker L^L_\mu(M) = \mathcal{Y}^0$. Через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im} R^L_\mu(M)$ ($\mathrm{im} L^L_\mu(M)$) в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$). Через L_k (M_k) будет обозначаться сужение оператора L (M) на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{Y}^k$), $k = 0, 1$.

Сформулируем некоторые свойства пар операторов из класса $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ в случае рефлексивных банаховых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, доказанные в [70].

Теорема 2.2.1. [70]. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, пара операторов $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) *проектор P (Q) на подпространство $\mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y}^1)$ вдоль подпространства $\mathcal{X}^0$ $(\mathcal{Y}^0)$ имеет вид $P = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nR_n^L(M)$ $(Q = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nL_n^L(M))$;*

(iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;

(iv) *существуют обратные операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$;*

(v) *при всех $t > 0$*

$$X_\beta(t) = X_\beta^1(t)P, \quad \mathcal{X}^0 \subset \ker X_\beta(t), \quad \mathrm{im} X_\beta(t) \subset \mathcal{X}^1,$$

$$Y_\beta(t) = Y_\beta^1(t)Q, \quad \mathcal{Y}^0 \subset \ker Y_\beta(t), \quad \mathrm{im} Y_\beta(t) \subset \mathcal{Y}^1,$$

где $X_\beta^1(t) = X_\beta(t)|_{\mathcal{X}^1}$, $Y_\beta^1(t) = Y_\beta(t)|_{\mathcal{Y}^1}$;

(vi) $\forall x \in D_L$ $Px \in D_L$ *и* $LPx = QLx$;

(vii) $\forall x \in D_M$ $Px \in D_M$ *и* $MPx = QMx$;

(viii) *D_S плотно в $\mathcal{X}$ и D_U плотно в $\mathcal{Y}$;*

(ix) *если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то $S \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$, более того $S \in A_\alpha(\theta_0, a_0)$;*

(x) *если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, то $U \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1)$, более того $U \in A_\alpha(\theta_0, a_0)$.*

Здесь также использованы обозначения $S = L_1^{-1}M_1 : D_S \to \mathcal{X}^1$, $D_S = \{x \in D_{M_1} : M_1 x \in \mathrm{im} L_1\}$; $U = M_1 L_1^{-1} : D_U \to \mathcal{Y}^1$, $D_U = \{y \in \mathrm{im} L_1 : L_1^{-1} y \in D_{M_1}\}$.

Замечание 2.2.3. Подпространства $\mathcal{X}^0$, $\mathcal{Y}^0$ будем называть подпространствами вырождения в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно.

Теорема 2.2.2. [70]. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $\alpha \in (0, 2)$, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$.*

(i) *Если* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, *то* $S \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ *и семейство операторов* $\{X^1_\alpha(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ *является разрешающим для уравнения* $D^\alpha_t x(t) = Sx(t)$.

(ii) *Если* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, *то* $U \in \mathcal{A}^\alpha(\theta_0, a_0)$ *и семейство операторов* $\{Y^1_\alpha(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ *является разрешающим для уравнения* $D^\alpha_t y(t) = Uy(t)$.

Теорема 2.2.3. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $\alpha \in (0,2)$, $(L,M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $x_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.1), (2.2.2), *при этом оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t)x_k. \tag{2.2.3}$$

Доказательство. Положим $x^0(t) := (I-P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$. В силу теоремы 2.2.1 уравнение (2.2.1) может быть редуцировано к системе двух уравнений:

$$0 = x^0(t),$$
$$D^\alpha_t x^1(t) = Sx^1(t). \tag{2.2.4}$$

В силу первого из уравнений x_k должны принадлежать подпространству $\mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, то по теореме 2.2.1 (ix) $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому по теореме 1.3.2 существует единственное решение задачи типа Коши $D^{\alpha-m+k}_t x^1(0) = x_k \in D_S$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, для уравнения (2.2.4), и оно имеет вид

$$x^1(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)x_k,$$

где в силу теоремы 2.2.1 (ix)

$$Z_{m-\alpha-k}(t)x_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1-k}R_{\mu^\alpha}(S)e^{\mu t}x_k d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mu^{m-1-k} R^{L_1}_{\mu^\alpha}(M_1) e^{\mu t} x_k d\mu = X^1_{m-\alpha-k}(t)x_k = X_{m-\alpha-k}(t)x_k.$$

При этом использовано равенство $R_{\mu^\alpha}(S) = R^{L_1}_{\mu^\alpha}(M_1)$. □

Теорема 2.2.4. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $x_k \in D_{L_1} \cap D_{M_1}$. Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.1), (2.2.2), *при этом оно имеет вид* (2.2.3).

Доказательство. В этом случае вместо уравнения (2.2.4) получим уравнение

$$D^\alpha_t y^1(t) = Uy^1(t), \tag{2.2.5}$$

где $y^1(t) = L_1 x^1(t)$, $U = M_1 L_1^{-1}$. По теореме 2.2.1 (x) если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, то $U \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому существует единственное решение задачи типа Коши $D^{\alpha-m+k}_t y^1(0) = L_1 x_k \in D_T$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, для уравнения (2.2.5). Ее решение имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t) L_1 x_k = L_1 \sum_{k=0}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t) x_k,$$

где

$$Z_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(U) e^{\mu t} d\mu = Y^1_\beta(t) = L_1 X^1_\beta(t) L_1^{-1}.$$

Здесь использованы очевидные равенства

$$R_{\mu^\alpha}(U) = L^{L_1}_{\mu^\alpha}(M_1) = L_1 R^{L_1}_{\mu^\alpha}(M_1) L_1^{-1},$$

замкнутость оператора L_1 и теорема 2.2.1 (v). □

2.2.2. Линейное неоднородное уравнение

Пусть $T \in (0, \infty]$. Рассмотрим уравнение

$$D^\alpha_t Lx(t) = Mx(t) + g(t), \quad t \in (0, T). \tag{2.2.6}$$

Функция $x:(0,T)\to D_M\cap D_L$ называется решением уравнения (2.2.6), если $J_t^{m-\alpha}Lx\in C^m((0,T);\mathcal{Y})$, $Mx\in C((0,T);\mathcal{Y})$ и выполняется (2.2.6).

Решением задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}x(0)=x_k,\quad k=0,1,\dots,m-1, \tag{2.2.7}$$

для уравнения (2.2.6) называется такое решение уравнения (2.2.6), для которого $J_t^{m-\alpha}x\in C^{m-1}([0,T);\mathcal{X})$ и выполняются равенства (2.2.7).

Теорема 2.2.5. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $g\in C((0,T);\mathcal{Y})$, $L_1^{-1}Qg\in C\big([0,T);D_{L_1^{-1}M_1}\big)$, $J_t^{m-\alpha}(I-Q)g\in C^{m-1}([0,T);\mathcal{Y})$, $x_k\in\mathcal{X}$, $Px_k\in D_{L_1^{-1}M_1}$,*

$$D_t^{\alpha-m+k}M_0^{-1}(I-Q)g(0)=-(I-P)x_k,\quad k=0,1,\dots,m-1. \tag{2.2.8}$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.2.6), (2.2.7), *при этом оно имеет вид*

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m-1}X_{m-\alpha-k}(t)x_k+\int_0^t X_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qg(s)ds-M_0^{-1}(I-Q)g(t). \tag{2.2.9}$$

Доказательство. Положим $x^0(t):=(I-P)x(t)$, $x^1(t):=Px(t)$. В силу теоремы 2.2.1 уравнение (2.2.6) может быть редуцировано к системе двух уравнений:

$$0=x^0(t)+M_0^{-1}(I-Q)g(t), \tag{2.2.10}$$

$$D_t^\alpha x^1(t)=Sx^1(t)+L_1^{-1}Qg(t) \tag{2.2.11}$$

при $S=L_1^{-1}M_1$. В силу уравнения (2.2.10) условия (2.2.8) согласования начальных значений $(I-P)x_k$, $k=0,1,\dots,m-1$, со значениями дробных производных в нуле от $M_0^{-1}(I-Q)g(t)$ необходимы для разрешимости задачи (2.2.6), (2.2.7). Если $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, то по теореме

2.2.1 (ix) $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому по теореме 1.3.3 существует единственное решение задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m+k}x^1(0) = Px_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (2.2.11), при этом оно имеет вид

$$x^1(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)Px_k + \int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qg(s)ds,$$

где в силу теоремы 2.2.1 (v)

$$Z_{m-\alpha-k}(t)Px_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1-k}R_{\mu^\alpha}(S)e^{\mu t}Px_k d\mu =$$

$$= X^1_{m-\alpha-k}(t)Px_k = X_{m-\alpha-k}(t)x_k,$$

$$Z_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qg(s) = X^1_{1-\alpha}(t-s)PL_1^{-1}Qg(s) = X_{1-\alpha}(t-s)L_1^{-1}Qg(s).$$

При этом использовано равенство $R_{\mu^\alpha}(S) = R^{L_1}_{\mu^\alpha}(M_1)$. □

Теорема 2.2.6. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $g \in C((0, T); \mathcal{Y})$, $Qg \in C\big([0, T); D_{M_1L_1^{-1}}\big)$, $J_t^{m-\alpha}(I-Q)g \in C^{m-1}([0, T); \mathcal{Y})$, $Px_k \in D_{L_1} \cap D_{M_1}$, *справедливы равенства* (2.2.8). *Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.6), (2.2.7), *при этом оно имеет вид* (2.2.9).

Доказательство. В этом случае вместо уравнения (2.2.11) получим уравнение

$$D_t^\alpha y^1(t) = Uy^1(t) + Qg(t), \tag{2.2.12}$$

где $y^1(t) = L_1x^1(t)$, $U = L_1^{-1}M_1$. По теореме 2.2.1 (x) если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, то $U \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому по теореме 1.3.3 существует единственное решение задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m+k}y^1(0) = L_1Px_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (2.2.12) . Ее решение имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t)L_1Px_k + \int\limits_0^t Z_{1-\alpha}(t-s)Qg(s)ds =$$

$$= L_1 \sum_{k=0}^{m-1} X_{m-\alpha-k}(t) x_k + L_1 \int\limits_0^t X_{1-\alpha}(t-s) L_1^{-1} Qg(s) ds,$$

где

$$Z_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(U) e^{\mu t} d\mu = Y_\beta^1(t) = L_1 X_\beta^1(t) L_1^{-1}.$$

Здесь использованы равенства

$$R_{\mu^\alpha}(U) = L_{\mu^\alpha}^{L_1}(M_1) = L_1 R_{\mu^\alpha}^{L_1}(M_1) L_1^{-1},$$

замкнутость оператора L_1 и теорема 2.2.1 (v). В итоге получим, что $x(t) = x^1(t) - M_0^{-1}(I-Q)g(t) = L_1^{-1}y(t) - M_0^{-1}(I-Q)g(t)$ имеет вид (2.2.9). $\square$

Совершенно аналогично, но с использованием теоремы 1.3.4 вместо теоремы 1.3.3 можно получить следующие два утверждения.

Теорема 2.2.7. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $g \in C((0,T); \mathcal{Y})$, $L_1^{-1}Qg \in C^\gamma\big([0,T); \mathcal{X}\big)$, $\gamma \in (0,1]$, $J_t^{m-\alpha}(I-Q)g \in C^{m-1}([0,T); \mathcal{Y})$, $x_k \in \mathcal{X}$, $Px_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, выполняется условие (2.2.8). Тогда существует единственное решение задачи (2.2.6), (2.2.7), при этом оно имеет вид (2.2.9).*

Теорема 2.2.8. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $g \in C((0,T); \mathcal{Y})$, $Qg \in C^\gamma\big([0,T); \mathcal{Y}\big)$, $\gamma \in (0,1]$, $J_t^{m-\alpha}(I-Q)g \in C^{m-1}([0,T); \mathcal{Y})$, $Px_k \in D_{L_1} \cap D_{M_1}$, справедливы равенства (2.2.8). Тогда существует единственное решение задачи (2.2.6), (2.2.7), при этом оно имеет вид (2.2.9).*

Рассмотрим обобщенную задачу типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k} Px(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.2.13}$$

Решением задачи (2.2.13) для уравнения (2.2.6) называется решение уравнения (2.2.6), для которого $J_t^{m-\alpha}Px \in C^{m-1}([0,T); \mathcal{X})$ и выполняются равенства (2.2.13).

При рассмотрении обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова в условиях теорем 2.2.5, 2.2.7 (или теорем 2.2.6, 2.2.8) для системы (2.2.10), (2.2.11) (или (2.2.10), (2.2.12)) имеем начальные условия только для уравнения (2.2.11) (или (2.2.12)). Уравнение (2.2.10) при этом не снабжено начальными условиями, но, очевидно, однозначно разрешимо. Отсюда сразу получим следующие два утверждения о разрешимости обобщенной задачи (2.2.6), (2.2.13), аналогичные теоремам 2.2.5–2.2.8 о задаче типа Коши, но в силу сказанного выше не содержащие условий согласования начальных данных и правой части уравнения и вообще дополнительных условий на гладкость функции $(I-Q)g$.

Теорема 2.2.9. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $g\in C((0,T);\mathcal{Y})$, $L_1^{-1}Qg\in C\big([0,T);D_{L_1^{-1}M_1}\big)$, $x_k\in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k=0,1,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.6), (2.2.13), *при этом оно имеет вид* (2.2.9).

Теорема 2.2.10. *Пусть* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, $g\in C((0,T);\mathcal{Y})$, $Qg\in C\big([0,T);D_{M_1L_1^{-1}}\big)$, $x_k\in D_{L_1}\cap D_{M_1}$, $k=0,1,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.6), (2.2.13), *при этом оно имеет вид* (2.2.9).

Теорема 2.2.11. *Пусть* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ *или* $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $g\in C((0,T);\mathcal{Y})$, $L_1^{-1}Qg\in C^\gamma\big([0,T);\mathcal{X}\big)$, $\gamma\in(0,1]$, $x_k\in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k=0,1,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.6), (2.2.13), *при этом оно имеет вид* (2.2.9).

Теорема 2.2.12. *Пусть* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$ *или* $M_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, $g\in C((0,T);\mathcal{Y})$, $Qg\in C^\gamma\big([0,T);\mathcal{Y}\big)$, $\gamma\in(0,1]$, $x_k\in D_{L_1}\cap D_{M_1}$, $k=0,1,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.2.6), (2.2.13), *при этом оно имеет вид* (2.2.9).

Замечание 2.2.4. Можно заметить, что если $L_1:\mathcal{X}^1\to\mathcal{Y}^1$ — линейный гомеоморфизм, то теорема 2.2.7 эквивалента теореме 2.2.8, теорема 2.2.9 — теореме 2.2.10, а теорема 2.2.11 эквивалентна тереме 2.2.12.

Замечание 2.2.5. Обобщенная задача типа Шоуолтера — Сидорова (2.2.13) при $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, эквивалентна задаче типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k} Lx(0) = Lx_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2.2.14}$$

в условиях теорем 2.2.9, 2.2.10. Действительно, справедливость условий (2.2.14) следует из выполнения условий (2.2.13), так как $L_0 = 0$ и поэтому $Lx = LPx$ при всех $x \in \mathcal{X}$. Обратное верно, поскольку $Lx \in \mathcal{Y}^1$, $L_1^{-1}Lx = L_1^{-1}L_1Px = Px$ при $x \in \mathcal{X}$.

2.3. Вырожденное полулинейное уравнение с ограничением на образ нелинейного оператора

В этом разделе будем рассматривать дробные интегралы и дробные производные Римана — Лиувилля с началом в точке $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$J_t^\alpha f(t) := \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds, \quad D_t^\alpha f(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t), \quad t > t_0,$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$.

2.3.1. Уравнение с нелинейностью, непрерывной в норме графика

Пусть $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^m$, $N : X \to \mathcal{Y}$, $f : [t_0, T) \to \mathcal{Y}$, рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \dots, D_t^{\alpha-1}x(t)) + f(t). \tag{2.3.1}$$

Функция $x : (t_0, t_1] \to D_M \cap D_L$ называется решением уравнения (2.3.1) на отрезке $[t_0, t_1]$, если $J_t^{m-\alpha} Lx \in C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, $Mx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, для всех $t \in (t_0, t_1]$ $(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \dots, D_t^{\alpha-1}x(t)) \in X$ и равенство (2.3.1) верно.

Решение задачи типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k}Lx(t_0)=y_k,\quad k=0,1,\dots,m-1,\tag{2.3.2}$$

для уравнения (2.3.1) называется решение уравнения (2.3.1), такое что $J_t^{m-\alpha}Lx\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{X})$ и выполнено (2.3.2).

Для $(t,z_0,z_1,\dots,z_{m-1})\in X$ фазовыми переменными будем называть совокупность $\overline{z}=(z_0,z_1,\dots,z_{m-1})$.

Теорема 2.3.1. *Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, X — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^m$, $N:X\to\mathcal{Y}^1$, отображение $L_1^{-1}N\in C\big(X;D_{L_1^{-1}M_1}\big)$ локально липшицево по фазовым переменным $\overline{z}=(z_0,z_1,\dots,z_{m-1})$, $f\in C([t_0,T);\mathcal{Y})$ при некотором $T>t_0$, $L_1^{-1}Qf\in C([t_0,T);D_{L_1^{-1}M_1})$, $J_t^{m-\alpha}M_0^{-1}(I-Q)f\in C^{m-1}([t_0,T);D_{L_1^{-1}M_1})$, $y_k\in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$, $k=0,1,\dots,m-1$,*

$$(t_0,L_1^{-1}y_0-D_t^{\alpha-m}M_0^{-1}(I-Q)f(t_0),\dots,L_1^{-1}y_{m-2}-D_t^{\alpha-2}M_0^{-1}(I-Q)f(t_0))\in X.$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.3.1), (2.3.2) *на отрезке* $[t_0,t_1]$ *при некотором* $t_1\in(t_0,T)$.

Доказательство. Положим $x^0(t):=(I-P)x(t)$, $x^1(t):=Px(t)$. Так как $\mathrm{im}N\subset\mathcal{Y}^1$, по теореме 2.2.1 уравнение (2.3.1) можно свести к системе двух уравнений

$$x^0(t)=-M_0^{-1}(I-Q)f(t),\tag{2.3.3}$$

$$D_t^\alpha x^1(t)=Sx^1(t)+L_1^{-1}N(t,D^{\alpha-m}x(t),\dots,D_t^{\alpha-1}x(t))+L_1^{-1}Qf(t).\tag{2.3.4}$$

Заметим, что проекция открытого множества X на подпространство $\mathbb{R}\times(\mathcal{X}^1)^m$ является открытым множеством Поскольку $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, по теореме 2.2.1 (ix) $S\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, тогда из теоремы 1.4.1 следует существование единственного решения задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m+k}x^1(0)=L_1^{-1}y_k$, $k=0,1,\dots,m-1$, для уравнения (2.3.4) на (t_0,t_1). В самом деле, отображение

$$(t, z_0, \ldots, z_{m-1}) \to L_1^{-1}N(t, z_0 - D_t^{\alpha-m}g(t), \ldots, z_{m-1} - D_t^{\alpha-1}g(t)) + L_1^{-1}Qf(t)$$

при $g(t) = M_0^{-1}(I-Q)f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1 в силу условия $J_t^{m-\alpha}M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T); D_{L_1^{-1}M_1})$, и $L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. □

Теорема 2.3.2. *Пусть банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, X *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^m$, *отображени* $N \in C\big(X; D_{M_1L_1^{-1}}\big)$ *локально липшицево по фазовым переменным* $\overline{z}$, $f \in C([t_0,T); \mathcal{Y})$ *для некоторого* $T > t_0$, $Qf \in C([t_0,T); D_{M_1L_1^{-1}})$, *при этом* $J_t^{m-\alpha}M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T); D_{L_1^{-1}M_1})$, $y_k \in L[D_M]$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}y_0 - D_t^{\alpha-m}M_0^{-1}(I-Q)f(t_0), \ldots, L_1^{-1}y_{m-2} - D_t^{\alpha-2}M_0^{-1}(I-Q)f(t_0)) \in X.$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.3.1), (2.3.2) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 \in (t_0, T)$.

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве предыдущей теоремы, вместо уравнения (2.3.4) рассмотрим эквивалентное уравнение

$$D_t^\alpha y^1(t) = Uy^1(t) + Qf(t) +$$

$$+N(t, D_t^{\alpha-m}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I-Q)f(t)), \ldots, D_t^{\alpha-1}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I-Q)f(t))),$$

где $y^1(t) = L_1x^1(t)$. В данному случае множество $\{(t, u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Y}^m : u_k = Lz_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1,\ (t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}) \in X\}$ является прообразом открытого множества $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^m$ при непрерывном отображении $\mathrm{diag}(I, L^{-1}, L^{-1}, \ldots, L^{-1})$, а потому тоже открыто. По теореме 2.2.1 (x) $U \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, следовательно, в силу теоремы 1.4.1 существует единственное решение задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}y^1(0) = y_k \in D_U, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

для этого уравнения на некотором отрезке $[t_0, t_1]$. Здесь из-за непрерывности оператора $L_1^{-1} : \mathcal{Y}^1 \to \mathcal{X}^1$ мы имеем нелинейный оператор

$$(t, z_0, \ldots, z_{m-1}) \to N(t, L_1^{-1}z_0 - D_t^{\alpha-m}g(t), \ldots, L_1^{-1}z_{m-1} - D_t^{\alpha-1}g(t)) + Qf(t)$$

при $g(t) = M_0^{-1}(I - Q)f(t)$, который удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1.

$\square$

2.3.2. Уравнение с гельдеровой правой частью

Пусть теперь X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m-1}$, $N : X \to \mathcal{Y}$, рассмотрим уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}x(t)) + f(t). \quad (2.3.5)$$

Функция $x : (t_0, t_1] \to D_M \cap D_L$ называется решением уравнения (2.3.5) на отрезке $[t_0, t_1]$, если $J_t^{m-\alpha}Lx \in C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, $Mx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, для всех $t \in (t_0, t_1]$ $(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}x(t)) \in X$ и выполняется равенство (2.3.5).

Решение задачи типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k}Lx(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad (2.3.6)$$

для уравнения (2.3.5) называется решение уравнения (2.3.5), для которого $J_t^{m-\alpha}Lx \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{X})$ и выполнены условия (2.3.6).

Теорема 2.3.3. *Пусть $\alpha > 1$, банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m-1}$, $N : X \to \mathcal{Y}^1$, отображение $L_1^{-1}N \in C\big(X; \mathcal{X}\big)$ локально гельдерово по t и локально липшицево по фазовым переменным $\overline{z}$, $f : [t_0, T] \to \mathcal{Y}^0 \dot{+} \mathrm{im} L_1$ для некоторого $T > t_0$, $L_1^{-1}Qf \in C^\gamma([t_0, T); \mathcal{Y})$, $\gamma \in (0, 1]$, $J_t^{m-\alpha}M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $y_k \in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$,*

$$(t_0, L_1^{-1}y_0 - D_t^{\alpha-m}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \ldots, L_1^{-1}y_{m-2} - D_t^{\alpha-2}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in X.$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.3.5), (2.3.6) *на отрезке* $[t_0,t_1]$ *при некотором* $t_1 \in (t_0,T)$.

Доказательство. Как и в предыдущем разделе, учитывая условие $\mathrm{im}N \subset \mathcal{Y}^1$, уравнение (2.3.5) сведем к системе двух уравнений

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I-Q)f(t), \tag{2.3.7}$$

$$D_t^{\alpha}x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}N(t, D^{\alpha-m}x(t), \dots, D_t^{\alpha-2}x(t)) + L_1^{-1}Qf(t). \tag{2.3.8}$$

Так как $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, по теореме 2.2.1 (ix) $S \in \mathcal{A}_{\alpha}(\theta_0,a_0)$, следовательно, из теоремы 1.4.2 следует существование единственного решения задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m+k}x^1(0) = L_1^{-1}y_k$, $k = 0,1,\dots,m-1$, для уравнения (2.3.8) на некотором отрезке $[t_0,t_1]$. В самом деле, отображение

$$(t, z_0, \dots, z_{m-2}) \to L_1^{-1}N(t, z_0 - D_t^{\alpha-m}g(t), \dots, z_{m-2} - D_t^{\alpha-2}g(t)) + L_1^{-1}Qf(t)$$

при $g(t) = M_0^{-1}(I-Q)f(t)$, удовлетворяет условиям теоремы 1.4.2. Здесь учитывается тот факт, что из условия $J_t^{m-\alpha}M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T];D_{L_1^{-1}M_1})$ следует дифференцируемость и, тем более, гельдеровость на $[t_0,T]$ функций $D_t^{\alpha-k}M_0^{-1}(I-Q)f$, $k = 2,3,\dots,m$. Остается заметить, что $L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0,1,\dots,m-1$. $\square$

Теорема 2.3.4. *Пусть* $\alpha > 1$, *банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L,M) \in \mathcal{H}_{\alpha}(\theta_0,a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$, X *— открытое множество в пространстве* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m-1}$, *отображение* $N \in C\big(X;\mathcal{Y}^1\big)$ *локально гельдерово по* t *и локально липшицево по фазовым переменным* $\overline{z}$, $f : [t_0,T] \to \mathcal{Y}$ *для некоторого* $T > t_0$, $Qf \in C^{\gamma}([t_0,T);\mathcal{Y})$, $\gamma \in (0,1]$, $J_t^{m-\alpha}M_0^{-1}(I-Q)f \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $y_k \in L[D_M]$, $k = 0,1,\dots,m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}y_0 - D_t^{\alpha-m}M_0^{-1}(I-Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}y_{m-2} - D_t^{\alpha-2}M_0^{-1}(I-Q)f(t_0)) \in X.$$

Тогда существует единственное решение задачи (2.3.5), (2.3.6) *на отрезке* $[t_0,t_1]$ *при некотором* $t_1 \in (t_0,T)$.

Доказательство. В этом случае вместо уравнения (2.3.5) рассмотрим эквивалентное ему уравнение

$$D_t^\alpha y^1(t) = Uy^1(t) + Qf(t)+$$
$$+N(t, D_t^{\alpha-m}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I-Q)f(t)), \ldots, D_t^{\alpha-2}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I-Q)f(t))), \tag{2.3.9}$$

где $y^1(t) = L_1x^1(t)$. По теореме 2.2.1 (x), $U \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, следовательно, в силу теоремы 1.4.2 существует единственное решение задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}y^1(0) = y_k \in D_U, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

к этому уравнению на отрезке $[t_0, t_1]$. Здесь из-за непрерывности оператора $L_1^{-1} : \mathcal{Y}^1 \to \mathcal{X}^1$ и в силу условий на $g = M_0^{-1}(I-Q)f$ мы имеем нелинейный оператор

$$(t, z_0, \ldots, z_{m-2}) \to N(t, L_1^{-1}z_0 - D_t^{\alpha-m}g(t), \ldots, L_1^{-1}z_{m-2} - D_t^{\alpha-2}g(t)) + Qf(t),$$

который удовлетворяет условиям теоремы 1.4.2. Открытость множества

$$\{(t, u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Y}^m : u_k = Lz_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$
$$(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}) \in X\},$$

на котором рассматривается уравнение (2.3.9), показана при доказательстве теоремы 2.3.2. □

Замечание 2.3.1. Если $L_1 : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{Y}^1$ — линейный гомеоморфизм, то теорема 2.3.1 эквивалента теореме 2.3.2, а теорема 2.3.3 — теореме 2.3.4.

Мы можем изучить однозначную разрешимость задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

в уравнение (2.3.5) таким же образом. В этом случае из уравнения (2.3.7) вытекают необходимые условия разрешимости

$$(I-P)x_k = -D_t^{\alpha-m+k}|_{t=t_0}M_0^{-1}(I-Q)f(t), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

для согласования исходных данных и функции $(I-Q)f$.

2.4. Вырожденное полулинейное уравнение с нелинейным оператором, не зависящим от элементов подпространства вырождения

Теперь рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем параграфе, без условия $\operatorname{im} N \subset \mathcal{Y}^1$, но с другими ограничениями на оператор N: будем предполагаться, что N не зависит от элементов $\mathcal{X}^0$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что $f \equiv 0$:

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha-m}x(t), D_t^{\alpha-m+1}x(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}x(t)). \qquad (2.4.1)$$

Обозначим $V := X \cap \mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^{m-1}$.

Теорема 2.4.1. *Пусть $\alpha > 1$, банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m-1}$. Предположим, что $N : X \to \mathcal{Y}$, для любых $(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) \in X$, таких, что $(t, Pz_0, Pz_1, \ldots, Pz_{m-2}) \in X$, выполняется $N(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) = N_1(t, Pz_0, Pz_1, \ldots, Pz_{m-2})$ при некотором $N_1 \in C(V; \mathcal{Y})$, $\operatorname{im} QN_1 \subset \operatorname{im} L$, отображение $L_1^{-1}QN_1 \in C\big(V; \mathcal{Y}\big)$ локально гельдерово по t и локально липшицево по фазовым переменным $\overline{z}$, $y_k \in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}y_0, \ldots, L_1^{-1}y_{m-2}) \in V$. Тогда существует единственное решение задачи (2.3.6), (2.4.1) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T)$.*

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 2.3.3, уравнение (2.4.1) можно свести к системе двух уравнений

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D_t^{\alpha-m}x^1(t), D_t^{\alpha-m+1}x^1(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}x^1(t)), \quad (2.4.2)$$

$$D_t^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D_t^{\alpha-m}x^1(t), D_t^{\alpha-m+1}x^1(t), \ldots, D_t^{\alpha-2}x^1(t)). \qquad (2.4.3)$$

По теореме 2.2.1 (ix) и теореме 1.4.2 получаем существование единственного решения задачи типа Коши для уравнения (2.4.1). □

Обозначим через $QN_1 \circ L_1^{-1} : \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^{m-1} \to \mathcal{Y}$ отображение такое, что для любого элемента $(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^{m-1}$ выполнено

$$QN_1 \circ L_1^{-1}(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) := QN_1(t, L_1^{-1}z_0, L_1^{-1}z_1, \ldots, L_1^{-1}z_{m-2}).$$

Теорема 2.4.2. *Пусть* $\alpha > 1$, *банаховы пространства* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ *рефлексивны,* $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, X *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^{m-1}$. *Предположим, что* $N : X \to \mathcal{Y}$, *для любых* $(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) \in X$ *таких, что* $(t, Pz_0, Pz_1, \ldots, Pz_{m-2}) \in X$, *выполняется* $N(t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-2}) = N_1(t, Pz_0, Pz_1, \ldots, Pz_{m-2})$ *при некотором* $N_1 \in C(V; \mathcal{Y})$, *отображение*

$$QN_1 \circ L_1^{-1} : \{(t, u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Y}^m : u_k = Lz_k,$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1, \ (t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}) \in X\} \to \mathcal{Y},$$

локально гельдерово по t *и локально липшицево по фазовым переменным* $\overline{z}$, $y_k \in L[D_M]$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}y_0, L_1^{-1}y_1, \ldots, L_1^{-1}y_{m-2}) \in X$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.3.6), (2.4.1) *на отрезке* $[t_0, t_1]$ *при некотором* $t_1 \in (t_0, T)$.

Доказательство. В отличие от доказательства предыдущей теоремы рассмотрение задачи Коши для уравнения (2.4.3) заменим изучением задачи типа Коши $D_t^{\alpha-m+k}y^1(0) = y_k \in D_U$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, для уравнения

$$D_t^\alpha y^1(t) = Uy^1(t) + QN_1(t, L_1^{-1}D_t^{\alpha-m}y^1(t), L_1^{-1}D_t^{\alpha-m+1}y^1(t), \ldots, L_1^{-1}D_t^{\alpha-2}y^1(t)),$$

где $y^1(t) = L_1x^1(t)$. □

Замечание 2.4.1. Если $L_1 : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{Y}^1$ — линейный гомеоморфизм, то теорема 2.4.1 эквивалентна теореме 2.4.2.

2.5. Приложения к начально-краевым задачам

Полученные результаты при исследовании начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах в этом параграфе используем для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешимых относительно производной дробного порядка по времени.

2.5.1. Уравнения с многочленами от самосопряженного оператора

Как и в первой главе, введем в рассмотрение многочлены $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$, $Q_\varrho(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\varrho} d_j\lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, \varrho$, $c_n \neq 0$, $d_\varrho \neq 0$, $n < \varrho$. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен [53],

$$(\Lambda z)(s) = \sum_{|q|\le 2r} \frac{a_q(s)\partial^{|q|}z(s)}{\partial^{q_1}s_1\partial^{q_2}s_2\dots\partial^{q_d}s_d}, \ \ a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l z)(s) = \sum_{|q|\le r_l} \frac{b_{lq}(s)\partial^{|q|}z(s)}{\partial^{q_1}s_1\partial^{q_2}s_2\dots\partial^{q_d}s_d}, \ \ b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \dots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + q_2 + \dots + q_d$, оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$, определенный на

$$D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{z \in H^{2r}(\Omega) : B_l z(s) = 0,\ l = 1, 2, \dots, r,\ s \in \partial\Omega\},$$

равенством $\Lambda_1 z := \Lambda z$, самосопряжен и имеет ограниченный справа спектр, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$, как и прежде, обозначим ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций оператора Λ_1, занумерованных в порядке неубывания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Пусть $\alpha \in (1, 2)$, рассмотрим задачу

$$D_t^{\alpha-2}P_n(\Lambda)v(s,0) = v_0(s), \quad D_t^{\alpha-1}P_n(\Lambda)v(s,0) = v_1(s), \quad s \in \Omega, \tag{2.5.1}$$

$$B_l\Lambda^k v(s,t) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \varrho-1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ (s,t) \in \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.5.2}$$

$$D_t^{\alpha} P_n(\Lambda) v(s,t) = Q_{\varrho}(\Lambda) v(s,t) + g\,(s,t)\,,\ (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.5.3}$$

где $v_0, v_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ заданы, функция $v : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ — искомая.

Положим $\mathcal{X} = \{z \in H^{2rn}(\Omega) : B_l \Lambda^k z(s) = 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1,\ l = 1,2,\ldots,r,\ s \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$, $L = P_n(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; L_2(\Omega))$, $M = Q_{\varrho}(\Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; L_2(\Omega))$ с областью определения $D_M = \{z \in H^{2r\varrho}(\Omega) : B_l \Lambda^k z(s) = 0, k = 0,1,\ldots,\varrho-1,\ l = 1,2,\ldots,r,\ s \in \partial\Omega\}$. В отличие от первой главы будем предполагать, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ $P_n(\lambda_k) = 0$.

Переформулируем леммы 1.5.1 и 1.5.2 для вырожденного эволюционного уравнения, при этом доказательства новых лемм повторяются практически дословно.

Лемма 2.5.1. *Пусть $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\alpha > 1$,*

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi)\ \exists a_1 \geq 0\ \forall \mu \in S_{a_1,\theta_1}\ \mu^{\alpha} \in \rho^L(M);$$

$$\exists C > 0\ \forall \mu \in S_{a_1,\theta_1}\ \max\{\|R^L_{\mu^{\alpha}}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\mu^{\alpha}}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{C}{|\mu^{\alpha} - a_1|}.$$

Тогда $(L, M) \in \mathcal{H}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $a_0 \geq a_1$, $a_0 > 1$.

Лемма 2.5.2. *Пусть $L, M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\alpha \in (0,1)$,*

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi)\ \exists a_0 \in [0,1)\ \forall \mu \in S_{a_0,\theta_1}\ \mu^{\alpha} \in \rho^L(M);$$

$$\exists C > 0\ \forall \mu \in S_{a_0,\theta_1}\ \max\{\|R^L_{\mu^{\alpha}}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\mu^{\alpha}}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{C}{|\mu^{\alpha} - a_0|}.$$

Тогда $(L, M) \in \mathcal{H}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ для некоторого $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$.

Теорема 2.5.1. *Пусть $\varrho > n$, $(-1)^{\varrho - n}(d_{\varrho}/c_n) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит общих корней многочленов P_n и Q_{ϱ}, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$. Тогда при $\alpha \in [1,2)$ существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, что $(L, M) \in \mathcal{H}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$. Если, кроме того,*

$$\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{Q_{\varrho}(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)} < 1, \tag{2.5.4}$$

то $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ *при* $\alpha \in (0,1)$. *В обоих случаях*

$$\sigma^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ \mu = Q_\varrho(\lambda_k)/P_n(\lambda_k) : P_n(\lambda_k) \neq 0\},$$

$$P = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad Q = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$\mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \mathrm{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) = 0\},$$

$\mathcal{X}^1$ *— замыкание линеала* $\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0\}$ *в пространстве* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}^1$ *— его замыкание в пространстве* $\mathcal{Y}$.

Доказательство. Для $\mu \in \mathbb{C}$

$$\mu L - M = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu P_n(\lambda_k) - Q_\varrho(\lambda_k)) \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

если этот оператор имеет обратный, то

$$R_\mu^L(M) = L_\mu^L(M) = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu - \mu_k}, \quad \mu_k := \frac{Q_\varrho(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}, \quad P_n(\lambda_k) \neq 0.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = -\infty$, то $\mu_k \sim (d_\varrho/c_n)\lambda_k^{\varrho-n} \to -\infty$ при $k \to \infty$. При $\alpha \in [1,2)$ возьмем $\varepsilon < \pi/\alpha - \pi/2$, $\theta_1 = \pi/\alpha - \varepsilon$, $a = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu_k$, $a_1 = \max\{0, a\}$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, при $\mu \in S_{\theta_1, a_1}$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$

$$\|R_{\mu^\alpha}^L(M)x\|_{\mathcal{X}}^2 = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{(1+\lambda_k^{2n})|\langle x, \varphi_k \rangle|^2}{|\mu^\alpha - \mu_k|^2} = \frac{\sin^{-2}(\alpha\varepsilon)\|x\|_{\mathcal{X}}^2}{|\mu^\alpha - a_1|^2},$$

$$\|L_{\mu^\alpha}^L(M)y\|_{\mathcal{Y}}^2 = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{|\langle x, \varphi_k \rangle|^2}{|\mu^\alpha - \mu_k|^2} = \frac{\sin^{-2}(\alpha\varepsilon)\|y\|_{\mathcal{Y}}^2}{|\mu^\alpha - a_1|^2},$$

так как $|\arg(\mu^\alpha)| < \alpha\theta_1 < \pi$, $|\mu^\alpha - \mu_k| \geq \sin(\alpha\varepsilon)|\mu^\alpha - a_1|$. При $\alpha = 1$ получено требуемое, при $\alpha \in (1,2)$ осталось сослаться на лемму 2.5.1.

Для $\alpha \in (0,1)$ возьмем $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$, в силу (2.5.4) имеем $a \in (-\infty, 1)$, выберем $a_0 = \max\{0, a\}$, проведем аналогичные рассуждения и сошлемся на лемму 2.5.2.

Далее, $\mathcal{X}^0 = \ker L = \operatorname{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) = 0\}$, $\mathcal{Y}^0 = M[\mathcal{X}^0] = \mathcal{X}^0$ в силу непрерывной обратимости оператора M_0, конечности множества корней многочлена P_n, конечнократности спектра $\sigma(\Lambda_1)$ и гладкости всех собственных функций φ_k, $k \in \mathbb{N}$. Из этих равенств следует вид подпространств $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{Y}^1$, которые уже являются бесконечномерными, и проекторов P и Q. □

Замечание 2.5.1. Из доказательства теоремы видно, что при тех же операторах и при выборе пространств $\mathcal{X} = \{z \in H^{2rn+j}(\Omega) : B_l\Lambda^k z(s) = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ s \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{Y} = H^j(\Omega)$, и области определения $D_M = \{z \in H^{2r\varrho+j}(\Omega) : B_l\Lambda^k z(s) = 0, k = 0, 1, \dots, \varrho - 1,\ l = 1, 2, \dots, r,\ s \in \partial\Omega\}$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$ теорема остается справедливой.

Замечание 2.5.2. Поскольку в данном случае $L_1 : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{Y}^1$ — линейный гомеоморфизм, то справедливы замечания 2.2.4, 2.3.1, 2.4.1.

Теорема 2.5.2. *Пусть* $\alpha \in (1, 2)$, $(-1)^{p-n}(d_r/c_n) < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит общих корней многочленов* P_n *и* Q_ϱ, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $v_k \in P_n(\Lambda_1)[D_M]$, $k = 0, 1$, $g \in C^1([0, T); \mathcal{Z})$. *Тогда задача* (2.5.1)–(2.5.3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Начальные условия (2.5.1) являются условиями Шоуолтера — Сидорова при $m = 2$. В силу теоремы 2.2.11 или 2.2.12 с $f(t) = g(\cdot, t)$ и с $x_k = P_n(\Lambda_1)^{-1}v_k(\cdot)$, $k = 0, 1$, если учесть замечание 2.2.5, получим требуемое. □

Замечание 2.5.3. При $\alpha \in (0, 1)$ аналогичный результат справедлив при дополнительном условии (1.5.4).

Рассмотрим теперь полулинейное уравнение

$$D_t^\alpha P_n(\Lambda)v(s,t) = Q_\varrho(\Lambda)v(s,t) + P_n(\Lambda)F\left(s, D_t^{\alpha-2}v(s,t)\right) \tag{2.5.5}$$

с начальными условиями (2.5.1) и краевыми условиями (2.5.2).

Теорема 2.5.3. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $\varrho > n > d/(4r)$, $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n) < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит общих корней многочленов* P_n *и* Q_ϱ, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R};\mathbb{R})$, $v_k \in P_n(\Lambda)[D_M]$ *при* $k = 0,1$. *Тогда существует такое* $t_1 \in (0,T]$, *что задача* (2.5.1), (2.5.2), (2.5.5) *имеет единственное решение на* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. В силу условия $d < 4rn$ имеем $F \in C^\infty(\mathcal{X};H^{2rn}(\Omega))$ согласно [88]. Поэтому для $x \in \mathcal{X}$ $N(x) = P_n(\Lambda)F(x) \in \mathcal{Y} = L_2(\Omega)$. Выполняется вложение $\mathrm{im}N \subset \mathrm{im}L \subset \mathcal{Y}^1$. Нетрудно убедиться, что остальные условия теоремы 2.3.3 (и теоремы 2.3.4) выполняются, поэтому существует единственное локальное решение задачи (2.5.1), (2.5.2), (2.5.5). □

Замечание 2.5.4. При $\alpha \in (0,1)$ аналогичный результат может быть получен с помощью теоремы 2.3.1 или теоремы 2.3.2 при дополнительном условии (1.5.4).

Задачу (2.5.1), (2.5.2) рассмотрим для полулинейного уравнения

$$D_t^\alpha P_n(\Lambda)v(s,t) = Q_\varrho(\Lambda)v(s,t) + F\left(s, P_n(\Lambda)D_t^{\alpha-2}v(s,t)\right). \tag{2.5.6}$$

Теорема 2.5.4. *Пусть* $\alpha \in (1,2)$, $j > d/2$, $(-1)^{\varrho-n}(d_\varrho/c_n) < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *ограничен справа, не содержит общих корней многочленов* P_n *и* Q_ϱ, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R};\mathbb{R})$, $v_k \in P_n(\Lambda)[D_M]$ *при* $k = 0,1$. *Тогда существует такое* $t_1 \in (0,T]$, *что задача* (2.5.1), (2.5.2), (2.5.6) *имеет единственное решение на* $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Выберем пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, D_M, как в замечании 2.5.1, $L = P_n(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M = Q_\varrho(\Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Тогда для $x \in \mathcal{X}$ $P_n(\Lambda)x \in \mathcal{Y}$, $N(x) = F(\cdot, P_n(\Lambda)x) \in \mathcal{Y} = H^j(L_2(\Omega))$ в силу [88], поскольку $j > d/2$. Для любого элемента $x \in \mathcal{X}$ имеем $N(x) = F(\cdot, Lx) = F(\cdot, LPx) = N(Px)$. Поэтому и в силу гомеоморфности отображения $L_1 : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{Y}^1$ все условия теоремы 2.4.1 (и теоремы 2.4.2) с $N_1 = N$ выполняются, следовательно, существует единственное локальное решение задачи (2.5.1), (2.5.2), (2.5.6). □

2.5.2. Один пример полулинейного уравнения

Рассмотрим задачу, при исследовании которой используется непрерывность непрерывность нелинейного оператора в норме графика. При $\alpha \in (1,2]$ рассмотрим уравнение

$$D_t^{\alpha}\left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^2 v(s,t) = \sum_{l=0}^{3} a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(s,t) +$$

$$+\left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F\left(s, D_t^{\alpha-2}v(s,t), D_t^{\alpha-1}v(s,t)\right), \ (s,t) \in (0,\pi)\times(t_0,t_1], \quad (2.5.7)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(0,t) = \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(\pi,t) = 0, \ l = 0,1,2, \ t \in (t_0,t_1], \qquad (2.5.8)$$

и начальными условиями

$$D_t^{\alpha-m+k}\left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^2 v(s,t_0) = v_k(s), \ k = 0,1, \ s \in (0,\pi), \qquad (2.5.9)$$

Здесь $\beta, a_l \in \mathbb{R}$, $l = 0,1,2,3$, $F : (0,\pi)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Теорема 2.5.5. *Пусть $\alpha \in [1,2)$, $\beta = -k_1^2$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{N}$, $a_3 > 0$,*

$$\sum_{l=0}^{3} a_l \beta^l \neq 0, \ v_k \in \left\{x \in H^2(0,\pi) : x(0) = x(\pi) = 0\right\}, \ k = 0,1.$$

Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ задача (2.5.7)–(2.5.9) имеет единственное решение на $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} := \{x \in H^4(0,\pi) : x^{(2l)}(0) = x^{(2l)}(\pi) = 0, \ l = 0,1\}$, $\mathcal{Y} = L_2(0,\pi)$, $D_M := \{x \in H^6(0,\pi) : x^{(2l)}(0) = v^{(2l)}(\pi) = 0, \ l = 0,1,2\}$,

$$L := \beta^2 - 2\beta\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^4}{\partial s^4} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad M := \sum_{l=0}^{3} a_l \frac{\partial^{2l}}{\partial s^{2l}} : D_M \to \mathcal{Y},$$

$$N(t,\overline{x}) = N(t,x_0,x_1) = \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F(\cdot,x_0,x_1).$$

По теореме 2.5.1 при $\alpha \in [1,2)$ $(L,M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \geq 0$, при этом $\ker L = \operatorname{span}\{\sin k_1 s\}$, оператор $L_1 : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{Y}^1$ является гомеоморфизмом, $\mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \operatorname{span}\{\sin k_1 s\}$, $\mathcal{X}^1$ является замыканием линеала $\operatorname{span}\{\sin ks : k \neq k_1\}$ в $\mathcal{X}$, а $\mathcal{Y}^1$ — его замыкание норме $\mathcal{Y}$. Таким образом, форма оператора N подразумевает, что $\mathrm{im} N \subset \mathcal{Y}^1$. Согласно [88] отображение $(x_0,x_1) \to F(\cdot,x_0,x_1)$ принадлежит к классу $C^\infty((H^4(0,\pi))^2; H^4(0,\pi))$, следовательно,

$$\|N(t,\overline{x})\|^2_{D_{M_1L_1^{-1}}} = \|N(t,\overline{x})\|^2_{H^2(0,\pi)} \leq C_1 \|F(\cdot,\overline{x})\|^2_{H^4(0,\pi)} < \infty,$$

и в силу гладкости оператор $N : X = \mathbb{R} \times \mathcal{X}^2 \to \mathcal{X}$ локально липшицев по фазовым переменным x_0, x_1, при этом он не зависит от t. По теореме 2.3.1 или 2.3.2 получаем требуемое. $\square$

При $\alpha \in (0,1)$ соответствующий результат будет иметь следующий вид.

Теорема 2.5.6. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\beta = -k_1^2$ для некоторого $k_1 \in \mathbb{N}$, $a_3 > 0$,*

$$\sum_{l=0}^{3} a_l \beta^l \neq 0, \ v_0 \in \left\{x \in H^2(0,\pi) : x(0) = x(\pi) = 0\right\},$$

$$\max_{k \in \mathbb{N}\setminus\{k_1\}} \frac{\sum\limits_{l=0}^{3} (-1)^l a_l k^{2l}}{(\beta + k^2)^2} < 1. \tag{2.5.10}$$

Тогда для некоторого $t_1 > t_0$ задача

$$D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^2 v(s,t) = \sum_{l=0}^{3} a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(s,t) +$$

$$+ \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F\left(s, D_t^{\alpha-1} v(s,t)\right), \ (s,t) \in (0,\pi) \times (t_0,t_1],$$

$$\frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(0,t) = \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(\pi,t) = 0, \ l = 0,1,2, \ t \in (t_0,t_1],$$

$$D_t^{\alpha-m} \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^2 v(s,t_0) = v_0(s), \ s \in (0,\pi),$$

имеет единственное решение на $[t_0,t_1]$.

Доказательство. Отличие от предыдущего доказательства только в том, что для использования теоремы 2.5.1 при $\alpha \in (0,1)$ добавляется условие (2.5.10).

$\square$

2.5.3. Линеаризованная квазистационарная система уравнений фазового поля

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-2}u(s,0) = u_0(s), \quad s \in \Omega, \tag{2.5.1}$$

$$D_t^{\alpha-1}u(s,0) = u_1(s), \quad s \in \Omega, \tag{2.5.2}$$

$$(1-\delta)u(s,t) + \delta\frac{\partial u}{\partial n}(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.5.3}$$

$$(1-\delta)v(s,t) + \delta\frac{\partial v}{\partial n}(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.5.4}$$

для системы уравнений

$$D_t^{\alpha}u(s,t) = \Delta u(s,t) - \Delta v(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.5.5}$$

$$\Delta v(s,t) + \beta u(s,t) + \gamma v(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.5.6}$$

которая при $\alpha = 1$ с точностью до линейной замены неизвестных функций $u(s,t) = \widetilde{u}(s,t) + \frac{l}{2}\widetilde{v}(s,t)$, $v(s,t) = \frac{l}{2}\widetilde{v}(s,t)$, $l \in \mathbb{R}$, совпадает с линеаризацией квазистационарной (в предположении, что время релаксации равно 0) системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода, в случае одномерной фазовой функции [35, 36].

Положим $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \beta I & \gamma I + \Delta \end{pmatrix},$$

$$H_\delta^2(\Omega) := \left\{ z \in H^2(\Omega) : \left(\delta\frac{\partial}{\partial n} + (1-\delta)\right) z(s) = 0, \ s \in \partial\Omega \right\},$$

$D_M = (H^2_\delta(\Omega))^2$. Тем самым определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$. Причем $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$.

Обозначим $\Lambda_1 z = \Delta z$, $D_{\Lambda_1} = H^2_\delta(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора Λ_1, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема 2.5.7. *Пусть $\alpha \in [1, 2)$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $-\gamma \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Lambda_1)$. Тогда $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$. При $\alpha \in (0, 1)$ это же утверждение справедливо при дополнительном условии $\max\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\beta+\gamma+\lambda_k)\lambda_k}{\gamma+\lambda_k} < 1$. В обоих случаях*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\beta(\gamma + \Lambda_1)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \Lambda_1(\gamma + \Lambda_1)^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\mathcal{X}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega), \quad \mathcal{X}^1 = \{(u, -\beta(\gamma + \Lambda_1)^{-1} u) : u \in L_2(\Omega)\},$$

$$\mathcal{Y}^0 = \{(-\Lambda_1(\gamma + \Lambda_1)^{-1} v, v) : v \in L_2(\Omega)\}, \quad \mathcal{Y}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\}.$$

Доказательство. Используя разложение по базису $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и обозначение $\delta_k = \frac{(\beta+\gamma+\lambda_k)\lambda_k}{\gamma+\lambda_k}$, нетрудно при $\mu^\alpha \neq \delta_k$, $k \in \mathbb{N}$, получить операторы из $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ (кроме первого):

$$\mu^\alpha L - M = \begin{pmatrix} \mu^\alpha I - \Delta & \Delta \\ -\beta I & -\gamma I - \Delta \end{pmatrix},$$

$$(\mu^\alpha L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -\gamma - \lambda_k & -\lambda_k \\ \beta & \mu^\alpha - \lambda_k \end{pmatrix} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{-\gamma\mu^\alpha + (\beta + \gamma - \mu^\alpha)\lambda_k + \lambda_k^2},$$

$$R^L_\mu(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\beta}{\gamma+\lambda_k} & 0 \end{pmatrix} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu^\alpha - \delta_k}, \; L^L_\mu(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_k}{\gamma+\lambda_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\mu^\alpha - \delta_k}. \tag{2.5.7}$$

Очевидно, что

$$\delta_k = \lambda_k + \frac{\beta}{1+\gamma\lambda_k^{-1}},$$

поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k = -\infty$. Таким образом, для заданного $\alpha \in (0,2)$ можно выбрать $a_1 = \max\{0, \delta_k : k \in \mathbb{N}\}$ и достаточно близкое к $\pi/2$ $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$, чтобы при малом $\varepsilon > 0$ и при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta_k \notin \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \mu^\alpha, \, |\arg(\mu - a_1)| < \theta_1 + \varepsilon, \, \mu \neq a_1\}.$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.5.1, нетрудно показать, что существует такое $K > 0$, что для всех $\mu \in S_{\theta_1, a_1}$

$$\max\left\{\|R^L_{\mu^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L^L_{\mu^\alpha}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\right\} \leq \frac{4C\sin(\alpha\varepsilon)}{|\mu^\alpha - a_1|},$$

где

$$C = \sup\left\{1, \frac{1}{|\gamma+\lambda_k|}, \frac{|\lambda_k|}{|\gamma+\lambda_k|} : k \in \mathbb{N}\right\}. \tag{2.5.8}$$

Теперь при $\alpha \in [1,2)$ включение $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $a_0 > \max\{1, a_1\}$ следует из леммы 2.5.1, а при $\alpha \in (0,1)$ — из леммы 2.5.2 при $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $a_0 = a_1$, если выполняется дополнительное условие $\max\{\delta_k : k \in \mathbb{N}\} < 1$.

Заметим, что $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ — гильбертово, а значит, рефлексивное банахово пространство. Проекторы P и Q вычисляются с помощью теоремы 2.2.1 (ii) и равенств (2.5.7). Осталось напомнить, что согласно теореме 2.2.1 (ii) $\mathcal{X}^0 = \ker P$, $\mathcal{X}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 = \mathrm{im} Q$. □

Следствие 2.5.1. *Пусть $\alpha \in (1,2)$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $-\gamma \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Lambda_1)$. Тогда для любых $u_0, u_1 \in H^2_\delta(\Omega)$ существует единственное решение задачи* (2.5.1)–(2.5.6).

Доказательство. Начальные условия (2.5.1), (2.5.2) являются условиями типа Шоуолтера — Сидорова. Поскольку $L_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — линейный гомеоморфизм, в силу замечания 2.2.4 с помощью любой из теорем 2.2.9, 2.2.10, 2.2.11, 2.2.12 при $f \equiv 0$ получим требуемое. □

Следующее утверждение доказывается совершенно аналогично.

Следствие 2.5.2. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $-\gamma \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\Lambda_1)$, *при этом* $\max\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(\beta+\gamma+\lambda_k)\lambda_k}{\gamma+\lambda_k} < 1$. *Тогда для любого* $u_1 \in H^2_\delta(\Omega)$ *существует единственное решение задачи* (2.5.2)–(2.5.6).

Рассмотрим систему (2.5.5), (2.5.6) в случае $-\gamma \notin \sigma(A)$. Тогда при некотором $k \in \mathbb{N}$ выполняется $-\gamma = \lambda_k$, возьмем собственный вектор φ_k, соответствующий этому собственному значению λ_k, тогда $(0, \varphi_k) \in \ker L$, $M(0, \varphi_k) = (\gamma\varphi_k, 0) = L(\gamma\varphi_k, 0)$. Поэтому $(\gamma\varphi_k, 0)$ — M-присоединенный вектор оператора L высоты 1. Согласно теореме 2.1 [68] и замечанию 2.3 там же если $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, то оператор L не имеет M-присоединенных векторов. Можно показать, что при некоторых условиях в случае $-\gamma \notin \sigma(A)$ $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, 1)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$. Вырожденные уравнения с такими парами операторов (L, M), называемые сильно вырожденными, рассмотрены в работе [68]. Там же можно найти описание проблем, возникающих при рассмотрении таких задач.

2.5.4. Линеаризованная система уравнений Навье — Стокса как вырожденное эволюционное уравнение

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k} v(s, 0) = v_k(s), \quad s \in \Omega, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.5.9}$$

$$v(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{2.5.10}$$

$$D_t^\alpha v(s,t) = \nu\Delta v(s,t) - r(s,t) + g(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.5.11}$$

$$\nabla \cdot v(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2.5.12}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\nu > 0$. В отличие от раздела 1.5.4, здесь мы ее редуцируем к вырожденному эволюционному уравнению, считая неизвестными не только вектор-функцию скорости $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, но и вектор-функцию градиента давления $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Как и в разделе 1.5.4, $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 := (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 := (W_2^2(\Omega))^n$, замыкание линеала $\mathfrak{L} := \{z \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot z = 0\}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначено через $\mathbb{H}_\sigma$, а в норме $\mathbb{H}^1$ — символом $\mathbb{H}_\sigma^1$, $\mathbb{H}_\sigma^2 := \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Напомним, что оператор $A := \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет действительный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [25], через $\{\lambda_k\}$ обозначены собственные значения этого оператора, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности.

Учитывая уравнение несжимаемости (2.5.12), положим

$$\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \Sigma g(\cdot, t) \\ \Pi g(\cdot, t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, T), \tag{2.5.13}$$

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \tag{2.5.14}$$

Имеем $x(t) \in \mathcal{X}$, где $x(t) = (v(\cdot, t), r(\cdot, t))$.

Лемма 2.5.3. *Пусть $\alpha \in (0, 2)$, $\nu > 0$, пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ имеют вид* (2.5.13), *а операторы L и M определены формулами* (2.5.14). *Тогда $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$\mathcal{X}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{X}^1 = \{(z, \nu \Pi \Delta z) : z \in \mathbb{H}_\sigma^2\}$, $\mathcal{Y}^0 = \{0\} \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y}^1 = \mathbb{H}_\sigma \times \{0\}$.

Доказательство. Банаховы пространства $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi$ и $\mathcal{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$ рефлексивны, поскольку являются даже гильбертовыми. Возьмем $\alpha \in [1, 2)$, $\delta \in (0, \pi(1/\alpha - 1/2))$, $\theta_1 = \pi/2 + \delta$, $a_1 = 0$. Тогда $(\mu^\alpha I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$ при всех $\mu \in S_{0,\theta_1}$, так как $|\arg \mu^\alpha| \in (\pi/2, \pi)$ и спектр оператора A действителен и отрицателен. Кроме того, $A(\mu^\alpha I - A)^{-1} = \mu^\alpha(\mu^\alpha I - A)^{-1} - I \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)$, поэтому $(\mu^\alpha I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma; \mathbb{H}^2_\sigma)$. Следовательно, для $\mu \in S_{0,\theta_1}$, $z_1 \in \mathbb{H}_\sigma$, $z_2 \in \mathbb{H}^2_\sigma$

$$(\mu^\alpha L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta (\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} & I \end{pmatrix},$$

$$R^L_{\mu^\alpha}(M) = \begin{pmatrix} (\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} & \mathbb{O} \\ \nu \Pi \Delta (\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \; L^L_{\mu^\alpha}(M) = \begin{pmatrix} (\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$\|(\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} z_1\|^2_{\mathbb{H}_\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle z_1, \varphi\rangle|^2}{|\mu^\alpha - \nu\lambda_k|^2} \le \frac{\|z_1\|^2_{\mathbb{H}_\sigma}}{\sin^2\theta_1 |\mu^\alpha|^2},$$

$$\|(\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} z_2\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\lambda_k^2)|\langle z_2, \varphi\rangle|^2}{|\mu^\alpha - \nu\lambda_k|^2} \le \frac{\|z_2\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma}}{\sin^2\theta_1 |\mu^\alpha|^2},$$

$$\|\nu \Pi \Delta (\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} z_2\|^2_{\mathbb{H}_\pi} \le C_1 \|(\mu^\alpha I - \nu A)^{-1} z_2\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma} \le \frac{C_2 \|z_2\|^2_{\mathbb{H}^2_\sigma}}{|\mu^\alpha|^2},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{H}_\sigma$, C_1, C_2 — некоторые положительные константы. Таким образом, $R^L_{\mu^\alpha}(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L^L_{\mu^\alpha}(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$. Если $\alpha = 1$, то отсюда следует, что $(L, M) \in \mathcal{H}_1(0, \theta_1)$. В случае $\alpha \in (1, 2)$ $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $a_0 > 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$ согласно лемме 2.5.1.

При $\alpha \in (0, 1)$ предыдущие рассуждения справедливы для всех $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$ и поэтому $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(0, \theta_0)$ с некоторым $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ в силу леммы 2.5.2.

Проекторы P, Q без труда вычисляются с помощью теоремы 2.2.1 (ii), используя их, находим $\mathcal{X}^0 = \ker P$, $\mathcal{X}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 = \mathrm{im} Q$. □

Замечание 2.5.5. Очевидно, что в данном случае $L_1, M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$. Из доказательства леммы 2.5.3 следует, что

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \nu^{-1} A^{-1} & \mathbb{O} \\ \Pi \Delta A^{-1} & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X}),$$

поэтому $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$. Оператор L_1^{-1} не является непрерывным из $\mathcal{Y}^1$ в $\mathcal{X}^1$ как обратный оператор для оператора вложения из $\mathbb{H}^2_\sigma$ в $\mathbb{H}_\sigma$.

Теорема 2.5.8. *Пусть* $\nu > 0$, $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma$ *при* $\alpha \in (0, 1]$, $v_0, v_1 \in \mathbb{H}^2_\sigma$ *при* $\alpha \in (1, 2)$, $g \in C((0, T); \mathbb{L}_2)$, $\Sigma g \in C\big([0, T); \mathbb{H}^2_\sigma\big)$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.5.9)–(2.5.12).

Доказательство. Из вида проектора P следует, что условия (2.5.9) эквивалентны условиям (2.2.13). Согласно замечанию 2.5.5 $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, подпространство $D_{L_1} \cap D_{M_1} = \mathcal{X}^1$ изоморфно $\mathbb{H}^2_\sigma$, $Qf(t) = \Sigma g(\cdot, t)$ при $t \in [0, T)$. По теореме 2.2.10 получим требуемое. □

Заключение

Таким образом, в диссертационной работе найдены условия существования аналитических разрешающих семейств операторов линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с дробной производной Римана — Лиувилля. Это позволило исследовать однозначную разрешимость задачи типа Коши и задачи типа Шоуолтера — Сидорова (в вырожденном случае) для линейных неоднородных и полулинейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно дробной производной, а также имеющих при производной Римана — Лиувилля вырожденный линейный оператор. Для полулинейных уравнений решение понимается в локальном смысле.

Общие результаты использованы при исследовании вопросов существования и единственности решения для ряда начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных, как разрешимых, так и не разрешимых относительно дробной производной по времени: для одного класса уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора, для классической и квазистационарной системы уравнений фазового поля и для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса дробного порядка по времени.

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, при этом

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$; $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

2. Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского и греческого алфавитов, операторы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита.

3. $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$;

$\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в пространстве $\mathcal{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Y}$;

$\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{X}) := \mathcal{C}l(\mathcal{X})$.

4. Область определения оператора A обозначается через D_A, его ядро — через $\ker A$, образ — через imA. Символом $\operatorname{span}\mathcal{B}$ обозначается линейная оболочка множества $\mathcal{B}$.

5. Через $L_q(\Omega;\mathcal{X})$ и $W_q^l(\Omega;\mathcal{X})$ обозначаются пространства Лебега и Соболева соответственно функций $u : \Omega \to \mathcal{X}$, где область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, $q \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$, $H^l(\Omega;\mathcal{X}) := W_2^l(\Omega;\mathcal{X})$.

6. Символами I и $\mathbb{O}$ обозначаются соответственно тождественный и нулевой операторы, области определения которых ясны из контекста.

7. Символ $\Box$ лежит в конце доказательства.

Список литературы

[1] Байбулатова, Г. Д. Задача стартового управления для одного класса вырожденных уравнений с младшими дробными производными / Г. Д. Байбулатова // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, № 3. — С. 271–284.

[2] Бондарь, Л. Н. Асимптотическое поведение на бесконечности решений неоднородного уравнения Соболева / Л. Н. Бондарь, Г. В. Демиденко // Сиб. мат. журн. — 2018. — Т. 59, № 5. — С. 998–1012.

[3] Бояринцев, Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск: Наука, 2000. — 223 с.

[4] Бояринцев, Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы: Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.

[5] Булатов, М. В. О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений / М. В. Булатов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1994. — Т. 34, № 3. — С. 360–372.

[6] Васильев, В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. — Киев: Академпресс, 2008. — 256 с.

[7] Герасимов, А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения / А. Н. Герасимов // Прикл. математика и механика. — 1948. — Т. 12. — С. 529–539.

[8] Глушак, А. В. О свойствах задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А. В. Глушак // Мат. заметки. — 2007. — Т. 82, вып. 5. — С. 665–677.

[9] Глушак, А. В. О корректности задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А. В. Глушак // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 9. — С. 13–24.

[10] Глушак, А. В. О разрешимости абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором / А. В. Глушак, Х. К. Авад // Соврем. математика. Фундамент. направления. — 2013. — Т. 47. — С. 18–32.

[11] Глушак, А. В. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара / А. В. Глушак, Т. А. Манаенкова // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 9. — С. 1294–1304.

[12] Головизнин, В. М. Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях / В. М. Головизнин, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев и др. — М.: Наука, 2010. — 342 с.

[13] Гордиевских, Д. М. Разрешимость начально-краевых задач для некоторых систем уравнений дробного порядка по времени / Д. М. Гордиевских, В. Е. Федоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — Т. 12. — С. 12–22.

[14] Демиденко, Г. В. Краевые задачи в четверти пространства для систем не типа Коши-Ковалевской / Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева // Тр. Ин-та математики СО РАН. — 1994. — Т. 26. — С.42–76.

[15] Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 438 с.

[16] Егоров, И. Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов. — Новосибирск: Наука, 2000. — 336 с.

[17] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[18] Кайкина, Е. И. Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 61–114.

[19] Кайкина, Е. И. Периодическая задача для нелинейного уравнения Соболева / Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв // Функц. анализ и его приложения. — 2010. — Т. 44, № 3. — С. 14–26.

[20] Кожанов, А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 2. — С. 359–376.

[21] Кожанов, А. И. Задача с косой производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений / А. И. Кожанов // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т. 37, № 6. — С. 1335–1346.

[22] Кожанов, А. И. Начально-краевая задача для уравнения типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником / А. И. Кожанов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 1. — С. 70–75.

[23] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010. — 240 с.

[24] Корпусов, М. О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2011. — 376 с.

[25] Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 204 с.

[26] Летников, А. В. Теория дифференцирования с произвольным указателем / А. В. Летников // Мат. сб. — 1868. — Т. 3, вып. 1. — С. 1–68.

[27] Летников, А. В. Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем / А. В. Летников // Мат. сб. — 1868. — Т. 3, вып. 1. — С. 85–112.

[28] Летников, А. В. К разъяснению главных положений теории дифференцирования с произвольным указателем / А. В. Летников // Мат. сб. — 1872. — Т. 6, вып. 4. — С. 413–445.

[29] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.

[30] Мамчуев, М. О. Краевая задача для многомерной системы уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля / М. О. Мамчуев // Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 732–747.

[31] Нахушев, А. М. Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

[32] Нахушев, А. М. Элементы дробного исчисления и их применение / А. М. Нахушев. — Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. — 299 с.

[33] Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.

[34] Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. — М.: Мир, 1992. — 352 с.

[35] Плотников, П. И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П. И. Плотников, А. В. Клепачева // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 3. — С. 651–669.

[36] Плотников, П. И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П. И. Плотников, В. Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 3. — С. 461–471.

[37] Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М.: Наука, 2005. — 199 с.

[38] Псху, А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 141–182.

[39] Псху, А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка / А. В. Псху // Мат. сб. — 2011. — Т. 202, № 4. — С. 111–122.

[40] Псху, А. В. О продолжении решений дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 1. — С. 133–136.

[41] Псху, А. В. О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей / А. В. Псху // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1076–1082.

[42] Пятков, С. Г. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа. Вырожденный случай / С. Г. Пятков, Н. Л. Абашеева // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 678–693.

[43] Романова, Е. А. Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай /

Е. А. Романова, В. Е. Федоров // Мат. заметки Сев.-Восточ. федер. ун-та. — 2016. — Т. 23, № 4 (92). — С. 58–72.

[44] Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

[45] Свиридюк, Г. А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, вып. 4 (298). — С. 47–74.

[46] Сидоров Н. А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н. А. Сидоров // Мат. заметки. — 1984. — Т. 25, № 4. — С. 569–578.

[47] Сидоров, Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 726–728.

[48] Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. — М.: Физматлит, 2019. — 224 с.

[49] Соболев, С. Л. Об одной новой задаче для систем уравнений в частных производных / С. Л. Соболев // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 81, № 6. — С.1007–1009.

[50] Соболев, С. Л. Задача Коши для частного случая систем, не принадлежащих типу Ковалевской / С. Л. Соболев // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 82, № 2. — С. 205–208.

[51] Соболев, С. Л. Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18. — С. 3–50.

[52] Соболев, С. Л. О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью / С. Л. Соболев // Прикл. механика и тех. физика. — 1960. — № 3. — С. 20–55.

[53] Трибель, Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

[54] Уразаева, А. В. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики / А. В. Уразаева, В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 8. — С. 1111–1119.

[55] Учайкин, В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 510 с.

[56] Фалалеев, М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности / М. В. Фалалеев // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 10. — С. 68–75.

[57] Фалалеев, М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестник Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2011. — Вып. 7, № 4 (211). — С. 100–110.

[58] Федоров, В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В. Е. Федоров // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 173–200.

[59] Федоров, В. Е. О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 12. — С. 1646–1649.

[60] Федоров, В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 8. — С. 131–160.

[61] Федоров, В. Е. Обобщение теоремы Хилле — Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В. Е. Федоров // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 2. — С. 426–448.

[62] Федоров, В. Е. Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов / В. Е. Федоров // Вестн. Челяб. гос. ун–та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Вып. 11, № 20 (158). — С. 12–19.

[63] Федоров В. Е. О порождении аналитического в секторе разрешающего семейства операторов дифференциального уравнения распределенного порядка / В. Е. Федоров // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2020. — Т. 489. — С. 113–129.

[64] Федоров, В. Е. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Изв. вузов. Математика. — 2015. — № 1. — С. 71–83.

[65] Федоров, В. Е. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В.Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1367–1375.

[66] Федоров, В. Е. Один класс вырожденных дробных эволюционных систем в банаховых пространствах / В. Е. Федоров, А. Дебуш // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 12. — С. 1616–1622.

[67] Федоров, В. Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 11. — С. 1548–1556.

[68] Федоров, В. Е. Об аналитических в секторе разрешающих семействах операторов сильно вырожденных эволюционных уравнений высокого и дробного порядков / В. Е. Федоров, Е. А. Романова // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзоры. — 2017. — Т. 137. — С. 82–96.

[69] Федоров, В. Е. Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае / В. Е. Федоров, Е. А. Романова // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. — 2018. — Т. 149. — С. 103–112.

[70] Федоров, В. Е. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / В. Е. Федоров, Е. А. Романова, А. Дебуш // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. — 2016. — Т. 16, No 2. — С. 93–107.

[71] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

[72] Чистяков, В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 320 с.

[73] Чубенко, П. А. Разрушение решения одного нелинейного нелокального уравнения соболевского типа / П. А. Чубенко // Дифференц. уравнения. — 2009. — Т. 45, № 2. — С. 211–219.

[74] Юшков, Е. В. О разрушении решения нелокальной системы уравнений гидродинамического типа / Е. В. Юшков // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 76, № 1. — С. 201–224.

[75] Bajlekova, E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / E. G. Bajlekova. — PhD thesis. — Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001. — 107 p.

[76] Balachandran, K. Existence of solutions of abstract fractional integrodifferential equations of Sobolev type / K. Balachandran, S. Kiruthika // Computers and Mathematics with Applications. — 2012. — Vol. 64, No. 10. — P. 3406–3413.

[77] Caginalp, G. An analysis of a phase field model of a free boundary / G. Caginalp // Archives for Rational Mechanics and Analysis. — 1986. — Vol. 92. — P. 205–245.

[78] Caginalp, G. Stefan and Hele — Shaw type models as asymptotic limits of the phase-field equations / G. Caginalp // Physical Review A. — 1989. — Vol. 39. — P. 5887–5896.

[79] Caputo, M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent. II / M. Caputo // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1967. — Vol. 13. — P.529–539.

[80] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. — Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. — 247 p.

[81] Favini, A. Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems / A. Favini // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. — 1979. — Vol. 12, No. 3–4. — P. 511–536.

[82] Favini, A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations / A. Favini, A. Yagi // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 1993. — Vol. CLXIII. — P. 353–384.

[83] Favini, A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York, etc.: Marcel Dekker Inc., 1999. — 324 p.

[84] Fedorov, V. E. Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations / V. E. Fedorov // Mathematics. — 2020. Vol. 8, no. 1306. — 15 p.

[85] Fedorov, V.E. Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order / V. E. Fedorov, N. D. Ivanova // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2017. — Vol. 20, No. 3. — P. 706–721.

[86] Fedorov, V. E. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann — Liouville derivative / V. E. Fedorov, R. R. Nazhimov // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2019. — Vol. 22, No. 2. — P. 271–286.

[87] Fractional Calculus and its Applications. Proceedings of the International Conference held at the University of New Haven, June 1974 / ed. B. Ross. — Lecture Notes in Mathematics. — Vol. 457. — Berlin; Heidelberg: Springer, 1975. — 386 p.

[88] Hassard, B. D. Theory and Applications of Hopf Bifurcation / B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y.-H. Wan. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[89] Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer. — Singapore: WSPC, 2000. —465 p.

[90] Hopf, E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen / E. Hopf // Mathematische Nachrichten. — 1950–1951. — Vol. 4. — P. 213–231.

[91] Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Science Publishing, 2006. — 541 p.

[92] Kostić, M. Abstract Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. — Boca Raton: CRC Press, 2015. — 458 p.

[93] Kostić, M. Abstract Degenerate Volterra Integro-Differential Equations / M. Kostić. — Београд : Математички институт САНУ, 2020. — 516 p.

[94] Leray, J. Essai sur le mouvement plans d'un liquide visqueux que limitent des parois / J. Leray // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1934. — Ser. IX, vol. XIII, fasc. 4. — P. 331–418.

[95] Li, F. Existence of mild solutions for fractional integrodifferential equations of Sobolev type with nonlocal conditions / F. Li, J. Liang, H. K. Xu // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 391. — P. 510–525.

[96] Lyapunov — Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publisher, 2002. — 568 p.

[97] Mainardi, F. The time fractional diffusion-wave equations / F. Mainardi // Radiophysics and Quantum Electronics. — 1995. — Vol. 38. — P. 13–24.

[98] Mamchuev, M. Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order / M. Mamchuev // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, iss. 9. — P. 1475.

[99] Melnikova, I. V. Abstract Cauchy Problems: Three Approahes / I. V. Melnikova, A. Filinkov. — Boca Raton; London; New York; Washington: Chapman & Hall / CRC, 2001. — 242 p.

[100] Metzler, R. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach / R. Metzler, J. Klafter // Physics Reports. — 2000. — Vol. 339. — P. 1–77.

[101] Miller, K. S. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations / K. S. Miller, B. Ross. — New York: John Wiley & Sons, 1993. — 384 p.

[102] Novozhenova, O. G. Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2017. — Vol. 20. — P. 790–809.

[103] Oldham, K. B. The Fractional Calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. — Boston: Academic Press, 1974. — 234 p.

[104] Oseen, C. W. Hydrodynamik / C. W. Oseen. — Leipzig: Akad. Verl.-Ges., 1927. — 337 p.

[105] Peng, J. Cauchy problems for fractional differential equations with Riemann — Liouville fractional derivatives / J. Peng, K. Li, J. Jia // Journal of Functional Analysis. — 2012. — Vol. 263. — P. 476–510.

[106] Plekhanova, M. V. Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations / M. V. Plekhanova // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 312. — P. 39–46.

[107] Plekhanova, M. V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative / M. V. Plekhanova // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2017. — Vol. 40, iss. 17. — P. 6138–6146.

[108] Plekhanova, M. V. Optimal control for quasilinear degenerate systems of higher order / M. V. Plekhanova // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — Vol. 219, no. 2. — P. 236–244.

[109] Plekhanova, M. V. Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions / M. V. Plekhanova // AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1759. — P. 020101.

[110] Plekhanova, M. V. Strong solutions of quasilinear equations in Banach spaces not solvable with respect to the highest-order derivative / M. V. Plekhanova // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S. — 2016. — Vol. 9, no. 3. — P. 833–847.

[111] Plekhanova, M. V. Numerical solution of an optimal control problem for Oskolkov's system / M. V. Plekhanova, G.D. Baybulatova, P.N. Davydov// Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2018. — Vol. 41, iss. 18. — P. 9071–9080.

[112] Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego; Boston: Academic Press, 1999. — 340 p.

[113] Poincare, H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'unmouvement de rotation / H. Poincare // Acta Mathematica. — 1885. — Vol. 7. — P. 259–380.

[114] Prüss, J. Evolutionary Integral Equations and Applications / J. Prüss. — Basel: Springer, 1993. — 366 p.

[115] Pyatkov, S. G. Inverse problems for some Sobolev-type mathematical models / S. G. Pyatkov, S. N. Shergin // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2016. — Т. 9, № 2. — С. 75–89.

[116] Ross, B. The Development of Fractional Calculus 1695–1900 / B. Ross // Historia Mathematica. — 1977. — Vol. 4. — P. 75–89.

[117] Saichev, A. I. Fractional kinetic equations: Solutions and applications / A. I. Saichev, G. M. Zaslavsky // Chaos. — 1997. — Vol. 7. — P. 753–764.

[118] Shlesinger, M. F. Strange kinetics / M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, J. Klafter // Nature. — 1993. — Vol. 336. — P. 31–37.

[119] Showalter, R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R. E. Showalter // SIAM Journal of Mathematical Analysis. — 1975. — Vol. 6, No. 1. — P. 25–42.

[120] Shishkina, E. L. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov — Caputo type / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // Mathematics. — 2019. — Vol. 7, no. 12. — P. 1216.

[121] Shishkina, E. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering / E. Shishkina, S. Sitnik. — Elsevier, Academic Press, 2020. — 592 p.

[122] Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht; Boston: VSP, 2003. — 216 p.

[123] Tarasov, V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. — New York: Springer, 2011. — 450 p.

[124] Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems / W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. — Basel : Springer Basel AG, 2011. — 539 p.

[125] West, J. B. Physics of Fractal Operators / J. B. West, M. Bologna, P. Grigolini. — New York: Springer, 2003. — 354 p.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

[126] Авилович, А. С. Вопросы однозначной разрешимости и приближённой управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гёльдеровой правой частью / А. С. Авилович, Д. М. Гордиевских, В. Е. Федоров // Челяб. физ.-мат. журн. — 2020. — Т. 5, № 1. — С. 5–21.

[127] Федоров, В. Е. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Сиб. мат. журн. — 2019. — Т. 60, № 2. — С.461–477.

[128] Fedorov, V. E. Initial Problems for Semilinear Degenerate Evolution Equations of Fractional Order in the Sectorial Case / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich, L. V. Borel // Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems. NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7. Ed. by I.Area, A.Cabada, J.A.Cid etc. — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2019. — Vol. 292. — P. 41–62.

Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным

[129] Авилович, А. С. Задача Шоуолтера — Сидорова для уравнения, не разрешимого относительно производной Римана – Лиувилля / А. С. Авилович // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: сб. тез. росс.-франц. семинара. — Ханты-Мансийск: Югорский формат, 2019. — С. 7.

[130] Авилович, А. С. Начальные задачи для вырожденных полулинейных эволюционных уравнений с производной Римана – Лиувилля / А. С. Авилович // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные

уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. — С. 11.

[131] Авилович, А. С. Полулинейные уравнения с производной Римана – Лиувилля в секториальном случае / А. С. Авилович // Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование: материалы Междунар. симпозиума, посвящ. 100-летию мат. образования в Вост. Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О.В.Васильева. — Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2019. — С. 106–107.

[132] Авилович, А. С. Задача типа Шоуолтера — Сидорова для вырожденного эволюционного уравнения с производной Римана – Лиувилля / А. С. Авилович // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. — С. 10.

[133] Авилович, А. С. Задача Коши для вырожденного эволюционного уравнения с производной Римана — Лиувилля / А. С. Авилович, В. Е. Федоров // Соболевские чтения: тез. докл. Междунар. шк.-конф., посвящ. 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева, 2018. — С. 47.

[134] Авилович, А. С. Задача типа Коши для линейного уравнения в банаховом пространстве с вырожденным оператором при дробной производной Римана — Лиувилля / А. С. Авилович, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2018. — С. 12.

[135] Авилович, А. С. Существование и единственность решения задачи типа Коши для невырожденного полулинейного уравнения / А. С. Авилович, В. Е. Федоров // Комплексный анализ, математическая физика и нели-

нейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. — С. 10.

[136] Федоров, В. Е. Один класс вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXIX: материалы Междунар. конф., посвящ. 90-летию В. А. Ильина. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 224–225.

[137] Федоров, В. Е. Порождение аналитического разрешающего семейства операторов уравнения распределенного порядка / В. Е. Федоров, А. С. Авилович // IX Междунар. конф. по мат. моделированию, посвящ. 75-летию В. Н. Врагова: тез. докл. — Якутск: Издат. дом СВФУ, 2020. — С. 10–11.

[138] Fedorov, V. E. Degenerate fractional order differential equations in Banach spaces and applications / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich // 2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS'19, Belgorod, Russia. — Belgorod: Belgorod State University, 2019. — P. 34–35.

[139] Fedorov, V. E. On solvability of fractional order degenerate evolution equations in the sectorial case / V. E. Fedorov, A. S. Avilovich // Book of Abstracts of International Analysis and Boundary Value Problems. — Santiago de Compostela, 2018. — P. 110.