Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

На правах рукописи

ПАНАСЕНКО АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПОРЯДКИ В ПРОСТЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СУПЕРАЛГЕБРАХ И ПОЧТИ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Колесников Павел Сергеевич

Новосибирск — 2020

Содержание

Введение

Постановка задачи.

Одним из важнейших вопросов теории колец является изучение простых и первичных колец. Описание простых конечномерных ассоциативных алгебр над полем как матричных алгебр было получено Ф.Э. Молиным [12] для поля комплексных чисел и Дж.Г.М. Веддербёрном [63] для произвольного поля. В классе колец, близких к ассоциативным, особо выделяются многообразия альтернативных и йордановых колец. Ключевой пример альтернативного кольца — октонионы (алгебра чисел Кэли) над вещественными числами — были построены А. Кэли в 1845 году и были обобщены Л.Е. Диксоном в [28]. Само понятие альтернативного кольца возникло у М.А. Цорна в [65]. В этой работе было доказано, что простая конечномерная альтернативная неассоциативная алгебра является алгеброй октонионов над своим центром. Важными продвижениями в описании бесконечномерных алгебр являлись теорема Жевлакова о том, что любая простая альтернативная коммутативная алгебра является полем [3] и теорема Скорнякова об описании альтернативных тел [18]. Полное описание простых бесконечномерных неассоциативных альтернативных алгебр, как алгебр Кэли-Диксона над своим центром, получил Е. Клейнфелд [43].

Йордановы алгебры возникли как попытка алгебраического описания аксиом квантовой механики в работе Е. Вигнера, П. Йордана и Дж. фон Неймана [40], в которой была построена структурная теория конечномерных формально-вещественных йордановых алгебр. Было показано, что такие алгебры в некотором смысле близки к матричным, за одним исключением. Окончательное описание произвольных простых йордановых алгебр было получено Е.И. Зельмановым в [7].

Первичные ассоциативные кольца с тождественными соотношениями были описаны Е. Познером и Л. Роуэном в [53], [58], см. также [11] и [10]. В этих работах доказано, что каждое такое кольцо является центральным порядком в матричной алгебре, то есть в простой конечномерной алгебре над полем частных центра исходного кольца. М. Слейтер [60] доказал аналогичный результат для альтернативных алгебр: любая такая алгебра над полем характеристики не 3 (либо при условии невырожденности) является центральным порядком в алгебре октонионов. Первичные невырожденные йордановы PI-алгебры так же описаны Е.И. Зельмановым [7], как центральные порядки в простых йордановых алгебрах, однако кроме конечномерных примеров (так же, как и в случае простых йордановых PI-алгебр) присутствует одно исключение. Эти теоремы отмечают важность центральных порядков в конечномерных простых алгебрах: при некоторых ограничениях ими исчерпываются (или почти исчерпываются) примеры первичных колец в определенных многообразиях.

Центральные порядки в конечномерных центральных простых ассоциативных алгебрах изучались во многих работах (зачастую под названием аффинная алгебра, либо первичная PI-алгебра), например, в [11], [54]. Общая теория первичных неассоциативных алгебр была построена в работе [29].

Важность градуированных структур в различных областях математики и математической физики привела к изучению простых и первичных супералгебр. Статья [62] посвящена изучению центральных простых супералгебр. В работе [55] доказано, что любая простая конечномерная ассоциативная супералгебра является супералгеброй эндоморфизмов некоторого суперпространства над некоторой супералгеброй с делением. В той же работе получено описание супералгебр с делением.

Е.И. Зельмановым и И.П. Шестаковым [8] было доказано, что первичная (простая) альтернативная супералгебра над полем характеристики, отличной от 2 и 3, является либо ассоциативной, либо кольцом Кэли-Диксона. Позднее И.П. Шестаков завершил классификацию простых альтернативных супералгебр [24]: в характеристике 2 и 3 они исчерпываются несколькими примерами и одной серией примеров. В той же работе был получен следующий результат: первичные альтернативные супералгебры с дополнительным условием невырожденности являются суперцентральными порядками в простых альтернативных супералгебрах. Таким образом, понятие порядка для супералгебр возникает естественным образом.

Простые конечномерные йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 были классифицированы В.Г. Кацем [41] (см. также работу И.Л. Кантора [9]). Простые конечномерные йордановы супералгебры произвольной характеристики были описаны Е.И. Зельмановым, М.Л. Расином и К. Мартинез [45], [56], некоторые примеры были построены И.П. Шестаковым в [24]. Бесконечномерные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью изучались в серии работ В.Н. Желябиным, например в [5]. Первичные йордановы супералгебры изучались в работах [4], [42], [47].

Одним из самых интересных результатов в теории центральных порядков является следующая теорема, доказанная Е. Форманеком и опубликованная им в 1974 г. в работе [33]:

Теорема. Пусть A — унитарная первичная PI-алгебра с центром Z. Тогда A вкладывается в конечно порожденный свободный Z-модуль. В частности, если Z нетеров, то A является конечно порожденным Z-модулем.

Другое доказательство этого результата изложено в [46].

В связи с теоремой Форманека естественным образом формулируется следующая проблема.

Проблема 1. Можно ли вложить центральный порядок в конечномерной центральной простой альтернативной (йордановой) супералгебре в конечный модуль над центром?

Конечномерность — весьма сильное условие. Активно изучаются так же алгебры с различными другими условиями конечности. Структурная теория алгебр с условием минимальности построена в ассоциативных (Е. Артин), альтернативных (К.А. Жевлаков) и йордановых (Н. Джекобсон, Дж. Осборн) алгебрах. В то же время алгебры с условием максимальности могут иметь очень разнообразное строение. Например, нильпотентность правого ниль-идеала в ассоциативных и альтернативных нетеровых кольцах получена Я. Левицким и К.А. Жевлаковым (характеристика не 3). Изучению нетеровых ассоциативных алгебр посвящена монография [46]. В связи с отсутствием классификации нетеровых алгебр, вызывает интерес изучение алгебр, которые удовлетворяют дополнительному условию конечности кроме условия обрыва возрастающих цепей идеалов.

С другой стороны, подход к той же тематике дает алгебраическая геометрия. При рассмотрении $\mathbb{N}$-градуированных алгебр возникает желание обобщить на них понятие простого кольца. Поскольку прямая сумма всех компонент, начиная с некоторой, является градуированным идеалом, то вместо простоты естественно рассматривать алгебры, в которых каждый идеал содержит такую сумму. Если все компоненты конечномерны, это приводит к понятию почти конечномерной алгебры.

Почти конечномерной (или минимально бесконечномерной, [13]) называется бесконечномерная алгебра, каждый нетривиальный гомоморфный образ которой является конечномерным. Ассоциативные почти конечномерные алгебры изучались в ряде работ последние четверть века.

Например, в работе [49] было показано, что любую конечно порожденную бесконечномерную алгебру можно гомоморфно отобразить на почти конечномерную алгебру. В статье [32] было доказано, что конечно порожденная, полупростая, почти конечномерная ассоциативная алгебра над несчетным полем является либо примитивной, либо PI-алгеброй. Так же в этой работе описаны ассоциативные бесконечномерные алгебры с единицей, у которых каждый ненулевой односторонний идеал имеет конечную коразмерность: доказано, что такая алгебра является либо алгеброй с делением, либо конечным модулем над своим центром, который является почти конечномерной алгеброй. В [57] очень подробно изучались ассоциативные почти конечномерные $\mathbb{N}$-градуированные алгебры. В частности, были построены примеры конечно порожденных почти конечномерных ассоциативных алгебр, не удовлетворяющих тождественным соотношениям. Там же был приведен пример ассоциативной почти конечномерной алгебры, которая не является нетеровой для односторонних идеалов. Другие интересные примеры с теми же свойствами были построены в статье [26]. Изучению $\mathbb{N}$-градуированных ассоциативных почти конечномерных алгебр так же посвящена работа [61].

Одной из первых работ, посвященных неассоциативным почти конечномерным алгебрам, является работа [59]. В частности, там построен пример почти конечномерной алгебры Ли, не являющейся полупервичной (более того, в ней существует абелев идеал единичной коразмерности). Почти конечномерные $\mathbb{N}-$градуированные алгебры Ли изучались так же в работе [34]. Необходимо отметить возникший интерес к изучению почти конечномерных лиевых и йордановых супералгебр: эта тематика затрагивается в работах [48], [51], [52].

В теории групп имеется аналогичная терминология: группа называется минимально бесконечной, если все ее нетривиальные нормальные подгруппы имеют конечный индекс. Началом исследования данной области послужила работа Дж.С. Уилсона [64]. Имеется связь между этими понятиями для групп и для алгебр: например, в работе [36] приводится конструкция построения примеров минимально бесконечных групп G (как прямого предела некоторой последовательности групп) и доказывается, что при некоторых ограничениях групповая алгебра $K[G]$ и соответствующая группе G C^*-алгебра будут почти конечномерными. Почти конечномерным C^*-алгебрам так же посвящены работы [27] и [37].

Отдельный интерес представляют совместные работы К. Пендергграсс-Райс и Дж. Фарины. В статье [30] доказано, что почти конечномерные ассоциативные алгебры являются первичными. В качестве следствия из теоремы Форманека получено, что почти конечномерная ассоциативная алгебра с единицей, удовлетворяющая тождественному соотношению, является конечным модулем над своим центром, который сам является почти конечномерной алгеброй. Это направление исследований продолжено в работе этих же авторов совместно с Дж. Бэллом [31], а именно, было доказано, что почти конечномерные ассоциативные алгебры с единицей и ненулевым собственным идеалом, не удовлетворяющие тождественным соотношениям, имеют конечномерный центр. Кроме того, в этой работе рассматривалась устойчивость почти конечномерности относительно расширения исходного поля скаляров.

Сформулируем следующую проблему.

Проблема 2. Описать почти конечномерные альтернативные и йордановы алгебры.

Главная цель работы состоит в изучении суперцентральных порядков в конечномерных простых супералгебрах и почти конечномерных алгебр, в том числе решение проблем 1 и 2.

Содержание работы

Общая структура диссертации. Каждая из глав диссертации подразделяется на параграфы. В начале каждой главы есть краткое описание его содержания и результатов. Нумерация утверждений (лемм, теорем, предложений, следствий), а также некоторых примеров и замечаний сквозная внутри главы. Каждый номер состоит из двух чисел: первое соответствует номеру главы, второе — порядковому номеру утверждения в данном параграфе. Нумерация параграфов, таблиц и формул так же состоит из двух чисел: первое соответствует номеру главы, второе — порядковому номеру внутри главы.

Глава 1 содержит основные предварительные сведения о альтернативных и йордановых алгебрах. Приводятся все определения, которые потребуются в дальнейшем. Для удобства дальнейших ссылок на некоторые известные результаты, они сформулированы в виде теорем.

Глава 2 посвящена суперцентральным порядкам в альтернативных супералгебрах. Доказывается, что центральный порядок в простой конечномерной ассоциативной супералгебре вкладывается в конечный модуль над своим суперцентром. Доказано, что любое кольцо Кэли-Диксона вкладывается в конечный модуль над центром. Аналогичная теорема о вложимости доказана для центральных порядков в простых конечномерных альтернативных супералгебрах $\mathbf{O} = \mathbf{H} + v\mathbf{H}$, $\mathbf{O}[u]$, $\mathbf{B(1,2)}$ и $\mathbf{B(4,2)}$.

Глава 3 посвящена суперцентральным порядкам в йордановых супералгебрах. Доказывается, что первичная невырожденная йорданова PI-алгебра либо вкладывается в конечный модуль над своим центром, либо является центральным порядком в алгебре невырожденной билинейной симметрической формы на бесконечномерном пространстве. Теорема о вложимости в конечный модуль над суперцентром так же доказана для суперцентральных порядков в классических простых йордановых супералгебр с полупростой четной частью.

Глава 4 посвящена почти конечномерным алгебрам. Доказывается первичность и невырожденность почти конечномерных альтернативных и йордановых алгебр. Получено описание почти конечномерных альтернативных алгебр и почти конечномерных йордановых PI-алгебр. Доказано, что стандартные способы получения йордановых алгебр из ассоциативных сохраняют свойство почти конечномерности.

Основные результаты диссертации

1. Доказано, что суперцентральный порядок в альтернативной конечномерной простой супералгебре либо вкладывается в конечный модуль над суперцентром, либо является порядком в скрученной супералгебре векторного типа (теорема 2.4., опубликовано в [77])

2. Доказано, что суперцентральный порядок в классической йордановой конечномерной простой супералгебре с полупростой четной частью вкладывается в конечный модуль над суперцентром (теоремы 3.4. и 3.5., опубликовано в [80]);

3. Получено описание почти конечномерных йордановых PI и альтернативных алгебр (теоремы 4.14. и 4.26., опубликовано в [77], [78], [80]).

Научная новизна.

Все научные результаты диссертации являются новыми, полученными автором самостоятельно (пп. 1) или в неразделимом соавторстве с В.Н. Желябиным (пп.2-3).

Теоретическая и практическая значимость результатов.

Результаты, изложенные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть полезны для специалистов в теории альтернативных и йордановых алгебр и супералгебр, а также могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в областях алгебры.

Методология и методы исследования.

В диссертации используются классические методы структурной и комбинаторной теории неассоциативных колец, так же используется развитая структурная теория простых и первичных альтернативных (йордановых) алгебр и супералгебр. Методы, разработанные Е. Форманеком, модернизированы для применения в рамках теории неассоциативных колец, а так же для градуированных алгебр.

Апробация результатов.

Результаты диссертации докладывались на международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2014-2017); международной алгебраической конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2015-2019), международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2016), международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша (Москва, 2018), неоднократно на семинаре «Теория колец» им. А.И. Ширшова в ИМ СО РАН и на семинаре «Алгебра и логика».

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [66–80]. В том числе, статьи [77–80] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Павлу Сергеевичу Колесникову за помощь и поддержку в процессе обучения и научной деятельности. Автор выражает благодарность Виктору Николаевичу Желябину за постановку интересной задачи, внимание к работе и полезные обсуждения. Так же автор благодарит всех сотрудников лаборатории теории колец ИМ СО РАН и кафедры алгебры и математической логики ММФ НГУ за создание творческой атмосферы, необходимой для написания этой работы.

Глава 1

Предварительные результаты

В данной главе определяются основные понятия теории альтернативных и йордановых алгебр, которые понадобятся нам в дальнейшем. Кроме того, формулируются важные классические результаты, которыми мы будем неоднократно пользоваться. Если терминология не подкреплена ссылкой на литературу, то соответствующий материал основан на книге [1]. Если не оговорено противное, то на протяжении всей диссертации термин «алгебра» означает линейное пространство над полем, снабженное билинейной операцией умножения.

1.1 Альтернативные алгебры

Пусть A — алгебра. Для любых элементов $x, y \in A$ введем следующие обозначения:

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz),$$

$$[x, y] = xy - yx.$$

Элемент (x, y, z) называется *ассоциатором* элементов $x, y, z \in A$, а элемент $[x, y]$ — *коммутатором* элементов $x, y \in A$.

Определение. Алгебра A называется *альтернативной*, если в ней выполнены следующие тождества:

$$(x, y, y) = (x, x, y) = 0.$$

Эти тождества эквивалентны условию, что ассоциатор является кососимметричной функцией от своих аргументов.

Важным является следующее эквивалентное определение альтернативной алгебры.

Теорема 1.1. (Е. Артин, [1]). *Алгебра является альтернативной тогда и только тогда, когда любая ее подалгебра, порожденная двумя элементами, является ассоциативной.*

Пример ([1]) Пусть k — некоторое поле и A — унитарная алгебра над полем k с инволюцией $\bar{\ } : A \to A$ такой, что $a + \overline{a}, a\overline{a} \in k$. Возьмем $\alpha \in k$. Рассмотрим алгебру (A, α), состоящую из пар (x, y), $x, y \in A$. Сложение на (A, α) задано покомпонентно, а умножение следующим равенством:

$$(a_1, a_2) \cdot (a_3, a_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \overline{a}_2, \overline{a}_1 a_4 + a_3 a_2).$$

Кроме того, на (A, α) определена инволюция $\overline{(a_1, a_2)} = (\overline{a}_1, -a_2)$. Процесс построения алгебры (A, α) по заданной алгебре A называется *процессом Кэли-Диксона.* Рассмотрим $K(\mu)$: двумерную алгебру над полем k с базисом $1, v$ и умножением $v^2 = v + \mu$. Инволюция на $K(\mu)$ задается правилом $\overline{\alpha + \beta v} = (\alpha + \beta) - \beta v$. Рассмотрим алгебру $C(\mu, \beta, \gamma) = ((K(\mu), \beta), \gamma)$. Она называется *алгеброй Кэли-Диксона.* Если характеристика поля k не равна 2, то $C(\mu, \beta, \gamma) = (((k, \alpha), \beta), \gamma)$, где $\alpha = \frac{4\mu+1}{4}$, причем в $(((k, \alpha), \beta), \gamma)$ можно выбрать базис $e_0 = 1, e_1, \ldots, e_7$ со следующей таблицей умножения:

Таблица 1.1

Умножение в алгебре Кэли-Диксона, $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	α	e_3	αe_2	e_5	αe_4	$-e_7$	$-\alpha e_6$
e_2	$-e_3$	β	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	$-\alpha\beta$	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$-\alpha\beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	γ	$-\gamma e_1$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_3$
e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$-\alpha e_6$	γe_1	$-\alpha\gamma$	γe_3	$\alpha\gamma e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_5	γe_2	$-\gamma e_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma e_1$
e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$\alpha\beta e_4$	γe_3	$-\alpha\gamma e_2$	$\beta\gamma e_1$	$\alpha\beta\gamma$

Если характеристика поля k равна 2, то в $C(\mu, \beta, \gamma)$ можно выбрать базис

$e_0 = 1, e_1, \dots, e_7$ со следующей таблицей умножения:

Таблица 1.2

Умножение в алгебре Кэли-Диксона, $\mathrm{char}(k) = 2$.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	$e_1 + \mu$	$e_2 + e_3$	μe_2	$e_4 + e_5$	μe_4	e_7	$e_7 + \mu e_6$
e_2	e_3	β	βe_1	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	$e_3 + \mu e_2$	$\beta + \beta e_1$	$\mu\beta$	e_7	$\alpha e_6 + e_7$	$\beta(e_5 + e_4)$	$\mu\beta e_4$
e_4	e_5	e_6	e_7	γ	γe_1	γe_2	γe_3
e_5	$e_5 + \mu e_4$	e_7	$e_7 + \mu e_6$	$\gamma + \gamma e_1$	$\mu\gamma$	$\gamma(e_3 + e_2)$	$\mu\gamma e_2$
e_6	$e_6 + e_7$	βe_4	$\beta(e_5 + e_4)$	γe_2	$\gamma(e_2 + e_3)$	$\beta\gamma$	$\beta\gamma(e_1 - 1)$
e_7	μe_6	βe_5	$\beta\gamma e_4$	γe_3	$\mu\gamma e_2$	$\beta\gamma e_1$	$\mu\beta\gamma$

Алгебра Кэли-Диксона проста, альтернативна и неассоциативна [1].

Определение. Алгебра A называется *первичной*, если для любых ее идеалов $I, J \subset A$ из того, что $IJ = 0$ следует $I = 0$ или $J = 0$. Алгебра A называется *полупервичной*, если для любого ее идеала $I \subset A$ из того, что $I^2 = 0$ следует $I = 0$.

Первичные алгебры играют важную роль в структурной теории любого многообразия алгебр. В ассоциативном случае важное свойство первичных алгебр с тождественным соотношением получено Е. Познером и Л. Роуэном. Сперва напомним еще несколько ключевых понятий.

Определение. Пусть A — алгебра. Ее *центром* $Z(A)$ называется множество всех таких элементов $a \in A$, которые ассоциируют и коммутируют со всеми элементами алгебры. Иными словами,

$$Z(A) = \{a \in A| \quad \forall x, y \in A \qquad (a, x, y) = (x, a, y) = (x, y, a) = [x, a] = 0\}.$$

Рассмотрим алгебру A, центр $Z = Z(A)$ которой отличен от нуля и не содержит делителей нуля алгебры A. Рассмотрим пары $(a, z) \in A \times Z$. Определим на $A \times Z$ бинарное отношение

$$(a_1, z_2) \sim (a_2, z_2) \quad \leftrightarrow \quad (a_1 z_2 - a_2 z_2) = 0.$$

Легко проверяется, что это отношение эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий пару (a, z) обозначим через $z^{-1}a$, а множество всех классов эквивалентности через $Z^{-1}A$. Введем сложение и умножение в $Z^{-1}A$ следующим образом:

$$z_1^{-1}a_1 + z_2^{-1}a_2 = (z_1z_2)^{-1}(z_2a_1 + z_1a_2),$$
$$(z_1^{-1}a_1)(z_2^{-1}a_2) = (z_1z_2)^{-1}(a_1a_2).$$

Непосредственная проверка показывает, что сложение и умножение определены корректно и задают на $Z^{-1}A$ структуру алгебры, а центром $Z^{-1}A$ будет поле частных $Z^{-1}Z$.

Определение. Пусть A — алгебра и пусть $Z(A)$ отличен от нуля и не содержит делителей нуля алгебры A. Тогда алгебра A называется центральным порядком в алгебре B, если $B = Z^{-1}A$.

Важнейшим утверждением в теории первичных ассоциативных PI-колец является следующая теорема:

Теорема 1.2. (Е. Познер, Л. Роуэн, [10]). *Первичная ассоциативная алгебра, удовлетворяющая тождественному соотношению, является центральным порядком в полной матричной алгебре, конечномерной над своим центром.*

Определение. Альтернативная алгебра A называется *невырожденной*, если из того, что для некоторого $a \in A$ $aAa = 0$ следует, что $a = 0$.

Определение. Алгебра A называется *кольцом Кэли-Диксона*, если она является центральным порядком в алгебре Кэли-Диксона.

Утверждение, аналогичное теореме 1.2., для первичных невырожденных альтернативных алгебр доказал Слейтер.

Теорема 1.3. (М. Слейтер, [1]). *Любая первичная невырожденная альтернативная неассоциативная алгебра является кольцом Кэли-Диксона.*

При этом от условия невырожденности можно отказаться при ограничении на характеристику или при условии на локально нильпотентный радикал.

Теорема 1.4. (М. Слейтер, [1]) *Любая первичная альтернативная неассоциативная алгебра над полем характеристики не 3 является кольцом Кэли-Диксона. Любая первичная альтернативная неассоциативная алгебра* *с нулевым локально нильпотентным радикалом является кольцом Кэли-Диксона.*

Напомним определение алгебры Грассмана

Определение. Пусть G — алгебра над полем F, порожденная счетным множеством переменных x_i и соотношениями

$$x_i^2 = 0,$$

$$x_i x_j + x_j x_i = 0, \qquad i \neq j.$$

Тогда алгебра G называется *алгеброй Грассмана.*

Теперь можно ввести понятие супералгебры некоторого многообразия.

Определение. Алгебра A называется Z_2*-градуированной*, если она представляется в виде прямой суммы пространств $A = A_0 \oplus A_1$ так, что $A_0^2 \subset A_0$, $A_1^2 \subset A_0$, $A_1 A_0 + A_0 A_1 \subset A_1$.

Алгебра Грассмана имеет естественную Z_2-градуировку $G = G_0 \oplus G_1$, где пространство G_0 порождается мономами четной степени, а пространство G_1 — нечетной. Если $A = A_0 \oplus A_1$ — некоторая Z_2-градуированная алгебра, то ее *грассмановой оболочкой* называется подалгебра $A_0 \otimes G_1 + A_1 \otimes G_0$ в $A \otimes G$.

Определение. Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — Z_2-градуированная алгебра и $\mathcal{M}$ — некоторое многообразие алгебр. Тогда A называется $\mathcal{M}$*-супералгеброй*, если ее грассманова оболочка $G(A)$ является алгеброй многообразия $\mathcal{M}$.

В частности, ассоциативная супералгебра — просто Z_2-градуированная ассоциативная алгебра.

Понятие центра для Z_2-градуированных алгебр неудобно, поскольку действие элементами центра может менять степень однородности элементов алгебры.

Определение. Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — Z_2-градуированная алгебра. Тогда ее *суперцентром* называется четная часть центра $Z(A)_0$.

Аналогично неградуированному случаю определяется *супералгебра частных* $Z(A)_0^{-1}A$ для Z_2-градуированной алгебры A, суперцентр которой отличен от нуля и не содержит делителей нуля в A. Тогда A называется *суперцентральным порядком* в Z_2-градуированной алгебре B, если $B = Z(A)_0^{-1}A$. В этом случае, алгебра B называется *суперцентральным замыканием* алгебры A.

Определение. Пусть $D = D_0 \oplus D_1$ — Z_2-градуированная алгебра. D называется *супералгеброй с делением* или *супертелом*, если любой однородный ненулевой элемент из D обратим.

Вся основная терминология теории алгебр непосредственно переносится на супералгебры, но вместо идеалов рассматриваются градуированные идеалы, т.е. которые допускают индуцированную Z_2-градуировку. В частности, супералгебра называется *простой*, если она не содержит ненулевых собственных градуированных идеалов и имеет ненулевое умножение.

Обозначим через $C_B(u) = \{x \in B | xu = ux\}$ *централизатор* элемента u в алгебре B. Аналогично, $S_B(u) = \{x \in B | xu = -ux\}$.

М.Л. Расин в [55] доказал, что ассоциативная артинова простая супералгебра является алгеброй линейных преобразований некоторого векторного суперпространства над некоторой супералгеброй с делением. В той же работе были описаны все супералгебры с делением (по модулю описания тел над произвольным полем). Для дальнейшего приведем ограничение формулировки этого результата на конечномерные алгебры.

Теорема 1.5. (М.Л. Расин, [55]). *Если $D = D_0 + D_1$ — конечномерная центральная супералгебра с делением над полем F, то справедливо одно (и только одно) из следующих утверждений (всюду далее ε означает некоторую (неградуированную) алгебру с делением k):*

1) $D = D_0 = \varepsilon$, $D_1 = 0$;

2) $D = \varepsilon \otimes k[u]$, $u^2 = \lambda \in k$, $\lambda \neq 0$, $D_0 = \varepsilon \otimes k1$, $D_1 = \varepsilon \otimes ku$;

3) $D = \varepsilon$, $D_0 = C_\varepsilon(u)$, $D_1 = \{d \in \varepsilon | du = -ud\}$, где $k[u] \subset \varepsilon$ — квадратичное расширение поля k;

4) $D = M_2(\varepsilon) = \varepsilon \otimes_k M_2(k)$, $D_0 = \varepsilon \otimes k[u] = C_D(u)$, $D_1 = \varepsilon \otimes k[u]w = S_d(u)$, где $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и $k[u]$ не содержится в ε.

Простые альтернативные супералгебры характеристики, отличной от 2 и 3, были классифицированы Е.И. Зельмановым и И.П. Шестаковым в [8], а именно было доказано, что все они являются либо ассоциативными, либо тривиальными. В работе [24] И.П. Шестаков описал простые альтернативные супералгебры характеристики 2 и 3. В той же работе были описаны первичные альтернативные супералгебры с некоторым ограничением невырожденности. Приведем эти результаты более подробно. Начнем с примеров простых альтернативных супералгебр характеристики 2 и 3.

Пример 1.6. a) $\mathrm{char}(k) = 2$. Пусть $\mathbf{O} = \mathbf{H} + v\mathbf{H}$ — алгебра Кэли-Диксона с естественной Z_2-градуировкой, $\mathbf{H}$ — тело кватернионов над k. Тогда $\mathbf{O} = \mathbf{H} + v\mathbf{H}$ — простая альтернативная супералгебра.

b) $\mathrm{char}(k) = 2$. Применим к алгебре $\mathbf{O}$ процесс Кэли-Диксона. $k[u] = k + ku$, $u^2 = \alpha \neq 0 \in k$. Тогда $\mathbf{O}[u] = k[u] \otimes_k \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{O}u$ — простая альтернативная супералгебра.

c) $\mathrm{char}(k) = 3$. Пусть $A = k1$ — одномерное пространство, $M = kx + ky$ — двумерное пространство над k. Обозначим $\mathbf{B(1,2)} = A + M$ — коммутативная супералгебра над k, где 1 — единица в $\mathbf{B(1,2)}$ и $xy = 1$. Тогда $\mathbf{B(1,2)}$ — простая альтернативная супералгебра.

d) $\mathrm{char}(k) = 3$. Пусть $A = M_2(k)$ — алгебра 2×2 матриц над полем k, $M = km_1 + km_2$ — двумерное пространство над k. Обозначим $\mathbf{B(4,2)} = A + M$ — Z_2-градуированная алгебра над k, где $e_{ij}m_k = \delta_{ij}m_j$, $m_1^2 = -e_{21}$, $m_2^2 = e_{12}$, $m_1m_2 = e_{11}$ и $ma = \overline{a}m$. Здесь $\overline{a}$ — симплектическая инволюция. Тогда $\mathbf{B(4,2)}$ — простая альтернативная супералгебра.

e) $\mathrm{char}(k) = 3$. Пусть Γ — ассоциативная и коммутативная D-простая алгебра, D — дифференцирование на Γ, $\gamma \in \Gamma$ и $\overline{\Gamma}$ — это изоморфная копия линейного пространства Γ. Рассмотрим $B(\Gamma, D, \gamma) = \Gamma + \overline{\Gamma}$ — прямая сумма линейных пространств со следующим умножением:

$$x \cdot y = xy,$$

$$x \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot y = \overline{xy},$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = (\gamma xy + 2D(a)b + aD(b)),$$

где $a, b \in \Gamma$, ab — умножение в Γ. Тогда $B(\Gamma, D, \gamma)$ — это простая альтернативная супералгебра.

Теперь мы можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1.7. (Е.И. Зельманов, И.П. Шестаков, [8], [24]) *Простая альтернативная неассоциативная нетривиальная супералгебра является* *одной из алгебр 1-5 из примера 1.6., при этом поле обязательно имеет характеристику, равную 2 или 3.*

Теорема 1.8. (И.П. Шестаков, [24]) *Пусть $B = A + M$ — первичная альтернативная неассоциативная алгебра над полем k с суперцентром Z. Кроме того, пусть выполнено одно из следующих условий:*

1) существуют такие $a, b \in A$, что $[a, b]^4 \neq 0$;

2) в A нет таких ниль-идеалов I, что $(I, M, M) \subset I$.

Тогда суперцентр Z супералгебры B является ненулевой областью, не содержащей делителей нуля супералгебры B, и суперцентральное замыкание $Z^{-1}B$ является центральной простой альтернативной супералгеброй над полем $Z^{-1}Z$.

В дальнейшем мы будем неоднократно упоминать следующий важный результат Е.Форманека:

Теорема 1.9. (Е. Форманек, [33] *Унитальная первичная ассоциативная PI-алгебра вкладывается в конечный модуль над своим центром.*

1.2 Йордановы алгебры

В этом параграфе все алгебры рассматриваются над полями характеристики не 2.

Определение. Алгебра A называется *йордановой*, если в ней выполнены следующие тождества:

$$[x, y] = (x^2, y, x) = 0.$$

Пример. Пусть A — ассоциативная алгебра. Рассмотрим алгебру $A^{(+)}$, аддитивная структура которой совпадает с таковой на пространстве алгебры A, но имеющую умножение $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, где xy — умножение в алгебре A. Непосредственные вычисления показывают, что $A^{(+)}$ — йорданова алгебра.

Определение. Йорданова алгебра J называется *специальной*, если J является подалгеброй в алгебре $A^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры A. Неспециальные йордановы алгебры называются *исключительными*.

Определение. Линейное отображение $\varphi : A \to A$ алгебры в себя называется *инволюцией*, если оно является антиавтоморфизмом порядка 2, то есть если $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$ и $\varphi(\varphi(x)) = x$ для любых $x, y \in A$.

Пример. Пусть A — ассоциативная алгебра с инволюцией $*$. Тогда множество симметрических элементов относительно этой инволюции $H(A, *) = \{x \in A | x^* = x\}$ является подалгеброй в $A^{(+)}$ и, следовательно, является йордановой алгеброй.

Пример. Пусть V — векторное пространство над полем F с определенной на нем билинейной симметрической формой $f(x, y)$. Тогда множество пар $\{(\alpha, x) : \alpha \in F, x \in V\}$ с умножением $(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta + f(x, y), \alpha y + \beta x)$ и покомпонентным сложением является йордановой алгеброй. Она называется *йордановой алгеброй симметрической билинейной формы.* Хорошо известно, что она специальна.

Пример. Рассмотрим $\mathcal{C}_3$ — алгебру матриц третьего порядка над некоторой алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{C}$. Отображение $X \to \overline{X}^t$, которое действует как композиция инволюции к каждому члену матрицы и ее транспонирования, является инволюцией алгебры $\mathcal{C}_3$. Множество симметрических элементов относительно этой инволюции $H(\mathcal{C}_3)$ является алгеброй относительно йорданова произведения $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.

Теорема 1.10. (А. Алберт, [1]). *$H(C_3)$ — исключительная йорданова алгебра.*

Определение. Если алгебра $K \otimes_F J$ изоморфна $H(\mathcal{C}_3)$ для некоторого расширения K поля F, то J называется *алгеброй Алберта.* Она является, как известно (см., например, [1]) простой исключительной 27-мерной над центром йордановой алгеброй.

Определение. Алгебра называется *кольцом Алберта*, если она является центральным порядком в алгебре Алберта.

Описание простых йордановых алгебры во многом сводится к описанию простых ассоциативных. Подробнее в следующей теореме.

Теорема 1.11. (Е.И. Зельманов, [7]. *Любая простая йорданова алгебра J удовлетворяет одному из следующих пунктов:*

1) $J \simeq A^{(+)}$ для некоторой простой ассоциативной алгебры A;

2) $J \simeq H(A, *)$ для некоторой простой ассоциативной алгебры A с инволюцией $*$;

3) J — алгебра симметрической билинейной невырожденной формы.

4) J — алгебра Алберта.

Несложно убедиться, что йорданова алгебра является *эластичной*, то есть удовлетворяет тождеству

$$(x, a, x) = 0.$$

В связи с этим, понятие невырожденной алгебры определено для многообразия йордановых алгебр.

Теорема 1.12. (Е.И. Зельманов, [7]. *Любая первичная невырожденная йорданова алгебра J удовлетворяет одному из следующих пунктов:*

1) J — центральный порядок в йордановой алгебре симметрической билинейной невырожденной формы.

2) В J есть ненулевой идеал I, изоморфный алгебре $B^{(+)}$ для некоторой ассоциативной первичной алгебры B.

3) В J есть ненулевой идеал I, изоморфный алгебре $H(B, *)$ для некоторой ассоциативной первичной алгебры B с инволюцией $*$.

4) J — кольцо Алберта.

При этом, в теоремах выше только четвертые пункты дают исключительные алгебры.

Если $A = A_0 + A_1$ — это Z_2-градуированная алгебра, то можно определить алгебру $A^{(+)}$ с той же структурой векторного пространства, но с другим умножением: для любых $x, y \in A_0 \cup A_1$:

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + (-1)^{|x||y|}yx).$$

Если A — ассоциативная супералгебра, то $A^{(+)}$ — йорданова супералгебра.

Определение. Линейной отображение $\varphi : A \to A$ Z_2-градуированной алгебры $A = A_0 + A_1$ в себя называется *суперинволюцией*, если оно является суперантиавтоморфизмом порядка 2, то есть $\varphi(xy) = -1^{|x||y|}\varphi(y)\varphi(x)$ и $\varphi(\varphi(x)) = x$ для любых $x, y \in A_0 \cup A_1$.

Пусть теперь A — ассоциативная супералгебра с суперинволюцией $x \to x^*$. Тогда алгебра симметрических элементов относительно этой суперинволюции является подсупералгеброй в $A^{(+)}$ и обозначается через $H(A, *)$. Обозначение $H_n(A)$ означает подсупералгебру симметрических элементов в $M_n(A)$ с естественной градуировкой относительно композиции * и транспонирования матрицы.

В работе [56] М.Л. Расин и Е.И. Зельманов классифицировали все простые конечномерные йордановы супералгебры с полупростой четной частью. Приведем примеры простых йордановых супералгебр из этой статьи.

Пример 1.13. a) Если $X = M_{n+m}(k)$, то $X^{(+)}$ обозначается через $M_{n,m}(k)$.

b) Введем следующее обозначение:

$$Q_n(k) = \Big\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} |a, b \in M_n(k)\Big\}^{(+)}.$$

Тогда $Q_n(k)$ — это простая йорданова супералгебра. Легко видеть, что $Q_n(k) = M_n(k) + \overline{M_n(k)} = A + M$, где $A = M_n(k)$ действует на $M = \overline{M_n(k)}$ симметризованным матричным умножением на $M_n(k)$ и для $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{M_n(k)}$ имеем $\overline{x}\overline{y} = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x)$, где $x \cdot y$ — умножение в ассоциативной алгебре $M_n(k)$.

c) $osp_{n,2m}(k)$

d) Введем следующее обозначение:

$$P_n(k) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{n+n}(k) | a^T = d, b^T = -b, c^T = c\}.$$

Тогда $P_n(k)$ — это простая йорданова супералгебра, если $n > 1$.

e) Положим $A = Ke_1 + Ke_2$, $M = Kx + Ky$, где e_1, e_2 — ортогональные идемпотенты, $e_i x = \frac{1}{2}x$, $e_i y = \frac{1}{2}y$, $xy = e_1 + te_2$, где $0 \neq t \in k$. Тогда $D_t = A + M$ — это простая йорданова супералгебра.

f) Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ — векторное суперпространство, $(,)$ — невырожденная суперформа на V, причем ее ограничение на $V_0 \times V_0$ симметрично, а на $V_1 \times V_1$ — кососимметрично. Если $A = V_0 + ke$, $M = V_1$, где e — единица в $J = A + M$ и $xy = (x, y)e$ для $x, y \in V$. Тогда J — это простая йорданова супералгебра.

g) Пусть $A = H_3(k)$. Тогда определено симметризованное действие $H_3(k)$ на $S_3(k)$, где $S_3(k)$ — это множество кососимметричных элементов относительно транспонирования. Введем обозначения $\overline{S_3(k)}$ и $\overline{\overline{S_3(k)}}$ для двух изоморфных копий $H_3(k)$-модулей $S_3(k)$ и обозначим $M = \overline{S_3(k)} \oplus \overline{\overline{S_3(k)}}$. Определим умножение на $J = A + M$. Если $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \overline{S_3(k)}$ и $\overline{\overline{y}}_1, \overline{\overline{y}}_2 \in \overline{\overline{S_3(k)}}$, то

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 = \overline{\overline{y}}_1\overline{\overline{y}}_2 = 0,$$

$$\overline{x}_1\overline{\overline{y}}_1 = x_1 \cdot y_1,$$

где $x_1 \cdot y_1$ — это умножение в йордановой алгебре $M_3(k)^+$. Тогда $J = H_3(k) + (\overline{S_3(k)} \oplus \overline{\overline{S_3(k)}})$ — это простая йорданова супералгебра.

h) Положим $B = B(4,2) = A + M$ из примера 1.6.d. На B определена инволюция $(a+m)^* = \overline{a} - m$, где $a \in A$, $m \in M$ и $\overline{a}$ — это симплектическая инволюция на $A = M_2(k)$. Определим суперинволюцию на $M_3(B)$, она является композицией * и транспонирования. Тогда симметрические элементы относительно этой суперинволюции обозначаются через $H_3(B)$ и образуют простую йорданову супералгебру.

Определение. Будем называть алгебры из примера 1.13. *классическими простыми йордановыми супералгебрами.*

Теорема 1.14 (М.Л. Расин, Е.И. Зельманов, [56]). *Простая унитарная йорданова конечномерная супералгебра с полупростой четной частью над алгебраически замкнутым полем является классической.*

Глава 2

Центральные порядки в конечномерных простых альтернативных супералгебрах

Вторая глава посвящена доказательству теоремы Форманека для простых альтернативных супералгебр.

2.1 Центральные порядки в ассоциативных супералгебрах

В этом параграфе доказывается теорема Форманека для простых ассоциативных супералгебр.

Приведем основной пример простой ассоциативной супералгебры.

Пример 2.1. Рассмотрим алгебру матриц $M_n(A)$, где A — некоторая ассоциативная алгебра над полем k. Пусть $n = p + q$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда $M_n(A) = M_0 + M_1$, где M_0 состоит из всех таких матриц X, что $X_{ij} = 0$ при $i \leqslant p < j$ и $X_{ij} = 0$ при $j \leqslant p < i$, а M_1 состоит из всех таких матриц, что $X_{ij} = 0$ при $i, j \leqslant p$ и $X_{ij} = 0$ при $i, j > p$. Разбиение $M_n(A) = M_0 + M_1$ задает Z_2-градуировку на алгебре $M_n(A)$. Супералгебра с такой градуировкой обозначается $M_{p+q}(A)$.

Легко заметить, что в примере 2.1. $M_0 \simeq M_p(A) \oplus M_q(A)$ — прямая сумма идеалов.

Всюду ниже в этом параграфе $B = B_0 + B_1$ — ассоциативная супералгебра, $Z = Z(B)_0 \neq 0$ — ее суперцентр, не содержащий делителей нуля в B, и $A = Z^{-1}B$ — супералгебра частных алгебры B.

Используя теорему 1.5., докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть $B = B_0 + B_1$ — унитарная ассоциативная супералгебра, $Z = Z(B)_0$ — ее суперцентр, не содержащий делителей нуля супералгебры B, $A = Z^{-1}B$ — суперцентральное замыкание супералгебры B. Тогда, если супералгебра A проста и конечномерна, то B вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль*

Доказательство. Е. Форманек доказал эту теорему для случая $B_1 = A_1 = 0$ (теорема 1.9.). По теореме Расина $A \simeq End_D(V)$ — изоморфизм алгебр, где D — супералгебра с делением и V — суперпространство над супертелом D. Будем использовать следующие обозначения: $k = Z^{-1}Z$, k_1 означает суперцентр супералгебры A.

1) Пусть $D = D_0 = \varepsilon$. Тогда $End_D(V) \simeq M_{p+q}(D)$. В этом случае из $Z(M_{p+q}(D)) \subset A_0$ следует $Z(B) \subset B_0$ и $A \simeq Z(B)^{-1}B$. Так как $M_{p+q}(D)$ является простой алгеброй, то по теореме 1.9. получаем требуемое.

2) Пусть $D = \varepsilon \otimes_k k[u]$, $u^2 = \lambda \in k$ и $\lambda \neq 0$. В этом случае $A \simeq M_n(D_0) + M_n(D_1)$.

Сперва рассмотрим случай $\varepsilon = k$, то есть $D \simeq k[u]$. Пусть $a \in B$. Тогда $a = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}u)e_{ij}$. Пусть $e_{ij} = f_{ij}/z_0$, $u = v/z_0, \lambda = \mu/z_0$, где $f_{ij}, v \in B$, $\mu, z_0 \in Z$. Справедливо следующее равенство:

$$\sum_{t=1}^{n} f_{ti}af_{jt} = z_0^2(\alpha_{ij} + \beta_{ij}u) \in B \cap Z(A) = Z(B),$$

откуда следует, что $\alpha_{ij}z_0^2 \in Z$. Но

$$z_0^2 av = z_0^2(z_0\alpha_{ij}v + \beta_{ij}\lambda z_0) \in B \cap Z(A) = Z(B),$$

откуда $\beta_{ij}\mu z_0^3 \in Z$. Таким образом, $a\mu z_0^3 \in Z + Zu$. Это означает, что B вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль $\sum Ze_{ij} + \sum Zue_{ij}$.

Перейдем к общему случаю. Пусть теперь ε — это произвольное конечномерное тело. Тогда в ε содержится максимальное подполе $P = k[b]$, причем b^m — это линейная комбинация $\{1, b, \ldots, b^{m-1}\}$ over k для некоторого m. Более того, можно считать, что $b \in B_0$. Заметим, что

$$Z^{-1}(B \otimes_Z Z[b]) = M_n(D) \otimes_Z Z[b] \simeq M_n(D) \otimes_Z k[b] \simeq M_n(D) \otimes_k k[b] \simeq \\ \simeq M_n(\varepsilon \otimes k[u]) \otimes P \simeq k[u] \otimes_k M_n(\varepsilon) \otimes_k P \simeq M_{mn}(P) \otimes_k k[u] \simeq \\ \simeq M_{mn}(P) \otimes_P k[u] \simeq M_{mn}(P) \otimes_P P[u] \simeq M_{mn}(P \otimes_P P[u]) = M_{mn}(P[u]).$$

Это означает, что $B \otimes_Z Z[b]$ удовлетворяет условию разобранного выше частного случая, откуда вытекает, что $B \otimes_Z Z[b]$ вкладывается в свободный конечно порожденный $Z[b]$-модуль. Модуль $Z[b]$ конечно порожден над Z, так что $B \otimes_Z Z[b]$ вкладывается в конечно порожденный Z-модуль. Осталось заметить, что $B \subset B \otimes_Z Z[b]$.

3) Пусть $D = \varepsilon$, $D_0 = C_\varepsilon(u)$, $D_1 = S_\varepsilon(u)$, $k[u] \subset \varepsilon$. Докажем, что $Z(\varepsilon) = k$. Достаточно показать, что $Z(B)_1 = 0$. Если $0 \neq x \in Z(\varepsilon)_1$, то $ux = xu = -ux$, откуда $ux = 0$ и $x = 0$. Это означает, что $Z(\varepsilon) = k$. Используя теорему 1.9., получаем требуемое.

4) Пусть $D = M_2(\varepsilon) = \varepsilon \otimes_k M_2(k)$, $D_0 = \varepsilon \otimes_k k[u] = C_\varepsilon(u)$, $D_1 = \varepsilon \otimes k[u]w = S_\varepsilon(u)$, где $w \in M_2(k)$, причем $k[u]$ не содержится в ε.

Рассмотрим сперва случай $\varepsilon = k$. В этом случае $D = M_2(k)$, откуда $Z(A)_1 = 0$. Алгебра $M_n(M_2(k))$ проста, так что мы можем использовать теорему 1.9.

Теперь рассмотрим общий случай, пусть ε является произвольным конечномерным телом. Очевидно, что $Z(M_n(M_2(\varepsilon))) \simeq Z(\varepsilon) \simeq k$ аналогично 3-му случаю. Следовательно, мы снова можем использовать теорему 1.9. Теорема доказана.

2.2 Центральные порядки в алгебре октонионов

В данном параграфе теорема Форманека доказывается для случая алгебры Кэли-Диксона.

Теорема 2.3. *Пусть A — кольцо Кэли-Диксона с единицей и центром Z. Тогда A вкладывается в конечно порожденный свободный Z-модуль.*

Доказательство. Поскольку A — кольцо Кэли-Диксона, то алгебра $B = (Z^*)^{-1}A = \mathcal{C}(K)$ — алгебра Кэли-Диксона над полем $K = (Z^*)^{-1}Z$.

1) Пусть характеристика основного поля не равна 2. Тогда существуют $\alpha, \beta, \gamma \in K \setminus \{0\}$ и $1 = e_0, e_1, ..., e_7$ — базис B над K с таблицей умножения 1.1.

Положим $D = Ze_0 + Ze_1 + \ldots + Ze_7$. Тогда D — конечно порожденный свободный Z-модуль.

Существует такой $z \in Z^*$, что $e_i = \frac{f_i}{z}, \alpha = \frac{\delta}{z}, \beta = \frac{\lambda}{z}, \gamma = \frac{\nu}{z}$, где $f_i \in A$, $\delta, \lambda, \nu \in Z^*$. Обозначим $x \circ y = xy + yx$. Пусть $a \in A$. Тогда $a = \sum\limits_{i=0}^{7} \alpha_i e_i$ для некоторых $\alpha_i \in K$. Непосредственно проверяются следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
z^2\alpha_0 &= \frac{(((a \circ f_1)f_1) \circ f_2)f_2}{4\delta\lambda},\\
z\alpha_1 &= \frac{((a \circ f_1) \circ f_2)f_2}{4\delta\lambda},\\
z\alpha_2 &= \frac{((a \circ f_2) \circ f_1)f_1}{4\delta\lambda},\\
\alpha_3 &= \frac{((a \circ f_3) \circ f_1)f_1}{-4\delta^2\lambda},\\
z\alpha_4 &= \frac{((a \circ f_4) \circ f_1)f_1}{-4\delta\nu},\\
\alpha_5 &= \frac{((a \circ f_5) \circ f_1)f_1}{-4\delta^2\nu},\\
\alpha_6 &= \frac{((a \circ f_6) \circ f_1)f_1}{-4\delta\lambda\nu},\\
\alpha_7 &= \frac{((a \circ f_7) \circ f_1)f_1}{-4\delta^2\lambda\nu}z.
\end{aligned}
$$

Таким образом, получаем, что $(4z^2\delta^2\lambda\nu)\alpha_i \in Z$. Поэтому $(4z^2\delta^2\lambda\nu)a \in D$ для любого $a \in A$. Значит, $z_0A \in D$, где $z_0 = 4z^2\delta^2\lambda\nu$. Так как D — конечный Z-модуль, то z_0A вкладывается в конечный Z-модуль.

2) Пусть характеристика основного поля равна 2. Тогда существуют $\mu, \beta, \gamma \in K \setminus \{0\}$ и $1 = e_0, e_1, ..., e_7$ — базис B над K с таблицей умножения 1.2.

Положим $D = Ze_0 + Ze_1 + \ldots + Ze_7$. Тогда D — конечно порожденный свободный Z-модуль.

Существует такой $z \in Z^*$, что $e_i = \frac{f_i}{z}, \mu = \frac{\delta}{z}, \beta = \frac{\lambda}{z}, \gamma = \frac{\nu}{z}$, где $f_i \in A$, $\delta, \lambda, \nu \in Z^*$. Обозначим $x \circ y = xy + yx$. Пусть $a \in A$. Тогда $a = \sum\limits_{i=0}^{7} \alpha_i e_i$ для некоторых $\alpha_i \in K$. Возможны два подслучая:

2.a) $\mu \neq 0$. Непосредственно проверяются следующие равенства:

$$\delta z \alpha_1 = (az - a \circ f_1)(f_1 - z)$$

$$z\delta\lambda\alpha_2 = \delta(a \circ f_3)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_3$$

$$z\delta\lambda\alpha_3 = \delta(a \circ f_2)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_2$$

$$z\nu\delta\alpha_4 = \delta(a \circ f_5)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_5$$

$$z\nu\delta\alpha_5 = \delta(a \circ f_4)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_4$$

$$\nu\lambda\delta\alpha_6 = \delta(a \circ f_7)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_7$$

$$\nu\lambda\delta\alpha_7 = \delta(a \circ f_6)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_6$$

Таким образом, получаем, что $(\delta\lambda\nu)\alpha_i \in Z$. Поэтому $(\delta\lambda\nu)a \in D$ для любого $a \in A$. Значит, $z_0 A \in D$, где $z_0 = \delta\lambda\nu$. Так как D — конечный Z-модуль, то $z_0 A$ вкладывается в конечный Z-модуль.

2.b) $\mu = 0$. Непосредственно проверяется следующее равенство:

$$\lambda\nu^2 z^2 \alpha_0 = ((((f_4 - f_5)(az - a \circ f_1))f_4) \circ f_6)f_6.$$

Отсюда вытекает, что $\lambda\nu^2 z^2 \alpha_0 \in Z$. Далее,

$$\lambda^2\nu^4\alpha_1 z = ((\lambda\nu^2 az^2 - \lambda\nu^2 za \circ f_1 - \lambda\nu^2\alpha_0 z^2) \circ f_6)f_6,$$

откуда $\lambda^2\nu^4\alpha_1 z \in Z$.

Непосредственно проверяются следующие равенства:

$$\lambda^3\nu^4\alpha_2 z = \lambda^2\nu^4 za \circ f_3 - \lambda^2\nu^4 z\alpha_1 f_3$$

$$\lambda^3\nu^4 z\alpha_3 = \lambda^2\nu^2 za \circ f_2 - \lambda^2\nu^4 z\alpha_1 f_2$$

$$\lambda^2\nu^5\alpha_4 z = \lambda^2\nu^4 za \circ f_5 - \lambda^2\nu^4 z\alpha_1 f_5$$

$$\lambda^2\nu^5\alpha_5 z = \lambda^2\nu^4 za \circ f_4 - \lambda^2\nu^4 z\alpha_1 f_4$$

$$\lambda^3\nu^5\alpha_6 = \lambda^2\nu^4 za \circ f_7 - \lambda^2\nu^4 z\alpha_1 f_7$$

$$\lambda^3\nu^5\alpha_7 = \lambda^2\nu^4 za \circ f_6 - \lambda^2\nu^4 z\alpha_1 f_6$$

Таким образом, если $z_0 = \lambda^3\delta^5 z^2$, то $z_0 A$ вкладывается в конечный Z-модуль $D = \sum\limits_{i=0}^{7} Z \cdot e_i$. Теорема полностью доказана.

2.3 Центральные порядки в альтернативных неассоциативных супералгебрах

В данном параграфе теорема Форманека доказывается для случая простых альтернативных супералгебр.

Теорема 2.4. *Пусть B — унитарная альтернативная супералгебра и $Z = Z(B)_0$ — ее суперцентр. Если $Z^{-1}B$ — конечномерная центральная простая супералгебра, то B вкладывается (как Z-подмодуль) в свободный конечно порожденный Z-модуль или B изоморфна скрученной супералгебре векторного типа $B(\Gamma, d, \gamma)$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.2. достаточно доказать теорему для неассоциативных супералгебр. Пусть $B = A + M$ — унитарная альтернативная неассоциативная супералгебра, $Z = Z(B)_0$ — ее суперцентр. По условию можно определить $K = Z^{-1}Z$, $\overline{B} = Z^{-1}B$, $\overline{A} = \overline{B}_0$, $\overline{M} = \overline{B}_1$.

По теореме 1.7. допустим только один из следующих случаев:

1. $charF = 2$, $\overline{B} = O = H + vH$ —алгебра Кэли-Диксона K с естественной градуировкой, полученная с помощью процесса Кэли-Диксона, H — алгебра обобщенных кватернионов. Этот случай разобран в теореме 2.3.

2. $M = 0$. Тогда $B = A$ — первичная невырожденная альтернативная алгебра, т.е. кольцо Кэли-Диксона по теореме 1.3. Этот случай разобран в теореме 2.2.

3. $charF = 3$, $\overline{A} = K \cdot 1$, $\overline{M} = K \cdot x + K \cdot y$, где 1 — это единица алгебры $B = A + M$, $x^2 = y^2 = 0$ и $xy = -yx = 1$. Тогда найдется такой $z \in Z$, что $x = \frac{x_0}{z}$, $y = \frac{y_0}{z}$. Пусть $a \in B$. Тогда $a = \alpha x + \beta y + \gamma \cdot 1$. Непосредственно проверяются следующие соотношения.

$$(((az)y_0)y_0)x_0 = -\alpha z^4,$$

$$(((az)x_0)x_0)y_0 = -\beta z^4,$$

$$((((az)y_0)x_0)x_0)y_0 = -\gamma z^5.$$

Таким образом, если $z_0 = z^5$, то $az_0 \in D = Z \cdot x + Z \cdot y + Z \cdot 1$. Поскольку $Bz_0 \simeq B$, то B вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль.

4. $charF = 3$, $\overline{A} = M_2(K)$ — алгебра квадратных матриц второго порядка над полем K, $\overline{M} = K \cdot m_1 + K \cdot m_2$,

$$m_1^2 = -e_{21},$$

$$m_2^2 = e_{12},$$

$$e_{ij} \cdot m_k = \delta_{ik} m_j,$$

$$m \cdot a = \overline{a}, m$$

где $\overline{a}$ — это симплектическая инволюция на алгебре $M_2(K)$. Тогда найдется такой $z \in Z$, что $e_{ij} = \frac{f_{ij}}{z}$, $m_i = \frac{n_i}{z}$. Пусть $a \in B$. Тогда $a = \sum\limits_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij} + \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2$. Непосредственно проверяются следующие соотношения.

$$(f_{12}(((an_1)n_1)f_{12}))f_{21} + z^2((an_1)n_1)f_{12} = -\alpha_{11} z^5$$

$$f_{12}(((an_1)n_1)f_{21}) + ((an_1)n_1)f_{21})f_{12} = -\alpha_{12} z^4$$

$$f_{21}(((an_2)n_2)f_{12}) + ((an_2)n_2)f_{12})f_{21} = \alpha_{21} z^4$$

$$(f_{21}(((an_2)n_2)f_{21}))f_{12} + z^2((an_2)n_2)f_{21} = \alpha_{22} z^5$$

$$((f_{22}(f_{12}a))n_2)f_{21} + f_{21}((f_{22}(f_{12}a))n_2) = \beta_1 z^4$$

$$((f_{11}(f_{21}a))n_1)f_{12} + f_{12}((f_{11}(f_{21}a))n_1) = -\beta_2 z^4$$

Таким образом, если $z_0 = z^5$, то $az_0 \in D = \sum\limits_{i,j} Z \cdot e_{ij} + Z \cdot m_1 + Z \cdot m_2$. Поскольку $Bz_0 \simeq B$, то B вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль.

5. $charF = 2$, $K[u] = K + Ku$, $u^2 = \alpha \neq 0 \in K$ — двумерная супералгебра и $\overline{B} = K[u] \otimes_K O = O + Ou$. Существуют $\mu \in K, \beta, \gamma \in (K \setminus 0)$ и $e_0, e_1, ..., e_7$, $e_0 u, ..., e_7 u$ — линейный базис пространства $\overline{B}$ над полем K с таблицей умножения 1.2.

Тогда найдется такой $z \in Z$, что $e_i = \frac{f_i}{z}, \mu = \frac{\nu}{z}, \beta = \frac{\lambda}{z}, \gamma = \frac{\delta}{z}, \alpha = \frac{\varepsilon}{z}, u = \frac{v}{z}$, где $f_i \in B$, $\delta, \lambda, \alpha \in Z \setminus \{0\}$, $\nu \in Z$, $v \in Z(B) \cap M$. Пусть $a \in B$. Тогда $a = \sum\limits_{i=0}^{7} \alpha_i e_i + \sum\limits_{i=0}^{7} \beta_i e_i u$. Возможны два случая.

5a. $\mu \neq 0$. Непосредственно проверяются следующие соотношения.

$$\nu z(\alpha_1 + \beta_1 u) = (az - a \circ f_1)(f_1 - z)$$

$$z\nu\lambda(\alpha_2 + \beta_2 u) = \nu(a \circ f_3)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_3$$

$$z\nu\lambda(\alpha_3 + \beta_3 u) = \nu(a \circ f_2)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_2$$

$$z\nu\delta(\alpha_4 + \beta_4 u) = \nu(a \circ f_5)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_5$$

$$z\nu\delta(\alpha_5 + \beta_5 u) = \nu(a \circ f_4)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_4$$

$$\nu\lambda\delta(\alpha_6 + \beta_6 u) = \nu(a \circ f_7)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_7$$

$$\nu\lambda\delta(\alpha_7 + \beta_7 u) = \nu(a \circ f_6)z - (az - a \circ f_1)(f_1 - z)f_6$$

Таким образом, если $z_0 = \nu\lambda\delta z$, то $az_0 \in D_1 = \sum\limits_{i=0}^{7}(B \cap (K[u])) \cdot e_i$.

5b. $\mu = 0$. Легко проверяется следующее тождество.

$$\lambda\delta^2 z^2(\alpha_0 + \beta_0 u) = ((((f_4 - f_5)(az - a \circ f_1))f_4) \circ f_6)f_6.$$

Отсюда вытекает, что $\lambda\delta^2 z^2(\alpha_0 + \beta_0 u) \in (B \cap K[u])$. Тогда справедливо следующее равенство.

$$\lambda^2\delta^4(\alpha_1 + \beta_1 u)z = ((\lambda\delta^2 az^2 - \lambda\delta^2 za \circ f_1 - \lambda\delta^2(\alpha_0 + \beta_0 u)z^2) \circ f_6)f_6,$$

откуда $\lambda^2\delta^4(\alpha_1 + \beta_1 u)z \in Z$.

Непосредственно проверяются следующие соотношения.

$$\lambda^3\delta^4\alpha_2 z = \lambda^2\delta^4 za \circ f_3 - \lambda^2\delta^4 z(\alpha_1 + \beta_1 u)f_3$$

$$\lambda^3\delta^4 z\alpha_3 = \lambda^2\delta^2 za \circ f_2 - \lambda^2\delta^4 z(\alpha_1 + \beta_1 u)f_2$$

$$\lambda^2\delta^5\alpha_4 z = \lambda^2\delta^4 za \circ f_5 - \lambda^2\delta^4 z(\alpha_1 + \beta_1 u)f_5$$

$$\lambda^2\delta^5\alpha_5 z = \lambda^2\delta^4 za \circ f_4 - \lambda^2\delta^4 z(\alpha_1 + \beta_1 u)f_4$$

$$\lambda^3\delta^5\alpha_6 = \lambda^2\delta^4 za \circ f_7 - \lambda^2\delta^4 z(\alpha_1 + \beta_1 u)f_7$$

$$\lambda^3\delta^5\alpha_7 = \lambda^2\delta^4 za \circ f_6 - \lambda^2\delta^4 z(\alpha_1 + \beta_1 u)f_6$$

Поскольку $\lambda^2\delta^4 z(\alpha_1+\beta_1 u) \in Z$, то $\lambda^3\delta^5(\alpha_i+\beta_i u)z^2 \in Z$. Таким образом, если $z_0 = \lambda^3\delta^5 z^2$ то Bz_0 вкладывается в $D_1 = \sum\limits_{i=0}^{7}(B \cap K[u]) \cdot e_i$.

В обоих случаях получаем $Bz_0 \subset \sum\limits_{i=0}^{7}(B \cap K[u])$. Если $a \in A$, то $az_0 \in B \cap K = Z$ и $Az_0 \subset \sum\limits_{i=0}^{7} Z \cdot e_i$. Если $a \in M$, то $az_0 v \in B \cap K = Z$ и $Mz_0 v \in \sum\limits_{i=0}^{7} Z \cdot e_i$. Таким образом, Az_0 и $Mz_0 v$ вкладываются в конечные Z-модули. $Az_0 \simeq A$ и $Mz0v \simeq M$, следовательно $B = A+M$ вкладывается в конечно порожденный Z-модуль. Теорема доказана.

Из теоремы 1.8. и 2.4. тривиально вытекает следующее следствие.

Следствие 2.5. *Пусть B — унитарная первичная альтернативная неассоциативная супералгебра с ограничением 1) или 2) из теоремы 1.8. и $Z = Z(B)_0$ — ее суперцентр. Тогда либо B является суперцентральным порядком в $B(\Gamma, d, \gamma)$, либо B вкладывается в конечно порожденный модуль над своим суперцентром.*

Глава 3

Центральные порядки в конечномерных простых йордановых супералгебрах с полупростой четной частью

Третья глава посвящена доказательству теоремы Форманека для простых йордановых алгебр, а так же для классических простых йордановых супералгебр. Как обычно при рассмотрении йордановых (супер)алгебр, будем считать, что характеристика всех полей отлична от 2.

3.1 Центральные порядки в йордановых алгебрах

В [39] описываются алгебры Алберта и способы получения из произвольной алгебры Алберта $H(\mathcal{C}(K)_3, *)$ с помощью расширения основного поля. В доказательстве следующей теоремы приведем эту конструкцию более подробно и с ее помощью докажем теорему Форманека для колец Алберта.

Теорема 3.1. *Всякое кольцо Алберта с единицей и центром Z вкладывается (как Z-подмодуль) в конечный свободный Z-модуль.*

Доказательство. Пусть J — кольцо Алберта с единицей и Z — его центр. Тогда $B = Z^{-1}J$ — алгебра Алберта над $K = Z^{-1}Z$. В ([39], с.359) показано, что алгебра Алберта либо является алгеброй с делением, либо имеет вид $H(\mathcal{C}(K)_3, *)$, где $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}$ — некоторая алгебра Кэли-Диксона над полем K и существует такая диагональная матрица $\Gamma = \{1, \gamma_2, \gamma_3\}$, $\gamma_i \in K$, что $X^* = \Gamma^{-1}\overline{X}^t\Gamma$ для любой матрицы X. Рассмотрим четыре случая:

1) Алгебра B изоморфна алгебре $H(\mathcal{C}(K)_3,*)$, где $\mathcal{C}(K)=\mathcal{C}$ — некоторая алгебра Кэли-Диксона над полем K и $X^*=\overline{X}^t$.

За α,β,γ обозначены элементы поля K, описанные выше в определении алгебры Кэли-Диксона, а за $e_0,\dots,e_7$ — базис этой алгебры с таблицей умножения приведенной в параграфе 1.1. Обозначим за e_{ij} матричную единицу. В алгебре B обозначим:

$$a[ij]=ae_{ij}+\overline{a}e_{ji},$$

где $a\in\mathcal{C}$.

Легко видеть, что существует $z\in Z$, такой, что $e_{ii}=\frac{f_i}{z}, e_j[12]=\frac{f_{1,j}}{z}$, $e_j[23]=\frac{f_{2,j}}{z}$, $e_j[13]=\frac{f_{3,j}}{z}$, $\alpha=\frac{\delta}{z},\beta=\frac{\lambda}{z},\gamma=\frac{\nu}{z}$, где $\delta,\lambda,\nu,z\in(Z\setminus 0)$, $f_i,f_{ij}\in J$.

Пусть $a\in J$. Тогда

$$a=\alpha_1e_{11}+\alpha_2e_{22}+\alpha_3e_{33}+a_1[12]+a_2[23]+a_3[13]$$

для некоторых $\alpha_i\in K$, где $a_i=\sum\limits_{k=0}^{7}\alpha_{i,k}e_k$, $\alpha_{i,k}\in K$. Введем следующие обозначения: $t_{i,j,k}=(((af_i)f_j)f_{i,k})f_i$.

Легко проверяются следующие равенства:

$$z^5\alpha_1=8((((a(f_1-\frac{f_1+f_2+f_3}{2}))f_1)f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3)+$$

$$+8((((a(f_1-\frac{f_1+f_2+f_3}{2}))f_1)f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$z^5\alpha_2=8((((a(f_2-\frac{f_1+f_2+f_3}{2}))f_2)f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3)+$$

$$+8((((a(f_2-\frac{f_1+f_2+f_3}{2}))f_2)f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$z^5\alpha_3=8((((a(f_3-\frac{f_1+f_2+f_3}{2}))f_3)f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3)+$$

$$+8((((a(f_3-\frac{f_1+f_2+f_3}{2}))f_3)f_{2,0})f_{2,0})f_2,$$

$$z^7\alpha_{1,0}=8((t_{1,2,0}f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3)+8(((t_{1,2,0}f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$z^7\alpha_{2,0}=8((t_{2,3,0}f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3)+8((t_{2,3,0}f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$z^7\alpha_{3,0}=8((t_{3,1,0}f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3)+8(((t_{3,1,0}f_{2,0})f_{2,0})f_2,$$

$$-\delta z^6\alpha_{1,1}=8((t_{1,2,1}f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3)+8((t_{1,2,1}f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$-\delta z^6\alpha_{2,1} = 8((t_{2,3,1}f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{2,3,1}f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$-\delta z^6\alpha_{3,1} = 8((t_{3,1,1}f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{3,1,1}f_{2,0})f_{2,0})f_2,$$

$$-\lambda z^6\alpha_{1,2} = 8((t_{1,2,2}f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{1,2,2}f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$-\lambda z^6\alpha_{2,2} = 8((t_{2,3,2}f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{2,3,2}f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$-\lambda z^6\alpha_{3,2} = 8((t_{3,1,2}f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{3,1,2}f_{2,0})f_{2,0})f_2,$$

$$\delta\lambda z^5\alpha_{1,3} = 8((t_{1,2,3}f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{1,2,3}f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$\delta\lambda z^5\alpha_{2,3} = 8((t_{2,3,3}f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{2,3,3}f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$\delta\lambda z^5\alpha_{3,3} = 8((t_{3,1,3}f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{3,1,3}f_{2,0})f_{2,0})f_2,$$

$$-\nu z^6\alpha_{1,4} = 8((t_{1,2,4}f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{1,2,4}f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$-\nu z^6\alpha_{2,4} = 8((t_{2,3,4}f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{2,3,4}f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$-\nu z^6\alpha_{3,4} = 8((t_{3,1,4}f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{3,1,4}f_{2,0})f_{2,0})f_2,$$

$$\delta\nu z^5\alpha_{1,5} = 8((t_{1,2,5}f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{1,2,5}f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$\delta\nu z^5\alpha_{2,5} = 8((t_{2,3,5}f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{2,3,5}f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$\delta\nu z^5\alpha_{3,5} = 8((t_{3,1,5}f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{3,1,5}f_{2,0})f_{2,0})f_2,$$

$$\nu\lambda z^5\alpha_{1,6} = 8((t_{1,2,6}f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{1,2,6}f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$\nu\lambda z^5\alpha_{2,6} = 8((t_{2,3,6}f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{2,3,6}f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$\nu\lambda z^5\alpha_{3,6} = 8((t_{3,1,6}f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{3,1,6}f_{2,0})f_{2,0})f_2,$$

$$-\nu\delta\lambda z^4\alpha_{1,7} = 8((t_{1,2,7}f_{1,0})f_{1,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{1,2,7}f_{3,0})f_{3,0})f_3,$$

$$-\nu\delta\lambda z^4\alpha_{2,7} = 8((t_{2,3,7}f_{2,0})f_{2,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{2,3,7}f_{1,0})f_{1,0})f_1,$$

$$-\nu\delta\lambda z^4\alpha_{3,7} = 8((t_{3,1,7}f_{3,0})f_{3,0})(f_1+f_2+f_3) + 8((t_{3,1,7}f_{2,0})f_{2,0})f_2.$$

Таким образом, получаем, что $z^7\delta\lambda\nu\alpha_i \in Z$. Значит, $(z^7\delta\lambda\nu)a \in D = \sum\limits_{i=1}^{3} Ze_{i,i} + \sum\limits_{j=0}^{7} Ze_j[1,2] + \sum\limits_{j=0}^{7} Ze_j[3,1] + \sum\limits_{j=0}^{7} Ze_j[2,3]$. Обозначив $z_0 = z^7\delta\lambda\nu$, получаем, что $z_0J \subseteq D$. Поскольку Z-модуль J изоморфен Z-модулю z_0J, то J изоморфно вкладывается (как Z-подмодуль) в свободный конечный Z-модуль D.

2) Алгебра B изоморфна алгебре $H(\mathcal{C}(K)_3, *)$, где $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}$ — некоторая алгебра Кэли-Диксона над полем K и $X^* = \Gamma^{-1}\overline{X}^T\Gamma$. Эта алгебра характеризуется существованием таких элементов a_{12} и a_{13}, что $a_{1j}^2 = \gamma_j^{-1}(e_{11} + e_{jj})$. Элементы γ_j представляются в виде $\gamma_j = \frac{\delta_j}{z_j}$, где $\delta_j, z_j \in Z$. Рассмотрим расширение $Z[c_2, c_3, d_2, d_3]$ алгебры Z элементами c_2, c_3, d_2, d_3 такими, что $c_j^2 = \delta_j, d_j^2 = z_j$. Обозначим $B_1 = J \otimes_Z Z[c_2, c_3, d_2, d_3]$. Тогда по лемме 5 $Z(B_1) = Z \otimes_Z Z[c_2, c_3, d_2, d_3] \simeq Z[c_2, c_3, d_2, d_3]$ и $Z[c_2, c_3, d_2, d_3]^{-1}B_1 \simeq B \otimes_Z Z[c_2, c_3, d_2, d_3]^{-1}$. Таким образом, $J \otimes_Z Z[c_2, c_3, d_2, d_3]^{-1}$ является кольцом Алберта. Но в $B \otimes_Z Z[c_2, c_3, d_2, d_3]^{-1}$ есть элементы $u_{1j} = a_{1j}\frac{c_j}{d_j}$ такие, что $u_{1j}^2 = (e_1 + e_j)$. Это означает ([39], с.357), что алгебра B_1 изоморфна алгебре $H(\mathcal{C}'(L)_3, *)$, где $X^* = \overline{X}^t$ и C' — алгебра Кэли-Диксона над полем $L = K[c_2, c_3, d_2, d_3]$. Таким образом, по случаю 1 B_1 вкладывается в свободный конечно порожденный $Z[c_2, c_3, d_2, d_3]-$модуль. Так как $Z[c_2, c_3, d_2, d_3]$ — конечно порожденный $Z-$модуль, то B_1 вкладывается в свободный конечно порожденный $Z-$модуль D, откуда следует, что и B вкладывается в D.

3) B — алгебра с делением над K, которая содержит подалгебру вида $U^{(+)}$ для некоторого 9-мерного ассоциативного тела U. Тогда в U есть максимальное подполе L, которое сепарабельно над K ([22], теорема 4.3.3), т.е. существует такой $b \in L$, что $L = K[b]$, причем $f(x) = x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ — минимальный многочлен для b. Можно считать, что $f(x) \in Z[x]$. Тогда $U \otimes_K L$ изоморфно алгебре L_3 матриц порядка 3 над полем L (следствие теоремы 4.2.1., [22]), откуда $(U)^{(+)} \otimes_K L \simeq (K_3)^{(+)}$. Но $U^{(+)} \otimes_K L \subseteq B \otimes_K L$. В алгебре $(K_3)^{(+)}$ (а значит и в алгебре $B \otimes_K L$) есть ненулевой элемент x такой, что $x^2 = 0$. Таким образом, $B \otimes_K L$ не может быть алгеброй с делением (элемент x не обратим), а значит $B \otimes_K L$ имеет вид $H(\mathcal{C}(L)_3, *)$, где $\mathcal{C}(L)$ — алгебра Кэли-Диксона над полем L. Поскольку

$$(Z \otimes_Z Z[b])^{-1}(J \otimes_Z Z[b]) = B \otimes_K L \simeq H(\mathcal{C}(L)_3),$$

и центр алгебры $J \otimes_Z Z[b]$ равен $Z \otimes_Z Z[b] \simeq Z[b]$, то алгебра $J \otimes_Z Z[b]$ удовлетворяет условию случая 2 и является подмодулем свободного конечного $Z[b]-$модуля. Но $Z[b]$ само является конечным $Z-$модулем, откуда следует, что $J \otimes_Z Z[b]$ является подмодулем свободного конечного $Z-$модуля, в силу чего J — так же подмодуль свободного конечного $Z-$модуля.

4) B — алгебра с делением. В этом случае ([39], теорема IX.12.23) существует квадратичное расширение $P = K[a]$ поля K такое, что $B \otimes_K P$ содержит $U^{(+)}$ для некоторого 9-мерного ассоциативного тела U. Центр алгебры $J \otimes_Z Z[a]$ равен $Z \otimes_Z Z[a] \simeq Z[a]$. Тогда

$$(Z \otimes_Z Z[a])^{-1}(J \otimes_Z Z[a]) = B \otimes_K P.$$

Таким образом, алгебра $J \otimes_Z Z[a]$ удовлетворяет случаю 3 и является подмодулем конечного свободного модуля над своим центром $Z[a]$. Но $Z[a]$ является конечным $Z-$модулем, так что алгебра $J \otimes_Z Z[a]$ (а, значит, и алгебра J) вкладывается как $Z-$подмодуль в конечный свободный $Z-$модуль. Теорема доказана.

Следствие 3.2. *Всякое кольцо Алберта с единицей и нетеровым центром Z является конечным Z-модулем.*

В классификации простых йордановых алгебр важную роль занимают алгебры вида $A^{(+)}$, где A — простая ассоциативная. Поскольку этот объект играет важную роль и для алгебр $H(A, *)$, то необходимо сперва доказать теорему Форманека для алгебр с симметризованным произведением. Схема доказательства имеет ту же структуру, что и в доказательстве теоремы Форманека для ассоциативных колец в [33].

Лемма 3.3. Пусть J — йорданова алгебра с единицей и центром Z, причем $Z^{-1}J \simeq A^{(+)}$ для некоторой конечномерной центральной простой ассоциативной алгебры A с центром $Z^{-1}Z$. Тогда алгебра J вкладывается в конечно порожденный $Z-$модуль.

Доказательство. Обозначим $Z = Z(J)$, $L = Z^{-1}Z$, $Q = Z^{-1}J$. Тогда Q изоморфна $A^{(+)}$. Рассмотрим случай, в котором A изоморфно кольцу матриц L_k над полем L. Обозначим матричные единицы алгебры A за e_{ij}.

Пусть $a \in J$. Тогда $a = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} e_{ij}$, где коэффициенты $\alpha_{ij} \in L$.

Положим $T = \sum\limits_{i,j=1}^{k} Z e_{ij} = Z_k$.

Существует такой $z \in Z^*$, что $e_{ij} = \frac{h_{ij}}{z}$ где $h_{ij} \in J$. Пусть $i \neq j$. Тогда непосредственно проверяется следующее равенство:

$$z^6\alpha_{ij} = \sum_{l=1,l\neq i}^{k} 32(((((ah_{ii})h_{jj})h_{ji})h_{ii})(h_{il}+h_{li}))(h_{il}+h_{li}) -$$
$$- 8(k-2)((((((ah_{ii})h_{jj})h_{ji})h_{ii})h_{ii})h_{ii}.$$

Аналогично

$$z^3\alpha_{ii}e_{ij} = 4((ah_{ii})h_{ij})h_{ii}.$$

Тогда $z^9 J \subseteq T$ и умножение на z^9 индуцирует вложение Z-модулей.

Теперь перейдем к общему случаю: Q изоморфна алгебре матриц $(D_k)^+$ над некоторым телом D, которое конечномерно над L. Тогда в D есть максимальное подполе K, которое сепарабельно над L ([22], теорема 4.3.3), т.е. существует такой $b \in K$, что $K = L[b]$, причем можно считать, что минимальный многочлен $f(x)$ для b принадлежит $Z[x]$. Тогда $D_k \otimes_L K$ изоморфно K_{mk} (следует из [22], следствие теоремы 4.2.1). Но тогда $(D_k)^+ \otimes_L K \simeq (K_{km})^+$. Так как J вкладывается в $J \otimes_Z Z[b]$, то

$$Z[b]^{-1}(J \otimes_Z Z[b]) \simeq Q \otimes_Z L[b] \simeq Q \otimes_L L[b] = Q \otimes_L K \simeq (K_{km})^+.$$

Центр $J \otimes_Z Z[b]$ равен $Z \otimes_Z Z[b] \simeq Z[b]$. По доказанному выше $J \otimes_Z Z[b]$ можно вложить в конечный $Z[b]-$модуль. Но $Z[b]$ является конечным $Z-$модулем, значит J вкладывается в конечный Z-модуль. Лемма доказана.

Напомним, что в первичной невырожденной йордановой алгебре любой идеал является первичной невырожденной алгеброй. Кроме того, всякий ненулевой идеал невырожденной PI-алгебры имеет ненулевое пересечение с ее ассоциативным центром (оба результата доказаны в [7]). В дальнейшем будем использовать эти факты без дополнительных пояснений.

Теперь мы можем доказать теорему Форманека для йордановых PI-алгебр.

Теорема 3.4. *Всякая йорданова первичная невырожденная PI-алгебра с единицей и центром Z либо вкладывается в свободный конечный Z-модуль, либо является центральным порядком в йордановой алгебре билинейной формы на бесконечномерном пространстве.*

Доказательство. По теореме 2.3. первичная невырожденная йорданова алгебра J удовлетворяет одному из следующих условий:

1. J — центральный порядок в йордановой алгебре симметрической билинейной невырожденной формы.

2. В J есть ненулевой идеал I, изоморфный алгебре $B^{(+)}$ для некоторой ассоциативной первичной алгебры B.

3. В J есть ненулевой идеал I, изоморфный алгебре $H(B, *)$ для некоторой ассоциативной первичной алгебры B с инволюцией $*$.

4. J — кольцо Алберта.

Разберем поочередно эти случаи, исключив центральный порядок в алгебре симметрической билинейной формы на бесконечномерном пространстве.

1. $Z^{-1}J = A$ — йорданова алгебра симметрической билинейной формы на конечномерном пространстве V. Если $\dim V = 1$, то J ассоциативна, то есть совпадает со своим центром. Пусть теперь $\dim V > 1, A = Z^{-1}Z \cdot 1 + V$ и $e_1, \cdot, e_n$ — базис V, ортогональный относительно формы f. Пусть $a \in J$. Тогда $a = \alpha_0 \cdot 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in Z^{-1}Z$. Положим $D = Ze_0 + Ze_1 + \ldots + Ze_n$, где $e_0 = 1$.

Существует такой $z \in Z$, что $e_i = \frac{h_i}{z}, f(e_i, e_i) = \frac{g_i}{z}$, где $h_i \in J, g_i \in Z$, где $i = 1, \ldots, n$.

Верны следующие соотношения:

$$(((ah_1)h_1)h_2)h_2 = z^2 g_1 g_2 \alpha_0$$

$$((ah_1)h_2)h_2 = z g_1 g_2 \alpha_1$$

$$((ah_i)h_1)h_1 = z g_1 g_i \alpha_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n$$

Тогда $z^2 g_1 \ldots g_n \alpha_i \in J$, то есть $z^2 g_1 \ldots g_n \alpha_i \in Z$, откуда $z^2 g_1 \ldots g_n a \in D$. Таким образом, J вкладывается в свободный конечный Z-модуль.

2. В алгебре J есть идеал $I \simeq B^{(+)}$, где B — первичная ассоциативная алгебра. Так как $B^{(+)}$ — йорданова PI-алгебра, то B — ассоциативная PI-алгебра. Тогда $Z(B)^{-1}B$ является центральной простой ассоциативной алгеброй с центром $Z(B)^{-1}Z(B)$. Остается заметить, что $Z(J)^{-1}J =$

$Z(I)^{-1}I \simeq (Z(B)^{-1}B)^{(+)}$. Тогда по лемме 3.3. алгебра J вкладывается в конечный $Z(J)-$модуль.

3. В J есть ненулевой идеал I, изоморфный алгебре $H(B,*)$ для некоторой ассоциативной $*-$первичной алгебры B с инволюцией $*$.

Пусть алгебра B не является первичной. Тогда B содержит ненулевые идеалы P и Q такие, что $PQ = 0$. Но тогда $(P \cap P^*)(Q \cap Q^*) = 0$, откуда можно считать что $P \cap P^* = 0$. Тогда $K = \{a + a^* | a \in P\}$ — идеал в $I = H(B,*)$, и алгебра K изоморфна $P^{(+)}$. Тогда $Z(J)^{-1}J = Z(I)^{-1}I = Z(K)^{-1}K$ изоморфна $(Z(K)^{-1}P)^{(+)}$ и алгебра J удовлетворяет лемме 3.3.

Пусть алгебра B первична. Обозначим $Z_1 = H(Z(B),*)$. Ясно, что $Z_1^{-1}I \subseteq H(Z_1^{-1}B,*)$. Если $\frac{b}{z} \in H(Z_1^{-1}B,*)$, то $\frac{b^*}{z} = (\frac{b}{z})^* = \frac{b}{z}$. Отсюда получаем, что $b^* = b$, т.е $Z_1^{-1}I = H(Z_1^{-1}B,*)$. Алгебра $Z_1^{-1}B$ — проста и конечномерна. Поэтому $Z_1^{-1}Z(I) \subseteq Z_1^{-1}Z(B)$. Отсюда $Z(I) \subseteq Z_1^{-1}Z_1$. Так как $Z(I) \subseteq B$, то $Z(I) \subseteq Z(B)$.

Алгебра $Z(I)^{-1}I$ — конечномерная центральная простая над $Z(I)^{-1}Z(I)$ ([6], леммы 10 и 19). Инволюция $*$ единственным образом продолжается с алгебры B на алгебру $Z(I)^{-1}B$ и $Z(I)^{-1}I = H(Z(I)^{-1}B,*)$. Обозначим $C = Z(Z(I)^{-1}B)$. Возможны два случая ([39], с.248):

a. $Z(I)^{-1}B$ — центральная простая над $Z(I)^{-1}Z(I)$, то есть имеем $C = Z(I)^{-1}Z(I)$. В этом случае, очевидно, $Z(I) = Z(B)$. Поскольку I является PI алгеброй, то B тоже является PI алгеброй ([25], теорема 6). Тогда и алгебра $B^{\#}$ тоже является ассоциативной первичной PI алгеброй. Тогда $B^{\#}$ вкладывается в свободный конечный $Z(B)^{\#}-$модуль ([33], теорема 1), то есть существуют такие $e_1, \ldots, e_n \in B$, что $B^{\#} \subseteq Z(B)^{\#}e_1 + \cdots + Z(B)^{\#}e_n$. Тогда $I \subseteq Z(I)^{\#}e_1 + \cdots + Z(I)^{\#}e_n$.

Заметим, что I содержит ненулевой центральный элемент $x \in Z(J)$, откуда $xJ \subseteq I$. Остается заметить, что $Z(I)^{\#} \subseteq Z(J)$, откуда следует, что $xJ \subseteq Z(J)e_1 + \cdots + Z(J)e_n$ — конечно порожденный $Z(J)-$модуль. Тогда J вкладывается в конечный $Z(J)-$модуль, так как он изоморфен xJ.

b. Алгебра $Z(I)^{-1}B$ проста, $C = Z(I)^{-1}[b]$ — квадратичное расширение $Z(I)^{-1}Z(I)$, $b \in Z(B)$ Можно считать, что $b^2 \in Z(I)$ и $b^* = -b$. В этом случае для любого $a \in Z(I)^{-1}B$ получаем, что $a = h_1 + bh_2$, где

$h_1, h_2 \in H(Z(I)^{-1}B, *)$. Поэтому алгебра $Z(I)^{-1}I \otimes_{Z(I)^{-1}} C$ (а значит и алгебра $Z(J)^{-1}J \otimes_{Z(J)^{-1}} Z(J)^{-1}[b]$) изоморфна $(Z(I)^{-1}B)^{(+)}$.

Обозначим $Z_0 = Z(J)[b]$. Тогда

$$Z_0^{-1}(J \otimes_{Z(J)} Z_0) = J \otimes_{Z(J)} Z_0 \otimes_{Z_0} Z_0^{-1} \simeq J \otimes_{Z(J)} Z_0^{-1} \simeq$$

$$J \otimes_{Z(J)} Z(J)^{-1} \otimes_{Z(J)^{-1}} Z_0^{-1} \simeq Z(J)^{-1}J \otimes_{Z(J)^{-1}} Z_0^{-1} \simeq (Z(I)^{-1}B)^{(+)}.$$

Таким образом, алгебра $J \otimes_{Z(J)} Z_0$ удовлетворяет лемме 3.3. и вкладывается в конечный модуль над Z_0. Но $Z_0 = Z(J)[b]$ является конечным $Z(J)-$модулем, так что алгебра $J \otimes_{Z(J)} Z_0$ (а, значит, и алгебра J) вкладывается в конечный $Z-$модуль.

4. J — кольцо Алберта. Случай разобран в теореме 3.1. Теорема доказана.

Для полноты изложения заметим, что центральный порядок в бесконечномерной супералгебре не может являться конечным модулем над центром. В самом деле, если A конечна над Z и порождается над Z элементами $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, то

$$Z^{-1}A = Z^{-1}Ze_1 + \cdots + Z^{-1}Ze_n.$$

В частности, центральный порядок в бесконечномерной алгебре билинейной формы не можем являться конечным модулем над центром.

3.2 Центральные порядки в классических йордановых супералгебрах

Простые йордановы супералгебры с полупростой четной частью были описаны в [56]. В следующем утверждении мы докажем теорему Форманека для классических супералгебр этого класса.

Теорема 3.5. *Пусть $J = A + M$ — классическая простая йорданова супералгебра. Тогда унитарный суперцентральный порядок в J вкладывается в свободный конечно порожденный модуль над своим суперцентром.*

Доказательство. Пусть $J = A + M$ — классическая простая йорданова супералгебра над полем k, $B = B_0 + B_1$ — унитарная йорданова супералгебра,

$Z = Z(B)_0$ — ее суперцентр, $k = Z^{-1}Z$, $J = Z^{-1}B$, $A = Z^{-1}B_0$, $M = Z^{-1}B_1$. Согласно теореме 1.14., нам достаточно разобрать случаи из примера 1.13.

a) $J = M_{n+m}(k)$. В этом случае у J есть базис e_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Если $a \in B$, то

$$a = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}e_{ij}.$$

Найдется такой элемент $z \in Z$, что $e_{ij} = \frac{f_{ij}}{z}$ и $f_{ij} \in B$. Положим

$$F(a) = ((((af_{ii})f_{jj})f_{ji})f_{ii}).$$

Если $i \leqslant n$, то справедливо следующее равенство:

$$z^6\alpha_{ij} = 32\sum_{k=1}^{n}(F(a)f_{ik})f_{ki} + 32\sum_{k=n+1}^{n+m}f_{ki}(F(a)f_{ik}) + 8z^2(m-n)F(a).$$

Если $i > n$, то справедливо:

$$z^6\alpha_{ij} = 32\sum_{k=1}^{n}f_{ki}(F(a)f_{ik}) + 32\sum_{k=n+1}^{n+m}(F(a)f_{ik})f_{ki} + 8z^2(n-m)F(a).$$

Если $z_0 = z^6$, то $z_0\alpha_{ij} \in B \cap Z(J)_0 = Z$, так что Z-модуль $z_0B \simeq B$ вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль $\sum\limits_{i,j=1}^{n} Ze_{ij}$.

b) $J = Q_n(k)$. В этом случае у J есть базис $e_{ij}, \overline{e}_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Если $a \in B$, то

$$a = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}e_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}\overline{e}_{ij}.$$

Найдется такой элемент $z \in Z$, что $e_{ij} = \frac{f_{ij}}{z}$, $\overline{e}_{ij} = \frac{\overline{f}_{ij}}{z}$ и $f_{ij}, \overline{f}_{ij} \in B$. Равенства из a) показывают, что

$$z^6(\alpha_{ij}\cdot 1 + \beta_{ij}\cdot\overline{1}) \in B \cap Z(J).$$

Следовательно $z^6\alpha_{ij} \in B \cap Z(J)_0 = Z$, $z^6\beta_{ij}\cdot\overline{1} \in B$. Но

$$z^{11}\beta_{ij} = \sum_{k=2}^{n}8(((((z^6\beta_{ij}\cdot\overline{1})f_{12})\overline{f}_{21})f_{11})f_{1k})f_{k1} - 2(n-2)z^2(((z^6\beta_{ij}\cdot\overline{1})f_{12})\overline{f}_{21})f_{11}.$$

Таким образом, $z^{11}\beta_{ij} \in Z$. Если $z_0 = z^{11}$, то Z-модуль $z_0B \simeq B$ вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль $\sum\limits_{i,j=1}^{n} Ze_{ij} + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \overline{e}_{ij}$.

c) $J = P_n(k)$. В этом случае у J есть базис $e_{ij} \in M_n(k)$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $\overline{e}_{ij} \in \overline{H_n(k)}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $\overline{\overline{e}}_{ij} \in \overline{S_n(k)}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Если $a \in B$, то

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e_{ij} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \beta_{ij} \overline{e}_{ij} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \gamma_{ij} \overline{\overline{e}}_{ij}.$$

Найдется такой элемент $z \in Z$, что $e_{ij} = \frac{f_{ij}}{z}$, $\overline{e}_{ij} = \frac{\overline{f}_{ij}}{z}$, $\overline{\overline{e}}_{ij} = \frac{\overline{\overline{f}}_{ij}}{z}$ и $f_{ij}, \overline{f}_{ij} \in B$. Равенства из a) показывают, что $z^6\alpha_{ij} + b \in B$, где b — это некоторый элемент из M. Тогда $z^6\alpha_{ij} \in Z$.

Непосредственно проверяется следующее равенство.

$$\begin{pmatrix} a & s \\ h & a^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s & d \\ x & -s \end{pmatrix}$$

для некоторого $d \in \overline{S_n(k)}$, $x \in \overline{H_n(k)}$. Следовательно, повторяя процедуру, аналогичную α_{ij}, получаем $z^7\gamma_{ij} \in Z$ (поскольку $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{z}(f_{11} + \cdots + f_{nn})$).

Используя умножение на $\begin{pmatrix} 0 & f_{1i} - f_{i1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, мы получаем матрицу с $z\beta_{kj}$ где-то в верхней левой четверти матрицы. Таким образом, $z^7\beta_{kj} \in Z$. Если $z_0 = z^7$, то Z-модуль $z_0B \simeq B$ вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль $\sum\limits_{i,j=1}^{n} Ze_{ij} + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \overline{e}_{ij} + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overline{\overline{e}}_{ij}$.

d) $J = osp_{n,2m}(k)$. Если $x \in B$, то

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ -b_2^T & c_1 & c_2 \\ b_1^T & c_3 & c_1^T \end{pmatrix}.$$

Введем следующее обозначение.

$$S = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяются следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2xS - x)S,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 & c_1^T \end{pmatrix} = (2xS - x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Первое равенство позволяет применить случай a). Второе равенство позволяет применить случай c). Положим

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} e_{ij},$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij} e_{ij}.$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{ij}e_{kj} - \gamma_{ij}e_{jk} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\left(\left(\left((xS - x)S\right) \begin{pmatrix} e_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & e_{jj} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{rj} & 0 \\ 0 & 0 & e_{jr} \end{pmatrix}\Bigg) \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{rk} \\ -e_{kr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $r \neq i$, $k \neq j$.

Это равенство позволяет использовать случай c). Аналогично, его можно использовать для β_{ij}. Таким образом, можно найти такой $z \in Z$, что $zB \simeq B$ вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль.

e) $J = D_t$, $0 \neq t \in k$. Тогда у J есть базис e_1, e_2, x, y. Если $a \in B$, то

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \beta_1 x + \beta_2 y.$$

Найдется такой элемент $z \in Z$, что $e_i = \frac{f_i}{z}$, $x = \frac{v}{z}$, $y = \frac{w}{z}$, $t = \frac{u}{z}$ и $f_i, v, w \in B$, $0 \neq u \in Z$. Непосредственно проверяются следующие соотношения.

$$uz^4\beta_1 = 4(((af_1)f_2)w)(uf_1 + zf_2),$$

$$uz^4\beta_2 = -4(((af_1)f_2)v)(uf_1 + zf_2),$$

$$uz^6\alpha_1 = 4(((((af_1)v)f_1)f_2)w)(uf_1 + zf_2),$$

$$uz^6\alpha_2 = 4(((((af_2)v)f_1)f_2)w)(uf_1 + zf_2).$$

Если $z_0 = uz^6$, то $z_0B \simeq B$ вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль $Ze_1 + Ze_2 + Zx + Zy$.

f) J — это супералгебра невырожденной суперсимметрической суперформы на суперпространстве $V = V_0 \oplus V_1$. Тогда у J есть базис $e, e_1, \ldots, e_n$, $g_1, \ldots, g_{2m}$, где e — это единица, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортогональный базис V_0, $(e_i, e_i) = \alpha_i$, $\{g_1, \ldots, g_{2m}\}$ — базис V_1, $(g_{2i-1}, g_{2i}) = \beta_i \neq 0$ и $(g_i, g_j) = 0$ в противном случае. Если $a \in B$, то

$$a = \gamma e + \sum_{i=1}^{n} \delta_i e_i + \sum_{i=1}^{2k} \varepsilon_i g_i.$$

Найдется такой элемент $z \in Z$, что $e_i = \frac{f_i}{z}$, $g_i = \frac{h_i}{z}$, $\alpha_i = \frac{\lambda_i}{z}$, $\beta_i = \frac{\mu_i}{z}$ и $f_i, h_i \in B$, $\lambda_i, \mu_i \in Z$. Справедливы следующие соотношения.

$$z^2\lambda_1\lambda_2\gamma = (((af_1)f_1)f_2)f_2,$$

$$z\lambda_1\lambda_i\delta_i = ((af_i)f_1)f_1, \quad i > 1$$

$$z\lambda_1\lambda_2\delta_1 = ((af_1)f_2)f_2.$$

Верны следующие равенства:

$$((ah_{2k})h_{2k})h_{2k-1} = -z\mu_k^2\varepsilon_{2k-1},$$

$$((ah_{2k-1})h_{2k-1})h_{2k} = -z\mu_k^2\varepsilon_{2k}.$$

Если $z_0 = z^2\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\prod_{i=1}^{m}\mu_i^2$, то $z_0B \simeq B$ вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль $Ze + \sum\limits_{i=1}^{n} Ze_i + \sum\limits_{i=1}^{2m} Zg_i$.

g) $J = H_3(k) + (\overline{S_3(k)} \oplus \overline{\overline{S_3(k)}})$. Тогда у J есть базис e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, $\overline{e}_{12}, \overline{e}_{13}, \overline{e}_{23}$, $\overline{\overline{e}}_{12}, \overline{\overline{e}}_{13}, \overline{\overline{e}}_{23}$. Если $a \in B$, то

$$a = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3} \alpha_{ij} e_{ij} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \beta_{ij}\overline{e}_{ij} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \gamma_{ij}\overline{\overline{e}}_{ij}.$$

Найдется такой элемент $z \in Z$, что $e_{ij} = \frac{f_{ij}}{z}$, $\overline{e}_{ij} = \frac{\overline{f}_{ij}}{z}$, $\overline{\overline{e}}_{ij} = \frac{\overline{\overline{f}}_{ij}}{z}$ и $f_{ij}, \overline{f}_{ij}, \overline{\overline{f}}_{ij} \in B$. Положим

$$F_1(a) = ((((a\overline{\overline{f}}_{12})\overline{\overline{f}}_{12})\overline{f}_{12})f_{11})f_{33},$$

$$F_2(a) = ((((a\overline{\overline{f}}_{12})\overline{\overline{f}}_{12})\overline{f}_{12})f_{22})f_{33},$$

$$F_3(a) = ((((a\overline{\overline{f}}_{13})\overline{\overline{f}}_{13})\overline{f}_{13})f_{33})f_{22},$$

$$G_1(a) = ((((a\overline{f}_{12})\overline{f}_{12})\overline{\overline{f}}_{12})f_{11})f_{33},$$

$$G_2(a) = ((((a\overline{f}_{12})\overline{f}_{12})\overline{\overline{f}}_{12})f_{22})f_{33},$$

$$G_3(a) = ((((a\overline{f}_{13})\overline{f}_{13})\overline{\overline{f}}_{13})f_{33})f_{22}.$$

Непосредственно проверяются следующие равенства.

$$z^7\beta_{23} = 16zF_1(a)f_{13} + 32(F_1(a)f_{23})f_{12} + 32(F_1(a)f_{12})f_{23},$$

$$z^7\beta_{13} = 16zF_2(a)f_{23} + 32(F_2(a)f_{13})f_{12} + 32(F_2(a)f_{12})f_{13},$$

$$z^7\beta_{12} = 16zF_3(a)f_{23} + 32(F_3(a)f_{12})f_{13} + 32(F_3(a)f_{13})f_{12},$$

$$z^7\gamma_{23} = 16zG_1(a)f_{13} + 32(G_1(a)f_{23})f_{12} + 32(G_1(a)f_{12})f_{23},$$

$$z^7\gamma_{13} = 16zG_2(a)f_{23} + 32(G_2(a)f_{13})f_{12} + 32(G_2(a)f_{12})f_{13},$$

$$z^7\gamma_{12} = 16zG_3(a)f_{23} + 32(G_3(a)f_{12})f_{13} + 32(G_3(a)f_{13})f_{12},$$

$$z^4\alpha_{12} = 2z((af_{11})f_{22})f_{12} + 4(((af_{11})f_{22})f_{13})f_{23} + 4(((af_{11})f_{22})f_{23})f_{13},$$

$$z^4\alpha_{13} = 2z((af_{11})f_{33})f_{13} + 4(((af_{11})f_{33})f_{12})f_{23} + 4(((af_{11})f_{33})f_{23})f_{12},$$

$$z^4\alpha_{23} = 2z((af_{22})f_{33})f_{23} + 4(((af_{22})f_{33})f_{12})f_{13} + 4(((af_{22})f_{33})f_{13})f_{12},$$

$$z^4\alpha_{11} = 2(((2af_{11}-za)f_{11})f_{12})f_{12}+2(((2af_{11}-za)f_{11})f_{13})f_{13}-z^2(2af_{11}-za)f_{11},$$

$$z^4\alpha_{22} = 2(((2af_{22}-za)f_{22})f_{12})f_{12}+2(((2af_{22}-za)f_{22})f_{23})f_{23}-z^2(2af_{22}-za)f_{22}$$

$$z^4\alpha_{33} = 2(((2af_{33}-za)f_{33})f_{23})f_{23}+2(((2af_{33}-za)f_{33})f_{13})f_{13}-z^2(2af_{33}-za)f_{33}.$$

Если $z_0 = z^4$, то $z_0B \simeq B$ вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} Ze_{ij} + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3} Z\overline{e}_i + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3} Z\overline{\overline{e}}_{ij}$.

h) $J=H_3(B(4,2))$. Если $a\in B$, то

$$a=\begin{pmatrix}\alpha_1 & b_1 & b_2\\ \overline{b_1} & \alpha_2 & b_3\\ \overline{b_2} & \overline{b_3} & \alpha_3\end{pmatrix},$$

где

$$b_1=\sum_{i,j=1}^{2}\alpha_{ij}e_{ij}+\delta_1 m_1+\delta_2 m_2,$$

$$b_2=\sum_{i,j=1}^{2}\beta_{ij}e_{ij}+\varepsilon_1 m_1+\varepsilon_2 m_2,$$

$$b_3=\sum_{i,j=1}^{2}\gamma_{ij}e_{ij}+\mu_1 m_1+\mu_2 m_2.$$

Воспользуемся следующими обозначениями:

$$b[12]=\begin{pmatrix}0 & b & 0\\ \overline{b} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, b[13]=\begin{pmatrix}0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\\ \overline{b} & 0 & 0\end{pmatrix}, b[23]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b\\ 0 & \overline{b} & 0\end{pmatrix},$$

если $b\in B(4,2)$. Кроме того, мы будем использовать обычное обозначение Джекобсона $e_{ij}=1[ij]$.

Непосредственно проверяются следующие соотношения.

$$\alpha_1=4(((2ae_{11}-a)e_{11})e_{12})e_{12}+4(((2ae_{11}-a)e_{11})e_{13})e_{13}-(2ae_{11}-a)e_{11},$$

$$\alpha_2=4(((2ae_{22}-a)e_{22})e_{12})e_{12}+4(((2ae_{22}-a)e_{22})e_{23})e_{23}-(2ae_{22}-a)e_{22},$$

$$\alpha_3=4(((2ae_{33}-a)e_{33})e_{23})e_{23}+4(((2ae_{33}-a)e_{33})e_{13})e_{13}-(2ae_{33}-a)e_{33},$$

$$\delta_1=32((((ae_{11})e_{22})m_2[12])e_{13})e_{13}+8((ae_{11})e_{22})m_2[12]-8(((ae_{11})e_{22})m_2[12])e_{11},$$

$$\delta_2=32((((ae_{11})e_{22})m_1[12])e_{13})e_{13}+8((ae_{11})e_{22})m_1[12]-8(((ae_{11})e_{22})m_1[12])e_{11},$$

$$\varepsilon_1=32((((ae_{11})e_{33})m_2[13])e_{12})e_{12}+8((ae_{11})e_{33})m_2[13]-8(((ae_{11})e_{33})m_2[13])e_{11},$$

$$\varepsilon_2=32((((ae_{11})e_{33})m_1[13])e_{12})e_{12}+8((ae_{11})e_{33})m_1[13]-8(((ae_{11})e_{33})m_1[13])e_{11},$$

$$\mu_1=32((((ae_{22})e_{33})m_2[23])e_{12})e_{12}+8((ae_{22})e_{33})m_2[23]-8(((ae_{22})e_{33})m_2[23])e_{22},$$

$$\mu_2=32((((ae_{22})e_{33})m_1[23])e_{12})e_{12}+8((ae_{22})e_{33})m_1[23]-8(((ae_{22})e_{33})m_1[23])e_{22},$$

$$-\alpha_{21}=32((((ae_{11})e_{22})e_{12}[12])e_{13})e_{13}+8((ae_{11})e_{22})e_{12}[12]-8(((ae_{11})e_{22})e_{12}[12])e_{11},$$

$$-\alpha_{12} = 32((((ae_{11})e_{22})e_{21}[12])e_{13})e_{13} + 8((ae_{11})e_{22})e_{21}[12] - 8(((ae_{11})e_{22})e_{21}[12])e_{11},$$

$$-\beta_{21} = 32((((ae_{11})e_{33})e_{12}[13])e_{12})e_{12} + 8((ae_{11})e_{33})e_{12}[13] - 8(((ae_{11})e_{33})e_{12}[13])e_{11},$$

$$-\beta_{12} = 32((((ae_{11})e_{33})e_{21}[13])e_{12})e_{12} + 8((ae_{11})e_{33})e_{21}[13] - 8(((ae_{11})e_{33})e_{21}[13])e_{11},$$

$$-\gamma_{21} = 32((((ae_{22})e_{33})e_{12}[23])e_{12})e_{12} + 8((ae_{22})e_{33})e_{12}[23] - 8(((ae_{22})e_{33})e_{12}[23])e_{22},$$

$$-\gamma_{12} = 32((((ae_{22})e_{33})e_{21}[23])e_{12})e_{12} + 8((ae_{22})e_{33})e_{21}[23] - 8(((ae_{22})e_{33})e_{21}[23])e_{22},$$

$$\alpha_{11} = 32((((ae_{11})e_{22})e_{22}[12])e_{13})e_{13} + 8((ae_{11})e_{22})e_{22}[12] - 8(((ae_{11})e_{22})e_{22}[12])e_{11},$$

$$\alpha_{22} = 32((((ae_{11})e_{22})e_{11}[12])e_{13})e_{13} + 8((ae_{11})e_{22})e_{11}[12] - 8(((ae_{11})e_{22})e_{11}[12])e_{11},$$

$$\beta_{11} = 32((((ae_{11})e_{33})e_{22}[13])e_{12})e_{12} + 8((ae_{11})e_{33})e_{22}[13] - 8(((ae_{11})e_{33})e_{22}[13])e_{11},$$

$$\beta_{22} = 32((((ae_{11})e_{33})e_{11}[13])e_{12})e_{12} + 8((ae_{11})e_{33})e_{11}[13] - 8(((ae_{11})e_{33})e_{11}[13])e_{11},$$

$$\gamma_{11} = 32((((ae_{22})e_{33})e_{22}[23])e_{12})e_{12} + 8((ae_{22})e_{33})e_{22}[23] - 8(((ae_{22})e_{33})e_{22}[23])e_{22},$$

$$\gamma_{22} = 32((((ae_{22})e_{33})e_{11}[23])e_{12})e_{12} + 8((ae_{22})e_{33})e_{11}[23] - 8(((ae_{22})e_{33})e_{11}[23])e_{22}.$$

Базисные элемент J можно представить в виде дробей с числителями $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ из B и общим знаменателем $z \in Z$. Тогда из соотношений выше вытекает, что $z^5 B \simeq B$ вкладывается в свободный конечно порожденный Z-модуль $\sum\limits_{i=1}^{21} Za_i$. Теорема полностью доказана.

Глава 4

Почти конечномерные алгебры

4.1 Ниль идеалы конечной коразмерности в альтернативных нетеровых алгебрах

Определение. Алгебра A называется *почти конечномерной* над полем F, если ее размерность над F бесконечна, но каждый ненулевой идеал имеет конечную коразмерность.

Примеры почти конечномерных алгебр.

1. Всякая простая бесконечномерная алгебра является почти конечномерной.

2. Кольцо многочленов $F[x]$ и кольцо формальных степенных рядов $F[[x]]$ от одной переменной x являются почти конечномерными алгебрами над полем F.

3. Конечное расширение почти конечномерной ассоциативной и коммутативной алгебры, которое не содержит делителей нуля, является почти конечномерной алгеброй. Более того, по лемме Нётер о нормализации все конечно порожденные почти конечномерные алгебры с единицей являются конечными расширениями кольца многочленов от одной переменной.

4. Если A — почти конечномерная алгебра над полем F, и B — центральная простая конечномерная алгебра над полем F. Тогда $A \otimes_F B$ является почти конечномерной алгеброй. Такая процедура позволяет строить почти конечномерные алгебры различных многообразий.

Чтобы избежать путаницы, уточним понятие нетеровой алгебры.

Определение. Алгебра называется *нетеровой*, если любое непустое множество ее идеалов содержит максимальный элемент. Алгебра называется *нетеровой справа (слева)*, если любое непустое множество ее правых (левых) идеалов содержит максимальный элемент.

Существует несколько подходов к понятию почти конечномерной алгебры. Один из них подразумевает, что почти конечномерность — это обобщенное понятие простоты: мы запрещаем существование не всех идеалов, а лишь идеалов бесконечной коразмерности. Следующий факт позволяет нам увидеть второй подход, заключающийся в том, что почти конечномерность — это подкласс класса нетеровых алгебр.

Лемма 4.1. *Всякая почти конечномерная алгебра нетерова.*

Доказательство. Пусть в почти конечномерной алгебре найдется строго возрастающая цепочка идеалов. Длина этой цепочки превосходит коразмерность второго ее члена не более, чем на два. Поскольку алгебра почти конечномерна, эта коразмерность конечна. Лемма доказана.

Как показывает пример из [59], существуют почти конечномерные алгебры, содержащие ненулевой идеал с нулевым умножением (в упомянутой работе строится такой пример алгебры Ли). На самом деле, полупервичность почти конечномерных алгебр автоматически дает нам и более сильное свойство.

Лемма 4.2. *Всякая почти конечномерная полупервичная алгебра первична.*

Доказательство. Пусть A — почти конечномерная полупервичная алгебра и I, J — ее идеалы с условием $IJ = 0$. Тогда $(I \cap J)^2 = 0$, откуда $I \cap J = 0$. Поскольку $I/(I \cap J)$ изоморфна $(I + J)/J$, то коразмерность идеала $I \cap J$ не превосходит суммы коразмерностей идеала J и идеала I. В силу бесконечности коразмерности идеала $I \cap J$ либо $I = 0$, либо $J = 0$. Лемма доказана.

В работе [30] Дж. Фарина и К. Пендергрkörass-Райс показали, что центр почти конечномерной ассоциативной PI-алгебры сам почти конечномерен. С другой стороны, в статье [31] эти же авторы совместно с Беллом доказали, что центр почти конечномерной ассоциативной непростой алгебры, не удовлетворяющей тождественному соотношению, является конечным расширением исходного поля (или нулем). Оказывается, что конечномерность и почти конечномерность — единственно возможные варианты и для центра неассоциативной почти конечномерной алгебры.

Лемма 4.3. *Центр почти конечномерной алгебры либо почти конечномерен, либо конечномерен.*

Доказательство. Пусть A — почти конечномерная алгебра. Покажем, что любой ненулевой идеал в $Z(A)$ имеет конечную коразмерность. Пусть $I \trianglelefteq Z(A), I \neq 0, x \in I, x \neq 0$. Тогда xA — идеал в A. Докажем, что $xA \cap Z(A) = xZ(A)$. Пусть $xa \in Z(A), y, t \in A$. Тогда

$$x(ay) = (xa)y = y(xa) = (yx)a = (xy)a = x(ya),$$

т.е. $ay = ya$ (так как $x \in Z(A)$). Поскольку $((xa)y)t = (xa)(yt)$, то

$$x((ay)t) = (x(ay))t = ((xa)y)t = (xa)(yt) = x(a(yt)),$$

т. е. $(ay)t = a(yt)$. Аналогично можем получить $(y, a, t) = (y, t, a) = 0$, то есть $a \in Z(A)$. Итак, $xA \cap Z(A) = xZ(A)$. Следовательно, $xZ(A)$ — идеал конечной коразмерности в $Z(A)$. Отсюда получаем, что I — тоже идеал конечной коразмерности в $Z(A)$. Поэтому $Z(A)$ — почти конечномерная или конечномерная алгебра. Лемма доказана

Для элемента $x \in A$ через R_x (L_x) обозначим оператор правого (левого) умножения на элемент x в алгебре A, т.е. $aR_x = ax$, $aL_x = xa$. Если A — альтернативная алгебра, то в алгебре умножений алгебры A справедливы следующие соотношения:

$$R_xR_y + R_yR_x = R_{xy+yx},$$

$$L_xL_y + L_yL_x = L_{xy+yx},$$

$$L_xR_y = R_yL_x + R_yR_x - R_{yx},$$

$$R_xL_y = L_yR_x - L_xL_y + L_{yx}.$$

Пусть A — альтернативная алгебра над полем F, I — идеал алгебры A , $I^2 = 0$, $m \in I$ и $I + B = A$, где $B = span(e_1, ..., e_n)$ — векторное подпространство, порожденное элементами $e_1, ..., e_n$. Далее вместо R_{e_j}, L_{e_j} будем писать R_j, L_j.

Лемма 4.4. *Подпространство* $W_1 = span(\{mT_1...T_k,\ k \in \mathbb{N}\})$*, где* $T_j \in \{R_x, L_x\}, x \in A$*, является конечномерным.*

Доказательство. В силу того, что $I^2 = 0$ и леммы 1 из [23] каждый элемент из W_1 является линейной комбинацией элементов вида

$$m, mR_x, mL_x, mL_xR_y, mR_{e_{i_1}}, ..., R_{e_{i_{k-1}}}R_x, mL_{e_{i_1}}R_{ei_2}, ..., R_{ei_k}R_x,$$

где $x, y \in A$, $m \in I$. Операторы R_x, L_x являются линейными комбинациями $R_{e_1}, ..., R_{e_n}, R_m$ и $L_{e_1}, ..., L_{e_n}, L_m$, соответственно, где $m \in I$. В силу того, что $I^2 = 0$, ограничения операторов R_x и L_x на идеал I являются линейными комбинациями операторов $R_{e_1}, ..., R_{e_n}$ и $L_{e_1}, ..., L_{e_n}$, соответственно. Таким образом, каждый элемент из W_1 является линейной комбинацией элементов вида

$$m, mR_i, mL_i, mL_iR_j, mR_{e_{i_1}}, ..., R_{e_{i_k}}, mL_{e_{i_1}}R_{ei_2}, ..., R_{ei_k},\ k, i, j \in \mathbb{N}, m \in I$$

Элементов первых четырех видов конечное число. Следовательно, остается доказать, что линейная оболочка элементов последних двух видов является конечномерной.

Обозначим

$$M_0 = Fm, \qquad M_{k+1} = M_kB + M_k.$$

Тогда

$$\cup_{k=0}^{\infty} M_k = span(\{mR_{i_1}...R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\}).$$

Рассмотрим элемент $mR_{i_1}...R_{i_{n+1}}$. Существуют $p, q \in \overline{1, n+1}$ такие, что $p < q$, $e_{i_p} = e_{i_q}$. Тогда

$$mR_{i_1}...R_{i_p}...R_{i_{q-1}}R_{i_q} = -mR_{i_1}...R_{i_p}...R_{i_q}R_{i_{q-1}} + mR_{i_1}...R_{i_p}...R_{e_{i_{q-1}}e_{i_q}+e_{i_q}e_{i_{q-1}}}$$

Поскольку $e_{i_q}e_{i_{q-1}} + e_{i_{q-1}}e_{i_q} = b + t$, где $b \in B, t \in I$ и $I^2 = 0$, то

$$mR_{i_1}...R_{e_{i_q}e_{i_{q-1}}+e_{i_{q-1}}e_{i_q}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i mR_{i_1}...R_{i_{q-2}}R_{e_j} \in M_{q-1}, \alpha_j \in F.$$

Тогда

$$mR_{i_1}...R_{i_{n+1}} = mR_{i_1}...R_{i_p} \ldots R_{i_q}R_{i_{q-1}}...R_{i_{n+1}} + t_1,$$

где $t_1 \in M_n$. Продолжая этот процесс, получим,

$$mR_{i_1}...R_{i_{n+1}} = mR_{i_1}...R_{i_p}R_{i_q}...R_{i_{n+1}} + t_1 =$$
$$= mR_{i_1}...R_{e_{i_p}^2}R_{i_{p+1}}...R_{i_{q-1}}R_{i_{q+1}}...R_{i_{n+1}} + t_2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j mR_{i_1}...R_{e_j}R_{i_{p+1}}...R_{i_{q-1}}R_{i_{q+1}}...R_{i_{n+1}} + t_2 + t_3,$$

где $t_i \in M_n$. Таким образом, показано, что $M_{n+1} \subset M_n$. Следовательно, $M_{n+1} = M_n$. Тогда $M_{n+2} = M_{n+1}B + M_{n+1} = M_nB + M_n = M_{n+1} = M_n$. Аналогично $M_{n+k} = M_n$. Тогда подпространство $\cup_{k=0}^{\infty} M_k = \cup_{k=0}^{n} M_k$ — конечномерно.

Осталось показать, что подпространство

$$V_1 = span(\{(e_1m)R_{i_1}...R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\}) + ... + span(\{(e_nm)R_{i_1}...R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\})$$

конечномерно. Так как $e_jm = m_j \in I$, то подпространство

$$span\{(e_jm)R_{i_1}...R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\} = span\{m_jR_{i_1}...R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\}$$

является конечномерным. Значит, подпространство V_1 — конечномерно.

Тогда, в силу доказанного выше, W_1 — конечномерно. Лемма доказана

В работе [30] основным результатом является первичность ассоциативной почти конечномерной алгебры. Теперь мы можем усилить этот результат.

Лемма 4.5. *Всякая почти конечномерная альтернативная алгебра первична.*

Доказательство. Пусть A — почти конечномерная альтернативная алгебра, $I \trianglelefteq A, I^2 = 0$. Предположим, что $I \neq 0$. Тогда по лемме 4.1. I — конечно порожденный идеал. Пусть $I = id(m_1, ..., m_k)$ — идеал, порожденный элементами $m_1, ..., m_k$. Положим

$$I_i = Span\{m_iT_1...T_p, p \in \mathbb{N}, T_j \in \{R_j, L_j\}\}.$$

Тогда $I = I_1 + ... + I_k$ — сумма подпространств. По лемме 4.4. подпространство I_i — конечномерно. Следовательно, идеал I — конечномерен. Поэтому алгебра $A = I + B$ — конечномерна. Это противоречит определению почти конечномерной алгебры, значит $I = 0$. Таким образом, алгебра A полупервична. В силу леммы 4.2. она первична. Лемма доказана.

Первичность — одно из важнейших свойств кольца. Однако, в неассоциативном случае не менее важным является понятие невырожденности. Докажем это свойство для почти конечномерных альтернативных алгебр. На первом этапе мы откажемся от условия почти конечномерности, ограничившись лишь рассмотрением идеалов конечной коразмерности в нетеровой алгебре. Теорема Жевлакова [2] утверждает, что нетерова локально нильпотентная алгебра нильпотентна. Рассмотрим далее ситуацию нетеровой алгебры с локально нильпотентным радикалом конечной коразмерности.

Лемма 4.6. *Пусть A — нетерова альтернативная алгебра. Пусть I — идеал алгебры A, имеющий конечную коразмерность. Тогда любая его степень I^k имеет конечную коразмерность для любого натурального k.*

Доказательство. Сначала докажем, что I^2 имеет конечную коразмерность. Можно считать, что $I \neq I^2$. Рассмотрим фактор-алгебру $B = A/I^2$. Это альтернативная алгебра с условием максимальности, в которой $J = I/I^2$ — идеал с нулевым умножением, имеющий конечную коразмерность. Так как алгебра B удовлетворяет условию максимальности, то идеал J конечно порождён. Пусть элементы $m_1, \ldots, m_k$ порождают идеал J. Идеал J имеет вид $J = I_1 + \cdots + I_k$, где I_j порождён элементом m_j. Так как $J^2 = 0$, то по лемме 4.4. идеалы I_j являются конечномерными. Таким образом, идеал J конечномерен. Поскольку $B/J \cong A/I$, то B конечномерна. Отсюда получаем, что I^2 — идеал конечной коразмерности.

Рассмотрим убывающую цепочку вложенных идеалов $I^{[1]} = I$, $I^{[k]} = (I^{[k-1]})^2$. В силу доказанного выше, идеал $I^{[k]}$ имеет конечную коразмерность. Ясно, что для любого натурального m существует k такое, что $I^{[k]} \subset I^m$. Таким образом, I^m — идеал конечной коразмерности. Лемма доказана.

Лемма 4.7. *Пусть A — нетерова альтернативная алгебра, I — ее локально нильпотентный идеал конечной коразмерности. Тогда существует такое натуральное k, что $I^k = I^{k+1} = \ldots = I^{2k}$.*

Доказательство. Можно считать, что I не является нильпотентным идеалом. В силу леммы 4.6. размерность алгебры I/I^2 конечна. Пусть $e_1, ..., e_n$ —

произвольные прообразы в I базисных элементов пространства I/I^2. Тогда подалгебра B, порожденная этими элементами, нильпотентна, т.е. $B^k = 0$ для некоторого k.

Легко видеть, что $I^2 + B = I$ как сумма подпространств. Пусть $x \in I^k$ — произвольный ненулевой элемент. Тогда $x = \sum_{i=1}^{p}(x_{i,1}, ..., x_{i,k})$ с некоторой расстановкой скобок в каждом слагаемом, причём либо $x_{i,j} \in B$, либо $x_{i,j} \in I^2$. В каждом ненулевом слагаемом есть множитель $x_{i,j} \in I^2$ (иначе слагаемое равно нулю в силу того, что $B^k = 0$). Таким образом, $x \in I^{k+1}$, то есть $I^k = I^{k+1}$. Пусть $y \in I^{k+1}$. Тогда $y = \sum_{i=1}^{m}(y_{i,1}, ..., y_{i,k+1})$ с некоторой расстановкой скобок в каждом слагаемом, причём либо $y_{i,j} \in B$, либо $y_{i,j} \in I^2$. Снова в каждом ненулевом слагаемом есть множитель $y_{i,j} \in I^2$, значит $y \in I^{k+2}$. Таким образом, $I^k = I^{k+1} = I^q$ для любого $q > k$. Лемма доказана.

Следуя К.А. Жевлакову [2], для произвольной алгебры A и элемента $x \in A$ введем следующее обозначение: $id_A(x)$ — идеал, порожденный всевозможными элементами вида xU_y, где $U_y \in \{L_y, R_y\}$.

Далее в этом параграфе, если не оговорено противное, A — альтернативная алгебра, удовлетворяющая условию максимальности для двусторонних идеалов. Пусть теперь I — локально нильпотентный идеал алгебры A конечной коразмерности. Тогда, по лемме 4.7., $I^k = I^{k+1} = I^{2k}$.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — произвольные прообразы базисных элементов A/I. Возьмем произвольный ненулевой элемент $x \in I^k$. Введем следующие обозначения: $J = id_I(x)$,

$$W = span\{T_{e_{i_1}} \dots T_{e_{i_d}}; T \in \{R, L\}, i_j \in \{1, \dots, n\}, d \leq 2n\}.$$

Лемма 4.8. *Пространство $K = J + JW$ — идеал алгебры A. Более того, $K \subset I^k$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $q \in K$. Можно считать, что

$$q = xT_1 \dots T_m D_1 \dots D_d = x_0 D_1 \dots D_d,$$

где $x_0 = xT_1 \dots T_m$, $T_i \in \{R_y, L_y | y \in I\}$, $D_i \in \{L_{e_i}, R_{e_i} | i = 1, \dots, n\}$, $0 \leqslant d \leqslant 2n$. Достаточно доказать, что $qy, yq \in K \quad \forall y \in I \cup \{e_1, \dots, e_n\}$.

Пусть $y \in I$. Индукцией по $d \leqslant 2n$ докажем , что

$$qy = \sum x_i D_{i_1} \dots D_{i_k}, yq = \sum y_i D_{i_1} \dots D_{i_l},$$

где $x_i, y_i \in J$, $k, l \leq d$. Если $d = 0$, то $q = xT_1 \dots T_m$ в этом случае все очевидно.

Предположим, что $d > 0$ и для всех $r < d$ всё доказано. Если $D_d = R_w$ для некоторого $w \in \{e_1, \dots, e_n\}$, то

$$qy = x_0 D_1 \dots D_{d-1} R_d R_y = x_0 D_1 \dots D_{d-1} R_{ye_d + e_d y} - x_0 D_1 \dots D_{d-1} R_y R_d.$$

По индукционному предположению $x_0 D_1 \dots D_{d-1} R_{ye_d+e_d y} = \sum z_i D_{i_1} \dots D_{i_k}$, где $z_i \in J$, $k \leq d-1$ и $x_0 D_1 \dots D_{d-1} R_y = \sum y_i D_{i_1} \dots D_{i_l}$, где $y_i \in J$, $l \leq d-1$. Отсюда получаем, что qy представляется в искомом виде.

Если $D_d = L_w$, то

$$qy = x_0 D_1 \dots D_{d-1} L_d R_y = -x_0 D_1 \dots D_{d-1} R_{ye_d} + x_0 D_1 \dots D_{d-1} (R_y R_d + R_y L_d)$$

Так как $ye_d \in I$, то $x_0 D_1 \dots D_{d-1} R_{ye_d} = \sum z_i D_{i_1} \dots D_{i_k}$, где $z_i \in J$, $k \leq d-1$. В силу доказанного выше и по индукционному предположению второе слагаемое представляется в виде $\sum y_i D_{i_1} \dots D_{i_l}$, где $x_i \in J$, $l \leq d$.

Таким образом, qy представляется в искомом виде. Утверждение для yq доказывается аналогично. Поэтому $qy, yq \in K$ для любого $y \in I$.

Пусть $y = e_i$. Покажем, что $qy \in K$. Если $d < 2n$, то очевидно, что $qy \in JW \subseteq K$. Следовательно, можно считать, что $d = 2n$. Тогда в элементе qy встретятся либо два оператора L_u, либо два оператора R_u, где $u = e_j$ для некоторого j.

Если в элементе qy встретятся два оператора L_u, то они встретятся и в элементе q. Поэтому $q = x_0 D_1 \dots D_{i-1} L_u D_{i+1} \dots D_{j-1} L_u \dots D_d$.

Пусть $D_{j-1} = L_{e_{j-1}}$. Тогда

$$\begin{aligned} q = x_0 D_1 \dots D_{i-1} L_u D_{i+1} \dots D_{j-1} L_u \dots D_d = \\ = -x_0 D_1 \dots D_{i-1} L_u D_{i+1} \dots L_u D_{j-1} \dots D_d + \\ + x_0 D_1 \dots D_{i-1} L_u D_{i+1} \dots L_{ue_{j-1}+e_{j-1}u} \dots D_d. \end{aligned}$$

Так как $ue_{j-1}+e_{j-1}u=\sum\alpha_ie_i+w$, где $w\in I$. Поэтому, по доказанному выше, второе слагаемое представляется в виде $\sum x_iD_{i_1}\dots D_{i_k}$, где $x_i\in J$, $k\leq d-1$.

Пусть $D_{j-1}=R_{e_{j-1}}$. Тогда

$$q=x_0D_1\dots D_{i-1}L_uD_{i+1}\dots L_uD_{j-1}\dots D_d-$$

$$x_0D_1\dots D_{i-1}L_uD_{i+1}\dots L_uL_{j-1}\dots D_d+x_0D_1\dots D_{i-1}L_uD_{i+1}\dots L_{ue_{j-1}}\dots D_d.$$

Так как $ue_{j-1}=\sum\alpha_ie_i+w$, где $w\in I$, то третье слагаемое представляется в виде $\sum x_iD_{i_1}\dots D_{i_k}$, где $x_i\in J$, $k\leq d-1$. Продолжая этот процесс, получим

$$q=x_0D_1\dots D_{i-1}L_{u^2}D_{i+1}\dots D_{j-1}\dots D_d+\sum x_iD_{i_1}\dots D_{i_k},$$

где $x_i\in J$, $k\leq d-1$. Так как $u^2=\sum\alpha_ie_i+w$, где $w\in I$, то, в силу доказанного выше, $q=\sum y_iD_{i_1}\dots D_{i_k}$, где $y_i\in J$, $k\leq d-1$. Отсюда следует, что $qy\in K$.

Пусть теперь в элементе qy встретятся два оператора R_u, где $u=e_j$ для некоторого j. Не уменьшая общности, можно считать $e_i=e_j$, т.е $y=u$. Будем писать $w\equiv v$, если $w-v\in K$.

Пусть $D_d=R_w$ для некоторого $w\in\{e_1,\dots,e_n\}$. Пусть $w=y$, тогда $qy=x_0D_1\dots D_{d-1}R_{y^2}$. Так как $y^2=\sum\alpha_ie_i+v$, где $v\in I$, то, в силу доказанного выше, $qy\in K$. Поэтому можно считать, что $y\neq w$. Тогда

$$qy=x_0D_1\dots D_{d-1}R_dR_y=x_0D_1\dots D_{d-1}R_{ye_d+e_dy}-x_0D_1\dots D_{d-1}R_yR_d.$$

Так как $ye_d+e_dy=\sum\alpha_ie_i+v$, где $v\in I$, то в силу доказанного выше

$$qy\equiv -x_0D_1\dots D_{d-1}R_yR_d.$$

Если $D_d=L_w$, то

$$qy=x_0D_1\dots D_{d-1}L_wR_y=$$

$$=-x_0D_1\dots D_{d-1}R_{wy}+x_0D_1\dots D_{d-1}R_yR_w+x_0D_1\dots D_{d-1}R_yL_w.$$

Так как $wy=\sum\alpha_ie_i+v$, где $v\in I$, то

$$qy\equiv -x_0D_1\dots D_{d-1}R_yR_d-x_0D_1\dots D_{d-1}R_yL_d.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$qy \equiv x_0 D_1 \dots D_{i-1} R_{y^2} D_{i+1} \dots D_{j-1} \dots D_d.$$

Отсюда получаем, что $qy \in K$. Аналогично, $yq \in K$ для $y \in \{e_1, \dots, e_n\}$. Таким образом, K — идеал алгебры A. Ясно, что $K \subset I^k$. Лемма доказана.

Для доказательства невырожденности почти конечномерной альтернативной алгебры мы изучим первичные нетеровы алгебры с локально нильпотентным радикалом конечной коразмерности. Для этого нам понадобится рассматривать первичные вырожденные альтернативные алгебры. Эти объекты существуют, примеры построены, например, в работах [14], [20]. Подробная теория первичных вырожденных альтернативных алгебр построена С.В. Пчелинцевым в серии статей (например, [15], [16], [17]). Некоторые из этих результатов понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 4.9. *Пусть A — первичная вырожденная алгебра, у которой локально нильпотентный радикал имеет конечную коразмерность над F. Тогда она локально конечномерна над F.*

Доказательство. Поскольку фактор-алгебра $A/\mathcal{L}(A)$ конечномерна и $\mathcal{L}$-полупроста, то она не содержит ненулевых ниль-идеалов (например, по теореме 12.4 в [1]). Таким образом, $Nil(A) = \mathcal{L}(A)$. В силу [15] в алгебре A выполняется тождество

$$[[x, y], y] = 0,$$

где $[x, y] = xy - yx$. Поэтому, в силу [16] (теорема 3.1. и следствие 3.1.), получаем, что ниль-радикал $Nil(A)$ является ниль-алгеброй индекса 3 и $A/Nil(A)$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Фактор-алгебра $A/\mathcal{L}(A)$ конечномерна, поэтому алгебраична. Таким образом, для любого элемента $a \in A$ существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in F$, что $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i a^i + a^n = b \in Nil(A)$. Так как $b^3 = 0$, то A - алгебраичная над F алгебра, причем степени алгебраичности ограничены числом $3 \dim(A/Nil(A))$. Следовательно, в силу теоремы Ширшова ([1], следствие теоремы 5.6), A — локально конечна над F, то есть локально конечномерна. Лемма доказана

Лемма 4.10. *В обозначениях леммы 4.8. предположим, что A является первичной вырожденной альтернативной алгеброй. Тогда $x \notin J + JW$. В* *частности,* $J + JW \neq I^k$.

Доказательство. Предположим противное, то есть, что $x \in J + JW$. Тогда

$$x = \sum_{k=1}^{p_1} xD_{a_{1k}} \dots D_{a_{u_k k}} + \sum_{k=1}^{p_2} xD_{b_{1k}} \dots D_{b_{v_k k}} D_{e_{i_1 k}} \dots D_{e_{i_{m_k} k}},$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in I$, D_w- оператор правого или левого умножения на элемент w.

В силу леммы 4.9. алгебра A локально конечномерна. В частности, подалгебра B, порожденная элементами вида x, a_{ij}, b_{ij} и $e_1, \dots e_n$, конечномерна. Тогда $I \cap B$ — нильпотентный идеал алгебры B и $x, a_{ij}, b_{ij} \in I \cap B$. Поэтому

$$x = \sum xD_{c_{i1}} \dots D_{c_{ij_i}} U_i, \tag{4.1}$$

где $c_{ij} \in I \cap B$, а U_i — это элементы алгебры $M(B)$ умножений алгебры B. Пусть $b \in I \cap B$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 4.8., получаем

$$\sum xD_{c_{i1}} \dots D_{c_{ij_i}} U_i D_b = \sum xD_{c_{i1}} \dots D_{c_{ij_i}} D_{b'_i} U'_i,$$

где $b'_i \in I$, $U'_i \in M(B)$.

Пусть индекс нильпотентности $I \cap B$ равен $s+1$. Тогда, подставляя в выражение (4.1) вместо x его же правую часть $s+1$ раз (после каждой подстановки меняя, если нужно, местами операторы U_i и $D_{c_{ij}}$ так, чтобы все операторы U_i оказались самыми правыми в слагаемых), получим, что $x \in (I \cap B)^{s+1} M(B)$. Следовательно, $x = 0$. Противоречие, лемма доказана.

Лемма 4.11. *Пусть A — первичная вырожденная нетерова альтернативная алгебра. Тогда ее локально нильпотентный радикал имеет бесконечную коразмерность.*

Доказательство. Предположим, что локально нильпотентный радикал I алгебры A имеет конечную коразмерность. По лемме 4.7. существует такое $k > 0$, что $I^k = I^{2k}$. Так как алгебра A первична, то существует такой ненулевой $x_1 \in I^k$, что $J_1 = id_I(x_1) \neq 0$. Тогда по лемме 4.8. $K_1 = J_1 + J_1 W$ — идеал в A. По лемме 4.10. $x_1 \notin K_1$.

Так как $x_1 \in I^{2k}$, то $x_1 = \sum a_i D_{b_i}$, где $a_i \in I^k$, $b_i \in I$, $D \in \{R, L\}$. Поскольку $x_1 \notin K_1$, то существует такое i, что $a_i D_{b_i} \notin K_1$, а значит и $a_i \notin K_1$. Таким образом, $a_i D_{b_i} \in id_I(a_i)$, но $a_i D_{b_i} \notin K_1$.

Положим $x_2 = a_i$ и $J_2 = J_1 + id_I(x_2)$. Если $x_2 \in J_2$, то

$$x_2 = a + \sum_{k=1}^{p_1} x_2 D_{a_{1k}} \dots D_{a_{n_k k}},$$

где $a \in J_1$. Алгебра, порожденная x_2 и всеми элементами a_{ij} входящими в запись x_2, нильпотентна индекса s. Подставляя s раз в правую часть последнего равенства вместо x_2 его представление получим, $x_2 \in J_1$. Тогда $a_i = x_2 \in J_1 \subseteq K_1$ — противоречие. Следовательно, $x_2 \notin J_2$. По лемме 4.10. $x_2 \notin K_2 = J_2 + J_2 W$. Таким образом, K_2 — идеал в A, $K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq I^k$, $x_2 \notin K_2$, $x_2 \in I^k$. Продолжая этот процесс, мы можем построить бесконечную строго возрастающую последовательность $K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \dots$ идеалов алгебры A. Противоречие, лемма доказана.

Теперь мы можем перейти к доказательству усиленного аналога теоремы Жевлакова.

Теорема 4.12. *Пусть A — нетерова справа альтернативная алгебра, I — ее односторонний ниль-идеал конечной коразмерности. Тогда I — нильпотентен.*

Доказательство. Пусть A — нетерова справа первичная вырожденная альтернативная алгебра, $N(A)$ — ее ниль-радикал. В силу [15] A удовлетворяет тождеству $[[x, y], y] = 0$. Тогда в силу ([16], теорема 3.1 и следствие 3.1) $N(A)$ является ниль-алгеброй индекса 3 и $A/N(A)$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов. В силу ([1], следствие 2 из теоремы 5.6) $N(A)$ локально нильпотентен. Заметим, что $A/N(A)$ является ассоциативной и коммутативной алгеброй.

Пусть I — односторонний ниль-идеал алгебры A конечной коразмерности. Тогда он является подмножеством в $N(A)$, так как иначе $A/N(A)$ содержит ненулевой нильпотентный элемент. Следовательно, $N(A)$ является локально нильпотентным радикалом A, который имеет конечную коразмерность. В силу леммы 4.11. получаем, что $I = 0$.

Таким образом, утверждение теоремы верно для первичной вырожденной альтернативной алгебры.

Рассмотрим произвольную полупервичную алгебру A, удовлетворяющую условию теоремы. Как известно ([1], теорема 8.6), она представляется в виде подпрямого произведения первичных алгебр $\{A_i, i \in M\}$, где $M-$ некоторое множество индексов. Легко видеть, что A_i так же будут удовлетворять условию теоремы. Пусть I — односторонний ниль-идеал A, имеющий конечную коразмерность. Первичные альтернативные алгебры являются либо вырожденными альтернативными алгебрами, либо кольцами Кэли-Диксона, либо ассоциативными первичными алгебрами. Так как кольца Кэли-Диксона не содержат ненулевых односторонних ниль-идеалов ([1], следствие предложения 9.3), то образ I в A_i отличен от нуля в случае, если A_i- ассоциативна. Но первичные ассоциативные нетеровы справа алгебры не содержат ненулевых ниль-идеалов по теореме Левицкого ([44]). Таким образом, $I = 0$ и теорема верна для полупервичных алгебр.

Пусть A — произвольная алгебра, удовлетворяющая условию теоремы. Обозначим $\mathcal{B}(A)$ — радикал Бэра алгебры A. Тогда фактор-алгебра $A/\mathcal{B}(A)$ — полупервична, и по доказанному выше, в алгебре $A/\mathcal{B}(A)$ нет ненулевых односторонних ниль-идеалов. Таким образом, если I — односторонний ниль-идеал конечной коразмерности алгебры A, то $I \subset \mathcal{B}(A)$. Но радикал Бэра нетеровой альтернативной алгебры нильпотентен ([1], теорема 12.5), значит существует такое $k > 0$, что $I^k = 0$. Теорема доказана.

Заметим, что из почти конечномерности альтернативной неассоциативной алгебры вытекает это же свойство и для односторонних идеалов, что утверждается в следующей лемме.

Лемма 4.13. *Всякая почти конечномерная альтернативная неассоциативная алгебра нетерова справа и слева. Более того, каждый ненулевой односторонний идеал имеет конечную коразмерность.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную альтернативную неассоциативную почти конечномерную алгебру A. Предположим, что она не нетерова справа, т.е. существует такое множество правых идеалов $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, что

$$0 \neq I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_j \subset \dots \text{ все включения строгие.}$$

Обозначим за $\widehat{I_i}$ наибольший двусторонний идеал, содержащийся в I_i. По лемме 4.5. алгебра A — первична. В [1] доказано (см. лемма 10.3), что $\widehat{I_i} \neq 0$. Тогда $A = \widehat{I_i} + B_i$ — прямая сумма подпространств, где подпространство B_i

— конечномерно. Так как $\widehat{I_i}$ — подпространство в I_i, то $A = I_i + C_i$ — прямая сумма подпространств, где C_i — подпространство B_i. Поэтому $dim(C_i) < dim(B_i)$. Пусть $dim(C_1) = n$. Тогда $dim(C_{n+1}) \leqslant 0$, то есть $C_{n+1} = 0$, то есть $A = I_{n+1}$. Противоречие. Лемма доказана.

Стоит отметить, что аналог последнего утверждения не выполняется для ассоциативных алгебр, соответствующие контрпримеры построены в [57].

Из леммы 4.1. леммы 4.3., леммы 4.5., теоремы 4.12., леммы 4.13., теоремы 2.3. и теоремы 1.4. вытекает итоговое описание почти конечномерных альтернативных алгебр.

Теорема 4.14. *Почти конечномерная альтернативная неассоциативная алгебра является кольцом Кэли-Диксона с почти конечномерным центром. Если эта алгебра содержит единицу, то она является конечно порожденным модулем над своим центром.*

Лемма Андрунакиевича позволяет сказать немного больше про ассоциативные нетеровы алгебры.

Теорема 4.15. *Пусть A — ассоциативная нетерова алгебра. Предположим, что локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(A)$ алгебры A имеет конечную коразмерность. Тогда алгебра A — конечномерна и $\mathcal{L}(A)$ — нильпотентен.*

Доказательство. Предположим, что A имеет бесконечную размерность. Тогда рассмотрим множество идеалов алгебры A, имеющих бесконечную коразмерность. Это множество непусто, так как в нем лежит нулевой идеал, и поэтому имеет максимальный элемент M. Алгебра $B = A/M$ почти конечномерна. Ясно, что образ $\mathcal{L}(A)$ (обозначим его I) в алгебре B не равен нулю, иначе M имеет конечную коразмерность в A. В силу леммы 4.6. I не является нильпотентным идеалом.

Покажем, что идеал I является почти конечномерной алгеброй. Пусть J — ненулевой идеал алгебры I. По лемме Андрунакиевича ([1], лемма 8.11) идеал $\widehat{J}$ алгебры B, порожденный множеством J, удовлетворяет условию $\widehat{J}^3 \subset J$. Поскольку B полупервична по лемме 4.5., то $\widehat{J}^3 \neq 0$. Поэтому J — идеал конечной коразмерности в I.

Таким образом, по лемме 4.1. I — нетерова алгебра. Следовательно, по теореме Жевлакова ([2]), I нильпотентен. В силу полупервичности алгебры B получаем, что $I = 0$, т.е. $\mathcal{L}(A) \subseteq M$. Отсюда следует, что алгебра A конечномерна и $\mathcal{L}(A)$ — нильпотентный идеал. Теорема доказана.

Из леммы 4.11. и доказательства теоремы 4.12. вытекает следующий результат.

Следствие 4.16. *Пусть A — альтернативная нетерова алгебра. Предположим, что локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(A)$ алгебры A имеет конечную коразмерность. Тогда $\mathcal{L}(A)$ — нильпотентен.*

4.2 Почти конечномерные йордановы алгебры

На протяжении этого параграфа все поля имеют характеристику, отличную от 2.

Для элемента $x \in J$ через R_x обозначим оператор правого умножения в йордановой алгебре J, т.е. $R_x : a \in J \mapsto ax \in J$. Пусть $R(J)$ — алгебра умножений алгебры J, т.е. подалгебра алгебры эндоморфизмов векторного пространства J, порожденная операторами R_x, id, где $x \in J$. В алгебре $R(J)$ справедливо следующее соотношение:

$$R_y R_z R_t + R_t R_z R_y + R_{(yt)z} = R_y R_{zt} + R_z R_{yt} + R_t R_{yz}. \tag{4.2}$$

Пусть J — йорданова алгебра над полем F, I — идеал алгебры J, $I^2 = 0$, $m \in I$ и $I + B = J$, где $B = span(e_1, ..., e_n)$ — векторное подпространство, порожденное элементами $e_1, ..., e_n$. Далее вместо R_{e_j} будем писать R_j.

Лемма 4.17. *Подпространство $T = span(\{m, mR_{i_1}...R_{i_k}, k \in \mathbb{N}\})$ — конечномерно.*

Доказательство. Обозначим $M_0 = Fm$; $M_{k+1} = M_k B + M_k$. Тогда $\cup_{k=0}^{\infty} M_k = T$. Рассмотрим элемент $z = mR_{i_1}...R_{i_{2n+1}}$. Существуют $p, q, r \in \overline{1, 2n+1}$ такие, что $p < q < r$, $e_{i_p} = e_{i_q} = e_{i_r}$. Тогда хотя бы два числа среди p, q и r одной четности. Поэтому $z = mR_{i_1}...R_{i_p}...R_{i_{q-2}}R_{i_{q-1}}R_{i_q} \dots R_{i_r}W$, где $W = R_{i_r+1}...R_{i_{2n+1}}$. Не нарушая общности, будем считать, что p и q одной четности. Обозначим $W_0 = R_{i_q+1} \dots R_{i_{2n+1}}$ Тогда, используя соотношение (4.2), получаем:

$$z = mR_{i_1}...R_{i_p}...R_xR_yR_{i_q}W_0 = -mR_{i_1}...R_{i_p}...R_{i_q}R_yR_xW_0 + t_1, t_1 \in M_{2n}$$

Продолжая сдвигать оператор R_{i_q} влево, получим:

$$z = mR_{i_1}...R_{i_p}R_{i_{p+1}}R_{i_q}W_1 + t, t \in M_{2n},$$

где $W_1 = R_{j_1}...R_{j_{2n-p-1}}$. Используя то же соотношение (4.2), получаем, что

$$2R_{i_p}R_{i_{p+1}}R_{i_q} = -R_{(e_{i_p}e_{i_{p+1}})e_{i_q}} + R_{e_{i_p}}R_{e_{i_q}e_{i_{p+1}}} + R_{e_{i_q}}R_{e_{i_p}e_{i_{p+1}}}.$$

Откуда следует, что $z \in M_{2n}$. Тогда $T = M_{2n}$ — конечномерно. Лемма доказана.

Лемма 4.18. *Бесконечномерная йорданова алгебра с условием обрыва возрастающих цепей идеалов не содержит тривиальных идеалов конечной коразмерности.*

Доказательство. Пусть J — йорданова алгебра с условием максимальности для идеалов, $I \trianglelefteq J$, причем I имеет конечную коразмерность. Предположим, что $I^2 = 0$. Поскольку $I \neq 0$, то есть существует $0 \neq m \in I$. Тогда I — конечно порожденный идеал. Пусть $I = id(m_1, ..., m_k)$ — идеал, порожденный элементами $m_1, ..., m_k$. Положим

$$I_i = Span\{m_i, m_iR_1...R_p, p \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда $I = I_1 + ... + I_k$ — сумма подпространств. По лемме 4.17. подпространство I_i — конечномерно. Следовательно, идеал I — конечномерен. Поэтому алгебра $J = I + B$ — конечномерна. Лемма доказана.

Из леммы 4.1, леммы 4.2 и леммы 4.18 следует следующая теорема.

Теорема 4.19. *Всякая почти конечномерная йорданова алгебра первична.*

Пусть J — йорданова алгебра, $I \trianglelefteq J$. Введем рекурсивно следующие обозначения: $I^{[1]} = I$, $I^{[k+1]} = (I^{[k]})^3$. Множества $I^{[k]}$ являются элементами убывающей последовательности идеалов алгебры J ([1], лемма 4.3).

Теорема 4.20. *Локально нильпотентный радикал почти конечномерной йордановой алгебры равен нулю.*

Доказательство. Сперва заметим, что почти конечномерная йорданова алгебра J не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. Предположим противное, тогда J содержит и нильпотентный идеал индекса 3. Пусть $I^3 = 0$ для некоторого ненулевого идеала $I \trianglelefteq J$. Определим следующую цепочку идеалов: $I^{(0)} = I$, $I^{(k)} = (I^{(k-1)})^2 + (I^{(k-1)})^2 J$. В ([39], с.191, теорема 1) доказано, что $I^{(k)}$ — идеалы алгебры J, причем существует такое $m > 0$, что $I^{(m)} \subseteq I^2$. Но тогда $(I^{(m)})^2 = 0$, откуда следует, что $I^{(m)} = 0$. Пусть n — минимальное такое число, что $I^{(n)} = 0$. Тогда $(I^{(n-1)})^2 = 0$, противоречие.

Пусть $I = \mathcal{L}(J) \neq 0$ — локально нильпотентный радикал алгебры J. Рассмотрим фактор-пространство I/I^2. Оно конечномерно, так как $I^3 \subseteq I^2$. Пусть $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ — базис векторного пространства I/I^2 и $e_1, ..., e_n$ — их прообразы в I. Эти элементы порождают нильпотентную подалгебру B, $B^k = 0$.

Легко видеть, что $I^2 + B = I$ как сумма подпространств. Пусть $x \in I^k$— произвольный ненулевой элемент. Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{p} (x_{i,1}, ..., x_{i,k})$ с некоторой расстановкой скобок в каждом слагаемом, причём либо $x_{i,j} \in B$, либо $x_{i,j} \in I^2$ (если это не так, то расписываем по линейности). В каждом ненулевом слагаемом есть множитель $x_{i,j} \in I^2$ (иначе слагаемое равно нулю в силу того, что $B^k = 0$). Таким образом, $x \in I^{k+1}$, то есть $I^k = I^{k+1}$. Пусть $y \in I^{k+1}$. Тогда $y = \sum\limits_{i=1}^{m} (y_{i,1}, ..., y_{i,k+1})$ с некоторой расстановкой скобок в каждом слагаемом, причём либо $y_{i,j} \in B$, либо $y_{i,j} \in I^2$. Снова в каждом ненулевом слагаемом есть множитель $y_{i,j} \in I^2$, значит $y \in I^{k+2}$. Таким образом, $I^k = I^{k+1} = I^q$ для любого $q > k$.

В алгебре I всегда можно выбрать идеал K такой, что $K \subseteq I^k$, $K \neq I^k$ и $dim I^k/K < \infty$. Действительно, если $I^{[k]} \neq I^k$, то $K = I^{[k]}$, и всё доказано. Пусть $I^k = I^{[k]}$. Тогда I^k — идеал в J. В силу первичности J для любого идеала L алгебры J имеем $L \cap I^k \neq 0$. В силу теоремы Скосырского ([19], следствие 3.1.) и доказанного выше существует идеал L алгебры J такой, что $L \cap I^k \neq I^k$. По условию теоремы $\dim I^k/(L \cap I^k) < \infty$. В этом случае $K = L \cap I^k$.

Пусть теперь K — идеал алгебры I такой, что $K \subseteq I^k$, $K \neq I^k$ и $\dim I^k/K$ наименьшая. Выберем $x \in I^k \setminus K$. Так как $I^k = I^{2k}$, то $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, $x_i \in I^k$, $y_i \in I$. Так как $x \notin K$, то $x_i y_i \notin K$ и $x_i \notin K$ для некоторого i. Рассмотрим идеал K_1 алгебры I, порожденный множеством $K \cup \{x_i y : y \in I\}$. Ясно, что $K_1 \subset I^k$. Так как $x_i y_i \notin K$, то $K \subsetneq K_1$. Поэтому $\dim I^k/K_1 < \dim I^k/K$. В силу выбора K получаем $K_1 = I^k$. Тогда

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_i R_{x_{j,1}} ... R_{x_{j,k_j}} + t, x_{j,s} \in I, t \in K.$$

Подалгебра, порожденная x_i и всеми $x_{j,s}$, входящими в запись x_i нильпотентна. Так как K — идеал в I, то, итерируя последнее равенство достаточное количество раз, получим, что $x_i \in K$, противоречие. Теорема доказана.

Следствие 4.21. *Почти конечномерная йорданова алгебра невырождена.*

Доказательство. Пусть J — почти конечномерная йорданова алгебра. Тогда, в силу теоремы 4.20., локально нильпотентный радикал алгебры J равен нулю. В силу ([6], теорема 3) J — невырожденная алгебра. Следствие доказано.

Докажем аналог теоремы 4.12. для йордановых алгебр.

Следствие 4.22. *Пусть J — йорданова алгебра с условием обрыва возрастающих цепей идеалов, $\mathcal{L}(J)$ — локально нильпотентный радикал конечной коразмерности. Тогда J — конечномерна.*

Доказательство. Предположим, что $dim(J) = \infty$. Тогда рассмотрим множество $M = \{I \trianglelefteq J | dim(J/I) = \infty\}$. Так как M непусто, то в нем найдется максимальный элемент I_0. Понятно, что алгебра J/I_0 почти конечномерна, а значит в ней локально нильпотентный радикал равен нулю. Но из соображений размерности образ $\mathcal{L}(J)$ в алгебре J/I_0 не равен нулю. Противоречие. Следствие доказано.

Важной задачей является выяснение сохранения свойств специальной йордановой алгебры у ее ассоциативной обертывающей.

Следствие 4.23. *Каждая почти конечномерная йорданова алгебра либо специальна, либо является кольцом Алберта. Специальная почти конечномерная йорданова алгебра имеет почти конечномерную ассоциативную обертывающую.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 4.19., следствия 4.21 и теоремы 1.12.

Докажем второе утверждение. Пусть J — специальная йорданова почти конечномерная алгебра, $B-$ ее ассоциативная обертывающая. Рассмотрим множество $M = \{I \trianglelefteq B : I \cap J = 0\}$. Если $\{I_j : j \in \mathbb{N}\}-$ цепь в M, то $\cup_{j\in\mathbb{N}} I_j \in M$, а значит эта цепь имеет верхнюю грань. Тогда по лемме Цорна M содержит максимальный элемент K. Рассмотрим фактор-алгебру $A = B/K$. Так как $K \in M$, то $K \cap J = 0$ и J вкладывается в $A^{(+)}$, причем любой ненулевой идеал из A пересекается с J.

Пусть I — ненулевой идеал алгебры A, тогда $0 \neq I \cap J$ — идеал в J. Множество $J/(I \cap J)$ порождает алгебру A/I. Так как пространство $J/(I \cap J)$ конечномерно, то, как известно, пространство A/I конечномерно. В силу произвольности ненулевого идеала I алгебра A почти конечномерна. Следствие доказано.

Из теоремы 3.1., леммы 4.3. и следствия 4.23. получаем следующий результат.

Теорема 4.25. *Пусть J — почти конечномерная исключительная йорданова алгебра с единицей. Тогда J является кольцом Алберта, его центр $Z(J)$ — почти конечномерная алгебра и J — конечный модуль над $Z(J)$.*

Из теоремы 3.4., леммы 4.3. и следствия 4.23. получаем следующее итоговое описание почти конечномерных йордановых PI-алгебр.

Теорема 4.26. *Почти конечномерная йорданова PI-алгебра с единицей является либо конечным модулем над своим центром, который является почти конечномерной алгеброй, либо центральным порядком в йордановой алгебре симметрической билинейной формы.*

При переходе от ассоциативной алгебры к йордановой с симметризованным произведением сохраняется ряд свойств исходной алгебры. Одним из них является простота: это утверждение известно под названием конструкции Херстейна и было впервые доказано в [38]. Следующая теорема является усилением аналогичного результата для ассоциативных алгебр, доказанного в [50]. В свою очередь, этот результат представляет обобщение теоремы Херстейна на почти конечномерные алгебры.

Теорема 4.27. *Пусть A — альтернативная алгебра. Тогда A почти конечномерна тогда и только тогда, когда йорданова алгебра $A^{(+)}$ почти конечномерна.*

Доказательство Пусть A — почти конечномерная альтернативная алгебра, I — ненулевой идеал в $A^{(+)}$. Из [16] (теорема 4.1), [15] и леммы 4.5. следует, что алгебра $A^{(+)}$ — первична. Тогда в I существуют элементы x, y, такие, что $xy + yx \neq 0$. В [21] доказано, что идеал J в A, порожденный элементом $xy + yx$ вложен в I. Так как J — идеал конечной коразмерности, то I — тоже идеал конечной коразмерности. В обратную сторону утверждение очевидно. Теорема доказана.

Продолжим изучение возможностей обобщения теорем Херстейна на почти конечномерные алгебры.

Лемма 4.28. *Пусть A — ассоциативная коммутативная бесконечномерная алгебра с инволюцией $*$ и без делителей нуля. Тогда $H(A,*)$ бесконечномерна.*

Доказательство. Предположим, что алгебра $H(A,*)$ конечномерна. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис $H(A,*)$, $A = H(A,*) + B$, где B — пространство кососимметрических элементов алгебры A, $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$ — его базис. Тогда $(e_{n+1}e_{n+k})^* = -e_{n+k} \cdot (-e_{n+1}) = e_{n+1}e_{n+k}$, то есть $f_k = e_{n+1}e_{n+k} \in H(A,*)$ для любого $k > 0$. Но тогда элементы $f_1, \ldots, f_{n+1}$ линейно зависимы, а значит существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ (причём, хотя бы один из них ненулевой), что:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k e_{n+1} e_{n+k} = 0$$

$$e_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k e_{n+k} = 0$$

В алгебре A нет делителей нуля, а значит $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k e_{n+k} = 0$, откуда следует, что $\alpha_k = 0$ для любого k, противоречие. Лемма доказана.

Теорема 4.29. *Пусть A — ассоциативная почти конечномерная алгебра с инволюцией $*$. Тогда $H(A,*)$ почти конечномерна.*

Доказательство. Пусть $0 \neq I \trianglelefteq H(A,*)$. Если $bcb = 0$ для всех $b, c \in I$, то A содержит ненулевой нильпотентный идеал ([47]), что невозможно в силу первичности A. Тогда существуют такие $b, c \in I$, что $bcb \neq 0$, откуда следует, что $A^{\#}bcbA^{\#} \cap H(A,*) \subseteq I$ ([47]). Идеал $A^{\#}bcbA^{\#}$ имеет конечную коразмерность в A, значит $A^{\#}bcbA^{\#} \cap H(A,*)$ имеет конечную коразмерность в $H(A,*)$, откуда следует, что I имеет конечную коразмерность в $H(A,*)$. Таким образом, любой ненулевой идеал алгебры $H(A,*)$ имеет конечную коразмерность, так что остается доказать, что $H(A,*)$ имеет бесконечную размерность.

Предположим, что $H(A,*)$ конечномерна. В этом случае она является PI-алгеброй. Тогда A тоже PI-алгебра ([25], теорема 6). Как известно, ее центр Z — почти конечномерная алгебра ([30], следствие 1). Легко проверить, что для любого элемента $z \in Z$ верно, что $z^* \in Z$, то есть ограничение $*$ на Z будет являться инволюцией алгебры Z. Тогда по лемме 4.28. $H(Z,*)$ бесконечномерна, а значит и $H(A,*)$ бесконечномерна. Полученное противоречие доказывает теорему.

4.3 Почти конечномерные йордановы супералгебры

Цель этого параграфа: доказать, что конструкция Херстейна сохраняет свойство быть почти конечномерной супералгеброй. Аналог этого результата для простых супералгебр доказан в работе [35]. Как обычно, будем считать, что характеристика всех полей отлична от 2. Всюду далее будем использовать следующее обозначение:

$$x \circ_s y = \frac{1}{2}(xy + (-1)^{|x||y|}yx).$$

Лемма 4.30. *Пусть $B = A + M$ — ассоциативная супералгебра, I — идеал супералгебры $B^{(+)}$. Если $a, b \in I$, $x \in B$, то $(a \circ_s b)x \in I$.*

Доказательство. В силу полилинейности многочлена $(a \circ_s b)x$ можно считать, что a, b, x однородные.

В алгебре B верны следующие равенства:

$$a(xb-bx)+(xb-bx)a = (ax-xa)b+b(ax-xa)+x(ab+ba)-(ab+ba)x, \quad (4.3)$$

$$(xa-ax)b+b(xa-ax)-(a(xb-bx)-(xb-bx)a)+2(bax+axb)=$$
$$=(ab+ba)x+x(ab+ba), \quad (4.4)$$

$$(xb-bx)a-a(xb-bx)-(xa-ax)b+b(xa-ax)=$$
$$=(ab-ba)x-x(ab-ba), \quad (4.5)$$

$$(xa+ax)b+b(xa+ax)-a(xb+bx)-(xb+bx)a=x(ab-ba)-(ab-ba)x. \quad (4.6)$$

Пусть теперь $a,b\in I$. Рассмотрим несколько случаев:

1) $a,b,x\in A$ или один из a,b,x лежит в M, остальные — в A. Тогда

$$(ab+ba)x+x(ab+ba)\in I.$$

В силу (4.3)

$$x(ab+ba)-(ab+ba)x\in I.$$

Вычитая из предпоследнего выражения последнее,получаем, что $2(ab+ba)x\in I$.

2) $a,x\in M, b\in A$. Тогда

$$(ab+ba)x-x(ab+ba)\in I.$$

В силу (4.4)

$$(ab+ba)x+x(ab+ba)\in I.$$

Суммируя последние два выражения, получаем, что $2(ab+ba)x\in I$. Случай $b,x\in M, a\in A$ разбирается аналогично.

3) $a,b\in M, x\in A$. Тогда

$$(ab-ba)x+x(ab-ba)\in I.$$

В силу (4.5)

$$(ab-ba)x-x(ab-ba)\in I.$$

Складывая последние два выражения, получаем, что $2(ab-ba)x\in I$.

4) $a,b,x\in M$. Тогда

$$x(ab-ba)+(ab-ba)x\in I.$$

В силу (4.6)

$$x(ab - ba) - (ab - ba)x \in I.$$

Вычитая из предпоследнего выражения последнее, получаем, что $2(ab - ba)x \in I$. Лемма доказана.

Лемма 4.31. *Пусть $B = A + M$ — ассоциативная супералгебра, I — идеал супералгебры $B^{(+)}$ с нулевым умножением, $b \in I \cap M$ и $b^2 = 0$ в супералгебре B. Тогда $(B^{\#}bB^{\#})^3 = 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых $x, y \in B$ $bxbyb = 0$. Можно считать, что элементы x и y — однородные. Заметим, что $btb \in I$ для любого однородного элемента $t \in B$: в самом деле, так как $b^2 = 0$, то $btb = 2(bt) \circ_s b \in I$. Поэтому $btb \in I$ для любого $t \in B$. Сперва докажем, что $bxby \in I$.

Рассмотрим несколько случаев:

1) $x, y \in A$. Тогда

$$(xb + bx)(by) - (by)(xb + bx) - bxby + bybx + b(yx)b = xb^2y = 0.$$

Таким образом, $bybx - bxby \in I$. Но $b(ybx) - (ybx)b \in I$, откуда следует (вычитаем из последнего выражения предпоследнее), что $bxby - ybxb \in I$. Так как $(bxb)y + y(bxb) \in I$, то $2bxby \in I$.

2) $x \in A, y \in M$. Тогда

$$(xb + bx)(by) + (by)(xb + bx) - bxby - bybx - b(yx)b = xb^2y = 0.$$

Таким образом, $bxby + bybx \in I$. Но $(bxb)y + y(bxb) \in I$, откуда следует (вычитаем из предпоследнего выражения последнее), что $bybx - ybxb \in I$. Так как $b(ybx) + (ybx)b \in I$, то $2bybx \in I$. Так как $bxby + bybx \in I$, то $bxby \in I$.

Случай $x \in M, y \in A$ разбирается аналогично.

3) $x, y \in M$. Тогда

$$(xb - bx)(by) + (by)(xb - bx) + bxby + bybx - b(yx)b = xb^2y = 0.$$

Таким образом, $bxby + bybx \in I$. Но $(bxb)y - y(bxb) \in I$, откуда следует (вычитаем из предпоследнего выражения последнее), что $bybx + ybxb \in I$. Так как $b(ybx) - (ybx)b \in I$, то $2bybx \in I$. Так как $bxby + bybx \in I$, то $bxby \in I$.

Поскольку в идеале I нулевое умножение в алгебре $B^{(+)}$, то однородные элементы из I в алгебре B либо коммутируют, либо антикоммутируют. Тогда

$$(bxby)b = \pm b(bxby) = \pm b^2xby = 0$$

для $x, y \in A \cup M$. Лемма доказана.

Пусть $x, y, z \in B$. В любой ассоциативной алгебре справедливы тождества:

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y, \tag{4.7}$$

$$[x \circ y, z] + [y \circ z, x] + [z \circ x, y] = 0, \tag{4.8}$$

где $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$,

$$(x, y, z)^+ = \frac{1}{4}[y, [x, z]], \tag{4.9}$$

где $(x, y, z)^+ = (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z)$. Отметим, что тождества (4.8) и (4.9) являются сокращенной записью равенств (4.3) и (4.6).

Теорема 4.32. *Пусть $B = A + M$ — полупервичная ассоциативная супералгебра, причем B не является коммутативной алгеброй, I — ненулевой идеал супералгебры $B^{(+)}$, содержащийся в M. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $I[M, M] = [M, M]I = 0$

2. $MI + M^2I$ — собственный ненулевой идеал супералгебры B и $MI + M^2I \subseteq Z(B)$,

3. $[B, B](MI + M^2I)^2 = 0$.

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько пунктов.

Пункт 1. Поскольку $I \subseteq M$, то $I \circ_s M \subseteq A \cap I = 0$. Поэтому $[M, I] = 0$. В силу (4.7)

$$[MM, I] \subseteq M[M, I] + [M, I]M = 0.$$

Пусть $P = [M, M]I$. Ясно, что $P \subseteq M$. Так как $[MM, I] = 0$ и $[M, M] \subseteq A$, то

$$P = [M, M]I = [M, M] \circ_s I \subseteq I.$$

Поэтому $P \circ_s M = 0$. Покажем, что $P \circ_s A \subseteq P$. Действительно, в силу (4.9)

$$P \circ_s A = ([M, M] \circ_s I) \circ_s A =$$
$$= ([M, M] \circ I) \circ A \subseteq ([M, M], I, A)^+ + [M, M] \circ (I \circ A) \subseteq$$
$$\subseteq [I, [[M, M], A]] + [M, M]I \subseteq [I, MM] + [M, M]I = [M, M]I = P.$$

Следовательно, P — идеал супералгебры $B^{(+)}$. Более того, $P \circ_s P = 0$, т.е. P — идеал с нулевым умножением.

Пусть $x, y \in M, i \in I$ и $b = [x, y]i$. Тогда $b^2 = [x, y]i[x, y]i = [x, y]i^2[x, y]$, так как $[[x, y], i] = 0$. В силу (4.7)

$$[x, y]i^2 = [xi^2, y] - x[i^2, y] = [(xi) \circ_s i, y] \in [I, M] = 0.$$

Поэтому $b^2 = 0$. По лемме 4.31. получаем $[M, M]I = 0$.

Пункт 2. Пусть $K = MI + M^2I$. Тогда $AK \subseteq K$. Так как $[M, I] = 0$, то

$$KA = IMA + IM^2A \subseteq IM + IM^2 = K.$$

Аналогично, $MK \subseteq K$ и $KM \subseteq K$. Следовательно, K — идеал супералгебры B. Предположим, что $MI = 0$. Тогда, в силу леммы 4.31. $I = 0$. Следовательно, $K \neq 0$.

Покажем, что $K \subset Z(B)$. В силу $[M, I] = 0$ и (4.8)

$$[MI, A] \subseteq [M \circ I, A] \subseteq [I \circ A, M] + [A \circ M, I] \subseteq [M, I] = 0.$$

Аналогично

$$[M^2I, A] = [M^2 \circ I, A] \subseteq [I \circ A, M^2] + [A \circ M^2, I] \subseteq [M^2, I] = 0.$$

В силу пункта 1 и (4.7)

$$[MI, M] \subset M[I, M] + [M, M]I = 0.$$

Аналогично, $[M^2I, M] = 0$. Следовательно, $K \subset Z(B)$. Поскольку B — некоммутативная алгебра, то K — собственный идеал супералгебры B.

Пункт 3. Покажем, что $[B, B]K^2 = 0$. В силу пункта 1 $I[M, M] = [M, M]I = 0$. Поэтому

$$[M, M]K = K[M, M] \subseteq MI[M, M] + M^2I[M, M] \subseteq 0.$$

В силу (4.7)

$$[A, M]MI \subseteq [AM, M]I + A[M, M]I = 0,$$

а также $[A, M]M^2I = [A, M]MIM = 0$. Следовательно, $[A, M]K = 0$. В силу (4.7)

$$[A, A]MI \subseteq [AM, A]I + A[M, A]I \subseteq B^{\#}[M, A]I.$$

Следовательно,

$$[A, A]M^2I \subseteq [A, A]MIM \subseteq B^{\#}[M, A]IM = 0.$$

Поэтому

$$[A, A]K^2 \subseteq ([A, A]MI + [A, A]M^2I)K \subseteq B^{\#}[M, A]IK \subseteq B^{\#}I[M, A]K = 0.$$

Таким образом, $[B, B]K^2 = 0$. Теорема доказана.

Лемма 4.33. *Ассоциативная почти конечномерная супералгебра полупервична.*

Доказательство. Пусть I — идеал ассоциативной почти конечномерной супералгебры B, и x — однородный элемент I. Предположим, что $(B^{\#}xB^{\#})^2 = 0$. Ясно, что $(B^{\#}xB^{\#}) \neq B$. Пусть $S = \{f_i\}$ — базис $B^{\#}xB^{\#}$, $e_1, \ldots, e_n$ — дополнение S до базиса алгебры B. Тогда любой элемент b из $B^{\#}xB^{\#}$ представляется в виде $b = \sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}e_ixe_j + \sum\limits_{i}(\beta_ixe_i + \gamma_ie_ix) + \delta x$. Таким образом, $B^{\#}xB^{\#}$ имеет базис $\{e_ixe_j, xe_i, e_ix, x | 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, то есть идеал $B^{\#}xB^{\#}$ конечномерен. Но тогда $x = 0$. Поэтому I не является нильпотентным идеалом. Лемма доказана.

Теорема 4.34. *Пусть $B = A + M$ — почти конечномерная ассоциативная супералгебра, не являющаяся коммутативной алгеброй. Тогда $B^{(+)}$ — почти конечномерная йорданова супералгебра.*

Доказательство. Пусть I — собственный идеал супералгебры $B^{(+)}$. Тогда по лемме 4.30. $(a \circ_s b)x \in I$ для любого $x \in B^{\#}$ и $a, b \in I$. Поэтому для любого $y \in B^{\#}$ верно включение $((a \circ_s b)x) \circ_s y \in I$, откуда следует, что $y(a \circ_s b)x \in I$ для любых $x, y \in B^{\#}$, то есть $B^{\#}(a \circ_s b)B^{\#} \subseteq I$. Таким образом, либо $a \circ_s b = 0$ для любых $a, b \in I$, либо I — идеал конечной коразмерности.

Предположим, что $I \circ_s I = 0$. Пусть $a \in I \cap A$. Тогда для любого $x \in B^{\#}$

$$0 = 4a \circ_s (x \circ_s a) = a(ax + xa) + (ax + xa)a = 2axa,$$

что означает $aB^{\#}a = 0$. Таким образом, $(B^{\#}aB^{\#})^2 = 0$, откуда $a = 0$ в силу леммы 4.33.

Поэтому можно считать, что $I \subseteq M$. Тогда, по лемме 4.33. и теореме 4.32. $K = (MI + M^2I)^2$ — собственный центральный идеал супералгебры B и $[B, B]K = 0$.

Пусть a — однородный элемент, содержащийся в $[B, B]$ и L — идеал супералгебры B, порожденный a. Тогда $LK = 0$. Поэтому $(K \cap L)^2 \subseteq LK = 0$. В силу леммы 4.33. $K \cap L = 0$. Следовательно, супералгебра B — конечномерна. Поэтому $[B, B] = 0$. Следовательно, B — коммутативная алгебра. Поэтому $I \circ_s I \neq 0$.

Таким образом, коразмерность идеала I конечна. Теорема доказана.

Закончим параграф примером, который показывает, что условие некоммутативности алгебры B является существенным.

Пример 4.35. Пусть $B = A + M$ — Z_2-градуированная ассоциативная и коммутативная алгебра. Тогда в супералгебре $B^{(+)_s}$ нечетная часть M является идеалом с нулевым умножением. Например, пусть $B = F[x]$ — кольцо многочленов от одной переменной, $A = F[x^2]$, $M = xF[x^2]$. Тогда B — почти конечномерная ассоциативная супералгебра, но $B^{(+)}$ не является почти конечномерной, поскольку M является идеалом в $B^{(+)}$. Понятно, что это верно для произвольной ассоциативной почти конечномерной супералгебры, которая является коммутативной алгеброй.

Заключение

В диссертационной работе изучались центральные порядки в конечномерных простых алгебрах и супералгебрах и почти конечномерные алгебры, близкие к ассоциативным. При этом, изучение почти конечномерных алгебр явным образом использует доказанные утверждения в теории центральных порядков. Были получены следующие результаты:

1. Доказано, что центральный порядок в классической простой йордановой супералгебре с полупростой четной частью вкладывается в конечный модуль над суперцентром.

2. Доказано, что центральный порядок в простой альтернативной конечномерной супералгебре либо вкладывается в конечный модуль над суперцентром, либо является скрученной супералгеброй векторного типа.

3. Доказано, что почти конечномерная альтернативная (йорданова PI) алгебра является первичной невырожденной алгеброй и конечным модулем над своим почти конечномерным центром.

Первые два результата обобщают теорему Форманека на супералгебры, ассоциативные и близкие к ассоциативным. Третий результат завершает классификацию почти конечномерных альтернативных и йордановых PI алгебр. Разработанные методы могут быть использованы для дальнейшего изучения неассоциативных супералгебр.

Литература

[1] *Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978. 432 с.

[2] *Жевлаков К.А.,* Замечания о локально нильпотентных кольцах с условиями обрыва // Матем. заметки — 1972. — Т. 12, № 2. — С. 121–126.

[3] Замечания о простых альтернативных кольцах // Алгебра и логика — 1967. — Т. 6, № 2. — С. 21–33.

[4] *Желябин В.Н.,* Примеры первичных йордановых супералгебр векторного типа и супералгебр типа Ченга-Каца // Сиб. матем. журн. — 2013 — Т. 54, №1 — С. 49–56

[5] *Желябин В.Н.,* Простые йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Сиб. матем. журн. — 2016 — Т. 57, №6 — С. 1262–1279.

[6] *Зельманов Е.И.,* Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. матем. журн. — 1982 — Т. 23, №6 — С. 100–116.

[7] *Зельманов Е.И.,* О первичных йордановых алгебрах II // Сиб. матем. журн. — 1983 — Т. 24, №1 — С. 89–104.

[8] *Зельманов Е.И., Шестаков И.П.,* Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1990 — Т. 54, №4 — С. 676–693.

[9] *Кантор И.Л.,* Йордановы и лиевы супералгебры, определенные алгеброй Пуассона // Вторая сибирская школа «Алгебра и анализ», Томск — 1989 — С. 55–80.

[10] *Мальцев Ю.Н., Журавлев Е.В.,* Лекции по теории ассоциативных колец. — Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2015. 434 с.

[11] *Марков В.Т.,* Размерность некоммутативных аффинных алгебр // Изв. АН СССР, сер. матем. — 1973 — Т. 37 — С. 284–288.

[12] *Молин Ф.Э.,* Ueber Systeme hoherer complexer Zahlen // Math.Ann. — 1982 — Т. 41 — С. 83–156.

[13] Нерешённые вопросы теории групп. Коуровская тетрадь // Под ред. В.Д. Мазурова, Е.И. Хухро. — 18 изд. — Новосибирск: Институт математики Сибирского отделения РАН, 2014. — 253 с.

[14] *Пчелинцев С.В.,* О нильпотентных элементах и ниль-радикалах альтернативных алгебр // Алгебра и логика — 1985 — Т. 24, №6 — С. 674–695.

[15] *Пчелинцев С.В.,* Исключительные первичные альтернативные алгебры // Сиб. матем. журн. — 2007 — Т. 48, №6 — С. 1322–1337.

[16] *Пчелинцев С.В.,* Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным // Изв. РАН. сер. матем. — 2004 — Т. 68, №1 — С. 183–206.

[17] *Пчелинцев С.В.,* Вырожденные альтернативные алгебры // Сиб. матем. журн. — 2014 — Т. 55, №2 — С. 396–411.

[18] *Скорняков Л.А.,* Альтернативные тела // Укр. матем. журн. — 1950 — Т. 2, №1 — С. 70–85.

[19] *Скосырский В.Г.,* О радикалах йордановых алгебр // Сиб. матем. ж. — 1988 — Т. 29, №2 — С. 154–166.

[20] *Скосырский В.Г.,* Первичные йордановы супералгебры и конструкция Кантора // Алгебра и логика — 1994 — Т. 33, №3 — С. 301–316.

[21] *Слинько А.М.,* Радикалы йордановых колец, связанных с альтернативными // Матем. заметки — 1974 — Т. 16, №1 — С. 135–140.

[22] *Херстейн И.,* Некоммутативные кольца. — Мир, Москва, 1972. 192 с.

[23] *Шестаков И.П.,* Абсолютные делители нуля и радикалы конечнопорожденных альтернативных алгебр // Алгебра и логика — 1976 — Т. 15, №5 — С. 585–602.

[24] *Шестаков И.П.,* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика — 1997 — Т. 36, №6 — С. 675–716.

[25] *Amitsur S.A.,* Rings with involution // Israel J.Math — 1968 — Vol. 6, №2 — P. 99–106.

[26] *Bartholdi L.,* Branch rings, thinned rings, tree enveloping rings // Israel J. Math — 2006 — Vol. 154 — P. 93–139.

[27] *Belyaev V., Grigorchuk R., Shumyatsky P,* On just-infiniteness of locally finite groups and their C^*-algebras // Bulletin of Mathematical Sciences — 2017 — Vol. 7, №1 — P. 167–175.

[28] *Dickson L.E.,* On quaternions and their generalization and the history of eight square theorem // Ann.Math. — 1919 — Vol. 20 — P. 151–171.

[29] *Erickson T.S., Martindale W.S., Osborn J.M.,* Prime nonassociative rings // Pacific Journal of Mathematics — 1975 — Vol. 60, №1 — P. 49–63.

[30] *Farina J., Pendergrass-Rice C.*, A Few Properties of Just Infinite Algebras // Comm. Algebra — 2007 — Vol. 35, №5 — P. 1703–1707.

[31] *Farina J., Pendergrass-Rice C., Bell J.,* Stably Just Inifinite Algebras // Journal of Algebra — 2008 — Vol. 319, №6 — P. 2533–2544.

[32] *Farkas D.R., Small L.W.,* Algebras which are nearly finite dimensional and their identities // Israel J. Math. — 2002 — Vol. 127 — P. 245–251.

[33] *Formanek E.,* Noetherian PI-rings // Comm. Algebra — 1974 — Vol. 1., №1 — P. 79–86.

[34] *Gavioli N., Monti V., Scoppola C.,* Just infinite periodic Lie algebras // Proceedings of the Gainesville Conference on Finite Groups — 2003 — P. 73–85.

[35] *Gomez-Ambrosi C., Montaner F.,* On Herstein's constructions relating Jordan and associative superalgebras // Comm. Algebra — 2000 — Vol. 28, №8 — P. 3743–3762.

[36] *Grigorchuk R., Shumyatsky P.,* On just-infinite periodic locally soluble groups // Archiv der Mathematik — 2017 — Vol. 109, №1 — P. 19–27.

[37] *Grigorchuk R., Musat M., Rordam M.,* Just-infinite C^*-algebras // Commentarii Mathematici Helvetici — 2018 — Vol. 93, №1 — P. 157–201.

[38] *Herstein I.,* On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring // American J. Math. — 1955 — Vol. 77, №2 — P. 393–403.

[39] *N.Jacobson,* Structure and Representations of Jordan Algebras. — Providence, RI: AMS, 1968. 453 p.

[40] *Jordan P., von Neumann J., Wigner E.,* On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism // Ann. Math. — 1934 — Vol. 35, №1 — P. 29–64.

[41] *Kac V.G.,* Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Comm. Algebra — 1977 — Vol. 5 — P. 1375–1400.

[42] *King D., McCrimmon K.,* The Kantor construction of Jordan superalgebras // Comm. Algebra — 1992 — Vol. 20, №1 — P. 109–126.

[43] *Kleinfeld E.,* Simple alternative rings // Ann.Math — 1953 — Vol. 58, №2 — P. 544–547.

[44] *Levitzki J.,* On multiplicative systems // Composito Math. — 1950 — Vol. 8 — P. 76–80.

[45] *Martinez C., Zel'manov E.,* Simple Finite-Dimensional Jordan Superalgebras of Prime Characteristic — Journal of Algebra — 2001 — Vol. 236 — P. 575–629.

[46] *McConnell J.C., Robson J.C.,* Noncommutative Noetherian Rings. — Wiley-Interscience, Chichester, 1987. 636 p.

[47] *McCrimmon K.,* Speciality and nonspeciality of two Jordan superalgebras // Journal of Algebra — 1992 — Vol. 149, №2 — P. 326–351.

[48] *de Morais Costa O.A., Petrogradsky V.,* Fractal Just Infinite Nil Lie Superalgebra of Finite Width // Journal of Algebra — 2018 — Vol. 504 — P. 291–335.

[49] *Passman D.S., Temple W.V.,* Representations of the Gupta-Sidki group // Proc. of the AMS — 1996 — Vol. 124, №5 — P. 1403–1410.

[50] *Pendergrass-Rice C.,* Extending a theorem of Herstein, arxiv:0710.5545.

[51] *Petrogradsky V., Shestakov I.P.,* Fractal nil graded Lie, associative, poisson, and Jordan superalgebras, arxiv:1804.08441.

[52] *Petrogradsky V., Shestakov I.P.,* On Jordan doubles of slow growth of Lie superalgebras // Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences — 2019 — Vol. 13 — P. 158–176.

[53] *Posner E.,* Prime rings satisfying a polynomial identity // Proc. of the AMS — 1960 — Vol. 10 — P. 201–220.

[54] *Procezi C.,* Noncommutative affine rings // Atti. Accad. Naz. Lincei, Memorie. Ser. 8 — Vol. 8, №6 — P. 239–255.

[55] *Racine M.L.,* Primitive Superalgebras with Superinvolution // Journal of Algebra — 1998 — Vol. 206 — P. 588–614.

[56] *Racine M.L., Zel'manov E.I.,* Simple Jordan superalgebras with semisimple even part // Journal of Algebra — 2003 — Vol. 270, №2 — P. 374–444.

[57] *Reichstein Z., Rogalski D., Zhang J.,* Projectively simple rings // Adv. Math. — 2006 — Vol. 203, №2 — P. 365–407.

[58] *Rowen L.,* Some results on the center of a ring with polynomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973 — Vol. 79 — P. 219–223.

[59] *Shalev A., Zelmanov E.,* Narrow Lie algebras: a coclass theory and a characterization of the Witt algebra // Journal of Algebra — 1997 — Vol. 189 — P. 294–331.

[60] *Slater M.,* Prime alternative rings III // Journal of Algebra — 1972 — Vol. 21, №3 — P. 394–409.

[61] *Smoktunowicz A.,* On Primitive Ideals in Graded Rings // Canad. Math. Bull. — 2008 — Vol. 51, №3 — P. 460–466.

[62] *Wall C.T.C.,* Graded Brauer groups // J. Reine Angew. Math. — 1964 — Vol. 213 — P. 187–199.

[63] *Wedderburn J.H.M.,* On hypercomplex numbers// Proc. London Math. Soc. — 1907 — Vol. 6, №2 — P. 77–118.

[64] *Wilson J.S.,* Groups with every proper quotient finite // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1971 — Vol. 69 — P. 373–390.

[65] *Zorn M.,* Theorie der alternativen Ringe // Abh.math. Seminar Hamburg Univers. — 1930 — Vol. 8 — P. 123–147.

Работы автора по теме диссертации.

[66] *Панасенко А.С.,* Почти конечномерные альтернативные алгебры // Материалы 52-ой МНСК. Математика. — Новосибирск: 2014. — С. 15.

[67] *Панасенко А.С.,* О структуре почти конечномерных альтернативных алгебр // Материалы 53-ей МНСК. Математика. — Новосибирск: 2015. — С. 16.

[68] *Панасенко А.С.,* Почти конечномерные альтернативные алгебры // Мальцевские чтения. Тезисы докладов. — Новосибирск: 2015. — С. 167.

[69] *Панасенко А.С.,* О ниль идеалах конечной коразмерности в альтернативных нетеровых алгебрах // Материалы 54-ой МНСК. Математика. — Новосибирск: 2016. — С. 11.

[70] *Панасенко А.С.,* О почти конечномерных йордановых алгебрах // Международная конференция Алгебра и логика: теория и приложения, посвященная 70-летию В.М.Левчука. Тезисы докладов. — Красноярск: 2016. — С. 54.

[71] *Панасенко А.С.,* О почти конечномерных йордановых алгебрах // Мальцевские чтения. Тезисы докладов. — Новосибирск: 2016. — С. 152.

[72] *Панасенко А.С.,* О структуре почти конечномерных йордановых алгебр // Материалы 55-ой МНСК. Математика. — Новосибирск: 2017. — С. 9.

[73] *Желябин В.Н., Панасенко А.С.,* О конструкции Херстейна для почти конечномерных супералгебр // Мальцевские чтения. Тезисы докладов. — Новосибирск: 2017. — С. 114.

[74] *Панасенко А.С.,* Центральные порядки в конечномерных простых альтернативных супералгебрах // Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. Тезисы докладов. — Москва: 2018. — С. 153.

[75] *Панасенко А.С.,* Центральные порядки в конечномерных простых ассоциативных супералгебрах // Мальцевские чтения. Тезисы докладов. — Новосибирск: 2018. — С. 159.

[76] *Панасенко А.С.,* Центральные порядки в простых конечномерных йордановых супералгебрах // Мальцевские чтения. Тезисы докладов. — Новосибирск: 2019. — С. 168.

[77] *Панасенко А.С.,* Почти конечномерные альтернативные алгебры // Матем. заметки — 2015 — Т. 98, №5 — С. 747–755.

[78] *Желябин В.Н., Панасенко А.С.,* Ниль-идеалы конечной коразмерности в нетеровых альтернативных алгебрах // Матем. заметки — 2017 — Т. 101, №3 — С. 395–402.

[79] *Желябин В.Н., Панасенко А.С.,* Конструкция Херстейна для почти конечномерных супералгебр // Сибирские электронные математические известия — 2017 — Т. 14 — С. 1317–1323.

[80] *Желябин В.Н., Панасенко А.С.,* Почти конечномерные йордановы алгебры // Алгебра и логика — 2018 — Т. 57, №5 — С. 522–546.