Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский
национальный исследовательский государственный университет»

На правах рукописи

Нестеров Михаил Николаевич

ХОЛЛОВЫ ПОДГРУППЫ И ПРОНОРМАЛЬНОСТЬ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук
Д. О. Ревин

Новосибирск, 2020

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Диссертационная работа относится к классическому направлению теории конечных групп — теоремам силовского типа. В 1872 году норвежский математик Л. Силов [44] доказал следующую теорему.

Теорема (Л. Силов). *Пусть порядок конечной группы G равен $p^\alpha \cdot m$, где число p простое, а m не делится на p. Тогда справедливы следующие утверждения.*

($\mathcal{E}$) *Группа G содержит по крайней мере одну подгруппу порядка p^α (т.н. силовскую p-подгруппу).*

($\mathcal{C}$) *Любые две силовские p-подгруппы сопряжены.*

($\mathcal{D}$) *Всякая p-подгруппа группы G содержится в некоторой силовской p-подгруппе.*

По мнению специалистов теорема Силова является краеугольным камнем теории конечных групп. Получение теорем силовского типа в рамках этой теории сформировалось в большое самостоятельное направление, берущее своё начала в работах Холла и Чунихина [12–15, 28–30].

Ф. Холл предложил рассматривать объект, более общий, чем силовские p-подгруппы. В последствии подгруппы, введённые Ф. Холлом, стали называть π-холловы подгруппы. Напомним определение.

Пусть π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Через π' будем обозначать дополнение к π во множестве всех простых чисел. Конечная группа называется π-группой, если всякий простой делитель её порядка принадлежит π. Подгруппа H группы G называется π-холловой, если она является π-подгруппой, а её индекс не делится на числа из π. Ф. Холл [29] доказал полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп в разрешимых конечных группах.

Теорема (Ф. Холл). *Пусть конечная группа G разрешима. Тогда для любого множества π простых чисел справедливы следующие* *утверждения.*

($\mathcal{E}$) *Группа G содержит по крайней мере одну π-холлову подгруппу.*

($\mathcal{C}$) *Любые две π-холловы подгруппы сопряжены.*

($\mathcal{D}$) *Всякая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе.*

Для неразрешимых групп теорема Холла неверна. Например, знакопеременная группа A_5 не содержит $\{3,5\}$-холловых подгрупп. Полная линейная группа $\mathrm{GL}_3(2)$ обладает двумя классами сопряжённых $\{2,3\}$-холловых подгрупп. В группе A_5 все $\{2,3\}$-холловы подгруппы сопряжены и изоморфны группе A_4. При этом группа A_5 содержит подгруппу порядка 6, а в группе A_4 нет подгрупп данного порядка.

В соответствии с утверждениями ($\mathcal{E}$), ($\mathcal{C}$) и ($\mathcal{D}$), в 1956 году Ф. Холл [30] ввёл следующие обозначения для конечных групп. Говорят, что группа G *обладает свойством* $\mathcal{E}_\pi$, если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то говорят, что группа G *обладает свойством* $\mathcal{C}_\pi$. Если, к тому же, любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то говорят, что группа G *обладает свойством* $\mathcal{D}_\pi$. Группу со свойством $\mathcal{E}_\pi$ ($\mathcal{C}_\pi$, $\mathcal{D}_\pi$) называют также $\mathcal{E}_\pi$*-группой* (соответственно, $\mathcal{C}_\pi$-, $\mathcal{D}_\pi$*-группой*). Обозначим также через $\mathcal{E}_\pi$, $\mathcal{C}_\pi$ и $\mathcal{D}_\pi$ классы всех $\mathcal{E}_\pi$-, $\mathcal{C}_\pi$- и $\mathcal{D}_\pi$-групп соответственно.

Многие важные утверждения о холловых подгруппах и группах со свойствами $\mathcal{E}_\pi,\mathcal{C}_\pi$ и $\mathcal{D}_\pi$ могут быть сформулированны с использованием понятия пронормальности (см. ниже), и именно изучению вопросов пронормальности π-холловых подгрупп преимущественно посвящена диссертационная работа.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в группе $\in \langle H, H^g\rangle$. Классическими примерами пронормальных подгрупп являются нормальные подгруппы, максимальные подгруппы, силовские подгруппы конечных групп, холловы и картеровы[1] подгруппы разрешимых конечных групп.

В неразрешимых группах π-холловы подгруппы могут быть непро-

[1]Подгруппа называется *картеровой*, если она нильпотентна и самонормализуема. В 2007 году Е.П. Вдовин доказал сопряжённость и, как следствие, пронормальность картеровых подгрупп в любой, а не только разрешимой, конечной группе [1, теорема 9.2].

нормальными. Например регулярное сплетение $\mathrm{GL}_3(2) \wr \mathbb{Z}_5$ содержит непронормальную $\{2,3\}$-холлову подгруппу.

Тем более удивительным оказывается следующее утверждение

Теорема (Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин). (mod CFSG) [41, теорема 1] *Холловы подгруппы конечных простых групп пронормальны.*

С использованием этой теоремы доказываются многие другие утверждения. Так, в работе [5] получено утверждение о наследуемости свойства $\mathcal{C}_\pi$ надгруппами π-холловых подгрупп. Эквивалентно, π-холловы подгруппы в $\mathcal{C}_\pi$-группах пронормальны. Из этого утверждения вытекает полученный в 2010 году критерий свойства $\mathcal{C}_\pi$ [3, Следствие 2]. Но и само утверждение о пронормальности π-холловых подгрупп в $\mathcal{C}_\pi$ группах допускает следующее усиление: всякая $\mathcal{E}_\pi$-группа содержит пронормальную π-холлову подгруппу. Более того, справедлива следующая

Теорема (Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин). (mod CFSG) [8, теорема 1] *Пусть A — нормальная подгруппа $\mathcal{E}_\pi$-группы G. Тогда A содержит π-холлову подгруппу, пронормальную в G.*

По-видимому, эта теорема представляет собой наиболее сильное положительное утверждение о холловых подгруппах в произвольных (т.е. необязательно разрешимых) группах, известное на данный момент. Оно, в частности, содержит аргумент Фраттини для холловых подгрупп [40, теорема 1]: *Если A — нормальная подгруппа $\mathcal{E}_\pi$-группы G, то A содержит такую π-холлову подгруппу H, что $G = AN_G(H)$.*

Ключевым фактом, на который опираются перечисленные утверждения, является отмеченая выше теорема о пронормальности холловых подгрупп в простых группах. В диссертации исследуется, в какой мере этот факт может быть обобщён.

Можно ли, например, утверждать, что холловы подгруппы в почти простых группах пронормальны[2]?

Другой вопрос, возникающий из сопоставления примера группы с непронормальной π-холловой подгруппой и пронормальности холловых подгрупп в простых группах, сформулирован [5, Гипотеза 11]:

Проблема 1. *Будут ли холловы подгруппы пронормальными в*

[2]Напомним, что группа G называется *почти простой*. Если её *цоколь*, т.е. подгруппа порождённая всеми минимальными подгруппами, является неабелевой простой группой.

своём нормальном замыкании?

В последствии этот вопрос был записан в «Коуровскую тетрадь» [34, 18.32]. В диссертации на этот вопрос даётся отрицательный ответ. Более того, показывается, что для данного множества π существование группы, содержащей π-холлову подгруппу, непронормальную в своём нормальном замыкании, равносильно существованию группы, с неспоряжёнными π-холловыми подгруппами, т.е. равносильно утверждению $\mathcal{E}_\pi \neq \mathcal{C}_\pi$. Как известно [5, теорема 2], последнее равносильно также существованию группы с непронормальными π-холловыми подгруппами.

Данный результат подчёркивает актуальность вопроса:

Проблема 2. *Для каких множеств π выполнено равенство $\mathcal{E}_\pi = \mathcal{C}_\pi$?*

Этот вопрос отмечен в [7, Проблема 7.20], [11, Проблема 6], [5, замечание после следствия 4]. В диссертации этот вопрос исследуется в частном случае, когда $\pi = p'$ для некоторого простого числа p.

Если свойство пронормальности оказывается естественным и полезным, например, для доказательства наследуемости свойства $\mathcal{C}_\pi$ надгруппами π-холловых подгрупп, то при изучении аналогичного вопроса для свойства $\mathcal{D}_\pi$ возникло понятие сильно пронормальной подгруппы. В соответствии с [5] подгруппа H группы G называется *сильно пронормальной*, если для любых $K \leq H$ и $g \in G$ подгруппа K^g сопряжена с некоторой подгруппой из H в $\in \langle H, K^g \rangle$. Все вышеупомянутые классические примеры пронормальных подгрупп (кроме картеровых[3]) будут также примерами сильно пронормальных подгрупп. Гипотеза о наследуемости свойства $\mathcal{D}_\pi$ надгруппами π-холловых подгрупп, впоследствии доказанная в [38], эквивалентна сильной пронормальности π-холловых подгрупп в $\mathcal{D}_\pi$-группах. Один из подходов, предложенных в [5], состоял в изучении следующего усиления пронормальности холловых подгрупп в простых группах [5, Гипотеза 7], [7, Проблема 7.1], [34, 11.45(б)]:

Проблема 3. *Верно ли что холловы подгруппы в простых группах сильно пронормальны?*

В диссертации дан отрицательный ответ на этот вопрос.

[3]В работе [4] показано, что картеровы подгруппы конечных групп, вообще говоря, не являются сильно пронормальными даже в разрешимых группах.

Цели диссертации. Целями настоящей работы являются:

1. Изучение вопроса пронормальности холловых подгрупп в почти простых группах, в своём нормальном замыкании.
2. Изучение вопроса сильной пронормальности холловых подгрупп в простых группах.

Основные результаты диссертации.

1. Доказана пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах.

   Опубликовано в [47].

2. Найдены примеры холловых подгрупп,

   (a) не являющихся пронормальными в своём нормальном замыкании,

   (b) в простых группах, не являющихся сильно пронормальными.

   Опубликовано в [48].

3. Доказано, что для множества π простых чисел существование группы с π-холловой подгруппой, не пронормальной в своём нормальном замыкании, эквивалентно существованию группы с несопряжёнными π-холловыми подгруппами. Для случая $\pi = p'$ получен получен арифметический критерий существования группы с несопряжёнными p'-холловыми подгруппами (т.е. с несопряжёнными p-дополнениями).

   Опубликовано в [46, 49].

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер.

Научная новизна работы. Все результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В работе используется теория конечных простых групп, строение и свойства линейных алгебраических групп, классификация холловых подгрупп в конечных простых группах, классификация p'-холловых подгрупп в конечных простых группах.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [46–59]. При этом основные результаты опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК [46–49].

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на 52-й и 53-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научный прогресс» (Новосибирск 2014, 2015), Международная (45-я и 46-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург 2014, 2015), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск 2014, 2015), Международная конференция «Groups and their Actions» (Бедлево, Польша 2015), Международная конференция «Groups and Graphs, Algorithms and Automata» (Екатеринбург 2015), Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, Беларусь 2015), Международный научный форум молодых ученых «Наука будущего – наука молодых» (Севастополь, 2015), семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске. Результаты диссертации нашли своё отражение в обзоре [27]. Естественным продолжением исследований диссертации является работа [9].

Общая структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, пять глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 61 страницах. Библиография содержит 59 наименований.

Содержание диссертации

Введение содержит историю изучаемых вопросов, основные опрделения и обзор основных результатов.

Глава 1. Предварительные сведения и результаты Данная глава носит предварительный характер. Она содержит список основных обозначений и предварительные результаты.

Глава 2. Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах Основным результатом главы является следующее утверждение.

2.1.1. Теорема *В любой почти простой группе холловы подгруппы пронормальны.*

Оно обобщает основной результат работы [6].

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [47].

Глава 3. О сильной пронормальности и пронормальности в нормальном замыкании для холловых подгрупп Прежде всего в данной главе рассматривается уже упоминавшаяся

Проблема 1. [34, 18.32], [5, Гипотеза 11] *Всегда ли холлова подгруппа конечной группы пронормальна в своём нормальном замыкании?*

Заметим, что нормальное замыкание любой $\{2,3\}$-холловой подгруппы U из упомянутого выше примера непронормальной холловой подгруппы совпадает с базой B сплетения $\mathrm{GL}_3(2) \wr \mathbb{Z}_5$, и подгруппа U пронормальна в B. В работе [6] была доказана пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах. Поскольку нормальное замыкание любой нетривиальной подгруппы конечной простой группы совпадает со всей группой, положительное решение проблемы 1 можно было бы рассматривать как обобщение результата, полученного в [6].

Однако в общем случае проблема 1 имеет отрицательное решение, которое даёт

3.1.1. Теорема *Пусть множество простых чисел π таково, что*

(1) *существует конечная простая группа X, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп;*

(2) *существует конечная простая группа Y, содержащая π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y.*

Тогда в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G.

Условиям теоремы удовлетворяет, например, множество $\{2,3\}$. Действительно, группа
$$X = \mathrm{GL}_3(2) \simeq \mathrm{PSL}_3(2)$$
содержит два класса сопряжённых $\{2,3\}$-холловых подгрупп. Далее, $\{2,3\}$-холлова подгруппа H группы T верхне-треугольных матриц группы
$$Y = \mathrm{SL}_2(16) \simeq \mathrm{PSL}_2(16)$$

отлична от $T = N_T(H)$ (поскольку порядок группы T делится на 5), а значит и от нормализатора подгруппы H в Y. Кроме того, H является $\{2, 3\}$-холловой подгруппой в Y. Значит, по теореме 3.1.1 регулярное сплетение

$$G = \mathrm{SL}_3(2) \wr \mathrm{SL}_2(16)$$

обладает непронормальной $\{2, 3\}$-холловой подгруппой, у которой нормальное замыкание совпадает с G.

Из теоремы 3.1.1 для конечных множеств π вытекает [4]

3.1.2. Следствие *Пусть множество простых чисел π конечно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своём нормальном замыкании;*

(2) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны;*

(3) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы сопряжены.*

Как было сказано, подгруппу H группы G называют *сильно пронормальной*, если для любой подгруппы $K \leq H$ и любого элемента $g \in G$ подгруппа K^g сопряжена с некоторой подгруппой из H (но необязательно с K) с помощью элемента из $\langle H, K^g \rangle$. Ясно, что сильно пронормальная подгруппа пронормальна. В это же время [4] построены примеры пронормальных, но не сильно пронормальных подгрупп. В [38] показано, что если (при фиксированном π) для π-подгрупп группы G выполняется полный аналог теоремы Силова, то π-холловы подгруппы в G сильно пронормальны.

В третьей главе изучаются также упомянутая выше проблема 3 о сильной пронормальности холловых подгрупп в конечных простых группах и следующий вопрос.

Проблема 4. [5, Гипотеза 9] *Всегда ли пронормальная холлова подгруппа конечной группы сильно пронормальна?*

Отрицательное решение проблемы 4 может быть получено из следующей теоремы.

3.1.3. Теорема *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Допустим, что выполняются условия:*

[4] Естественно считать, что несуществование π-холловых подгрупп влечёт их сопряжённость.

(1) *некоторая конечная группа X содержит более одного класса сопряжённых пронормальных π-холловых подгрупп;*

(2) *некоторая конечная группа Y содержит собственную пронормальную π-холлову подгруппу M и $M = N_Y(M)$.*

Рассмотрим произвольное транзитивное подстановочное действие

$$\rho : Y \to Sym(\Omega)$$

группы Y на некотором множестве Ω, при котором подгруппа M действует нетранзитивно. [5] *Тогда соответствующее подстановочное сплетение $G = X \wr_\rho Y$ обладает π-холловой подгруппой U такой, что*

(*a*) *U пронормальна G;*

(*b*) *$(U \cap A)^A \neq (U \cap A)^G$, где A — база сплетения $X \wr_\rho Y$;*

(*c*) *U не сильно пронормальна в G.*

Условиям теоремы удовлетворяет, например, множество $\{2, 3\}$: группа

$$X = \mathrm{PSL}_2(7) \simeq \mathrm{GL}_3(2)$$

содержит два класса сопряжённых $\{2, 3\}$-холловых подгрупп, и группа $Y = S_5$ содержит собственную пронормальную $\{2, 3\}$-холлову подгруппу

$$M = N_Y(M) = S_4,$$

причём подгруппа S_4 группы S_5 нетранзитивна. Значит, по теореме 3.1.3 естественное подстановочное сплетение

$$P = \mathrm{PSL}_2(7) \wr S_5$$

обладает пронормальной, но не сильно прономальной π-холловой подгруппой.

Заметим, что группа $\mathrm{SL}_2(7)$ также содержит два класса сопряжённых $\{2, 3\}$-холловых подгрупп, а значит подстановочное сплетение $\mathrm{SL}_2(7) \wr S_5$ обладает пронормальной, но не сильно пронормальной

[5] Такое действие, очевидно, существует: можно рассмотреть действие группы Y правыми сдвигами на множестве правых смежных классов под подгруппе M.

$\{2,3\}$-холловой подгруппой. Данное замечание позволяет также получить следующее утверждение, дающее отрицательное решение проблемы 3.

3.1.4. Следствие *В простой симплектической группе* $\mathrm{PSp}_{10}(7)$ *содержится не сильно пронормальная* $\{2,3\}$*-холлова подгруппа.*

В действительности, из теоремы 3.1.3 вытекает существование пронормальных, но не сильно пронормальных π-холловых подгрупп в подходящих конечных группах для многих множеств π, как показывает

3.1.5. Следствие *Пусть множество* π *простых чисел таково, что существует конечная группа, содержащая более одного класса сопряжённых* π*-холловых подгрупп. Тогда существует группа, обладающая пронормальной, но не сильно пронормальной* π*-холловой подгруппой.*

Легко видеть, что со следствиями 3.1.2 и 3.1.5 тесно связана проблема [7, Проблема 7.20]: для каких множеств π существуют группы, содержащие более одного класса сопряженных π-холловых подгрупп? Этот вопрос рассматривается в главе 5 для специального случая $\pi = p'$.

Важную роль в изучении пронормальности для холловых подгрупп (в том числе и в данной работе) играет следующее утверждение, дающее признак пронормальности

1.3.1 [8, лемма 16]**. Лемма** *Пусть* H *— холлова подгруппа некоторой конечной группы* G*. Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы* A *группы* G *справедливы следующие утверждения:*

(1) $(H \cap A)$ *пронормальна в* A*;*

(2) (HA/A) *пронормальна в* G/A*;*

(3) $(H \cap A)^A = (H \cap A)^G$.

Тогда H *пронормальна в* G*.*

Утверждение (2), очевидно, является также необходимым условием для пронормальности H. В [8, замечание 3] сформулирован вопрос: являются ли условия (1) и (3) также необходимыми? Из утверждений (a) и (b) теоремы 3.1.3 вытекает, что условие (3) леммы 1.3.1 не является необходимым. Теорема 3.1.3 показывает, что условие (1) леммы 1.3.1

также не является необходимым для пронормальности холловой подгруппы, поскольку из теоремы 3.1.3 вытекает

3.1.6. Следствие *Пусть для некоторого множества π простых чисел конечная группа X содержит более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп. Пусть также Y — диэдральная группа порядка $2p$, где $p \in \pi'$. Пусть $G = X \wr_\rho Y$ — подстановочное сплетение соответствующее естественному транзитивному действию ρ группы Y на множестве из p элементов. Обозначим через A полный прообраз в G (нормальной) силовской p-подгруппы группы Y. Тогда G обладает пронормальной π-холловой подгруппой U такой, что $U \cap A$ не пронормальна в A.*

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [48].

Глава 4. Зависимость пронормальности π-холловых подгрупп в своём нормальном замыкании от множества π Цель четвёртой главы — отказаться от требования конечности множества π в следствии 3.1.2. Основным результатом четвёртой главы является следующая

4.1.1. Теорема *Для множества π простых чисел следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своём нормальном замыкании;*

(2) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны;*

(3) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы сопряжены.*

Достаточно установить импликацию (1) $\Rightarrow$ (3): утверждения (2) и (3), как видно из следствия 3.1.2, эквивалентны, а импликация (2) $\Rightarrow$ (1) тривиальна. Если утвержение (3) неверно, то, как хорошо известно, существует простая неабелева группа X, содержащая несопряженные π-холловы подгруппы. Это накладывает существенные ограничения на множество π, в частности из [26, теорема A] следует, что $2 \in \pi$.

Для построения π-холловой подгруппы, непронормальной в своем нормальном замыкании, в 3.1.1 требуется существование *простой* неабелевой группы Y, содержащей *несамонормализуемую* (т. е. отличную от своего нормализатора) π-холлову подгруппу. Такую группу Y удается построить для любого *конечного* множества π, содержащего 2. Тем самым регулярное сплетение $G = X \wr Y$ содержит непронормальную π-холлову подгруппу, нормальное замыкание которой — вся группа G.

Однако без каких-либо существенных модификаций в доказательстве теоремы 3.1.1 требование *простоты* группы Y, обладающей несамонормализуемой π-холловой подгруппой H, можно ослабить, потребовав лишь совпадения Y с нормальным замыканием $\langle H^Y \rangle$ подгруппы H в Y, т. е. потребовав существования в Y *контранормальной* несамонормализуемой π-холловой подгруппы. Таким образом, справедливо

4.1.2. Предложение *Пусть множество простых чисел π таково, что*

(1) *существует конечная простая группа X, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп;*

(2) *существует конечная группа Y, содержащая пронормальную π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y и нормальное замыкание которой совпадает с Y.*

Тогда в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G.

Группу Y, удовлетворяющую условию (2) предложения 4.1.2, удается построить во всех необходимых случаях, поскольку справедливо

4.1.3. Предложение *Пусть множество простых чисел π непусто и отлично от множества всех простых чисел. Тогда существует разрешимая группа Y, обладающая π-холловой подгруппой H такой, что $Y = \langle H^Y \rangle$ и $H < N_Y(H)$.*

Построение группы Y в предложении 4.1.3 распадается на два принципиально разных случая: когда множество π' содержит по крайней мере два простых числа и когда $\pi' = \{p\}$ для некоторого простого числа p. В первом случае используется утверждение.

4.1.4. Предложение [4, лемма 9] *Пусть G — конечная группа и $H \leq G$. Допустим, что подгруппа H не нормальна в G. Тогда для любого простого числа p, не делящего $|G|$, существует неприводимый*

FG-модуль $\mathbf{V}$ над некоторым конечным полем F характеристики p такой, что $0 < C_{\mathbf{V}}(H) < \mathbf{V}$.

Предложение 4.1.4 используется в ситуации, когда H — π-холлова подгруппа в G и в естественном полупрямом произведении VG. Для использования предложения 4.1.4 важно, чтобы множество π' содержало по крайней мере два различных простых числа: p и какой-либо простой делитель индекса $|G : H|$. Хотя группу Y в предложении 4.1.3 несложно построить и в ситуации, когда $\pi' = \{p\}$ (эквивалентно, $\pi = p'$), аналог предложения 4.1.4 неверен в случае, когда p делит порядок группы G. Более того, в случае, когда H — p'-холлова подгруппа в G (а именно в этой ситуации, когда H — π-холлова подгруппа в G, предложение 4.1.3 и используется), справедливо в определенном смысле противоположное утверждение:

4.1.5. Предложение [2, лемма 2], [33, теорема E(a)] *Пусть G — конечная группа, содержащая p'-холлову подгруппу H для некоторого простого числа p. Пусть $\mathbf{V}$ — неприводимый FG-модуль над некоторым полем F характеристики p. Тогда если $C_{\mathbf{V}}(H) > 0$, то $C_{\mathbf{V}}(G) = \mathbf{V}$ (т.е. $\mathbf{V}$ — главный FG-модуль).*

Результаты главы получены в неразделимом соавторстве с Е.П. Вдовиным и Д.О. Ревиным и опубликованы в [49].

Глава 5. Арифметика сопряжённости для p-дополнений Напомним, что p-дополнением в группе G называется её p'-холлова подгруппа. В пятой главе детально изучается зависимость от данного p ответов на следующие вопросы.

(а) Верно ли, что в любой конечной группе любые два p-дополнения сопряжены?

(б) Верно ли, что в любой конечной группе G любые два p-дополнения сопряжены в $\mathrm{Aut}(G)$?

(в) Верно ли, что в любой конечной группе любые два p-дополнения изоморфны?

Для того, чтобы сформулировать результаты главы, определим для данного простого числа p следующие классы конечных групп.

$\mathfrak{C}(p)$ — класс всех конечных групп, в которых все p-дополнения сопряжены.

$\mathfrak{A}(p)$ — класс всех конечных групп G таких, что любые два p-дополнения в G сопряжены элементом из $\mathrm{Aut}(G)$.

$\mathfrak{I}(p)$ — класс всех конечных групп, в которых все p-дополнения изоморфны.

Отметим, что если конечная группа не содержит p-дополнений, то она принадлежит каждому из классов $\mathfrak{C}(p)$, $\mathfrak{A}(p)$ и $\mathfrak{I}(p)$. Очевидно также, что имеет место следующая цепочка включений

$$\mathfrak{C}(p) \subseteq \mathfrak{A}(p) \subseteq \mathfrak{I}(p) \subseteq \mathfrak{G}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп.

Обозначим также через $\mathcal{NC}$ множество всех простых чисел p, некоторая натуральная степень которых представляется в виде

$$\frac{q^l - 1}{q - 1} \tag{2}$$

где q — степень простого числа, l — простое нечётное число.

Основным результатом главы является следующая

5.1.1. Теорема *Пусть p — некоторое простое число, тогда имеет место одно из следующих утверждений.*

(а) *Все включения в цепочке* (1) *строгие и $p \in \mathcal{NC}$.*

(б) *Все включения в цепочке* (1) *являются равенствами и $p \notin \mathcal{NC}$.*

5.1.2. Следствие *Пусть p — некоторое простое число, тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а) *В любой конечной группе любые два p-дополнения сопряжены.*

(б) *В любой конечной группе G любые два p-дополнения сопряжены в* $\mathrm{Aut}(G)$.

(в) *В любой конечной группе любые два p-дополнения изоморфны.*

(г) $p \notin \mathcal{NC}$.

Ответ на сформулированный выше вопрос о совпадении классов $\mathcal{E}_\pi$ и $\mathcal{C}_\pi$ при $\pi = p'$ в какой-то мере даёт следующее утверждение.

5.1.3. Следствие *Пусть p — некоторое простое число, тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а) $\mathcal{E}_{p'} = \mathcal{C}_{p'}$

(б) $p \notin \mathcal{NC}$.

В свете теоремы 5.1.1, естественный предоставляется следующий вопрос:

Проблема 5. Для данного простого числа p выяснить, верно ли, что $p \in \mathcal{NC}$.

В теории чисел известна

Гипотеза Нагеля–Люнггрена. *Уравнение Нагеля–Люнггрена*

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^m$$

для натуральных чисел x, y, n и m, бо́льших единицы, имеет ровно три решения:

$$\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 11^2, \ \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 20^2, \ \frac{18^3 - 1}{18 - 1} = 7^3.$$

В случае справедливости данной гипотезы вопрос о принадлежности данного простого числа $p \neq 11$ множеству $\mathcal{NC}$ свелся бы к простому перебору различных пар соответствующих q и l, для которых возможно равенство

$$p = \frac{q^l - 1}{q - 1}.$$

Число таких пар конечно. Более того, справедливы соотношения $q^{l-1} < p < q^l$ и l делит $p - 1$.

Гипотеза Нагеля–Люнггрена исследовалась в работах [17–20, 25, 35, 37, 39]. В частности, в статье [20] доказано следующее утверждение.

5.1.4. Предложение [20, теорема 1] *Пусть числа x, y, n и m, бо́льшие единицы, удовлетворяют уравнению Нагеля-Люнггрена и четвёрка (x, y, n, m) отлична от $(3, 11, 5, 2)$, $(7, 20, 4, 2)$ и $(18, 7, 3, 3)$. Тогда наименьший простой делитель числа n больше либо равен 29 и количество простых делителей числа n не превосходит 4.*

С использованием данного утверждения доказано

5.5.2. Предложение *Пусть p — простое число. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $p > 3$ — простое число Мерсенна, то $p \in \mathcal{NC}$.*

(2) *Если p — простое число Ферма, то $p \notin \mathcal{NC}$.*

(3) $11, 13, 73, 307 \in \mathcal{NC}$.

(4) *Если все простые делители числа $p - 1$ не превосходят 23 и $p \neq 11$, то $p \in \mathcal{NC}$ тогда и только тогда, когда само p представляется в виде* (2).

С учётом предложения 5.5.2, наименьшим простым числом, для которого проблема 5 в настоящее время остается открытой, является число 59.

В следующей таблице приведена информация о состоянии на текущий момент проблемы 5 для простых чисел, не превосходящих 500.

Принадлежат $\mathcal{NC}$	Не принадлежат $\mathcal{NC}$	Не принадлежат $\mathcal{NC}$ по модулю гипотезы Нагеля–Люнггрена
	$2, 3, 5,$	
$7, 11, 13,$	$17, 19, 23,$ 29,	
31,	37, 41, 43, 47, 53,	59
	61, 67, 71,	
73,	79,	83,
	89, 97, 101, 103,	107,
	109, 113,	
127,	131, 137, 139,	149,
	151, 157, 163,	167, 173, 179,
	181, 191, 193, 197, 199, 211,	223, 227,
	229,	233, 239,
	241, 251, 257,	263, 269,
	271, 277, 281,	283, 293,
307,		311,
	313,	317,
	331, 337,	347, 349,
	353,	359, 367, 373,
	379,	383, 389,
	397, 401, 409, 419, 421,	431
	433,	439,
	443, 449, 457, 461, 463,	467, 479,
	487, 491,	499

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [46].

Глава 1.

Предварительные сведения

§ 1.1. Используемые обозначения

Используемые обозначения в основном стандартны и могут быть найдены в [16, 23, 36]. В частности:
A^B — множество $\{A^b \mid b \in B\}$ для $A \subseteq G$ и $B \subseteq G$;
$\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов;
$\mathrm{Hall}_\pi(G)$ — множество π-холловых подгрупп группы G;
если S является нормальной подгруппой группы G, то число классов сопряжённости подгрупп вида $H \cap S$, где $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ будем будем обозначать[6] символом $k_\pi^G(S)$;
в случае, когда группа G действует на множестве Ω, образ элемента $i \in \Omega$ под действием элемента $g \in G$ будем записывать как i^g;
тот факт, что подгруппа H группы G пронормальна будем записывать так: $H \,\mathrm{prn}\, G$;
тот факт, что подгруппа H группы G сильно пронормальна будем записывать так: $H \,\mathrm{sprn}\, G$.

Запись $a \equiv_r b$ означает, что числа a и b сравнимы по модулю натурального числа r. Через (x, y) обозначим наибольший общий делитель целых чисел x и y. Для невырожденной квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(q)$$

обозначим через

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

[6]Сами подгруппы вида $H \cap S$, где $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ будем называть G-индуцированными π-холловыми подгруппами группы S.

образ этой матрицы в группе $\mathrm{PGL}_n(q)$ относительно канонического эпиморфизма.

§ 1.2. Предварительные результаты о свойствах холловых подгрупп

1.2.1. Лемма *Пусть A — нормальная и H — π-холлова подгруппы конечной группы G. Тогда $H \cap A \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$, $HA/A \in \mathrm{Hall}_\pi(G/A)$.*

Доказательство. См. [30, лемма 1]. □

1.2.2. Лемма *Пусть H и K — π-холловы подгруппы некоторой группы G. Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы A группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) *$HA = KA$;*

(2) *$H \cap A$ и $K \cap A$ сопряжены в A.*

Тогда H и K сопряжены в HA.

Доказательство. См. [5, доказательство леммы 13]. □

1.2.3. Лемма (Чунихин) *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что $A \in \mathcal{C}_\pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если $G/A \in \mathcal{E}_\pi$, то $G \in \mathcal{E}_\pi$.*

(2) *Если $G/A \in \mathcal{C}_\pi$, то $G \in \mathcal{C}_\pi$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из [43, (3.12), глава 5]. □

§ 1.3. Предварительные результаты о пронормальности холловых подгрупп

Из леммы 1.2.2 вытекает

1.3.1. Лемма *Пусть H — холлова подгруппа некоторой группы G. Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы A группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) $H \cap A \operatorname{prn} A$;

(2) $HA/A \operatorname{prn} G/A$;

(3) $(H \cap A)^A = (H \cap A)^G$.

Тогда H пронормальна в G.

Доказательство. Пусть $g \in G$. Покажем, что подгруппы H и H^g сопряжены в $G_0 = \langle H, H^g \rangle$. Обозначим $G_0 \cap A$ через A_0. Очевидно, $H \cap A = H \cap A_0$ и $H^g \cap A = H^g \cap A_0$. В силу утверждения (2) найдётся элемент $x \in G_0A$ такой, что $H^xA/A = H^gA/A$. Поскольку группы G_0A/A и G_0/A_0 канонически изоморфны и элемент $Ax \in G_0A/A$ сопрягает HA/A и H^gA/A получаем, что его образ A_0x относительно естественного изоморфизма $G_0A/A \to G_0/A_0$ сопрягает HA_0/A_0 и H^gA_0/A_0. Не теряя общности, можно считать, что $HA_0/A_0 = H^gA_0/A_0$ и, следовательно $HA_0 = H^gA_0$.

В силу утверждения (3) справедливо равенство $H^g \cap A = H^a \cap A$, для некоторого $a \in A$. Из утверждения (1) вытекает $H^g \cap A = H^a \cap A = H^x \cap A$, для некоторого $x \in \langle H \cap A, H^a \cap A \rangle \subseteq A_0$. Таким образом подгруппы $H^g \cap A_0$ и $H \cap A_0$ сопряжены в A_0. Из леммы 1.2.2 вытекает сопряжённость подгрупп H и H^g в группе G_0. □

Следующее утверждение является частным случаем леммы 1.3.1

1.3.2. Лемма [5, лемма 13] *Пусть G — группа, $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ для некоторого множества π простых чисел, $A \trianglelefteq G$ и $G = HA$. Тогда если $(H \cap A) \operatorname{prn} A$, то $H \operatorname{prn} G$.*

1.3.3. Лемма *Пусть A — нормальная и H — π-холлова подгруппы конечной группы G. Обозначим через X множество $(A \cap H)^A$, т.е. множество всех подгрупп, сопряжённых в A с $A \cap H$. Пусть Ω — орбита множества X относительно действия группы G сопряжениями, т.е. $\Omega = \{X^g \mid g \in G\}$. Тогда $|\Omega|$ является π'-числом.*

Доказательство. Поскольку подгруппа $A \cap H$ нормальна в группе H, для любого элемента $h \in H$ выполняется

$$((A \cap H)^A)^h = (A \cap H)^{Ah} = (A \cap H)^{hA} = ((A \cap H)^h)^A = (A \cap H)^A.$$

Таким образом подгруппа H лежит в стабилизаторе точки X, следовательно индекс стабилизатора является π'-числом. Ввиду транзитивности действия G на Ω, число элементов Ω равняется индексу стабилизатора точки, т.е. является π'-числом. $\square$

1.3.4. Лемма [24, глава I, предложение (6.4)] *Пусть A — нормальная и H — произвольная подгруппа конечной группы G. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $H \operatorname{prn} G$*;*

(2) $H \operatorname{prn} N_G(HA)$ *и* $(HA) \operatorname{prn} G$.

1.3.5. Лемма [41, теорема 1] *В любой конечной простой группе холловы подгруппы пронормальны.*

§ 1.4. Предварительные результаты о сильной пронормальности холловых подгрупп

1.4.1. Лемма *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Если подгруппа H сильно пронормальна в G, то $(A \cap H)^A = (A \cap H)^G$.*

Доказательство. Поскольку $H \operatorname{sprn} G$, для любого $g \in G$ найдётся $x \in \langle H, (H \cap A)^g \rangle$ такой, что $(H \cap A)^x = (H \cap A)^g$. Но $\langle H, (H \cap A)^g \rangle \subseteq HA$. Поэтому$(H \cap A)^g = (H \cap A)^x \in (H \cap A)^{HA}$, откуда $(H \cap A)^A = (H \cap A)^{HA} = (H \cap A)^G$. $\square$

1.4.2. Лемма *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Если подгруппа H группы G содержит A и $(H/A) \operatorname{sprn}(G/A)$, то $H \operatorname{sprn} G$.*

Доказательство. Пусть $K \leq H$ и $g \in G$. В виду сильной пронормальности подгруппы H/A в G/A найдётся элемент $x \in \langle H, K^g \rangle A = \langle H, K^g \rangle$ такой, что $K^{gx}A \subseteq HA = H$. Поскольку $K^{gx} \subseteq K^{gx}A$, получаем $K^{gx} \subseteq H$. $\square$

§ 1.5. Предварительные результаты о почти простых $\mathcal{E}_\pi$-группах

Потребуется следующее утверждение.

1.5.1. Лемма [42, теорема 1.1] *Пусть G — почти простая группа с неабелевым цоколем S. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $2 \notin \pi$, *то* $k_\pi^G(S) \in \{0,1\}$;

(2) *если* $3 \notin \pi$, *то* $k_\pi^G(S) \in \{0,1,2\}$;

(3) *если* $2, 3 \in \pi$, *то* $k_\pi^G(S) \in \{0,1,2,3,4,9\}$.

1.5.2. Лемма *Пусть* G *— почти простая группа с неабелевым цоколем* S. *Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $k_\pi^G(S) \leq 4$;

(2) $2, 3 \in \pi$ *и* $S \simeq \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, q *является степенью простого числа* $p \notin \pi$.

Доказательство. Следует из [42, лемма 8.1]. □

1.5.3. Лемма *Пусть* S *— неабелева простая группа. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) π*-холловы подгруппы пронормальны в любой почти простой группе* G *с цоколем* S;

(2) π*-холловы подгруппы пронормальны в любой почти простой группе* G *с цоколем* S *такой, что* G/S *—* π'*-группа.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть G — почти простая группа с цоколем S. Допустим G обладает π-холловой подгруппой H. Требуется показать, что $H \operatorname{prn} G$. Пусть $\overline{} : G \to G/S$ — естественный гомоморфизм. В силу гипотезы Шрайера группа $\overline{G}$ разрешима. Обозначим через U полный прообраз её π'-холловой подгруппы. Тогда $\overline{G} = \overline{HU}$ и $G = HU$.

Ввиду разрешимости группы G/S, подгруппа HS/S пронормальна в G/S. Поскольку подгруппа S является простой, подгруппа $H \cap S$ пронормальна в S. В силу леммы 1.3.1 осталось показать, что $(H \cap S)^S = (H \cap S)^G$.

Имеем
$$(H \cap S)^G = (H \cap S)^{HU} = (H \cap S)^U.$$
Далее, $H \cap S \in \mathrm{Hall}_\pi(S)$ и, ввиду (2), $H \cap S \operatorname{prn} U$. Поскольку $H \cap S \operatorname{prn} U$, для любого $u \in U$ найдётся $x \in \langle H \cap S, (H \cap S)^u \rangle$ такой, что $(H \cap S)^x = (H \cap S)^u$. Но $\langle H \cap S, (H \cap S)^u \rangle \subseteq S$, следовательно

$(H\cap S)^u = (H\cap S)^x \in (H\cap S)^S$, откуда $(H\cap S)^S = (H\cap S)^U = (H\cap S)^G$. $\square$

Наряду с леммой 1.5.1 нам потребуется следующее утверждение.

1.5.4. Лемма [42, лемма 4.4] *Пусть $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$ — симплектическая группа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Обозначим через π множество простых чисел такое, что $2, 3 \in \pi$ и $p \notin \pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(*A*) *Пусть $G \in \mathcal{E}_\pi$ и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Тогда группы S_n и $\mathrm{SL}_2(q)$ обладают свойством $\mathcal{E}_\pi$ и $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q^2-1)$. При этом H является π-холловой подгруппой группы*

$$M = \mathrm{SL}_2(q) \wr S_n = (\underbrace{\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q) \times \cdots \times \mathrm{SL}_2(q)}_{n \text{ раз}}) : S_n \leq G.$$

(M — полный стабилизатор некоторой ортогональной суммы 2-мерных подпространств)

(*B*) *Если группы S_n и $\mathrm{SL}_2(q)$ обладают свойством $\mathcal{E}_\pi$ и $\pi \cap \pi(G) \subseteq \pi(q^2-1)$, то $M \in \mathcal{E}_\pi$ и $\mathrm{Hall}_\pi(M) \subseteq \mathrm{Hall}_\pi(G)$*

(*C*) *π-холловы подгруппы группы M, сопряжённые в G, сопряжены в M.*

§ 1.6. Предварительные результаты о группах с p-дополнениями

Из леммы 1.2.3 по индукции легко вытекает следующая

1.6.1. Лемма *Пусть p — такое простое число, что в любой конечной простой группе p-дополнения сопряжены. Тогда в любой конечной группе p-дополнения сопряжены.*

1.6.2. Лемма (Жигмонди, [45]) *Пусть q — целое число, большее 1, и n — положительное целое число. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.*

(1) *Существует простой делитель p числа q^n-1 такой, что p не делит q^m-1 для любого целого m такого, что $1 \leq m < n$.*

(2) $q = 2$, $n \in \{1, 6\}$.

(3) $q + 1$ — *степень числа* 2, $n = 2$.

1.6.3. Лемма (см. [21, лемма 1]) *Пусть* V — *конечномерное векторное пространство над некоторым конечным полем и* $G = \mathrm{GL}(V)$. *Обозначим через* H *и* K *стабилизаторы в группе* G *некоторых подпространств* U *и* W *из* V *соответственно. Тогда*

(1) *подгруппы* H *и* K *сопряжены в группе* G *если и только если* $\dim(U) = \dim(W)$;

(2) *если* $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$, *то подгруппы* H *и* K *сопряжены в группе* $\mathrm{Aut}(G)$.

В частности, если $\dim(V) > 2$, *то стабилизатор прямой и стабилизатор гиперплоскости не сопряжены в группе* G, *но сопряжены в* $\mathrm{Aut}(G)$.

1.6.4. Лемма *Пусть* V — *ненулевое векторное пространство. Обозначим через* H *стабилизатор в группе* $G = \mathrm{GL}(V)$ *некоторого подпространства* U *размерности строго меньшей* $\dim(V)$. *Тогда* $N_G(H) = H$.

Доказательство. Данное утверждение вытекает из максимальности подгруппы H в группе G (см. [36, предложение 7.1.1]) $\square$

1.6.5. Лемма [32, теорема 8.27, глава 2] *Пусть* H — *подгруппа группы* $\mathrm{PSL}_2(r^s)$, *где* r — *простое число и* s — *положительное целое число. Обозначим* $(r^s - 1, 2)$ *через* d. *Тогда* H *изоморфна одной из следующих групп:*

(1) *элементарной абелевой* r*-группе порядка, не превосходящего* r^s;

(2) *циклической группе порядка* z, *где* z — *делитель числа* $\frac{r^s \pm 1}{d}$;

(3) *группе диэдра порядка* $2z$, *где число* z *такое же, как в* (2);

(4) A_4, *при этом либо* r *нечётно, либо* $r = 2$ *и* s *чётно;*

(5) S_4, *при этом* $r^{2s} - 1$ *делится на* 16;

(6) A_5, *при этом* $r = 5$ *или* $r^{2s} - 1$ *делится на* 5;

(7) *полупрямому произведению элементарной абелевой группы порядка* r^m *и циклической группы порядка* t *такого, что* t *делит* $r^{(m,s)} - 1$*;*

(8) *группе* $\mathrm{PSL}_2(r^m)$ *если* m *делит* s*, и группе* $\mathrm{PGL}_2(r^m)$ *если* $2m$ *делит* s*;*

1.6.6. Лемма [10, теорема 7] *Пусть* G *— конечная неабелева простая группа и* p *— такой простой делитель её порядка, что в* G *существуют* p*-дополнения. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $G \simeq A_n$ *и* $p = n$*;*

(2) $G \simeq \mathrm{PSL}_n(q)$, $\frac{q^n-1}{q-1}$ *— степень числа* p *и* n *— простое число;*

(3) $G \simeq \mathrm{PSL}_2(11)$ *и* $p = 11$*;*

(4) $G \simeq M_{11}$ *и* $p = 11$*;*

(5) $G \simeq M_{23}$ *и* $p = 23$.

1.6.7. Лемма *Пусть* G *— конечная простая группа и* p *— простой делитель её порядка такой, что в группе* G *существует* p*-дополнение. Тогда в группе* G *все* p*-дополнения сопряжены за исключением следующих случаев:*

(1) $G \simeq \mathrm{PSL}_n(q)$, $\frac{q^n-1}{q-1}$ *— степень числа* p *и* n *— нечетное простое число;*

(2) $G \simeq \mathrm{PSL}_2(11)$ *и* $p = 11$.

Доказательство. Ввиду леммы 1.6.6 достаточно показать, что p-дополнения в группе G сопряжены в каждом из следующих случаев:

(i) $G = A_n$ и $p = n$;

(ii) $G = \mathrm{PSL}_2(r^s)$ и $r^s + 1 = p^m$;

(iii) $G = M_{11}$ и $p = 11$;

(iv) $G = M_{23}$ и $p = 23$.

С л у ч а й (i) : $G = A_p$. Предположим, что H является p-дополнением в группе G. Тогда $|G : H| = p$. Хорошо известно (см., например, [16, стр. 63]), что поскольку $p \neq 6$, в группе G любая подгруппа индекса p является стабилизатором точки в естественном подстановочном действии, и в частности, любые два p-дополнения в группе G сопряжены.

С л у ч а й (ii) : $G = \mathrm{PSL}_2(r^s)$ и $r^s + 1 = p^m$. Порядок группы G равен

$$\frac{r^s(r^s+1)(r^s-1)}{(2, r^s-1)}.$$

Рассмотрим подгруппу

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{F}_{r^s} \right\}.$$

Поскольку $(|R|, |G : R|) = 1$, подгруппа R порядка r^s является силовской r-подгруппой группы G. Её нормализатор $N_G(R)$, очевидно, совпадает с

$$\left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{F}_{r^s}, \ \lambda \in \mathbb{F}_{r^s}^{\times} \right\}.$$

Его порядок равен $r^s(r^s-1)/(2, r^s-1)$, а индекс — $r^s + 1 = p^m$. Поскольку

$$(|N_G(R)|, |G : N_G(R)|) = 1,$$

нормализатор $N_G(R)$ является p-дополнением группы G.

Пусть H — p-дополнение группы G. Тогда $|H| = r^s(r^s-1)/(2, r^s-1)$. В силу леммы 1.6.5 группа H является полупрямым произведением нормальной элементарной абелевой группы порядка r^s и циклической группы порядка $(r^s-1)/(2, r^s-1)$. Таким образом, существует нормальная подгруппа R^* группы H порядка r^s. Так как группа R^* является силовской r-подгруппой группы G, для некоторого $g \in G$ выполняется равенство $R^* = R^g$. Следовательно $H \subseteq N_G(R^g)$. Сравнивая порядки подгрупп H и $N_G(R^g) = N_G(R)^g$, заключаем, что $H = N_G(R)^g$.

С л у ч а и (iii) и (iv): $G = M_{11}$ и $p = 11$ или $G = M_{23}$ и $p = 23$. Из [23] следует, что в этих случаях в группе G любые два p-дополнения сопряжены. □

Глава 2.

Холловы подгруппы почти простых групп

§ 2.1. Краткий обзор основных результатов главы

Напомним, что группа почти проста, если она изоморфна группе G такой, что

$$S \simeq \mathrm{Inn}(S) \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$$

для некоторой неабелевой простой конечной группы S.

Основным результатом настоящей главы является

2.1.1. Теорема *В любой почти простой группе холловы подгруппы пронормальны.*

Результаты главы опубликованы в [47] и получены автором лично.

§ 2.2. Доказательство теоремы 2.1.1

Пусть G — почти простая группа с неабелевым цоколем S. Предположим, H — π-холлова подгруппа группы G. Покажем, что $H \operatorname{prn} G$.

Ввиду разрешимости группы G/S, а также с учётом леммы 1.2.1 и теоремы Холла, подгруппа HS/S пронормальна в G/S. Поскольку подгруппа S является простой, подгруппа $H \cap S$ пронормальна в S по лемме 1.3.5. В силу леммы 1.3.1 осталось показать, что $(H \cap S)^S = (H \cap S)^G$.

Из леммы 1.5.2 вытекает, что имеет место один из следующих случаев:

(1) $k_\pi^G(S) \leq 4$;

(2) $2, 3 \in \pi$ и $S \simeq \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, q является степенью простого числа $p \notin \pi$.

Случай (1). Рассмотрим множество $\Omega = \{(S \cap H)^{Sg} : \ g \in G\}$ — орбиту под действием группы G класса сопряжённости $(S \cap H)^S$

подгруппы $S \cap H$ в группе S. Очевидно, что мощность этого множества не превышает $k_\pi^G(S)$. Ввиду леммы 1.5.1, мощность $|\Omega|$ является π-числом. С другой стороны, по лемме 1.3.3, мощность $|\Omega|$ является π'-числом. Таким образом Ω является одноэлементным множеством, следовательно $(H \cap S)^S = (H \cap S)^G$.

Случай (2). Обозначим группы $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ и $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, через PSp и Sp соответственно.

Ввиду леммы 1.5.3 достаточно рассмотреть случай, когда G/PSp — π'-группа. Следовательно $\mathrm{Hall}_\pi(G) = \mathrm{Hall}_\pi(\mathrm{PSp})$.

Поскольку $p \notin \pi$ и $2, 3 \in \pi$, получаем, что q — нечётное число, в частности, у $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ нет графовых автоморфизмов. Тогда в силу [22] любой автоморфизм группы $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ является произведением внутреннего, диагонального и полевого автоморфизма.

Любой автоморфизм группы PSp может быть индуцирован подходящим автоморфизмом группы Sp. Кроме того $Z(\mathrm{Sp}) \simeq Z_2$, и все автоморфизмы группы Sp действуют на $Z(\mathrm{Sp})$ тривиально. Очевидно также, что индуцированное действие неединичного автоморфизма группы Sp на PSp так же является нееденичным автоморфизмом. Поэтому группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{PSp})$ и $\mathrm{Aut}(\mathrm{Sp})$ изморофны.

Поскольку $2 \notin \pi'$, 2 не делит порядок $|G/\mathrm{PSp}\,|$. Поэтому любой элемент G является произведением внутреннего и полевого автоморфизма группы PSp.

Обозначим через f преобразование вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n,1} & \dots & \alpha_{2n,2n} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^p & \dots & \alpha_{1,2n}^p \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n,1}^p & \dots & \alpha_{2n,2n}^p \end{pmatrix}.$$

Известно, что с точностью до сопряжения любой полевой автоморфизм группы Sp является степенью преобразования f.

Поскольку центр группы Sp имеет порядок $2 \in \pi$, полные прообразы π-холловых подгрупп PSp относительно канонического гомоморфизма являются π-холловыми подгруппами Sp. Таким образом достаточно показать, что классы сопряжённости π -холловых подгрупп Sp инвариантны относительно группы $U = \langle f_{\pi'} \rangle$, где $f_{\pi'}$ — π' -часть элемента f.

Пусть $H \in \mathrm{Hall}_\pi(\mathrm{Sp})$. Рассмотрим группу S_n состоящую из клеточных матриц вида

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix},$$

клетки которой δ_{ij} имею вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причём единичная матрица в каждой строке и столбце встречается ровно один раз, и группу A состоящую из клеточных матриц вида

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & X_n \end{pmatrix},$$

где ненулевые клетки X_i которых лежат в $\mathrm{Sp}_2(q) \simeq \mathrm{SL}_2(q)$. Заметим, что группа A является прямым произведением групп, изоморфных $\mathrm{SL}_2(q)$:

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

Ясно, что S_n нормализует A и, с точностью до сопряжения, группа M из утверждения (1) леммы 1.5.4 совпадает с $A\lambda S_n$. Заметим также, что группы S_n и A_i инвариантны относительно автоморфизмов $\langle f \rangle$, в частности группа $A\lambda S_n$ инвариантна относительно подгруппы U.

Пусть $u \in U$. Поскольку все подгруппы A_i субнормальны в MU, по лемме 1.2.1 имеем $H \cap A_i \in \mathrm{Hall}_\pi(A_i)$, для $i = 1, \dots, n$. Далее, $H \cap A_i = (H \cap A_iU) \cap A_i$, т.е. подгруппы $H \cap A_i$ являются A_iU-индуцированными π-холловыми группами A_i для любого i. Поскольку $k_\pi^{A_iU}(A_i) \leq 3$ [42, лемма 3.1] то, используя рассуждение аналогичное случаю (1), заключаем, $(H \cap A_i)^u = (H \cap A_i)^{x_i}$, для некоторого $x_i \in A_i$. Таким образом

$$(H \cap A)^u = \prod_{i=1}^{n} (H \cap A_i)^u = \prod_{i=1}^{n} (H \cap A_i)^{x_i} = (H \cap A)^x,$$

где $x = x_1 x_2 \dots x_n \in A$. Итак, подгруппы $H \cap A$ и $(H \cap A)^u$ сопряжены в группе A.

Ввиду того что матрицы S_n инвариантны относительно u, справедливо равенство $AH = AH^u$. В силу леммы 1.2.2 подгруппы $(H \cap \mathrm{Sp})^u$ и $H \cap \mathrm{Sp}$ сопряжены в группе $M \subseteq \mathrm{Sp}$.

Глава 3.

О пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп

§ 3.1. Обзор основных результатов главы

В третьей главе решены проблемы 1, 3 и 4 (см. введение), среди которых вопросы 18.32 и 17.45(б) из Коуровской тетради. Получен также ряд других результатов. Первым основным результатом данной главы можно считать следующее утверждение.

3.1.1. Теорема *Пусть множество простых чисел π таково, что*

(1) *существует конечная простая группа X, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп;*

(2) *существует конечная простая группа Y, содержащая π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y.*

Тогда в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G.

На основе данной теоремы строится пример, дающий отрицательное решение проблемы 1. А именно, пусть $\pi = \{2, 3\}$. Тогда группа

$$X = \mathrm{GL}_3(2) \simeq \mathrm{PSL}_3(2)$$

содержит два класса сопряжённых π-холловых подгрупп. Кроме того, π-холлова подгруппа H группы T верхне-треугольных матриц группы

$$Y = \mathrm{SL}_2(16) \simeq \mathrm{PSL}_2(16)$$

отлична от $T = N_T(H)$ (поскольку порядок группы T делится на 5), а значит и от нормализатора подгруппы H в Y. Ясно, что H является π-холловой подгруппой в Y. Значит, по теореме 3.1.1 регулярное сплетение

$$G = \mathrm{SL}_3(2) \wr \mathrm{SL}_2(16)$$

обладает непронормальной π-холловой подгруппой, у которой нормальное замыкание совпадает с G.

Из теоремы 3.1.1 вытекает следующий критерий

3.1.2. Следствие *Пусть множество простых чисел π конечно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своём нормальном замыкании;*

(2) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны;*

(3) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы сопряжены.*

Вторым основным результатом является

3.1.3. Теорема *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Допустим, что выполняются условия:*

(1) *некоторая конечная группа X содержит более одного класса сопряжённых пронормальных π-холловых подгрупп;*

(2) *некоторая конечная группа Y содержит собственную пронормальную π-холлову подгруппу M и $M = N_Y(M)$.*

Рассмотрим произвольное транзитивное подстановочное действие

$$\rho : Y \to Sym(\Omega)$$

группы Y на некотором множестве Ω, при котором подгруппа M действует нетранзитивно. [7] *Тогда подстановочное сплетение $G = X \wr_\rho Y$ обладает π-холловой подгруппой U такой, что*

(a) *U пронормальна G;*

(b) *$(U \cap A)^A \neq (U \cap A)^G$, где A — база сплетения $X \wr_\rho Y$;*

(c) *U не сильно пронормальна в G.*

[7] Такое действие, очевидно, существует: можно рассмотреть действие группы Y правыми сдвигами на множестве правых смежных классов под подгруппе M.

На основе этой теоремы строится пример пронормальной, но не сильно пронормальной холловой подгруппы, что даёт отрицательное решение проблемы 4. А именно, пусть $\pi = \{2, 3\}$. Группа

$$X = \mathrm{PSL}_2(7) \simeq \mathrm{GL}_3(2)$$

содержит два класса сопряжённых π-холловых подгрупп, и группа $Y = S_5$ содержит собственную пронормальную π-холлову подгруппу

$$M = N_Y(M) = S_4,$$

причём подгруппа S_4 группы S_5 нетранзитивна. Значит, по теореме 3.1.3 естественное подстановочное сплетение

$$\mathrm{PSL}_2(7) \wr S_5$$

обладает пронормальной, но не сильно прономальной π-холловой подгруппой.

Заметим, что группа $\mathrm{SL}_2(7)$ также содержит два класса сопряжённых $\{2, 3\}$-холловых подгрупп, а значит подстановочное сплетение $\mathrm{SL}_2(7) \wr S_5$ обладает пронормальной, но не сильно пронормальной $\{2, 3\}$-холловой подгруппой. Данное замечание позволяет также получить следующее утверждение, дающее отрицательное решение проблемы 3.

3.1.4. Следствие *В простой симплектической группе* $\mathrm{PSp}_{10}(7)$ *содержится не сильно пронормальная* $\{2, 3\}$*-холлова подгруппа.*

В действительности, из теоремы 3.1.3 вытекает существование пронормальных, но не сильно пронормальных π-холловых подгрупп в подходящих конечных группах для многих множеств π, как показывает

3.1.5. Следствие *Пусть множество* π *простых чисел таково, что существует конечная группа, содержащая более одного класса сопряжённых* π*-холловых подгрупп. Тогда существует группа, обладающая пронормальной, но не сильно пронормальной* π*-холловой подгруппой.*

Данное утверждение отрицательно отвечает на вопрос, сформулированный в [8, замечание 3].

3.1.6. Следствие *Пусть для некоторого множества* π *простых чисел конечная группа* X *содержит более одного класса сопряжённых*

π-холловых подгрупп. Пусть также Y — диэдральная группа порядка $2p$, где $p \in \pi'$. Пусть $G = X \wr_\rho Y$ — подстановочное сплетение соответствующее естественному транзитивному действию ρ группы Y на множестве из p элементов. Обозначим через A полный прообраз в G (нормальной) силовской p-подгруппы группы Y. Тогда G обладает пронормальной π-холловой подгруппой U такой, что $U \cap A$ не пронормальна в A.

Результаты главы опубликованы в [48] и получены автором лично.

§ 3.2. Доказательство теоремы 3.1.1 и её следствия

Доказательство теоремы 3.1.1. Обозначим базу сплетения $G = X \wr Y$ следующим образом

$$A = \prod_{y \in Y} X_y.$$

Здесь X_y изоморфная копия группы X. Пусть также $x \mapsto x_y$ — изоморфизм групп X и X_y.

По условию теоремы группа X содержит несопряжённые π-холловы подгруппы H, K. При этом группа Y содержит π-холлову подгруппу M, отличную от своего нормализатора в Y.

Пусть $\{y_i\}_{i=0}^n$ — левая трансверсаль подгруппы M в группе Y, причём $y_0 = e$. Рассмотрим подгруппу

$$V = \prod_{y \in M} K_y \times \prod_{y \in y_1 M} H_y \times \dots \times \prod_{y \in y_n M} H_y$$

группы A, где K_y и H_y — образы в X_y подгрупп K и H относительно отображения $x \to x_y$. Очевидно, что $V \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$. Поскольку подгруппа V инвариантна относительно подгруппы M, произведение подгрупп $U = VM$ также будет подгруппой группы G. Заметим, что $U \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$.

По условию теоремы множество $N_Y(M) \backslash M$ непусто. Пусть элемент $g \in N_Y(M) \backslash M$. Не теряя общности, можно считать, что $Mg^{-1} = g^{-1}M = y_1 M$.

Предположим, что $U \operatorname{prn} G$. Тогда подгруппы U и U^g сопряжены в $\langle U, U^g \rangle$, т.е. $U^x = U^g$ для некоторого $x \in \langle U, U^g \rangle$.

Из равенств $U = VM$ и $U^g = (VM)^g = V^g M$ заключаем, что

$$\langle U, U^g \rangle \subseteq AM = MA.$$

В частности $x \in MA$, т.е. $x = ma$, для некоторых $m \in M$ и $a \in A$. Поскольку $m \in M \subseteq U$, имеем

$$U^a = U^{ma} = U^x = U^g.$$

Подгруппа V^a содержится в π-подгруппе $U^a \cap A$ и является π-холловой подгруппой группы A. Следовательно $V^a = U^a \cap A$. Аналогично получаем равенство $V^g = U^g \cap A$. Итак, $V^a = V^g$. Пусть $a \mapsto a(y)$ — отображение координатной проекции $A \to X_y$. Имеем

$$\prod_{y \in M} K_y^{a(y)} \times \prod_{y \in y_1 M} H_y^{a(y)} \times \dots \times \prod_{y \in y_n M} H_y^{a(y)} = V^a =$$

$$= V^g = \prod_{y \in M} H_y \times \prod_{y \in y_1 M} K_y \times \dots \times \prod_{y \in y_n M} H_y.$$

В частности равенство $V^a = V^g$ влечёт равенство $K_e^{a(e)} = V^a(e) = V^g(e) = H_e$, где e — единица группы Y, что противоречит несопряжённости подгрупп H и K в группе X. $\square$

Доказательство следствия 3.1.2. Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Для доказательства следствия достаточно доказать импликацию (1) $\Rightarrow$ (3).

Предположим, она неверна. Тогда по лемме 1.2.3 существует простая группа X, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп, в то время как в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своём нормальном замыкании.

Поскольку множество π конечно, ввиду малой теоремы Ферма существует натуральное число n такое, что все нечётные простые числа из π и какое-нибудь нечётное число из π' делят число $2^n - 1$. Тогда группа $Y = \mathrm{SL}_2(2^n) \simeq \mathrm{PSL}_2(2^n)$ содержит π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y. Действительно, группа верхнетреугольных матриц T группы Y разрешима и её π-холлова подгруппа M нормальна в T. Вместе с тем, $|T| = 2^n(2^n - 1)$ делится на некоторое число из π', ввиду выбора n. Поэтому $M < T = N_T(M) \leq N_Y(M)$.

Кроме того, индекс $|Y : T| = 2^n + 1$ взаимно просто со всеми числами из π (числа $2,\ 2^n - 1$ и $2^n + 1$ попарно взаимно просты) откуда $|Y : M| = |Y : T||T : M|$ — π'-число. Значит $M \in \mathrm{Hall}_\pi(Y)$.

Теперь по теореме 3.1.1 в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G. Противоречие с (1). □

§ 3.3. Доказательство теоремы 3.1.3 и её следствий

Доказательство теоремы 3.1.3. По условию теоремы группа X содержит пронормальные несопряжённые π-холловы подгруппы H, K. Обозначим базу сплетения $X \wr_\rho Y$ следующим образом

$$A = \prod_{\alpha \in \Omega} X_\alpha.$$

Здесь $X_\alpha \simeq X$ для всех $\alpha \in \Omega$.

По условию теоремы подгруппа M действует нетранзитивно на Ω, и пусть O — некоторая орбита группы M. Поскольку группа Y действует транзитивно на Ω, для некоторого $y \in Y$ справедливо $\mathrm{O} \neq \mathrm{O}y$.

Так как подгруппа

$$\prod_{\alpha \in \mathrm{O}} H_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Omega \setminus \mathrm{O}} K_\alpha$$

инвариантна относительно M, произведение

$$U = \left(\prod_{\alpha \in \mathrm{O}} H_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Omega \setminus \mathrm{O}} K_\alpha \right) M$$

является подгруппой группы G. Очевидно, что U — π-холлова подгруппа в G.

Допустим, справедливо равенство $(A \cap U)^A = (A \cap U)^G$. Тогда, найдётся элемент $a = \prod_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \in A$, где $a_\alpha \in X_\alpha$ такой, что $(A \cap U)^{y^{-1}} = (A \cap U)^a$. Это равенство можно переписать в виде

$$\prod_{\alpha \in \mathrm{O}} K_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathrm{O}y} H_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Omega \setminus (\mathrm{O} \cup \mathrm{O}y)} K_\alpha = \prod_{\alpha \in \mathrm{O}} H_\alpha^{a_\alpha} \times \prod_{\alpha \in \mathrm{O}y} K_\alpha^{a_\alpha} \times \prod_{\alpha \in \Omega \setminus (\mathrm{O} \cup \mathrm{O}y)} K_\alpha^{a_\alpha}.$$

В частности $K_\alpha = H_\alpha^{a_\alpha}$ для $\alpha \in \mathrm{O}$, что противоречит несопряжённости подгрупп H и K в группе X. Таким образом, утверждение (b) доказано.

Утверждение (c) следует из (b) и леммы 1.4.1.

Докажем утверждение (a). Поскольку $(A\cap U)\operatorname{prn} A$, по лемме 1.3.2 подгруппа U пронормальна в UA. С другой стороны $UA = MA$, и, т.к. $M = N_Y(M)$, нетрудно заметить, что $MA = N_G(MA)$. Из пронормальности подгруппы M в группе Y следует пронормальность подгруппы MA в группе G. Теперь по лемме 1.3.4 получаем $U \operatorname{prn} G$. $\square$

Как отмечалось выше, естественное подстановочное сплетение $G = \mathrm{SL}_2(7) \wr S_5$ обладает не сильно прономальной $\{2,3\}$-холловой подгруппой. Используя этот факт докажем следствие

Доказательство следствия 3.1.4. Предположим, что все $\{2,3\}$-холловы подгруппы группы $\mathrm{PSp}_{10}(7)$ сильно пронормальны.

Рассмотрим естественное сплетение $G = \mathrm{SL}_2(7) \wr S_5$. В силу теоремы 3.1.3 существует не сильно пронормальная $\{2,3\}$-холлова подгруппа H группы G. Группа G изоморфно вкладывается в $\mathrm{Sp}_{10}(7)$ как стабилизатор разложения естественного симплектического модуля группы $\mathrm{Sp}_{10}(7)$ в ортогональную прямую сумму пяти двумерных невырожденных подпространств. Поскольку индекс $|\,\mathrm{Sp}_{10}(7) : G|$ взаимно прост с числами 2 и 3, подгруппа H является также $\{2,3\}$-холловой в $\mathrm{Sp}_{10}(7)$. Так как подгруппа H не является сильно пронормальной в G, H также не является сильно пронормальной и в $\mathrm{Sp}_{10}(7)$.

Центр Z группы $\mathrm{Sp}_{10}(7)$ имеет порядок 2, следовательно Z содержится в H. В силу нашего предположения

$$(H/Z)\operatorname{sprn}(\mathrm{Sp}_{10}(7)/Z) = \mathrm{PSp}_{10}(7).$$

Но тогда по лемме 1.4.2 подгруппа H сильно пронормальна в $\mathrm{Sp}_{10}(7)$. Противоречие. $\square$

Доказательство следствия 3.1.5. По условию следствия существует группа X, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп. Обозначим минимальное простое число, не лежащее в π, через p. По [26, теорема A] $p > 2$.

Стабилизатор M точки в естественном действии ρ группы $Y = S_p$ изоморфен S_{p-1} и является π-холловой подгруппой группы Y. Кроме того $M = N_Y(M)$. Значит по теореме 3.1.3 группа $G = X \wr Y$ обладает пронормальной, но не сильно пронормальной π-холловой подгруппой. $\square$

Доказательство следствия 3.1.6. Обозначим через M некоторую силовскую 2-подгруппу группы Y. По условию следствия $|Y| = 2p$, где $p \notin \pi$, следовательно $M \in \mathrm{Hall}_\pi(Y)$. Поскольку ρ – транзитивное действие группы Y на множестве из p элементов, то группа M действует не транзитивно.

По теореме 3.1.3 группа G обладает π-холловой подгруппой U такой, что

(*a*) U пронормальна в G;

(*b*) $(U \cap B)^B \neq (U \cap B)^G$, где B — база сплетения.

Предположим, что $(U \cap A) \operatorname{prn} A$. Поскольку $|B : A| = p$ является π'-числом, справедливо равенство

$$U \cap A = U \cap A \cap B = U \cap B.$$

В силу нашего предположения для любого $a \in A$ найдётся $b \in \langle (U \cup B), (U \cup B)^a \rangle \subseteq B$, что $(U \cup B)^b = (U \cup B)^a$. Таким образом

$$(U \cap B)^B = (U \cap B)^A = (U \cap B)^{UA} = (U \cap B)^G.$$

Противоречие. Следовательно группа G обладает пронормальной подгруппой π-холловой подгруппой U такой, что $U \cap A$ не пронормальна в A. $\square$

Глава 4.

Зависимость пронормальности π-холловых подгрупп в своём нормальном замыкании от множества π

§ 4.1. Обзор основных результатов главы

Основным результатом данной главы является следующее обощение следствия 3.1.2.

4.1.1. Теорема *Для множества π простых чисел следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своём нормальном замыкании;*

(2) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны;*

(3) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы сопряжены.*

Как было сказано, достаточно установить импликацию (1) $\Rightarrow$ (3). Без каких-либо существенных модификаций в доказательстве теоремы 3.1.1 требование *простоты* группы Y, обладающей несамонормализуемой π-холловой подгруппой H, можно ослабить, потребовав лишь совпадения Y с нормальным замыканием $\langle H^Y\rangle$ подгруппы H в Y поскольку справедливо

4.1.2. Предложение *Пусть множество простых чисел π таково, что*

(1) *существует конечная простая группа X, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп;*

(2) *существует конечная группа Y, содержащая пронормальную π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y и нормальное замыкание которой совпадает с Y.*

Тогда в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G.

Группу Y, удовлетворяющую условию (2) предложения 4.1.2, удается построить во всех необходимых случаях, используя

4.1.3. Предложение *Пусть множество простых чисел π непусто и отлично от множества всех простых чисел. Тогда существует разрешимая группа Y, обладающая π-холловой подгруппой H такой, что $Y = \langle H^Y \rangle$ и $H < N_Y(H)$.*

Построение группы Y в предложении 4.1.3 распадается на два принципиально разных случая: когда множество π' содержит по крайней мере два простых числа, и когда $\pi' = \{p\}$ для некоторого простого числа p. В первом случае мы воспользуемся следующим утверждением.

4.1.4. Предложение [4, лемма 9] *Пусть G — конечная группа и $H \leq G$. Допустим, что подгруппа H не нормальна в G. Тогда для любого простого числа p, не делящего $|G|$, существует неприводимый FG-модуль $\mathbf{V}$ над некоторым конечным полем F характеристики p такой, что $0 < C_{\mathbf{V}}(H) < \mathbf{V}$.*

Мы будем использовать предложение 4.1.4 в ситуации, когда H — π-холлова подгруппа в G и в естественном полупрямом произведении VG. Для использования предложения 4.1.4 важно, чтобы множество π' содержало по крайней мере два различных простых числа: p и некоторый простой делитель индекса $|G : H|$. Хотя группу Y в предложении 4.1.3 несложно построить и в ситуации, когда $\pi' = \{p\}$ (эквивалентно, $\pi = p'$), аналог предложения 4.1.4 неверен в случае, когда p делит порядок группы G. Более того, в случае, когда H — p'-холлова подгруппа в G (а именно в этой ситуации, когда H — π-холлова подгруппа в G, предложение 4.1.3 и используется), справедливо в определенном смысле противоположное утверждение:

4.1.5. Предложение [2, лемма 2], [33, теорема E(a)] *Пусть G — конечная группа, содержащая p'-холлову подгруппу H для некоторого простого числа p. Пусть $\mathbf{V}$ — неприводимый FG-модуль над некоторым полем F характеристики p. Тогда если $C_{\mathbf{V}}(H) > 0$, то $C_{\mathbf{V}}(G) = \mathbf{V}$ (т.е. $\mathbf{V}$ — главный FG-модуль).*

Результаты главы опубликованы в [49] и получены автором в неразделимом соавторстве с Е.П. Вдовиным и Д.О. Ревиным.

§ 4.2. Доказательство основных результатов главы

Доказательство предложения 4.1.2, по существу, повторяет с минимальными изменениями доказательство теоремы 3.1.1. Для полноты изложения приведём его.

Обозначим базу сплетения $G = X \wr Y$ следующим образом

$$A = \prod_{y \in Y} X_y.$$

Здесь X_y изоморфная копия группы X. Пусть также $x \mapsto x_y$ — изоморфизм групп X и X_y и $a \mapsto a(y)$ — отображение координатной проекции $A \to X_y$.

По условию теоремы группа X содержит несопряжённые π-холловы подгруппы H, K. При этом группа Y содержит π-холлову подгруппу M, отличную от своего нормализатора в Y и такую, что $\langle M^Y \rangle = Y$.

Пусть $\{y_i\}_{i=0}^n$ — левая трансверсаль подгруппы M в группе Y, причём $y_0 = 1$. Рассмотрим подгруппу

$$V = \prod_{y \in M} K_y \times \prod_{y \in y_1 M} H_y \times \dots \times \prod_{y \in y_n M} H_y$$

группы A. Очевидно, что $V \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$. Поскольку подгруппа V инвариантна относительно подгруппы M, произведение $U = VM$ также будет подгруппой группы G. Заметим, что $U \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$.

По условию теоремы множество $N_Y(M) \backslash M$ непусто. Выберем произвольно $g \in N_Y(M) \backslash M$. Не теряя общности, можно считать, что

$$Mg^{-1} = g^{-1}M = y_1 M.$$

Предположим, что $U \operatorname{prn} G$. Тогда подгруппы U и U^g сопряжены в $\langle U, U^g \rangle$, т. е. $U^x = U^g$ для некоторого $x \in \langle U, U^g \rangle$.

Из равенств $U = VM$ и $U^g = (VM)^g = V^g M$ заключаем, что

$$\langle U, U^g \rangle \subseteq AM = MA.$$

В частности, $x \in MA$, т. е. $x = ma$ для некоторых $m \in M$ и $a \in A$. Поскольку $m \in M \subseteq U$, имеем

$$U^a = U^{ma} = U^x = U^g.$$

Подгруппа V^a содержится в π-подгруппе $U^a \cap A$ и является π-холловой подгруппой группы A. Следовательно $V^a = U^a \cap A$. Аналогично получаем равенство $V^g = U^g \cap A$. Итак, $V^a = V^g$. Имеем

$$\prod_{y\in M} K_y^{a(y)} \times \prod_{y\in y_1 M} H_y^{a(y)} \times \cdots \times \prod_{y\in y_n M} H_y^{a(y)} = V^a =$$
$$V^g = \prod_{y\in M} H_y \times \prod_{y\in y_1 M} K_y \times \cdots \times \prod_{y\in y_n M} H_y.$$

В частности, равенство $V^a = V^g$ влечёт равенство

$$K_1^{a(1)} = V^a(1) = V^g(1) = H_1,$$

что противоречит несопряжённости подгрупп H и K в группе X.

Осталось показать, что нормальное замыкание подгруппы U в G совпадает с G. Заметим, что в силу простоты группы X выполнены соотношения

$$\langle U^G \rangle \geq \langle (U\cap A)^A \rangle \geq \prod_{y\in M} \langle K_y^{X_y} \rangle \times \prod_{y\in Y\setminus M} \langle H_y^{X_y} \rangle = \prod_{y\in Y} X_y = A.$$

Далее, существует эпиморфизм $\overline{} : G \to Y$ с ядром A. При этом $\overline{U} = M$ и

$$\overline{\langle U^G \rangle} = \langle \overline{U}^{\overline{G}} \rangle = \langle M^Y \rangle = Y = \overline{G}.$$

Так как $A \leq \langle U^G \rangle$, получаем $\langle U^G \rangle = G$. $\square$

Доказательство предложения 4.1.3 разобьем на два случая.

С л у ч а й 1: *множество π' содержит два различных числа p и q.*

Так как π непусто, возьмем $r \in \pi$. Существует группа Фробениуса G, у которой ядро K является элементарной абелевой q-группой, а дополнение H — r-группой. Действительно, можно рассмотреть в качестве G группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \cdot & \alpha^{-1} \end{pmatrix},$$

над полем $\mathbb{F}_{q^s}$, где s выбрано так, что r делит $q^s - 1$, β пробегает $\mathbb{F}_{q^s}$, а α пробегает множество r-элементов мультипликативной группы $\mathbb{F}_{q^s}^*$ поля $\mathbb{F}_{q^s}$. Тогда G — группа Фробениуса с ядром K и дополнением H, где

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \cdot \\ \cdot & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{F}_{q^s}^* - r\text{-элемент} \right\} \text{ и } K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{F}_{q^s} \right\}.$$

При этом $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ и $G = \langle H^G \rangle$. В силу предложения 4.1.4 существует неприводимый FG-модуль V над некоторым конечным полем F характеристики p такой, что $0 < C_V(H) < V$. Поскольку K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, модуль V точный, т. е. $C_G(V) = 1$. Пусть $Y = VG$ — естественное полупрямое произведение. Ясно, что $H \in \mathrm{Hall}_\pi(Y)$. Из равенства $C_G(V) = 1$ заключаем, что V — единственная минимальная нормальная подгруппа в Y. Значит, $V \leq \langle H^Y \rangle$ и

$$\langle H^Y \rangle / V \simeq \langle H^G \rangle = G \simeq Y/V,$$

откуда $Y = \langle H^Y \rangle$. Поскольку $0 < C_V(H) \subseteq N_Y(H) \setminus H$, имеем $H < N_Y(H)$.

С л у ч а й 2: $\pi' = \{p\}$.

Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим экстраспециальную группу $P = p_+^{2n+1}$ в обозначениях [23]. Пусть $Z = Z(P) = \Phi(P)$. Известно [16, упр. 8.5, стр. 116], что группа A автоморфизмов группы P, тождественно действующих на Z, изоморфна $\mathrm{Sp}_{2n}(p)$ и содержит [31, теорема 5.6] циклическую подгруппу H порядка $p^n + 1$, неприводимо действующую на элементарной абелевой группе P/Z как на векторном пространстве. Пусть $Y = PH$ — естественное полупрямое произведение. Тогда H — π-холлова подгруппа в G, $Z \subseteq N_Y(H) \setminus H$ и $Y = \langle H^Y \rangle$ ввиду неприводимости H на P/Z. □

Доказательство теоремы 4.1.1. Как отмечалось, достаточно доказать импликацию (1) ⇒ (3). Предположим, что утверждение (3) неверно, и покажем, что (1) тоже неверно. Из ложности (3) следует, что существует конечная группа, содержащая несопряженные π-холловы подгруппы. Ввиду теоремы Чунихина 1.2.3 существует простая группа X с несопряженными π-холловыми подгруппами. Применяя предложение 4.1.3, получаем существование гуппы Y, содержащей π-холлову подгруппу H такую, что $Y = \langle H^Y \rangle$ и $H < N_Y(H)$. Теперь ввиду предложения 4.1.2 регулярное сплетение $G = X \wr Y$ содержит непронормальную π-холлову подгруппу, нормальное замыкание которой совпадает с G. Таким образом, утверждение (1) неверно. □

Глава 5.

Арифметика сопряжённости для p-дополнений

§ 5.1. Обзор основных результатов главы

В пятой главе изучается проблема 2 в случае, когда $\pi = p'$. Напомним обозначения:

$\mathfrak{C}(p)$ — класс всех конечных групп, в которых все p-дополнения сопряжены.

$\mathfrak{A}(p)$ — класс всех конечных групп G таких, что любые два p-дополнения в G сопряжены элементом из $\mathrm{Aut}(G)$.

$\mathfrak{I}(p)$ — класс всех конечных групп, в которых все p-дополнения изоморфны.

Имеет место следующая цепочка включений

$$\mathfrak{C}(p) \subseteq \mathfrak{A}(p) \subseteq \mathfrak{I}(p) \subseteq \mathfrak{G}. \qquad (1)$$

Напомним, что через $\mathcal{NC}$ обозначается множество всех простых чисел, некоторая натуральная степень которых представляется в виде

$$\frac{q^l - 1}{q - 1} \qquad (2)$$

где q — степень простого числа, l — простое нечётное число.

Основным результатом является

5.1.1. Теорема *Пусть p — некоторое простое число, тогда имеет место одно из следующих утверждений.*

(а) *Все включения в цепочке* (1) *строгие и $p \in \mathcal{NC}$.*

(б) *Все включения в цепочке* (1) *являются равенствами и $p \notin \mathcal{NC}$.*

Из этой теоремы очевидно вытекают следующие утверждения.

5.1.2. Следствие *Пусть p — некоторое простое число, тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а) *В любой конечной группе любые два p-дополнения сопряжены.*

(б) *В любой конечной группе G любые два p-дополнения сопряжены в* $\mathrm{Aut}(G)$.

(в) *В любой конечной группе любые два p-дополнения изоморфны.*

(г) $p \notin \mathcal{NC}$.

5.1.3. Следствие *Пусть p — некоторое простое число, тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а) $\mathcal{E}_{p'} = \mathcal{C}_{p'}$

(б) $p \notin \mathcal{NC}$.

Таким образом решение проблемы 2 для p' сводится к следующему вопросу:

Проблема 5. *Для данного простого числа p выяснить, верно ли, что $p \in \mathcal{NC}$.*

Частичное решение проблемы 5 даёт

5.5.2. Предложение *Пусть p — простое число. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $p > 3$ — простое число Мерсенна, то $p \in \mathcal{NC}$.*

(2) *Если p — простое число Ферма, то $p \notin \mathcal{NC}$.*

(3) $11, 13, 73, 307 \in \mathcal{NC}$.

(4) *Если все простые делители числа $p - 1$ не превосходят 23 и $p \neq 11$, то $p \in \mathcal{NC}$ тогда и только тогда, когда само p представляется в виде* (2).

Это утверждение использует следующий теоретико-числовой результат

5.1.4. Предложение [20, теорема 1] *Пусть числа x, y, n и m, бо́льшие единицы, удовлетворяют уравнению Нагеля-Люнггрена*

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^m$$

и четвёрка (x, y, n, m) отлична от $(3, 11, 5, 2)$, $(7, 20, 4, 2)$ и $(18, 7, 3, 3)$. Тогда наименьший простой делитель числа n больше либо равен 29 и количество простых делителей числа n не превосходит 4.

Стоит отметить, что даже такой, казалось бы, простой случай $\pi = p'$ для проблемы 2 свёлся к довольно сложной теоретико-числовой гипотезе Нагеля-Люнггрена.

Результаты главы опубликованы в [46] и получены автором лично.

§ 5.2. Существование неизоморфных p-дополнений для $p \in \mathcal{NC}$

В этом параграфе по аналогии с [21] для любого числа $p \in \mathcal{NC}$ мы построим конечную группу, обладающую неизоморфными p-дополнениями.

Пусть $p \in \mathcal{NC}$. По определению для некоторых натурального числа s, степени q простого числа и нечетного простого числа l справедливо равенство

$$p^s = \frac{q^l - 1}{q - 1}.$$

Рассмотрим группу $G = \mathrm{GL}_l(q)$ и отождествим ее с группой $\mathrm{GL}(V)$, где V — естественный модуль для группы G, т.е. l-мерное векторное пространство над полем из q элементов. Обозначим через H и K стабилизаторы в G некоторых прямой U и гиперплоскости W из V соответственно. Тогда

$$|G : H| = |G : K| = \frac{q^l - 1}{q - 1} = p^s, \qquad (3)$$

в то время как

$$|H| = |K| = q^{l(l-1)/2}(q - 1) \prod_{i=1}^{l-1} (q^i - 1).$$

Из леммы 1.6.2 следует, что порядки подгрупп H и K не делятся на p и, таким образом, H и K являются p-дополнениями в G.

Рассмотрим естественное полупрямое произведение $G^* = VG$. Подгруппы $H^* = \langle V, H\rangle$ и $K^* = \langle V, K\rangle$ являются очевидно p-дополнениями в группе G^*.

Покажем, что во введенных обозначениях справедлива

5.2.1. Лемма *Подгруппы H^* и K^* группы G^* неизоморфны.*

Доказательство. Поскольку прямая U инвариантна относительно H, подгруппа H^* содержит нормальную подгруппу U порядка q. Для доказательства леммы достаточно показать, что собственные нормальные подгруппы группы K^* имеют порядок строго больший, чем q.

Пусть M — собственная нормальная подгруппа группы K^*. Рассмотрим пересечение $M \cap V$. Поскольку K содержит все ненулевые скалярные преобразования пространства V и $M \cap V \lhd K^*$, подмножество $M \cap V$ пространства V замкнуто относительно сложения и умножения на скаляр, т.е. $M \cap V$ — K-инвариантное подпространство пространства V. В то же время, V имеет ровно три K-инвариантных подпространства: 0, W и V. Пересечение $M \cap V$ должно совпадать с одним из них.

Предположим, что пересечение $M \cap V$ тривиально. Поскольку $M \lhd K^*$ и $V \lhd K^*$, взаимный коммутант $[M,\ V]$ содержится в $M \cap V$. Следовательно, M и V централизуют друг друга. Пусть $a \cdot \varphi \in M$ для некоторых $a \in V$ и $\varphi \in K$. Тогда для любого $x \in V$ справедливо равенство $x = x^{a\varphi} = x^{\varphi}$. Откуда $\varphi = 1$ и $a \cdot \varphi = a \in V$. Следовательно $M \subseteq V$ и подгруппа $M = V \cap M$ тривиальна. Противоречие.

Таким образом, пересечение $M \cap V$ совпадает с W или с V. В любом случае

$$|M| \geq |M \cap V| \geq |W| = q^{l-1} > q,$$

поскольку l — нечетное простое число. □

§ 5.3. Существование p-дополнений, не сопряженных в группе автоморфизмов, для $p \in \mathcal{NC}$

В этом параграфе, также основываясь на соответствующем примере из [21], для любого числа $p \in \mathcal{NC}$ мы построим конечную группу

G^*, обладающую изоморфными p-дополнениями, не сопряженными в $\mathrm{Aut}(G^*)$.

Пусть, как и выше, $p \in \mathcal{NC}$ и

$$p^s = \frac{q^l - 1}{q - 1}.$$

Обозначим как и в параграфе 5.2 через G группу $\mathrm{GL}_l(q)$ и пусть H и K — стабилизаторы в G прямой и гиперплоскости естественного модуля группы G соответственно. Как было отмечено в предыдущем параграфе, подгруппы H и K являются p-дополнениями в G. По лемме 1.6.3 подгруппы H и K сопряжены в $\mathrm{Aut}(G)$ и, в частности, изоморфны.

Рассмотрим группу

$$X = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{p \text{ раз}}$$

и ее автоморфизм φ, задаваемый правилом

$$(g_1, g_2, \ldots, g_p)^\varphi = (g_2, \ldots, g_p, g_1).$$

Обозначим через G^* естественное полупрямое произведение групп X и $\langle\varphi\rangle$, изоморфное регулярному сплетению $G \wr \mathbb{Z}_p$. Обозначим через H^* и K^* подгруппы группы X, определенные следующим образом:

$$H^* = \underbrace{H \times H \times \cdots \times H}_{p \text{ раз}},$$

$$K^* = K \times \underbrace{H \times \cdots \times H}_{p-1 \text{ раз}}.$$

Поскольку H и K — p-дополнения в G, порядки подгрупп H^* и K^* не делятся на p. Подгруппы H^* и K^* изоморфны, так как H и K изоморфны. Кроме того, ввиду (3), индекс

$$|G^* : H^*| = |G^* : X| \cdot |X : H^*| = p \cdot |G : H|^p = p \cdot p^{sp} = p^{sp+1},$$

является степенью числа p. Аналогично $|G^* : K^*| = p^{sp+1}$. Таким образом, H^* и K^* являются p-дополнениями в группе G^*.

5.3.1. Лемма *Подгруппы H^* и K^* группы G^* не сопряжены в группе* $\mathrm{Aut}(G^*)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $|N_{G^*}(H^*)| > |N_{G^*}(K^*)|$.

Поскольку подгруппа H^* группы X является φ-инвариантной, имеем

$$N_{G^*}(H^*) \geq H^*\langle\varphi\rangle > H^*.$$

Пусть $g\sigma^{-1} \in N_{G^*}(K^*)$ для некоторых $g = (g_1, g_2, \ldots, g_p) \in X$ и $\sigma^{-1} \in \langle\varphi\rangle$. Тогда справедливо равенство $(K^*)^{g\sigma^{-1}} = K^*$ и следовательно $(K^*)^g = (K^*)^\sigma$. Покажем, что $\sigma = 1$.

Допустим, это не так. Тогда, как следует из определения автоморфизма φ группы X, автоморфизм σ переставляет без неподвижных точек прямые сомножители группы X. Отсюда, в частности, следует, что проекция подгруппы $(K^*)^\sigma$ на первый из этих сомножителей равна H, т.е. является в G стабилизатором некоторой прямой из естественного модуля группы G. С другой стороны,

$$(K^*)^\sigma = (K^*)^g = K^{g_1} \times H^{g_2} \times \cdots \times H^{g_p}$$

и подгруппа K^{g_1} (проекция $(K^*)^\sigma$ на первый сомножитель группы X) является стабилизатором гиперплоскости в группе G. Противоречие с леммой 1.6.3.

Таким образом, нормализатор $N_{G^*}(K^*)$ содержится в подгруппе X, и справедливо равенство

$$N_{G^*}(K^*) = N_X(K^*) = N_G(K) \times N_G(H) \times \cdots \times N_G(H).$$

В силу леммы 1.6.4 имеем $N_G(H) = H$ и $N_G(K) = K$, откуда $N_{G^*}(K^*) = K^*$.

Итак, $|N_{G^*}(H^*)| > |H^*| = |K^*| = |N_{G^*}(K^*)|$. □

§ 5.4. Доказательство теоремы 5.1.1

Доказательство. теоремы 5.1.1. Пусть $p \in \mathcal{NC}$. Тогда существуют степень q простого числа, нечётное простое число l и натуральное число s такие, что

$$p^s = \frac{q^l - 1}{q - 1}.$$

Как и в параграфах 5.2 и 5.3, обозначим через G группу $\mathrm{GL}_l(q)$, а через V — её естественный модуль.

Поскольку группа G обладает несопряжёнными p-дополнениями, которые сопряжены в $\mathrm{Aut}(G)$, т.е. $G \in \mathfrak{A}(p) \setminus \mathfrak{C}(p)$, включение $\mathfrak{C}(p) \subset \mathfrak{A}(p)$ является строгим.

Из результатов параграфа 5.3 и, в частности, леммы 5.3.1 следует, что сплетение $G \wr \mathbb{Z}_p$ обладает несопряжёнными в $\mathrm{Aut}(G \wr \mathbb{Z}_p)$ p-дополнениями, которые, тем не менее, изоморфны. Таким образом, $G \wr \mathbb{Z}_p \in \mathfrak{I}(p) \setminus \mathfrak{A}(p)$ и включение $\mathfrak{A}(p) \subset \mathfrak{I}(p)$ является строгим.

Из результатов параграфа 5.2 и, в частности, леммы 5.2.1 следует, что естественное полупрямое произведение VG обладает неизоморфными p-дополнениями. Таким образом, $VG \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{I}(p)$ и включение $\mathfrak{I}(p) \subset \mathfrak{G}$ является строгим.

Итак, доказано, что если $p \in \mathcal{NC}$, то справедливо утверждение (a) теоремы 5.1.1.

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить равенство $\mathfrak{C}(p) = \mathfrak{G}$ в случае, когда $p \notin \mathcal{NC}$.

Пусть $p \notin \mathcal{NC}$. В силу леммы 1.6.1 для доказательства данного равенства достаточно установить, что в любой конечной простой группе любые два p-дополнения сопряжены.

Допустим, существует конечная простая группа G с несопряженными p-дополнениями. Тогда, согласно лемме 1.6.7, справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $G \simeq \mathrm{PSL}_n(q)$ и $\frac{q^n-1}{q-1}$ — степень числа p, где n — нечетное простое число;

(2) $G \simeq \mathrm{PSL}_2(11)$ и $p = 11$.

Но если справедливо утверждение (1), то $p \in \mathcal{NC}$ по определению. Если же справедливо (2), то также $p = 11 \in \mathcal{NC}$, поскольку

$$11^2 = \frac{3^5-1}{3-1}.$$

Противоречие. Таким образом, равенство $\mathfrak{C}(p) = \mathfrak{G}$ доказано. □

Итак теорема доказана.

Отметим, что классификация конечных простых групп используется лишь при изучении случая $p \notin \mathcal{NC}$.

Следствия вытекают из теоремы 5.1.1 непосредственно.

§ 5.5. О множестве $\mathcal{NC}$

В этой части установлены некоторые факты о множестве $\mathcal{NC}$.

5.5.1. Лемма *Если $p \in \mathcal{NC}$ и*

$$p^s = \frac{q^l - 1}{q - 1}$$

для некоторых натурального числа s, степени q простого числа и нечетного простого числа l, то l делит $p - 1$.

Доказательство. Из леммы 1.6.2 следует, что число p делит $q^l - 1$ и p не делит $q^s - 1$ для $s = 1, \ldots, l - 1$, т.е. $q^l \equiv_p 1$ и $q^s \not\equiv_p 1$ для $s = 1, \ldots, l - 1$.

Положим $G = \mathbb{F}_p^\times$ и пусть $* : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ — естественный гомоморфизм колец. Поскольку p не делит q, $q^* \neq 0$, т.е. $q^* \in G$. Из $(q^*)^s \neq 1$ для $s = 1, \ldots, l - 1$ и $(q^*)^l = 1$ следует, что мультипликативный порядок элемента q^* равен l. Таким образом, число l делит $|G| = p - 1$. $\square$

5.5.2. Предложение *Пусть p — простое число. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $p > 3$ — простое число Мерсенна, то $p \in \mathcal{NC}$.*

(2) *Если p — простое число Ферма, то $p \notin \mathcal{NC}$.*

(3) $11, 13, 73, 307 \in \mathcal{NC}$.

(4) *Если все простые делители числа $p - 1$ не превосходят 23 и $p \neq 11$, то $p \in \mathcal{NC}$ тогда и только тогда, когда само p представляется в виде* (2).

Доказательство. (1) Из определения числа Мерсенна следует что,

$$p = 2^l - 1 = \frac{2^l - 1}{2 - 1}$$

для некоторого простого числа l, причем l нечетно, поскольку $p > 3$. Таким образом $p \in \mathcal{NC}$.

(2) Из определения числа Ферма следует, что

$$p = 2^m + 1$$

для некоторого натурального m. Если предположить, что $p \in \mathcal{NC}$, то

$$p^s = \frac{q^l - 1}{q - 1}$$

для некоторых натурального числа s, степени q простого числа и нечетного простого числа l и, ввиду леммы 5.5.1, l делит $p - 1 = 2^m$. Противоречие с тем, что l — нечетное простое число.

(3) Числа $11, 13, 73$ и 307 лежат в $\mathcal{NC}$ ввиду равенств

$$\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 11^2, \quad \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 13, \quad \frac{8^3 - 1}{8 - 1} = 73, \quad \frac{17^3 - 1}{17 - 1} = 307.$$

(4) Предположим, что все простые делители числа $p - 1$ не превосходят 23, и число p лежит в $\mathcal{NC}$. Тогда

$$p^s = \frac{q^l - 1}{q - 1}$$

для некоторых натурального числа s, степени q простого числа и нечетного простого числа l и, ввиду леммы 5.5.1, l делит $p - 1$, т.е. l не превосходит 23.

Предположим, число s строго больше 1. Поскольку числа x, y, n и m, бóльшие единицы, удовлетворяют уравнению Нагеля-Люнггрена, по предложению 5.1.4 число l больше либо равно 29. Противоречие. $\square$

Заключение

В диссертации исследовались вопросы пронормальности π-холловых подгрупп в конечных группах. В данной тематике получены следующие результаты.

1. Доказана пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах.

2. Найдены примеры холловых подгрупп,

   (a) не являющихся пронормальными в своём нормальном замыкании,

   (b) в простых группах, не являющихся сильно пронормальными.

3. Доказано, что для множества π простых чисел существование группы с π-холловой подгруппой, не пронормальной в своём нормальном замыкании, эквивалентно существованию группы с несопряжёнными π-холловыми подгруппами. Для случая $\pi = p'$ получен получен арифметический критерий существования группы с несопряжёнными p'-холловыми подгруппами (т.е. с несопряжёнными p-дополнениями).

Закрывается ряд известных вопросов теории конечных групп. Результаты исследования могут использоваться для дальнейшего изучения свойств π-холловых подгрупп в конечных группах.

Литература

[1] *Вдовин, Е.П.* Картеровы подгруппы в конечных почти простых группах // Алгебра и логика — 2007. — Т. 46, 2. — С. 157–216.

[2] *Вдовин, Е.П.* Критерии абнормальности для p-дополнений / Ревин Д.О., Вдовин Е. П. // Алгебра и логика — 2016. — Т. 55 — 5. — С. 531–539.

[3] *Вдовин, Е.П.* Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах / Д.О. Ревин, Е.П. Вдовин // Сиб. матем. журн. — 2010. — Т. 51, 3. — С. 506–513.

[4] *Вдовин, Е.П.* О пронормальности и сильной пронормальности подгрупп / Д.О. Ревин, Е.П. Вдовин // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, 1. — С. 22–33.

[5] *Вдовин, Е.П.* О пронормальности холловых подгрупп / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т.54, 1. — С. 35–43.

[6] *Вдовин, Е.П.* Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, 3. — С. 527–542.

[7] *Вдовин, Е.П.* Теоремы силовского типа / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Успехи математических наук. — 2011. — Т. 66, вып. 5. — С. 3–46.

[8] *Вдовин, Е.П.* Существование пронормальных π–холловых подгрупп в $\mathcal{E}_\pi$-группах / Д.О. Ревин, Е.П. Вдовин // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, 3. — С. 481–486.

[9] *Го, В.* Эквивалентность существования несопряженных и неизоморфных холловых π-подгрупп / В. Го, А.А. Бутурлакин, Д.О.Ревин // Труды ИММ УрО РАН — 2018. — Т.24, 3. — С. 43–50.

[10] *Казарин Л.С.* О произведении конечных групп / Л.С. Казарин // Доклады АН СССР, 269:3 (1983), 528–531.

[11] *Ревин, Д.О.* Вокруг гипотезы Ф.Холла // Сибирские электронные математические известия. — 2009. — Т. 6. — С. 366–380.

[12] *Чунихин, С.А.* О разрешимых группах // Изв. НИИММ Том. унив. — 1938. — Т. 2. — С. 220–223.

[13] *Чунихин, С.А.* О силовски-правильных группах // ДАН СССР —1947. — Т. 60. — 5. — С. 773–774.

[14] *Чунихин, С.А.* О существовании и сопряженности подгрупп у конечной группы // Матем. сб. — 1953. — Т. 33, 1. — С. 111–132.

[15] *Чунихин, С.А.* О π-свойствах конечных групп // Матем. сб. — 1949 — Т. 25. — 3. — С. 321–346.

[16] *Aschbacher, M.* Finite Group Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[17] *Bennett, M.* The Nagell-Ljunggren equation via Runge's method / M. A. Bennett, A. Levin arXiv preprint arXiv:1312.4037 (2013)

[18] *Bugeaud, Y.* L'equation de Nagell-Ljunggren $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$ / Y. Bugeaud, M. Mignotte, Enseign. Math., 48:1/2 (2002), 147–168

[19] *Bugeaud, Y.* Y. Bugeaud, M. Mignotte, Y. Roy, On the Diophantine Equation $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Pacific journal of mathematics, 193:2 (2000), 257–267

[20] *Bugeaud, Y.* Y. Bugeaud, P. Mihailescu, On the Nagell-Ljunggren Equation $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Math. Scand, 101:2 (2007), 177–183.

[21] *Buturlakin A.A.* On p-complements of finite groups / A.A.Buturlakin, D.O.Revin //, Siberian Electronic Mathematical Reports, 10 (2013), 414–417.

[22] *Carter R. W.* Simple groups of Lie type, John Wiley & Sons, 1989.

[23] *Conway, J. H.* Atlas of Finite Groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson. — Oxford, 1985.

[24] *Doerk, K.* Doerk K., Hawkes T. O. Finite soluble groups. – Walter de Gruyter, 1992.

[25] *D. Estes* D. Estes, R. Guralnick, M. Schacher and E. Strau, Equations in prime powers, Pacific journal of mathematics, 118:2 (1985), 359–367

[26] *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups //Bulletin of the London Mathematical Society. — 1987. — T. 19. — . 4. — C. 311-319.

[27] *Guo, W.* Pronormality and submaximal $\mathfrak{X}$-subgroups in finite groups / W. Guo, D. O. Revin // Communications in Mathematics and Statistics — 2018. — T.6, 3. — P. 289–317.

[28] *Hall, P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. — 1937. — V. 12. — P. 198–200.

[29] *Hall, P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. — 1928. — V. s1-3, iss. 2. — P. 98–105.

[30] *Hall, P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. — 1956. — V. s3-6, iss. 2. — P. 286–304.

[31] *Hestenes M. D.* Singer groups, Canad. J. Math., 22:3 (1970), 492–513.

[32] *Huppert B.* Endliche Gruppen, Springer-Verlag, Berlin 1967.

[33] Isaacs I.M., Irreducible products of characters // J. Algebra. — 2000. — T. 223. — C. 630–646.

[34] The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / editors: V.D. Mazurov and E.I. Khukhro. — 17th. ed. — Novosibirsk: Russian Academy of Sciences Siberian Division, Sobolev Institute of Mathematics, 2010.

[35] *Khosravi A.* A. Khosravi, B. Khosravi, On the Diophantine Equation $\frac{q^n-1}{q-1} = y$, Comment.Math.Univ.Carolin, 44:1 (2003), 1–7.

[36] *Kleidman P. B.* The Subgroup Structure of Finite Classical Groups /Kleidman P. B., Liebeck M. W.// Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[37] *Ljunggren W.* W. Ljunggren, Some theorem on indeterminate equations of the form $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Norsk Mat. Tidsskr., 25 (1943), 17–20.

[38] *Manzaeva, N.C.* On the heritability of the Hall property $\mathcal{D}_\pi$ by overgroups of π-Hall subgroups / N.C. Manzaeva //arXiv preprint arXiv:1504.03137. — 2015.

[39] *Polický Z.* Diophantine Equation $\frac{q^n-1}{q-1} = y$ for four prime divisors of $y-1$// Comment. Math. Univ. Carolin, — 2005. — 46:3, —P. 577–588.

[40] *Revin, D.O.* Frattini argument for Hall subgroups / D.O. Revin, E.P. Vdovin // Journal of Algebra. — 2014. — V. 414. — P. 95–114.

[41] *Revin, D.O.* Hall subgroups of finite groups / D.O. Revin, E.P. Vdovin // Contemporary Mathematics. — 2006. — V. 402. — P. 229–265.

[42] *Revin D. O.* On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups / Revin D. O., Vdovin E. P. //Journal of Algebra. — 2010. — Т. 324. — №. 12. — С. 3614-3652.

[43] *Suzuki M.* Group Theory, II, Springer-Verlag, NY, 1986.

[44] *Sylow, M.L.* Théorèmes sur les groupes de substitutions // Math. Ann. — 1872. — V. 5, iss. 4. — P. 584–594.

[45] *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste, Monatsh. Math. Phys., 3 (1892), 265–284.

Работы автора по теме диссертации[8]

[46]* *Нестеров, М.Н.* Арифметика сопряжённости p-дополнений // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54, N1. — С. 53–69.

[47]* *Нестеров, М.Н.* Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах // Сибирские электронные математические известия. — 2015. — Т. 12, N1. — С. 1032–1038.

[48]* *Нестеров, М.Н.* Нестеров М. Н. О пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп // Сибирский математический журнал. — 2017. — Т. 58, N1. — С. 156–173.

[8] Публикации в изданиях, входящих на момент выхода в перечень ВАК для основных результатов докторских диссертаций, помечены звездочкой *.

[49]* *Вдовин, Е.П.* О пронормальности холловых подгрупп в своём нормальном замыкании / Е.П. Вдовин, М.Н. Нестеров, Д.О. Ревин // Алгебра и логика. — 2017. — Т.56, N6. — С. 682–690.

[50] *Нестеров, М.Н.* О p-дополнениях в конечных группах // Труды 45-й Международной молодёжной школы-конференции «Современные проблемы математики и их приложений» ,посвящённой 75-летию В.И. Бердышева, Екатеринбург 2-8 февраля 2014 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ, 2014. — С. 41.

[51] *Нестеров, М.Н.* О p-дополнениях в конечных группах // Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 11-18 апреля 2014 г. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2014. — С. 18.

[52] *Нестеров, М.Н.* Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах // Международная конференция «Мальцевские чтения», тезисы докладов. Новосибирск, 10-13 ноября 2014 г. — С. 76.

[53] *Нестеров, М.Н.* Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах // Труды 46-й Международной молодёжной школы-конференции «Современные проблемы математики и их приложений» , Екатеринбург 25-31 января 2015 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. — С. 18.

[54] *Нестеров, М.Н.* Контрпримеры к некоторым гипотезам о пронормальностихолловых подгрупп // Международная конференция «Мальцевские чтения» посвященная 75-летию Ю.Л.Ершова, тезисы докладов. Новосибирск, 3-7 мая 2015 г. — С. 114.

[55] *Нестеров, М.Н.* Вопросы пронормальности для холловых подгрупп // Материалы 53-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 11-17 апреля 2015 г. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2015. — С. 14.

[56] *Nesterov, M.* On the pronormality and strong pronormality of Hall subgroups // Международная конференция Groups and their actions», 22-26 июня 2015 г. — Бедлево, Польша

[57] *Nesterov, M.* On the pronormality and strong pronormality of Hall subgroups // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School in honor of the 80th Birthday of Professor Vyacheslav A.Belonogov and of the 70th Birthday of Professor Vitaly A. Baransky, 9-15 августа 2015 г. — Екатеринбург — С. 79.

[58] *Нестеров, М.Н.* О пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп // Международная научная конференция Дискретная математика,алгебра иих приложения, 14-18 сентября 2015 г. — Минск, Беларусь — С. 40-41.

[59] *Нестеров, М.Н.* О пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп // Международный научный форум молодых ученых «Наука будущего – наука молодых», 29 сентября - 2 октября 2015 г. — Севастополь