Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Кузнецов Михаил Владимирович

Субриманов оператор диффузии и геометрический смысл диагональной асимптотики его интегрального ядра

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Водопьянов Сергей Константинович

Новосибирск – 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Вопрос о возможности восстановить форму ограниченной области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ по спектру оператора Лапласа с условием Дирихле на ∂U (или "услышать форму барабана", как это сформулировал М. Кац в [46]) возник как попытка обобщения классической теоремы Г. Вейля [67]: если $N(\lambda)$ – количество (с учётом кратности) не превышающих λ собственных значений оператора Лапласа на ограниченной области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ с условием Дирихле на ∂U, тогда $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \frac{\mathrm{vol}_n(B_n) \cdot \mathrm{vol}_n(U)}{(2\pi)^n}$, где B_n – n-мерный шар радиуса 1 (через vol_n мы обозначаем n-мерную меру Лебега или, более общо, n-мерную риманову меру).

Вейль рассматривал только случаи $n = 2$ и $n = 3$. В 1912 году он предложил [68] другое доказательство этой теоремы, основанное на вариационных методах. В [69] он сформулировал гипотезу, впоследствии названную его именем, в которой утверждается (в предположении гладкости ∂U), что при $\lambda \to +\infty$

$$N(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}_n(B_n) \cdot \mathrm{vol}_n(U) \cdot \lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} - \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(B_{n-1}) \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(\partial U) \cdot \lambda^{\frac{n-1}{2}}}{4 \cdot (2\pi)^{n-1}} + o(\lambda^{\frac{n-1}{2}}),$$

а также вариант этой гипотезы для граничного условия Неймана со знаком "+" вместо "−" во втором слагаемом. Первое продвижение в оценке остаточного члена удалось Р. Куранту в 1920 году; его работа [27] даёт асимптотику $N(\lambda) = \frac{\mathrm{vol}_n(B_n) \cdot \mathrm{vol}_n(U) \cdot \lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}} \cdot \log(\lambda))$ при $\lambda \to +\infty$. В ней, как и в работах Вейля, использованы вариационные методы.

Следующим нововведением были две статьи Т. Карлемана [21, 22], где разработан метод, основанный на тауберовых теоремах. Ограничение на размерность в этих работах, по сравнению с работами Вейля и Куранта, уже не вводилось. Общая идея метода Карлемана состоит в том, что, выбрав функцию F от оператора и некоторого вспомогательного вещественного аргумента, мы пользуемся спектральной теоремой: $F(\Delta, t) = \int F(\lambda, t) dE_\lambda$ (через E_λ обозначен спектральный проектор), затем берём от обеих частей этого равенства след: $\mathrm{Tr}(F(\Delta, t)) = \int F(\lambda, t) d\,\mathrm{Tr}(E_\lambda)$, где в правой части интеграл понимается в смысле Лебега – Стильтьеса. Далее $\mathrm{Tr}(F(\Delta, t))$ вычисляется при помощи решения либо достаточно точной оценки некоторого дифференциального (или, более общо, псевдодифференциального) уравнения с частными производными, после чего мы при помощи какой-либо теоремы тауберова типа восстанавливаем асимптотику $\mathrm{Tr}(E_\lambda)$ с некоторой погрешностью.

Беря $F(A, t) = \exp(-tA)$, мы получаем метод теплового оператора; в нём выражение $\int F(\lambda, t) d\,\mathrm{Tr}(E_\lambda)$, стоящее в правой части, представляет собой преобразование Лапласа – Стильтьеса считающей функции, в качестве тауберовой теоремы для оценки асимптотики применяется теорема Карамaты. Карлеман заметил, что асимптотика вейлевского типа получается при помощи этого метода из асимптотического разложения следа теплового оператора $\mathrm{Tr}(\exp(-t\Delta)) \sim (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (a_j t^j)$ при $t \to +0$, где a_0 – риманов объём многообразия, либо же из аналогичной асимптотики следа резольвенты (если взять $F(A, t) = (t \cdot \mathrm{Id} - A)^{-1}$). Существование такой асимптотики было показано в 1949 году С. Минакшисундарамом и А. Плейелем в [54].

При $F(A, t) = A^t$ мы получаем метод ζ-функции; в нём применяется теорема Икехары, но она даёт столько же информации, сколько и теорема Карамaты, использованная в работах Карлемана, т. е. для улучшения асимптотики остаточного члена требуются более сильные тауберовы теоремы. Развитие метода Карлемана в сторону усиления тауберовых теорем в дальнейшем проводилось, например, в [61, 62].

При $F(A, t) = \exp(\mathrm{i}t\sqrt{A})$ получается метод волнового оператора. Именно при помощи этого метода Б. М. Левитан [49] и В. Г. Авакумович [13] улучшили асимптотику остаточного члена до $O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$ для компактных многообразий. Этот выбор F, в отличие от других упоминавшихся здесь, значительно упрощает "тауберову" часть метода, но усложняет "дифференциальную". Метод волнового оператора в дальнейшем совершенствовался Л. Хёрмандером (см. [41, 42], где интегральное ядро волнового оператора $\exp(\mathrm{i}t\sqrt{A})$ записывается в виде осциллирующего интеграла, в т. ч. когда A – псевдодифференциальный оператор); затем в 1975 году появился результат Х. Дёйстермаата и В. Гийемина [30] об асимптотике остаточного члена в виде $o(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$ в предположении, что периодические геодезические образуют множество меры нуль. Аналогичное предположение, но не о самих геодезических, а об образуемых ими бильярдах, использовал В. Я. Иврий; его работа 1980 года [44] содержит доказательство гипотезы Вейля в этом предположении.

Вместе с тем вопрос о форме барабана в общей постановке получил отрицательное решение. Первым примером пары изоспектральных, но не изометричных, римановых многообразий был пример Дж. Милнора [53] в размерности 16, основанный на факторизации $\mathbb{R}^{16}$ по двум решёткам. Двумерный пример (даже однопараметрическое семейство примеров) был построен в 1992 году К. Гордон, Д. Уэббом и С. Уолпертом [36,38] в виде невыпуклых многоугольников. В классе выпуклых многоугольников вопрос о конгруэнтности изоспектральных областей открыт, но в размерности 4 выпуклость уже не является достаточным для восстановления формы области ограничением: модифицировав пример, построенный Х. Уракавой в [64], Гордон и Уэбб нашли в [37] два усечённых выпуклых конуса в $\mathbb{R}^4$, которые изоспектральны, но не изометричны. Двумерные контрпримеры с гладкой границей пока неизвестны, но если дополнительно наложить условия аналитичности границы и $\mathbb{Z}_2$-симметричности области, то форма двумерной области восстанавливается однозначно, как показал С. Зельдич в [70]. В классе треугольников восстановимость формы области (здесь – длин сторон и углов) показана в [23]. Заметим ещё, что наличие или отсутствие у области углов – существенный для асимптотики собственных значений лапласиана фактор, так как кривизна края возникает во всех слагаемых асимптотического разложения ядра теплопроводности (см., например, [66]).

В двумерном случае по спектру лапласиана однозначно восстанавливается эйлерова характеристика, что показано в [52], однако в бо́льших размерностях это рассуждение не проходит; С. А. Молчанов в [55] заметил, что коэффициенты в разложении Минакшисундарама – Плейеля уже для трёхмерного риманова многообразия не имеют чисто топологическую природу, т. е. не определяются лишь эйлеровой характеристикой края многообразия.

Также для области в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей можно определить по спектру лапласиана, является ли она шаром; доказательство этого утверждения, основанное на результатах [31, 40], можно найти в [11]; там же отмечается, что это доказательство задействует меньше допущений (и, следовательно, более обобщаемо), нежели другое доказательство этого же факта, приведённое в статье Каца [46].

Область исследований, возникшая из вопроса о форме барабана, получила название "спектральная геометрия". Отметим, что для собственных значений лапласианов имеются не только асимптотические оценки, но и неравенства, в которых фигурируют такие величины, как диаметр многообразия, его кривизна Риччи и т. д.; см. например, результаты статьи [50] П. Ли и Ш.-Т. Яу 1980 года, а также их развитие у Г. Ю. Кокарева и др. [48].

В то же время в аналогичной проблеме для субримановых многообразий имеется гораздо больше трудностей. Для двумерных римановых многообразий известно (см., например, [58]), что диагональная асимптотика ядра теплопроводности при $t \to +0$ (из которой интегрированием получается асимптотика следа теплового оператора) имеет вид $\mathrm{HK}(t, x, x) = \frac{1}{4\pi t} \cdot (1 + \frac{K(x)}{6} t + O(t^2))$, где $K(x)$ – гауссова кривизна в точке x, т. е. связь между геометрией и анализом на многообразии появляется уже до применения тауберовых теорем; возникает естественное предположение, что и для субримановых многообразий в этой асимптотике будет присутствовать некоторый аналог кривизны, но это понятие не так просто обобщить. Кроме того, выяснилось, что вместо обычной (топологической) размерности в качестве показателя при t в главном члене асимптотики фигурирует хаусдорфова размерность, которая больше топологической (за исключением римановых многообразий). Другое затруднение связано с тем, что классический метод Карлемана (в “дифференциальной” своей части) существенно задействовал эллиптичность риманова лапласиана; субриманов же его аналог не является эллиптическим. Также при исследовании недиагональной асимптотики субриманова ядра теплового оператора возникают особенности, связанные со множеством раздела и с анормальными геодезическими – в этих направлениях асимптотика может отличаться от асимптотики по направлениям общего положения; см. [18], где рассмотрен пример в размерности 5 – двойная группа Гейзенберга.

В статьях [16, 17] доказывается существование асимптотик (как диагональной, так и недиагональной вдали от множества раздела) для субримановых ядер теплопроводности, но коэффициенты этих асимптотик не были представлены в явном и “геометричном” виде; применённые там методы в дальнейшем были распространены также и на множество раздела в [43]. В целом содержание данной диссертации заключается в преодолении этой неконструктивности, т. е. в разработке методов, расширяющих и совершенствующих “дифференциальную” часть метода Карлемана, обобщённого на субримановы многообразия. Знание какой-либо формулы (пусть даже не в элементарных функциях) для фундаментального решения, обычно получаемой при помощи понижения порядка уравнения теплопроводности (или, точнее, его преобразования Фурье, которое обычно выглядит намного проще исходного уравнения), существенно помогло бы в деле поиска нужных асимптотик, но такую формулу далеко не всегда удаётся получить. В частности, для нильпотентной группы Ли в $\mathbb{R}^n$ с двумерным левоинвариантным распределением $\operatorname{span}(\{X_1, X_2\})$, где $X_1 = \partial_1$, $X_2 = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{{x_1}^k}{k!}\partial_{k+2}$, и соответствующей субримановой метрикой и сублапласианом $\Delta = {X_1}^2 + {X_2}^2$ (эта группа называется *группой Гурса*) мы в настоящей работе показываем, что уравнение $\partial_t p(t,x) = \Delta p(t,x)$, называемое по аналогии с римановыми многообразиями *уравнением теплопроводности* или *уравнением диффузии*, не допускает понижения порядка, как только $n \geq 4$, что допускает две различные интерпретации. С одной стороны, причина неинтегрируемости данного уравнения может быть сочтена чисто алгебраической, поскольку сама эта теорема была получена при помощи метода продолжений [5], в результате применения которого возникает ограничение на степень некоторого полинома; с другой стороны, этому явлению можно, по всей видимости, придать геометрический смысл. Дело в том, что группа Гурса при $n = 4$ есть не что иное, как группа Энгеля, в которой, как известно, существуют анормальные геодезические; есть они и в группах бо́льших размерностей. Из-за этих геодезических возникают следующие особенности: 1) сублапласиан, хоть и остаётся гипоэллиптическим оператором, теряет, однако, аналитическую гипоэллиптичность по их направлениям, 2) сферы в метрике Карно – Каратеодори (в окрестности концов анормальных геодезических) не задаются неравенствами с аналитическими функциями. В группе Гейзенберга, которая получается при $n = 3$, вышеперечисленных трудностей не наблюдается. Интуитивно кажется понятным, что если бы порядок уравнения теплопроводности понижался, то оно бы решалось в интегралах от "достаточно простых" элементарных функций, что не согласуется с отсутствием аналитической гипоэллиптичности сублапласиана; здесь же неинтегрируемость уравнения теплопроводности доказана вполне строгими методами. В случае более общих, чем группы Гурса, субримановых многообразий эквивалентность наличия анормальных геодезических и отсутствия аналитической гипоэллиптичности сублапласиана – нерешённая гипотеза Ф. Трева [63].

В свете всего вышесказанного для работы с ядрами теплопроводности даже в группах Гурса, не говоря уже о произвольных субримановых многообразиях, требуются принципиально новые идеи. Одной из таких идей является метод возмущений, успешно использованный Д. Барилари [14] для трёхмерных контактных многообразий: при помощи этого метода ему удалось получить явный вид коэффициента при $t^{1-\frac{Q}{2}}$ в диагональной асимптотике субриманова ядра теплопроводности при $t \to +0$, где Q – хаусдорфова размерность многообразия (в рассмотренном случае она равна 4); этот коэффициент оказался равен (с точностью до постоянного множителя) инварианту κ, определённому А. А. Аграчёвым из других соображений [8] и играющему роль кривизны. В дальнейшем И. Колен де Вердье, Л. Иллерэ и Э. Треля показали [25], каким образом метод возмущений может быть совмещён с тауберовыми теоремами для перевода диагональной асимптотики ядра теплопроводности в спектральную асимптотику сублапласиана, т. е. они пошли по пути обобщения метода Карлемана, что гораздо проще, чем получение оценок на конкретные собственные значения (например, таких, как в работах Кокарева). Однако применимость метода возмущений существенно зависит от возможности вычислить ядро теплопроводности в нильпотентной аппроксимации данного многообразия (а также от некоторых других технических деталей, таких, как существование нормальных форм для горизонтальных векторных полей); поскольку трёхмерные контактные многообразия имеют своей нильпотентной аппроксимацией группу Гейзенберга, где ядро теплопроводности известно [28], для них такой проблемы не возникает. В настоящей работе предложена идея задействовать в методе возмущений ту формулу для ядра теплопроводности в нильпотентной группе Ли, являющейся аппроксимацией исходного многообразия, которая получается из обобщённого преобразования Фурье на этой группе; конкретное применение этой идеи мы показываем на примере групп Гурса. Чтобы пользоваться обобщённым преобразованием Фурье, необходимо знать структуру неприводимых унитарных представлений данной группы, которую можно найти при помощи метода орбит А. А. Кириллова [3, 4]. В результате обобщённого преобразования Фурье исходное ядро теплопроводности сводится к более простому *приведённому ядру*, которое, как мы показываем в настоящей работе, участвует вместе со своими производными до второго порядка включительно в формуле для коэффициента при $t^{1-\frac{Q}{2}}$ искомой диагональной асимптотики. Обобщённое преобразование Фурье для нахождения асимптотики ядра теплового оператора использовали также М. Гордина и М. Асаад [12], но там от точных формул к асимптотическим авторы перешли слишком преждевременно, так что в методе возмущений их результат неприменим (в нашей работе приведённое ядро мы вынуждены дифференцировать и интегрировать, поэтому важно сохранить до этого шага рассуждений точную формулу).

Приведённые ядра, соответствующие группам Гурса с $n \geq 4$, не выражаются в элементарных функциях, но могут быть аппроксимированы при помощи формулы Троттера – Като [60]; кроме того, в настоящей работе мы показываем, основываясь на работе У. Боскаина, Ж.-П. Готье и Ф. Росси [19], связь ядра теплопроводности для группы Энгеля, которая есть группа Гурса с $n = 4$, с некоторыми специальными функциями, называемыми *функциями Хойна* (об этих функциях см., например, [24]). Другой подход к вычислению ядра теплопроводности для группы Энгеля, основанный на гамильтоновой механике, реализован К. Фурутани в [35], но там не вычислены явно некоторые параметры (начальное значение ковектора в гамильтоновой системе в зависимости от конечной точки на геодезической, а также решение транспортного уравнения); для нахождения геодезических задействованы эллиптические функции. Более подробное изложение этого метода (а также некоторых других методов вычисления ядер теплопроводности) можно найти, например, в [20].

Цель диссертационной работы – найти зависимость коэффициента при $t^{1-\frac{Q}{2}}$ диагональной асимптотики ядра теплопроводности в произвольном эквирегулярном субримановом многообразии от локальных геометрических характеристик этого многообразия и алгебраических свойств его нильпотентной аппроксимации.

Основные результаты работы:

1. Доказано, что уравнение теплопроводности в n-мерной группе Гурса не имеет нетривиальных симметрий (и, следовательно, не допускает понижения порядка) при $n \geq 4$. Данный результат, хотя и носит отрицательный характер, позволяет, тем не менее, утверждать, что в общем случае к субримановым уравнениям диффузии нужны другие подходы.

2. Найдено (не слишком ограничительное) достаточное условие, используемое вместо существования нормальных форм горизонтальных векторных по-

лей в методе возмущений, которое даёт возможность записать диагональную асимптотику ядра теплопроводности в виде $t^{-\frac{Q}{2}}(a_0 + a_1 t + O(t^2))$ при $t \to +0$, и сам этот метод (в комбинации с обобщённым преобразованием Фурье) применён при данном условии, в результате чего получена полиномиальная по параметрам возмущения формула для a_1. Рассмотрен пример, когда нильпотентная аппроксимация данного многообразия есть группа Гурса.

3. В терминах осциллирующих интегралов от триконфлюэнтной функции Хойна выражено приведённое ядро в группе Энгеля (четырёхмерной группе Гурса).

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, некоторые из них являются обобщениями ранее известных теорем. Также в работе содержится альтернативный подход к доказательству уже известных результатов [16, 17].

Методы исследования. В настоящей работе использованы различные методы вещественного, комплексного и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории групп Ли и их представлений, включая метод возмущений, формулу Троттера – Като, метод продолжений, обобщённое преобразование Фурье и метод орбит, а также специальные функции.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в данной работе результаты носят теоретический характер и могут быть применены в теории дифференциальных уравнений с частными производными, а также в субримановой геометрии.

Апробация работы. Основные результаты данной работы прошли апробацию на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Youth Workshop on Analysis (Новосибирск, Региональный математический центр НГУ, июнь 2018 г.)

2. Семинар по геометрическому анализу под руководством доктора физ.-мат. наук, профессора С. К. Водопьянова (Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2019 г.)

3. Международная конференция по геометрическому анализу в честь 90-летия академика Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, сентябрь 2019 г.)

Публикации и личный вклад. Основные результаты данной диссертации опубликованы в трёх статьях [A1–A3] в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций и индексируемых в наукометрических базах данных SCOPUS и Web of Science.

Результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. К. Водопьянову за оказанную помощь в ознакомлении с современным состоянием исследуемой области математики.

Положения, выносимые на защиту:

1. Теорема об отсутствии нетривиальных симметрий у уравнения теплопроводности в n-мерной группе Гурса при $n \geq 4$.

2. Конструктивный способ нахождения диагональной асимптотики ядра теплопроводности в виде $t^{-\frac{Q}{2}}(a_0 + a_1 t + O(t^2))$ при $t \to +0$ в предположении зануления однородных частей нулевого порядка у базисных горизонтальных векторных полей. Рассмотрение примера, в котором нильпотентная аппроксимация данного многообразия есть группа Гурса.

3. Выражение приведённого ядра в группе Энгеля в терминах осциллирующих интегралов от триконфлюэнтной функции Хойна.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения, а также списка литературы. Список литературы, за исключением работ автора по теме диссертации, содержит 70 наименований, приведённых в алфавитном порядке, а список работ автора по теме диссертации 3 наименования. Общий объём диссертации: 84 страницы.

В главах все утверждения (определения, теоремы, следствия, предложения) пронумерованы тремя числами: номером главы, номером параграфа в главе и номером утверждения в параграфе. Нумерация формул сквозная.

В **первой главе** в **параграфе 1.1** приведены основные определения, относящиеся к геометрии и анализу на субримановых многообразиях и к теории групп Ли; в **параграфе 1.2** при помощи метода продолжений для групп Гурса, являющихся в настоящей работе основным модельным примером, получен результат, опубликованный в [A2]:

Предложение 1.2.1. *Если Q – многочлен по переменной x степени, большей 2, то уравнение $\partial_t p(t,x) = {\partial_x}^2 p(t,x) - Q(x)p(t,x)$ не допускает однопараметрических групп симметрий, отличных от (допустимых любым линейным уравнением) групп линейных преобразований решений.*

Поскольку уравнение теплопроводности в n-мерной группе Гурса сводится, как показано в [A2], к уравнению вида $\partial_t p(t,x) = {\partial_x}^2 p(t,x) - Q(x)p(t,x)$ с многочленом Q степени $2n-4$, мы получаем, что при $n \geq 4$ понизить порядок уравнения теплопроводности в n-мерной группе Гурса невозможно. Данный результат носит в основном отрицательный характер – его важность состоит в том, что "слишком простых" формул для субримановых ядер теплопроводности в общем случае не бывает, что приводит нас к необходимости использовать какие-либо аппроксимативные техники при проведении рассуждений по методу Карлемана. Также, возможно, этот факт указывает на правдоподобность гипотезы Трева, на необходимость использования неаналитических функций при описании субримановых шаров при наличии анормальных геодезических.

Вторая глава посвящена описанию более сложных техник для исследования субриманова уравнения теплопроводности, опирающихся, в частности, на теорию представлений. В **параграфе 2.1** даны общие сведения об обобщённом (или некоммутативном) преобразовании Фурье. В **параграфе 2.2** изложен метод орбит для нильпотентных групп Ли, который позволяет классифицировать неприводимые унитарные представления заданной группы Ли G, имея информацию о структуре орбит в коприсоединённом представлении Ad^* этой группы. Метод орбит является ключевым компонентом обобщённого преобразования Фурье в конкретных вычислениях; для того, чтобы сделать его полностью конструктивным, один из его шагов (нахождение по элементу пространства $\mathfrak{g}^*$, сопряжённого к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, некоторой специальной подалгебры в $\mathfrak{g}$) мы проводим при помощи построения, данного М. Вернь [65]; соответствующая подалгебра (называемая *подалгеброй Вернь*), построенная по ковектору $\xi \in \mathfrak{g}^*$, обозначается $\mathfrak{vs}_\xi$, для группы Ли $\exp(\mathfrak{vs}_\xi)$ принято обозначение VS_ξ. Выведена общая формула для ядра теплопроводности, сводящая его к некоторому более простому (приведённому) ядру, и – как следствие – частный случай этой формулы для групп Гурса:

Теорема 2.2.3. *Пусть G – связная односвязная нильпотентная группа Ли с левоинвариантной субримановой метрикой и соответствующим сублапласианом Δ_H, в котором для определения дивергенции используется мера Хаара. Тогда ядро теплопроводности для Δ_H выражается в виде*

$$p(t,g) = \int_Q \int_{\mathbb{R}^{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\xi(\log(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g)))} \times \\ \times \mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}(t, \gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g))^{-1}\gamma_x g), x) |\operatorname{pf}(A(\xi))| dx d\xi,$$

где $\gamma_x = \exp(x_1 Z_{\frac{\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}+1}) \cdot \ldots \cdot \exp(x_{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}} Z_{\dim\mathfrak{g}})$, $(Z_k)_{1\le k\le\dim\mathfrak{g}}$ – мальцевский в слабом смысле базис $\mathfrak{g}$, проходящий для каждого $\xi \in Q$ через $\mathfrak{vs}_\xi$ (т. е. он, вообще говоря, зависит от ξ), $\mathrm{pr}_{VS_\xi}(h)$ для $h \in G$ определяется как такой $h' \in VS_\xi$, что при некотором $x \in \mathbb{R}^{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}}$ имеет место равенство $h = h'\gamma_x$ (и, соответственно, $\gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(h))^{-1}h) = x$ в этих обозначениях); при каждом $t > 0$ функция $\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}(t,\cdot,\cdot)$ есть интегральное ядро оператора $\exp(t\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi))$ (здесь $\widehat{\Delta_H} = \mathcal{F}\Delta_H\mathcal{F}^{-1}$, обобщённое преобразование Фурье обозначено $\mathcal{F}$), λ_ξ – класс эквивалентности неприводимых унитарных представлений G, соответствующий ξ, Q – линейное подмногообразие в $\mathfrak{g}^*$, выбранное так, что каждая Ad^*-орбита максимальной размерности пересекается в Q ровно в одной точке, $\mathfrak{g}_\xi = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g}, (\xi([X,Y]) = 0)\}$, $\operatorname{pf}(A(\xi))$ – пфаффиан кососимметрической матрицы $A(\xi)$, определяемой так: выберем в $\mathfrak{g}^{**}$ (отождествляя $\mathfrak{g}^{**}$ с $\mathfrak{g}$) базис $\{X_j : 1 \le j \le \dim Q\} \cup \{Y_j : 1 \le j \le$

$\dim\mathfrak{g}-\dim Q\}$, *в котором элементы, обозначенные буквой* Y *с индексами, постоянны на* Q, *а* $(X_j)_{1\le j\le\dim Q}$ *будем считать координатами на* Q; *для каждого* $\xi\in Q$ *положим* $A(\xi)_{j,k}=\xi([Y_j,Y_k])$.

Следствие 2.3.1. *Ядро теплопроводности в* n*-мерной группе Гурса, соответствующее сублапласиану* $\Delta={X_1}^2+{X_2}^2$, *где горизонтальное распределение есть* $\operatorname{span}(\{X_1,X_2\})$ *с* $X_1=\partial_1$ *и* $X_2=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{{x_1}^k}{k!}\partial_{k+2}$, *записывается в следующем виде:*

$$p\left(t,a\mathbf{e}_1+\sum_{j=2}^{n}b_{j-1}\mathbf{e}_j\right)=\int_{\mathbb{R}^{n-2}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(\beta_{n-1}P_n(a,\overrightarrow{b},x)+\sum_{j=1}^{n-3}(\beta_jP_{j+1}(a,\overrightarrow{b},x))\right)}\times$$

$$\times\,\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}}(t,x+a,x)|\beta_{n-1}|dxd(\beta_j)_{1\le j\le n-3}d\beta_{n-1},$$

где

$$P_j(a,\overrightarrow{b},x)=\sum_{k=1}^{j-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{a^lb_{k-l}}{(l+1)!}\right)\cdot\frac{x^{j-1-k}}{(j-1-k)!}\right),$$

оператор $\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}$ *действует на функцию* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *по правилу*

$$\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}(f)(x)=f''(x)-4\pi^2\left(\sum_{j=1}^{n-3}\left(\beta_j\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right)+\beta_{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)^2f(x).$$

В случае групп Гурса подалгебра Вернь для всех ковекторов одна и та же.

Данные результаты похожи на результаты работы [12], но являются их развитием в том смысле, что для приведённого ядра используется формула Троттера – Като как таковая, а не её следствия из работы [60], приводящие лишь к асимптотическим оценкам ядра теплового оператора *для группы*; переход от группы к произвольному субриманову многообразию за счёт лишь результатов [12] не представляется возможным.

В **параграфе 2.3** изложен метод возмущений; результат Д. Барилари о диагональной асимптотике субримановых ядер теплопроводности в трёхмерных контактных многообразиях обобщён с использованием формул, доказанных в параграфе 2.2:

Теорема 2.3.2. *Пусть M – эквирегулярное субриманово многообразие размерности n, нильпотентная аппроксимация которого есть группа Гурса. Пусть рассматриваемое субриманово многообразие имеет горизонтальное распределение* $\mathrm{span}\{X_1, X_2\}$*, полученное из распределения Гурса возмущением, записываемым в окрестности точки* $(0, ..., 0)$ *с точностью до однородных векторных полей с показателем однородности* 2 *и выше следующим образом: при всех $p \leq -2$ выполнено* $\mathrm{hg}_p(X_1) = \mathrm{hg}_p(X_2) = 0$*, и, кроме того,*

$$\mathrm{hg}_{-1}(X_1) = \widetilde{X}_1, \mathrm{hg}_0(X_1) = 0, \mathrm{hg}_1(X_1) = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{\alpha\in\Phi_r}(u_{\alpha,r}x^\alpha)\cdot\frac{\partial}{\partial x_r}\right),$$

$$\mathrm{hg}_{-1}(X_2) = \widetilde{X}_2, \mathrm{hg}_0(X_2) = 0, \mathrm{hg}_1(X_2) = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{\alpha\in\Phi_r}(v_{\alpha,r}x^\alpha)\cdot\frac{\partial}{\partial x_r}\right),$$

где Φ_r – множество всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, для которых выполнено

$$\alpha_1 + \sum_{j=2}^{n}((j-1)\alpha_j) = \begin{cases} 2, r = 1, \\ r, r > 1, \end{cases}$$

$\widetilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\widetilde{X}_2 = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{{x_1}^k}{k!}\frac{\partial}{\partial x_{k+2}}$*, переменной x_1 приписан показатель однородности* 1*, каждой переменной x_r при $r \geq 2$ приписан показатель однородности $r-1$, оператору дифференцирования по каждой переменной приписан её показатель однородности со знаком минус,* $\mathrm{hg}_p(X)$ *означает однородную часть векторного поля X с показателем p. Через $u_{\alpha,r}$ и $v_{\alpha,r}$ обозначены постоянные, называемые параметрами возмущения, для которых при $3 \leq j \leq n-1$ выполнено* $[X_2, X_j] \in \mathrm{span}(\{X_k : 1 \leq k \leq j\})$*, где $X_j = [X_1, X_{j-1}]$ при $3 \leq j \leq n$. Пусть Δ – построенный по распределению* $\mathrm{span}\{X_1, X_2\}$ *и форме объёма ${X^*}_1 \wedge ... \wedge {X^*}_n$ сублапласиан, где ${X_j}^*$ при $1 \leq j \leq n$ суть* 1*-формы, для которых ${X_j}^*(X_j) = 1$ и ${X_j}^*(X_k) = 0$ для $j \neq k$. Тогда для соответствующего* *ядра теплопроводности имеет место диагональная асимптотика*

$$\mathrm{HK}_{\Delta}(t,x,x) = t^{-\frac{n(n-1)+2}{4}}(a_0 + a_1 t + O(t^2))$$

при $t \to 0$*, в которой коэффициент* a_1 *есть полином от параметров возмущения; коэффициенты этого полинома выражаются через обобщённые интегралы Фурье от полиномов от приведённого ядра и его производных до второго порядка включительно.*

Наложенное здесь дополнительное условие о занулении у всех горизонтальных базисных векторных полей однородных частей нулевого порядка применяется вместо условия существования нормальной формы горизонтальных векторных полей, использованного в работе Д. Барилари, и, в действительности, позволяет доказать аналогичный результат в случае, если многообразие имеет своей нильпотентной аппроксимацией какую-либо другую нильпотентную группу Ли. Также в параграфе 2.3 рассматривается возможность дальнейшего выражения приведённого ядра, которое (вместе со своими производными до второго порядка включительно) участвует в формуле для коэффициента при $t^{1-\frac{Q}{2}}$ искомой диагональной асимптотики, при помощи формулы Троттера – Като:

Предложение 2.3.1. *Приведённое ядро в n-мерной группе Гурса можно выразить формулой*

$$\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\vec{\beta}}}(t,x_1,x_0) = \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\prod_{r=0}^{N-1}(L_{t,N}(x_{\frac{r+1}{N}},x_{\frac{r}{N}}))d(x_{\frac{r}{N}})_{1\le r\le N-1},$$

где $L_{t,N}(x,y) = (\frac{N}{4\pi t})^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{4\pi^2 t}{N}\left(\sum_{j=1}^{n-3}\left(\beta_j\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right)+\beta_{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)^2-\frac{(x-y)^2N}{4t}\right).$

Это и есть та ключевая формула (записанная здесь для групп Гурса), за счёт которой модернизируется результат [12], становясь применимым в методе возмущений, где приведённое ядро требуется дифференцировать и интегрировать. Результаты второй главы опубликованы в [А3].

Содержание **третьей главы**, состоящей из одного **параграфа 3.1**, составляет рассмотрение частного случая n-мерной группы Гурса – группы Энгеля – в контексте работы У. Боскаина, Ж.-П. Готье и Ф. Росси. Основываясь на полученной ими параметризации двойственного по Понтрягину пространства к группе Энгеля и на соответствующем уравнении для приведённого ядра, мы связываем это ядро с функциями Хойна (в их самом вырожденном – триконфлюэнтном – случае).

Определение 3.1.1. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Функция f комплексной переменной z, являющаяся решением обыкновенного дифференциального уравнения*

$$f''(z) - (3z^2 + \gamma)f'(z) - ((3-\beta)z - \alpha)f(z) = 0$$

с начальными условиями $f(0) = 1$ и $f'(0) = 0$, называется триконфлюэнтной функцией Хойна и обозначается $H_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Уравнение для приведённого ядра в группе Энгеля сводится преобразованием Фурье по t (двойственная к t переменная обозначена λ) к уравнению $({\partial_\theta}^2 - {(\theta^2 + \beta)}^2 - \mathrm{i}\lambda)f(\theta) = 0$, где $\beta \neq 0$, решение которого имеет следующий вид:

Теорема 3.1.1. *При заданных начальных значениях $f(0) = P, f'(0) = Q$ имеет место формула*

$$f(\theta) = \frac{P - Q\beta^{-1}}{2} \exp\left(-\beta\theta - \frac{\theta^3}{3}\right) H_{L\lambda,0,B\beta}\left(-\theta \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) +$$

$$+\frac{P + Q\beta^{-1}}{2} \exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right) H_{L\lambda,0,B\beta}\left(\theta \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right),$$

где $L = \mathrm{e}^{\frac{5\pi \mathrm{i}}{6}} \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$, $B = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}} \sqrt[3]{12}$.

Эта теорема опубликована в [A1]. Она является дальнейшим развитием идей [19], но также иллюстрирует уже упоминавшийся ранее факт об отсутствии слишком простых формул для приведённых ядер: интегралы от функции Хойна здесь требуют регуляризации (понимаются как осциллирующие).

1. Общие сведения о сублапласианах

1.1. Предварительные сведения

Прежде всего определим основной объект нашего исследования – *сублапласиан*. Сделаем это сначала в достаточно общем контексте, а затем приведём некоторые уточнения для групп Ли.

Определение 1.1.1. Пусть на гладком многообразии M задано гладкое распределение H. Последовательность распределений, задаваемая рекуррентно при помощи равенств $H_1 = H$ и $H_{j+1} = H_j + [H_j, H]$ для положительных целых j, называется *флагом Ли* распределения H. Иногда также доопределяют $H_0 = \{0\}$. *Вектором роста* для распределения H будем называть последовательность размерностей пространств из его флага Ли. Если вектор роста не зависит от точки многообразия, то распределение (и само многообразие) будем называть *эквирегулярным.*

Вообще под флагом понимается возрастающая по включению последовательность подпространств векторного пространства, но мы распространим термин "флаг" также и на возрастающие последовательности распределений.

Определение 1.1.2. Пусть M – гладкое многообразие, H – распределение на M, H_j – j-е пространство его флага Ли. *Степенью* $\deg(X)$ векторного поля X на M (более точно, степенью X *относительно распределения* H) будем называть минимальный номер j, для которого $X \in H_j$.

Впоследствии мы будем иметь дело именно с тем случаем, когда рассматриваемое субриманово многообразие M эквирегулярно. Так как в нашем контексте мы предполагаем, что флаг Ли стабилизируется к касательному расслоению TM (такое H называют *вполне неголономным*), то вектор роста будем записывать в сокращённом виде, обрывая запись на том j, где $\dim H_j = \dim M$;

например, для четырёхмерной группы Энгеля вектор роста будем записывать как $(2,3,4)$. Кроме того, нам ещё понадобится различать обычную (топологическую) размерность M и его хаусдорфову размерность относительно метрики Карно – Каратеодори; по этой причине для первой мы будем употреблять запись $\dim M$, а для второй – запись $\operatorname{hdim} M$. За исключением случая, когда M – риманово многообразие, $\operatorname{hdim} M > \dim M$; этот факт, а также определение метрики Карно – Каратеодори и формулу, выражающую $\operatorname{hdim} M$ в терминах компонент вектора роста, можно найти, например, в [9]:

$$\operatorname{hdim} M = \sum_{j=1}^{K} j(\dim H_j - \dim H_{j-1}), \tag{1}$$

где K – минимальное натуральное число, для которого $H_K = TM$; здесь принято $H_0 = \{0\}$.

Определение 1.1.3. Пусть M – гладкое эквирегулярное субриманово многообразие, горизонтальное распределение которого мы будем обозначать через H, а метрику на каждом пространстве $H(q)$ для $q \in M$ – через $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$. Пусть на M также задана мера Поппа (своей формой объёма μ; определение формы μ и меры Поппа см. в [10]). *Горизонтальный градиент* grad_H определим как оператор, который сопоставляет каждой гладкой функции ϕ векторное поле на M таким образом, что для всех $q \in M$ и $v \in H(q)$ выполнено $\langle (\operatorname{grad}_H \phi)(q), v \rangle_q = d\phi(q,v)$. *Дивергенцию* div_μ определим как оператор, который каждому векторному полю X на M сопоставляет гладкую функцию в соответствии с формулой $\operatorname{div}_\mu(X) \cdot \mu = d(i_X(\mu))$, где i_X – оператор внутреннего произведения дифференциальных форм, действующий подстановкой X в первый аргумент формы, т. е. значение формы $i_X(\mu)$ на произвольном наборе векторных полей $Y_1, ..., Y_{\dim M - 1}$ равно $\mu(X, Y_1, ..., Y_{\dim M-1})$. Наконец, определим оператор $\Delta_H = \operatorname{div}_\mu \operatorname{grad}_H$; он называется *сублапласианом* на M относительно H и μ.

Уравнение $\partial_t f(t,x) = \Delta_H f(t,x)$ будем называть *уравнением теплопро-*

водности, или *уравнением диффузии*. Его решение при обобщённом начальном условии $f(0,x) = \delta_y(x)$ будем называть *ядром теплопроводности* и обозначать $\mathrm{HK}(t,x,y)$; здесь δ_y – обобщённая функция Дирака, сосредоточенная в точке y. Также нам понадобится следующее обозначение:

Определение 1.1.4. Пусть X – дифференциальный оператор на многообразии M. Оператор, сопоставляющий каждой обобщённой функции h, заданной на M, решение задачи Коши $\begin{cases} \partial_t f(t,x) = Xf(t,x), \\ f(0,x) = h(x) \end{cases}$ при заданном $t \in \mathbb{R}$, будем называть *разрешающим оператором* для X и обозначать $\exp(tX)$ или e^{tX}.

В этих терминах $\mathrm{HK}(t,x,y) = (\exp(t\Delta_H)\delta_y)(x)$. Название "ядро теплопроводности" происходит из того, что при каждом $t > 0$ функция $\mathrm{HK}(t,\cdot,\cdot)$ является интегральным ядром оператора $\exp(t\Delta_H)$.

Если наше многообразие имеет структуру группы Ли, причём горизонтальное распределение и метрика левоинвариантны, то мера μ будет левой мерой Хаара, и уравнение теплопроводности будет, таким образом, левоинвариантно. По этой причине для групп Ли δ-функцию, заданную в начальном условии, по умолчанию будем считать сосредоточенной в нейтральном элементе e; соответственно, функцию $\mathrm{HK}(t,x,e)$ будем обозначать через $p(t,x)$ или, понимая t как параметр, через $p_t(x)$. Поскольку при таких обозначениях верно $\mathrm{HK}(t,x,y) = p(t,y^{-1}x)$, то мы будем при наличии групповой структуры называть "ядром теплопроводности" не только HK, но и саму функцию p, из которой HK однозначно восстанавливается.

Если рассматриваемая группа Ли G к тому же унимодулярна, а распределение H задано ортонормированным базисом $\{X_j : 1 \le j \le m\}$, то $\Delta_H = \sum_{j=1}^m ({X_j}^2)$; доказательство этого можно найти в [10]. Напомним определение унимодулярной группы Ли:

Определение 1.1.5. *Левой мерой Хаара* (соответственно *правой мерой Хаара*) на группе Ли G называется такая счётно-аддитивная, не равная тождественно нулю, конечная на всех компактных подмножествах, инвариантная относительно левых (соответственно правых) сдвигов мера μ, что для всех борелевских $S \subseteq G$ выполнено $\mu(S) = \inf\{\mu(U) : U \text{ открыто}, S \subseteq U\}$ и для всех открытых $U \subseteq G$ выполнено $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ компактно}, K \subseteq U\}$. Группа Ли называется *унимодулярной*, если на ней существует мера μ (называемая *мерой Хаара*), которая является одновременно левой мерой Хаара и правой мерой Хаара.

Во второй главе нам также понадобятся такие понятия субримановой геометрии, как привилегированные координаты, анизотропное растяжение и нильпотентная аппроксимация.

Определение 1.1.6. Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $F = (H_j)_{j=1..K}$ – гладкий флаг в TM, $H_K = TM$, $d_j = \dim H_j - \dim H_{j-1}$ (здесь принято $H_0 = \{0\}$). Координаты $\overrightarrow{x} = (x_k)_{k=1..n}$ в окрестности точки $q \in M$ называются *адаптированными* к F, если $\overrightarrow{x}(q) = (0, ..., 0)$ и для всех j образ пространства $H_j(q)$ при отображении $d\overrightarrow{x}(q)$ равен $\bigoplus_{s=1}^{K} \begin{cases} \mathbb{R}^{d_s}, s \leq j, \\ \{0\}, s > j. \end{cases}$

Определение 1.1.7. Пусть $\overrightarrow{x} = (x_k)_{k=1..n}$ – координаты на многообразии M, адаптированные к флагу $F = (H_j)_{j=1..K}$. Определим *анизотропное ε-растяжение* относительно точки q, где $\varepsilon \geq 0$, по формуле $\delta_{\varepsilon,q}(q') = \overrightarrow{x}^{-1}((\varepsilon^{\min\{j:\dim H_j \geq k\}} x_k(q'))_{k=1..n})$, где q' – произвольная точка из области определения $\overrightarrow{x}$.

Если M – эквирегулярное субриманово многообразие, в качестве F естественным образом берётся флаг Ли горизонтального распределения $H_1 = H$; через K мы будем обозначать *наименьшее* j, удовлетворяющее условию $H_j = TM$.

Определение 1.1.8. Для дифференциальных операторов на M, представимых в данных адаптированных координатах мономами, определим *показатель* *однородности* ν следующим образом: если α, β – мультииндексы, то

$$\nu(x^\alpha \partial^\beta) = \sum_{r=1}^{n} ((\alpha_r - \beta_r) \min\{j : \dim H_j \geq r\}). \tag{2}$$

Дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами называется *однородным* с показателем p, если все его мономы имеют значение ν, равное p. Если $X = \sum_{p=-K}^{\infty}(W_p)$ – тейлоровское разложение представленного в адаптированных координатах векторного поля X вблизи точки $(0, ..., 0)$, где для всех p векторное поле W_p однородно с показателем p, то W_p будем называть *однородной частью* X с показателем p и обозначать $\mathrm{hg}_p(X)$.

Определение 1.1.9. Адаптированная к флагу Ли эквирегулярного субриманова многообразия M система координат $\overrightarrow{x}$ называется *привилегированной*, если образ горизонтального распределения под действием дифференциала координатного отображения $d\overrightarrow{x}$ состоит лишь из однородных векторных полей с показателем однородности не выше -1.

В привилегированной системе координат можно определить *нильпотентную аппроксимацию* M относительно q, описание которой даётся в следующей теореме:

Теорема 1.1.1. [2, 14, 39, 47] *Пусть*

$$[X_j, X_k](q') = \sum_{l : \deg X_l \leq \deg X_j + \deg X_k} c_{j,k,l}(q') X_l(q') \tag{3}$$

– коммутационные соотношения для гладкого базиса эквирегулярного субриманова многообразия M. Тогда для каждой точки $q \in M$ коэффициенты

$$\widetilde{c}_{j,k,l} = \begin{cases} c_{j,k,l}(q), \deg X_l = \deg X_j + \deg X_k, \\ 0, \deg X_l \neq \deg X_j + \deg X_k \end{cases} \tag{4}$$

являются структурными константами некоторой нильпотентной алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{m}}_q$, и соответствующая ей группа Ли $\widetilde{M}_q$ с естественной метрикой

Карно – Каратеодори есть $\lim_{t\to+\infty}(tM)$, *где предел понимается в смысле Громова – Хаусдорфа. При этом векторные поля на* $\widetilde{M_q}$, *заданные формулой* $\widetilde{X}_j = \mathrm{hg}_{-\deg X_j} d\overrightarrow{x}(X_j)$ (*базис нильпотентной аппроксимации*), *являются левоинвариантными.*

Здесь и далее под deg понимается степень поля относительно исходного горизонтального распределения на M. В дальнейшем размерность горизонтального распределения будем обозначать m, номера векторных полей X_j, составляющих его базис, будут $1 \leq j \leq m$.

Через ${X_j}^*$, $1 \leq j \leq n$, обозначим 1-формы, для которых ${X_j}^*(X_j) = 1$ и ${X_j}^*(X_k) = 0$ для $j \neq k$. Базис $\{\widetilde{X}_j : 1 \leq j \leq n\}$ будем считать таким, что формой объёма для меры Поппа является форма ${X_1}^* \wedge ... \wedge {X_n}^*$; из [10] известно, что это не ограничивает общности.

Нильпотентная аппроксимация сама является субримановым многообразием с горизонтальным распределением $\operatorname{span}\{\widetilde{X}_j : 1 \leq j \leq m\}$. Если снабдить её мерой Хаара и построить сублапласиан, который мы обозначим $\widetilde{\Delta}$, то он выражается в виде $\widetilde{\Delta} = \sum_{j=1}^{m} (\widetilde{X}_j^2)$.

1.2. Метод продолжений для групп Гурса

Определение 1.2.1. *Группой Гурса* размерности n будем называть нильпотентную группу Ли в $\mathbb{R}^n$ с двумерным левоинвариантным распределением $H = H_1$, называемым распределением Гурса, которое имеет вектор роста $(2, 3...n-1, n)$.

Операцию умножения в группе Гурса можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \star \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k = (x_1 + y_1)\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n} \left(x_j + \sum_{k=2}^{j} \left(\frac{{x_1}^{j-k}}{(j-k)!} y_k \right) \right) \mathbf{e}_j, \qquad (5)$$

причём $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{n} 0\mathbf{e}_j$ – нейтральный элемент.

Мы будем пользоваться следующим координатным представлением для распределения H_1:

$$H_1 = \operatorname{span}(\{X_1, X_2\}), X_1 = \partial_1, X_2 = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{{x_1}^k}{k!} \partial_{k+2}. \qquad (6)$$

Векторные поля X_1 и X_2 инвариантны относительно левых сдвигов по операции $\star$. Вводя на группе Гурса n-мерную меру Лебега, которая также является мерой Хаара для этой группы, определим сублапласиан: $\Delta = {X_1}^2 + {X_2}^2$ (вследствие унимодулярности группы Гурса индекс, обозначающий форму объёма, мы писать не будем).

В этом параграфе мы исследуем уравнение теплопроводности $\partial_t p(t, x) = \Delta p(t, x)$ при помощи метода продолжений. Он описан в очень общем виде в [5]; там приведены все основные определения, необходимые для его применения, и некоторые полезные формулы, которые будут использоваться в нижеследующих выкладках. Как мы далее выясним, справедлива теорема:

Теорема 1.2.1. *В группах Гурса при $n \geq 4$ понизить порядок уравнения теплопроводности невозможно; иначе говоря, оно не допускает однопараметрических групп симметрий, отличных от (допустимых любым линейным урав-*

нением) групп линейных преобразований решений.

Однако при $n = 3$ (т. е. в случае группы Гейзенберга) это сделать можно. Более того, для фундаментального решения уравнения $\partial_t p = \Delta p$ в группе Гейзенберга есть явная формула (см., например, [28], где она получена как раз при помощи понижения порядка).

Отметим заранее, что в ходе доказательства нам даже не потребуется начальное условие – поиск нетривиальных симметрий уравнения уже приводит к переопределённой системе.

Сначала сделаем несколько предварительных упрощений.

Применяя преобразование Фурье к уравнению $\partial_t p = \Delta p$ по переменным x_k при $k \geq 2$ (двойственная к x_k переменная обозначена y_k), получим уравнение на $\widehat{p}$:

$$\partial_t \widehat{p} = {\partial_1}^2 \widehat{p} - \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{{x_1}^k}{k!} y_{k+2} \right)^2 \widehat{p}. \tag{7}$$

Это уравнение уже значительно проще исходного, так как дифференцирование в нём происходит лишь по t и x_1; переменные $(y_k)_{2 \leq k \leq n}$ можно считать параметрами. Многочлен в правой части имеет степень $2n - 4$.

Чтобы упростить обозначения, будем в этом параграфе писать вместо x_1 просто x, вместо ∂_1 будем писать ∂_x, неизвестную функцию будем обозначать через p вместо $\widehat{p}$ (рассматривая преобразованное уравнение как бы отдельно от исходного уравнения теплопроводности), а $\left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{{x_1}^k}{k!} y_{k+2} \right)^2$ – через $Q(x)$; уравнение перепишется в виде $\partial_t p = {\partial_x}^2 p - Qp$.

Как мы выясним далее, то, что Q – многочлен специального вида, на окончательный результат никак не повлияет; важно лишь, что это многочлен по переменной x, не зависящий ни от t, ни от p, и что его степень равна $2n - 4$.

Ключевая идея метода продолжений состоит в том, что неизвестная функция и её производные всех необходимых порядков объявляются (вместе с исходными независимыми переменными) переменными большего, так называемого *продолженного*, пространства, которое ещё называют *пространством* *струй.*

Определение 1.2.2. Под *струёй* порядка k в некоторой точке понимается класс эквивалентности функций, имеющих в этой точке одно и то же разложение Тейлора до степени k включительно; *пространство струй* J^kM получается дизъюнктным объединением множеств струй во всех точках многообразия-базы M независимых переменных.

Сопоставляя искомой функции p поверхность P, состоящую из струй этой функции во всех точках, мы можем преобразовать дифференциальное уравнение в алгебраическое уравнение в пространстве струй, которому должны удовлетворять все точки P. Если исходное уравнение допускало группу симметрий, порождаемую некоторым векторным полем S, то уравнение в продолженном пространстве будет допускать группу симметрий, инфинитезимальным генератором которой является его *продолжение* на пространство струй. Симметрии ищутся исходя из того, что действие продолженного поля на алгебраическое уравнение, полученное из исходного дифференциального, должно давать тождество на решениях дифференциального уравнения. Теперь, если было известно какое-либо решение исходного дифференциального уравнения, его можно перенести вдоль S – это и есть понижение порядка.

Применительно к рассматриваемой задаче это означает следующее. В нашем случае $M = \mathbb{R}^2$ (независимых переменных две); в качестве продолженного пространства мы возьмём $J^2\mathbb{R}^2$, так как исходное уравнение имеет второй порядок. Пусть

$$S = \tau(t,x,p)\partial_t + \xi(t,x,p)\partial_x + \psi(t,x,p)\partial_p \tag{8}$$

– инфинитезимальный генератор какой-либо однопараметрической группы симметрий уравнения $\partial_t p = {\partial_x}^2 p - Qp$. Его продолжение в $J^2\mathbb{R}^2$ запишется в виде

$$\begin{aligned}\underset{2}{S} = \tau(t,x,p)\partial_t + \xi(t,x,p)\partial_x + \psi(t,x,p)\partial_p + \\ + \psi_{(1,0)}(t,x,p,p_t)\partial_{p_t} + \psi_{(0,1)}(t,x,p,p_x)\partial_{p_x} + \\ + \psi_{(2,0)}(t,x,p,p_t,p_{t,t})\partial_{p_{t,t}} + \\ + \psi_{(1,1)}(t,x,p,p_t,p_x,p_{t,x})\partial_{p_{t,x}} + \\ + \psi_{(0,2)}(t,x,p,p_x,p_{x,x})\partial_{p_{x,x}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где буквой p с индексами мы обозначаем переменные производных неизвестной функции по аргументам, соответствующим этим индексам, а коэффициенты $\psi_{(\alpha,\beta)}$, стоящие при базисных операторах дифференцирования по $p_{\underbrace{t\ldots t}_{\alpha\text{ штук}},\underbrace{x\ldots x}_{\beta\text{ штук}}}$ (ради простоты обозначений эту переменную будем сокращённо писать $p_{t^\alpha x^\beta}$), вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\begin{cases} \psi_{(0,0)} = \psi, \\ \psi_{(\alpha+1,\beta)} = D_t\psi_{(\alpha,\beta)} - (p_{t^{\alpha+1}x^\beta}D_t\tau + p_{t^\alpha x^{\beta+1}}D_t\xi), \\ \psi_{(\alpha,\beta+1)} = D_x\psi_{(\alpha,\beta)} - (p_{t^{\alpha+1}x^\beta}D_x\tau + p_{t^\alpha x^{\beta+1}}D_x\xi), \end{cases} \quad (10)$$

в которых через D_z (здесь z – одна из независимых переменных, т. е. t или x) обозначен формальный оператор “полного” дифференцирования по переменной z:

$$D_z = \partial_z + \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty} p_{t^\alpha x^\beta, z}\partial_{p_{t^\alpha x^\beta}} \quad (11)$$

(на самом деле все применения этого оператора приводят к конечным суммам, поскольку функции, к которым он применяется в рекуррентных формулах, зависят лишь от конечного числа переменных вида $p_{t^\alpha x^\beta}$).

Для вывода этих формул можно записать асимптотику группы симметрий, параметризованной вещественным числом a, при $a \to 0$ в виде

$$\begin{cases} \mathfrak{T}_a(t,x,p) = t + a\tau(t,x,p) + o(a), \\ \mathfrak{X}_a(t,x,p) = x + a\xi(t,x,p) + o(a), \\ \mathfrak{P}_a(t,x,p) = p + a\psi(t,x,p) + o(a), \end{cases} \tag{12}$$

а затем вычислить производные преобразованной неизвестной функции по преобразованным переменным с точностью до первого порядка по a; тогда $\psi_{(\alpha,\beta)}$ находится из того, что при $a \to 0$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}\mathfrak{P}_a}{\partial^{\alpha}\mathfrak{T}_a\partial^{\beta}\mathfrak{X}_a} = p_{t^\alpha x^\beta} + a\psi_{(\alpha,\beta)}(t,x,(p_{t^\kappa x^\lambda})_{0\le\kappa\le\alpha,0\le\lambda\le\beta}) + o(a). \tag{13}$$

В общей ситуации продолжение векторного поля именно так и определяется. В [5] приведена рекуррентная формула для его коэффициентов, записанная в векторном виде.

Воспользовавшись формулами для вычисления $\psi_{(\alpha,\beta)}$, найдём

$$\underset{2}{S}(p_{x,x} - Qp - p_t) = K_0 + K_1p_t + K_2p_x + K_3{p_t}^2 + K_4p_tp_x + K_5{p_x}^2 +$$
$$+ K_6p_t{p_x}^2 + K_7{p_x}^3 + K_8p_{t,x} + K_9p_{x,x} + K_{10}p_xp_{t,x} + K_{11}p_tp_{x,x} + K_{12}p_xp_{x,x}, \tag{14}$$

где коэффициенты, обозначенные буквой K с индексами, таковы (через Q' обозначена производная многочлена Q по переменной x):

$$\begin{cases} K_0 = -\xi pQ' - \psi Q - \partial_t\psi + {\partial_x}^2\psi, K_1 = \partial_t\tau - \partial_p\psi - {\partial_x}^2\tau, \\ K_2 = \partial_t\xi - {\partial_x}^2\xi + 2\partial_p\partial_x\psi, K_3 = \partial_p\tau, K_4 = \partial_p\xi - 2\partial_p\partial_x\tau, \\ K_5 = -2\partial_p\partial_x\xi + {\partial_p}^2\psi, K_6 = -{\partial_p}^2\tau, K_7 = -{\partial_p}^2\xi, \\ K_8 = -2\partial_x\tau, K_9 = -2\partial_x\xi + \partial_p\psi, K_{10} = -2\partial_p\tau, K_{11} = -\partial_p\tau, K_{12} = -3\partial_p\xi. \end{cases} \tag{15}$$

Выражение $\underset{2}{S}(p_{x,x} - Qp - p_t)$ должно быть тождественно равно нулю при условии, что p – решение (при этом условии p_t исключается при помощи уравнения $p_t = p_{x,x} - Qp$, а $p_{t,x}$ исключается, если исходное дифференциальное уравнение продифференцировать по x и обозначить производные переменными продолженного пространства, т. е. $p_{t,x} = p_{x,x,x} - Q'p - Qp_x$). Выражая эти “зависимые” производные через “независимые” (т. е. p, p_x, $p_{x,x}$ и $p_{x,x,x}$), получим:

$$
\begin{gathered}
\underset{2}{S}(p_{x,x} - Qp - p_t)\Big|_{p\text{ – решение}} = (K_0 - K_1 pQ + K_3 p^2 Q^2 - K_8 pQ') + \\
+ (K_2 - K_4 pQ - K_8 Q - K_{10} pQ')p_x + (K_5 - K_6 pQ - K_{10} Q){p_x}^2 + K_7 {p_x}^3 + \\
+ (K_1 - 2K_3 pQ + K_9 - K_{11} pQ)p_{x,x} + (K_4 + K_{12})p_{x,x}p_x + K_6 p_{x,x}{p_x}^2 + \\
+ (K_3 + K_{11}){p_{x,x}}^2 + K_8 p_{x,x,x} + K_{10} p_{x,x,x} p_x = 0. \quad (16)
\end{gathered}
$$

Приравнивая в (16) к нулю коэффициенты при мономах, состоящих из производных (первого и выше порядков) от неизвестной функции, получим *систему определяющих уравнений с частными производными* на функции τ, ξ и ψ (сразу исключим $K_6 = K_7 = K_8 = K_{10} = 0$ из других её уравнений, а также заметим, что $K_3 = -\frac{K_{10}}{2} = 0$ и $K_{11} = \frac{K_{10}}{2} = 0$; кроме того, одно из уравнений, а именно $K_3 + K_{11} = 0$, будет выполнено тождественно):

$$
\begin{cases}
K_0 - K_1 pQ = 0, \\
K_2 - K_4 pQ = 0, \\
K_5 = 0, \\
K_1 + K_9 = 0, \\
K_4 + K_{12} = 0.
\end{cases} \quad (17)
$$

Из $K_8 = K_{10} = 0$ можно лишь получить, что τ зависит только от t; $K_6 = 0$ не даёт по сравнению с этим никакой новой информации. С учётом этого из $K_4 + K_{12} = 0$ будем иметь $\partial_p \xi = 0$, т. е. ξ – функция от t и x (и уравнение $K_7 = 0$ также не добавляет ничего нового). Далее, из $K_5 = 0$ следует, что ${\partial_p}^2 \psi = 0$, откуда можно заключить, что $\psi = pA_1(t,x) + B_1(t,x)$ с некоторыми функциями A_1 и B_1, а из $K_1 + K_9 = 0$ следует $\partial_t \tau = 2\partial_x \xi$, что после дифференцирования по x превращается (с учётом того, что τ зависит только от t) в ${\partial_x}^2 \xi = 0$. Это означает, что $\xi = xA_2(t) + B_2(t)$ с некоторыми функциями A_2 и B_2, а общее решение для τ принимает вид $\tau(t) = 2\int A_2(t)dt$.

Выполнив эти упрощения, перепишем оставшиеся неиспользованными уравнения из системы (17) в терминах новых функций:

$$\begin{cases} -(xA_2 + B_2)pQ' - (pA_1 + B_1)Q - \partial_t(pA_1 + B_1) + \\ +{\partial_x}^2(pA_1 + B_1) - pQ(2A_2 - A_1) = 0, \\ \partial_t(xA_2 + B_2) + 2\partial_x A_1 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Второе уравнение в (18) можно проинтегрировать:

$$-2A_1(t,x) = \frac{x^2}{2}\partial_t A_2(t) + x\partial_t B_2(t) + C(t) \tag{19}$$

с некоторой функцией C. Подставим это выражение для A_1 в первое уравнение системы (18); оно примет вид $pY + Z = 0$, где Y и Z зависят только от t и x, так что $Y = 0$ и $Z = 0$. Так как $Z = {\partial_x}^2 B_1 - \partial_t B_1 - B_1 Q$, то уравнение $Z = 0$ не даёт никакой информации, кроме того, что B_1 – решение исходного дифференциального уравнения (как мы далее увидим, отсюда получится тривиальная симметрия, которой обладает вообще любое линейное уравнение). Нетривиальные же симметрии могут получиться лишь из уравнения $Y = 0$, которое в развёрнутом виде запишется так:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}{\partial_t}^2 A_2 + x{\partial_t}^2 B_2 + \partial_t C\right) + \frac{1}{2}\partial_t A_2 = -(2QA_2 + Q'(xA_2 + B_2)). \tag{20}$$

Это уравнение полиномиально по x, причём степень многочлена в левой части равна 2, а степень многочлена в правой части равна $2n-4$. При $n \geq 4$ это означает, что $A_2 = 0$ и $B_2 = 0$ (поскольку степень Q' равна $2n-5$, что всё равно больше 2 при $n \geq 4$), откуда $\xi = 0$, $\tau = \text{const}$. Уравнение $Y = 0$ превращается в $C = \text{const}$, т. е. $A_1 = \text{const}$, что в точности означает, что исходное дифференциальное уравнение линейно, но эта тривиальная симметрия, конечно, не позволяет понизить порядок.

Таким образом, мы доказали следующий вариант теоремы 1.2.1:

Предложение 1.2.1. *Если Q – многочлен по переменной x степени, большей 2, то уравнение $\partial_t p(t,x) = {\partial_x}^2 p(t,x) - Q(x)p(t,x)$ не допускает однопараметрических групп симметрий, отличных от (допустимых любым линейным уравнением) групп линейных преобразований решений.*

Теорема 1.2.1 является следствием этого предложения, поскольку исходное уравнение теплопроводности в группе Гурса отличается от исследованного выше уравнения лишь преобразованием Фурье.

Заметим ещё, что, как показано в [19], применение некоммутативного преобразования Фурье (в отличие от обычного преобразования Фурье, которым мы пользовались выше) не упрощает получающегося в окончательном результате уравнения (по крайней мере, при $n = 4$): в нём по-прежнему остаётся многочлен четвёртой степени.

Однако некоммутативное преобразование Фурье в сочетании с другими техниками (например, такими, как формула Троттера) всё же приводит к некоторому способу решения субриманова уравнения теплопроводности на группах Ли. Об этом мы расскажем в следующей главе.

2. Метод возмущений и обобщённое преобразование Фурье

2.1. Общие сведения об обобщённом преобразовании Фурье

Преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$ – один из важнейших инструментов для решения дифференциальных уравнений – допускает, хотя и с существенными модификациями, естественное обобщение на унимодулярные группы Ли (здесь нас будет интересовать именно этот случай, хотя аналогичную конструкцию можно провести даже на произвольных локально компактных группах).

Определение 2.1.1. Пусть H – гильбертово пространство; через $\mathrm{U}(H)$ будем обозначать группу всех унитарных операторов на H с композицией в качестве групповой операции. Пусть также G – группа Ли. Групповой гомоморфизм $R : G \to \mathrm{U}(H)$, для которого все функции $f_v : G \to H$, определённые по формуле $f_v(g) = R(g)v$ с $v \in H$, непрерывны, будем называть *унитарным представлением* (более точно, *сильно непрерывным унитарным представлением*) группы Ли G на гильбертовом пространстве H.

Определение 2.1.2. Линейное подпространство V гильбертова пространства H называется *инвариантным* для представления $R : G \to \mathrm{U}(H)$ группы Ли G, если для всех $v \in V$ и $g \in G$ верно, что $R(g)v \in V$. Если R не имеет инвариантных подпространств, отличных от H и $\{0\}$, оно называется *неприводимым*.

Определение 2.1.3. Пусть G – группа Ли. Два её представления $R : G \to \mathrm{U}(H)$ и $S : G \to \mathrm{U}(W)$ (на гильбертовых пространствах H и W соответственно) называются *подобными* (или *эквивалентными*), если существует унитарное преобразование $Q : H \to W$, для которого при всех $g \in G$ выполнено $R(g) = Q^{-1} \circ S(g) \circ Q$.

Название “эквивалентные представления” не случайно: подобие представлений и в самом деле рефлексивно, транзитивно и симметрично.

Ещё нам потребуются определения некоторых классов линейных операторов на бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве (для конечномерного пространства аналогичные определения тривиальны).

Определение 2.1.4. Пусть H – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, A – непрерывный линейный оператор на H; неотрицательно определённый квадратный корень из A^*A обозначим через $\sqrt{A^*A}$, где A^* – оператор, сопряжённый к A. Оператор A называется *имеющим след*, или *ядерным*, если для какого-либо ортонормированного базиса $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \sqrt{A^*A}\phi_n, \phi_n \rangle$. В этом случае *след* оператора A определяют как сумму ряда $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle A\phi_n, \phi_n \rangle$ и обозначают $\mathrm{Tr}(A)$.

Данное определение корректно: (i) оператор $\sqrt{A^*A}$ определён однозначно, так как A^*A – самосопряжённый неотрицательно определённый оператор; (ii) из сходимости ряда $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \sqrt{A^*A}\phi_n, \phi_n \rangle$ для какого-либо ортонормированного базиса $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ следует сходимость аналогичного ряда для любого ортонормированного базиса; (iii) если $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \sqrt{A^*A}\phi_n, \phi_n \rangle$ сходится, то $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle A\phi_n, \phi_n \rangle$ сходится абсолютно, причём сумма $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle A\phi_n, \phi_n \rangle$ не зависит от выбранного базиса. Обоснование корректности данного определения можно найти в [6]. Там же обсуждается тот факт, что без условия сходимости ряда $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \sqrt{A^*A}\phi_n, \phi_n \rangle$ сходимость ряда $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle A\phi_n, \phi_n \rangle$ может зависеть от выбора базиса $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Определение 2.1.5. Пусть H – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, A – непрерывный линейный оператор на H. Если оператор A^*A имеет след, то A называется *оператором Гильберта – Шмидта*. Множество всех операторов Гильберта – Шмидта на H мы будем обозначать $\mathrm{HS}(H)$; его можно превратить в гильбертово пространство, введя скалярное произведение $\langle A, B \rangle_{\mathrm{HS}(H)} = \mathrm{Tr}(A^*B)$ для произвольных $A, B \in \mathrm{HS}(H)$.

Теперь мы готовы дать определение обобщённого преобразования Фурье:

Определение 2.1.6. Пусть G – унимодулярная группа Ли, снабжённая мерой Хаара μ, $\widehat{G}$ – множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений G (на, вообще говоря, различных сепарабельных гильбертовых пространствах). В каждом классе $\lambda \in \widehat{G}$ выберем представление $\mathfrak{X}_\lambda : G \to \mathrm{U}(H_\lambda)$ на некотором гильбертовом пространстве H_λ. *Обобщённым* (или *"некоммутативным"*) *преобразованием Фурье* функции $f \in L^1(G, \mathbb{C})$ будем называть отображение, обозначаемое $\mathcal{F}(f)$ или $\widehat{f}$, которое каждому $\lambda \in \widehat{G}$ сопоставляет (ограниченный) оператор на H_λ, заданный формулой $\widehat{f}(\lambda) = \int_G f(g)\mathfrak{X}_\lambda(g^{-1})\mu(dg)$.

Обозначение H_λ корректно в следующем смысле: если взять два эквивалентных представления R и S из одного и того же класса λ, то их гильбертовы пространства будут изометричны (искомой изометрией будет оператор, обозначенный в определении 4 символом Q).

Объект $\widehat{G}$ называется *двойственным по Понтрягину* к группе G. За исключением случая, когда G – абелева группа, на $\widehat{G}$ никакой естественной групповой структуры нет. Однако некоторые свойства $\widehat{G}$ всё же можно обобщить: например, на нём можно ввести меру P, по аналогии со случаем абелевых групп называемую *мерой Планшереля*, для которой будет при почти всех $g \in G$ выполнена *формула обращения* (при условии, что $f \in L^1(G, \mathbb{C}) \cap L^2(G, \mathbb{C})$):

$$f(g) = \int_{\widehat{G}} \mathrm{Tr}(\widehat{f}(\lambda) \circ \mathfrak{X}_\lambda(g))P(d\lambda). \tag{21}$$

След линейного оператора на пространстве H_λ мы обозначаем Tr, чтобы не путать его с конечномерным (матричным) следом tr. Доказательство существования меры Планшереля можно найти, например, в [51, 59].

Свёртка вещественнозначных или комплекснозначных функций относительно групповой операции, задаваемая формулой

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)\mu(dh), \qquad (22)$$

переходит в произведение (т. е. композицию) операторов в обратном порядке. В самом деле, если для произвольного $\lambda \in \widehat{G}$ выбрать $\mathfrak{X}_\lambda \in \lambda$, то

$$\widehat{f_1 * f_2}(\lambda) = \int_{G\times G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)\mathfrak{X}_\lambda(g^{-1})\mu(dg)\mu(dh) = \\ = \int_{G\times G} f_1(h') f_2(g')\mathfrak{X}_\lambda((h'g')^{-1})\mu(dg')\mu(dh') \qquad (23)$$

(здесь мы сделали замену $g' = h^{-1}g$, $h' = h$ в двойном интеграле; якобиан этой замены равен единице, поскольку μ – мера Хаара). С другой стороны,

$$\widehat{f_2}(\lambda)\widehat{f_1}(\lambda) = \int_G f_2(g)\mathfrak{X}_\lambda(g^{-1})\mu(dg) \circ \int_G f_1(h)\mathfrak{X}_\lambda(h^{-1})\mu(dh) = \\ = \int_{G\times G} f_1(h) f_2(g)\mathfrak{X}_\lambda(g^{-1}) \circ \mathfrak{X}_\lambda(h^{-1})\mu(dg)\mu(dh), \qquad (24)$$

и так как $\mathfrak{X}_\lambda$ – гомоморфизм групп, то $\mathfrak{X}_\lambda((hg)^{-1}) = \mathfrak{X}_\lambda(g^{-1}h^{-1}) = \mathfrak{X}_\lambda(g^{-1})\mathfrak{X}_\lambda(h^{-1})$, откуда получаем, сравнивая (23) и (24), что $\widehat{f_1 * f_2}(\lambda) = \widehat{f_2}(\lambda)\widehat{f_1}(\lambda)$.

Некоммутативное преобразование Фурье можно распространить также и на обобщённые функции, аналогично обычному преобразованию Фурье. Важным для нас будет тот факт, что дельта-функция Дирака преобразуется в прямой интеграл по мере P тождественных операторов на пространствах $(H_\lambda)_{\lambda\in\widehat{G}}$ (определение прямого интеграла гильбертовых пространств, а также прямого интеграла операторов на гильбертовых пространствах, можно найти в [6]; более подробно теория прямых интегралов изложена в [29, 56]). В самом деле: выбрав для произвольного $\lambda \in \widehat{G}$ какое-нибудь представление $\mathfrak{X}_\lambda \in \lambda$ на пространстве H_λ, получим следующие равенства (интеграл, которым выражено преобразование Фурье, понимается в смысле обобщённых функций): $\widehat{\delta}(\lambda) = \int_G \delta(g)\mathfrak{X}_\lambda(g^{-1})\mu(dg) = \mathfrak{X}_\lambda(e) = \mathrm{Id}_{H_\lambda}$, где e – нейтральный элемент G;

последнее равенство следует из того, что $\mathfrak{X}_\lambda$ – гомоморфизм групп.

Как мы уже говорили, для унимодулярной группы Ли G верно $\Delta_H = \sum_{j=1}^{m}({X_j}^2)$, где $\{X_j : 1 \le j \le m\}$ – ортонормированный базис горизонтального распределения. Так как для каждого левоинвариантного векторного поля X на G его преобразование Фурье $\widehat{X} = \mathcal{F}X\mathcal{F}^{-1}$ раскладывается в прямой интеграл некоторых операторов $\widehat{X}_\lambda : \mathrm{HS}(H_\lambda) \to \mathrm{HS}(H_\lambda)$ (определение операторов $\widehat{X}_\lambda$ и доказательство формулы $\widehat{X} = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \widehat{X}_\lambda P(d\lambda)$ см. в [10]), то и преобразование Фурье сублапласиана раскладывается в прямой интеграл: $\widehat{\Delta_H} = \mathcal{F}\Delta_H\mathcal{F}^{-1} = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} (\widehat{\Delta_H})_\lambda P(d\lambda)$, где $(\widehat{\Delta_H})_\lambda = \sum_{j=1}^{m}(\widehat{X}_\lambda^2)$. Если к уравнению теплопроводности на унимодулярной группе Ли применить некоммутативное преобразование Фурье и воспользоваться формулой обращения (для корректного применения этой процедуры потребуется аппроксимация тождественного оператора; см. доказательство теоремы 2.2.3), получим

$$p(t,g) = \exp(t\Delta_H)\delta(g) = \int_{\widehat{G}} \mathrm{Tr}(\exp(t(\widehat{\Delta_H})_\lambda)\mathfrak{X}_\lambda(g))P(d\lambda). \tag{25}$$

Зная неприводимые унитарные представления группы G, можно свести исходное уравнение теплопроводности к уравнению с преобразованным сублапласианом $\widehat{\Delta_H}$, которое обычно проще исходного уравнения диффузии. Для групп SU(2), SO(3), SL(2) и SE(2) эта работа была проделана в [10], для нильпотентных групп Ли с векторами роста $(2,3,4)$ и $(2,3,5)$ – в [19]. Классы эквивалентности неприводимых унитарных представлений можно найти при помощи *метода орбит*, разработанного А. А. Кирилловым; этот метод будет вкратце изложен в следующем параграфе. Подробнее об идеях, составляющих метод орбит (не во всех случаях доведённых до уровня строгих теорем), см. [3, 4].

Основной интерес для нас будут представлять нильпотентные группы Ли (они, конечно, унимодулярны, так что всё вышесказанное к ним применимо). Причина этого состоит в том, что если точное решение уравнения теплопроводности (над любым эквирегулярным субримановым многообразием, даже без групповой структуры) не требуется, а нужны лишь его асимптотики при малом значении t, можно перейти к нильпотентной аппроксимации в точке, а затем воспользоваться формулой Дюамеля

$$\exp(t(X+Y)) = \exp(tX) + \int_0^t \exp((t-s)(X+Y))Y\exp(sX)ds. \tag{26}$$

Именно таким методом была получена в [14] диагональная асимптотика ядра теплопроводности в случае контактного трёхмерного субриманова многообразия в терминах геометрических инвариантов χ и κ, определённых в [8].

В дальнейших рассуждениях нам также потребуется тот факт, что ядро теплопроводности $p_t(\cdot)$ в связной односвязной нильпотентной группе Ли G при каждом $t > 0$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}(G)$; доказательство этого факта и некоторых других свойств пространства Шварца можно найти в [34]. Напомним определение пространства Шварца:

Определение 2.1.7. Для гладкой функции ϕ на $\mathbb{R}^n$ и мультииндексов α, β определим $f_{\alpha,\beta,\phi}(x) = x^\alpha \partial^\beta \phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит в точности из таких гладких функций ϕ, что для всех мультииндексов α, β функция $f_{\alpha,\beta,\phi}$ ограничена.

Это определение имеет смысл для связной односвязной нильпотентной группы Ли, поскольку её можно задать на $\mathbb{R}^n$. Кроме того, в этом случае экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$ является диффеоморфизмом (доказательство этого см., например, в [34]), так что имеет смысл следующее обозначение:

Определение 2.1.8. Пусть G – связная односвязная нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Отображение $\log : G \to \mathfrak{g}$, обратное к экспоненциальному, будем называть *логарифмическим.*

2.2. Метод орбит

При формулировке метода орбит группа Ли предполагается такой, что все её неприводимые унитарные представления получаются из одномерных при помощи операций продолжения с подгруппы, ограничения на подгруппу и индуцирования с подгруппы. Хотя для произвольных групп Ли это предположение не доказано, для нильпотентных групп оно всё же верно (см. [3]). Мы опишем соответствие орбит и представлений в случае, если представление получается из одномерного за один шаг при помощи индуцирования – для нашего случая этого будет достаточно. Приведём здесь определение операции индуцирования (см. также [32]):

Определение 2.2.1. Пусть H – замкнутая связная подгруппа группы Ли G, $H\diagdown G$ – множество правых классов смежности группы G по подгруппе H, мера $\mu_{H\diagdown G}$ есть образ правой меры Хаара на G под действием отображения, переводящего каждый элемент $g \in G$ в его правый класс смежности Hg, $T : H \to \mathrm{U}(V)$ – унитарное представление группы H на гильбертовом пространстве V со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ и соответствующей нормой $||\cdot||_V$.

На пространстве классов эквивалентности (относительно равенства почти всюду) измеримых по Борелю функций $f : G \to V$ таких, что для всех $h \in H, g \in G$ выполнено $f(hg) = T(h)f(g)$ и $\int_{H\diagdown G}(||f(g)||_V{}^2)\mu_{H\diagdown G}(dg) < \infty$, введём скалярное произведение $\langle f_1, f_2\rangle = \int_{H\diagdown G}\langle f_1(g), f_2(g)\rangle_V \mu_{H\diagdown G}(dg)$; пополнение этого пространства относительно введённого скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначим через W. Запись $\int_{H\diagdown G}\langle f_1(g), f_2(g)\rangle_V \mu_{H\diagdown G}(dg)$ корректна, поскольку величина $\langle f_1(g), f_2(g)\rangle_V$ одинакова для всех g из одного и того же правого класса смежности.

Представление $\mathrm{Ind}_H^G T : G \to \mathrm{U}(W)$ группы G, *индуцированное* представлением T, определим так: для каждого $g \in G$ оператор $(\mathrm{Ind}_H^G T)_g \in \mathrm{U}(W)$

действует на $f \in W$ по формуле $(\mathrm{Ind}_H^G T)_g(f)(g') = f(g'g)$ при всех $g' \in G$.

Для описания структуры пространства $\widehat{G}$, т. е. для классификации неприводимых унитарных представлений группы Ли G, нам понадобится *коприсоединённое действие* (или *коприсоединённое представление*) G:

Определение 2.2.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G, реализованная левоинвариантными векторными полями, $\mathfrak{g}^*$ – двойственное к $\mathfrak{g}$ пространство левоинвариантных дифференциальных 1-форм. Группа G действует на $\mathfrak{g}$ *присоединённым действием* Ad, задаваемым формулой $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$ для $g \in G$ и $X \in \mathfrak{g}$, а на $\mathfrak{g}^*$ – *коприсоединённым действием* Ad^*, задаваемым формулой ${\mathrm{Ad}^*}_g(\xi, X) = \xi(g^{-1}Xg)$ для $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ и $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Абстрагируясь по переменной X, будем для удобства обозначать через ${\mathrm{Ad}^*}_g(\xi)$ дифференциальную форму ${\mathrm{Ad}^*}_g(\xi, \cdot)$, в которую и переходит форма ξ.

Запись $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$ подразумевает, что элементы G и $\mathfrak{g}$ задаются матрицами. В бескоординатной форме определение выглядит так: $\mathrm{Ad}_g(X) = d\Psi_g(e, X)$, где отображение $\Psi_g : G \to G$ вычисляется по формуле $\Psi_g(h) = ghg^{-1}$; соответственно ${\mathrm{Ad}^*}_g(\xi) = \xi \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}$.

Определение 2.2.3. Множество $\mathcal{O}_\xi = \{{\mathrm{Ad}^*}_g(\xi) : g \in G\}$ называется *орбитой* формы ξ в Ad^*.

На множестве орбит, которое мы будем обозначать $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*$, вводится топология, являющаяся фактортопологией стандартной топологии в $\mathfrak{g}^*$ по эквивалентности "принадлежность к одной и той же орбите", а также мера, являющаяся разложением меры Лебега в $\mathfrak{g}^*$ на канонические меры на орбитах.

На $\widehat{G}$ в качестве "стандартной" меры берётся мера Планшереля, а топология вводится следующим образом. Пусть T – какое-либо неприводимое унитарное представление G на некотором сепарабельном гильбертовом пространстве, которое мы обозначим через $\mathcal{H}$; скалярное произведение на $\mathcal{H}$ будем обозначать

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$. Зададим для точки $\lambda \in \widehat{G}$, которая является классом представлений, эквивалентных T, следующую базу окрестностей вида $U(K,(v_j)_{j=1..n})$, где K – компакт в G, $(v_j)_{j=1..n}$ – набор векторов из $\mathcal{H}$: класс представления T', заданного на некотором сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}'$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}'}$, тогда и только тогда принадлежит $U(K,(v_j)_{j=1..n})$, когда существует такой набор векторов $(v'_j)_{j=1..n}$ пространства $\mathcal{H}'$, что для всех $g \in K$ и всех индексов j,k выполнено неравенство $|\langle T(g)v_j, v_k\rangle_{\mathcal{H}} - \langle T'(g)v'_j, v'_k\rangle_{\mathcal{H}'}| < 1$.

Соответствие между $\widehat{G}$ и $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*$ нужно построить так, чтобы оно было изоморфизмом $\widehat{G}$ и $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*$ как топологических пространств и как пространств с мерой. Прежде чем его строить, приведём несколько необходимых определений и фактов.

Определение 2.2.4. Пусть G – группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Подалгебра Ли $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$ называется *подчинённой* функционалу $\xi \in \mathfrak{g}^*$, если для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ верно $B_\xi(X,Y) = 0$, где для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$ определено $B_\xi(X,Y) = \xi([X,Y])$.

Символом $\mathfrak{g}_\xi$ мы будем обозначать ядро формы B_ξ, т. е. множество таких $X \in \mathfrak{g}$, что для всех $Y \in \mathfrak{g}$ верно $B_\xi(X,Y) = 0$.

Для каждого $\xi \in \mathfrak{g}^*$ подгруппа Ли $\{g \in G : \mathrm{Ad}^*{}_g(\xi) = \xi\}$ имеет своей алгеброй Ли пространство $\mathfrak{g}_\xi$ (см. [4]); эту подгруппу мы будем обозначать G_ξ.

На каждой орбите $\mathcal{O}_\xi$ существует невырожденная замкнутая G-инвариантная 2-форма, превращающая $\mathcal{O}_\xi$ в симплектическое многообразие; все необходимые изоморфизмы, происходящие из отождествления $\mathcal{O}_\xi$ с множеством правых классов смежности группы G по подгруппе G_ξ и позволяющие придать термину “G-инвариантность” точный смысл применительно к формам на $\mathcal{O}_\xi$, указаны в [4], способ получения симплектической формы на $\mathcal{O}_\xi$ из формы B_ξ описан там же. В частности, $\mathcal{O}_\xi$ имеет чётную размерность. С другой стороны, если группа G связна, то всякое однородное симплектическое многообразие (т. е. многообразие, на котором действует G, причём все преобразования этой группы сохраняют симплектическую форму) локально изоморфно орбите в каприсоединённом представлении либо самой группы G, либо её центрального расширения с помощью $\mathbb{R}$.

Орбите $\mathcal{O}_\xi$ поставим в соответствие представление $\operatorname{Ind}_H^G \rho_{\xi,H}$, где H – подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, являющейся подчинённой ξ алгеброй максимальной размерности, равной $\frac{\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}$, $\rho_{\xi,H}$ – одномерное унитарное представление группы H, заданное формулой $\rho_{\xi,H}(\exp(X)) = \exp(2\pi\mathrm{i}\xi(X))$ для всех $X \in \mathfrak{h}$.

В нашем случае эта конструкция даёт полное описание $\widehat{G}$, что выражено в следующей теореме А. А. Кириллова:

Теорема 2.2.1. [3] *Если G – связная односвязная нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, T – её неприводимое унитарное представление, то для некоторой связной подгруппы $H \subseteq G$ и некоторого $\xi \in \mathfrak{g}^*$ справедливо равенство $T = \operatorname{Ind}_H^G \rho_{\xi,H}$.*

Если $H \subseteq G$ – связная подгруппа с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$, то представление $T_{\xi,H} = \operatorname{Ind}_H^G \rho_{\xi,H}$ неприводимо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ – подалгебра максимальной размерности, подчинённая ξ.

Пусть $T_{\xi,H}$ и $T_{\xi',H'}$ неприводимы, λ и λ' – классы представлений, эквивалентных $T_{\xi,H}$ и $T_{\xi',H'}$ соответственно. Тогда условия $\lambda = \lambda'$ и $\mathcal{O}_\xi = \mathcal{O}_{\xi'}$ равносильны.

Соответствие орбит $\mathcal{O}_\xi$ и классов подобия представлений $T_{\xi,H}$ – гомеоморфизм относительно введённых выше топологий.

В случае нильпотентной группы Ли G каждая максимальная подчинённая элементу $\xi \in \mathfrak{g}^*$ подалгебра содержит пространство $\mathfrak{g}_\xi$; этот факт, доказанный Л. Пуканским в [57], мы будем использовать при рассмотрении конкретного примера далее.

Явную конструкцию подчинённой ξ подалгебры максимальной размерности предложила М. Вернь (здесь её результат приводится не в самой полной общности):

Теорема 2.2.2. [65] *Пусть G – связная односвязная нильпотентная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $(V_k)_{k=0..\dim\mathfrak{g}}$ – возрастающий по включению набор идеалов в $\mathfrak{g}$, причём при всех k имеет место равенство $\dim V_k = k$. Тогда для всякого $\xi \in \mathfrak{g}^*$ пространство $\mathfrak{vs}(\xi) = \sum_{k=0}^{\dim\mathfrak{g}} \ker(B_\xi|_{V_k})$ является подалгеброй максимальной размерности, подчинённой ξ.*

В дальнейшем мы будем обозначать $\exp(\mathfrak{vs}(\xi)) = VS_\xi$ и $T_{\xi,VS_\xi} = R_\xi$, класс эквивалентности представления R_ξ будем обозначать λ_ξ; через W_ξ будем обозначать пространство представления R_ξ. Иногда вместо $\mathfrak{vs}(\xi)$ мы будем писать $\mathfrak{vs}_\xi$.

Теорема 2.2.2 позволяет выбирать представления из данного класса подобия каноническим образом. Кроме того, по набору идеалов $(V_k)_{k=0..\dim\mathfrak{g}}$ можно естественным образом построить мальцевский (в сильном смысле) базис $\mathfrak{g}$. Приведём определение мальцевского базиса в обоих смыслах:

Определение 2.2.5. Упорядоченный базис $(Z_k)_{k=1..\dim\mathfrak{g}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *мальцевским в слабом смысле*, если все его начальные отрезки $(Z_k)_{k=1..r}$, $0 \leq r \leq \dim\mathfrak{g}$, суть базисы некоторых подалгебр в $\mathfrak{g}$; если к тому же все эти подалгебры суть идеалы в $\mathfrak{g}$, то $(Z_k)_{k=1..\dim\mathfrak{g}}$ называется *мальцевским в сильном смысле*.

Для применения некоммутативного преобразования Фурье (более точно, формулы обращения) осталось вычислить меру Планшереля. Она, как показано в [3, 4], сосредоточена на классах представлений, которым соответствуют орбиты максимальной размерности, и описывается следующим образом.

Выберем линейное подмногообразие Q в $\mathfrak{g}^*$ так, чтобы каждая орбита из некоторого открытого плотного подмножества орбит максимальной размерности пересекалась с Q в одной точке. Отождествим $\mathfrak{g}^{**}$ с $\mathfrak{g}$, сопоставив каждому $z \in \mathfrak{g}$ такой элемент $\mathfrak{g}^{**}$, который на каждом $\xi \in \mathfrak{g}^*$ принимает значение $\xi(z)$. Имея в виду это отождествление, выберем в $\mathfrak{g}^{**}$ базис $\{X_j : 1 \leq j \leq \dim Q\} \cup \{Y_j : 1 \leq j \leq \dim\mathfrak{g} - \dim Q\}$, в котором элементы, обозначенные буквой Y с индексами, постоянны на Q; координатами на Q будем считать $(X_j)_{1\leq j\leq \dim Q}$. Для каждого $\xi \in Q$ построим кососимметрическую матрицу $A(\xi)$ с коэффициентами $a_{j,k} = \xi([Y_j, Y_k])$. Тогда мера на данном открытом плотном множестве орбит максимальной размерности, переходящая в меру Планшереля при соответствии $\widehat{G}$ и $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*$, равна $|\operatorname{pf}(A(\xi))| dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_{\dim Q}$, где через pf обозначен некоторый многочлен от элементов кососимметрической матрицы чётного порядка, называемый *пфаффианом*:

Определение 2.2.6. Пусть A – вещественная кососимметрическая матрица порядка $2n$, элементы которой мы будем обозначать $(a_{i,j})_{i,j=1..2n}$. *Пфаффиан* $\operatorname{pf}(A)$ определяется по формуле

$$\operatorname{pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma\in S_{2n}} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(a_{\sigma(2i-1),\sigma(2i)}\right) \right), \tag{27}$$

где S_{2n} – группа всех перестановок $2n$-элементного множества, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ – знак перестановки σ, равный 1, если σ чётная, и равный -1, если σ нечётная.

Квадрат пфаффиана равен определителю; так как знак пфаффиана нам в данном контексте не важен, мы можем вычислять абсолютную величину пфаффиана извлечением квадратного корня из определителя, избегая, таким образом, прямого вычисления суммы по перестановкам, участвующей в (27).

Для того, чтобы сформулировать основной результат настоящей работы, нам потребуется определение канонической проекции на подгруппу VS_ξ для произвольного ξ из построенного выше линейного многообразия Q.

Определение 2.2.7. Возьмём произвольный $\xi \in Q$. Выберем мальцевский в слабом смысле базис $\mathfrak{g}$, обозначаемый $(Z_k)_{1\leq k\leq \dim\mathfrak{g}}$, для которого $\mathfrak{vs}(\xi) = \operatorname{span}\left\{Z_k : 1 \leq k \leq \frac{\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}\right\}$. Для произвольного $x \in \mathbb{R}^{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}}$ определим

$$\gamma_x = \exp(x_1 Z_{\frac{\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}+1}) \cdot \ldots \cdot \exp(x_{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}} Z_{\dim\mathfrak{g}}). \tag{28}$$

Каноническую проекцию элемента $h \in G$ на VS_ξ определим как такой

$h' \in VS_\xi$, что при некотором $x \in \mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}$ имеет место равенство $h = h'\gamma_x$; этот h' будем обозначать $\mathrm{pr}_{VS_\xi}(h)$.

Из такого разложения $h = h'\gamma_x$ восстанавливается $x = \gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(h))^{-1}h)$; не путайте запись $(\gamma_x)^{-1}$, означающую обратный к γ_x элемент группы, с записью $\gamma^{-1}(...)$ – значением обратной к γ функции в некоторой точке. Иногда вместо γ_x мы будем писать $\gamma(x)$.

Итак, формула для $p(t, g)$ получается следующей:

Теорема 2.2.3. *Пусть G – связная односвязная нильпотентная группа Ли с мерой Хаара μ, левоинвариантной субримановой метрикой и соответствующим сублапласианом Δ_H. Построим по указанной выше процедуре пространство Q, матрицу $A(\xi)$ для $\xi \in Q$ и отображение γ. Тогда ядро теплопроводности для Δ_H выражается в виде*

$$p(t, g) = \int_Q \int_{\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\xi(\log(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g)))} \times \\ \times \mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H(\lambda_\xi)}}(t, \gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g))^{-1}\gamma_x g), x) |\operatorname{pf}(A(\xi))| dx d\xi, \quad (29)$$

где при каждом $t > 0$ функция $\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H(\lambda_\xi)}}(t, \cdot, \cdot)$ есть интегральное ядро оператора $\exp(t\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi))$.

Доказательство. Основная идея состоит в том, чтобы применить к уравнению теплопроводности обобщённое преобразование Фурье, а затем восстановить ядро теплопроводности по его преобразованию Фурье при помощи формулы обращения. Неприводимые унитарные представления G мы классифицируем при помощи метода орбит, при этом для каждого такого представления мы найдём некоторое эквивалентное ему представление, которое будет выглядеть проще исходного.

Итак, выберем произвольный $\xi \in Q$. Метод орбит сопоставляет ему представление $R_\xi = \mathrm{Ind}_{VS_\xi}^G \rho_{\xi, VS_\xi}$. Здесь $\rho_{\xi, VS_\xi}(\exp(X)) = \exp(2\pi \mathrm{i}\xi(X))$ для всех $X \in \mathfrak{vs}_\xi$, что можно также записать в виде $\rho_{\xi, VS_\xi}(h) = \exp(2\pi \mathrm{i}\xi(\log(h)))$ для всех $h \in VS_\xi$. Гильбертово пространство представления R_ξ обозначим W_ξ. Его элементы представляются комплекснозначными функциями на G, определёнными с точностью до множества меры нуль, так как ρ_{ξ,VS_ξ} – одномерное представление.

Используя отображение γ и каноническую проекцию из определения 2.2.7, построим преобразование $J_\xi : L^2(\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g}-\dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}) \to W_\xi$, действующее на каждую функцию $f \in L^2(\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g}-\dim \mathfrak{g}_\xi}{2}})$ по формуле

$$J_\xi(f)(g) = \rho_{\xi,VS_\xi}(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(g))f(\gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(g))^{-1}g)) \tag{30}$$

для почти всех $g \in G$. Определение J_ξ корректно, поскольку получающаяся по этой формуле функция $J_\xi(f)$ обладает свойствами, данными в определении гильбертова пространства, на котором задаётся индуцированное представление (см. определение 2.2.1). Так как модуль комплексного числа $\rho_{\xi,VS_\xi}(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(g))$ равен единице, построенное таким образом преобразование J_ξ унитарно.

Обратное к J_ξ преобразование переводит каждую функцию $u \in W_\xi$ в функцию, задаваемую формулой ${J_\xi}^{-1}(u)(x) = u(\gamma(x))$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g}-\dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}$. В самом деле, пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g}-\dim \mathfrak{g}_\xi}{2}})$, тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g}-\dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}$ имеем

$${J_\xi}^{-1}(J_\xi(f))(x) = J_\xi(f)(\gamma(x)) = \rho_{\xi,VS_\xi}(e)f(\gamma^{-1}(\gamma(x))) = f(x) \tag{31}$$

ввиду того, что элемент $\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma(x))$ всегда равен нейтральному элементу e. С другой стороны, для всех $u \in W_\xi$ и почти всех $g \in G$ верно

$$\begin{multline} J_\xi({J_\xi}^{-1}(u))(g) = \rho_{\xi,VS_\xi}(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(g)) \cdot {J_\xi}^{-1}(u)(\gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(g))^{-1}g)) = \\ = \rho_{\xi,VS_\xi}(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(g)) \cdot u((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(g))^{-1}g) = u(g). \quad (32) \end{multline}$$

Последнее равенство следует из условия $u(hg) = \rho_{\xi,VS_\xi}(h)u(g)$, где $h \in H, g \in G$, которое фигурирует в определении 2.2.1.

Определим представление $R'_\xi : G \to \mathrm{U}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g}-\dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}))$, эквивалентное представлению R_ξ, по формуле ${R'}_\xi(g) = {J_\xi}^{-1} \circ R_\xi(g) \circ J_\xi$ для каждого $g \in G$, т. е. для каждой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}})$ функция ${R'}_\xi(g)(f)$ действует по формуле ${R'}_\xi(g)(f) = (R_\xi(g)(J_\xi(f))) \circ \gamma$. Последняя формула при почти всех $x \in \mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}}$ примет вид

$$\begin{aligned}{R'}_\xi(g)(f)(x) = R_\xi(g)(J_\xi(f))(\gamma(x)) = J_\xi(f)(\gamma(x)g) = \\ = \rho_{\xi, VS_\xi}(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g)) f(\gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g))^{-1}\gamma_x g)) = \\ = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi(\log(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g)))} f(\gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g))^{-1}\gamma_x g)). \quad (33)\end{aligned}$$

Именно с представлением ${R'}_\xi$ мы будем работать дальше. Выбрав его в качестве канонического представителя своего класса эквивалентности $\lambda_\xi \in \widehat{G}$, запишем определение преобразования Фурье функции $f : G \to \mathbb{C}$:

$$\widehat{f}(\lambda_\xi) = \int_G f(g) {R'}_\xi(g^{-1}) \mu(dg). \quad (34)$$

Соответственно, формула обращения (21) будет выглядеть так:

$$f(g) = \int_Q \mathrm{Tr}(\widehat{f}(\lambda_\xi) \circ {R'}_\xi(g)) |\operatorname{pf}(A(\xi))| d\xi; \quad (35)$$

здесь мы параметризовали $\widehat{G}$ орбитами в коприсоединённом представлении (вернее, их элементами из пространства Q) и воспользовались выражением для меры Планшереля в терминах этой параметризации.

Как показано в [26], преобразование Фурье каждой функции $f \in \mathcal{S}(G)$, вычисленное в λ_ξ, имеет интегральное ядро $k_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}} \times \mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}})$ такое, что $k_f(x, y) = \int_{VS_\xi} \rho_{\xi, VS_\xi}(h) f((\gamma_x)^{-1} h \gamma_y) dh$, где под dh понимается мера Хаара на VS_ξ. Так как $p_t \in \mathcal{S}(G)$, то можно взять $f = p_t$; соответствующая функция k_{p_t} равна $\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}(t, \cdot, \cdot)$ (см. [32]). Из того, что $k_{p_t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}} \times \mathbb{R}^{\frac{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_\xi}{2}})$, следует, что оператор $\widehat{p_t}(\lambda_\xi)$ имеет след.

Как мы выяснили в первом параграфе данной главы, для свёртки двух функций $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$, определённой при помощи формулы (22), выполнено $\widehat{f_1 * f_2}(\lambda) = \widehat{f_2}(\lambda) \circ \widehat{f_1}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \widehat{G}$. Для каждой $f \in \mathcal{S}(G)$ решение уравнения теплопроводности записывается в виде $\exp(t\Delta_H)(f) = f * p_t$; беря обобщённое преобразование Фурье от обеих частей этого равенства, получаем для произвольного $\xi \in Q$ равенство $\mathcal{F}(\exp(t\Delta_H)(f))(\lambda_\xi) = \widehat{p_t}(\lambda_\xi) \circ \widehat{f}(\lambda_\xi)$.

Чтобы получить отсюда $\widehat{p_t}$ и затем по формуле обращения восстановить p_t, нужно аппроксимировать тождественный оператор $\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}})}$ операторами вида $\widehat{f}(\lambda_\xi)$ для некоторых $f \in \mathcal{S}(G)$. Аппроксимация нужна по той причине, что нет такой $f \in \mathcal{S}(G)$, что $\widehat{f}(\lambda_\xi) = \mathrm{Id}_{L^2\left(\mathbb{R}^{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}}\right)}$, поскольку тождественный оператор не является оператором Гильберта – Шмидта.

Итак, в качестве функций f будем последовательно брать гладкие функции ϕ_n с компактным носителем, сходящиеся в обобщённом смысле к δ-функции, сконцентрированной в нейтральном элементе, причём такие, что для всех $g \in G$ верно $\phi_n(g^{-1}) = \phi_n(g)$ и $\phi_n(g) \geq 0$. Из [33] известно, что для такой последовательности имеет место сходимость в $L^2(G)$ при $n \to \infty$ функций $\phi_n * \psi$ к ψ, какой бы ни была $\psi \in L^2(G)$, при этом последовательность операторов, переводящих каждую $\psi \in L^2(G)$ в $\phi_n * \psi$, равномерно ограничена в операторной норме. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}(\widehat{p_t}(\lambda_\xi) \circ \widehat{\phi_n}(\lambda_\xi)) = \mathrm{Tr}(\widehat{p_t}(\lambda_\xi))$.

Если в формуле (35) положить $f = \phi_n * p_t$ и перейти к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\begin{aligned}\exp(t\Delta_H)\phi_n(g) = \int_Q \mathrm{Tr}(\mathcal{F}(\exp(t\Delta_H)\phi_n)(\lambda_\xi) \circ {R'}_\xi(g))|\,\mathrm{pf}(A(\xi))|d\xi = \\ = \int_Q \mathrm{Tr}(\widehat{p_t}(\lambda_\xi) \circ \widehat{\phi_n}(\lambda_\xi) \circ {R'}_\xi(g))|\,\mathrm{pf}(A(\xi))|d\xi \to \\ \to \int_Q \mathrm{Tr}(\widehat{p_t}(\lambda_\xi) \circ {R'}_\xi(g))|\,\mathrm{pf}(A(\xi))|d\xi = \int_Q \mathrm{Tr}({R'}_\xi(g) \circ \widehat{p_t}(\lambda_\xi))|\,\mathrm{pf}(A(\xi))|d\xi; \quad (36)\end{aligned}$$

здесь мы использовали то обстоятельство, что композиция с унитарным оператором ${R'}_\xi(g)$ не влияет на сходимость следов, а также формулу $\mathrm{Tr}(X \circ Y) = \mathrm{Tr}(Y \circ X)$. Таким образом,

$$p(t,g) = \int_Q \mathrm{Tr}({R'}_\xi(g) \circ \widehat{p_t}(\lambda_\xi))|\,\mathrm{pf}(A(\xi))|d\xi. \quad (37)$$

Для вычисления $\mathrm{Tr}(R'_\xi(g)\circ\widehat{p_t}(\lambda_\xi))$ можно использовать тот факт, что если U – унитарный оператор, а K – оператор, имеющий след, причём интегральное ядро оператора K – непрерывная функция k, то оператор $U\circ K$ имеет след, его интегральное ядро k_1 задаётся формулой $k_1(x,y)=(Uk(\cdot,y))(x)$ и $\mathrm{Tr}(U\circ K)=\int Uk(\cdot,x)(x)dx$. Взяв $U=R'_\xi(g)$ и $K=\widehat{p_t}(\lambda_\xi)$ и воспользовавшись найденным ранее выражением (33) для $R'_\xi(g)$, получим

$$\mathrm{Tr}(R'_\xi(g)\circ\widehat{p_t}(\lambda_\xi))=\int_{\mathbb{R}^{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}}}(R'_\xi(g)(\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}(t,\cdot,x)))(x)dx=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^{\frac{\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}_\xi}{2}}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi(\log(\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g)))}\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}(t,\gamma^{-1}((\mathrm{pr}_{VS_\xi}(\gamma_x g))^{-1}\gamma_x g),x)dx. \quad (38)$$

Для завершения доказательства осталось подставить полученное выражение для следа в формулу (37). □

Поскольку $\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}$ обычно выглядит проще исходного ядра теплопроводности, распространена следующая терминология:

Определение 2.2.8. Функцию $\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta_H}(\lambda_\xi)}$, введённую в теореме 2.2.3, называют *приведённым ядром* или *преобразованным ядром*.

2.3. Метод возмущений. Пример с группой Гурса

В терминах анизотропного растяжения определим по исходной субримановой структуре на многообразии M её ε-возмущение. Для базисных векторных полей X_j, $1 \le j \le n$, и $\varepsilon > 0$ положим

$$X_{j,\varepsilon} = \varepsilon^{\deg X_j} \cdot d\delta_{\varepsilon^{-1}} X_j. \tag{39}$$

Аналогично определяются 1-формы ${X_{j,\varepsilon}}^*$, $1 \le j \le n$: ${X_{j,\varepsilon}}^*(X_{j,\varepsilon}) = 1$ и ${X_{j,\varepsilon}}^*(X_{k,\varepsilon}) = 0$ для $j \ne k$. Можно показать (см. [14]), что при $\varepsilon \to 0$ поле $X_{j,\varepsilon}$ сходится к $\widetilde{X}_j$ с первым порядком по ε. В качестве горизонтального распределения ε-возмущения возьмём $\operatorname{span}\{X_{j,\varepsilon} : 1 \le j \le m\}$. Соответствующий ему сублапласиан Δ_ε связан с исходным сублапласианом Δ следующим образом: если $\mathrm{HK}_{\Delta_\varepsilon}$ и HK_Δ – соответствующие ядра теплопроводности, то

$$\mathrm{HK}_{\Delta_\varepsilon}(t, q', q'') = \varepsilon^{\operatorname{hdim} M} \mathrm{HK}_\Delta(\varepsilon^2 t, \delta_{\varepsilon,q}(q'), \delta_{\varepsilon,q}(q'')). \tag{40}$$

Суть метода возмущений состоит в том, что помимо этого соотношения устанавливается также другое – между Δ_ε и $\widetilde{\Delta}$. Прежде чем описывать его, сформулируем новое понятие свёртки, учитывающее переменную t, которая играет роль времени в уравнении теплопроводности. Эту новую операцию мы будем обозначать $*$, так как прежнее понятие свёртки нам в дальнейшем контексте настоящей работы не понадобится. Строго говоря, это два новых понятия, но между ними нет конфликта, так как одно применяется к семействам операторов, а другое – к функциям одного вещественного аргумента и двух аргументов из многообразия; эти понятия связаны друг с другом так, как описано далее.

Определение 2.3.1. Пусть $A = (A(t))_{t\in\mathbb{R}}$ и $B = (B(t))_{t\in\mathbb{R}}$ – семейства операторов, действующих на функции на многообразии M, с интегральными ядрами $a(t,\cdot,\cdot)$ и $b(t,\cdot,\cdot)$ соответственно. Свёртку этих семейств операторов определим по формуле

$$(A * B)(t) = \int_0^t A(t-s)B(s)ds. \tag{41}$$

Свёртку функций $a(t,\cdot,\cdot)$ и $b(t,\cdot,\cdot)$ определим для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x, y \in M$ по формуле

$$(a * b)(t,x,y) = \int_0^t \left(\int_M a(s,x,z)b(t-s,z,y)dz \right) ds. \tag{42}$$

В этих терминах $(a * b)(t,\cdot,\cdot)$ – интегральное ядро оператора $(A * B)(t)$. По причине ассоциативности $*$ для операторов и для функций скобки при многократной свёртке писать не будем.

Соотношение между Δ_ε и $\widetilde{\Delta}$ можно получить при помощи формулы Дюамеля (26), взяв в ней $X = \widetilde{\Delta}$, $Y = \Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta}$:

$$\mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon} = \mathrm{e}^{t\widetilde{\Delta}} + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\Delta_\varepsilon}(\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta})\mathrm{e}^{s\widetilde{\Delta}}ds. \tag{43}$$

Формулу (43) удобно записывать в виде свёртки семейств операторов, определённой равенством (41): $\mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon} = \mathrm{e}^{t\widetilde{\Delta}} + (A * B)(t)$, где $A = (\mathrm{e}^{u\Delta_\varepsilon})_{u\in\mathbb{R}}$, $B = ((\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta})\mathrm{e}^{u\widetilde{\Delta}})_{u\in\mathbb{R}}$.

Применив формулу (43) к самой себе для выражения $\exp((t-s)\Delta_\varepsilon)$, получим

$$\mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon} = \mathrm{e}^{t\widetilde{\Delta}} + \int_0^t \left(\left(\mathrm{e}^{(t-s)\widetilde{\Delta}} + \int_0^{t-s} (\mathrm{e}^{(t-s-s')\Delta_\varepsilon}(\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta})\mathrm{e}^{s'\widetilde{\Delta}}ds') \right) (\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta})\mathrm{e}^{s\widetilde{\Delta}}ds \right), \tag{44}$$

или $\mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon} = \mathrm{e}^{t\widetilde{\Delta}} + \left((\mathrm{e}^{u\widetilde{\Delta}})_{u\in\mathbb{R}} * B \right)(t) + \left((\mathrm{e}^{u\Delta_\varepsilon})_{u\in\mathbb{R}} * B * B \right)(t)$.

Этот процесс можно продолжать и далее, получая таким образом разложение $\exp(t\Delta_\varepsilon)$ по степеням малого (при $\varepsilon \to 0$) оператора $\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta}$:

$$\mathrm{e}^{t\Delta_\varepsilon} = \sum_{r=0}^{N-1} \left((\mathrm{e}^{u\widetilde{\Delta}})_{u\in\mathbb{R}} \underbrace{*B \ldots *B}_{r \text{ свёрток с } B} \right)(t) + (A \underbrace{*B \ldots *B}_{N \text{ свёрток с } B})(t), \tag{45}$$

что после перехода от операторов к их интегральным ядрам и даст необходимую асимптотику $\text{НК}_{\Delta_\varepsilon}$ (а значит, и НК_Δ) до любого требуемого порядка.

Предположим теперь, что все горизонтальные базисные векторные поля

X_j, $1 \le j \le m$, удовлетворяют условию $\mathrm{hg}_0(X_j) = 0$; в [14] это достигалось за счёт существования нормальных форм для контактных распределений на трёхмерных многообразиях. В этом предположении при $\varepsilon \to 0$ имеет место асимптотика $X_{j,\varepsilon} = \widetilde{X}_j + \varepsilon^2 \mathrm{hg}_1(X_j) + o(\varepsilon^2)$. Тогда для оператора $\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta}$ получим следующую асимптотику:

Теорема 2.3.1. *Имеет место равенство*

$$\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta} = \varepsilon^2 Y + o(\varepsilon^2), \tag{46}$$

где

$$Y = \sum_{j=1}^{m} \left(\widetilde{X}_j \mathrm{hg}_1(X_j) + \mathrm{hg}_1(X_j) \widetilde{X}_j + \Theta_j \widetilde{X}_j \right); \tag{47}$$

величины Θ_j *определены в доказательстве.* Y *является дифференциальным оператором второго порядка.*

Доказательство. Сначала докажем, что для всех упорядоченных $(s+1)$-ок $(j_0, ..., j_s)$ из натуральных чисел от 1 до m существует векторное поле $R_{j_0,...,j_s}$, что

$$[[[X_{j_0,\varepsilon}, X_{j_1,\varepsilon}], X_{j_2,\varepsilon}]...X_{j_s,\varepsilon}] = [[[\widetilde{X}_{j_0}, \widetilde{X}_{j_1}], \widetilde{X}_{j_2}]...\widetilde{X}_{j_s}] + \varepsilon^2 R_{j_0,...,j_s} + o(\varepsilon^2). \tag{48}$$

Будем действовать по индукции. Для $s = 0$ поле $X_{j_0,\varepsilon}$, где $1 \le j_0 \le m$, удовлетворяет этому условию с $R_{j_0} = \mathrm{hg}_1(X_{j_0})$, поскольку мы предположили $\mathrm{hg}_0(X_{j_0}) = 0$.

Если для некоторого s утверждение верно, докажем его для случая $s+1$:

$$\begin{gathered}
[[[X_{j_0,\varepsilon}, X_{j_1,\varepsilon}], X_{j_2,\varepsilon}]...X_{j_{s+1},\varepsilon}] = [[[[\widetilde{X}_{j_0}, \widetilde{X}_{j_1}], \widetilde{X}_{j_2}]...\widetilde{X}_{j_s}] + \varepsilon^2 R_{j_0,...,j_s} + o(\varepsilon^2), X_{j_{s+1},\varepsilon}] = \\
= [[[[\widetilde{X}_{j_0}, \widetilde{X}_{j_1}], \widetilde{X}_{j_2}]...\widetilde{X}_{j_s}] + \varepsilon^2 R_{j_0,...,j_s} + o(\varepsilon^2), \widetilde{X}_{j_{s+1}} + \varepsilon^2 \mathrm{hg}_1(X_{j_{s+1}}) + o(\varepsilon^2)] = \\
= [[[\widetilde{X}_{j_0}, \widetilde{X}_{j_1}], \widetilde{X}_{j_2}]...\widetilde{X}_{j_{s+1}}] + \\
+ \varepsilon^2([R_{j_0,...,j_s}, \widetilde{X}_{j_{s+1}}] + [[[[\widetilde{X}_{j_0}, \widetilde{X}_{j_1}], \widetilde{X}_{j_2}]...\widetilde{X}_{j_s}], \mathrm{hg}_1(X_{j_{s+1}})]) + o(\varepsilon^2),
\end{gathered} \tag{49}$$

что доказывает шаг индукции с

$$R_{j_0,\dots,j_{s+1}} = [R_{j_0,\dots,j_s}, \widetilde{X}_{j_{s+1}}] + [[[[\widetilde{X}_{j_0}, \widetilde{X}_{j_1}], \widetilde{X}_{j_2}] \dots \widetilde{X}_{j_s}], \mathrm{hg}_1(X_{j_{s+1}})]. \tag{50}$$

Так как флаг Ли распределения $\mathrm{span}\{X_j : 1 \le j \le m\}$ стабилизируется к касательному расслоению, каждое базисное векторное поле X_j при $1 \le j \le n$ можно записать в виде линейной комбинации полей вида $[[[[X_{j_0}, X_{j_1}], X_{j_2}] \dots X_{j_s}]$ с $s \ge 0$ и $1 \le j_l \le m$ при всех l, таких что $0 \le l \le s$; коэффициенты этой комбинации – гладкие функции.

Беря от обеих частей этого разложения $\varepsilon^{\deg X_j} d\delta_{\varepsilon^{-1}}$ и принимая во внимание тот факт, что $d\delta_{\varepsilon^{-1}}([Z_1, Z_2]) = [d\delta_{\varepsilon^{-1}} Z_1, d\delta_{\varepsilon^{-1}} Z_2]$ для всех векторных полей Z_1 и Z_2, мы получаем, что для всех базисных векторных полей $X_{j,\varepsilon}$, $1 \le j \le n$, имеет место асимптотика $X_{j,\varepsilon} = \widetilde{X}_j + \varepsilon^2 E_j + o(\varepsilon^2)$ с некоторыми векторными полями E_j, которые будет удобно разложить по базису $\{\widetilde{X}_j : 1 \le j \le n\}$ в виде $E_j = \sum_{j'=1}^{n} (\psi_{j,j'} \widetilde{X}_{j'})$, что даст формулу

$$X_{j,\varepsilon} = \widetilde{X}_j + \varepsilon^2 \sum_{j'=1}^{n} (\psi_{j,j'} \widetilde{X}_{j'}) + o(\varepsilon^2). \tag{51}$$

Формула (51), записанная при всевозможных $1 \le j \le n$, является системой линейных уравнений относительно $\widetilde{X}_j$. Решим её:

$$\widetilde{X}_j = X_{j,\varepsilon} - \varepsilon^2 \sum_{j'=1}^{n} (\psi_{j,j'} X_{j',\varepsilon}) + o(\varepsilon^2). \tag{52}$$

Выражая сублапласианы Δ_ε и $\widetilde{\Delta}$ в координатах:

$$\Delta_\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \left({X_{j,\varepsilon}}^2 + \sum_{k=1}^{n} {X_{k,\varepsilon}}^*([X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}]) X_{j,\varepsilon} \right), \widetilde{\Delta} = \sum_{j=1}^{m} \left(\widetilde{X}_j^2 \right), \tag{53}$$

получим

$$\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta} = \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\widetilde{X}_j + \varepsilon^2 \mathrm{hg}_1(X_j) + o(\varepsilon^2)\right)^2 - \widetilde{X}_j^2 + \sum_{k=1}^{n} X_{k,\varepsilon}{}^*([X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}]) X_{j,\varepsilon} \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\varepsilon^2 \widetilde{X}_j \mathrm{hg}_1(X_j) + \varepsilon^2 \mathrm{hg}_1(X_j) \widetilde{X}_j + \sum_{k=1}^{n} X_{k,\varepsilon}{}^*([X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}])(\widetilde{X}_j + \varepsilon^2 \mathrm{hg}_1(X_j)) \right) +$$
$$+ o(\varepsilon^2). \quad (54)$$

Для вычисления $X_{k,\varepsilon}{}^*([X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}])$ разложим $[X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}]$ по базису $\{X_{k,\varepsilon}{}^* : 1 \le k \le n\}$ в терминах структурных констант и коэффициентов $\psi_{j,j'}$:

$$[X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}] = \left[\widetilde{X}_k + \varepsilon^2 \sum_{k'=1}^{n} (\psi_{k,k'} \widetilde{X}_{k'}), \widetilde{X}_j + \varepsilon^2 \sum_{j'=1}^{n} (\psi_{j,j'} \widetilde{X}_{j'}) \right] + o(\varepsilon^2) =$$
$$= [\widetilde{X}_k, \widetilde{X}_j] + \varepsilon^2 \left(\sum_{k'=1}^{n} ([\psi_{k,k'} \widetilde{X}_{k'}, \widetilde{X}_j]) + \sum_{j'=1}^{n} ([\widetilde{X}_k, \psi_{j,j'} \widetilde{X}_{j'}]) \right) + o(\varepsilon^2) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} (\widetilde{c}_{k,j,l} \widetilde{X}_l) + \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{n} \left(\psi_{k,l} [\widetilde{X}_l, \widetilde{X}_j] - \psi_{j,l} [\widetilde{X}_l, \widetilde{X}_k] + (\widetilde{X}_k(\psi_{j,l}) - \widetilde{X}_j(\psi_{k,l})) \cdot \widetilde{X}_l \right) +$$
$$+ o(\varepsilon^2) = \sum_{l=1}^{n} \left(\widetilde{c}_{k,j,l} \cdot (X_{l,\varepsilon} - \varepsilon^2 \sum_{j'=1}^{n} (\psi_{l,j'} X_{j',\varepsilon})) \right) +$$
$$+ \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j'=1}^{n} ((\psi_{k,l} \widetilde{c}_{l,j,j'} - \psi_{j,l} \widetilde{c}_{l,k,j'}) X_{j',\varepsilon}) + \left(\widetilde{X}_k(\psi_{j,l}) - \widetilde{X}_j(\psi_{k,l}) \right) X_{l,\varepsilon} \right) + o(\varepsilon^2).$$
$$(55)$$

Беря в (55) коэффициент при $X_{k,\varepsilon}$, получим

$$X_{k,\varepsilon}{}^*([X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}]) = \widetilde{c}_{k,j,k} - \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{n} (\widetilde{c}_{k,j,l} \psi_{l,k}) + \varepsilon^2 \left(\widetilde{X}_k(\psi_{j,k}) - \widetilde{X}_j(\psi_{k,k}) \right) +$$
$$+ \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{n} (\psi_{k,l} \widetilde{c}_{l,j,k} - \psi_{j,l} \widetilde{c}_{l,k,k}) + o(\varepsilon^2). \quad (56)$$

Просуммируем (56) по k. Формула (4) для структурных констант нильпотентной аппроксимации даёт $\widetilde{c}_{k,j,k} = \widetilde{c}_{j,k,k} = 0$, так как ни для какого базисного поля X_j не выполнено $\deg X_j = 0$; таким образом, $\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{c}_{k,j,k}) = 0$. Учитывая это, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}(X_{k,\varepsilon}{}^*([X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}])) = \varepsilon^2\Theta_j + o(\varepsilon^2), \tag{57}$$

где

$$\Theta_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\widetilde{X}_k(\psi_{j,k}) - \widetilde{X}_j(\psi_{k,k}) + \sum_{l=1}^{n}\left(\psi_{k,l}\widetilde{c}_{l,j,k} - \psi_{j,l}\widetilde{c}_{l,k,k} - \widetilde{c}_{k,j,l}\psi_{l,k}\right)\right). \tag{58}$$

Для упрощения этого выражения воспользуемся помимо равенства $\widetilde{c}_{l,k,k} = 0$ также тем, что $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\psi_{k,l}\widetilde{c}_{l,j,k} - \widetilde{c}_{k,j,l}\psi_{l,k}\right) = 0$, так как слагаемые с парами номеров (k,l) и (l,k) при $k < l$ взаимно уничтожаются, а слагаемые с парами номеров (k,k) равны 0. Таким образом,

$$\Theta_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\widetilde{X}_k(\psi_{j,k}) - \widetilde{X}_j(\psi_{k,k})\right). \tag{59}$$

Подставляя вычисленное выражение $\sum_{k=1}^{n}(X_{k,\varepsilon}{}^*([X_{k,\varepsilon}, X_{j,\varepsilon}]))$ в формулу для оператора $\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta}$, окончательно имеем:

$$\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta} = \varepsilon^2\sum_{j=1}^{m}\left(\widetilde{X}_j\mathrm{hg}_1(X_j) + \mathrm{hg}_1(X_j)\widetilde{X}_j + \Theta_j\widetilde{X}_j\right) + o(\varepsilon^2).$$

Это и есть искомая асимптотика (46) с обозначением (47). $\square$

Теперь, когда формула для Y есть, метод возмущений можно применять таким же образом, как в [14]: принимая $N = 2$ в разложении $\exp(t\Delta_\varepsilon)$ и учитывая формулу (40), получим

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mathrm{hdim}\, M}\mathrm{HK}_\Delta(\varepsilon^2, 0, 0) = \mathrm{HK}_{\Delta_\varepsilon}(1, 0, 0) = \\ = \mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}}(1, 0, 0) + \varepsilon^2(\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}} * Y(\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}}))(1, 0, 0) + O(\varepsilon^4),\end{aligned} \tag{60}$$

где считается, что оператор Y действует по первой переменной из M.

Так как коэффициент $\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}} * Y(\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}})(1,0,0)$ равен

$$\int_0^1 \int_{\widetilde{M}_0} (\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}}(s,0,z) Y(\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}})(1-s,z,0)) dz ds = \\ = \int_0^1 \int_{\widetilde{M}_0} (p_{\widetilde{\Delta}}(s,z) Y(p_{\widetilde{\Delta}})(1-s,z)) dz ds, \quad (61)$$

для его вычисления нужно будет применить теорему 2.2.3 с $G = \widetilde{M}_0$. В случае трёхмерных контактных многообразий это выражение поддаётся дальнейшему упрощению, если интегрирование начать с координат x и y (здесь $z = (x, y, w)$ с показателями однородности $\nu(x) = \nu(y) = 1$, $\nu(w) = 2$); в этом случае вычисление сводится к поиску моментов двумерного нормального распределения. В более общей ситуации (даже в случае групп Гурса, разбираемом далее) такого упрощения сделать не удаётся, хотя качественное поведение ядра $p_{\widetilde{\Delta}}(s,z)$ при $z \to \infty$ – экспоненциальное убывание – всё ещё имеет место (см. [45]).

Без предположения $\mathrm{hg}_0(X_j) = 0$ мы бы получили в асимптотическом разложении величины $\varepsilon^{\mathrm{hdim}\, M}\mathrm{HK}_\Delta(\varepsilon^2, 0, 0)$ члены первого порядка по ε вследствие того, что разность $\Delta_\varepsilon - \widetilde{\Delta}$ была бы всего лишь величиной $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, и после подстановки $t = \varepsilon^2$ у нас не было бы разложения вида $\mathrm{HK}_\Delta(t,x,x) = t^{-\frac{\mathrm{hdim}\, M}{2}}(a_0 + a_1 t + O(t^2))$.

В качестве примера мы покажем, как вышеизложенные методы работают для субриманова многообразия, нильпотентной аппроксимацией которого является n-мерная группа Гурса.

Напомним формулу (5), которой задаётся операция умножения в группе Гурса:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \star \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{e}_k = (x_1 + y_1)\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n} \left(x_j + \sum_{k=2}^{j} \left(\frac{{x_1}^{j-k}}{(j-k)!} y_k \right) \right) \mathbf{e}_j,$$

причём $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{n} 0\mathbf{e}_j$ – нейтральный элемент.

Нам, однако, будет удобно слегка изменить обозначения. Элементы группы Гурса можно также представлять квадратными матрицами порядка n следующего вида:

$$\exp(aX_1+\sum_{j=2}^{n} b_{j-1}X_j) = \exp\begin{pmatrix} a\cdot J_{n-1} & \overleftarrow{b}^{\top} \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(a\cdot J_{n-1}) & \varphi(a\cdot J_{n-1})\overleftarrow{b}^{\top} \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

где J_{n-1} – верхнетреугольная матрица порядка $n-1$, являющаяся жордановой клеткой с собственным значением 0, $\overrightarrow{0}_{n-1}$ – нулевая вектор-строка длины $n-1$, $\overleftarrow{b}$ – вектор-строка $(b_{n-1},...,b_1)$ длины $n-1$ (стрелка влево означает обратный порядок компонент по отношению к вектору $\overrightarrow{b}=(b_1,...,b_{n-1})$), $\top$ – транспонирование, $\varphi(z)=\begin{cases}\frac{\exp(z)-1}{z}, z\neq 0,\\ 1, z=0,\end{cases}$ (выражение $\varphi(a\cdot J_{n-1})$ понимается в смысле функции от матрицы). В качестве групповой операции берётся умножение матриц, в качестве экспоненциального отображения из алгебры Ли в группу Ли – матричная экспонента. Этот вариант определения $\star$, который мы и будем использовать в дальнейшем, незначительно отличается от исходного, но ему эквивалентен. Проверить это можно, сопоставив каждому вектору $\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^n$ матрицу $\begin{pmatrix} \exp(x_1\cdot J_{n-1}) & \overleftarrow{x_{\geq 2}}^{\top} \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} x_1\cdot J_{n-1} & (\varphi(x_1\cdot J_{n-1}))^{-1}\cdot\overleftarrow{x_{\geq 2}}^{\top} \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$, где $\overleftarrow{x_{\geq 2}}=(x_n,...,x_2)$ – обратная запись вектора, полученного из $\overrightarrow{x}$ удалением первой компоненты; запись $(\varphi(x_1\cdot J_{n-1}))^{-1}$ корректна, так как матрица $\varphi(x_1\cdot J_{n-1})$ верхнетреугольная, причём все элементы её главной диагонали равны 1. Такое сопоставление и будет искомым изоморфизмом, поскольку для всех $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\in\mathbb{R}^n$

верно

$$\begin{pmatrix} \exp(x_1 \cdot J_{n-1}) & \overleftarrow{x_{\geq 2}}^\top \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(y_1 \cdot J_{n-1}) & \overleftarrow{y_{\geq 2}}^\top \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \exp(z_1 \cdot J_{n-1}) & \overleftarrow{z_{\geq 2}}^\top \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (63)$$

где $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \star \overrightarrow{y}$ по исходному определению $\star$. В дальнейшем обозначать символом $\star$ мы будем именно новую операцию.

Ядро теплопроводности в группе Гурса мы будем искать при помощи теоремы 2.2.3. Так как ключевым её компонентом является метод орбит, мы должны будем провести все вычисления, составляющие его. В терминах новой групповой операции присоединённое представление запишется в виде

$$\mathrm{Ad}_{\exp(xX_1+\sum_{j=2}^n y_{j-1}X_j)} \left(aX_1 + \sum_{j=2}^n b_{j-1}X_j\right) =$$
$$= \exp \begin{pmatrix} xJ_{n-1} & \overleftarrow{y}^\top \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} aJ_{n-1} & \overleftarrow{b}^\top \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} -xJ_{n-1} & -\overleftarrow{y}^\top \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} aJ_{n-1} & \exp(xJ_{n-1})\overleftarrow{b}^\top - aJ_{n-1}\varphi(xJ_{n-1})\overleftarrow{y}^\top \\ \overrightarrow{0}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Определив функционалы ${X^*}_j$, где $1 \leq j \leq n$, соотношениями ${X^*}_j(X_j) = 1$ и ${X^*}_j(X_k) = 0$ при $j \neq k$, мы получаем отсюда следующую формулу для коприсоединённого представления:

$$\mathrm{Ad^*}_{\exp(xX_1+\sum_{j=2}^n y_{j-1}X_j)} \left(\alpha {X^*}_1 + \sum_{j=2}^n \beta_{j-1}{X^*}_j\right) \left(aX_1 + \sum_{j=2}^n b_{j-1}X_j\right) =$$
$$= \left(\alpha {X^*}_1 + \sum_{j=2}^n \beta_{j-1}{X^*}_j\right) \left(\mathrm{Ad}_{\exp(-xX_1-\sum_{j=2}^n y_{j-1}X_j)} \left(aX_1 + \sum_{j=2}^n b_{j-1}X_j\right)\right) =$$
$$= \alpha a + \overleftarrow{\beta} \cdot (\exp(-xJ_{n-1})\overleftarrow{b}^\top + aJ_{n-1}\varphi(-xJ_{n-1})\overleftarrow{y}^\top), \quad (65)$$

что в терминах функционалов $X^*{}_j$, $1 \le j \le n$, запишется так:

$$\mathrm{Ad}^*{}_{\exp(xX_1+\sum_{j=2}^n y_{j-1}X_j)}\left(\alpha X^*{}_1 + \sum_{j=2}^n \beta_{j-1} X^*{}_j\right) =$$

$$= \left(\alpha + \overleftarrow{\beta}\, J_{n-1}\varphi(-xJ_{n-1})\overleftarrow{y}^{\top}\right) X^*{}_1 + \overleftarrow{\beta}\, \exp(-xJ_{n-1}) \begin{pmatrix} X^*{}_n \\ \vdots \\ X^*{}_2 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Орбиты можно найти, варьируя переменные x и $\overrightarrow{y}$, т. е. для каждого элемента $\xi = \alpha X^*{}_1 + \sum_{j=2}^n \beta_{j-1} X^*{}_j$ его орбита, в соответствии с определением 2.2.3, состоит в точности из всех элементов вида $\mathrm{Ad}^*{}_{\exp(xX_1+\sum_{j=2}^n y_{j-1}X_j)}(\xi)$ для всевозможных $x \in \mathbb{R}$ и $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Используя орбиты, позже мы классифицируем неприводимые унитарные представления; для этого нам нужно найти для каждого $\xi \in \mathfrak{g}^*$ подалгебру максимальной размерности, подчинённую ξ, и соответствующую ей подгруппу, с которой мы проведём операцию индуцирования. Мы воспользуемся теоремой Пуканского о том, что каждая максимальная подчинённая ковектору ξ подалгебра содержит $\mathfrak{g}_\xi$; это сильно упростит рассуждения.

Для каждого $\xi = \alpha X^*{}_1 + \sum_{j=2}^n \beta_{j-1} X^*{}_j$ кроме тех, у которых $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{0}$, обозначим через $j_{\max}$ наибольший номер j, такой что $\beta_j \neq 0$. Орбита ковектора ξ и множество максимальных подчиненных ему подалгебр будут зависеть от того, чему равен (и существует ли вообще) $j_{\max}$ для данного ξ:

(i) Если j_{max} не существует (т. е. $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{0}$), орбита состоит из одной точки $\alpha X^*{}_1$, для которой $\mathfrak{g}_{\alpha X^*{}_1} = \mathfrak{g}$. Максимальная подчинённая подалгебра в этом случае, очевидно, единственна и равна $\mathfrak{g}$.

(ii) Если $j_{max} = 1$, орбита состоит из одной точки $\alpha X^*{}_1 + \beta_1 X^*{}_2$; имеет место равенство $\mathfrak{g}_{\alpha X^*{}_1 + \beta_1 X^*{}_2} = \mathfrak{g}$. Максимальная подчинённая подалгебра также равна $\mathfrak{g}$.

(iii) Орбита ковектора $\alpha X^*{}_1 + \beta_1 X^*{}_2 + \beta_2 X^*{}_3$, где $\beta_2 \neq 0$ (т. е. $j_{max} = 2$), равна $\mathrm{span}\{X^*{}_1, X^*{}_2\} + \beta_2 X^*{}_3$ (знаком “$+$” обозначен параллельный сдвиг множества на данный элемент $\mathfrak{g}^*$). В этом случае $\mathfrak{g}_{\alpha X^*{}_1+\beta_1 X^*{}_2+\beta_2 X^*{}_3} = \mathrm{span}\{X_j : 3 \leq j \leq n\}$. Здесь максимальная подчинённая подалгебра не единственна, поэтому применяется конструкция Вернь (теорема 2.2.2), которая при $V_k = \mathrm{span}\left(\{X_j : n+1-k \leq j \leq n\}\right)$, где $0 \leq k \leq n$, даёт подалгебру $\mathrm{span}\left(\{X_j : 2 \leq j \leq n\}\right)$. Отметим, что вместо подалгебры Вернь можно было бы взять подалгебру $\mathrm{span}\left(\{X_1\} \cup \{X_j : 3 \leq j \leq n\}\right)$, которая приведёт к некоторому другому представлению из того же класса эквивалентности.

(iv) При $j_{max} \geq 3$ орбита двумерна и параметризуется коэффициентами при $X^*{}_1$ и при $X^*{}_{j_{max}}$ следующим образом:

$$\mathcal{O}_{\alpha X^*{}_1+\sum_{j=2}^{j_{max}+1}\beta_{j-1}X^*{}_j} = \\ = \left\{ yX^*{}_1 + \sum_{j=1}^{j_{max}} \left(\sum_{k=j}^{j_{max}} \left(\frac{\left(x-\beta_{j_{max}-1}\right)^{k-j}\beta_k}{\beta_{j_{max}}{}^{k-j}(k-j)!} \right) \cdot X^*{}_{j+1} \right) : x, y \in \mathbb{R} \right\}. \quad (67)$$

Эта параметризация получается так. Поскольку $X^*{}_{j_{max}}$-ая компонента ковектора $\mathrm{Ad}^*{}_{\exp(xX_1+\sum_{j=2}^{n} y_{j-1}X_j)}(\alpha X^*{}_1 + \sum_{j=2}^{n}\beta_{j-1}X^*{}_j)$ равна x, мы можем задать её произвольно. Исходя из этого остальные компоненты, кроме $X^*{}_1$-ой, мы можем определить однозначно, поскольку они не зависят от переменных $\overrightarrow{y}$. Компонента, соответствующая $X^*{}_1$, имеет вид $\beta_{j_{max}}y_{j_{max}-1} + Z$, где выражение Z не зависит от $y_{j_{max}-1}$. Так как $\beta_{j_{max}} \neq 0$, $X^*{}_1$-ую компоненту можно сделать любым наперёд заданным значением, выбрав подходящим образом $y_{j_{max}-1}$. Этим и исчерпываются все ковекторы из орбиты ковектора $\alpha X^*{}_1 + \sum_{j=2}^{j_{max}+1}\beta_{j-1}X^*{}_j$ с $\beta_{j_{max}} \neq 0$ при $j_{max} \geq 3$.

Беря в качестве представителя орбиты тот ковектор, у которого параметры x и y равны нулю, получим $\mathfrak{g}_{\alpha X^*{}_1+\sum_{j=2}^{j_{max}+1}\beta_{j-1}X^*{}_j} = \mathrm{span}(\Phi \cup \Psi)$, где $\Phi = \{X_j : j_{max}+1 \leq j \leq n\}$ и

$$\Psi = \left\{ \left(X_j - \sum_{k=j}^{j_{max}} \left(\frac{\left(-\beta_{j_{max}-1}\right)^{k-j}\beta_k}{\beta_{j_{max}}{}^{k+1-j}(k-j)!} \right) X_{j_{max}} \right) : 2 \leq j \leq j_{max}-1 \right\}.$$

Максимальная подчинённая подалгебра единственна и равна span $(\{X_j : 2 \leq j \leq n\})$.

Используя эти данные об орбитах и максимальных подчинённых подалгебрах, можно построить соответствующие (в смысле метода Кириллова) представления.

В случаях (i) и (ii) операция индуцирования тривиальна: соответствующее ковектору $\xi = \alpha {X^*}_1 + \beta_1 {X^*}_2$ (не важно, равно нулю β_1 или нет) одномерное представление, задаваемое формулой $\rho_{\xi,G}(a\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n} b_{j-1}\mathbf{e}_j) = \exp(2\pi\mathrm{i}(\alpha a + \beta_1 b_1)) \cdot \mathrm{Id}$, переходит в себя, так как подгруппа $VS_\xi = \exp(\mathfrak{vs}_\xi)$ уже есть вся группа G.

Значительно богаче структура представлений в случаях (iii) и (iv). Поскольку орбиты в этих случаях двумерны, гильбертово пространство соответствующих представлений можно отождествить с $L^2(\mathbb{R})$, используя вместо R_ξ эквивалентное представление ${R'}_\xi$; это следует из общего факта, что размерность пространства классов смежности по VS_ξ равна половине размерности орбиты $\mathcal{O}_\xi$. Общую для этих случаев подалгебру Верные $\mathfrak{vs}_\xi = \mathrm{span}\,(\{X_j : 2 \leq j \leq n\})$ обозначим через $\mathfrak{v}$, так как она не зависит от ξ, взятого из орбиты типа (iii) или (iv); для соответствующей подгруппы $\exp(\mathfrak{v})$ примем обозначение V.

Для нахождения индуцированного представления произведём факторизацию G на $\mathbb{R}$ и V. Отображение $\gamma : \mathbb{R} \to G$ из определения 2.2.7 даётся формулой $\gamma(x) = x\mathbf{e}_1$. Представим $\gamma(x) \star g \in G$, где $x \in \mathbb{R}$ и $g \in G$, в виде $h \star \gamma(w)$, где $h \in V$ и $w \in \mathbb{R}$:

$$x\mathbf{e}_1 \star \left(a\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n} b_{j-1}\mathbf{e}_j \right) = \\ = \left(\sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{a^l b_{k-l}}{(l+1)!} \right) \cdot \frac{x^{j-1-k}}{(j-1-k)!} \right) \right) \mathbf{e}_j \right) \star (x+a)\mathbf{e}_1. \quad (68)$$

Следовательно, представление ${R'}_\xi$, в соответствии с формулой (33), запишется в таком виде: для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\left(R'_\xi(a\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n} b_{j-1}\mathbf{e}_j)f\right)(x) = \exp(2\pi\mathrm{i}\xi(\log(h)))f(w) =$$

$$= \exp\left(2\pi\mathrm{i}\xi\left(\sum_{j=2}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{j-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{a^l b_{k-l}}{(l+1)!}\right)\cdot\frac{x^{j-1-k}}{(j-1-k)!}\right)\right)X_j\right)\right)\right)f(x+a) =$$

$$= \exp\left(2\pi\mathrm{i}\xi\left(\sum_{j=2}^{n}\left(P_j(a, \overrightarrow{b}, x)\cdot X_j\right)\right)\right)f(x+a) \quad (69)$$

(последнее равенство – это просто обозначение коэффициентов при X_j).

Именно на этих представлениях (точнее, классах представлений) сосредоточена мера Планшереля. Более того, достаточно рассматривать только $j_{max} = n-1$, так как это условие задаёт открытое плотное подмножество в множестве орбит максимальной размерности. В самом деле, условие $j_{\max} = n-1$ эквивалентно тому, что $\beta_{n-1} \neq 0$, т. е. из всего $\mathfrak{g}^*$ мы удаляем $(n-1)$-мерную гиперплоскость; сопоставление каждому элементу $\mathfrak{g}^*$ его орбиты переводит, с учетом построения топологии $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*$, дополнение гиперплоскости в некоторое открытое плотное множество орбит.

Из каждой такой орбиты выберем представитель вида $\xi = \sum_{j=2}^{n-2}(\beta_{j-1}X^*{}_j) + \beta_{n-1}X^*{}_n$, где $\beta_{n-1} \neq 0$. Это можно сделать по следующей причине: коэффициенты при $X^*{}_1$ и при $X^*{}_{n-1}$, как видно из выражения для орбит, можно занулить (там они были обозначены y и x соответственно), β_{n-1} положить произвольным отличным от нуля числом, а оставшиеся однозначно подогнать под любые заранее заданные значения, приравнивая к ним последовательно (по убыванию j) коэффициенты при $X^*{}_j$ и решая линейное уравнение с коэффициентом 1 на каждую новую переменную β_j. Так мы получаем параметризацию множества орбит, которое при соответствии $\mathfrak{g}^*/\mathrm{Ad}^*$ и $\widehat{G}$ переходит в некоторое подмножество $\widehat{G}$, дополнение которого имеет меру Планшереля 0. Мера на орбитах, соответствующая мере Планшереля, в терминах построенной параметризации будет иметь вид $P(d(\beta_j)_{1\le j\le n-1; j\ne n-2}) = |\beta_{n-1}| d(\beta_j)_{1\le j\le n-1; j\ne n-2}$, так как для $\xi = \sum_{j=2}^{n-2}(\beta_{j-1}X^*{}_j) + \beta_{n-1}X^*{}_n$ выполнено $|\operatorname{pf}(\xi)| = |\beta_{n-1}|$. В самом деле, используя базис $\{X_1, X_{n-1}\}$ пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$, найдём определитель матрицы $\begin{pmatrix} \xi([X_1,X_1]) & \xi([X_1,X_{n-1}]) \\ \xi([X_{n-1},X_1]) & \xi([X_{n-1},X_{n-1}]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{n-1} \\ -\beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$; он равен ${\beta_{n-1}}^2$.

Преобразованный оператор $\widehat{\Delta} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}$ будет иметь вид $\widehat{\Delta}(\lambda_\xi) = d^2(R'_\xi)(X_1) + d^2(R'_\xi)(X_2)$, где дифференциал представления R на элементе $X \in \mathfrak{g}$, обозначаемый $dR(X)$, – оператор на гильбертовом пространстве H_R представления R, определяемый на произвольном $v \in H_R$ по формуле

$$dR(X)(v) = \left(\frac{d}{dt}(R_{\exp(tX)}(v))\right)\Big|_{t=0} \tag{70}$$

и $d^2R(X) = dR(X) \circ dR(X)$. Для выражения оператора $\widehat{\Delta}$ в таком виде мы использовали общую формулу из [10], справедливую для всех унимодулярных групп Ли.

Прямое вычисление даёт $d(R'_\xi)(X_1)(f) = f'$, где производная функции $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ понимается в обобщённом смысле, и $d(R'_\xi)(X_2)(f) = M_\xi \cdot f$ со следующей функцией M_ξ:

$$M_\xi(x) = 2\pi \mathrm{i} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n-3}\left(\beta_j \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right) + \beta_{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right). \tag{71}$$

В самом деле, используя формулу (69) при $\xi = \sum_{j=2}^{n-2}(\beta_{j-1}X^*{}_j) + \beta_{n-1}X^*{}_n$, получим $(R'_\xi)_{\exp(tX_1)}(f)(x) = (R'_\xi)_{t\mathbf{e}_1}(f)(x) = f(x+t)$, следовательно,

$$d(R'_\xi)(X_1)(f)(x) = \left(\frac{d}{dt}((R'_\xi)_{\exp(tX_1)}(f)(x))\right)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}(f(x+t))\right)\Big|_{t=0} = f'(x). \tag{72}$$

Аналогично

$$(R'_\xi)_{\exp(tX_2)}(f)(x) = (R'_\xi)_{t\mathbf{e}_2}(f)(x) = \\ = \exp\left(2\pi\mathrm{i}\xi\left(\sum_{j=2}^{n}(t\frac{x^{j-2}}{(j-2)!}X_j)\right)\right)f(x) = \exp\left(tM_\xi(x)\right)f(x); \quad (73)$$

последнее равенство следует из того, что $\xi = \sum_{j=2}^{n-2}(\beta_{j-1}X^*{}_j)+\beta_{n-1}X^*{}_n$. Отсюда

$$d(R'_\xi)(X_2)(f)(x) = \left(\frac{d}{dt}((R'_\xi)_{\exp(tX_2)}(f)(x))\right)\Big|_{t=0} = \\ = \left(\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{tM_\xi(x)}f(x))\right)\Big|_{t=0} = M_\xi(x)f(x). \quad (74)$$

Следовательно, $\widehat{\Delta}(\lambda_\xi)(f) = f'' + {M_\xi}^2 f$. В целях удобства обозначений будем писать $f'' + (M_{\sum_{j=2}^{n-2}(\beta_{j-1}X^*{}_j)+\beta_{n-1}X^*{}_n})^2 f = \widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}} f$.

Теорема 2.2.3, применённая к группе Гурса, принимает с учётом проделанных вычислений следующий вид:

Следствие 2.3.1. *Ядро теплопроводности в n-мерной группе Гурса, соответствующее сублапласиану $\Delta = {X_1}^2 + {X_2}^2$, где горизонтальное распределение есть* $\mathrm{span}(\{X_1, X_2\})$ *с $X_1 = \partial_1$ и $X_2 = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{{x_1}^k}{k!}\partial_{k+2}$, записывается в следующем виде:*

$$p(t, a\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n} b_{j-1}\mathbf{e}_j) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(\beta_{n-1}P_n(a,\overrightarrow{b},x)+\sum_{j=1}^{n-3}(\beta_j P_{j+1}(a,\overrightarrow{b},x))\right)}\times \\ \times \mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}}(t, x+a, x)|\beta_{n-1}|dxd(\beta_j)_{1\le j\le n-3}d\beta_{n-1}. \quad (75)$$

Далее формула (75) будет применяться в методе возмущений. Для удобства будем писать $p(t, a\mathbf{e}_1+\sum_{j=2}^{n} b_{j-1}\mathbf{e}_j) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})} K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a)d(\overrightarrow{\beta}, x)$, пользуясь следующими обозначениями:

$$Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a, \overrightarrow{b}) = 2\pi\mathrm{i}\left(\beta_{n-1}P_n(a, \overrightarrow{b}, x) + \sum_{j=1}^{n-3}(\beta_j P_{j+1}(a, \overrightarrow{b}, x))\right), \\ K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a) = \mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\overrightarrow{\beta}}}(t, x+a, x)|\beta_{n-1}|; \quad (76)$$

везде, где обозначена зависимость от $\overrightarrow{\beta}$, подразумевается пропуск компоненты с индексом $n-2$. Напомним обозначение из (69):

$$P_j(a, \overrightarrow{b}, x) = \sum_{k=1}^{j-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{a^l b_{k-l}}{(l+1)!} \right) \cdot \frac{x^{j-1-k}}{(j-1-k)!} \right).$$

Пусть рассматриваемое субриманово многообразие имеет горизонтальное распределение $\mathrm{span}\{X_1, X_2\}$, полученное из распределения Гурса возмущением, записываемым в окрестности точки $(0, ..., 0)$ с точностью до однородных векторных полей с показателем однородности 2 и выше следующим образом: при всех $p \leq -2$ выполнено $\mathrm{hg}_p(X_1) = \mathrm{hg}_p(X_2) = 0$, и, кроме того,

$$\mathrm{hg}_{-1}(X_1) = \widetilde{X}_1, \mathrm{hg}_0(X_1) = 0, \mathrm{hg}_1(X_1) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{\alpha \in \Phi_r} (u_{\alpha,r} x^\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x_r} \right),$$

$$\mathrm{hg}_{-1}(X_2) = \widetilde{X}_2, \mathrm{hg}_0(X_2) = 0, \mathrm{hg}_1(X_2) = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{\alpha \in \Phi_r} (v_{\alpha,r} x^\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x_r} \right),$$

где Φ_r – множество всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, для которых выполнено

$$\alpha_1 + \sum_{j=2}^{n} ((j-1)\alpha_j) = \begin{cases} 2, r = 1, \\ r, r > 1, \end{cases}$$

$\widetilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\widetilde{X}_2 = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{{x_1}^k}{k!} \frac{\partial}{\partial x_{k+2}}$, переменной x_1 приписан показатель однородности 1, каждой переменной x_r при $r \geq 2$ приписан показатель однородности $r-1$, оператору дифференцирования по каждой переменной приписан её показатель однородности со знаком минус. Через $u_{\alpha,r}$ и $v_{\alpha,r}$ обозначены постоянные, называемые *параметрами возмущения*, для которых при $3 \leq j \leq n-1$ выполнено $[X_2, X_j] \in \mathrm{span}(\{X_k : 1 \leq k \leq j\})$, где $X_j = [X_1, X_{j-1}]$ при $3 \leq j \leq n$. Это условие накладывается потому, что нильпотентная аппроксимация нашего многообразия – группа Гурса.

Базисными векторными полями нильпотентной аппроксимации при $3 \leq j \leq n$ будут $\widetilde{X}_j = [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_{j-1}]$. Форма объёма для меры Поппа имеет вид ${X_1}^* \wedge$

$\ldots \wedge X_n{}^*$; это можно проверить, например, по формуле из [15].

Нам понадобится тот факт, что операторы $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$, можно выразить в базисе $\{\widetilde{X}_j : 1 \leq j \leq n\}$ с коэффициентами, которые суть многочлены от x_1, поскольку решаемая в данном случае система линейных уравнений имеет треугольную матрицу из многочленов от x_1, все элементы диагонали которой равны 1.

Для применения метода возмущений вычислим оператор Y, данный в теореме 2.3.1:

$$Y = \widetilde{X}_1 \mathrm{hg}_1(X_1) + \mathrm{hg}_1(X_1)\widetilde{X}_1 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\widetilde{X}_k(\psi_{1,k}) - \widetilde{X}_1(\psi_{k,k})\Big) \cdot \widetilde{X}_1 + \\ + \widetilde{X}_2 \mathrm{hg}_1(X_2) + \mathrm{hg}_1(X_2)\widetilde{X}_2 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\widetilde{X}_k(\psi_{2,k}) - \widetilde{X}_2(\psi_{k,k})\Big) \cdot \widetilde{X}_2, \quad (77)$$

где коэффициенты $\psi_{j,j'}$ такие, как в доказательстве теоремы 2.3.1. Их можно вычислить явно. Для этого запишем, в терминах доказательства теоремы 2.3.1, равенство (48) с $j_0 = 2$ и $j_k = 1$ для $1 \leq k \leq s$. Получим для $1 \leq s \leq n-2$:

$$(-1)^s X_{s+2,\varepsilon} = (-1)^s \widetilde{X}_{s+2} + \varepsilon^2 R_{2,\underbrace{1,\,\ldots,\,1}_{s \text{ единиц}}} + o(\varepsilon^2). \quad (78)$$

Таким образом, для всех $j \geq 3$ величина $\psi_{j,j'}$ есть коэффициент при $\widetilde{X}_{j'}$ в разложении оператора $E_j = (-1)^j R_{2,\underbrace{1,\,\ldots,\,1}_{(j-2) \text{ единиц}}}$ по базису $\{\widetilde{X}_{j'} : 1 \leq j' \leq n\}$. Из рекуррентной формулы для $R_{j_0,\ldots,j_s}$, выведенной в начале доказательства теоремы 2.3.1, видно, что коэффициенты $\psi_{j,j'}$ для $j \geq 3$ и $1 \leq j' \leq n$ суть полиномы от координат и параметров возмущения. Для $\psi_{1,j'}$ и $\psi_{2,j'}$ факт их полиномиальной зависимости от координат и параметров возмущения тривиален: в обозначениях, данных в доказательстве теоремы 2.3.1, $E_1 = \mathrm{hg}_1(X_1)$ и $E_2 = \mathrm{hg}_1(X_2)$.

Подытоживая вышесказанное, заключаем, что коэффициенты Y полиномиально зависят от координат и параметров возмущения.

Ранее в настоящем параграфе было сказано, что действуя по методу, данному в [14], можно получить при $\varepsilon \to 0$ асимптотику (60). Если нильпотентная аппроксимация многообразия M есть n-мерная группа Гурса, то $\operatorname{hdim} M = \frac{n(n-1)}{2} + 1$; это можно вычислить по формуле, данной в [9].

Нас интересует выражение для коэффициента при ε^2 в правой части последнего равенства из (60), который равен $\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}} * Y(\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}})(1,0,0)$. Поскольку для его вычисления необходимо дифференцировать $p(t, a\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^n b_{j-1}\mathbf{e}_j)$ дважды по переменным a и $\overrightarrow{b}$, этот коэффициент будет зависеть не только от преобразованного ядра, но также от его производных (до второго порядка включительно) по переменной a.

Дальше вычисления получаются очень громоздкими, поэтому приведём их схематично. Если коэффициенты оператора Y обозначить $Y = \sum_{j\le k} (F_{j,k}((a,\overrightarrow{b}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\partial_j\partial_k) + \sum_j (G_j((a,\overrightarrow{b}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\partial_j)$ (слагаемого нулевого порядка в Y нет), то будем иметь следующее выражение, учитывая, что для всех $j,k \ge 2$ имеет место $\partial_j\partial_k Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b}) = 0$:

$$
\begin{aligned}
Y(p_{\widetilde{\Delta}})(t,a,\overrightarrow{b}) = \sum_{j\le k} \Big(& F_{j,k}((a,\overrightarrow{b}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})} K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a)\partial_j Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})\partial_k Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b}) d(\overrightarrow{\beta},x)\Big) + \\
+ \sum_{k=1}^{n} \Big(F_{1,k}((a,\overrightarrow{b}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})} K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a)\partial_1\partial_k Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b}) d(\overrightarrow{\beta},x)\Big) + \\
& + F_{1,1}((a,\overrightarrow{b}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \times \\
\times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})} & \Big({\partial_1}^2 K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a) + \partial_1 Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})\partial_1 K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a)\Big) d(\overrightarrow{\beta},x) + \\
+ \sum_{k=1}^{n} \Big(F_{1,k}((a,\overrightarrow{b}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})} \partial_1 K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a)\partial_k Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b}) d(\overrightarrow{\beta},x)\Big) + \\
+ \sum_{j=1}^{n} \Big(G_j((a,\overrightarrow{b}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})} K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a)\partial_j Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b}) d(\overrightarrow{\beta},x)\Big) + \\
& + G_1((a,\overrightarrow{b}),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{e}^{Z_{\overrightarrow{\beta},x}(a,\overrightarrow{b})} \partial_1 K_{\overrightarrow{\beta},x,t}(a) d(\overrightarrow{\beta},x). \quad (79)
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы вид коэффициента $\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}} * Y(\mathrm{HK}_{\widetilde{\Delta}})(1,0,0)$ стал полностью явным, необходимо иметь сколько-нибудь конструктивный способ вычисления $\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\vec{\beta}}}$. Сделать это можно при помощи формулы Троттера $\mathrm{e}^{A+B} = \lim_{N\to\infty}\left(\left(\mathrm{e}^{\frac{A}{N}}\mathrm{e}^{\frac{B}{N}}\right)^N\right)$. Беря $Bf = tf''$, $Af = t(M_{\sum_{j=2}^{n-2}(\beta_{j-1}X^*{}_j)+\beta_{n-1}X^*{}_n})^2 f$, находим, что:

$$(\mathrm{e}^{\frac{B}{N}}f)(x) = \left(\frac{N}{4\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2N}{4t}}f(y)dy,$$

$$(\mathrm{e}^{\frac{A}{N}}f)(x) = \exp\left(-\frac{4\pi^2 t}{N}\left(\sum_{j=1}^{n-3}\left(\beta_j\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right)+\beta_{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)^2\right)\cdot f(x), \quad (80)$$

что приводит к следующему выражению:

Предложение 2.3.1.

$$\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\vec{\beta}}}(t,x_1,x_0) = \lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\prod_{r=0}^{N-1}(L_{t,N}(x_{\frac{r+1}{N}},x_{\frac{r}{N}}))d(x_{\frac{r}{N}})_{1\le r\le N-1},$$

где $L_{t,N}(x,y) = (\frac{N}{4\pi t})^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{4\pi^2 t}{N}\left(\sum_{j=1}^{n-3}\left(\beta_j\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right)+\beta_{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)^2-\frac{(x-y)^2N}{4t}\right)$.

Эта формула применима при выполнении некоторых дополнительных условий, которые можно найти, например, в [60]. Там же показано, что они удовлетворяются для операторов вида $(\Delta f)(x) = f''(x) - (V(x))^2 f(x)$, где V – вещественный полином; разбираемый пример подпадает под этот случай.

Подставив найденные выражения для $p_{\widetilde{\Delta}}$, $Yp_{\widetilde{\Delta}}$ и $\mathrm{HK}_{\widehat{\Delta}_{\vec{\beta}}}$ в формулу (61), получим следующий результат:

Теорема 2.3.2. *Для субриманова многообразия M с нильпотентной аппроксимацией, являющейся группой Гурса, в предположении $\mathrm{hg}_0(X_j) = 0$ для $j \in \{1,2\}$ коэффициент a_1 в асимптотике $\mathrm{HK}_\Delta(t,x,x) = t^{-\frac{n(n-1)+2}{4}}(a_0+a_1t+O(t^2))$ при $t\to 0$ есть полином от параметров возмущения, коэффициенты которого выражаются через пределы последовательностей некоторых интегралов от функций вида $P(z_1,...,z_k)\exp(Q(z_1,...,z_k))$, где P и Q – полиномы (вообще говоря, комплексные) от вещественных переменных $z_1,\ldots,z_k$.*

Заметим, что полиномы, стоящие под экспонентой в этих интегралах, содержат в себе информацию о представлениях группы Гурса и её коприсоединённых орбитах.

Хотя до конкретных выражений нам частично удалось довести вычисление лишь в случае групп Гурса, есть предположение, что и для эквирегулярных субримановых многообразий с другими нильпотентными аппроксимациями коэффициент a_1, а также коэффициенты более высоких порядков, можно будет представить в аналогичной форме. Это зависит в первую очередь от того, насколько удобными для вычислений получатся формулы для нильпотентных ядер теплопроводности в общем случае. Также вполне возможно, что между коэффициентами высших порядков есть какие-либо нетривиальные зависимости.

Специальные функции, которые могут присутствовать в выражении для приведённого ядра, скорее всего, упрощению не поддаются. Тем не менее, приведённое ядро можно выразить при помощи формулы Троттера $\exp(A+B) = \lim_{N\to\infty}\left((\exp(\frac{A}{N})\exp(\frac{B}{N}))^N\right)$, обобщённой на случай нескольких слагаемых, так как оператор $\widehat{\Delta_H}(\lambda)$, где $\lambda \in \widehat{G}$, выражается в виде суммы нескольких слагаемых, соответствующих базисным горизонтальным векторным полям; каждое из этих слагаемых есть значение квадрата дифференциала какого-либо представления $R \in \lambda$ на соответствующем векторном поле (для нильпотентных групп Ли все участвующие здесь определения корректны).

Следует ещё отметить, что функции, нужные для решения субриманова уравнения теплопроводности, в некоторых простых случаях хорошо изучены; например, для нильпотентных групп Ли с векторами роста $(2,3,4)$ и $(2,3,5)$ достаточно функций Хойна некоторого специального вида. Этому посвящена следующая глава данного исследования.

3. Связь ядра теплопроводности в группе Энгеля с функциями Хойна

3.1. Формулировка задачи и основной результат

Здесь мы исследуем вопрос, оставленный открытым в статье [19], в которой уравнение теплопроводности с сублапласианом для нильпотентных групп Ли с векторами роста $(2,3,4)$ и $(2,3,5)$ сводится при помощи некоммутативного преобразования Фурье к более простому уравнению, решение которого, однако, до сих пор не получено. Результат, полученный нами в этой главе, выражает преобразование Фурье решения этого уравнения через известные специальные функции.

В статье [19] У. Боскаин, Ж.-П. Готье и Ф. Росси исследовали уравнение теплопроводности $\partial_t p(t,x) = \Delta_H p(t,x)$ на группе Ли G с левоинвариантным распределением H и субримановой метрикой в следующих двух случаях:

(i) $G=\mathbb{R}^4$, $H=\operatorname{span}(\{X_1,X_2\})$, $X_1=\partial_1$, $X_2=\partial_2-x_1\partial_3+\frac{{x_1}^2}{2}\partial_4$, $\{X_1,X_2\}$ – ортонормированная система, $\Delta_H={X_1}^2+{X_2}^2$ (четырёхмерная группа Гурса, называемая также группой Энгеля);

(ii) $G=\mathbb{R}^5$, $H=\operatorname{span}(\{X_1,X_2\})$, $X_1=\partial_1$, $X_2=\partial_2-x_1\partial_3+\frac{{x_1}^2}{2}\partial_4+x_1x_2\partial_5$, $\{X_1,X_2\}$ – ортонормированная система, $\Delta_H={X_1}^2+{X_2}^2$ (свободная 2-порождённая группа Ли глубины 3).

В обоих случаях они применили к этому уравнению обобщённое преобразование Фурье по переменной x, пробегающей группу G, и показали, что для нахождения (по формуле Планшереля) фундаментального решения уравнения теплопроводности (как в предположениях (i), так и в (ii)) достаточно решить уравнение

$$\partial_t\psi(t,\theta)=({\partial_\theta}^2-{(\alpha\theta^2+\beta)}^2)\psi(t,\theta), \tag{81}$$

где $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ (параметры α и β выражаются определённым образом через переменные пространства $\widehat{G}$, двойственного по Понтрягину к G).

Тем не менее, решить это уравнение довольно трудно; в частности, функция ψ не выражается в элементарных функциях. Далее мы найдём связь между ψ и некоторой специальной функцией – *триконфлюэнтной функцией Хойна*:

Определение 3.1.1. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Функция f комплексной переменной z, являющаяся решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$f''(z) - (3z^2 + \gamma)f'(z) - ((3 - \beta)z - \alpha)f(z) = 0 \tag{82}$$

с начальными условиями $f(0) = 1$ и $f'(0) = 0$, называется *триконфлюэнтной функцией Хойна* и обозначается $H_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Название “триконфлюэнтная” происходит из того, что функция $H_{\alpha,\beta,\gamma}$ получается из решения *уравнения Хойна* с параметрами $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, q)$

$$f''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\alpha + \beta + 1 - \gamma - \delta}{z - a}\right) f'(z) + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} f(z) = 0 \tag{83}$$

при помощи “отвода” трёх особых точек (a, 0 и 1) этого решения на бесконечность в расширенной комплексной плоскости, т. е. можно сказать, что происходит их слияние (англ. confluence). Функция $H_{\alpha,\beta,\gamma}$ будет целой аналитической, следовательно, её можно вычислять при помощи ряда Тейлора относительно $z = 0$, несколько первых членов которого выглядят так:

$$H_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}z^2 + \frac{3 - \beta - \alpha\gamma}{6}z^3 + O(z^4). \tag{84}$$

Более подробно уравнение Хойна разобрано в [24], где приведены ряды Тейлора и другие формулы для вычисления его решений.

Если мы в уравнении (81) произведём также преобразование Фурье по t, то мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию $f = \widehat{\psi}$ (двойственная переменная к t обозначена через λ; зависимость f от λ мы не будем указывать явно, считая λ параметром):

$$(\partial_\theta{}^2 - (\alpha\theta^2 + \beta)^2 - \mathrm{i}\lambda)f(\theta) = 0. \tag{85}$$

Это уравнение задаёт *ангармонический осциллятор* четвёртой степени. Поскольку оно имеет второй порядок, его фундаментальная система решений состоит из двух функций. Его можно ещё немного упростить, если сделать замену переменной $\theta = k\xi$ с положительным k и умножить уравнение на k^2 (здесь $F(\xi) = f(k\xi)$):

$$(\partial_\xi{}^2 - (\alpha k^3\xi^2 + \beta k)^2 - \mathrm{i}\lambda k^2)F(\xi) = 0. \tag{86}$$

Беря $k = \alpha^{-\frac{1}{3}}$ и возвращаясь к старым обозначениям, мы можем сказать, что нам достаточно решить уравнение (85) для $\alpha = 1$. Наложим также дополнительное ограничение $\beta \neq 0$ (в случае $\beta = 0$ формулы, которые мы здесь приведём, не имеют места, но для решения задачи теплопроводности это ограничение несущественно, так как в формуле обращения ведётся интегрирование по $\widehat{G}$, а множество элементов $\widehat{G}$, попадающих под это ограничение, имеет меру Планшереля нуль; эта ремарка касается обеих рассматриваемых групп).

Используя данное здесь определение функции Хойна, можно сформулировать и доказать теорему:

Теорема 3.1.1. *Пусть $\alpha = 1$. Тогда при заданных начальных значениях $f(0) = P, f'(0) = Q$ имеет место формула*

$$f(\theta) = \frac{P - Q\beta^{-1}}{2}\exp\left(-\beta\theta - \frac{\theta^3}{3}\right) H_{L\lambda,0,B\beta}\left(-\theta\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) + \\ + \frac{P + Q\beta^{-1}}{2}\exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right) H_{L\lambda,0,B\beta}\left(\theta\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right), \tag{87}$$

где $L = \mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{6}}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$, $B = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{12}$.

Доказательство. Проверим, что

$$f_+(\theta) = \exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right) H_{L\lambda,0,B\beta}\left(\theta\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) \tag{88}$$

является решением. Найдём вторую производную этой функции:

$$f''_+(\theta) = \exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right)\cdot H''_{L\lambda,0,B\beta}\left(\theta\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+$$
$$+2\cdot(\beta+\theta^2)\exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right)\cdot H'_{L\lambda,0,B\beta}\left(\theta\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+$$
$$+\left(2\theta+(\beta+\theta^2)^2\right)\exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right)\cdot H_{L\lambda,0,B\beta}\left(\theta\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right), \tag{89}$$

что с учётом уравнения для триконфлюэнтной функции Хойна запишется так (здесь в аргументах функции Хойна обозначено для удобства $K = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$):

$$f''_+(\theta) =$$
$$= \left(\left((3\theta^2\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{4}{9}} + B\beta)H'_{L\lambda,0,B\beta}(K\theta) + (3\theta\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - L\lambda)H_{L\lambda,0,B\beta}(K\theta)\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+\right.$$
$$\left.+2(\beta+\theta^2)H'_{L\lambda,0,B\beta}(K\theta)\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + (2\theta+(\beta+\theta^2)^2)H_{L\lambda,0,B\beta}(K\theta)\right)\cdot\exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right). \tag{90}$$

Далее упростим выражение, стоящее в скобках (без вынесенной за них экспоненты), используя значения определённых в формулировке констант. Коэффициент при $H'_{L\lambda,0,B\beta}(K\theta)$ равен $\left(3\theta^2\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{4}{9}} + \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{12}\beta\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{4}{9}} + 2(\beta+\theta^2)\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, т. е. нулю. Коэффициент при $H_{L\lambda,0,B\beta}(K\theta)$ равен $\left(3\theta\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{5\pi \mathrm{i}}{6}}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\lambda\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}\sqrt[3]{\frac{4}{9}} + 2\theta + (\beta+\theta^2)^2$, что после упрощения примет вид $(\mathrm{i}\lambda + (\beta+\theta^2)^2)$. Отсюда следует, что

$$f''_+(\theta) = \exp\left(\beta\theta + \frac{\theta^3}{3}\right)\cdot H_{L\lambda,0,B\beta}(K\theta)\cdot(\mathrm{i}\lambda + (\beta+\theta^2)^2) = f_+(\theta)\cdot(\mathrm{i}\lambda + (\beta+\theta^2)^2), \tag{91}$$

а это и означает, что f_+ – решение. Для доказательства того, что

$$f_-(\theta) = \exp\left(-\beta\theta - \frac{\theta^3}{3}\right) H_{L\lambda,0,B\beta}\left(-\theta \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) \tag{92}$$

тоже является решением, достаточно заметить, что $f_-(\theta) = f_+(-\theta)$, и продифференцировать это соотношение дважды по θ, после чего воспользоваться уже известным фактом, что f_+ – решение, и переписать полученное равенство в терминах $f_-(\theta)$. В действительности функции f_+ и f_- независимы, т. е. образуют фундаментальную систему решений, в чём легко убедиться, вычислив определитель Вронского для этой системы при $\theta = 0$ (значения, необходимые для этого вычисления, таковы: $f_+(0) = 1$, $f_-(0) = 1$, $f_+'(0) = \beta$, $f_-'(0) = -\beta$, они получаются из начальных условий для уравнения (82); так как мы с самого начала договорились, что $\beta \neq 0$, определитель Вронского не равен нулю).

Коэффициенты $\frac{P+Q\beta^{-1}}{2}$ и $\frac{P-Q\beta^{-1}}{2}$ при базисных решениях f_+ и f_- находятся из начальных условий $f(0) = P, f'(0) = Q$ с учётом значений базисных решений и их производных при $\theta = 0$. $\square$

Когда мы будем восстанавливать функцию ψ при помощи обратного преобразования Фурье, потребуется интерпретировать интеграл в формуле обращения как осциллирующий, поскольку он не сходится ни абсолютно, ни как несобственный интеграл (о регуляризации осциллирующих интегралов см. [7]).

Заключение

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Доказано, что уравнение теплопроводности в n-мерной группе Гурса не имеет нетривиальных симметрий (и, следовательно, не допускает понижения порядка) при $n \geq 4$. Данный результат, хотя и носит отрицательный характер, позволяет, тем не менее, утверждать, что в общем случае к субримановым уравнениям диффузии нужны другие подходы. Кроме того, есть надежда, что этот результат удастся в дальнейших работах связать с общей гипотезой Трева.

2. Найдено (не слишком ограничительное) достаточное условие, используемое вместо существования нормальных форм горизонтальных векторных полей в методе возмущений, которое даёт возможность записать диагональную асимптотику ядра теплопроводности в виде $t^{-\frac{Q}{2}}(a_0 + a_1 t + O(t^2))$ при $t \to +0$, и сам этот метод (в комбинации с обобщённым преобразованием Фурье) применён при данном условии, в результате чего получена полиномиальная по параметрам возмущения формула для a_1. Рассмотрен пример, когда нильпотентная аппроксимация данного многообразия есть группа Гурса. Точный геометрический смысл полученной формулы ввиду её громоздкости, к сожалению, пока не вполне ясен; этот вопрос тоже заслуживает рассмотрения в будущем.

3. В терминах осциллирующих интегралов от триконфлюэнтной функции Хойна выражено приведённое ядро в группе Энгеля (четырёхмерной группе Гурса).

Несмотря на то, что о существовании асимптотик рассмотренного здесь вида для субримановых ядер теплопроводности известно из работ [16] и [17], использованные там методы (например, стохастическая диффузия) были весьма неконструктивны и связаны с геометрией многообразия лишь косвенно. Данный же в настоящей работе подход даёт более явные формулы для коэффициентов, хотя и является с вычислительной точки зрения чрезвычайно громоздким.

Предполагается, что формула Троттера, обобщённая на случай нескольких слагаемых, как раз и является тем недостающим компонентом, который позволит более детально исследовать геометрические свойства приведённых ядер.

Список литературы

1. Аграчёв А. А., Сачков Ю. Л. *Геометрическая теория управления.* – М.: Физматлит, 2005. – 392 с.

2. Водопьянов С. К. *Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей* // Докл. АН. – 2008. – Т. 422, №5. – С. 583–588.

3. Кириллов А. А. *Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1988. – Т. 22. – С. 5–162.

4. Кириллов А. А. *Элементы теории представлений.* – М.: Наука, 1978. – 343 с.

5. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 339 с.

6. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* – М.: Мир, 1982. – В 4-х тт.

7. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* – М.: Мир, 1988. – В 4-х тт.

8. Agrachev A. A. *Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures* // J. Dynam. Control Systems. – 1996. – V. 2, №3. – P. 321–358.

9. Agrachev A. A., Barilari D., Rizzi L. *Curvature: A variational approach* // Memoirs of the American Math. Soc. – 2018. – V. 256. – P. 1–116.

10. Agrachev A., Boscain U., Gauthier J.-P., Rossi F. *The intrinsic hypoelliptic Laplacian and its heat kernel on unimodular Lie groups* // Journal of Functional Analysis. – 2009. – V. 256, №8. – P. 2621–2655.

11. Arendt W., Nittka R., Peter W., Steiner F. *Weyl's law: Spectral properties of the Laplacian in Mathematics and Physics* // Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity. – Weinheim: WILEY-VCH, 2009. – P. 1–71.

12. Asaad M., Gordina M. *Hypoelliptic Heat Kernels on Nilpotent Lie Groups* // Potential Analysis. – 2016. – V. 45. – P. 355–386.

13. Avakumovič V. G. *Über die eigenfunktionen auf geschlossen riemannschen mannigfaltigkeiten* // Math. Z. – 1956. – V. 65. – P. 324–344.

14. Barilari D. *Trace heat kernel asymptotics in 3D contact sub-Riemannian geometry* // J. Math. Sci. – 2013. – V. 195, №3. – P. 391–411.

15. Barilari D., Rizzi L. *A formula for Popp's volume in sub-Riemannian geometry* // preprint. – 2013. available at http://arxiv.org/abs/1211.2325.

16. Ben Arous G. *Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus* // Ann. Sci. École Norm. Sup. – 1988. – V. 21, №3. – P. 307–331.

17. Ben Arous G. *Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique sur la diagonale* // Ann. Inst. Fourier. – 1989. – V. 39, №1. – P. 73–99.

18. Barilari D., Boscain U., Neel R. W. *Heat kernel asymptotics on sub-Riemannian manifolds with symmetries and applications to the bi-Heisenberg group* // preprint. – 2016. available at http://arxiv.org/abs/1606.01159.

19. Boscain U., Gauthier J.-P., Rossi F. *Hypoelliptic heat kernel over 3-step nilpotent Lie groups* // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 199, №6. – P. 614–628.

20. Calin O., Chang D.-C., Furutani K., Iwasaki C. *Heat kernels for elliptic and sub-elliptic operators. Methods and techniques.* – Boston: Birkhäuser Boston Inc., 2011. – 436 p.

21. Carleman T. *Propriétes asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes* // C. R. 8-ème Congr. Math. Scand (Stockholm, 1934). – Lund: Håkan Ohlsson, 1935. – P. 34–44.

22. Carleman T. *Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen* // Ber. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig. – 1936. – V. 88. – P. 119–132.

23. Chang P. K., Deturck D. *On hearing the shape of a triangle* // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1989. – V. 105, №4. – P. 1033–1038.

24. Choun Y. S. *Asymptotic behavior of Heun function and its integral formalism* // preprint. –2013. – available at http://arxiv.org/abs/1303.0876.

25. Colin de Verdière Y., Hillairet L., Trélat E. *Spectral asymptotics for sub-Riemannian Laplacians. I: Quantum ergodicity and quantum limits in the 3D contact case* // Duke Mathematical Journal. – 2018. – V. 167, №1. – P. 109–174.

26. Corwin L. J., Greenleaf F. P. *Representations of nilpotent Lie groups and their applications. Part I: Basic theory and examples.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 269+vi p.

27. Courant R. *Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik* // Mat. Z. – 1920. – V. 7. – P. 1–57.

28. Craddock M., Lennox K. *Lie group symmetries as integral transforms of fundamental solutions* // Journal of Differential Equations. – 2007. – V. 232, №2. – P. 652–674.

29. Dixmier J. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien. Ch. II.* – Paris: Gauthier-Villars, 1969. – 384 p.

30. Duistermaat J. J., Guillemin V. *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics* // Invent. Math. – 1975. – V. 29, №1. – P. 37–79.

31. Daners D., Kennedy J. *Uniqueness in the Faber – Krahn inequality for Robin problems* // SIAM J. Math. Anal. – 2007. – V. 39, №4. – P. 1191–1207.

32. ter Elst A. F. M., Robinson D. W. *Reduced heat kernels on nilpotent Lie groups* // Comm. Math. Phys. – 1995. – V. 173, №3. – P. 475–511.

33. Folland G. B. *A course in abstract harmonic analysis.* – Boca Raton, FL: CRC Press, 1995. – 276+viii p.

34. Folland G. B., Stein E. M. *Hardy spaces on homogeneous groups.* – Princeton (N.J.): Princeton University Press, 1982. – 284 p.

35. Furutani K. *Heat kernels of the sub-Laplacian and the Laplacian on nilpotent Lie groups* // Analysis, Geometry and Topology of Elliptic Operators, Papers in honor of Krzysztof P. Wojciechowsky. – 2006. – P. 185–226.

36. Gordon C., Webb D. *You can't hear the shape of a drum* // American Scientist. – 1992. – V. 84, №1. – P. 46–55.

37. Gordon C., Webb D. *Isospectral convex domains in euclidean space* // Math. Res. Lett. – 1994. – V. 1. – P. 539–545.

38. Gordon C., Webb D., Wolpert S. *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds* // Inventiones Mathematicae. – 1992. – V. 110, №1. – P. 1–22.

39. Gromov M. Carnot – Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. – Basel: Birkhäuser Verlag, 1996. – P. 79–318.

40. Henrot A. *Minimization problems for eigenvalues of the Laplacian* // Journal of Evolution Equations. – 2003. – V. 3. – P. 443–461.

41. Hörmander L. *The spectral function of an elliptic operator* // Acta Math. – 1968. – V. 121. – P. 193–218.

42. Hörmander L. *On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators* // Yeshiva Univ. Conf. (November 1966). Vol. 2 of Ann. Sci. Conf. Proc. – Cambridge: Belfer Graduate School of Sci., 1969. – P. 155–202.

43. Inahama Y., Taniguchi S. *Short time full asymptotic expansion of hypoelliptic heat kernel at the cut locus* // preprint. –2017. – available at http://arxiv.org/abs/1603.01386.

44. Ivrii V. *Second term of the spectral asymptotic expansion for the Laplace-Beltrami operator on manifold with boundary* // Funct. Anal. Appl. – 1980. – V. 14, №2. – P. 98–106.

45. Jerison D. S., Sanchez A. *Estimates for the heat kernel for the sum of squares of vector fields* // Indiana University Mathematics Journal. – 1986. – V. 35, №4. – P. 835–854.

46. Kac M. *Can One Hear the Shape of a Drum?* // American Mathematical Monthly. – 1966. – V. 73, №4, part 2. – P. 1–23.

47. Karmanova M., Vodopyanov S. *Geometry of Carnot – Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas* // Analysis and Mathematical Physics. – Basel: Birkhäuser, 2009. – P. 233–335.

48. Hassannezhad A., Kokarev G., Polterovich I. *Eigenvalue inequalities on Riemannian manifolds with a lower Ricci curvature bound* // Journal of Spectral Theory. – 2015. – V. 6, №4.

49. Levitan B. M. *On the asymptotic behaviour of the spectral function of the second order elliptic equation* // Izv. AN SSSR, Ser. Mat. – 1952. – V. 16, №1. – P. 325–352.

50. Li P., Yau S.-T. *Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold. Geometry of the Laplace operator* // Proc. Sympos. Pure Math. – 1980. – V. 36. – P. 205–239.

51. Mautner F. I. *Note on the Fourier inversion formula on groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1955. – V. 78. – P. 371–384.

52. McKean H. P., Jr., Singer I. M. *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian* // J. Differential Geometry. – 1967. – V. 1. – P. 43–69.

53. Milnor J. *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds* // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1964. – V. 51, №4. – P. 542.

54. Minakshisundaram S., Pleijel Å. *Some properties of eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds* // Canadian J. Math. – 1949. – V. 1, №3. – P. 242–256.

55. Molchanov S. A. *Diffusion processes and Riemannian geometry* // Uspekhi Mat. Nauk. – 1975. – V. 30, №1. – P. 3–59.

56. von Neumann J. *On rings of operators: Reduction theory* // Ann. Math. – 1949. – V. 50. – P. 401–485.

57. Pukánszky L. *Leçons sur les représentations des groupes.* – Paris: Dunod, 1967. – 128+xvii p.

58. Rosenberg S. *The Laplacian on a Riemannian manifold.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 188 p.

59. Segal I. E. *An extension of Plancherel's formula for separable unimodular locally compact groups* // Ann. Math. – 1950. – V. 52, №2. – P. 272–292.

60. Séguin C., Mansouri A. *Short-time asymptotics of heat kernels of hypoelliptic Laplacians on unimodular Lie groups* // J. Funct. Anal. – 2012. – V. 262, №9. – P. 3891–3928.

61. Smajlović L., Šćeta L. *On a Tauberian theorem with the remainder term and its application to the Weyl law* // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – V. 401. – P. 317–335.

62. Subhankulov M. A. *Some general Tauberian theorems with remainder term* // Tr. Mat. Inst. Steklova. – 1961. – V. 64. – P. 239–266.

63. Trèves F. *Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and applications to the $\overline{\partial}$-Neumann problem* // Comm. Partial Differential Equations. – 1978. – V. 3. – P. 475–642.

64. Urakawa H. *Bounded domains which are isospectral but not congruent* // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure Sér. 4. – 1982. – V. 15, №3. – P. 441–456.

65. Vergne M. *Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1970. – V. 270. – P. 173–175, 704–707.

66. Watanabe K. *Plane domains which are spectrally determined* // Ann. Global Anal. Geom. – 2000. – V. 18. – P. 447–475.

67. Weyl H. *Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte* // Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. – 1911. – P. 110–117.

68. Weyl H. *Das asymptotische Verteilungsgesetz linearen partiellen Differentialgleichungen* // Math. Ann. – 1912. – V. 71. – P. 441–479.

69. Weyl H. *Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgeometrie* // J. Reine Angew. Math. – 1913. – V. 143. – P. 177–202.

70. Zelditch S. *Inverse Spectral Problem for Analytic Domains II:* $\mathbb{Z}_2$*-Symmetric Domains* // Ann. Math. – 2009. – V. 170, №1. – P. 205–269.

Список работ автора по теме диссертации

A1. Кузнецов М. В. *Об ангармоническом осцилляторе в задаче теплопроводности для нильпотентных субримановых групп Ли с векторами роста* $(2,3,4)$ *и* $(2,3,5)$ // Математические заметки. – 2019. – Т. 105, № 3. – С. 467–470.

A2. Кузнецов М. В. *Отсутствие нетривиальных симметрий уравнения теплопроводности в группах Гурса размерности 4 и выше* // Сибирский математический журнал. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 141–147.

A3. Кузнецов М. В. *Применение нильпотентной аппроксимации и метода орбит для поиска диагональной асимптотики субримановых ядер теплопроводности* // Сибирский математический журнал. – 2019. – Т. 60, № 6. – С. 1350–1378.