Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»

На правах рукописи

Ефремов Евгений Леонидович

Теоретико-модельные свойства класса инъективных полигонов

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент
А. А. Степанова

Владивосток — 2020

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Тема диссертации относится к теоретико-модельной алгебре. Предметом исследования являются классы инъективных и слабо инъективных полигонов. С помощью современного арсенала теории моделей, включающего теорию категоричности, различные теоретико-модельные конструкции, изучаются такие свойства этих классов, как аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, стабильность, примитивная нормальность и примитивная связность.

Под *левым* S*-полигоном* ${}_SA$ над моноидом S, или просто *полигоном*, понимается множество A, на котором S действует слева, причём единица S действует тождественно. Понятие полигона над моноидом относится к фундаментальным понятиям в теории представлений, алгебраической теории динамических систем и др. Большое количество работ по теории полигонов посвящено гомологической классификации полигонов, а именно, характеризации моноидов с помощью категорных свойств полигонов, таких, например, как проективность, инъективность, плоскостность. Это работы Л.А. Скорнякова [12], M. Kilp [4], U. Knauer, А.В. Михалёва [29] и др. Вопросы, связанные со свойством регулярности полигонов, рассмотрены такими математиками, как M. Kilp [28], А.В. Михалёв [30], U. Knauer [28, 30], L.H. Tran [38] и др.

Полигон над моноидом определяется аналогично модулю над кольцом. Поэтому теория полигонов развивается под большим влиянием теории модулей. Аналогично понятию инъективного модуля определяется понятие инъективного полигона. Инъективные полигоны впервые были рассмотрены P. Berthiaume в [24]. В теории модулей условие инъективности правого R-модуля M эквивалентно следующему условию $(\star)$: для любого правого идеала $I \subseteq R$ любой гомоморфизм $\varphi : I_R \to M_R$ продолжается до гомоморфизма $\overline{\varphi} : R_R \to M_R$ (критерий Бэра [2]). Для полигонов аналог критерия Бэра не имеет места. Полигоны, для которых выполняется аналог условия $(\star)$, называются слабо инъективными. V. Gould в [27] рассматривает бесконечную последовательность различных «инъективностей», а именно, для каждого кардинала $\alpha > 1$ полигон ${}_SA$ над моноидом S называется *α-инъективным*, если для него выполняется аналог условия $(\star)$, в котором правые идеалы заменяются на правые идеалы, мощность порождающего множества которых меньше α. Главно слабо инъективные полигоны (для которых $\alpha = 2$) и конечно порождённо слабо инъективные полигоны (для которых $\alpha = \omega$) впервые были рассмотрены в работе J. Luedeman, F. McMorris, S.–K. Sim [31]. Понятие главно слабо инъективного (конечно порождённо слабо инъективного) полигона является аналогом понятия p-инъективного (конечно инъективного) модуля.

Одной из стандартных задач теории моделей полигонов является задача описания моноидов, над которыми некоторый класс полигонов обладал бы свойством P, где под P понимается аксиоматизируемость, полнота, стабильность, примитивная нормальность, примитивная связность и др.

Вопросы аксиоматизируемости, полноты, модельной полноты, категоричности для класса регулярных полигонов рассмотрены в работах Е.В. Овчинниковой [7], А.А. Степановой [14]. Для классов плоских, проективных и свободных полигонов такое описание получено в работах S. Bulman–Fleming, V. Gould [25, 26], А.А. Степановой [16]. А.А. Степановой в [15] доказано, что для коммутативного счётного моноида или счётной группы S аксиоматизируемость класса инъективных полигонов над S эквивалентна конечной порождённости S. В этой же работе показано, что не существует нетривиального коммутативного моноида или группы, класс инъективных полигонов над которым полон, модельно полон или категоричен. В диссертации продолжаются упомянутые исследования для классов слабо инъективных полигонов.

Одним из центральных направлений в теории моделей является теория стабильности, в основу которой легли идеи, методы и результаты работы M. Morley [32]. Понятие стабильной теории было введено S. Shelah в [37]. Вопросы стабильности, суперстабильности и ω-стабильности теории полигонов рассмотрены Т.Г. Мустафиным [6, 33], B. Poizat [33], А.А. Степановой [17]. В частности, доказано, что теория любого полигона над S стабильна (суперстабильна) тогда и только тогда, когда S — линейно (вполне) упорядоченный моноид (вполне упорядоченный моноид). А.А. Степановой рассматривались стабильные, суперстабильные и ω-стабильные классы регулярных [19, 22] и плоских [18] полигонов. В диссертации изучаются вопросы стабильности и суперстабильности для классов инъективных и слабо инъективных полигонов.

В [34] A. Pillay ввёл понятие нормальной теории. Однако в более ранней работе Палютина Е.А. [8] это понятие использовалось в неявном виде, а именно, была доказана нормальность любой стабильной полной хорновой теории. Понятие слабой нормальности теории, введённое A. Pillay в [35], является более широким, чем понятие нормальности, но более узким, чем стабильность. С.В. Судоплатовым в [23] показано, что не существует формульных критериев для нормальности или слабой нормальности теорий, подобных стабильности. Основной пример нормальных теорий — теория любого модуля, являющаяся примитивно нормальной теорией. История понятия примитивной нормальности теории восходит к применению теории классификации в универсальной алгебре [36]. Вопросам примитивной нормальности классов всех полигонов, свободных, проективных, сильно плоских полигонов посвящены работы А.А. Степановой [20, 21], Д.О. Птахова [11]. А.А. Степановой в [21] рассмотрены вопросы примитивной связности класса всех полигонов. В данной работе изучаются моноиды с примитивно нормальными и примитивно связными классами инъективных полигонов.

Цели и задачи данной работы заключаются в изучении строения моноидов с точки зрения теоретико-модельных свойств классов инъективных и слабо инъективных полигонов над ними. Исследуются такие свойства этих классов, как аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, категоричность, стабильность, суперстабильность, примитивная нормальность, примитивная связность.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории моделей, такие как теорема компактности, теория категоричности, теория стабильности, различные теоретико-модельные конструкции (например, ультрапроизведения), а также методы теории полигонов.

Новизна и научная значимость работы. Результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теоретико-модельной алгебре, в теории полигонов, при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено описание счётных моноидов, над которыми класс слабо инъективных (конечно порождённо слабо инъективных, главно слабо инъективных) полигонов аксиоматизируем. Приведены примеры моноидов с аксиоматизируемыми и не аксиоматизируемыми классами слабо инъективных (конечно порождённо слабо инъективных, главно слабо инъективных) полигонов над ними. Результаты опубликованы в [39].

2. Получено описание моноидов, над которыми класс главно слабо инъективных полигонов полон, модельно полон, категоричен, стабилен и суперстабилен. Приведены примеры моноидов S, для которых классы инъективных, слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных полигонов полны (модельно полны, категоричны) только в том случае, когда S тривиален. Дана характеризация конечных моноидов со стабильными (суперстабильными) классами инъективных, слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных полигонов. Результаты опубликованы в [40].

3. Доказано, что класс всех инъективных полигонов примитивно нормален. Для реверсивного справа моноида S показано, что класс всех инъективных полигонов над S примитивно связен тогда и только тогда, когда S — группа. Приведено необходимое условие примитивной связности класса инъективных полигонов. Результаты опубликованы в [41].

Апробация работы. Результаты диссертации излагались автором на семинарах Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (г. Новосибирск), Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток), Дальневосточного федерального университета (г. Владивосток), а также на международных конференциях «Мальцевские чтения» (г. Новосибирск, 2016–2018), Региональных научно-практических конференциях студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (г. Владивосток, 2016–2018).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [39–46]. Работы [39–41] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук, а также индексируемых в наукометрических системах (SCOPUS и т.д.). Работа [39] написана в неразрывном сотрудничестве со Степановой А.А.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Все утверждения занумерованы двойками индексов, из которых первый является номером главы, второй — номером утверждения в данной главе. Компьютерный набор выполнен с использованием пакета LaTeX. Общий объём диссертации 75 страниц. Библиография включает в себя 46 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** приводится постановка задачи, обосновывается актуальность темы исследования, даётся обзор результатов по исследуемым проблемам и кратко формулируются основные результаты диссертации.

В **первой главе** даются определения из теории полигонов, теории моделей и универсальной алгебры, а также формулируются факты, используемые при доказательстве полученных результатов. При формулировке утверждений будем пользоваться следующими обозначениями:

S-**Inj** — класс всех инъективных полигонов над моноидом S,

S-**WInj** — класс всех слабо инъективных полигонов над моноидом S,

S-**FGWInj** — класс всех конечно порождённо слабо инъективных полигонов над моноидом S,

S-**WInj** — класс всех главно слабо инъективных полигонов над моноидом S.

Вторая глава диссертации посвящена описанию моноидов, над которыми классы слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных и главно слабо инъективных полигонов аксиоматизируемы.

Через $\theta_{\bar{s}}$, где $\bar{s} = \langle s_1, \ldots s_n \rangle \in S$ $(n \in \omega)$, обозначим конгруэнцию $\{\langle t^k, r^m \rangle \mid ts_k = rs_m, k, m \in \{1, \ldots, n\}\}$ полигона ${}_SS^{(n)} = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} {}_SS_i$, где ${}_SS_i$ — копия полигона ${}_SS$, $r^i \in S_i$ — копия элемента $r \in S$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Теорема 1. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**FGWInj** аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ конечно порождена.*

Из доказательства теоремы 1 следует, что если класс слабо инъективных полигонов аксиоматизируем, то для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ конечно порождена, т.е. имеет место

Замечание 1. *Пусть S — счетный моноид. Если класс S-**WInj** аксиоматизируем, то класс S-**FGWInj** аксиоматизируем.*

Пусть $s \in S$. Конгруэнцию θ_s полигона ${}_S S^{(1)} = {}_S S$ можно отождествить с множеством $\{\langle t, r\rangle \in S^2 \mid ts = rs\}$. Доказательство следующего следствия полностью повторяет доказательство теоремы 1, если положить $n = 1$.

Следствие 1. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**PWInj** аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $s \in S$ конгруэнция θ_s полигона ${}_S S$ конечно порождена.*

Из теоремы 1 и следствия 1 следует

Замечание 2. *Пусть S — счетный моноид. Если класс S-**FGWInj** аксиоматизируем, то класс S-**PWInj** аксиоматизируем.*

Моноид S называется *регулярным*, если для любого $s \in S$ существует $t \in S$ такой, что $s = sts$.

Следствие 2. *Если S — регулярный моноид, то класс S-**PWInj** аксиоматизируем.*

Моноид S называется *нетеровым слева*, если все его левые идеалы конечно порождены. Для класса слабо инъективных полигонов получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**WInj** аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_S S^{(n)}$ конечно порождена и S — нётеров слева моноид.*

Глава завершается примерами моноидов с аксиоматизируемыми и не аксиоматизируемыми классами слабо инъективных полигонов над ними.

В **третьей главе** рассматриваются моноиды, над которыми классы инъективных и слабо инъективных полигонов полны, модельно полны, категоричны.

Следующее замечание очевидно.

Замечание 3. *Для моноида S имеют место следующие импликации:*

$$S\text{-}\boldsymbol{PWInj}\ \textit{полон (модельно полон, категоричен)}$$
$$\Downarrow$$
$$S\text{-}\boldsymbol{FGWInj}\ \textit{полон (модельно полон, категоричен)}$$
$$\Downarrow$$
$$S\text{-}\boldsymbol{WInj}\ \textit{полон (модельно полон, категоричен)}$$
$$\Downarrow$$
$$S\text{-}\boldsymbol{Inj}\ \textit{полон (модельно полон, категоричен)}$$

Теорема 3. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

*(1) класс S-**PWInj** полон;*

*(2) класс S-**PWInj** модельно полон;*

*(3) класс S-**PWInj** категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S = \{1\}$.

Моноид S называется *реверсивным справа*, если $Ss \cap St \neq \varnothing$ для любых $s, t \in S$.

Теорема 4. *Пусть S — реверсивный справа моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*(1) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон;*

*(2) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) модельно полон;*

*(3) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S=\{1\}$.

Следствие 3. *Пусть S — коммутативный моноид. Тогда следующие условия эквиваленты:*

*(1) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон;*

*(2) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) модельно полон;*

*(3) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S=\{1\}$.

Для моноида S через T обозначим множество $\{s\in S \mid Ss=S\}$.

Теорема 5. *Пусть класс S-**WInj** полон и для любого $s\in S\setminus T$ существует $r\in S$ такой, что $r\neq 1$ и $rs=s$. Тогда $S=\{1\}$.*

Из теоремы 5 получаем следующие результаты.

Следствие 4. *Если S — регулярный моноид, T — группа и класс S-**WInj** полон, то $|S|=1$.*

Теорема 6. *Если S — конечный моноид и класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон, то $|S|=1$.*

В этой же главе рассмотрены вопросы стабильности и суперстабильности классов инъективных и слабо инъективных полигонов.

Полигон ${}_SA$ называется *линейно упорядоченным*, если множество $\{Sa\mid a\in A\}$ линейно упорядочено относительно включения. Моноид S называется *линейно упорядоченным*, если ${}_SS$ — линейно упорядоченный полигон.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс полигонов. Моноид S называется *$\mathcal{K}$-стабилизатором* (*$\mathcal{K}$-суперстабилизатором*), если $\mathrm{Th}({}_SA)$ стабильна (суперстабильна) для любого полигона ${}_SA \in \mathcal{K}$. Если $\mathcal{K}$ — класс всех полигонов над моноидом S, то $\mathcal{K}$-стабилизатор ($\mathcal{K}$-суперстабилизатор) S называется *стабилизатором* (*суперстабилизатором*).

Теорема 7. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S — стабилизатор;

*(2) S — S-**PWInj**-стабилизатор;*

(3) S — линейно упорядоченный моноид.

Утверждение 1. *Пусть S — моноид, для которого максимальный (среди левых неглавных идеалов) левый неглавный идеал R существует и конечен, множество $\{s \in \overline{S \sqcup \{\theta\}} \mid \bigwedge\limits_{r \in R} rs = r\}$ конечно, где под ${}_S\overline{S \sqcup \{\theta\}}$ понимается инъективная оболочка полигона ${}_S(S \sqcup \{\theta\})$. Тогда моноид S не является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором.*

Следствие 5. *Если S — конечный моноид, являющийся S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором, то S — линейно упорядоченный моноид.*

Теорема 8. *Пусть S — конечный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) S — стабилизатор;

*(2) S — S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатор;*

(3) S — линейно упорядоченный моноид.

Утверждение 2. *Если моноид S является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором, то в S нет бесконечного числа попарно* *несравнимых левых идеалов.*

Теорема 9. *Пусть S — конечный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) S — суперстабилизатор;

*(2) S — S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) суперстабилизатор;*

(3) S — вполне упорядоченный моноид.

Будем говорить, что полигон ${}_SA$ удовлетворяет *условию обрыва возрастающей цепи подполигонов*, если для любых подполигонов ${}_SA_i$ ($i \in \omega$) таких, что

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots,$$

существует такой $k \in \omega$, что

$$A_k = A_{k+1} = \ldots.$$

Утверждение 3. *Пусть $\mathcal{K}_0$ — класс полигонов, обладающий следующим свойством: для любого полигона ${}_SA$ существует полигон ${}_SB \in \mathcal{K}_0$ такой, что ${}_SA \subseteq {}_SB$. Пусть S — $\mathcal{K}_0$-суперстабилизатор, ${}_SA$ — полигон, $a \in A$. Тогда полигон ${}_SSa$ удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи циклических подполигонов. Пусть S — $\mathcal{K}_0$-суперстабилизатор, ${}_SA$ — полигон, $a \in A$. Тогда полигон ${}_SSa$ удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи циклических подполигонов.*

Следствие 6. *Если моноид S является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) суперстабилизатором, то S удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи главных левых идеалов.*

Следствие 7. *Если моноид S является S-**PWInj**-суперстабилизатором, то S — вполне упорядоченный моноид.*

Теорема 10. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S — суперстабилизатор;

*(2) S — S-**PWInj**-суперстабилизатор;*

(3) S — вполне упорядоченный моноид.

Заметим, что эквивалентности условий (1) и (3) в теоремах 7–10 были доказаны Т.Г. Мустафиным в [6].

В **четвёртой главе** изучаются моноиды, над которыми класс всех инъективных полигонов примитивно нормален и примитивно связен. Пусть T — полная теория языка L. Зафиксируем некоторую достаточно большую и достаточно насыщенную модель $\mathfrak{M} = \langle M; L\rangle$ теории T.

Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула языка L, $\bar{a} \in M$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$, то через $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ будем обозначать множество $\left\{\bar{b} \in M \mid \mathfrak{M} \models \Phi(\bar{b}, \bar{a})\right\}$.

Формула $\exists\bar{x}(\Phi_0 \wedge \ldots \wedge \Phi_k)$, где Φ_i ($i \leqslant k$) — атомарные формулы языка L, называется *примитивной*. Пусть $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула языка L, $\bar{a} \in M$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$. Множество вида $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ называется *примитивным*. Если $\bar{b} \in M$ и $l(\bar{b}) = l(\bar{y})$, то множества $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*.

Теория T называется *примитивно нормальной*, если $X = Y$ или $X \cap Y = \varnothing$ для любых примитивных копий X и Y. Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем языка L называется *примитивно нормальным*, если теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ примитивно нормальна для любой $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

Теорема 11. *Класс S-**Inj** примитивно нормален.*

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из

$\mathfrak{M}$, определённая в $\mathfrak{M}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, называется *примитивной эквивалентностью.* Область определения X такой эквивалентности α определяется в $\mathfrak{M}$ примитивной формулой $\Phi(\bar{x}, \bar{x})$ и обозначается через $dom\alpha$. Если $a \in X$, то через a/α будем обозначать класс эквивалентности α с представителем a.

Множество X называется Δ-*примитивным*, если существует такое семейство P примитивных множеств, что

$$X = \bigcap \{Y \mid Y \in P\}.$$

Эквивалентность α называется Δ-*примитивной*, если существует такое множество E примитивных эквивалентностей, что

$$\alpha = \bigcap \{\beta \mid \beta \in E\}.$$

Классы X и Y одной Δ-примитивной эквивалентности α называются Δ-*примитивными копиями.* Множество вида $X = X^*/\alpha = \{a/\alpha \mid a \in X^*\}$, где X^* — Δ-примитивное множество, α — примитивная эквивалентность и выполнено $X^* \subseteq dom(\alpha)$, называется *обобщенно примитивным множеством (о.п. множеством).* При этом X^* называется *основой*, а α — *образующей эквивалентностью о.п. множества* X. Отождествляя одноэлементное множество $\{a\}$ с элементом a, будем считать, что Δ-примитивное и примитивное множества являются о.п. множествами. О.п. множества X, Y называются *о.п. копиями*, если у них есть общая образующая эквивалентность, а их основы X^*, Y^* являются Δ-примитивными копиями.

Формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $l(\bar{x}) = l(\bar{y})$, называется $(\bar{x}, \bar{y})$-*рефлексивной*, если

$$T \vdash \forall \bar{x} \forall \bar{y} \forall \bar{z} (\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \to (\exists \bar{z} \Phi(\bar{x}, \bar{x}, \bar{z}) \wedge \exists \bar{z} \Phi(\bar{y}, \bar{y}, \bar{z}))).$$

Пусть о.п. множества X_0 и X_1 являются о.п. копиями и α — их образующая эквивалентность. Говорят, что X_0 *примитивно связано с* X_1, если существует примитивная $(\bar{x},\bar{y})$-рефлексивная формула $\Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{c})$ (с параметрами $\bar{c}$) такая, что

(а) для любых $\bar{a}_0 \in X_0^*$ и $\bar{b}_0 \in X_1^*$ существуют такие $\bar{a}_1 \in X_0^*$ и $\bar{b}_1 \in X_1^*$, что в $\mathfrak{M}$ истинны $\Phi(\bar{a}_0,\bar{b}_1,\bar{c})$ и $\Phi(\bar{a}_1,\bar{b}_0,\bar{c})$;

(б) для любого $\bar{a} \in X_0^*$ множество $\Phi(\bar{a},\mathfrak{M},\bar{c})$ не содержит X_1^* и $\bar{b}/\alpha \subseteq \Phi(\bar{a},\mathfrak{M},\bar{c})$ для любого $\bar{b} \in \Phi(\bar{a},\bar{\mathfrak{a}},\bar{c})$;

(в) для любого $\bar{b} \in X_1^*$ множество $\Phi(\mathfrak{M},\bar{b},\bar{c})$ не содержит X_0^* и $\bar{a}/\alpha \subseteq \Phi(\mathfrak{M},\bar{b},\bar{c})$ для любого $\bar{a} \in \Phi(\mathfrak{M},\bar{b},\bar{c})$.

Теория T называется *примитивно связной*, если она примитивно нормальна и любые о.п. копии либо примитивно связаны, либо обе одноэлементны. Класс алгебраических систем $\mathcal{K}$ языка L называется *примитивно связным*, если теория $Th(\mathfrak{B})$ примитивно связна для любой $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

Ниже приводится ряд результатов, в которых описаны моноиды с примитивно связным классом инъективных полигонов над ними.

Теорема 12. *Пусть S — реверсивный справа моноид. Класс S-**Inj** является примитивно связным тогда и только тогда, когда S — группа.*

Следствие 8. *Если S — коммутативный моноид, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — абелева группа.*

Следствие 9. *Если S содержит нулевой элемент, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — одноэлементный моноид.*

Следствие 10. *Если* S *— линейно упорядоченный моноид, то класс* S-$\boldsymbol{Inj}$ *примитивно связный тогда и только тогда, когда* S *— группа.*

Теорема 13. *Если класс* S-$\boldsymbol{Inj}$ *— примитивно связный класс, то либо* S *— группа, либо максимальный относительно включения собственный подполигон полигона* ${}_SS$ *не конечно порождён.*

Следствие 11. *Если* S *— конечный моноид, то класс* S-$\boldsymbol{Inj}$ *примитивно связный тогда и только тогда, когда* S *— группа.*

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н., доценту Степановой Алёне Андреевне за постоянное внимание к работе.

1 Предварительные сведения

1.1 Сведения из универсальной алгебры и теории моделей

Приводимые ниже сведения из теории моделей и универсальной алгебры можно найти в [1, 3, 9, 10, 13].

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; L\rangle$ — алгебраическая система языка L. Кортежи элементов $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ из A и переменных $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ будем обозначать соответственно через $\bar{a}$ и $\bar{x}$, длину кортежа $\bar{v}$ — через $l(\bar{v})$, i-й элемент кортежа $\bar{v}$ — через $\bar{v}(i)$. Вместо $\bar{a} \in A^n$ будем писать $\bar{a} \in A$.

Конгруэнция алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; L\rangle$ языка L (т.е. алгебраической системы языка L, не содержащего предикатных символов) — это отношение эквивалентности θ на A такое, что для любой n-местной операции $F \in L$ и любых $\bar{a}, \bar{b} \in A$ из $\langle \bar{a}(i), \bar{b}(i)\rangle \in \theta$ для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ следует $\langle F(\bar{a}), F(\bar{b})\rangle \in \theta$. Вместо записи $\langle a, b\rangle \in \theta$ часто будем использовать запись $a\theta b$.

Говорят, что конгруэнция θ алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; L\rangle$ порождается множеством $B \subseteq A^2$, если θ — наименьшая относительно включения конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая множество B. Конгруэнция θ алгебры $\mathfrak{A}$ называется *конечно порождённой*, если существует конечное подмножество множества A^2, порождающее конгруэнцию θ.

Предложение 1.1 (Лемма Мальцева). [10] *Пусть $\rho(X)$ — наименьшая конгруэнция алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; L\rangle$, содержащая $X \subseteq A^2$. Тогда для любых $a, b \in A$ имеет место $a\rho(X)b$ в том и только том случае, когда существуют $m \geq 1$, элементы $\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_m, \bar{d}'_1, \ldots, \bar{d}'_m, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m \in A$,*

$l(\bar{d}_i) = l(\bar{d}'_i) = l(\bar{x})$, $l(\bar{c}_i) = l(\bar{y})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, *и термы* $t_1(\bar{x},\bar{y}),\ldots,t_m(\bar{x},\bar{y})$, $t'_1(\bar{x},\bar{y}),\ldots,t'_m(\bar{x},\bar{y})$ *языка* L *такие, что* $\langle \bar{d}_i, \bar{d}'_i\rangle \in X$ *или* $\langle \bar{d}'_i, \bar{d}_i\rangle \in X$ *для любых* i, $1 \leqslant i \leqslant m$, *и*

$$a = t_1(\bar{d}_1,\bar{c}_1),\ t_i(\bar{d}'_i,\bar{c}_i) = t_{i+1}(\bar{d}_{i+1},\bar{c}_{i+1})\ (1 \leqslant i < m), t_m(\bar{d}'_m,\bar{c}_m) = b.$$

Пусть $\mathcal{K}$ — класс алгебраических систем языка L. Класс $\mathcal{K}$ называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z языка L, что для любой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ языка L

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \Phi \text{ для всех } \Phi \in Z.$$

Алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ языка L называются *элементарно эквивалентными* (обозначение: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если для любого предложения Φ языка L

$$\mathfrak{A} \models \Phi \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \Phi.$$

Подсистема $\mathfrak{A}$ алгебраической системы $\mathfrak{B}$ языка L называется *элементарной* (обозначение: $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$), если для любой формулы $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ языка L и любых $b_1,\ldots,b_n \in B$

$$\mathfrak{A} \models \Phi(b_1,\ldots,b_n) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \Phi(b_1,\ldots,b_n).$$

Заметим, что если $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Будем говорить, что класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем *замкнут относительно элементарной эквивалентности (ультрапроизведений)*, если алгебраическая система, элементарно эквивалентная алгебраической системе из класса $\mathcal{K}$ (являющаяся ультрапроизведением алгебраических систем из класса $\mathcal{K}$), принадлежит $\mathcal{K}$.

Предложение 1.2 (критерий аксиоматизируемости). [1] *Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем языка L аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

Через $\mathcal{K}_\infty$ обозначим класс бесконечных алгебраических систем класса $\mathcal{K}$ языка L. Класс $\mathcal{K}$ называется *полным (модельно полным)*, если теория $\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_\infty)$ бесконечных алгебраических систем этого класса полна (модельно полна).

Класс $\mathcal{K}$ называется *категоричным в мощности κ*, если все алгебраические системы класса $\mathcal{K}$ мощности κ изоморфны.

Предложение 1.3. [1] *Если класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем языка L категоричен в некоторой бесконечной мощности, то класс $\mathcal{K}$ полон.*

Множество формул Γ языка L называется *совместным*, если существует модель этого множества. Если каждое конечное подмножество множества Γ совместно, то Γ называется *локально совместным.*

Предложение 1.4 (теорема компактности). [1] *Каждое локально совместное множество формул Γ языка L совместно.*

Множество всех полных n-типов над непротиворечивой теорией T будем обозначать через $S_n(T)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система языка L, $X \subseteq A$, $a \in A$. *Типом элемента a над множеством X* называется множество $\mathrm{tp}\,(a, X) = \{\Phi(x) \mid \mathfrak{A}_X \vDash \Phi(a)\}$. Через $S_n(X)$ обозначим $S_n(Th(\mathfrak{A}_X))$. Вместо $S_1(X)$ будем писать $S(X)$.

Пусть α — кардинал. Алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ называется *α-насыщенной*, если для каждого подмножества $X \subseteq A$ мощности, меньшей α, обогащение $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$ реализует каждый тип $\Gamma(v)$ сигнатуры $\Sigma \cup \{c_a \mid a \in X\}$, который совместен с теорией алгебраической системы $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$.

Предложение 1.5. [3] *Пусть* $|\Sigma| \leqslant \alpha$ *и* $\omega \leqslant |A| \leqslant 2^\alpha$. *Тогда существует* α^+*-насыщенное элементарное расширение* $\mathfrak{B}$ *алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ *языка* L *мощности* 2^α.

Пусть $\Phi(x, \bar{y})$ — формула языка L, $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$, $\bar{b} \in A$, $l(\bar{y}) = l(\bar{b})$. Через $\Phi(A, \bar{b})$ обозначим множество $\{a \in A \mid \mathfrak{A} \vDash \Phi(a, \bar{b})\}$. Через $\exists^k x \Phi(x, \bar{y})$ обозначим формулу, означающую, что существует ровно k элементов x таких, что $\Phi(x, \bar{y})$.

Теория T называется *стабильной в мощности* κ или κ-*стабильной*, если $|S(X)| \leqslant \kappa$ для любой модели $\mathfrak{A}$ теории T и любого $X \subseteq A$ мощности κ. Если теория T κ-стабильна для некоторого бесконечного κ, то T называется *стабильной*. Если теория T κ-стабильна для всех $\kappa \geqslant 2^{|T|}$, то T называется *суперстабильной*. Если теория T не является стабильной, то T называется *нестабильной*.

Предложение 1.6. [9] *Полная теория* T *нестабильна тогда и только тогда, когда существует формула* $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ *от* $2n$ *переменных, модель* $\mathfrak{A}$ *теории* T *и* $\bar{a}_i \in A^n$, $i \in \omega$, *такие, что для любых* i, j, $i \neq j$,

$$i < j \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \Phi(\bar{a}_i, \bar{a}_j).$$

Пусть T — полная теория языка L. Зафиксируем некоторую достаточно большую и достаточно насыщенную модель $\mathfrak{M} = \langle M; L \rangle$ теории T. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула языка L, $\bar{a} \in M$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$, то через $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{a})$ обозначим множество $\left\{\bar{b} \in M \mid \mathfrak{M} \vDash \Phi(\bar{b}, \bar{a})\right\}$.

Формула $\exists\bar{x}(\Phi_0 \wedge \ldots \wedge \Phi_k)$, где Φ_i $(i \leqslant k)$ — атомарные формулы языка L, называется *примитивной.* Пусть $\Phi(\bar{x},\bar{y})$ — примитивная формула языка L, $\bar{a} \in M$, $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$. Множество вида $\Phi(\mathfrak{M},\bar{a})$ называется *примитивным.* Если $\bar{b} \in M$ и $l(\bar{b}) = l(\bar{y})$, то множества $\Phi(\mathfrak{M},\bar{a})$ и $\Phi(\mathfrak{M},\bar{b})$ называются *примитивными копиями.*

Теория T называется *примитивно нормальной*, если $X = Y$ или $X \cap Y = \varnothing$ для любых примитивных копий X и Y. Класс $\mathcal{K}$ алгебраических систем языка L называется *примитивно нормальным*, если теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ примитивно нормальна для любой $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из $\mathfrak{M}$, определённая в $\mathfrak{M}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x},\bar{y})$, называется *примитивной эквивалентностью.* Область определения X такой эквивалентности α определяется в $\mathfrak{M}$ примитивной формулой $\Phi(\bar{x},\bar{x})$ и обозначается через $dom\alpha$. Если $a \in X$, то через a/α будем обозначать класс эквивалентности α с представителем a.

Множество X называется Δ-*примитивным*, если существует такое семейство P примитивных множеств, что

$$X = \bigcap\{Y \mid Y \in P\}.$$

Эквивалентность α называется Δ-*примитивной*, если существует такое множество E примитивных эквивалентностей, что

$$\alpha = \bigcap\{\beta \mid \beta \in E\}.$$

Классы X и Y одной Δ-примитивной эквивалентности α называются Δ-*примитивными копиями.* Множество вида $X = X^*/\alpha = \{a/\alpha \mid a \in X^*\}$, где X^* — Δ-примитивное множество, α — примитивная эквивалентность и выполнено $X^* \subseteq dom(\alpha)$, называется *обобщенно при-*

митивным множеством (о.п. множеством). При этом X^* называется *основой*, а α — *образующей эквивалентностью о.п. множества* X. Отождествляя одноэлементное множество $\{a\}$ с элементом a, будем считать, что Δ-примитивное и примитивное множества являются о.п. множествами. О.п. множества X, Y называются *о.п. копиями*, если у них есть общая образующая эквивалентность, а их основы X^*, Y^* являются Δ-примитивными копиями.

Формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $l(\bar{x}) = l(\bar{y})$, называется $(\bar{x}, \bar{y})$*-рефлексивной*, если

$$T \vdash \forall \bar{x} \forall \bar{y} \forall \bar{z} (\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \to (\exists \bar{z} \Phi(\bar{x}, \bar{x}, \bar{z}) \wedge \exists \bar{z} \Phi(\bar{y}, \bar{y}, \bar{z}))).$$

Пусть о.п. множества X_0 и X_1 являются о.п. копиями и α — их образующая эквивалентность. Говорят, что X_0 *примитивно связано с* X_1, если существует примитивная $(\bar{x}, \bar{y})$-рефлексивная формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ (с параметрами $\bar{c}$) такая, что

(а) для любых $\bar{a}_0 \in X_0^*$ и $\bar{b}_0 \in X_1^*$ существуют такие $\bar{a}_1 \in X_0^*$ и $\bar{b}_1 \in X_1^*$, что в $\mathfrak{M}$ истинны $\Phi(\bar{a}_0, \bar{b}_1, \bar{c})$ и $\Phi(\bar{a}_1, \bar{b}_0, \bar{c})$;

(б) для любого $\bar{a} \in X_0^*$ множество $\Phi(\bar{a}, \mathfrak{M}, \bar{c})$ не содержит X_1^* и $\bar{b}/\alpha \subseteq \Phi(\bar{a}, \mathfrak{M}, \bar{c})$ для любого $\bar{b} \in \Phi(\bar{a}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{c})$;

(в) для любого $\bar{b} \in X_1^*$ множество $\Phi(\mathfrak{M}, \bar{b}, \bar{c})$ не содержит X_0^* и $\bar{a}/\alpha \subseteq \Phi(\mathfrak{M}, \bar{b}, \bar{c})$ для любого $\bar{a} \in \Phi(\mathfrak{M}, \bar{b}, \bar{c})$.

Теория T называется *примитивно связной*, если она примитивно нормальна и любые о.п. копии либо примитивно связаны, либо обе одноэлементны. Класс алгебраических систем $\mathcal{K}$ языка L называется *примитивно связным*, если теория $Th(\mathfrak{B})$ примитивно связна для любой $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

1.2 Сведения из теории полигонов и теории моделей полигонов

Приведённые ниже сведения можно найти в [6, 21, 29].

Всюду ниже S будет обозначать моноид, 1 — единицу S.

Моноид S называется *линейно (вполне) упорядоченным*, если множество $\{Ss \mid s \in S\}$ линейно (вполне) упорядочено относительно включения.

Моноид S называется *регулярным*, если для любого $s \in S$ существует $t \in S$ такой, что $s = sts$. Моноид S называется *реверсивным справа*, если $Ss \cap St \neq \varnothing$ для любых $s, t \in S$. Моноид S называется *нетеровым слева*, если все его левые идеалы конечно порождены. Нетрудно заметить, что моноид S нетеров слева тогда и только тогда, когда для любой возрастающей цепи

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \ldots$$

его левых идеалов существует $n \in \omega$ такой, что $I_n = I_{n+k}$ для любого $k \in \omega$, т.е. любая возрастающая цепь его левых идеалов обрывается.

Замечание 1.1. *Моноид S является группой тогда и только тогда, когда $Sr = S$ для любого $r \in S$.*

Алгебраическая система $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ языка $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется *(левым) S–полигоном* (или *полигоном над S*, или просто *полигоном*), если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S,\ a \in A$. Полигон $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ будем обозначать через ${}_SA$. Все рассматриваемые в работе полигоны являются левыми S-полигонами. Подсистема ${}_SB$ полигона ${}_SA$ называется *подполигоном* полигона ${}_SA$. Под *копроизведением полигонов*

${}_SA_i$ $(i \in I)$ будем понимать их дизъюнктное объединение и обозначать его через $\bigsqcup\limits_{i \in I} {}_SA_i$.

Отображение $\varphi : A \to B$ называется *гомоморфизмом* из полигона ${}_SA$ в полигон ${}_SB$ (или просто *гомоморфизмом полигонов*), если $\varphi(sa) = s\varphi(a)$ для любых $a \in A$, $s \in S$. Будем говорить, что гомоморфизм $\varphi : {}_SB \to {}_SC$ полигонов *продолжает* гомоморфизм $f : {}_SA \to {}_SC$ полигонов, где $A \subseteq B$, если $\varphi\ |_A = f$, т.е. $\varphi(a) = f(a)$ для любого $a \in A$.

Полигон ${}_SA$ называется *линейно упорядоченным*, если множество $\{Sa \mid a \in A\}$ линейно упорядочено относительно включения.

Пусть ${}_SB$ — подполигон полигона ${}_SA$. Элементы $a, b \in A$ называются *связанными вне* ${}_SB$, если существуют $n \in \omega$, $a_0, \ldots, a_n \in A \setminus B$, $s_0, \ldots, s_{n-1}, t_1, \ldots, t_n \in S$ такие, что $a_0 = a$, $a_n = b$, $s_i a_i = t_{i+1} a_{i+1}$ и $s_i a_i \notin B$ для всех $i < n$.

Будем говорить, что полигон ${}_SA$ удовлетворяет *условию обрыва возрастающей цепи подполигонов*, если для любых подполигонов ${}_SA_i$ $(i \in \omega)$ таких, что

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots,$$

существует такой $k \in \omega$, что

$$A_k = A_{k+1} = \ldots.$$

Инъективным полигоном называется полигон ${}_SQ$ такой, что для любого мономорфизма $\imath : {}_SA \to {}_SB$ и для любого гомоморфизма $\varphi : {}_SA \to {}_SQ$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SB \to {}_SQ$, продолжающий

φ, т.е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_S A \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\varphi"'] & {}_S B \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ {}_S Q & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Ясно, что мономорфизм $\imath : {}_S A \to {}_S B$ в данном определении можно заменить вложением $\imath(A) \subseteq B$, а гомоморфизм $\varphi : {}_S A \to {}_S Q$ — гомоморфизмом $\varphi' : \imath(A) \to {}_S Q$ ($\varphi'(\imath(a)) = \varphi(a)$ для любого $a \in A$), т.е. имеет место следующее

Замечание 1.2. *Полигон ${}_S Q$ инъективен тогда и только тогда, когда для любого полигона ${}_S B$, для любого подполигона ${}_S A \subseteq {}_S B$ и для любого гомоморфизма $\varphi : {}_S A \to {}_S Q$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_S B \to {}_S Q$, продолжающий φ, т.е. такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} {}_S A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "\varphi"'] & {}_S B \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ {}_S Q & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через S-**Inj** обозначим класс всех инъективных полигонов над S.

Предложение 1.7. [29] *Для любого полигона ${}_S A$ существует минимальное инъективное расширение.*

Каждое минимальное инъективное расширение полигона ${}_S A$ будем называть *инъективной оболочкой* ${}_S A$ и обозначать через ${}_S\overline{A}$.

Предложение 1.8. [29] *Если S — реверсивный справа моноид, то ${}_S\overline{A \sqcup {}_S B} = {}_S\overline{A} \sqcup {}_S\overline{B}$ для любых полигонов ${}_S A$ и ${}_S B$.*

Полигон ${}_SA$ называется *слабо инъективным полигоном*, если для любого левого идеала I моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SI \to {}_SA$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$, продолжающий φ, т.е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SI \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_SS \arrow[dll, "\bar{\varphi}"] \\ {}_SA & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через S-**WInj** обозначим класс всех слабо инъективных полигонов над S.

Полигон ${}_SA$ называется *конечно порождённо слабо инъективным полигоном*, если для любого конечно порождённого левого идеала $\bigcup\limits_{i\leqslant n} Ss_i$ моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : \bigcup\limits_{i\leqslant n} {}_SSs_i \to {}_SA$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$, продолжающий φ, т.е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \bigcup\limits_{i\leqslant n} {}_SSs_i \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_SS \arrow[dll, "\bar{\varphi}"] \\ {}_SA & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через S-**FGWInj** обозначим класс всех конечно порождённо слабо инъективных полигонов над S.

Полигон ${}_SA$ называется *главно слабо инъективным полигоном*, если для любого главного левого идеала Ss моноида S и любого гомоморфизма $\varphi : {}_SSs \to {}_SA$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$, продолжающий φ, т.е. такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_S Ss \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_S S \arrow[dll, "\bar{\varphi}"] \\ {}_S A & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Через S-**PWInj** обозначим класс всех главно слабо инъективных полигонов над S.

Замечание 1.3. *Для моноида S имеют место следующие включения:*

$$S\text{-}\boldsymbol{Inj} \subseteq S\text{-}\boldsymbol{WInj} \subseteq S\text{-}\boldsymbol{FGWInj} \subseteq S\text{-}\boldsymbol{PWInj}.$$

Под *нулем полигона* ${}_S A$ будем понимать такой элемент $a \in A$, что $sa = a$ для любых $s \in S$. Полигон ${}_S A$ будем называть *полигоном нулей*, если каждый его элемент является нулем.

Предложение 1.9 (критерий Скорнякова-Бэра)**.** [29] *Пусть полигон ${}_S Q$ содержит нуль. Тогда ${}_S Q$ инъективен в том и только том случае, когда для любого подполигона ${}_S B$ любого циклического полигона ${}_S Sa$ и для любого гомоморфизма $\varphi : {}_S B \to {}_S Q$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_S Sa \to {}_S Q$, продолжающий φ, т.е. такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} {}_S B \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_S Sa \arrow[dll, "\bar{\varphi}"] \\ {}_S Q & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Предложение 1.10. [29] *Если ${}_S A_i$ $(i \in I)$ — главно слабо инъективные подполигоны полигона ${}_S A$, то $\bigcup\limits_{i \in I} {}_S A_i$ — главно слабо инъективный полигон.*

Пусть $\mathcal{K}$ — класс полигонов. Моноид S называется $\mathcal{K}$-*стабилизатором* ($\mathcal{K}$-*суперстабилизатором*), если $\mathrm{Th}({}_SA)$ стабильна (суперстабильна) для любого полигона ${}_SA \in \mathcal{K}$. Если $\mathcal{K}$ — класс всех полигонов над моноидом S, то $\mathcal{K}$-стабилизатор ($\mathcal{K}$-суперстабилизатор) S называется *стабилизатором* (*суперстабилизатором*).

Предложение 1.11. [6] *S — линейно упорядоченный моноид тогда и только тогда, когда S — стабилизатор.*

Предложение 1.12. [6] *S — вполне упорядоченный моноид тогда и только тогда, когда S — суперстабилизатор.*

Предложение 1.13. [21] *Класс всех полигонов над моноидом S является примитивно связным тогда и только тогда, когда S — группа.*

2 Аксиоматизируемость

Вопросы аксиоматизируемости класса инъективных полигонов рассмотрены в [15]. В частности, доказано, что для коммутативного счетного моноида S аксиоматизируемость класса инъективных полигонов над S эквивалентна конечной порожденности моноида S. В данной главе описываются счётные моноиды S, над которыми класс слабо инъективных (конечно порождённо слабо инъективных, главно слабо инъективных) полигонов аксиоматизируем (теоремы 2.1, 2.2, следствие 2.1). Приводятся примеры моноидов с аксиоматизируемыми и не аксиоматизируемыми классами слабо инъективных полигонов (конечно порождённо слабо инъективных, главно слабо инъективных) над ними.

2.1 Аксиоматизируемость класса конечно порождённо слабо инъективных полигонов

Через $\theta_{\bar{s}}$, где $\bar{s} = \langle s_1, \dots s_n\rangle \in S$ $(n \in \omega)$, обозначим конгруэнцию $\theta_{\bar{s}} = \big\{\langle t^k, r^m\rangle \mid ts_k = rs_m, k, m \in \{1, \dots, n\}\big\}$ полигона ${}_SS^{(n)} = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} {}_SS_i$, где ${}_SS_i$ — копия полигона ${}_SS$, r^i — копия элемента $r \in S$ $(i \in \{1, \dots, n\})$.

Теорема 2.1. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**FGWInj** конечно порождённо слабо инъективных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ конечно порождена.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что существует такой кортеж $\bar{s} \in S^n$, что конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ не конечно порождена. Тогда найдутся пары $\langle t_i\cdot 1^{k_i}, r_i\cdot 1^{m_i}\rangle\in\theta_{\bar{s}}$ $(i\in\omega)$ такие, что для конгруэнций θ_i полигона ${}_SS^{(n)}$, порождённых множеством $\left\{\langle t_j\cdot 1^{k_j}, r_j\cdot 1^{m_j}\rangle \mid j\leqslant i\right\}$, выполняются следующие соотношения:

$$\langle t_{i+1}\cdot 1^{k_{i+1}}, r_{i+1}\cdot 1^{m_{i+1}}\rangle\notin\theta_i \text{ и } \bigcup_{i\in\omega}\theta_i=\theta_{\bar{s}}.$$

Пусть $i\in\omega$ и ${}_SA_i={}_SS^{(n)}/\theta_i$. Тогда по предложению 1.7 и замечанию 1.3 существует конечно порождённо слабо инъективный полигон ${}_SQ_i$ такой, что $A_i\subseteq Q_i$.

Пусть D — неглавный ультрафильтр на ω, $\bar{1}^l/D\in\prod\limits_{i\in\omega}Q_i/D$, $\bar{1}^l(i)=1^l/\theta_i$ $(i\in\omega,\quad 1\leqslant l\leqslant n)$ и отображение $\varphi: Ss_1\cup\ldots\cup Ss_n\to\prod\limits_{i\in\omega}Q_i/D$ задается следующим образом:

$$\varphi(ts_l)=t\cdot\bar{1}^l/D\ \ (1\leqslant l\leqslant n).$$

Покажем корректность определения отображения φ. Пусть $t,r\in S$ и $ts_k=rs_m$, где $k,m\in\{1,\ldots,n\}$. Тогда $\langle t\cdot 1^k, r\cdot 1^m\rangle\in\theta_{\bar{s}}$. Следовательно, существует $i_0\in\omega$ такое, что $\langle t\cdot 1^k, r\cdot 1^m\rangle\in\theta_{i_0}$. Тогда $\langle t\cdot 1^k, r\cdot 1^m\rangle\in\theta_j$ для всех $j\geq i_0$, т.е. $t\cdot 1^k/\theta_j=r\cdot 1^m/\theta_j$ для любого $j\geq i_0$. Поскольку D — неглавный ультрафильтр на ω, то $\{j\in\omega\mid j\geq i_0\}\in D$. Тогда $\left\{j\in\omega\mid t\cdot 1^k/\theta_j=r\cdot 1^m/\theta_j\right\}\in D$, т.е. $t\cdot\bar{1}^k/D=r\cdot\bar{1}^m/D$. Таким образом, корректность определения отображения φ показана. Нетрудно заметить, что φ — гомоморфизм полигонов.

Так как ${}_SQ_i$ — конечно порождённо слабо инъективный полигон для любого $i\in\omega$, то в силу аксиоматизируемости класса конечно порождённо слабо инъективных полигонов и критерия аксиоматизируемости $\prod\limits_{i\in\omega}{}_SQ_i/D$ — конечно порождённо слабо инъективный полигон. Следовательно, существует гомоморфизм $\bar{\varphi}: {}_SS\to\prod\limits_{i\in\omega}{}_SQ_i/D$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\bigcup\limits_{i\leqslant n} {}_S S s_i \arrow[d, "\varphi"'] & \subseteq & {}_S S \arrow[dll, "\bar{\varphi}"] \\
\prod\limits_{i\in\omega} {}_S Q_i/D. & &
\end{tikzcd}$$

Пусть $\bar{\varphi}\,(1) = \bar{q}/D$, $\bar{q}\,(i) = q_i \;\; (i \in \omega)$, $1 \leqslant l \leqslant n$. Тогда

$$\bar{1}^l/D = \varphi\,(s_l) = \bar{\varphi}\,(s_l) = \bar{\varphi}\,(s_l \cdot 1) = s_l\bar{\varphi}\,(1) = s_l\bar{q}/D.$$

Следовательно,

$$I_l = \left\{ i \in \omega \mid 1^l/\theta_i = s_l q_i \right\} \in D.$$

Пусть $i_0 \in I_1 \cap \ldots \cap I_n \in D$. Тогда $s_l q_{i_0} = 1^l/\theta_{i_0}$ для любого $l \;\; (1 \leqslant l \leqslant n)$. Так как $\langle t_{i+1} \cdot 1^{k_{i+1}}, r_{i+1} \cdot 1^{m_{i+1}} \rangle \in \theta_{i+1} \subset \theta_{\bar{s}}$, то $t_{i+1}s_{k_{i+1}} = r_{i+1}s_{m_{i+1}}$. Следовательно, $t_{i+1}s_{k_{i+1}}q_{i_0} = r_{i+1}s_{m_{i+1}}q - i_0$, т.е. $t_{i+1}1^{k_{i+1}}/\theta_i = r_{i+1}1^{m_{i+1}}/\theta_i$. Это означает, что $\langle t_{i+1} \cdot 1^{k_{i+1}}, r_{i+1} \cdot 1^{m_{i+1}} \rangle \in \theta_i$, что противоречит построению конгруэнции θ_i.

Достаточность. Пусть для любых $n \in \omega$, $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_S S^{(n)}$ порождается множеством пар $\langle t_0^{\bar{s}} \cdot 1^{k_0}, r_0^{\bar{s}} \cdot 1^{m_0} \rangle$, $\ldots$, $\langle t_{n_{\bar{s}}}^{\bar{s}} \cdot 1^{k_{n_{\bar{s}}}}, r_{n_{\bar{s}}}^{\bar{s}} \cdot 1^{m_{n_{\bar{s}}}} \rangle \in \left(S^{(n)}\right)^2 \;\; (k_0, \ldots, k_{n_s}, m_0, \ldots, m_{n_s} \in \{1, \ldots, n\})$ и $\Gamma = \{\Phi_{\bar{s}} \mid \bar{s} = \langle s_1, \ldots s_n \rangle \in S^n, n \in \omega\}$, где

$$\Phi_{\bar{s}} \leftrightharpoons \forall x_1 \ldots x_n \left(\bigwedge_{i=0}^{n_{\bar{s}}} t_i^{\bar{s}} x_{k_i} = r_i^{\bar{s}} x_{m_i} \rightarrow \exists y \bigwedge_{j=1}^{n} (x_j = s_j y) \right).$$

Докажем, что

$${}_S A \in S - \mathbf{FGWInj} \Longleftrightarrow \forall n \in \omega \; \forall \bar{s} \in S^n \left({}_S A \vDash \Phi_{\bar{s}} \right).$$

Предположим, что ${}_SA$ — конечно порождённо слабо инъективный полигон, $n \in \omega$, $\bar{s} \in S^n$, $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n$,

$$
{}_SA \vDash \bigwedge_{i=0}^{n_{\bar{s}}} t_i^{\bar{s}} a_{k_i} = r_i^{\bar{s}} a_{m_i}
$$

и $\varphi : Ss_1 \cup \ldots \cup Ss_n \to A$ — отображение такое, что

$$
\varphi\left(ts_l\right) = ta_l \text{ для любых } t \in S, l\left(1 \leqslant l \leqslant n\right).
$$

Покажем корректность определения отображения φ. Пусть $ts_k = rs_m$, т.е. $\langle t \cdot 1^k, r \cdot 1^m \rangle \in \theta_{\bar{s}}$. По лемме Мальцева существуют $n_0 \in \omega, u_l \in S, i_l \in \{0, .., n_s\}\left(0 \leqslant l < n_0\right)$ такие, что

$$
t \cdot 1^k = u_0 t_{i_0}^{\bar{s}} \cdot 1^{k_{i_0}}, \quad u_l r_{i_l}^{\bar{s}} \cdot 1^{m_{i_l}} = u_{l+1} t_{i_{l+1}}^{\bar{s}} \cdot 1^{k_{i_{l+1}}}, \quad u_{n_0} r_{i_{n_0}}^{\bar{s}} \cdot 1^{m_{i_{n_0}}} = r \cdot 1^m.
$$

Следовательно, $k_{i_l} = m_{i_{l+1}}$, и поэтому $u_l t_{i_l}^{\bar{s}} = u_{l+1} r_{i_{l+1}}^{\bar{s}}$. Тогда $u_l t_{i_l}^{\bar{s}} a_{k_i} = u_{l+1} r_{i_{l+1}}^{\bar{s}} a_{m_i}$ для любых $l\left(0 \leqslant l < n_0\right)$, т.е. $ta_k = ra_m$. Таким образом, корректность определения отображения φ показана. Ясно, что φ — гомоморфизм полигонов. Поскольку ${}_SA$ – конечно порождённо слабо инъективный полигон, то существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$
\begin{tikzcd}
{}_SSs_1 \cup \ldots \cup {}_SSs_n \subseteq \arrow[d, "\varphi"'] & {}_SS \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\
{}_SA. &
\end{tikzcd}
\qquad (1)
$$

Тогда

$$
a_l = \varphi\left(s_l\right) = \bar{\varphi}\left(s_l\right) = s_l \bar{\varphi}\left(1\right),
$$

т.е. ${}_SA \vDash \Phi_{\bar{s}}$.

Предположим теперь, что ${}_SA \vDash \Phi_{\bar{s}}$ для любых $n \in \omega$, $\bar{s} \in S^n$, $\varphi : {}_SSs_1 \cup \ldots \cup {}_SSs_n \to {}_SA$ — гомоморфизм полигонов, $\varphi\left(s_l\right) = a_l$

$(1 \leqslant l \leqslant n)$. Так как $ts_k = rs_m$, то $ta_k = ra_m$ для любой пары $\langle t^k, r^m \rangle \in \theta_{\bar{s}}$. Следовательно, ${}_SA \vDash \bigwedge\limits_{i=0}^{n_{\bar{s}}} t_i^{\bar{s}} a_{k_i} = r_i^{\bar{s}} a_{m_i}$. Поскольку ${}_SA \vDash \Phi_{\bar{s}}$, то существует $b \in A$ такой, что $a_l = s_l b$ для любого $l\,(1 \leqslant l \leqslant n)$. Гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$ определим следующим образом: $\bar{\varphi}\,(s) = sb$ для любого $s \in S$. Тогда

$$\bar{\varphi}\,(ts_l) = t\bar{\varphi}\,(s_l) = t\,(s_l b) = ta_l = t\varphi\,(s_l) = \varphi\,(ts_l)\,,$$

что означает коммутативность диаграммы (1). Таким образом, S-**FGWInj** — аксиоматизируемый класс.

Из доказательства теоремы 2.1 следует, что если класс слабо инъективных полигонов аксиоматизируем, то для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ конечно порождена, т.е. имеет место

Замечание 2.1. *Пусть S — счетный моноид. Если класс S-**WInj** аксиоматизируем, то класс S-**FGWInj** аксиоматизируем.*

Пусть $s \in S$. Конгруэнцию θ_s полигона ${}_SS^{(1)} = {}_SS$ можно отождествить с множеством $\left\{\langle t, r \rangle \in S^2 \mid ts = rs\right\}$. Доказательство следующего следствия полностью повторяет доказательство теоремы 2.1, если положить $n = 1$.

Следствие 2.1. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**PWInj** главно слабо инъективных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $s \in S$ конгруэнция θ_s полигона ${}_SS$ конечно порождена.*

Из теоремы 2.1 и следствия 2.1 следует

Замечание 2.2. *Пусть S — счетный моноид. Если класс S-**FGWInj** аксиоматизируем, то класс S-**PWInj** аксиоматизируем.*

Следствие 2.2. *Если S — регулярный моноид, то класс S-**PWInj** аксиоматизируем.*

Доказательство. Пусть $s \in S$, $t \in S$ и $s = sts$. Покажем, что конгруэнция θ_s полигона ${}_SS$ конечно порождена, а именно пара $\langle 1, st\rangle$ порождает конгруэнцию θ_s. Так как $1 \cdot s = (st) \cdot s$, то $\langle 1, st\rangle \in \theta_s$. Для любой пары $\langle u, v\rangle \in \theta_s$ имеем

$$u = u \cdot 1 \ \theta_s \ ust = vst \ \theta_s \ v \cdot 1 = v.$$

Следовательно, по лемме Мальцева когруэнция θ_s полигона ${}_SS$ порождается парой $\langle 1, st\rangle$. По следствию 2.1 класс главно слабо инъективных полигонов аксиоматизируем.

2.2 Аксиоматизируемость класса слабо инъективных полигонов

Теорема 2.2. *Пусть S — счетный моноид. Класс S-**WInj** слабо инъективных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $\bar{s} \in S^n$ конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ полигона ${}_SS^{(n)}$ конечно порождена и S — нётеров слева моноид.*

Доказательство. Из нётеровости слева моноида S следует, что любой левый идеал S конечно порождён. Тогда любой конечно порождённый слабо инъективный полигон слабо инъективен, т.е. классы S-**WInj** и S-**FGWInj** совпадают.

Достаточность следует из теоремы 2.1.

Необходимость. Достаточно показать, что S — нётеров слева моноид.

Предположим, что S не нётеров слева моноид. Тогда найдутся левые идеалы I_k $(k \in \omega)$ моноида S и элементы $s_j \in S$ $(j \in \omega)$ такие, что

$$_SI_k = \bigcup_{j \leqslant k} {_SSs_j} \text{ и } I_k \subset I_{k+1} \text{ для любого } k \in \omega.$$

Пусть $_SI = \bigcup\limits_{k \in \omega} {_SI_k}$. По предложению 1.7 существует инъективный полигон $_SQ_0$ такой, что $I_0 \subseteq Q_0$. Можно считать, что $Q_0 \cap (I \setminus I_0) = \varnothing$. Через $_SQ_{k+1}$ обозначим инъективный полигон такой, что $Q_k \cup (I_{k+1}) \subseteq Q_{k+1}$. Можно считать, что $Q_{k+1} \cap (I \setminus I_{k+1}) = \varnothing$. Так как $s_{k+1} \in Q_{k+1} \setminus Q_k$, то $Q_k \subset Q_{k+1}$ для любого $k \in \omega$.

Через $_SQ$ обозначим $\bigcup\limits_{k \in \omega} {_SQ_k}$. Покажем, что $_SQ$ – конечно порождённо слабо инъективный полигон. Пусть $n \in \omega$, J — конечно порождённый левый идеал S, $J = \bigcup\limits_{i \leqslant n} Sb_i$, $\varphi : {_SJ} \to {_SQ}$ — гомоморфизм полигонов. Через k_0 обозначим число такое, что $\varphi(b_i) \in Q_{k_0}$ для всех $i \leqslant n$. Такое число существует, поскольку $_SQ$ — объединение возрастающей цепи полигонов $_SQ_k$ $(k \in \omega)$. Тогда, в силу инъективности полигона $_SQ_{k_0}$, существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {_SS} \to {_SQ_{k_0}}$, продолжающий φ. Следовательно, $_SQ$ — конечно порождённо слабо инъективный полигон.

Покажем, что $_SQ$ не слабо инъективный полигон. Предположим, что это не так. Пусть $f : {_SI} \to {_SQ}$ — вложение полигонов. Тогда существует гомоморфизм $\bar{f} : {_SS} \to {_SQ}$, продолжающий f. Пусть $\bar{f}(1) \in Q_{k_0}$, где $k_0 \in \omega$. Если $s \in I \setminus I_{k_0}$, то

$$s = f(s) = \bar{f}(s) = s\bar{f}(1) \in Q_{k_0},$$

т.е. $I \setminus I_{k_0} \subseteq Q_{k_0}$. Получили противоречие.

Выберем кардинал α таким образом, чтобы $|S| \leqslant \alpha$ и $|Q| \leqslant 2^\alpha$. По предложению 1.5 существует α^+-насыщенное элементарное расширение ${}_S\overline{Q}$ полигона ${}_SQ$ мощности 2^α. По замечанию 2.1 класс S-**FGWInj** аксиоматизируем, и по критерию аксиоматизируемости он замкнут относительно элементарной эквивалентности. Так как ${}_SQ \equiv {}_S\overline{Q}$ и ${}_SQ$ — конечно порождённо слабо инъективный полигон, то ${}_S\overline{Q}$ — конечно порождённо слабо инъективный полигон.

Покажем, что ${}_S\overline{Q}$ — слабо инъективный полигон. Пусть $b_i \in S$ $(i \in I)$, $f : \bigcup\limits_{i\in I} {}_SSb_i \to {}_S\overline{Q}$ — гомоморфизм полигонов, $X = \{f(b_i) \mid i \in I\}$. Тогда $|X| \leqslant |S| \leqslant \alpha < \alpha^+$. Через $\Gamma(y)$ обозначим множество $\left\{b_iy = c_{f(b_i)} \mid i \in I\right\}$ формул сигнатуры $L_S \cup \{c_{f(b_i)}\}_{i\in I}$. Покажем, что $\Gamma(y)$ — локально совместное множество. Пусть $k \in \omega$, $\Gamma_k(y) = \left\{b_{m_i}y = c_{f(b_{m_i})} \mid i \leqslant k, m_i \in I\right\}$, $f_k = f \mid \bigcup\limits_{i\leqslant k} Sb_{m_i}$. Так как ${}_S\overline{Q}$ — конечно порождённо слабо инъективный полигон, то существует гомоморфизм $\bar{f}_k : {}_SS \to {}_S\overline{Q}$, продолжающий гомоморфизм f_k. Тогда $b_{m_i}\bar{f}_k(1) = f(b_{m_i})$ для любого i $(i \leqslant k)$ и множество $\Gamma_k(y)$ совместно. По теореме компактности $\Gamma(y)$ является совместным. Поскольку ${}_S\overline{Q}$ — α^+-насыщенный полигон, то существует $y_0 \in {}_S\overline{Q}$ такой, что $b_iy_0 = f(b_i)$ для всех $i \in I$. Гомоморфизм $\bar{f} : {}_SS \to {}_S\overline{Q}$ определим следующим образом:

$$\bar{f}(t) = ty_0 \text{ для любого } t \in S.$$

Так как

$$f(sb_i) = sf(b_i) = sb_iy_0 = sb_i\bar{f}(1) = \bar{f}(sb_i)$$

для любого $i \in I$, то гомоморфизм $\bar{f}$ продолжает гомоморфизм f, что доказывает слабую инъективность полигона ${}_S\overline{Q}$.

По критерию аксиоматизируемости класс S-**WInj** замкнут относительно элементарной эквивалентности. Так как ${}_SQ \equiv {}_S\overline{Q}$, то ${}_SQ$ является слабо инъективным полигоном. Противоречие.

2.3 Примеры

Утверждение 2.1. *Если S — счетная группа, то класс S-**WInj** слабо инъективных полигонов аксиоматизируем.*

Доказательство. Моноид S является нётеровым слева, так как $St = S$ для любого $t \in S$. Пусть $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in S$. Покажем, что конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ порождается множеством $\{\langle s_k s_m^{-1} \cdot 1^m, 1^k \rangle \mid k, m \leqslant n\}$. Пусть $\langle t^m, r^k \rangle \in \theta_{\bar{s}}$. Тогда $ts_m = rs_k$. Так как S — группа, то $t = rs_k s_m^{-1}$. Поэтому

$$\langle t^m, r^k \rangle = r\langle s_k s_m^{-1} \cdot 1^m, 1^k \rangle.$$

Таким образом, по теореме 2.2 класс S-**WInj** аксиоматизируем.

В приводимых ниже примерах под $\mathbb{N}$ понимается множество натуральных чисел без нуля.

Пример 1 моноида S, не являющегося группой, для которого класс S-WInj аксиоматизируем.

Пусть $S = \langle \omega; + \rangle$. Заметим, что все идеалы моноида S являются главными, т.е. имеют вид $\omega + s$, где $s \in \omega$. Поскольку

$$\omega + t \subseteq \omega + r \Longleftrightarrow t \geq r,$$

то моноид S нётеров. Если $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in S$, то конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ порождается множеством

$$\left\{\langle 0^i, (s_i - s_j) + 0^j \rangle \mid s_i \geq s_j, i, j \leqslant n\right\} \cup$$

$$\cup\left\{\langle (s_j-s_i)+0^i,0^j\rangle \mid s_i<s_j, i,j\leqslant n\right\}.$$

По теореме 2.2 класс S-**WInj** аксиоматизируем.

Пример 2 моноида S, для которого класс S-WInj не аксиоматизируем, класс S-FGWInj аксиоматизируем.

Пусть $S=\langle \mathbb{N};\cdot\rangle$, $P=\{p_i\mid i\in\omega\}$ — множество простых чисел. Так как

$$\bigcup_{i\leqslant n} p_i\mathbb{N}\subset\bigcup_{i\leqslant n+1} p_i\mathbb{N}$$

для любого $n\in\omega$, то моноид S не является нётеровым. По теореме 2.2 класс S-**WInj** не является аксиоматизируемым. Пусть $\bar{s}=\langle s_1,\ldots,s_n\rangle\in S$. Через (a,b) обозначим наибольший общий делитель чисел $a,b\in\mathbb{N}$. Покажем, что конгруэнция $\theta_{\bar{s}}$ порождается множеством

$$\left\{\left\langle\frac{s_m}{(s_k,s_m)}\cdot 1^k,\frac{s_k}{(s_k,s_m)}\cdot 1^m\right\rangle \mid k,m\in\{1,\ldots,n\}\right\}.$$

Пусть $\langle t^k,r^m\rangle\in\theta_{\bar{s}}$. Тогда $t\cdot s_k=r\cdot s_m$. Следовательно, t делится на $\dfrac{s_m}{(s_k,s_m)}$ и $\dfrac{t\cdot(s_k,s_m)}{s_m}\in\mathbb{N}$. Из равенств

$$\frac{t\cdot(s_k,s_m)}{s_m}\left\langle\frac{s_m}{(s_k,s_m)}\cdot 1^k,\frac{s_k}{(s_k,s_m)}\cdot 1^m\right\rangle=$$

$$=\left\langle t^k,\frac{ts_k}{s_m}\cdot 1^m\right\rangle=\left\langle t^k,\frac{rs_m}{s_m}\cdot 1^m\right\rangle=\langle t^k,r^m\rangle$$

по теореме 2.1 следует аксиоматизируемость класса S-**FGWInj**.

Пример 3 моноида S, для которого класс S-FGWInj не аксиоматизируем, класс S-PWInj аксиоматизируем.

Пусть $S=\langle\mathbb{N}^2\cup\{\langle 0,0\rangle\};+\rangle$, где операция $+$ на множестве $\mathbb{N}^2\cup\{\langle 0,0\rangle\}$ определяется покомпонентно, $n,m\in\mathbb{N}$. Конгруэнция $\theta_{\langle n,m\rangle}$ порождается парой $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$:

$$\theta_{\langle n,m\rangle}=\left\{\big\langle\langle i,j\rangle,\langle i',j'\rangle\big\rangle \mid \langle i,j\rangle+\langle n,m\rangle=\langle i',j'\rangle+\langle n,m\rangle\right\}=$$

$$= \bigl\{\bigl\langle\langle i,j\rangle,\langle i',j'\rangle\bigr\rangle \mid \langle i,j\rangle=\langle i',j'\rangle\bigr\} = \bigl\{\bigl\langle\langle i,j\rangle,\langle i,j\rangle\bigr\rangle\bigr\} = \mathbb{N}^2{+}\bigl\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,0\rangle\bigr\rangle.$$

Тогда по следствию 2.1 класс S-**PWinj** аксиоматизируем.

Покажем, что конгруэнция $\theta_{\bigl\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\bigr\rangle}$ не конечно порождена. Так как

$$\bigl\{\bigl\langle\langle i,j\rangle^1,\langle i',j'\rangle^2\bigr\rangle \mid \langle i,j\rangle+\langle 1,1\rangle=\langle i',j'\rangle+\langle 1,2\rangle\bigr\} =$$

$$= \bigl\{\bigl\langle\langle i,j\rangle^1,\langle i',j'\rangle^2\bigr\rangle \mid \langle i,j\rangle=\langle i',j'+1\rangle\bigr\} =$$

$$= \bigl\{\bigl\langle\langle i,j+1\rangle^1,\langle i,j\rangle^2\bigr\rangle \mid \langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2\bigr\} \subseteq \theta_{\bigl\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\bigr\rangle},$$

то

$$\theta_{\bigl\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\bigr\rangle} = \bigl\{\bigl\langle\langle i,j+1\rangle^1,\langle i,j\rangle^2\bigr\rangle \mid \langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2\bigr\}\cup$$

$$\cup\bigl\{\bigl\langle\langle i,j\rangle^2,\langle i,j+1\rangle^1\bigr\rangle \mid \langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2\bigr\}\cup$$

$$\cup\bigl\{\bigl\langle\langle i,j\rangle^k,\langle i,j\rangle^k\bigr\rangle \mid \langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2, k\in\{1,2\}\bigr\}.$$

Пусть $\bigl\langle\langle i_1,j_1\rangle^{k_1},\langle i'_1,j'_1\rangle^{m_1}\bigr\rangle$, $\ldots$, $\bigl\langle\langle i_n,j_n\rangle^{k_n},\langle i'_n,j'_n\rangle^{m_n}\bigr\rangle$ порождают $\theta_{\bigl\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\bigr\rangle}$ и $j_0=max\{j_1,\ldots,j_n,j'_1,\ldots,j'_n\}+1$. Так как

$$\bigl\langle\langle 1,j_0+1\rangle^1,\langle 1,j_0\rangle^2\bigr\rangle\in\theta_{\bigl\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\bigr\rangle},$$

то существуют такие $\langle i,j\rangle\in\mathbb{N}^2$ и $l\leqslant n$, что $\langle 1,j_0+1\rangle^1=\langle i,j\rangle+\langle i_l,j_l\rangle^1$ или $\langle 1,j_0+1\rangle^1=\langle i,j\rangle+\langle i'_l,j'_l\rangle^1$. Предположим, что выполняется первое равенство. Можно считать, что $\langle i_l,j_l\rangle\neq\langle 0,0\rangle$. Тогда $1=i+i_l$ и $i=0$. Следовательно, $j=0$ и $j_0+1=j_l$. Противоречие.

Пример 4 моноида S, для которого класс S-PWInj не аксиоматизируем.

Пусть $S=\langle\omega\cup\{e\};\circ\rangle$ — полугруппа с присоединенной единицей e, где $t\circ r=\min\{t,r\}$ для любых $t,r\in S$. Покажем, что конгруэнция

$$\theta_s=\{\langle t,r\rangle \mid t\circ s=r\circ s\}=\{\langle t,r\rangle \mid t=r \text{ или } t,r\geq s\}$$

не конечно порождена для любого $s \in S$. Предположим, что конгруэнция θ_s порождается множеством $\{\langle t_i, r_i \rangle \mid i \leqslant n\}$. Пусть

$$m = \max\left(\{t_i \mid i \leqslant n\} \cup \{r_i \mid i \leqslant n\}\right) + 1.$$

Так как $\langle m, m \rangle \in \theta_s$, то по лемме Мальцева $m = k \circ t_i$ или $m = k \circ r_i$ для некоторых $i \leqslant n$, $k \in S$, что не так.

3 Полнота и стабильность

В данной главе описаны моноиды, над которыми класс главно слабо инъективных полигонов полон, модельно полон, категоричен, стабилен и суперстабилен (теоремы 3.1, 3.5, 3.8). Приведены примеры моноидов S, для которых классы инъективных, слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных полигонов полны (модельно полны, категоричны) только в том случае, когда S тривиален (теоремы 3.2, 3.3, 3.4). Дана характеризация конечных моноидов со стабильным (суперстабильным) классом инъективных, слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных полигонов (теоремы 3.6, 3.7).

3.1 Полнота, модельная полнота и категоричность классов инъективных и слабо инъективных полигонов

Следующее замечание очевидно.

Замечание 3.1. *Для моноида S имеют место следующие импликации:*

$$S\text{-}\boldsymbol{PWInj} \text{ полон (модельно полон, категоричен)}$$
$$\Downarrow$$
$$S\text{-}\boldsymbol{FGWInj} \text{ полон (модельно полон, категоричен)}$$
$$\Downarrow$$
$$S\text{-}\boldsymbol{WInj} \text{ полон (модельно полон, категоричен)}$$
$$\Downarrow$$

*S-**Inj** полон (модельно полон, категоричен)*

Теорема 3.1. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

*(1) класс S-**PWInj** полон;*

*(2) класс S-**PWInj** модельно полон;*

*(3) класс S-**PWInj** категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S = \{1\}$.

Доказательство. Если $S = \{1\}$, то класс S-**Inj** всех полигонов над S, в частности, класс S-**PWInj** всех главно слабо инъективных полигонов над S полон, модельно полон и категоричен.

(3) $\Longrightarrow$ (1) следует из предложения 1.3.

(1) $\Longrightarrow$ (4) и (2) $\Longrightarrow$ (4). Пусть класс S-**PWInj** полон (модельно полон) и ${}_SQ$ — бесконечный полигон нулей. Ясно, что ${}_SQ$ — главно слабо инъективный полигон. Через ${}_SA$ обозначим копроизведение полигонов ${}_SS$ и ${}_SQ$. Так как ${}_SQ \subseteq {}_SA$ и ${}_SQ$ — главно слабо инъективный полигон, то, в силу полноты (модельной полноты) класса S-**PWInj**, имеем ${}_SQ \equiv {}_S\overline{A}$. Пусть $t \in S$ и

$$\Phi_t \leftrightharpoons \forall x\, (tx = x)\,.$$

По предположению, ${}_SQ \vDash \Phi_t$. Тогда ${}_S\overline{A} \vDash \Phi_t$, т.е. ${}_S\overline{A}$ — полигон нулей. Так как элемент $1 \in S$, то $1 \in {}_S\overline{A}$ и, следовательно, так же является нулем. Тогда $t = t1 = 1$ и $S = \{1\}$. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть S — реверсивный справа моноид. Тогда следующие условия эквиваленты:*

*(1) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон;*

*(2) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) модельно полон;*

*(3) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S = \{1\}$.

Доказательство. Пусть S — реверсивный справа моноид. Если $S = \{1\}$, то класс S-**Inj** всех инъективных полигонов над S, в частности классы S-**WInj** и S-**FGWInj**, полны, модельно полны и категоричны.

(3) $\Longrightarrow$ (1) следует из предложения 1.3.

(1) $\Longrightarrow$ (4) и (2) $\Longrightarrow$ (4). По замечанию 3.1 теорему достаточно доказать для класса S-**Inj**.

Пусть класс S-**Inj** полон (модельно полон), ${}_SQ$ — бесконечный полигон нулей. Покажем, что ${}_SQ$ — инъективный полигон. Пусть ${}_SB$ — подполигон циклического полигона ${}_SSa$, $b_1, b_2 \in B$ и $\varphi : {}_SB \to {}_SQ$ — гомоморфизм полигонов. Пусть $b_1 = t_1 a$, $b_2 = t_2 a$ ($t_1, t_2 \in S$). Поскольку $St_1 \cap St_2 \neq \varnothing$, то $s_1 t_1 = s_2 t_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$. Тогда

$$\varphi(b_1) = \varphi(s_1 b_1) = \varphi(s_1 t_1 a) = \varphi(s_2 t_2 a) = \varphi(s_2 b_2) = \varphi(b_2),$$

и $\varphi(B)$ — нуль полигона ${}_SQ$. Пусть $\overline{\varphi}(Sa) = \varphi(B)$. Очевидно, $\overline{\varphi}$ — гомоморфизм, продолжающий φ. По критерию Скорнякова-Бэра ${}_SQ \in S$-**Inj**.

Через ${}_SA$ обозначим копроизведение полигонов ${}_SS$ и ${}_SQ$. Так как ${}_SQ \subseteq {}_SA$ и ${}_SQ$ — инъективный полигон, то ${}_SQ \equiv {}_S\overline{A}$ в силу полноты (модельной полноты) класса S-**Inj**. Пусть $t \in S$ и

$$\Phi_t \leftrightharpoons \forall x\,(tx = x).$$

Так как ${}_SQ \models \Phi_t$, то ${}_S\overline{A} \models \Phi_t$, т.е. ${}_S\overline{A}$ — полигон нулей. Тогда $S = \{1\}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть S — коммутативный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*(1) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон;*

*(2) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) модельно полон;*

*(3) класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) категоричен в некоторой бесконечной мощности;*

(4) $S=\{1\}$.

Доказательство. Если S — коммутативный моноид, то $st \in Ss \cap St$ для любых $s,t \in S$. Следовательно, S — реверсивный справа моноид. По теореме 3.2 имеет место эквивалентность условий (1)-(4).

Для моноида S через T обозначим множество $\{s \in S \mid Ss = S\}$.

Замечание 3.2. *Если S — конечный моноид, то T — группа.*

Доказательство. Пусть $t \in T$. Тогда $St = S$. Следовательно, существует такой $t' \in S$, что $t't = 1$. Покажем, что $t' \in T$. Пусть $\alpha : S \to St'$ такое, что $\alpha(s) = st'$. Для любых $s_1, s_2 \in S$ имеем

$$\alpha(s_1) = \alpha(s_2) \Rightarrow s_1t' = s_2t' \Rightarrow s_1t't = s_2t't \Rightarrow s_1 = s_2,$$

т.е. α — инъективное отображение. Следовательно, в силу конечности моноида S имеем $St' = S$. Поэтому $t' \in T$ и T — группа.

Теорема 3.3. *Пусть класс S-**WInj** полон и для любого $s \in S \setminus T$ существует $r \in S$ такой, что $r \neq 1$ и $rs = s$. Тогда $S = \{1\}$.*

Доказательство. Если $S \setminus T = \varnothing$, то по теореме 3.2 $|S| = 1$, противоречие. Пусть $S \setminus T \neq \varnothing$. Очевидно, что ${}_S(S \setminus T) = {}_SR$ — подполигон полигона ${}_SS$, который является объединением всех собственных подполигонов ${}_SS$.

Пусть ${}_SQ = {}_SS/\rho(R)$, где $\rho(R)$ — конгруэнция Риса. Через $\overline{s} \in Q$ обозначим класс $s/\rho(R)$, через $\overline{\theta}$ — класс R. Пусть ${}_SA = \left(\bigsqcup\limits_{i\in\omega} {}_SQ_i\right)/\rho$, где ${}_SQ_i$ — копия полигона ${}_SQ$, $\overline{r}_i$ — копия элемента $\overline{r}$ в Q_i ($i \in \omega$), конгруэнция ρ полигона $\bigsqcup\limits_{i\in\omega} {}_SQ_i$ порождается множеством $\left\{\langle\overline{\theta}_i, \overline{\theta}_j\rangle \mid i, j \in \omega\right\}$. Будем отождествлять элементы $\overline{r}_i/\rho \in A$ с $\overline{r}_i \in Q_i$ ($i \in \omega$). Ясно, что $\overline{\theta}_i = \overline{\theta}_j$ для любых $i, j \in \omega$. Покажем, что ${}_SA$ — инъективный полигон. Предположим, что I — собственный левый идеал S, $\varphi : {}_SI \to {}_SA$ — гомоморфизм полигонов, $a \in I$. Ясно, что $a \notin T$. Предположим, что $\varphi(a) = \overline{t}_i \in Q_i/\{\theta_i\}$, где $t \in T$. Поскольку $St = S$, то $t't = 1$ для некоторого $t' \in S$. Тогда $\varphi(t'a) = t'\overline{t}_i = \overline{1}_i$. По условию существует $r \in S$ такой, что $r \neq 1$ и $rt'a = t'a$. Тогда

$$\overline{r}_i = r\varphi(t'a) = \varphi(rt'a) = \varphi(t'a) = \overline{1}_i.$$

Поскольку классы $\overline{r}_i$ и $\overline{1}_i$ одноэлементны, то $r = 1$. Следовательно, $\varphi(a) = \theta_i$. Так как a — произвольный элемент идеала I, то $\varphi(I) = \left\{\overline{\theta}_i\right\}$. Гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SS \to {}_SA$ со свойством $\overline{\varphi}(1) = \theta$ продолжает φ. Таким образом, ${}_SA \in$ S-**Inj**.

Для любых $s, t \in S \setminus T$

$${}_SA \vDash \forall xy(sx = ty).$$

Через ${}_SB$ обозначим инъективную оболочку ${}_SA \sqcup {}_SS$. В силу полноты (модельной полноты) класса S-**Inj** ${}_SB \equiv {}_SA$. Следовательно, ${}_SB \vDash \forall xy(sx = ty)$, где $s, t \in S \setminus T$. Поэтому ${}_SS \vDash \forall xy(sx = ty)$ для любых $s, t \in S \setminus T$. Следовательно, $|S \setminus T| = 1$ и S — реверсивный моноид. По теореме 3.2 $|S| = 1$. Противоречие.

Следствие 3.2. *Если S — регулярный моноид, T — группа и класс S-**WInj** полон, то $|S| = 1$.*

Доказательство. Так как S — регулярный моноид, то для любого $a \in S$ существует $b \in S$ такой, что $a = aba$. Пусть $a \notin T$. Предположим, что $ab = 1$. Тогда $b \in T$. Следовательно, $a = b^{-1} \in T$, что противоречит выбору a. Поэтому $ab \neq 1$.

Теорема 3.4. *Если S — конечный моноид и класс S-**Inj** (S-**WInj**, S-**FGWInj**) полон, то $|S| = 1$.*

Доказательство. Предположим, что S не одноэлементный моноид. Покажем, что ${}_SB = {}_S\left(\overline{S} \cup \bigcup\limits_{i\in\omega} T_i\right) \in S$-**Inj**. Пусть ${}_SC$ — подполигон полигона ${}_SD$, $\varphi : {}_SC \to {}_SB$ — гомоморфизм полигонов, $c \in C$. Если $\varphi(c) \in T_i$, то неверно, что $Sc \subset Sd$ для любого $d \in D$, так как $|Sd| \leqslant |S| = |Sc|$. Следовательно, $\varphi(Sc) \subseteq {}_SB$. Пусть $C' = C \setminus \{Tc \mid \varphi(c) \notin \overline{S}\}$, $\varphi' = \varphi|_{C'}$. Очевидно, $\varphi' : {}_SC' \to {}_S\overline{S}$ — гомоморфизм полигонов. Следовательно, существует гомоморфизм $\overline{\varphi}' : {}_SD \to {}_S\overline{S}$, продолжающий φ'. Пусть $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}' \cup \{(c, \varphi(c)) \mid c \in C \setminus C'\}$. Тогда $\overline{\varphi} : {}_SD \to {}_SB$ — гомоморфизм полигонов, продолжающий φ, и ${}_SB$ — инъективный полигон.

Пусть ${}_SQ$ — бесконечный полигон нулей, ${}_SE$ — инъективная оболочка полигона ${}_SQ$. В силу полноты класса S-**Inj** имеем ${}_SE \equiv {}_SB$, что не так. Получили противоречие.

3.2 Стабильность классов инъективных и слабо инъективных полигонов

Лемма 3.1. *Пусть ${}_SA \in S$-**PWInj**, S — S-**PWInj**-стабилизатор. Тогда для любого $a \in A$ полигон ${}_SSa$ линейно упорядочен.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены, $a \in A$. Предположим, что существуют такие подполигоны ${}_SB$ и ${}_SC$ полигона ${}_SSa$, что

$B \nsubseteq C$, $C \nsubseteq B$. Пусть $b \in B \setminus C$, $c \in C \setminus B$ и $b = ta$, $c = sa$ для некоторых $t, s \in S$. Пусть $K = \{\langle i, j\rangle \mid j \leqslant i < \omega\}$; ${}_SD_{ij}$ — копия полигона ${}_SA$ ($\langle i, j\rangle \in K$), причем $D_{ij} \cap D_{kl} = \varnothing$, если $\langle i, j\rangle \neq \langle k, l\rangle$; d_{ij} — копия элемента $d \in Sa$ в D_{ij}. Через ${}_SD$ обозначим полигон $\bigcup\limits_{\langle i,j\rangle \in K} {}_SD_{ij}/\theta$, где θ — конгруэнция полигона $\bigcup\limits_{\langle i,j\rangle \in K} {}_SD_{ij}$, порожденная множеством

$$\{\langle b_{ij}, b_{il}\rangle \mid \langle i, j\rangle, \langle i, l\rangle \in K\} \cup \{\langle c_{ij}, c_{lj}\rangle \mid \langle i, j\rangle, \langle l, j\rangle \in K\};$$

через b_i — класс эквивалентности θ с представителем b_{ij}, через c_j — класс эквивалентности θ с представителем c_{ij}; через $\varphi(x, y)$ — формулу $\exists z\,(x = tz \wedge y = sz)$. Поскольку ограничение θ на полигон ${}_SD_{ij}$ ($\langle i, j\rangle \in K$) является нулевой конгруэнцией, то по предлоежению 1.10 ${}_SD$ — главно слабо инъективный полигон. Заметим, что $b_i = ta_{ij}/\theta$ и $c_j = sa_{ij}/\theta$ для любой пары $\langle i, j\rangle \in K$. Более того,

$${}_SD \models \varphi(b_i, c_j) \Longleftrightarrow i \geqslant j,$$

что по предложению 1.6 противоречит стабильности $\mathrm{Th}({}_SD)$.

Теорема 3.5. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S — стабилизатор;

*(2) S — S-**PWInj**-стабилизатор;*

(3) S — линейно упорядоченный моноид.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) следует из определения S-**PWInj**-стабилизатора.

(2) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 3.1, если в качестве полигона ${}_SA$ взять ${}_S\overline{S}$, в качестве элемента $a \in A$ — единицу S.

(3) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 1.11.

Утверждение 3.1. *Пусть S — моноид, для которого максимальный (среди левых неглавных идеалов) левый неглавный идеал R существует и конечен, множество $\{s \in \overline{S \sqcup \{\theta\}} \mid \bigwedge\limits_{r\in R} rs = r\}$ конечно, где под ${}_S\overline{S \sqcup \{\theta\}}$ понимается инъективная оболочка полигона ${}_S(S \sqcup \{\theta\})$. Тогда моноид S не является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором.*

Доказательство. Пусть условия утверждения выполнены, $R_1 = Sr_1$, $R_2 = \bigcup\limits_{i=2}^{n} Sr_i$, $R_1 \nsubseteq R_2$, $R_2 \nsubseteq R_1$, $R = R_1 \cup R_2$ — максимальный левый неглавный идеал, ${}_SP = {}_S\left(\overline{S \sqcup \{\theta\}}\right)$. Доказательство утверждения 3.1 содержит несколько лемм.

Лемма 3.2. *Пусть ${}_SSa$ — полигон, $a_1, a_2 \in Sa$, $|Sa_1| > |R|$. Тогда $Sa_1 \subseteq Sa_2$ или $Sa_2 \subseteq Sa_1$.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются, $\varphi : S \to Sa$ — гомоморфизм полигонов такой, что $\varphi(t) = ta$ для любого $t \in S$. Так как $a_1, a_2 \in Sa$, то $a_1 = s_1a$ и $a_2 = s_2a$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$. Поскольку для любых $t, r \in S$ из неравенства $ta_1 \neq ra_1$ следует $ts_1 \neq rs_1$, то $|R| < |Sa_1| \leqslant |Ss_1|$. По выбору R имеем $Ss_1 \subseteq Ss_2$ или $Ss_2 \subseteq Ss_1$. Следовательно, $Sa_1 = S\varphi(s_1) \subseteq S\varphi(s_2) = Sa_2$ или $Sa_2 = S\varphi(s_2) \subseteq S\varphi(s_1) = Sa_1$, что доказывает лемму.

Пусть $\kappa \geqslant \max\{\omega, |S|\}$, $\beta \in 2^\kappa$, β' — копия ординала β, $\beta' \cap \kappa = \varnothing$, α' — копия $\alpha \in \beta$ в β', ${}_SP^{\alpha\beta}$, ${}_SP^{\gamma'\beta}$ — копии полигона ${}_SP$ ($\alpha \in \kappa$, $\gamma \in \beta$), ${}_SR_1^{\alpha\beta} \subseteq {}_SP^{\alpha\beta}$ и ${}_SR_2^{\alpha\beta} \subseteq {}_SP^{\alpha\beta}$ — копии ${}_SR_1$ и ${}_SR_2$ в полигоне ${}_SP^{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ и $a^{\gamma'\beta}$ — копии элемента $a \in P$ в $P^{\alpha\beta}$ и $P^{\gamma'\beta}$ соответственно,

$$ {}_SC_\beta = \left(\coprod_{\alpha\in\kappa} {}_SP^{\alpha\beta} \sqcup \coprod_{\gamma'\in\beta'} {}_SP^{\gamma'\beta} \right) /\eta_\beta, $$

где η_β — конгруэнция, порожденная множеством

$$\left\{\langle r_2^{\alpha\beta}, r_2^{\alpha'\beta}\rangle, \ldots, \langle r_n^{\alpha\beta}, r_n^{\alpha'\beta}\rangle \mid \alpha \in \beta\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\langle r_1^{\alpha\beta}, r_1^{\gamma\beta}\rangle \mid \alpha, \gamma \in \kappa\right\} \cup \left\{\langle r_1^{\alpha\beta}, r_1^{\alpha'\beta}\rangle \mid \alpha \in \beta\right\},$$

$C = \bigsqcup\limits_{\beta\subseteq\kappa} C_\beta/\theta$, где конгруэнция θ порождается множеством

$$\left\{\langle r_2^{\alpha\beta}/\eta_\beta, r_2^{\alpha\gamma}/\eta_\gamma\rangle, \ldots, \langle r_n^{\alpha\beta}/\eta_\beta, r_n^{\alpha\gamma}/\eta_\gamma\rangle \mid \alpha \in \kappa, \beta, \gamma \in 2^\kappa\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\langle r_2^{\alpha'\beta}/\eta_\beta, r_2^{\alpha'\gamma}/\eta_\gamma\rangle, \ldots, \langle r_n^{\alpha'\beta}/\eta_\beta, r_n^{\alpha'\gamma}/\eta_\gamma\rangle \mid \alpha \in \beta \cap \gamma\right\}.$$

Через $\overline{a}^{\alpha\beta}$ обозначим элементы $a^{\alpha\beta}/\theta$ $(\alpha \in \kappa,\ \beta \in 2^\kappa)$. Заметим, что для любых $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \kappa,\ \beta, \gamma \in 2^\kappa,\ i \in \{2, \ldots, n\}$ имеют место равенства

$$\overline{r}_1^{\alpha_1\beta} = \overline{r}_1^{\alpha_2\beta}, \overline{r}_i^{\alpha\beta} = \overline{r}_i^{\alpha\gamma} \text{ и, если } \alpha \in \beta, \text{ то } \overline{r}_i^{\alpha\beta} = \overline{r}_i^{\alpha'\beta},.$$

Тогда элементы $\overline{r}_1^{\alpha\beta}$ и $\overline{r}_2^{\alpha\beta}, \ldots, \overline{r}_n^{\alpha\beta}$ можно переобозначить через r_1^β и $r_2^\alpha, \ldots, r_n^\alpha$ соответственно. Поскольку конгруэнция η_β на полигоне ${}_SP^{\alpha\beta}$ нулевая и конгруэнция θ на полигоне ${}_SP^{\alpha\beta}/\eta_\beta$ нулевая, то полигон $({}_SP^{\alpha\beta}/\eta_\beta)/\theta$ будем отождествлять с полигоном ${}_SP^{\alpha\beta}$, полигон $(({}_SR_1^{\alpha\beta} \cup {}_SR_2^{\alpha\beta})\eta_\beta)/\theta$ — с полигоном ${}_SR_1^{\alpha\beta} \cup {}_SR_2^{\alpha\beta}$, где $\alpha \in \kappa, \beta \in 2^\kappa$.

Через $\Phi_0(x, y_1, \ldots, y_n)$ обозначим формулу $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} r_i x = y_i$.

Зафиксируем $\alpha \in \kappa$, $\beta \in 2^\kappa$. Пусть

$$B = \left\{c \in \overline{C} \setminus C \mid {}_S\overline{C} \vDash \Phi_0\left(c, r_1^\beta, r_2^\alpha \ldots, r_n^\alpha\right)\right\}$$

Лемма 3.3. $B = \varnothing$.

Доказательство. Пусть

$$U = \left\{u \in \overline{C} \setminus C \mid \exists b \in B : u \text{ и } b \text{ связаны вне } {}_SC\right\}.$$

Покажем, что

$$U = \left\{ u \in \overline{C} \mid \exists s, t \in S, \exists b \in B : sb = tu \text{ и } tu \notin C \right\}. \tag{2}$$

Пусть $u \in U$, $b \in B$, $t, s, r \in S$, $sb = tu$, $tu, ru \notin C$. Ясно, что ${}_S\left(\overline{C} \setminus U\right)$ — полигон. Так как ${}_S\overline{C} \models \Phi_0\left(b, r_1^{\beta}, r_2^{\alpha}, \ldots, r_n^{\alpha}\right)$, то $R_1^{\alpha\beta} \cup R_2^{\alpha\beta} \subset Sb$. Так как $sb \notin C$, то $sb \notin R_1^{\alpha\beta} \cup R_2^{\alpha\beta}$ и $|Ssb| = |Stu| > |R|$. Тогда $|Su| > |R|$. По лемме 3.2 $Sru \subseteq Stu$ или $Stu \subseteq Sru$. Следовательно, (2) доказано.

Тогда

$$Su \cap C \subseteq R_1^{\alpha\beta} \cup R_2^{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Покажем, что ${}_S\left(\overline{C} \setminus U\right)$ — инъективный полигон. Пусть ${}_SD$ — подполигон циклического полигона ${}_SSd$ и $\varphi : {}_SD \to {}_S\left(\overline{C} \setminus U\right)$ — гомоморфизм полигонов. Так как ${}_S\overline{C}$ — инъективный полигон, то существует гомоморфизм $\overline{\varphi} : {}_SSd \to {}_S\overline{C}$, продолжающий φ. Пусть $\overline{\varphi}(d) \in U$, $c \in D$. Тогда $c = td$ для некоторого $t \in S$ и

$$\varphi(c) = \overline{\varphi}(c) = \overline{\varphi}(td) = t\overline{\varphi}(d).$$

Так как $\varphi(c) \notin U$, то $\varphi(c) \in C$. По (2) $\varphi(c) \in R_1^{\alpha\beta} \cup R_2^{\alpha\beta}$, т. е. $\varphi(D) \subseteq R_1^{\alpha\beta} \cup R_2^{\alpha\beta} \subseteq P^{\alpha\beta}$. Поскольку ${}_SP^{\alpha\beta}$ — инъективный полигон, то существует гомоморфизм $\psi : {}_SSd \to {}_SP^{\alpha\beta}$, продолжающий φ. По критерию Скорнякова-Бэра ${}_S\left(\overline{C} \setminus U\right)$ — инъективный полигон. По определению инъективной оболочки $U = \varnothing$. Так как $B \subseteq U$, то $B = \varnothing$.

Лемма 3.4. *Теория $Th({}_S\overline{C})$ нестабильна.*

Доказательство. Из построения полигона ${}_SC$ следует, что существует $k \in \omega$ такой, что

$$\left|\Phi_0(C, r_1^{\beta}, r_2^{\alpha}, \ldots, r_n^{\alpha})\right| = \begin{cases} k, \text{ если } \alpha \notin \beta, \\ 2k, \text{ если } \alpha \in \beta. \end{cases}$$

Из леммы 3.3 следует $\Phi_0(\overline{C}, r_1^{\beta}, r_2^{\alpha}, \ldots, r_n^{\alpha}) = \Phi_0(C, r_1^{\beta}, r_2^{\alpha}, \ldots, r_n^{\alpha})$.

Пусть $X = \{r_i^{\alpha} \mid 2 \leqslant i \leqslant n, \alpha \in \kappa\} \subseteq \overline{C}$, $|X| = \kappa$, $\beta, \gamma \in 2^{\kappa}$, $\beta \neq \gamma$. Покажем, что $\mathrm{tp}(r_1^{\beta}, X) \neq \mathrm{tp}(r_1^{\gamma}, X)$. Пусть $\alpha \in \beta \setminus \gamma$. Тогда

$$\exists^{2k} y \Phi_0(y, x, r_2^{\alpha}, \ldots, r_n^{\alpha}) \in \mathrm{tp}(r_1^{\beta}, X) \setminus \mathrm{tp}(r_1^{\gamma}, X).$$

Следовательно, $|S(X)| \geqslant 2^{\kappa}$. Таким образом, теория $Th({}_S\overline{C})$ не стабильна.

Лемма 3.4 завершает доказательство утверждения 3.1.

Следствие 3.3. *Если S — конечный моноид, являющийся S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором, то S — линейно упорядоченный моноид.*

Доказательство. Очевидно, если S — конечный не линейно упорядоченный моноид, то S удовлетворяет условиям утверждения 3.1. Следовательно, S не является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором.

Теорема 3.6. *Пусть S — конечный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) S — стабилизатор;

*(2) S — S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатор;*

(3) S — линейно упорядоченный моноид.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) следует из определения $\mathcal{K}$-стабилизатора, где $\mathcal{K} \in \{$ S-**Inj**, S-**WInj**, S-**FGWInj** $\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) следует из следствия 3.3.

(3) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 1.11.

Утверждение 3.2. *Если моноид S является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором, то в S нет бесконечного числа попарно несравнимых левых идеалов.*

Доказательство. Предположим, что существуют такие $r_i \in S$ ($i \in I$, $|I| \geqslant \omega$), что $Sr_i \nsubseteq Sr_j$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Пусть $K \subseteq I$, ${}_SA_K = {}_SS/\rho(T_K)$, $1_K = 1/\rho(T_K)$, где $T_K = \bigcup\limits_{k \in K} Sr_k$, $\rho(T_k)$ — конгруэнция Риса. Через ${}_SA$ обозначим $\bigsqcup\{{}_SA_K \mid K \subseteq I, |K| > 1\}$. Пусть $K, L \subseteq I$, $K \neq L$, $k_1 \in K \setminus L$, $k_2 \in K$ и $k_1 \neq k_2$. Так как $r_{k_1}x = r_{k_2}x \in \mathrm{tp}(1_K, \varnothing)$ и $r_{k_1}x = r_{k_2}x \notin \mathrm{tp}(1_L, \varnothing)$, то $\mathrm{tp}(1_K, \varnothing) \neq \mathrm{tp}(1_L, \varnothing)$ в теории $\mathrm{Th}({}_S\overline{A})$. Следовательно, $\mathrm{Th}({}_S\overline{A})$ не стабильна и S не является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) стабилизатором. Получили противоречие.

3.3 Суперстабильность классов инъективных и слабо инъективных полигонов

Теорема 3.7. *Пусть S — конечный моноид. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) S — суперстабилизатор;

*(2) S — S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) суперстабилизатор;*

(3) S — вполне упорядоченный моноид.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) следует из определения $\mathcal{K}$-суперстабилизатора, где $\mathcal{K} \in \{$ S-**Inj**, S-**WInj**, S-**FGWInj** $\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) следует из конечности моноида S и теоремы 3.6.

(3) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 1.12.

Утверждение 3.3. *Пусть $\mathcal{K}_0$ — класс полигонов, обладающий следующим свойством: для любого полигона ${}_SA$ существует полигон ${}_SB \in \mathcal{K}_0$ такой, что ${}_SA \subseteq {}_SB$. Пусть S — $\mathcal{K}_0$-суперстабилизатор, ${}_SA$ — полигон, $a \in A$. Тогда полигон ${}_SSa$ удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи циклических подполигонов.*

Доказательство. Пусть S — $\mathcal{K}_0$-суперстабилизатор, ${}_SA$ — полигон, $a \in A$. Предположим, что $t_i \in S$ такие, что $St_ia \subset St_{i+1}a \subseteq Sa$ ($i \in \omega$). Пусть T — теория класса $\mathcal{K}_0$, κ — произвольный кардинал, $\kappa \geqslant 2^{|T|}$;

$Q = \{\eta \in \kappa^\omega \mid$ существует $n \in \omega$ такой, что $\eta(m) = 0$ для любого $m > n\}$;

$\hat{0} \in \kappa^\omega$ такой, что $\hat{0}(m) = 0$ для любого $m \in \omega$, $r(\eta) = \min\{n \in \omega \mid \eta(m) = 0$ для любого $m \geqslant n\}$. Зададим на Q отношения $<$ и $\leqslant$:

$$\eta < \varepsilon \Longleftrightarrow r(\eta) \leqslant r(\varepsilon),$$

причем при выполнении равенства $r(\eta) = r(\varepsilon)$ существует $k \in \omega$ такое, что $\eta|_k = \varepsilon|_k$, но $\eta(k) < \varepsilon(k)$; $\eta \leqslant \varepsilon$, если $\eta < \varepsilon$ или $\eta = \varepsilon$. Тогда $\langle Q; \leqslant\rangle$ является вполне упорядоченным множеством. Через η_k обозначим элемент из κ^{k-1} такой, что $\eta_k = \eta|_k$, где $\eta \in Q, k \in \omega$. Пусть $\eta_0 = \varnothing$. Для любых $\eta \in Q$, $k \in \omega$ построим полигоны ${}_SN_\eta$, ${}_SN'_\eta$ и элементы $b_\eta, b_{\eta_k} \in N_\eta$ следующим образом. Пусть $N_{\hat{0}} = Sa$, $N'_{\hat{0}} = N_{\hat{0}}$, $b_{\hat{0}} = a$, $b_{\hat{0}_k} = t_ka$, $k \in \omega$. Предположим, что для всех $\xi \in Q$, $\xi < \eta$, $k \in \omega$ полигоны ${}_SN'_\xi$, ${}_SN_\xi$ и элементы b_ξ, b_{ξ_k} построены. Заметим, что элемент $b_{\eta_{r-1}}$, где $r = r(\eta)$, на предыдущих шагах построен. Если существует наибольший элемент $\varepsilon \in Q$ такой, что $\varepsilon < \eta$, то ${}_SN'_\eta = {}_SN_\varepsilon$;

в противном случае ${}_SN'_\eta = \bigcup\limits_{\zeta<\eta} {}_SN_\zeta$. Положим ${}_SN_\eta = {}_S\left(N'_\eta \sqcup Sa\right)/\theta_\eta$, где θ_η — конгруэнция на полигоне ${}_S\left(N'_\eta \sqcup Sa\right)$, порожденная парой $\langle b_{\eta_{r-1}}, t_{r-1}a\rangle$; при этом отождествим элементы из N'_η с классами конгруэнции θ_η, представителями которых они являются. Элемент a/θ_η переобозначим через b_η, элементы t_ia/θ_η — через b_{η_i}, где $i > r(\eta)-1$. Через ${}_SN$ обозначим $\bigcup\limits_{\eta\in Q} {}_SN_\eta$. Пусть ${}_SM \in \mathcal{K}_0$ такой, что ${}_SN \subseteq {}_SM$, $B = \{b_{\eta_k} \mid \eta \in \kappa^\omega, k \in \omega\}$. Так как

$$b_{\eta_k} = t_kx \in \mathrm{tp}(b_\varepsilon, B) \Longleftrightarrow \eta(\xi) = \varepsilon(\xi) \text{ для всех } \xi \leqslant k,$$

где $k \geqslant 0$, то $\mathrm{tp}(b_\eta, B) \neq \mathrm{tp}(b_\varepsilon, B)$, $\eta \neq \varepsilon$, $\eta, \varepsilon \in Q$. Поскольку $|B| = \sum\limits_{k\in\omega} \kappa^k = \kappa$, то $|S(B)| \geqslant |\{b_\eta \mid \eta \in \kappa^\omega\}| = \kappa^\omega > \kappa$. Таким образом, $Th({}_SM)$ не суперстабильна. Следовательно, моноид S не является $\mathcal{K}_0$-суперстабилизатором. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Следствие 3.4. *Если моноид S является S-**Inj**- (S-**WInj**-, S-**FGWInj**-) суперстабилизатором, то S удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи главных левых идеалов.*

Следствие 3.5. *Если моноид S является S-**PWInj**-суперстабилизатором, то S — вполне упорядоченный моноид.*

Доказательство. Пусть S — S-**PWInj**-суперстабилизатор. Тогда по теореме 3.5 S — линейно упорядоченный моноид. Так как полигон ${}_S\overline{S}$ является главно слабо инъективным, то по следствию 3.4 S удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи левых идеалов. Следовательно, S — вполне упорядоченный моноид.

Теорема 3.8. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

(1) S – суперстабилизатор;

*(2) S – S-**PWInj**-суперстабилизатор;*

(3) S – вполне упорядоченный моноид.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) следует из определения S-**PWInj**-суперстабилизатора.

(2) $\Rightarrow$ (3) следует из следствия 3.5.

(3) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 1.12.

4 Примитивная нормальность и примитивная связность

В данной главе доказано, что класс всех инъективных полигонов примитивно нормален (теорема 4.1). Для реверсивного справа моноида S показано, что класс всех инъективных полигонов над S примитивно связен тогда и только тогда, когда S — группа (теорема 4.2). Приведено необходимое условие примитивной связности класса инъективных полигонов (теорема 4.3).

4.1 Примитивная нормальность класса инъективных полигонов

Теорема 4.1. *Класс S-**Inj** примитивно нормален.*

Доказательство. Пусть ${}_SQ$ — инъективный полигон, $\Psi(\bar{x},\bar{y})$ — примитивная формула, $\Psi(\bar{x},\bar{y}) \leftrightharpoons \exists \bar{z}\Theta\,(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, где

$$\Theta\,(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \leftrightharpoons \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_1} s_i^1\bar{x}(l_i^1)=t_j^1\bar{x}(l_j^1) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_2} s_i^2\bar{x}(l_i^2)=t_j^2\bar{z}(l_j^2)\wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_3} s_i^3\bar{z}(l_i^3)=t_j^3\bar{z}(l_j^3) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_4} s_i^4\bar{z}(l_i^4)=t_j^4\bar{y}(l_j^4)\wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_5} s_i^5\bar{y}(l_i^5)=t_j^5\bar{y}(l_j^5) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle\in I_6} s_i^6\bar{y}(l_i^6)=t_j^6\bar{x}(l_j^6),$$

$s_i^k, t_j^k \in S$ $\;(\langle i,j\rangle \in I_k, 1 \leqslant k \leqslant 6)$. Можно считать, что из $\langle i_1, j\rangle, \langle i_2, j\rangle \in I_2$ следует, что $i_1 = i_2$ (в противном случае полагаем $I_2 := I_2 \setminus \{\langle i_2, j\rangle\}$, $I_1 := I_1 \cup \{\langle i_1, i_2\rangle\}$, $s_{i_1}^1 := s_{i_1}^2$, $t_{i_2}^1 := s_{i_2}^2$). Аналогично можно считать, что из $\langle i, j_1\rangle, \langle i, j_2\rangle \in I_4$ следует, что $j_1 = j_2$. Покажем, что теория $\mathrm{Th}({}_SQ)$ примитивно нормальна. Предположим, что $\bar{a}_2 \in \Psi(Q, \bar{a}_1) \cap \Psi(Q, \bar{a}_4)$, $\bar{a}_3 \in \Psi(Q, \bar{a}_4)$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 \in Q$, $l(\bar{a}_2) = l(\bar{a}_3) = l(\bar{x})$, $l(\bar{a}_1) = l(\bar{a}_4) = l(\bar{y})$, т. е.

$$
{}_SQ \vDash \Theta\left(\bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{b}_{21}\right) \wedge \Theta\left(\bar{a}_2, \bar{a}_4, \bar{b}_{24}\right) \wedge \Theta\left(\bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{b}_{34}\right) \tag{4}
$$

для некоторых $\bar{b}_{21}, \bar{b}_{24}, \bar{b}_{34} \in Q$, $l(\bar{b}_{21}) = l(\bar{b}_{24}) = l(\bar{b}_{34}) = l(\bar{z}) = m$. Покажем, что $\bar{a}_3 \in \Psi(Q, \bar{a}_1)$.

Пусть $\langle i, j\rangle \in \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle\}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha_{ij}^k : {}_SS \to {}_SS\bar{b}_{ij}(k)$ такой, что $\alpha_{ij}^k(r) = r\bar{b}_{ij}(k)$ для любого $r \in S$. Через θ_{ij}^k обозначим $\ker\, \alpha_{ij}^k$, через θ^k обозначим $\theta_{21}^k \cap \theta_{24}^k \cap \theta_{34}^k$.

Пусть $\langle i, j\rangle \in I_3$. Докажем, что ${}_SSs_i^3/\theta^{l_i^3} \cong {}_SSt_j^3/\theta^{l_j^3}$. Для этого покажем, что $\alpha : {}_SSs_i^3/\theta^{l_i^3} \to {}_SSt_j^3/\theta^{l_j^3}$ — изоморфизм, где $\alpha(rs_i^3/\theta^{l_i^3}) = rt_j^3/\theta^{l_j^3}$ для любого $r \in S$. Проверим корректность определения отображения α. Пусть $r_1, r_2 \in S$ такие, что $r_1s_i^3/\theta^{l_i^3} = r_2s_i^3/\theta^{l_i^3}$. Тогда $\langle r_1s_i^3, r_2s_i^3\rangle \in \theta^{l_i^3}$. Следовательно,

$$
\begin{gathered}
r_1s_i^3\bar{b}_{21}(l_i^3) = r_2s_i^3\bar{b}_{21}(l_i^3),\\
r_1s_i^3\bar{b}_{24}(l_i^3) = r_2s_i^3\bar{b}_{24}(l_i^3),\\
r_1s_i^3\bar{b}_{34}(l_i^3) = r_2s_i^3\bar{b}_{34}(l_i^3).
\end{gathered}
$$

По (4)

$$
\begin{gathered}
r_1t_j^3\bar{b}_{21}(l_j^3) = r_2t_j^3\bar{b}_{21}(l_j^3),\\
r_1t_j^3\bar{b}_{24}(l_j^3) = r_2t_j^3\bar{b}_{24}(l_j^3),\\
r_1t_j^3\bar{b}_{34}(l_j^3) = r_2t_j^3\bar{b}_{34}(l_j^3).
\end{gathered}
$$

Откуда получаем, что $\langle r_1t_j^3, r_2t_j^3\rangle \in \theta^{l_j^3}$ и $r_1t_j^3/\theta^{l_j^3} = r_2t_j^3/\theta^{l_j^3}$. Определение α корректно. Если $r_1t_j^3/\theta^{l_j^3} = r_2t_j^3/\theta^{l_j^3}$, то аналогично доказывается, что $r_1s_i^3/\theta^{l_i^3} = r_2s_i^3/\theta^{l_i^3}$. Следовательно, α является изоморфизмом.

Пусть ${}_SA = \left(\bigsqcup_{1\leqslant k\leqslant m} {}_SS/\theta^k\right)/\rho$, где ρ — конгруэнция, порождённая множеством $\left\{\langle t^3_j/\theta^{l^3_j}, s^3_i/\theta^{l^3_i}\rangle \mid \langle i,j\rangle \in I_3\right\}$. Через $\overline{s/\theta^k}$ обозначим класс $(s/\theta^k)/\rho$, ${}_SB$ — подполигон

$$\left(\bigsqcup_{\langle i,j\rangle\in I_4} {}_SSs^4_i/\theta^{l^4_i} \sqcup \bigsqcup_{\langle i,j\rangle\in I_2} {}_SSt^2_j/\theta^{l^2_j}\right)/\rho$$

полигона ${}_SA$. Определим отображение $\varphi : {}_SB \to {}_SQ$ следующим образом: $\varphi(\overline{rt^2_j/\theta^{l^2_j}}) = rs^2_i\bar{a}_3(l^2_i)$ для любых $\langle i,j\rangle \in I_2$, $r \in S$, $\varphi(\overline{rs^4_i/\theta^{l^4_i}}) = rt^4_j\bar{a}_1(l^4_j)$ для любых $\langle i,j\rangle \in I_4$, $r \in S$. Покажем корректность определения отображения φ.

Пусть $r_1, r_2 \in S$, $\langle i',j'\rangle \in I_2$, $\langle i'',j''\rangle \in I_4$. Предположим, что $\overline{r_1t^2_{j'}/\theta^{l^2_{j'}}} = \overline{r_2s^4_{i''}/\theta^{l^4_{i''}}}$. Покажем, что $r_1s^2_{i'}\bar{a}_3(l^2_{i'}) = r_2t^4_{j''}\bar{a}_1(l^4_{j''})$. По лемме Мальцева существуют такие $n \geqslant 1$, $v_k \in S$ и $\langle c_k, d_k\rangle = \langle t^3_{j_k}/\theta^{l^3_{j_k}}, s^3_{i_k}/\theta^{l^3_{i_k}}\rangle$, где $\langle i_k, j_k\rangle \in I_3$ ($0 \leqslant k \leqslant n$), что

$$r_1t^2_{j'}/\theta^{l^2_{j'}} = v_0c_0, \quad v_kd_k = v_{k+1}c_{k+1}\ (0 \leqslant k \leqslant n-1), \quad v_nd_n = r_2s^4_{i''}/\theta^{l^4_{i''}}.$$

Так как $r_1t^2_{j'}/\theta^{l^2_{j'}} = v_0t^3_{j_0}/\theta^{l^3_{j_0}}$ и $v_ns^3_{i_n}/\theta^{l^3_{i_n}} = r_2s^4_{i''}/\theta^{l^4_{i''}}$, то $l^2_{j'} = l^3_{j_0}$ и $l^3_{i_n} = l^4_{i''}$. Тогда по определению $\theta^{l^3_{j_0}}$ и $\theta^{l^3_{i_n}}$

$$r_1t^2_{j'}\bar{b}_{34}(l^2_{j'}) = v_0t^3_{j_0}\bar{b}_{34}(l^3_{j_0}) \text{ и } v_ns^3_{i_n}\bar{b}_{34}(l^3_{i_n}) = r_2s^4_{i''}\bar{b}_{34}(l^4_{i''}). \tag{5}$$

Пусть $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Так как $v_kd_k = v_{k+1}c_{k+1}$, то $v_ks^3_{i_k}/\theta^{l^3_{i_k}} = v_{k+1}t^3_{j_{k+1}}/\theta^{l_{j^3_{k+1}}}$ и $i_k = j_{k+1}$. Следовательно, по определению $\theta^{l^3_{i_k}}$ и (4)

$$v_ks^3_{i_k}\bar{b}_{34}(l^3_{i_k}) = v_{k+1}t^3_{j_{k+1}}\bar{b}_{34}(l_{j^3_{k+1}}) = v_{k+1}s^3_{i_{k+1}}\bar{b}_{34}(l_{i^3_{k+1}}).$$

Тогда $v_0s^3_{i_0}\bar{b}_{34}(l^3_{i_0}) = v_ns^3_{i_n}\bar{b}_{34}(l^3_{i_n})$. По (4) $v_0t^3_{j_0}\bar{b}_{34}(l^3_{j_0}) = v_0s^3_{i_0}\bar{b}_{34}(l^3_{i_0})$, по (5)

$$r_1t^2_{j'}\bar{b}_{34}(l^2_{j'}) = r_2s^4_{i''}\bar{b}_{34}(l^4_{i''}). \tag{6}$$

Аналогично доказывается, что $r_1 t^2_{j'}\bar{b}_{24}(l^2_{j'}) = r_2 s^4_{i''}\bar{b}_{24}(l^4_{i''})$ и $r_1 t^2_{j'}\bar{b}_{21}(l^2_{j'}) = r_2 s^4_{i''}\bar{b}_{21}(l^4_{i''})$. Поскольку $\langle i', j'\rangle \in I_2$, то по (4)

$$\begin{aligned} r_1 t^2_{j'}\bar{b}_{34}(l^2_{j'}) &= r_1 s^2_{i'}\bar{a}_3(l^2_{i'}),\\ r_1 t^2_{j'}\bar{b}_{24}(l^2_{j'}) &= r_1 s^2_{i'}\bar{a}_2(l^2_{i'}),\\ r_1 t^2_{j'}\bar{b}_{21}(l^2_{j'}) &= r_1 s^2_{i'}\bar{a}_2(l^2_{i'}). \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку $\langle i'', j''\rangle \in I_4$, то по (4)

$$\begin{aligned} r_2 s^4_{i''}\bar{b}_{34}(l^4_{i''}) &= r_2 t^4_{j''}\bar{a}_4(l^4_{j''}),\\ r_2 s^4_{i''}\bar{b}_{24}(l^4_{i''}) &= r_2 t^4_{j''}\bar{a}_4(l^4_{j''}),\\ r_2 s^4_{i''}\bar{b}_{21}(l^4_{i''}) &= r_2 t^4_{j''}\bar{a}_1(l^4_{j''}). \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, по (6), (7), (8) получаем

$$r_1 s^2_{i'}\bar{a}_3(l^2_{i'}) = r_1 t^2_{j'}\bar{b}_{34}(l^2_{j'}) = r_2 s^4_{i''}\bar{b}_{34}(l^4_{i''}) = r_2 t^4_{j''}\bar{a}_4(l^4_{j''}) = r_2 s^4_{i''}\bar{b}_{24}(l^4_{i''}) =$$

$$= r_1 t^2_{j'}\bar{b}_{24}(l^2_{j'}) = r_1 s^2_{i'}\bar{a}_2(l^2_{i'}) = r_1 t^2_{j'}\bar{b}_{21}(l^2_{j'}) = r_2 s^4_{i''}\bar{b}_{21}(l^4_{i''}) = r_2 t^4_{j''}\bar{a}_1(l^4_{j''}).$$

Следовательно, $r_1 s^2_{i'}\bar{a}_3(l^2_{i'}) = r_2 t^4_{j''}\bar{a}_1(l^4_{j''})$.

Если $r_1, r_2 \in S$, $\langle i', j'\rangle, \langle i'', j''\rangle \in I_2$ ($\langle i', j'\rangle, \langle i'', j''\rangle \in I_4$), $\overline{r_1 t^2_{j'}/\theta^{l^2_{j'}}} = \overline{r_2 t^2_{j''}/\theta^{l^2_{j''}}}$ ($\overline{r_1 s^4_{i'}/\theta^{l^4_{i'}}} = \overline{r_2 s^4_{i''}/\theta^{l^4_{i''}}}$), то аналогично доказывается, что $r_1 s^2_{i'}\bar{a}_3(l^2_{i'}) = r_2 s^2_{i''}\bar{a}_3(l^2_{i''})$ ($r_1 t^4_{j'}\bar{a}_1(l^4_{j'}) = r_2 t^4_{j''}\bar{a}_1(l^4_{j''})$). Таким образом, отображение φ определено корректно. Очевидно, φ — гомоморфизм полигонов.

Так как ${}_SQ$ — инъективный полигон, $\varphi : {}_SB \to {}_SQ$ — гомоморфизм, ${}_SB \subseteq {}_SA$, то существует гомоморфизм $\bar{\varphi} : {}_SA \to {}_SQ$, продолжающий φ. Пусть $\bar{\varphi}(\overline{1/\theta^k}) = b(k)$ ($1 \leqslant k \leqslant m$). Тогда по определению φ

$$s^2_i\bar{a}_3(l^2_i) = \varphi(\overline{t^2_j/\theta^{l^2_j}}) = t^2_j\bar{\varphi}(\overline{1/\theta^{l^2_j}}) = t^2_j b(l^2_j)$$

для любых $\langle i, j\rangle \in I_2$,

$$t^4_j\bar{a}_1(l^4_j) = \varphi(\overline{s^4_i/\theta^{l^4_i}}) = s^4_i\bar{\varphi}(\overline{1/\theta^{l^4_i}}) = s^4_i b(l^4_i)$$

для любых $\langle i,j\rangle \in I_4$. По определению конгруэнции ρ

$$s_i^3 b(l_i^3) = \bar{\varphi}(\overline{s_i^3/\theta^{l_i^3}}) = \bar{\varphi}(\overline{t_j^3/\theta^{l_j^3}}) = t_j^3 b(l_j^3)$$

для любых $\langle i,j\rangle \in I_3$. Следовательно,

$${}_SQ \models \bigwedge_{\langle i,j\rangle \in I_2} s_i^2 \bar{a}_3(l_i^2) = t_j^2 b(l_j^2) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle \in I_3} s_i^3 b(l_i^3) = t_j^3 b(l_j^3) \wedge \bigwedge_{\langle i,j\rangle \in I_4} s_i^4 b(l_i^4) = t_j^4 \bar{a}_1(l_j^4).$$

Так как ${}_SQ \models \Theta\left(\bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{b}_{34}\right)$, то

$${}_SQ \models \bigwedge_{\langle i,j\rangle \in I_1} s_i^1 \bar{a}_3(l_i^1) = t_j^1 \bar{a}_3(l_j^1).$$

Так как ${}_SQ \models \Theta\left(\bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{b}_{21}\right)$, то

$${}_SQ \models \bigwedge_{\langle i,j\rangle \in I_5} s_i^5 \bar{a}_1(l_i^5) = t_j^5 \bar{a}_1(l_j^5).$$

По (4)

$$s_i^6 \bar{a}_1(l_i^6) = t_j^6 \bar{a}_2(l_j^6) = s_i^6 \bar{a}_4(l_i^6) = t_j^6 \bar{a}_3(l_j^6)$$

для любых $\langle i,j\rangle \in I_6$. Таким образом, ${}_SQ \models \Theta\left(\bar{a}_3, \bar{a}_1, \bar{b}\right)$, где $\bar{b}(k) = b(k)$ ($1 \leqslant k \leqslant m$), т. е. ${}_SQ \models \Psi(\bar{a}_3, \bar{a}_1)$. Теорема доказана.

4.2 Примитивная связность класса инъективных полигонов

Лемма 4.1. *Если S — группа, то S-**Inj** — примитивно связный класс.*

Доказательство. Если S — группа, то по предложению 1.13 класс всех полигонов примитивно связный. Следовательно, класс S-**Inj** примитивно связный.

Теорема 4.2. *Пусть* S *— реверсивный справа моноид. Класс* S*-**Inj** является примитивно связным тогда и только тогда, когда* S *— группа.*

Доказательство. *Достаточность* следует из леммы 4.1.

Необходимость. Пусть S-**Inj** — примитивно связный класс. Предположим, что S — не группа. Тогда по замечанию 1.1 существует $r_0 \in S$ такой, что $Sr_0 \subset S$. Пусть

$$_SA = \left(\coprod_{i \in I} {}_SSa_i\right)/\theta \sqcup \left(\coprod_{i \in I} {}_SSb_i\right)/\eta,$$

где $I = (\max\{\omega, |S|\})^+$, ${}_SSa_i$, ${}_SSb_i$ — копии полигона ${}_SS$, a_i, b_i — копии $1 \in S$ ($i \in I$), $\theta = \rho\left(\bigcup\limits_{i \in I} Sr_0a_i\right)$, $\eta = \rho\left(\bigcup\limits_{i \in I} Sr_0b_i\right)$ — конгруэнции Риса полигонов $\coprod\limits_{i \in I} {}_SSa_i$ и $\coprod\limits_{i \in I} {}_SSb_i$ соответственно. Заметим, что $a_i/\theta = \{a_i\}$, $b_i/\eta = \{b_i\}$ для любого $i \in I$. Будем отождествлять a_i/θ с a_i, b_i/η с b_i для любого $i \in I$. Через ${}_S\overline{A}$ обозначим инъективную оболочку ${}_SA$.

Через $\Psi(x, y)$ обозначим примитивную формулу $r_0x = r_0y$. В силу примитивной связности класса S-**Inj** существует примитивная формула $\Phi(x, y, \bar{c})$, примитивно связывающая примитивные копии $\Psi(\overline{A}, a_0)$ и $\Psi(\overline{A}, b_0)$, где $\bar{c} = \langle c_0, \ldots, c_m \rangle \in \overline{A}$.

Покажем, что $Sa \cap Sb = \varnothing$ для любых $a \in \Psi(\overline{A}, a_0)$, $b \in \Psi(\overline{A}, b_0)$.

По предложению 1.8 ${}_S\overline{A}$ — копроизведение инъективных оболочек полигонов $\left(\coprod\limits_{i \in I} {}_SSa_i\right)/\theta$ и $\left(\coprod\limits_{i \in I} {}_SSb_i\right)/\eta$. Тогда подполигоны полигона ${}_S\overline{A}$, порождённые множествами $\Psi(\overline{A}, a_0)$ и $\Psi(\overline{A}, b_0)$, не пересекаются. Пусть формула

$$\Theta_{\bar{s}\bar{t}}(x, y, u_1, \ldots, u_{k-1}) \leftrightharpoons s_1x = t_1u_1 \wedge \bigwedge_{2 \leqslant i \leqslant k-1} s_iu_{i-1} = t_iu_i \wedge s_ku_{k-1} = t_ky$$

эквивалентна некоторой подформуле бескванторной части формулы $\Phi(x, y, \bar{z})$, где $k \geqslant 2$, $l(\bar{z}) = l(\bar{c})$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle \in S$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_k \rangle \in S$.

Индукцией по k докажем, что

$$\forall \bar{s}, \bar{t} \in S \, \forall d_0, \ldots, d_k \in \overline{A} \left({}_S\overline{A} \vDash \Theta_{\bar{s}\bar{t}} (d_0, d_k, d_1, \ldots, d_{k-1}) \Longrightarrow Sd_0 \cap Sd_k \neq \varnothing \right). \tag{9}$$

Пусть утверждение (9) верно для некоторого $k \geqslant 2$. Предположим, что $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_{k+1} \rangle \in S$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_{k+1} \rangle \in S$,

$${}_S\overline{A} \vDash \Theta_{\bar{s}\bar{t}} (d_0, d_{k+1}, d_1, \ldots, d_k)$$

для некоторых $d_0, \ldots, d_{k+1} \in \overline{A}$. Следовательно,

$${}_S\overline{A} \vDash \Theta_{\bar{s}'\bar{t}'} (d_0, d_k, d_1, \ldots, d_{k-1}),$$

где $\bar{s}' = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle$, $\bar{t}' = \langle t_1, \ldots, t_k \rangle$. По предположению индукции, $Sd_0 \cap Sd_k \neq \varnothing$, т.е. $sd_0 = td_k$ для некоторых $s, t \in S$. В силу реверсивности справа моноида S имеем $St \cap Ss_{k+1} \neq \varnothing$. Предположим, что $t't = s's_{k+1}$, где $t', s' \in S$. Тогда

$$t'sd_0 = t'td_k = s's_{k+1}d_k = s't_{k+1}d_{k+1}.$$

Следовательно, $Sd_0 \cap Sd_{k+1} \neq \varnothing$.

Так как ${}_S\overline{A} \vDash \Phi(a, b, \bar{c})$ для некоторых $a \in \Psi(\overline{A}, a_0)$, $b \in \Psi(\overline{A}, b_0)$, то

$${}_S\overline{A} \vDash \Theta_{\bar{s}\bar{t}} (a, b, d_1, \ldots, d_{k-1})$$

для некоторых $\bar{s}, \bar{t} \in S$, $d_1, \ldots, d_{k-1} \in \overline{A}$. Тогда по (9) $Sa \cap Sb \neq \varnothing$, т.е. пересечение подполигонов полигона ${}_S\overline{A}$, порождённых множествами $\Psi(\overline{A}, a_0)$ и $\Psi(\overline{A}, b_0)$, не пусто. Получили противоречие.

Таким образом, в бескванторной части формулы $\Phi(x, y, \bar{z})$ нет подформул, эквивалентных формулам вида $\Theta_{\bar{s}\bar{t}}(x, y, u_1, \ldots, u_{k-1})$. Тогда

$$\Phi(x, y, \bar{c}) \equiv \exists \bar{w}_1 \Phi_1(x, \bar{w}_1, \bar{c}) \wedge \exists \bar{w}_2 \Phi_2(y, \bar{w}_2, \bar{c}),$$

где $\bar{w}_1 \cap \bar{w}_2 = \varnothing$. Это означает, что

$${}_S\overline{A} \models \exists \bar{w}_1 \Phi_1(a, \bar{w}_1, \bar{c}) \wedge \exists \bar{w}_2 \Phi_2(b, \bar{w}_2, \bar{c})$$

для любых $a \in \Psi\left(\overline{A}, a_0\right)$, $b \in \Psi\left(\overline{A}, b_0\right)$, что противоречит определению примитивной связности. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Если S — коммутативный моноид, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — абелева группа.*

Доказательство. Если S — коммутативный моноид, то $st \in Ss \cap St$ для любых $s, t \in S$. Следовательно, S — реверсивный справа моноид. По теореме 4.2 класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — группа.

Следствие 4.2. *Если S содержит нулевой элемент, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — одноэлементный моноид.*

Доказательство. Если S содержит нулевой элемент 0, то $0 \in Ss \cap St$ для любых $s, t \in S$. Следовательно, S — реверсивный справа моноид. По теореме 4.2 класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — группа. Поэтому $S = \{0\}$.

Следствие 4.3. *Если S — линейно упорядоченный моноид, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — группа.*

Доказательство. Если S — линейно упорядоченный моноид, то для любых $s, t \in S$ либо $Ss \subseteq St$, либо $St \subseteq Ss$. Следовательно, $Ss \cap St \neq \varnothing$ для любых $s, t \in S$, т.е. S — реверсивный справа моноид. По теореме 4.2 класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — группа.

Замечание 4.1. *Если S не группа, то в полигоне ${}_SS$ существует максимальный относительно включения собственный подполигон, а именно полигон $\bigcup\{{}_SSr \mid r \in S, 1 \notin Sr\}$.*

Теорема 4.3. *Если класс S-**Inj** — примитивно связный класс, то либо S — группа, либо максимальный относительно включения собственный подполигон полигона ${}_SS$ не конечно порождён.*

Доказательство. Пусть S-**Inj** — примитивно связный класс. Предположим, что S — не группа и максимальный относительно включения собственный подполигон ${}_ST$ полигона ${}_SS$ конечно порождён. Пусть $T = \bigcup\limits_{j=0}^{n} Sr_j$ и

$$ {}_SA = \left(\bigsqcup_{i\in I} {}_SSa_i\right)/\theta \sqcup \left(\bigsqcup_{i\in I} {}_SSb_i\right)/\eta, $$

где $I = (\max\{\omega, |S|\})^+$, ${}_SSa_i$, ${}_SSb_i$ — копии полигона ${}_SS$, a_i, b_i — копии $1 \in S$ ($i \in I$), $\theta = \rho\left(\bigcup\limits_{i\in I} Ta_i\right)$, $\eta = \rho\left(\bigcup\limits_{i\in I} Tb_i\right)$ — конгруэнции Риса полигонов $\bigsqcup\limits_{i\in I} {}_SSa_i$ и $\bigsqcup\limits_{i\in I} {}_SSb_i$ соответственно. Заметим, что $a_i/\theta = \{a_i\}$, $b_i/\eta = \{b_i\}$ для любого $i \in I$. Будем отождествлять a_i/θ с a_i, b_i/η с b_i для любого $i \in I$. Через ${}_S\overline{A}$ обозначим инъективную оболочку ${}_SA$.

Через $\Psi(x, y)$ обозначим примитивную формулу $\bigwedge\limits_{i=0}^{n} r_i x = r_i y$. В силу примитивной связности класса S-**Inj** существует примитивная формула $\Phi(x,y,\bar{c})$, примитивно связывающая примитивные копии $\Psi(\overline{A},a_0)$ и $\Psi(\overline{A},b_0)$, где $\bar{c}=\langle c_0,\ldots,c_m\rangle\in\overline{A}$.

Так как $|I|=\max\{\omega,|S|\}^+$, то существуют $a\in\Psi\left(\overline{A},a_0\right)$, $b\in\{b_i\mid i\in I\}$, $a,b\notin\bigcup\limits_{k=1}^{m}Sc_k$, такие, что ${}_S\overline{A}\vDash\Phi(a,b,\bar{c})$. Пусть $d\in\Psi(\overline{A},b_0)$, $\varphi:{}_S\left(Sa\cup Sb\cup\bigcup\limits_{k=1}^{m}Sc_k\right)\to{}_S\overline{A}$ — отображение такое, что φ на полигоне ${}_S\left(Sa\cup\bigcup\limits_{k=1}^{m}Sc_k\right)$ действует тождественно и $\varphi(sb)=sd$ для всех $s\in S$. Покажем корректность определения отображения φ. Так как $Sa\cap Sb=\varnothing$, то $ta\neq sb$ для любых $t,s\in S$. Если $sb=tb$ для некоторых $s,t\in S$, то $s=t$ и $sd=td$. Предположим, что $tc_i=sb$ для некоторых $t,s\in S$, $1\leqslant k\leqslant m$. Если $s\in T$, то существуют такие $s'\in S$, $0\leqslant j\leqslant n$, что $s=s'r_j$. Тогда $tc_i=sb=s'r_jb=s'r_jd=sd$. Если $s\notin T$, то $Ss=S$. Следовательно, существует такое $s'\in S$, что $s's=1$. Поэтому $b=s'sb=s'tc_i\in Sc_i$, что не так. Следовательно, φ — гомоморфизм полигонов.

В силу инъективности полигона ${}_S\overline{A}$ существует гомоморфизм $\bar{\varphi}:{}_S\overline{A}\to{}_S\overline{A}$, продолжающий φ. Тогда ${}_S\overline{A}\vDash\Phi(a,d,\bar{c})$ для любого $d\in\Psi(\overline{A},b_0)$, что противоречит определению примитивной связности. Теорема доказана.

Следствие 4.4. *Если S — конечный моноид, то класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — группа.*

Доказательство. Если S — конечный моноид, то любой подполигон полигона ${}_SS$, в том числе и максимальный относительно включения собственный подполигон полигона ${}_SS$, является конечным полигоном. По теореме 4.3 и лемме 4.1 класс S-**Inj** примитивно связный тогда и только тогда, когда S — группа.

Заключение

В диссертации исследовались теоретико-модельные свойства классов инъективных и слабо инъективных полигонов. Были получены следующие результаты:

1. Получено описание счётных моноидов, над которыми класс слабо инъективных (конечно порождённо слабо инъективных, главно слабо инъективных) полигонов аксиоматизируем. Приведены примеры моноидов с аксиоматизируемыми и не аксиоматизируемыми классами слабо инъективных (конечно порождённо слабо инъективных, главно слабо инъективных) полигонов над ними. Результаты опубликованы в [39].

2. Получено описание моноидов, над которыми класс главно слабо инъективных полигонов полон, модельно полон, категоричен, стабилен и суперстабилен. Приведены примеры моноидов S, для которых классы инъективных, слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных полигонов полны (модельно полны, категоричны) только в том случае, когда S тривиален. Дана характеризация конечных моноидов со стабильными (суперстабильными) классами инъективных, слабо инъективных, конечно порождённо слабо инъективных полигонов. Результаты опубликованы в [40].

3. Доказано, что класс всех инъективных полигонов примитивно нормален. Для реверсивного справа моноида S показано, что класс всех инъективных полигонов над S примитивно связен тогда и только тогда, когда S — группа. Приведено необходимое условие примитивной связности класса инъективных полигонов. Результаты опубликованы в [41].

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования теоретико-модельных свойств классов полигонов, а также при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Список литературы

[1] Ершов, Ю. Л., Палютин, Е. А. *Математическая логика.* Наука, 2011.

[2] Каш, Ф. *Модули и кольца.* Мир, 1981.

[3] Кейслер, Г., Чэн, Ч. Ч. *Теория моделей.* Мир, 1977.

[4] Кильп, М. К гомологической классификации моноидов. *Сиб. матем. журн.*, 13(3): 578–586, 1972.

[5] Мальцев, А. И. *Алгебраические системы.* Наука, 1970.

[6] Мустафин, Т. Г. О стабильностной теории полигонов. *Теория моделей и ее применение*, 8: 92–108, 1988.

[7] Овчинникова, Е. В. Полные классы регулярных полигонов с конечным числом идемпотентов. *Сиб. матем. журн.*, 36(2): 381–384, 1995.

[8] Палютин, Е. А. Категоричные хорновы классы. I. *Алгебра и логика*, 19(5): 582–614, 1980.

[9] Палютин, Е. А. *Спектр и структура моделей полных теорий*, Справочная книга по математической логике, часть I. Теория моделей, 320–387. Наука, 1982.

[10] Пинус, А. Г. *Производные структуры универсальных алгебр.* Изд-во НГТУ, 2007.

[11] Птахов, Д. О. Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов. *Алгебра и логика*, 53(5): 614–624, 2014.

[12] Скорняков, Л. А. О гомологической классификации моноидов. *Сиб. матем. журн.*, 10(5): 1139–1143, 1969.

[13] Скорняков, Л. А. *Элементы алгебры.* Наука, 1980.

[14] Степанова, А. А. Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов. *Сиб. матем. журн.*, 35(1): 181–193, 1994.

[15] Степанова, А. А. Аксиоматизируемость и полнота класса инъективных полигонов над коммутативным моноидом и над группой. *Сибирский математический журнал*, 56(3): 650–662, 2015.

[16] Степанова, А. А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S-полигонов. *Алгебра и логика*, 30(5): 583–594, 1991.

[17] Степанова, А. А. Моноиды, все полигоны над которыми ω-стабильны (доказательство гипотезы Мустафина-Пуаза). *Алгебра и логика*, 41(2): 223–227, 2002.

[18] Степанова, А. А. Моноиды со стабильными плоскими полигонами. *Вестник НГУ, серия: математика, информатика, механика*, 2(2): 64–77, 2002.

[19] Степанова, А. А. Моноиды со стабильными теориями регулярных полигонов. *Алгебра и логика*, 40(4): 430–457, 2001.

[20] Степанова, А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями. *Алгебра и логика*, 47(4): 491–508, 2008.

[21] Степанова, А. А. Примитивно связные и аддитивные теории полигонов. *Алгебра и логика*, 45(3): 300–313, 2006.

[22] Степанова, А. А. Стабильность класса регулярных полигонов. *Исследования в теории алгебраических систем. Межвузовский сборник научных трудов*, 95–102. Караганда: изд–во КарГУ, 1995.

[23] Судоплатов, С. В. Базируемость стабильных теорий и свойства счетных моделей с мощными типами: дис. ... канд. физико-математических наук: 01.01.06. Новосибирск, 1990.

[24] Berthiaume, P. The injective envelope of S-sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10: 261–273, 1967.

[25] Bulman-Fleming, S., Gould, V. Axiomatisability of weakly flat, flat and projective acts. *Communications in Algebra*, 30: 5575–5593, 2002.

[26] Gould, V. Axiomatisability problems for S-systems. *J. London Math. Soc.*, 35: 193–201, 1987.

[27] Gould, V. The characterization of monoids by properties of their s-systems. *Semigroup Forum*, 32: 251–265, 1985.

[28] Kilp, M., Knauer, U. Characterization of monoids by properties of regular acts. *J. of Pure and Applied Algebra*, 35(2): 193–201, 1987.

[29] Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A. V. *Monoids, acts and categories.* De Gruyter, 2000.

[30] Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A. V. Wreath products of acts over monoids: I. regular and inverse acts. *J. of Pure and Applied Algebra*, 51: 251–260, 1988.

[31] Luedeman, J., McMorris, F., Sim, S.-K. Semigroups for which every totally irreducible S-system is injective. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 19: 27–35, 1978.

[32] Morley, M. Categoricity in power. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114(2): 514–538, 1965.

[33] Mustafin, T. G., Poizat, B. Polygones. *Math. Log. Quart.*, 41: 93–110, 1995.

[34] Pillay, A. Countable models of stable theories. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89(4): 666–672, 1983.

[35] Pillay, A. Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models. *Annals of Pure and Applied Logic*, 43(2): 147–160, 1989.

[36] Shelah, S. *Classification theory and the number of non-isomorphic models*. Stud. Logic Found. Math., 92, 1978.

[37] Shelah, S. Stable theories. *Isr. J. Math.*, 7(3) :187–202, 1969.

[38] Tran, L. H. Characterization of monoid by regular acts. *Period. Math. Hungar.*, 16: 273–279, 1985.

Список работ автора по теме исследования

[39] Ефремов, Е. Л., Степанова, А. А. Аксиоматизируемость класса слабо инъективных полигонов. *Сиб. матем. журн.*, 58(4): 785–795, 2017.

[40] Ефремов, Е. Л. Полнота и стабильность класса инъективных полигонов. *Алгебра и логика*, 59(1): 48–65, 2020.

[41] Ефремов, Е. Л. Примитивная нормальность и примитивная связность класса инъективных полигонов. *Алгебра и логика*, 59(2): 155–168, 2020.

[42] Ефремов, Е. Л. Аксиоматизируемость класса главно слабо инъективных полигонов. *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам*, 201–203. Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2016.

[43] Ефремов, Е. Л. Полнота класса слабо инъективных полигонов. *Международная конференция «Мальцевские чтения»*, 183. Новосибирск, 2016.

[44] Ефремов, Е. Л. Полнота класса слабо инъективных полигонов. *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам*, 247–248. Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2017.

[45] Ефремов, Е. Л. Стабильность класса главно слабо инъективных

полигонов. *Международная конференция «Мальцевские чтения»*, 148. Новосибирск, 2017.

[46] Ефремов, Е. Л. Стабильность класса инъективных полигонов. *Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам*, 218–219. Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2018.