ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

СТОРОЖУК КОНСТАНТИН ВАЛЕРЬЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛУГРУПП И ПОДПРОСТРАНСТВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2018

Оглавление

Введение

Актуальность исследования. Теория операторных полугрупп, возникнув как средство исследования динамических систем и автономных дифференциальных уравнений, стала источником большого количества новых задач и развитие этой теории актуально как для функционального анализа, так и для других областей математики и естествознания.

Разные асимптотические свойства однопараметрических полугрупп $\{T_t : X \to X \mid t \geqslant 0, T_{t+q} = T_t \circ T_q\}$ линейных непрерывных операторов, действующих на банаховом пространстве X, широко исследуются. Пусть $X_0 = \{x \in X \mid T_t x \underset{t\to\infty}{\to} 0\}$ — пространство «исчезающих» векторов. Полугруппа называется асимптотически конечномерной, если $\operatorname{codim} X_0 < \infty$. Такое название было введено для ограниченных полугрупп Емельяновым и Вольфом [1, 2]. Для таких полугрупп мы в **главе 1** показываем замкнутость X_0, используя результаты Левина и Саксона [60] о том, что переход к конечной коразмерности сохраняет свойство бочечности. Мы также устанавливаем некоторые факты о стабилизируемости дополняющих X_0 конечномерных подпространств и приводим пример полугруппы, которая является асимптотически конечномерной, для которой имеются как инвариантное дополнительное подпространство, так и нестабилизируемое дополнительное подпространство.

Важное место в теории полугрупп и в приложениях занимают вопросы построения индивидуальных «плохих» начальных данных, на которых реализуется асимптотически «плохое» поведение полугруппы или более общего эволюционного процесса. Пример одного из утверждений на эту тему: если $\|T_t\| \not\to 0$, то найдётся $x \in X$ такой, что $\int_0^\infty |T_t(x)|dt = \infty$. Подобная тематика восходит к исследованиям Датко [3], Паци [4], Зябчика [5] и Литтмана [6]. Часть их результатов нетрудно получить из теорем Далецкого и Крейна [7]. Результаты Далецкого и Крейна обобщил Ролевич в [8], получив аналог теоремы Датко — Паци для эволюционного семейства операторов. Теоремы типа Ролевича получены, например, в работе Бусе и Драгомира [9] и Чжена [10]. Во **второй главе** мы, в свою очередь, обобщаем результаты Ролевича и даем им короткое и простое доказательство. Другой круг вопросов второй главы — реализация «плохого» поведения в слабой топологии. Например, при каких характеристиках полугруппы можно утверждать, что найдутся элемент $x \in X$ и функционал $x' \in X'$, такой, что интеграл модуля $|\langle x', T_t x\rangle|$ вдоль орбиты неограничен? Подобными и более специальными вопросами занимались Притчард и Зябчик [13], Хуанг и Лун [14], Вейсс [15]. Обзор темы можно найти в статье ван Нервена [16]. Мы получаем новые оценки снизу на скорость «слабого» убывания орбит полугруппы, не являющейся экспоненциально устойчивой.

При исследовании устойчивости часто нужно исследовать асимптотическое поведение полугруппы при наличии компакта $K \subset X$, притягивающего орбиты векторов, т.е. такого, что $\forall x \in B_X \ \lim_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0$. Результаты, которые можно изложить на этом языке, имеются у Ласоты, Ли, Йорка и Джеймса [17, 18], Бартожека [19]. Общий случай исследовали Ву [20] и Сайн [21]. Два последних автора используют спектральное разложение слабо почти периодической полугруппы, восходящие к работам Джекобса [22] и де Лю — Гликсберга [23]. В **третьей главе** мы устанавливаем асимптотическую конечномерность полугруппы при условии наличия компакта, который всего лишь *иногда* притягивает, т.е. $\forall x \in B_X \ \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0$. Эта теорема содержит в качестве частного случая результаты Ву и Сайна. Наш подход, кроме того, позволяет получить в вещественном случае теорему, для комплексного X

полученную Ансари и Бурдоном в [24] и Миллером в [25]: изометрия $T : X \to X$ не может быть суперциклической.

В **главе 4** мы исследуем более слабые условия притяжения орбит компактом. Их вид: $\forall x \in B_X$ $\limsup$ (или $\liminf)_{n\to\infty}\rho(T^n x, K) \leqslant \eta < 1$. Исследование асимптотической конечномерности при таком условии восходит к работе Емельянова и Вольфа [26]. Отдельные вопросы на эту тему исследовались Коморником и Ласотой [27], Ребигером, Емельяновым, Вольфом, Гороховой [28, 29, 30], Емельяновым и Эркурсун [31]. Имеется связь развиваемой техники с исследованиями операторных полугрупп на пространствах функций, почти периодических на бесконечности, см., например, работу Баскакова, Струковой и Тришиной [32]. Мы устанавливаем некоторые случаи асимптотической конечномерности, но нам удалось построить и не асимптотически конечномерный пример с условием «$\liminf \leqslant \frac{1}{2}$». Этим решён отрицательно один из вопросов, поставленных в книге Емельянова [33], (problem 1.3.33).

В **главе 5** мы занимаемся инвариантными подпространствами. Известен результат, восходящий к Годеману [34]: линейная изометрия комплексного банахова пространства имеет инвариантное подпространство. Вермер [35] показал, что если $T : X \to X$ таков, что $\|T^n\| \underset{n\to\pm\infty}{=} O(|n|^k)$, то инвариантные подпространства есть. Методы построения спектральных подпространств восходят к Данфорду [36] и Лифу [37]). Подробная теория таких вопросов разработана в статье Любича, Мацаева и Фельдмана [38]. Основной результат главы 5 — аналогичное утверждение в вещественном случае. Приложения некоторых спектральных методов к вещественному случаю описаны у Баскакова и Загорского [39]. Отметим также результаты о разложимости по Фойашу для классов неквазианалитических операторов, полученные в работе Дикарева и Полякова [40]. Заметим: теоремы об инвариантных пространствах компактных операторовАроншайна—Смита [41] и Ломоносова [42] на вещественный случай обобщались, см. Абрамович, Алипрантис, Сироткин и Троицкий [43]. См.

также работы Ломоносова и Шульмана [44, 45].

В **главе 6** мы решаем несколько задач, связанных с конусами и асимптотическим поведением пространств конечной коразмерности в банаховых и более общих топологических векторных пространствах. Крейн [46] ввёл понятие нормального конуса. Емельянов и Вольф [47] ввели условие строгой нормальности, но было неясно, всегда ли нормальный конус строго нормален? В § 6.1 мы показываем, что не всегда, приводя примеры нормальных, но не строго нормальных конусов (в том числе и в конечномерном пространстве) и характеризуем строгую нормальность конуса в терминах геометрии его гиперплоской базы, используя свойство midpoint locally uniform rotundity (MLUR), введенное Андерсоном [48]. Заметим, что Кадец [49] показал, что сепарабельное банахово пространство изоморфно MLUR-пространству. Мы также показываем, что в счетномерном пространстве существует конус K, не содержащий прямых, архимедово замкнутый, но не замкнутый относительно некоторой почти максимальной топологии τ на C_{00}, сопряженной с двойственностью $\langle C_{00}, F\rangle$. Таким образом, удалось построить гиперплоскости, являющиеся «тонкими подпространствами» в терминологии работы Гутмана, Емельянова и Матюхина [86], такими плоскостями, в частности, оказались ядра банаховых пределов в соответствующем пространстве. Для произвольного топологического векторного пространства нам удалось установить, что, каково бы ни было бесконечное семейство подпространств $\{X_\alpha\} \subset X$ коразмерности k, верхний топологический предел этого семейства (см., например, Хаусдорф [85] или Куратовский [84]) содержит некоторое подпространство X_0 этой же коразмерности k. При этом в качестве следствия мы получаем применяемую в теории экстремальных задач лемму Арутюнова (см. работы [87] и [91]).

Степень разработанности. Направление, развитию которого посвящена диссертация, активно разрабатывается на протяжении нескольких десятилетий. Часть затронутых задач имеет сравнительно недолгую историю, однако к ним за короткое время было привлечено большое количество специалистов. Данная тема является достаточно разработанной в мире. В то же время, по мнению автора, в России этой тематике уделяется недостаточно внимания.

Цели и задачи исследования. Доказать замкнутость пространства уходящих в нуль векторов у асимптотически конечномерных полугрупп операторов и исследовать устойчивость дополнительных к нему подпространств. Получить новые асимптотические нижние оценки на скорость индивидуального роста полугрупп и эволюционных семейств операторов, в том числе и в слабой топологии в зависимости от спектральных свойств. Рассмотреть, как компакт, в том или ином смысле притягивающий орбиты векторов, влияет на асимптотические свойства полугруппы. Показать наличие инвариантных подпространств у линейных изометрий вещественного пространства. Построить пространства с новыми свойствами упорядочивающих конусов, опираясь на геометрические свойства сфер в нормированном пространстве; построить конус, который архимедово замкнут, но не замкнут в некоторой почти максимальной топологии. Показать, что верхний топологический предел семейства подпространств коразмерности k содержит подпространство коразмерности k.

Положения, выносимые на защиту, таковы:

1. Доказано, что у асимптотически счетномерных полугрупп пространство X_0 уходящих в нуль векторов всегда замкнуто, а соответствующая полугруппа асимптотически конечномерна. Доказано, что в асимптотически конечномерной полугруппе, рост которой удовлетворяет оценке $\|T_t\| \underset{t\to\infty}{=} o(t)$, любое n-мерное подпространство $L \subset X$, дополняющее X_0 в X, почти стабилизируемо. Построен пример асимптотически двумерной полугруппы, в котором существует как инвариантное дополнение к X_0, так и дополнение, не являющееся почти стабилизируемым.

2. Предложено элементарное короткое доказательство теоремы Ро-

левича для полугрупп и для эволюционных семейств операторов. Установлены новые асимптотические нижние оценки на скорость роста полугруппы в слабой топологии.

3. Доказано, что если T ограничен со степенями и суперциклический, то $X_0 = 0$. Введено понятие компактной суперцикличности и доказано, что в бесконечномерном банаховом пространстве (как в вещественном, так и в комплексном) нет компактно-суперциклических изометрий.

4. Доказана асимптотическая конечномерность и расщепляемость ограниченной полугруппы при условии ($\liminf = 0$) существования компакта, пересекающегося с замыканиями орбит каждого единичного вектора. Более того, доказана асимптотическая конечномерность ограниченной полугруппы при условии ($\liminf \leqslant \eta < \frac{1}{2}$). В рефлексивном случае установлена асимптотическая конечномерность полугруппы при условии ($\liminf \leqslant \eta < 1$). Построены изометрии на пространствах $C(M)$ непрерывных функций, удовлетворяющие условию $\liminf \leqslant \frac{1}{2}$.

5. Доказано, что линейная изометрия $T : X \to X$ вещественного пространства имеет инвариантное подпространство, если $\dim X > 2$.

6. Построены примеры нормальных, но не строго нормальных конусов. Установлена новая связь свойств конуса и геометрии его базы. Построен конус, который является архимедово замкнутым, но не является замкнутым относительно некоторой почти максимальной топологии в пространстве финитных последовательностей C_{00}. Показано, что в произвольном топологическом векторном пространстве для всякого бесконечного семейства подпространств коразмерности $k < \infty$ верхний топологический предел этого семейства содержит подпространство коразмерности k.

Научная новизна. Результаты новые и получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты имеют теоретическое значение. Они могут быть использованы в исследованиях по функциональному анализу а также при преподавании соответствующих курсов в университетах.

Методология и методы исследования. В работе использованы методы теории операторов, спектральные методы теории полугрупп и групп операторных представлений. Были использованы также некоторые методы алгебраической топологии.

Степень достоверности и апробация результатов. Доказательства подробны. Результаты докладывались на международных и российских конференциях: на Международном математическом конгрессе (2006 г., Мадрид), на международной конференции, посвященной 100-летию С.Л.Соболева (2008 г., Новосибирск), на конференции «Современные проблемы анализа и геометрии», (2009 г, Новосибирск) на международной конференции «Ordered spaces and applications» (2011 г, Афины), на международной конференции, посвященной 100-летию А.Д. Александрова, 2012 г., Санкт-Петербург) и др. Результаты также докладывались на на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» (рук. акад. И. А. Тайманов), на семинаре отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН (рук. акад. Ю. Г. Решетняк), на семинаре по геометрическому анализу (рук. д.ф.-м.н. С. К. Водопьянов), в Воронежском государственном университете на семинаре А.Г. Баскакова, в РУДН на семинаре А.А. Арутюнова и др.

Публикации. Результаты опубликованы в одинадцати публикациях в журналах, рекомендованных ВАК, а также входящих в международные базы данных Scopus и MathSciNet [93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 103 источников. Объем диссертации 156 стр.

Нумерация теорем имеет вид «(i, j)», где i — номер главы, а j — номер теоремы в главе. Нумерация лемм имеет вид «(i, j, k)», где (i, j) — номер параграфа, а k — номер леммы в параграфе. Нумерация формул в каждой главе сквозная.

Подробное описание результатов диссертации.

Всюду предполагаем, что полугруппа действует непрерывно при $0 < t < \infty$, т. е. для каждого $v \in X$ функция $t \mapsto T_t(v)$ непрерывна при $t > 0$. Полугруппа называется C_0 — полугруппой, если эта функция непрерывна и в нуле. Мы изучаем и полугруппы степеней оператора.

Полугруппа ограничена, если все операторы T_t ограничены по норме некоторой константой $C < \infty$. Оператор называем ограниченным со степенями, если полугруппа $\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничена. Подпространство $Y \subset X$ называем инвариантным, если для каждого $t \geqslant 0$ $T_tY \subset Y$.

Пространство

$$X_0 = \{x \in X \,|\, T_t x \underset{t\to\infty}{\to} 0\}$$

инвариантно. Говорим, что полугруппа расщепляема, если существует инвариантное подпространство L, дополняющее X_0 в X. Полугруппа *асимптотически конечномерна*, если коразмерность X_0 в X конечна.

Глава 1 — **асимптотически конечномерные полугруппы операторов**. Результаты опубликованы в работе [93].

В §**1.1** данной главы мы показываем (**теорема 1.1**), что у асимптотически конечномерных (и даже счетномерных) полугрупп пространство X_0 всегда замкнуто. В общем случае для замкнутости X_0 достаточно также наличие в X *замкнутого* дополнительного к X_0 подпространства L. Из этой теоремы, в частности, следует, что условие замкнутости пространства X_0, входившее в определение квазисжимающей полугруппы в работе Емельянова и Вольфа [1], выполнено автоматически.

В §**1.2** изучаются вопросы стабилизируемости конечномерных подпространств, дополняющих X_0. Пусть $X = X_0 \oplus L$, где подпространство

L не обязательно инвариантно. Оператор $T_t : X \to X$ задается «треугольной матрицей» вида

$$T_t = \begin{pmatrix} \alpha_t & b_t \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} : X_0 \times L \to X_0 \times L,\ \alpha_t : X_0 \to X_0,\ b_t : L \to X_0,\ \ Q_t : L \to L$$

и наличие диагонального представления эквивалентно расщепляемости полугруппы. **Пример 2** показывает, что расщепляемости может не быть.

Угол (раствор) между подпространствами A и $B \subset X$ — это число

$$\angle(A, B) = \min\Big\{ \sup_{a \in A, |a|=1} \{\rho(a, B)\}, \sup_{b \in B, |b|=1} \{\rho(b, A)\} \Big\}.$$

На множестве n-мерных подпространств в X угол играет роль метрики.

Теорема 1.2. *Если T_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа, то любое n-мерное подпространство $L \subset X$, дополняющее X_0 в X, является почти стабилизируемым, т. е. для каждого t* $\sup_{q<t} \angle(T_P L, T_{P+q} L) \to 0$ *при* $P \to \infty$.

Можно сказать, что L, эволюционируя, «вязнет» в X при $t \to \infty$.

Подространство L называется *стабилизируемым*, если у $T_t L$ существует предельное положение L_∞, т.е. такое подпространство L_∞, что $\angle(T_t L, L_\infty) \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

В §**1.3** мы исследуем орбиты асимптотически конечномерной полугруппы в слабой топологии пространства X. Основной результат параграфа — **теорема 1.3**, в которой показано, что в случае *слабой почти периодичности* полугруппы, т. е. компактности замыканий орбит векторов в слабой топологии X всякое подпространство L, дополняющее X_0, стабилизируемо. В частности, это выполнено в случае ограниченной полугруппы, действующей на рефлексивном пространстве X.

В §**1.4** мы доказываем **теорему 1.4**, содержащую **пример** неограниченной асимптотически двумерной полугруппы, в котором существует как инвариантное дополнение к X_0, так и двумерное подпространство L, дополняющее X_0, но не являющееся даже почти стабилизируемым. Это показывает, что условие ограниченности полугруппы в теореме 1.2 существенна уже в случае codim $X_0 = 2$.

В §**1.5** доказана **теорема 1.5**, обобщающая теорему 1.2 на случай асимптотически конечномерных полугрупп, для которых $\|T_t\| = o(t)|_{t\to\infty}$. Из этой теоремы следует, что если codim $X_0 = 1$ (случай, частый в приложениях), то ограниченность полугруппы в теореме 1.2 несущественна.

Глава 2 — **к теоремам Ролевича и ван Нервена**. Результаты опубликованы в работах [94] и [97].

Пусть $T_t : X \to X$ —C_0-полугруппа. Число

$$\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|T_t\|}{t}$$

называется *показателем равномерного роста* полугруппы. Полугруппа называется равномерно экспоненциально устойчивой (РЭУ), или равномерно экспоненциально ограниченной, если $\omega_0 < 0$. В конечномерном случае это условие эквивалентно стремлению $|T_t x|$ к нулю при $t \to \infty$ для каждого $x \in X$, т.е. тому, что $X_0 = X$. Стандартный бесконечномерный контрпример — полугруппа сдвигов, скажем, на пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$. Здесь $\|T_t\| = 1$ для каждого $t \geqslant 0$, но $X_0 = X$. Однако, отсутствие свойства РЭУ у полугруппы влечет существование векторов, орбиты которых если и уходят в ноль, то «очень медленно», например, для каждой неубывающей функции $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ существует $x \in X$ такой, что

$$\int_0^\infty f(|T_t(x)|)dt = \infty. \tag{1}$$

Датко получил этот результат в [3] для функции $f(z) = z^2$ и гильбертова X. (Это — аналог теоремы Ляпунова об устойчивости.) Паци обобщил этот результат в [4] для банахова пространства и функций вида $f(z) = z^p,\ p \in [1, \infty)$. Зябчик в [5] показал, что если $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ выпукла, возрастает, $\lim_{s\to 0} f(s) = 0$ и C_0-полугруппа T_t не РЭУ, то существует $x \in X$ такой, что для каждого $\alpha > 0$ $\int_0^\infty f(\alpha \cdot |T_t x|)dt = \infty$.

Для непрерывных строго возрастающих функций соответствующий результат получил Литтман в [6].

Далецкий и Крейн в [7] исследовали связь скорости роста решений $x(t)$ как стационарной, так и нестационарной задач Коши с показателями роста эволюционного оператора $U(t,\tau) : X \to X$. Из их результатов, в частности, следуют результаты Датко и Паци.

Ролевич в [8] обобщил результаты Далецкого — Крейна и Зябчика, получив аналог теоремы Датко — Паци для эволюционного семейства операторов. Теоремы типа Ролевича получены, например, в работе Бусе и Драгомира [9] и Чжена [10]. Некоторые результаты в духе обсуждаемых теорем применяются в работах Драгичевича [11, 12] к исследованию устойчивости экспоненциального поведения при малых линейных возмущениях и к задачам эргодической оптимизации.

В §**2.1** доказана **теорема 2.1**, обобщающая теорему Ролевича. Основным достижением этого параграфа автор диссертации считает не эти усиления, а идею короткого доказательства.

В §**2.2** исследуются некоторые вопросы поведения полугруппы с точки зрения слабой топологии. Эти вопросы впервые появились и стали обсуждаться в [13, 14, 15]. Обзор этой темы можно найти в статье ван Нервена [16]. Вопрос, аналогичный формуле (1) для слабой топологии таков: когда можно утверждать, что для каждой неубывающей положительной функции h

$$\exists x \in X,\ x' \in X' \ \int_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)\, dt = \infty. \tag{2}$$

Одного только отсутствия свойства (РЭУ) здесь не достаточно, как показывает пример (см. [51]; [52], пример 1.5) полугруппы сдвигов на $L^1(\mathbb{R}_+, e^t dt) \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Эта полугруппа не РЭУ, но слабо L^1-устойчива, т.е. $\forall x \in X,\ x' \in X' \ \int_0^\infty |\langle x', T_t x\rangle|\, dt < \infty$.

Пример выглядит довольно неожиданным: некоторые орбиты «далеки» от нуля; в то же время орбита каждого вектора x проводит почти все время «сколь угодно близко» к каждой гиперплоскости ($\ker x'$).

Мы уже ввели показатель равномерного роста полугруппы ω_0. Опишем теперь *показатель роста* ω_1. Пусть A — генератор полугруппы, $D(A) \subset X$ — область определения A. Рассмотрим абстрактную задачу Коши $\frac{dz}{dt} = Az,\ z(0) = x \in X$. Отображение $z(t) = T_t x$ — решение этой задачи. Если начальные данные x принадлежат $D(A)$, то соответствующее отображение естественно называть классическим, или гладким, решением, а начальные данные x — гладким вектором. Числа ω_0 и ω_1 определяют рост произвольных (и, соответственно, гладких) решений:

$$\omega_0(T) = \sup_{x \in X} \Big\{ \varlimsup_{t \to \infty} \frac{\ln |T_t x|}{t} \Big\}, \quad \omega_1(T) := \sup_{x \in D(A)} \Big\{ \varlimsup_{t \to \infty} \frac{\ln |T_t x|}{t} \Big\}.$$

Ясно, что $\omega_1 \leqslant \omega_0$. Полугруппа РЭУ тогда и только тогда, когда $\omega_0(T) < 0$. Если $\omega_1(T) < 0$, то говорят об *экспоненциальной устойчивости (ЭУ).*Для ограниченных C_0-полугрупп, не являющихся ЭУ, оценка снизу (2) была известна, см. ([16], теоремы 4.6.3(i) и 4.6.4). Сформулируем этот результат.

Предложение 2*: Если ограниченная C_0-полугруппа $T_t : X \to X$ не является экспоненциально устойчивой, т.е. $\omega_1 \geqslant 0$, то выполнены следующие утверждения:*

1) для каждой «хорошей» функции $h > 0$ найдутся $x \in X$ и $x' \in X'$ такие, что $\int_0^\infty h(|\langle x', T_t x \rangle|)dt = \infty$;

2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $m > 0$ найдутся единичные $x \in X$ и $x' \in X'$ такие, что мера множества $\{t \mid |\langle x', T_t x \rangle| \geqslant \varepsilon\}$ не меньше числа m.

Мы усиливаем этот результат в двух направлениях. Во-первых, он оказывается справедлив и для неограниченных полугрупп. Во-вторых, неравенство $\omega_1 \geqslant 0$ удалось заменить более слабым предположением $s_0(A) \geqslant 0$. Здесь $s_0(A)$ — абсцисса равномерной ограниченности резольвенты A, т.е. нижняя граница таких чисел r, для которых норма $\|(A - \lambda I)^{-1}\|$ равномерно ограничена в комплексной полуплоскости

$\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant r$. Всегда $\omega_0 \geqslant s_0 \geqslant \omega_1$; бывают и строгие неравенства. Эти обобщения легко следуют из следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть $T_t : X \to X$ — C_0-полугруппа, $s_0(A) \geqslant 0$. Для любых двух последовательностей $0 < m_1 < m_2 < \cdots$ и $\gamma_k > 0$, $\gamma_k \to 0$ найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ и семейство множеств $U_k \subset \mathbb{R}_+$ таких, что*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \mu(U_k) \geqslant m_k,\ \forall t \in U_k \quad |\langle x', T_t x\rangle| > \gamma_k.$$

В §**2.3** мы показываем (**теорема 2.3**), что если нижняя граница спектра $s(A) \geqslant 0$ достигается, то в теореме 2.2 вектор x можно подобрать «бесконечно гладкий», т.е. из множества $\cap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$.

Глава 3 — **притягивающие компакты, теорема Ву — Сайна и компактная суперцикличность**. Результаты опубликованы в [95].

Здесь мы в основном изучаем полугруппу $\{T^n : X \to X \mid n \in \mathbb{N}\}$ степеней линейного оператора $T : X \to X$. Предполагается, что полугруппа ограничена. Оператор T называется асимптотически конечномерным, если полугруппа его степеней асимптотически конечномерна, т.е. коразмерность подпространства исчезающих векторов X_0 конечна.

Подмножество $K \subseteq X$ назовем *притягивающим* для T, если

$$\forall x \in B_X \ \lim_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\lim = 0)$$

Известно, что для ограниченного со степенями оператора существование притягивающего компакта влечет и асимптотическую конечномерность и расщепляемость ($X = X_0 \oplus L$). Аналогичные факты верны и для ограниченной C_0-полугруппы. Этот результат был получен в работе Ласоты, Ли и Йорка [17] для марковских полугрупп в L_1, для положительных операторов в банаховых решетках — в статье Бартожека [19]. Для операторов Фробениуса — Перрона условие, аналогичное условию ($\lim = 0$), изучалось ещё в работе Ласоты, Йорка и Джеймса [18]. Общий случай был получен в работах Ву [20] и Сайна [21].

Оказывается, заключение теоремы Ву — Сайна остается справедливым, даже если существует лишь «иногда притягивающий» компакт K:

$$\forall x \in B_X \quad \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\liminf = 0)$$

Статьи [20], [21] используют результаты о спектральном разложении слабо почти периодической полугруппы, восходящие к работам Джекобса [22] и де Лю — Гликсберга [23]. Мы используем более элементарный факт: непустоту существенного спектра ограниченного оператора.

В §**3.1** показано, что изометрия не может «иногда притягиваться» компактом.

Теорема 3.1. *Пусть* $\dim X = \infty$. *Если* $T : X \to X$ *— изометрия, то «иногда притягивающих» компактов у* T *нет.*

В §**3.2** теорема 3.1 применяется к доказательству упомянутого распространения результатов результатов из [20],[21] на описываемый случай. Результатом являются две теоремы.

Теорема 3.2. *Если* T *удовлетворяет условию* $(\liminf = 0)$, *то полугруппа* $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *асимптотически конечномерна и расщепляема, т.е. выполнено* $(X = X_0 \oplus L)$.

Теорема 3.3 — аналогичное утверждение для C_0-полугруппы T_t.

Параграф **3.3** посвящен другому приложению теоремы 3.1. Пусть X — вещественное или комплексное бесконечномерное банахово пространство и $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Оператор T называется *суперциклическим*, если орбита некоторого вектора $x \in X$, будучи умножена на основное поле F, плотна в X. Сам вектор x называется *суперциклическим вектором.*

Мы доказываем (в том числе для вещественного X) теорему, для комплексного X полученную Ансари и Бурдоном в [24] и Миллером в [25]:

Теорема 3.4. *Изометрия* $T : X \to X$ *не может быть суперциклической. Более того, если* T *ограничен со степенями и суперциклический, то* $T^n x$ *стремится к нулю для каждого* $x \in X$.

И в [24], и в [25] использовалось то, что любая изометрия комплексного X имеет инвариантное замкнутое подпространство. В пятой главе мы докажем этот факт и в вещественном случае. Однако теорема 3.4 (для вещественного и комплексного случая) из теоремы 3.1 следует непосредственно. Вообще, в [25] Миллер доказал, что изометрия комплексного X не может быть даже *финитно-суперциклической* т.е. для любого конечного множества $K \subseteq X$ множество $F \cdot O(K)$ не является всюду плотным в X. Позже, однако, Перис в [53] показал, что для локально выпуклых пространств финитная суперцикличность равносильна суперцикличности. Более слабое свойство *N-суперцикличности* было введёно Бурдоном, Фельдманом и Шапиро в [54, 55]. Оператор T N-суперцикличен, если существует конечномерное подпространство $L \subset X$ такое, что

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{F} \cdot O(B_L)) = X. \qquad (*)$$

Последнее эквивалентно тому, что B_X содержится в замыкании орбиты $O(L)$ конечномерного подпространства L. Поэтому естественно назвать оператор $T : X \to X$ *компактно-суперциклическим*, если существует компакт $K \subseteq X$ такой, что

$$\mathrm{Cl}(O(K)) \supset B_X.$$

(Определение содержательно только в бесконечномерном пространстве.)

Заметим: аналогичное условию $(*)$ условие «$\mathrm{Cl}(\mathbb{F} \cdot O(K)) = X$» выполнено в любом сепарабельном банаховом пространстве X даже для тождественного отображения $T = Id : X \to X$. В качестве компакта K возьмем последовательность $K = \{\frac{x_n}{n}\}$, где $\{x_n\}$ — произвольная плотная последовательность в B_X.

Для биективной изометрии $T : X \to X$ существование иногда притягивающего компакта равносильно компактной суперцикличности T^{-1}. Поэтому теорему 3.1 можно переформулировать так: *В бесконечномерном X нет компактно-суперциклических изометрий.*

Глава 4 — **границы асимптотической конечномерности**. Результаты опубликованы в работах [96, 98, 99].

Как и в предыдущей главе, $T : X \to X$ — линейный оператор, ограниченный со степенями. Для преемственности формулировок перепишем условие притягивающего компакта ($\lim = 0$) в следующем, очевидно эквивалентном виде

$$\forall x \in B_X \ \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\limsup = 0)$$

В прошлой главе мы показали, что заключение теоремы Ву — Сайна об асимптотической конечномерности и расщепляемости полугруппы остается верным, даже если компакт лишь «иногда притягивает» (условие «$\liminf = 0$»). В этой главе мы исследуем асимптотическую конечномерность (или её отсутствие) при выполнении более слабых условий

$$\forall x \in B_X \quad \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \leqslant \eta < 1, \qquad (\limsup \leqslant \eta)$$

$$\forall x \in B_X \quad \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \leqslant \eta < 1. \qquad (\liminf \leqslant \eta)$$

Постановку соответствующих задач можно выразить в терминах малой меры некомпактности притягивающих множеств. Мерой некомпактности $\chi(A)$ произвольного подмножества A в нормированном пространстве называется нижняя грань таких чисел r, для которых A можно поместить в объединение конечного семейства шаров радиуса r (или — что эквивалентно — семейства шаров радиуса r с центрами в некотором компакте). Компакты — в точности множества меры некомпактности 0. С другой стороны, всякий шар радиуса R в бесконечномерном пространстве имеет меру некомпактности R. Условие, например, ($\limsup \leqslant \eta$) формулируется так: существует притягивающее орбиты единичных векторов множество A, мера некомпактности которого равна η. В этих терминах, в частности, сформулирован результат работы Емельянова [2].

В случае ($\limsup \leqslant \eta$) асимптотическая конечномерность установлена Емельяновым и Вольфом в [26], см. также работу [1], где, среди прочего, условие ($\limsup \leqslant \eta$) исследовано для произвольных абелевых полугрупп операторов. В более ранних работах вариант условия ($\limsup \leqslant \eta$) исследовался в работе Коморника и Ласоты [27] для марковских операторов в L_1, затем для банаховых решеток — в работах Ребигера, Емельянова, Вольфа и Гороховой [28, 29, 30]. В контексте марковских операторов по-видимому в самом общем на настоящий момент виде условие ($\limsup \leqslant \eta$) исследовано в работе Емельянова и Эркурсун [31] — для сетей, названных ими сетями Лотца — Ребигера.

В главе 4 мы задаёмся вопросом: имеется ли асимптотическая конечномерность при выполнении самого слабого ограничения ($\liminf \leqslant \eta$), т.е. когда компакт K «притягивает лишь иногда и не сильно». Этот вопрос поставлен в книге Емельянова [33], (problem 1.3.33).

В §**4.1** мы, опираясь на понятие аппроксимативно собственных векторов, вводим понятие «медленно меняющихся векторов». Это — аппроксимативно собственные векторы, которые почти не укорачиваются при итерациях T. Более строго: оператор T имеет медленно меняющиеся векторы, если для любого $\varepsilon > 0$ существует единичный вектор x, такой, что

$$\exists\lambda, |\lambda| = 1, \; |Tx - \lambda x| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |T^n x| > 1 - \varepsilon \; \forall n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Теорема 4.1 утверждает, что медленные векторы уже есть, коль скоро $X_0 \neq X$; если же $\operatorname{codim} X_0 = \infty$, то есть сколь угодно многомерные подпространства, сферы которых состоят лишь из медленных векторов.

Результаты §4.1 используются в §**4.2** для доказательства асимптотической конечномерности при условии ($\liminf \leqslant \eta < 1$) в случае рефлексивного X (**теорема 4.2**). Результат без труда можно получить и для однопараметрической полугруппы $\{T_t : X \to X, t \geqslant 0\}$.

В оставшихся параграфах мы показываем, что число $\eta = \frac{1}{2}$ служит границей асимптотической конечномерности. Именно, в §**4.3** основным результатом является **теорема 4.3**, в которой асимптотическая конечномерность установлена при условии «$\liminf \leqslant \eta < \frac{1}{2}$» , а в §**4.4** доказаны **теоремы 4.4 и 4.5**, в которых показано устройство *изометрий* на пространствах $C(M)$ непрерывных функций на произвольном нульмерном компакте M, удовлетворяющих условию $\liminf \leqslant \frac{1}{2}$, где в роли притягивающего множества K можно подобрать *точку*. Тем самым мы даем отрицательный ответ на вопрос из [33].

В частности, если c — банахово пространство сходящихся последовательностей, $\lambda_n \in \mathbb{C}, |\lambda_n| \equiv 1$, $\lambda_n \to \lambda$ и $\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ — множество Кронекера, то оператор умножения $T : c \to c$, $(Tx)_n = \lambda_n x_n$ — изометрия, удовлетворяющая условию ($\liminf \leqslant \frac{1}{2}$).

Отметим, что операторы из c в c вида $(Tf)_n = \lambda_n f_n$, $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ (λ_n попарно различны), согласно наблюдению Любича [56], не обладая полной системой собственных конечномерных подпространств, являются тем не менее скалярно почти периодичными. Вообще, в [56] Любич показал, что в рефлексивном пространстве (и вообще, в слабо полном пространстве) полнота системы собственных подпространств эквивалентна скалярной почти периодичности. Возможно, результаты §4.2 справедливы для слабо полного пространства, а не только для рефлексивного.

Глава 5 — **инвариантные пространства у операторов на вещественных банаховых пространствах**. Результаты изложены в [100].

Инвариантное подпространство — *собственное замкнутое* подпространство X, переходящее в себя под действием оператора $T : X \to X$. Изометрии комплексного банахова пространства имеют инвариантные подпространства — доказательство этого восходит к теореме J из работы Годемана [34]. Основной результат главы 5 — существование инвариантных подпространств у изометрий вещественных банаховых пространств.

Пусть $T : X \to X$ — ограниченный линейный оператор на комплексном банаховом пространстве. Символами $\sigma(T)$ и $R(\lambda, T)$ обозначим его спектр и резольвенту. Пусть $\sigma(T)$ несвязен, F и $\sigma \backslash F$ — открыто-замкнутые части спектра. Охватим контуром γ множество F. Образ $[F]$ и ядро $[\sigma\backslash F]$ спектрального проектора $P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, T)d\lambda$ — инвариантные подпространства и $\sigma(T|_{[F]}) = F$.

Пусть спектр связен. Тогда, вырезая контуром γ подмножество F в спектре, надо домножать резольвенту на весовую функцию g, малую в окрестности пересечения $\gamma \cap F$: $f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, T)g(\lambda)d\lambda$. Так строятся спектральные подпространства при ограничениях на рост резольвенты, (см. Данфорд [36] или Лиф [37]), которые заведомо выполнены, если степени оператора $T^{\pm n}$ растут не слишком быстро. Например, условие неквазианалитичности $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln\|T^n\|}{1+n^2} < \infty$ гарантирует отделимость спектра, как показано в работе Любича, Мацаева и Фельдмана [38].

Пусть теперь X вещественно. Спектральный проектор, соответствующий симметричной (относительно сопряжения в $\mathbb{C}$) компоненте спектра комплексификации $T_\mathbb{C} : X_\mathbb{C} \to X_\mathbb{C}$, если спектр несвязен, даёт симметричное (относительно сопряжения в $X_\mathbb{C}$) инвариантное подпространство $L_\mathbb{C}$. Его вещественная часть $L \subset X$ будет T-инвариантной. Этот метод описан подробно у Баскакова и Загорского [39]. Между тем и в случае связного спектра $T_\mathbb{C}$ нетрудно получить симметричное $T_\mathbb{C}$-подпространство методом, обрисованным выше: нужно построить $f(T_\mathbb{C})$, охватывая часть спектра *симметричным* контуром с *симметричной* функцией g. «Вещественная часть» образа $f(T_\mathbb{C})$ будет T-инвариантным в X.

Используя понятия локального спектра и локальной резольвенты, мы получаем теорему, в комплексном случае доказанную Вермером в [35].

Теорема 5.1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $T : X \to X$ — обратимый линейный оператор с оценкой роста степеней $\|T^n\| \underset{n\to\pm\infty}{=} O(|n|^k), k < \infty$. Если $\dim X > 2$, то оператор T имеет инвариантное подпространство. В частности, любая линейная изометрия $T : X \to X$ имеет инвариантное подпространство.*

Не все инвариантные подпространства получают спектральными методами. Бывают операторы вольтерровского типа, сужение которых на инвариантные подпространства имеет тот же спектр, что и исходный оператор, например $\sigma(T|_L) = \sigma(T) = [0,1]$, см. работу [58] Любича и Мацаева. Вообще говоря, если у $T_{\mathbb{C}}$ есть инвариантные подпространства, то неизвестно, есть ли среди них симметричные; утверждение о существовании таковых равносильно гипотезе 3 работы [43].

Глава 6 — **о геометрии конусов, сфер и гиперплоскостей**. (Результаты изложены в работах [101, 102, 103]).

В работе Крейна [46] введено понятие нормального конуса. В работе Емельянова и Вольфа [47] появилось условие строгой нормальности. Там же было отмечено, что неизвестно, является ли каждый нормальный конус строго нормальным.

Основной результат **параграфа 6.1** — примеры нормальных, но не строго нормальных конусов. Мы также характеризуем строгую нормальность телесного конуса K в терминах геометрии его гиперплоской базы.

Пусть E — нормированное упорядоченное пространство, $K = X_+$ — конус его неотрицательных элементов. Этот конус упорядочивает пространство X так: $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in K$. Конус порождает E, если $E = K - K$. Порядковый интервал $\langle a, b\rangle$ — это множество $\langle a, b\rangle = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Заметим, что каждый такой конус является аддитивной полугруппой.

Обозначим здесь $dist(A, B)$ расстояние между множествами A и B.

В нашей терминологии конус является нормальным, если функция $\rho(x, y) = dist(\langle 0, x\rangle, \langle 0, y\rangle)$, заданная на множестве $K \times K$, непрерывна в $(0, 0)$, т.е. при приближении положительного x к нулю порядковый интервал $\langle 0, x\rangle$ стягивается в нуль. В работе [46] Крейн дополнительно требовал в определении нормальности, чтобы конус был телесный, т.е. имел непустую внутренность. Потом это требование ушло, однако заметим, что все конусы в первом параграфе главы телесные.

Строгая нормальность, определенная в работе [47], означает непрерывность функции ρ на всем $K \times K$. Последнее геометрически означает, что для положительных x, y близких между собой порядковые интервалы $\langle 0, x\rangle$ и $\langle 0, y\rangle$ также близки.

Теорема 6.1 утверждает, что если $\widehat{B}$ — гиперплоское сечение, порождающее конус (база конуса) и точка $\widehat{x} \in \widehat{B}$ не крайняя, но лежит в замыкании множества крайних точек $\widehat{B}$, то функция ρ разрывна в точке $\widehat{x}$. Отсюда вытекает, что уже в $\mathbb{R}^4$ имеется нормальный, но не сильно нормальный конус. В самом деле, в $\mathbb{R}^3$ есть выпуклые компакты с незамкнутым множеством крайних точек. Конус с такой базой — искомый.

В таких примерах функция ρ полунепрерывна снизу, т.е. предельный порядковый интервал может лишь «увеличиться». Оказалось, что в бесконечномерных пространствах возможно и «схлопывание» предельного порядкового интервала. Опишем, как такое возможно. Нормированное пространство строго выпукло, если каждая точка S единичной сферы является крайней точкой шара B_E. Пространство называется равномерно выпуклым, если из того, что $x_n \in S, y_n \in S$ и того, что $\frac{x_n+y_n}{2} \to S$ следует, что $|x_n - y_n| \to 0$. Пространство называется локально равномерно выпуклым (Ловалья, [59]), если в предыдущем определении дополнительно «закрепить» один конец хорд: $x_n \equiv x \in S$. Если следить не за концами, а за серединами хорд, то получится так называемое условие midpoint locally uniform rotundity (MLUR). Более точно, X обладает свойством (MLUR), если для точек $x_n \pm v_n$ из того, что $x_n \to x \in S$ и $|x \pm v_n| \to 1$ следует, что $v_n \to 0$. Геометрически это условие означает, что любая точка x сферы S равномерно далека от середин длинных хорд этой сферы.

Теорема 6.4. *Пусть X строго выпукло, B — единичный шар в X. Конус $K \subset \mathbb{R} \times X$, порождаемый базой $\{1\} \times B$ строго нормален тогда и только тогда, когда $X \in MLUR$.*

Изучению свойства MLUR, сравнению его с другими характеристиками выпуклости сферы, вопросам двойственности и возможностям MLUR и не-MLUR перенормировок посвящено заметное количество работ. Кадец [49] установил, что любое сепарабельное банахово пространство изоморфно локально равномерно выпуклому, а, значит, и MLUR, пространству. С другой стороны, большинство хороших пространств допускают не-MLUR перенормировки. Укажем, например, на работу Смита [50], где можно найти три примера не-MLUR пространств. Для наглядности мы приводим два наших примера.

В **§ 6.2** мы показываем, как можно строить конус K в пространстве финитных последовательностей C_{00}, который не содержит прямых, является архимедово замкнутым, но не замкнут относительно некоторой почти максимальной топологии τ на C_{00}, сопряженной с двойственностью $\langle C_{00}, F\rangle$.

Архимедова замкнутость (далее просто архимедовость) подмножества K локально выпуклого векторного пространства W означает замкнутость пересечений K с конечномерными подпространствами.

Всякое разделяющее элементы W подпространство F в алгебраически сопряженном пространстве $W^{\#}$ линейных функционалов на W определяет топологию Макки $\langle W \mid F\rangle$ — максимальную локально выпуклую топологию, согласованную с двойственностью.

Если $F \neq W^{\#}$, то в $\langle W \mid F\rangle$ имеются незамкнутые архимедовы множества, например, гиперплоскости, являющиеся ядрами разрывных функционалов $h \in W^{\#} \backslash F$.

В работе [86] установлено, что если пространство W несчетномерно, то его любая локально выпуклая топология допускает архимедовы выпуклые незамкнутые конусы, не содержащие прямых. Там же установлено, что если пространство W счетномерно, то максимальная топология двойственности $\langle W \mid W^{\#}\rangle$ не допускает таких конусов. Следуя терминологии статьи [86], подпространство функционалов $F \subset W^{\#}$ называем тонким, если упомянутые конусы в $\langle W \mid F\rangle$ имеются.

Основной результат § 6.2 — построение тонкой гиперплоскости (и соответствующего конуса) для счетномерного пространства (реализованного как C_{00}) в пространстве $C_{00}^{\#}$ существует тонкая гиперплоскость. Сопряженное пространство $C_{00}^{\#}$ состоит из *всех* последовательностей $f = (a_1, a_2, \ldots)$, спаривание $\langle C_{00} \mid C_{00}^{\#}\rangle$ таково: $\langle (x_n), (a_n)\rangle = \sum a_i x_i$.

Во втором сопряженном пространстве $C_{00}^{\#\#}$ имеется такой элемент L, что если числовая последовательность a_n сходится и $f = (a_n)$, то $L(f) = \lim a_n$. Для получения такого L (банахова предела) нужно как-нибудь продлить функционал $L = \lim$, пользуясь теоремой Хана—Банаха, с подпространства $c \subset C_{00}^{\#}$ сходящихся последовательностей на все $C_{00}^{\#}$.

В $C_{00}^{\#}$ определим гиперплоскость функционалов $F = \ker L$.

Теорема 6.5. *Гиперплоскость $F = \ker L \subset C_{00}^{\#}$ является тонкой. Выпуклое архимедово замкнутое и не содержащее лучей множество*

$$C = \Big\{x \in C_{00} \mid \sum x_n = 1, \sup\big\{|x_1|, \frac{|x_2|}{2}, \frac{|x_3|}{3}, \cdots, \frac{|x_n|}{n} \cdots \big\} \leqslant 1\Big\}$$

не замкнуто, ибо 0 *не отделяется от C никаким функционалом $f \in F$.*

Следствие. Выпуклый конус $K \subset C_{00}$ с базой C

$$K = \Big\{x \in C_{00} \mid \sum_{n\geqslant 1} x_n \geqslant \sup\big\{|x_1|, \frac{|x_2|}{2}, \frac{|x_3|}{3}, \cdots, \frac{|x_n|}{n} \cdots \big\}\Big\}$$

архимедов, но не замкнут в пространстве $\langle C_{00} \mid F\rangle$.

Для нас остается открытым вопрос: всякая ли гиперплоскость в пространстве $C_{00}^{\#}$, разделяющая элементы C_{00}, является тонкой?

В **§ 6.3** мы устанавливаем некоторое естественное свойство верхнего топологического предела семейства гиперплоскостей и, более общо, также семейства подпространств конечной коразмерности. Именно, оказывается, что верхний топологический предел семейства векторных подпространств коразмерности k в произвольном топологическом векторном пространстве содержит некоторое подпространство коразмерности k.

Пусть I — бесконечное множество индексов, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подмножеств топологического пространства X.

Множество $Ls\{X_\alpha\}$, состоящее из всех точек x таких, что для каждой окрестности U точки x множество $\{\alpha \in I \mid U \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$ бесконечно, называется верхним топологическим пределом семейства $\{X_\alpha\}$ (см., например, Хаусдорф [85] или Куратовский [84]). В работе [85, 84] такое определение дано для метрического пространства X и при $I = \mathbb{N}$, в этом случае множество $Ls\{X_n\}$ состоит из всевозможных предельных точек последовательностей вида $\{x_n \in X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

Арутюнов установил ([90]), что если в банаховом пространстве X имеется последовательность замкнутых подпространств X_n, коразмерность каждого из которых не больше числа k, то множество $Ls\{X_n\}$ содержит замкнутое подпространство $X_0 \subset X$, коразмерность которого также не больше k. Это утверждение используется для доказательства компактности множества множителей Лагранжа, которые соответствуют «большим» подпространствам положительной определённости функционала Лагранжа.

Основным результатом **§ 6.3** является обобщение леммы Арутюнова на случай, когда вместо последовательности операторов рассматривается произвольное их семейство, а вместо банахова пространства — произвольное топологическое векторное пространство. Кроме того, наше доказательство, как нам кажется, более явно, чем исходные доказательства, вскрывает механизм «ультрафильтров», по существу показывая, что важна здесь именно топология, а не норма и не полнота.

Теорема 6.6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, X — топологическое векторное пространство, I — бесконечное множество индексов, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подпространств таких, что* $\operatorname{codim} X_\alpha \leqslant k$. *Тогда существует подпространство X_0 такое, что* $\operatorname{codim} X_0 \leqslant k$ *и для любого $x \in X_0$ найдётся семейство $\{x_\alpha \in X_\alpha \mid \alpha \in I\}$, имеющее x точкой полного накопления, то есть для каждой окрестности U точки x мощность множества $\{\alpha \mid x_\alpha \in U\}$ равна мощности всего множества I.*

В частности, лемма Арутюнова в ее первоначальной формулировке оказывается справедливой для произвольных нормированных пространств и пространств Фреше.

Глава 1

Асимптотически конечномерные полугруппы операторов

Результаты этой главы опубликованы в работе [93].

Пусть X — банахово пространство, $\{T_t : X \to X \mid t \geqslant 0\}$ — полугруппа линейных операторов, $T_t \circ T_q = T_{t+q}$. Всюду предполагаем, что полугруппа действует непрерывно при $0 < t < \infty$, т. е. для каждого $v \in X$ функция $t \mapsto T_t(v)$ непрерывна при $t > 0$. Полугруппа *ограничена*, если все операторы T_t ограничены по норме константой $C < \infty$.

Для каждого вектора $v \in X$ и $t > 0$ будем писать $v_t = T_t v$, такое же сокращение сделаем для произвольных подмножеств в X.

Орбитой вектора x назовём множество $O(x) = \{x_t \mid t \geqslant 0\}$.

Введем пространство «исчезающих» векторов X_0, положив

$$X_0 = \{x \in X \mid x_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

Пространство X_0 T_t-инвариантно, т. е. для каждого $t > 0$ $T_t(X_0) \subset X_0$.

Говорим, что полугруппа *асимптотически конечномерна*, если коразмерность пространства X_0 в X конечна. Соответственно можно говорить об асимтотической счетномерности полугруппы.

Несмотря на то, что пространство X_0 состоит из векторов, зануляющихся в пределе, сужение полугруппы на X_0 не обязано быть ограниченной полугруппой (а пространство X_0 — замкнутым подпространством в X), **пример 1**.

В **первом параграфе** данной главы мы показываем (**теорема 1.1**), что у асимптотически конечномерных (и даже счетномерных) полугрупп пространство X_0 всегда замкнуто. В общем случае для замкнутости X_0 достаточно также наличие в X *замкнутого* дополнительного к X_0 подпространства L. Из этой теоремы, в частности, следует, что замкнутость пространства X_0, требуемая определением квазисжимающей полугруппы в работе Емельянова и Вольфа [1], выполнена автоматически.

Во **втором параграфе** мы изучаем вопросы стабилизируемости подпространств, дополняющих X_0 в X. Для обозначения таких конечномерных подпространств используем букву L.

Предположим, что нашлось подпространство L, дополняющее X_0 в X. Если X_0 замкнуто (например, в случае асимптотической конечномерности), то норма в $X = X_0 \oplus L$ эквивалентна норме, задаваемой формулой $|(x_0 + y)| := |x_0| + |y|$.

Так как $T_t(X_0) \subset X_0$, то разложение операторов $T_t : X \to X$ задается «треугольной матрицей» вида

$$T_t = \begin{pmatrix} \alpha_t & b_t \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} : X_0 \times L \to X_0 \times L, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_t x_0 + b_t y \\ Q_t y \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Для анализа асимптотического поведения полугруппы важно знать второй столбец этой матрицы. Если и пространство L T_t-инвариантно, то представление (1) диагонально, т.е. операторы $b_t : L \to X_0$ нулевые. Таким образом, для нахождения диагонального представления вида (1) надо уметь находить *инвариантное* подпространство L. Сразу отметим, что его может не быть, см. **пример 2**.

Для удобства мы будем иногда писать A_t вместо $T_t A$ для тех подмножеств $A \subset X$, для которых такое обозначение не вызовет разночтений.

Пусть полугруппа T_t асимптотически конечномерна, $\operatorname{codim} X_0 = n$. Рассмотрим произвольное подпространство $L \subset X$, дополняющее X_0. В теореме 1.2 показано, что если полугруппа ограничена, то L *почти стабилизируемо*, т. е. положение L в пространстве X изменяется под действием полугруппы всё медленнее (образно говоря, L_t, эволюционируя, «увязает» в X при больших t). Для строгой формулировки напомним, что такое угол между подпространствами:

Определение. Угол (раствор) между A и $B \subset X$:

$$\angle(A, B) = \min\{\sup_{a \in A, |a|=1} \{\rho(a, B)\}, \sup_{b \in B, |b|=1} \{\rho(b, A)\}\}.$$

На множестве $G(X, n)$-мерных подпространств пространства X угол играет роль метрики.

Теперь мы можем строго сформулировать **теорему 1.2**: *Если T_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа, то любое n-мерное подпространство $L \subset X$, дополняющее X_0 в X, почти стабилизируемо, т. е. для каждого t $\sup_{q<t} \angle(L_P, L_{P+q}) \to 0$ при $P \to \infty$.*

Пространство L называется *стабилизируемым*, если у L_t существует предельное положение L_∞, т.е. такое подпространство L_∞, что

$$\angle(L_t, L_\infty) \underset{t \to \infty}{\to} 0.$$

Если L стабилизируемо, то L_∞ является T_t-инвариантным.

В **третьем параграфе** мы исследуем орбиты полугруппы в слабой топологии пространства X. Основной результат данного параграфа — **теорема 1.3**, в которой показано, что в случае *слабой почти периодичности* полугруппы, т. е. компактности замыканий орбит векторов в слабой топологии X всякое подпространство L, дополняющее X_0, стабилизируемо. В частности, это выполнено в случае ограниченной полугруппы, действующей на рефлексивном пространстве X.

Несложно заметить (см. замечание 4), что движение почти стабилизируемого, но не стабилизируемого пространства L в пространстве X под действием полугруппы не может замедляться слишком быстро, например, числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \angle(L_{k+1}, L_k)$ должен расходиться.

В **четвертом параграфе** мы устанавливаем несложный критерий инвариантности конечномерного пространства как собственного пространства генератора полугруппы (**лемма 1.4.1**). Здесь же мы доказываем **теорему 1.4**, — пример неограниченной асимптотически двумерной полугруппы, в котором существует как инвариантное дополнение к X_0, так и двумерное подпространство L, дополняющее X_0, но не являющееся даже почти стабилизируемым. Это показывает, что условие ограниченности полугруппы в теореме 1.2 существенна уже в случае $\operatorname{codim} X_0 = 2$.

В **пятом параграфе** доказана **теорема 1.5**, обобщающая теорему 1.2 на случай асимптотически конечномерных полугрупп, для которых $\|T_t\| = o(t)|_{t\to\infty}$ (это в точности те полугруппы, у которых слагаемое Q_t в представлении (1) ограничено). Из этой теоремы легко следует, что если $\operatorname{codim} X_0 = 1$ (случай, частый в приложениях), то ограниченность полугруппы в теореме 1.2 несущественна.

Отметим, что аналоги теорем 1.2 и 1.3 для C_0-полугрупп операторов содержатся в статье Емельянова [2], где они доказываются методами нестандартного анализа.

1.1 Замкнутость подпространства X_0 в асимптотически конечномерных полугруппах

Лемма 1.1.1. *Пусть T_t — ограниченная полугруппа, $\|T_t\| \leqslant C$. Пусть $v \in X$ и*

$$m(v) = \inf_{t<\infty} \rho\{v_t, X_0\} = 0$$

(т. е. в орбите вектора v найдутся векторы, сколь угодно близкие к пространству X_0). Тогда $v \in X_0$. В частности, X_0 замкнуто в X.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Если $m(v) = 0$, то для некоторого $q \geqslant 0$ и для некоторого $x \in X_0$ $|v_q - x| < \varepsilon$. Тогда для всех $t < \infty$

$|v_{q+t} - x_t| < C\varepsilon$. В то же время

$$|v_{q+t}| - |v_{q+t} - x_t| \leqslant |x_t| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|v_t|\} \leqslant C\varepsilon$. Число ε произвольно мало и, таким образом, $\limsup\limits_{t\to\infty}\{|v_t|\} = 0$ и $v \in X_0$. $\square$

Замечание 1. Если $\operatorname{codim} X_0 < \infty$, то утверждение леммы справедлива и для неограниченной полугруппы T_t. В работе Емельянова и Вольфа [26] это было доказано *в предположении замкнутости* X_0 для полугруппы степеней оператора. Там же есть контрпример к заключению леммы 1.1.1 в случае бесконечной коразмерности пространства X_0 и неограниченной полугруппы.

Приведем пример полугруппы с незамкнутым X_0, который любезно сообщил автору Владимир Вениаминович Иванов.

Пример 1. Пространство X_0 неограниченной дискретной полугруппы — композиции умножения на 2 и сдвига в l_2

$$\{T^n : l_2 \to l_2 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (2x_2, 2x_3, 2x_4, \ldots)$$

содержит все финитные последовательности и поэтому плотно в l_2. Но легко заметить, что $X_0 \neq l_2$. Например, последовательность $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$ под действием полугруппы переходит в себя.

Оказывается, что если $\operatorname{codim} X_0 \leqslant \omega$, то X_0 всегда замкнуто.

Теорема 1.1. *Пусть $T_t : X \to X$ — асимптотически конечномерная или счетномерная полугруппа. Тогда подпространство X_0 замкнуто и* $\operatorname{codim} X_0 < \infty$. *При этом если T_t — C_0-полугруппа (т. е. для каждого $v \in X$ функция $t \mapsto v_t$ непрерывна в нуле), то исходная полугруппа, суженная на пространство X_0, является ограниченной.*

Доказательство. Предположим, что T_t — C_0-полугруппа.

Известно (Левин, Саксон [60]), что переход к подпространствам счетной коразмерности сохраняет бочечность. Таким образом, для X_0 выполняется принцип равномерной ограниченности. Для любой точки $v \in X_0$

множество $\{v_t \mid t \geqslant 0\}$ ограничено (кстати, если полугруппа не принадлежит классу C_0, то это не обязательно так), поэтому существует число $C < \infty$ такое, что для каждого $t > 0$ $\|T_t|_{X_0}\| \leqslant C$. Операторы T_t на $\mathrm{Cl}(X_0)$ ограничены той же константой C. Из леммы 1.1.1, применённой к сужению полугруппы на пространство $\mathrm{Cl}(X_0)$ следует, что $X_0 = \mathrm{Cl}(X_0)$. Факторпространство X/X_0, будучи банаховым пространством, не может быть иметь счетную бесконечную размерность. Поэтому оно конечномерно, а пространство X_0, соответственно, коконечномерно. Теорема доказана для C_0-полугрупп.

Если $\{T_t\}$ не является C_0-полугруппой, то вместо (возможно, неограниченных) множеств $\{v_t \mid t \geqslant 0\}$ следует рассмотреть ограниченные множества $\{v_t \mid t \geqslant s\}$ для какого-нибудь $s > 0$. Снова из принципа равномерной ограниченности следует, что совокупность операторов $\{T_t, t \geqslant s\}$ равномерно ограничена на X_0 и X_0 замкнуто в X. Теорема доказана.

Замечание 2. Принцип равномерной ограниченности говорит о счётных семействах операторов, а мы применяем его к однопараметрическому семейству, т.е. к более, чем счётному. Однако можно перейти к счетному семейству, рассматривая, скажем, T_t с рациональными t. В силу их плотности во всём семействе (в сильной топологии) видим, что наши рассуждения остаются в силе и для исходного семейства. В следующих главах мы неоднократно будем применять принцип равномерной ограниченности к полугруппам без этого дополнительного разъяснения.

Для C_0-полугрупп пространство X_0 является банаховым образом, ибо оно полно относительно нормы

$$|x| := \sup\{|x_t| \mid t \geqslant 0\} \geqslant |x|.$$

Таким образом, замкнутость X_0 получается из условия $\mathrm{codim}\, X_0 < \infty$ и с помощью *принципа дополняемости*. Напомним: этот принцип состоит в том, что банахов образ (то есть пространство, являющееся непрерывным линейным образом некоторого банахова пространства), лежащий в банаховом пространстве X и обладающий в нём замкнутым дополнением, сам замкнут в X. Итак, наличие замкнутого (алгебраического) дополнения к X_0 в X влечет замкнутость X_0 (при этом неважно, конечномерно X_0 или нет). Впрочем, ясно, что проверять наличие такого дополнения в общем случае едва ли более просто, чем проверять замкнутость X_0 непосредственно.

Из теоремы 1.1 следует, что норма пространства в представлении $X = X_0 \oplus L$ эквивалентна норме прямой суммы. Поэтому лемма 1.1.1 и замечание 1 влекут

Следствие. Пусть асимптотически конечномерная полугруппа представлена выражением (1) и $y \in L$. Если $\liminf_{t\to\infty} Q_t(y) = 0$, то $y = 0$. Если полугруппа T_t ограничена, то и полугруппа $Q_t : L \to L$ ограничена (но не наоборот).

1.2 Почти стабилизируемость и стабилизируемость в ограниченной полугруппе

Лемма 1.2.1. *Пусть полугруппа T_t ограничена. Функция $v \mapsto m(v) = \inf\limits_{t<\infty} \rho\{v_t, X_0\} : X \to \mathbb{R}$, определенная в лемме 1.1.1, непрерывна.*

Доказательство. Пусть $\|T_t\| \leqslant C$. для всех $t \geqslant 0$. Возьмём x и $y \in X$. Для каждого $\delta > 0$ существует t такое, что $|y_t| \leqslant m(y) + \delta$. Тогда

$$m(x) \leqslant |x_t| = |y_t + (x-y)_t| \leqslant |y_t| + C|x-y| \leqslant m(y) + \delta + C|x-y|.$$

Выбор числа δ произволен, поэтому $m(x) \leqslant m(y) + C|x-y|$. Меняя местами x и y в этом рассуждении, получаем: $|m(x) - m(y)| \leqslant C|x-y|$.$\square$

Следствие. На конечномерной единичной сфере подпространства L функция $m(y)$ достигает положительного минимума.

Замечание 3. Условие ограниченности полугруппы в лемме 1.2.1

существенно. Пример:

$$X = \mathbb{R}^2, \quad T_t(y,z) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = (y + tz, z).$$

Тогда $X_0 = 0$. Функция $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ строго положительна вне нуля, но разрывна в точке $(1,0) \in \mathbb{R}^2$, так как $m(1,0) = 1$, а $m(1,-\varepsilon) = \varepsilon$. Это наблюдение позволит построить «контрпример» к теореме 1.2 для неограниченной полугруппы (пример 4).

Следующее соглашение позволит нам избежать выписывания лишних констант в неравенствах. Будем говорить, что величина F имеет порядок величины H, если существует константа $k \in \mathbb{R}$ такая, что в описываемых условиях $F \leqslant k \cdot H$.

Лемма 1.2.2. *Пусть T_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа, $L \subset X$ — n-мерное подпространство, $X_0 \oplus L = X$, $e^1, \ldots, e^n$ — базис пространства L. Разложим произвольный вектор y по этому базису: $y = \beta_1 e^1 + \cdots + \beta_n e^n$. Тогда существует такое $k > 0$, не зависящее от y, что*

$$\forall t \geqslant 0 \ \forall y_t = \beta_1 e_t^1 + \cdots + \beta_n e_t^n \qquad |y_t| \geqslant k(|\beta_1| + \cdots + |\beta_n|).$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{|y_t|}{|\beta_1| + \cdots + |\beta_n|} = \frac{|y_t|}{|y|} \cdot \frac{|y|}{|\beta_1| + \cdots + |\beta_n|}.$$

Ограниченность снизу первого множителя в правой части этого равенства — это следствие леммы 1.2.1. Ограниченность снизу второго множителя следует из эквивалентности норм на конечномерном подпространстве L. □

Согласно этой лемме коэффициенты β_i в разложении $y_t = \beta_1 e_t^1 + \cdots + \beta_n e_t^n$ не могут быть слишком велики, если $|y_t| \leqslant 1$.

Следствие. Пусть Z — n-мерное подпространство в X. Угол $\angle(L_t, Z)$ имеет порядок максимального расстояния от вектора e_t^i до Z, $i = 1 \ldots n$.

Теорема 1.2. *Пусть T_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа на пространстве X, $L \subset X$ — n-мерное подпространство, такое, что $X_0 \oplus L = X$. Тогда L почти стабилизируемо, т. е. для каждого $t < \infty$*

$$\sup_{s \leqslant t} \angle(L_P, L_{P+s}) \to 0 \text{ при } \ P \to \infty.$$

Доказательство. Зададим действие полугруппы $\varphi : X_0 \times L \to X_0 \times L$ формулой (1). Заметим, что $Q_t : L \to L$ — полугруппа.

Пусть $e^1, \dots, e^n$ — базис пространства $L \subset X$ и $s \leqslant t$. Обозначим символом $Q(s) = (q_{ij}(s)^n_{i,j=1}$ также матрицу отображения $Q_s : L \to L$ в координатах этого базиса так, что отображение задаётся умножением *справа* на $Q(s)$. Строки этой матрицы состоят из координат проекций векторов e^i_s на пространство L параллельно пространству X_0. Тогда эволюция базисных векторов e^i описывается формулами

$$e^i_s = \sum_{j=1}^n q_{ij}(s)e^j + x^i(s), \tag{2}$$

где $x^1(s), \dots, x^n(s)$ — какие-то векторы из X_0.

Применяя к выражению (2) оператор T_P, имеем: для каждого $s \in [0, t]$

$$e^i_{s+P} = \sum_{j=1}^n q_{ij}(s)e^j_P + (x^i(s))_P. \tag{3}$$

Векторы первого слагаемого правой части равенства (3) лежат в пространстве L_P. По следствию леммы 1.2.2 угол $\angle(L_{P+s}, L_P)$ имеет порядок

$$f(s, P) := \max\{|x^1(s)_P|, \dots, |x^n(s)_P|\}.$$

Однако все $x^i(s)$ лежат в X_0, поэтому $f(s, P) \underset{P\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Пусть φ — C_0-полугруппа, т. е. функции вида $t \mapsto v_t$ непрерывны и в нуле. Тогда множества $\{x^i(s) \mid s \in [0, t]\} \subset X_0$ компактны, будучи непрерывными образами отрезка $[0,t]$. В силу принципа равномерной ограниченности получаем:

$$\sup\{f(s,P) \mid s \in [0,t]\} \underset{P\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Для C_0-полугрупп теорема 1.2 доказана.

Если T_t не C_0-полугруппа, то функции $x^i(s)$ могут быть разрывными в нуле, поэтому множества $\{x(s) \mid s \in [0,t]\}$ не обязаны быть компактными. В этом случае применим несколько искусственный прием: в качестве начального L рассмотрим пространство L, уже сдвинутое действием полугруппы T_t, т. е. пространство L_p, $p > 0$. Тогда для каждого $e^i \in L_p$ функция $t \mapsto e^i_t$ непрерывна и в нуле, так как существуют вектор $u^i \in L$ такой, что $e^i = u^i_p$ и, следовательно, $e^i_t = u^i_{p+t}$. Поэтому функции $x^i(s) = b_s(e^i) = b_{p+s}(u^i)$ непрерывны при $s \geqslant 0$, а не только при $s > 0$. Теорема 1.2 доказана полностью.

Замечание 4. Если скорость стабилизации пространства L достаточно велика, то пространство *стабилизируемо*, т. е. стремится к некоторому предельному стабильному положению L_∞. В самом деле, пространство $G(X,n)$ $n-$мерных подпространств банахова пространства X с угловой метрикой полно. (Интуитивно это очевидно, однако строгое доказательство требует некоторой аккуратности; доказательство этой полноты мы приводим в конце главы). Поэтому если, например, последовательность $L_k \in G(X,n)$ фундаментальна, то эта последовательность при $k \to \infty$ имеет предел $L_\infty \in G(X,n)$. Из теоремы 1.2 следует, что колебание функции $L_t : t \to G(X,n)$ на отрезке $[k, k+1]$ мало при больших k. Поэтому $L_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} L_t$.

В частности, если L нестабилизируемо, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \angle(L_{k+1}, L_k)$ расходится. В то же время может быть так, что L стабилизируемо, а ряд расходится. Это следует из того, что условие фундаментальности (условие Коши) слабее условия абсолютной сходимости ряда. Проиллюстрируем два последних вывода:

Пример 2 (Емельянов, [2]). Пусть $X = C[0,1]$, $(T_t f)(x) = x^t f(x)$. Эта полугруппа (заметим, не C_0-полугруппа — см. ниже!) ограничена и

$$X_0 = \{f \in C[0,1] \mid f(1) = 0\},\ \mathrm{codim}\ X_0 = 1.$$

Инвариантных дополняющих пространств нет. Значит, для любой функции $f \in X$ если $f(1) \neq 0$, то ряд $\sum \|f_{k+1} - f_k\|$ расходится. Проведем непосредственную выкладку для функции $g(x) \equiv 1$:

$$\|g_k - g_{k-1}\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |x^k - x^{k-1}| = \frac{1}{k}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1} \sim \frac{1}{ek},\ \sum \|g_k - g_{k-1}\| = \infty.$$

Как отмечено выше, полугруппа этого примера не является C_0-полугруппой, ибо она разрывна при $t = 0$. Однако если мы сузим данную полугруппу на инвариантное подпространство

$$\tilde{X} = \{f \in X \ \mid \ f(0) = 0\},$$

то получим уже C_0-полугруппу $T : \tilde{X} \to \tilde{X}$. Примером, аналогичным примеру 2, будет не функция $g(x) \equiv 1$, а функция $\tilde{g}(x) \equiv x = T_1 g \in \tilde{X}$.

Пример 3. Пусть X — подпространство пространства $C[0,\infty)$, состоящее из функций, имеющих конечный предел в бесконечности. Рассмотрим полугруппу сдвигов:

$$(T_t f)(x) = f(x+t).$$

Для такой полугруппы X_0 — пространство функций, стремящихся к нулю. Оно имеет коразмерность 1, а инвариантное одномерное пространство постоянных функций его дополняет. Пусть $f(x) = 1 + \frac{\sin \pi x}{x}$. Последовательность $f_k(x)$ сходится к единице равномерно, поэтому пространство L, натянутое на вектор $f \in X$, стабилизируемо. Однако $\|f_{k+1} - f_k\| \sim \frac{2}{k}$ и соответствующий ряд расходится.

1.3 Анализ эволюции векторов в слабой топологии

Обсудим теперь некоторые факты, касающиеся поведения векторов под действием полугруппы в слабой топологии пространства X.

Обозначим символом Cl_σ операцию слабого замыкания. Для каждого числа $0 \leqslant r < \infty$ и вектора $e \in X$ положим $E_r = \{e_t \mid t \geqslant r\}$. В частности, E_0 — орбита вектора e под действием полугруппы T_t.

Лемма 1.3.1. *Пусть T_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа, $e \notin X_0$. Тогда $Cl_\sigma(E_0) \cap X_0 = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $X = X_0 \oplus L$, $e \in L, e \neq 0$. Непрерывный оператор проектирования $P : X = X_0 \times L \to L$ непрерывен и в слабой топологии. В то же время на конечномерном L слабая и сильная топология совпадают. Пользуясь леммой 1.1.1, легко увидеть, что проекция орбиты E_0 вектора e на L отделена от нуля, поэтому само $E_0 \subset P^{-1}P(E_0)$ отделено от X_0 даже в слабой топологии. □

Лемма 1.3.2. *Пусть $e \in X$. Множество*

$$E_\infty = \bigcap_{r<\infty} Cl_\sigma(E_r)$$

(быть может, пустое), T_t-инвариантно, т. е. $\forall t\ E_{\infty+t} = E_\infty$.

Доказательство. Условие $z \in E_\infty$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall f_1, \ldots, f_k \in X'\ \forall r < \infty\ \exists P > r : |f_i(z - e_P)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Пусть $t \geqslant 0$. Для функционала $f \in X'$ определим $f^t \in X'$ условием $f^t(x) := f(x_t)$. Применяя условие (4) к функционалам $f_1^t, \ldots, f_k^t \in X'$, получаем, что существует сколь угодно большое число P такое, что для каждого $i = 1, \ldots, k$ выполнено неравенство $|f_i^t(z - e_P)| < \varepsilon$. Но

$$f_i^t(z - e_P) = f_i(z_t - e_{P+t}).$$

Итак, для вектора z_t выполнено условие (4) и $z_t \in E_\infty$.$\square$

Теорема 1.3. *Пусть ограниченная полугруппа T_t асимптотически конечномерна, L — какое-то подпространство, дополняющее X_0 в X. Предположим, что для каждого $e \in L$ его орбита E_0 слабо предкомпактна. Тогда пространство L стабилизируемо, т. е. существует T_t-инвариантное подпространство L_∞, такое, что*

$$X = X_0 \oplus L_\infty, \quad \angle(L_P, L_\infty) \underset{P\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В частности, если X рефлексивно, то L стабилизируемо.

Доказательство. В одномерном случае идея доказательства такова: вектор z из *непустого* множества

$$E_\infty = \bigcap_{r<\infty} \mathrm{Cl}_\sigma(E_r)$$

можно приближать *выпуклыми* комбинациями векторов вида e_{t_j} со сколь угодно большими t_j. Из теоремы 1.2 следует, что такие комбинации меняются сколь угодно медленно. Значит, вектор z не меняется вообще. Многомерный случай сложнее лишь технически: необходимо, кроме движения пространства L «как единого целого», учитывать движение L «внутри самого себя». Можно представлять себе L как пчелиный рой, медленное движение которого не зависит от того, как мечутся пчёлы внутри роя.

Рассмотрим максимальное s, при котором проекции векторов

$$e^1 = e,\ e^2 = T_{p_2}e^1, \dots, e^s = T_{p_s}e^1, \quad s \leqslant n$$

на пространство L параллельно X_0 линейно независимы. Нетрудно видеть, что эти проекции образуют базис некоторого s-мерного подпространства $L^s \subset L$, инвариантного относительно действия полугруппы $Q_t : L \to L$. Будем считать, что $s = n$, т.е. $L^s = L$. (Если s вдруг получилось меньше n, то это значит, что мы случайно попали в собственное подпространство уже внутри L. Тогда пространство L представляется в виде прямой суммы подпространств вида L^s и описываемая ниже процедура проделывается с каждым из них.)

Множество $\mathrm{Cl}_\sigma(E_0)$ компактно в слабой топологии. Значит, пересечение E_∞ семейства вложенных множеств $\bigcap_{r<\infty} \mathrm{Cl}_\sigma(E_r)$ непусто. Пусть $z^1 \in E_\infty$. По лемме 1.3.1 $z^1 \notin X_0$.

По теореме Мазура слабое замыкание множества лежит в замыкании его выпуклой оболочки. Таким образом, из условия

$$z^1 \in \mathrm{Cl}_\sigma(E_r)\ \forall r < \infty$$

следует, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для любого $P < \infty$ найдутся коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geqslant 0$, $\sum \alpha_k = 1$ и векторы $e^1_{t_1}, \ldots, e^1_{t_m}$, $t_j > P$ такие, что

$$z^1 = \sum_{k=1}^m \alpha_k e^1_{t_k} + \widetilde{\varepsilon}^1, \quad |\widetilde{\varepsilon}^1| < \varepsilon.$$

Применяя к последнему выражению оператор T_{p_i}, получаем, обозначив $z^i = z^1_{p_i}$, $i = 2\ldots, n$ (напомним, что $e^i = e^1_{p_i}$, $i = 2, \ldots, n$):

$$z^i = \sum_{k=1}^m \alpha_k e^i_{t_k} + \widetilde{\varepsilon}^i, \quad |\widetilde{\varepsilon}^i| \leqslant C\varepsilon. \tag{5}$$

Согласно формуле (3), $e^i_{t_k+t} = \sum_{j=1}^n q_{ij} e^j_{t_k} + x^i_{t_k}$, где $x^1, \ldots, x^n \in X_0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \alpha_k e^i_{t_k+t} &= \sum_{k=1}^m \alpha_k \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} e^j_{t_k} + x^i_{t_k} \right) = \sum_{j=1}^n q_{ij} \sum_{k=1}^m \alpha_k e^j_{t_k} + \sum_{k=1}^m \alpha_k x^i_{t_k} = \\ &= \sum_{j=1}^n q_{ij}(z^j - \widetilde{\varepsilon}^j) + \sum_{k=1}^m \alpha_k x^i_{t_k} = \sum_{j=1}^n q_{ij} z^j - \sum_{j=1}^n q_{ij} \widetilde{\varepsilon}^j + \sum_{k=1}^m \alpha_k x^i_{t_k}.\end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что

$$\left| \sum_{k=1}^m \alpha_k x^i_{t_k} \right| \leqslant \max_{k=1\ldots m} |x^i_{t_k}|.$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\left| z_t^i - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} z^j \right| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \widetilde{\varepsilon}^j \right| + |\widetilde{\varepsilon}^i| + \max_{k=1\ldots m} |x_{t_k}^i|. \tag{7}$$

Так как $t_k > r$, то, выбирая r достаточно большим, можно добиться того, чтобы самое последнее слагаемое в (7) было настолько мало, чтобы вся правая часть неравенства (7) была порядка ε. Но левая часть неравенства (7) не зависит от ε, поэтому $z_t^i = \sum_{j=1}^n q_{ij} z^j$. Итак, для каждого $t > 0$ вектор z_t^i лежит в линейной оболочке векторов $z^1, \ldots, z^n$, следовательно, пространство L_∞, натянутое на векторы $z^1, \ldots, z^n$, инвариантно. Остальное очевидно. Теорема доказана.

Из леммы 1.3.2 следует, что L_∞ — линейная оболочка множества E_∞.

1.4 Инфинитезимальный критерий инвариантности и нестабилизируемый пример

В этом параграфе мы приводим инфинитезимальный критерий инвариантности конечномерных подпространств и на основе **примера 4** строим асимптотически двумерную полугруппу, у которой (**теорема 1.4**) есть как стабильное дополнительное к X_0 подпространство, так и нестабилизируемые подпространства, дополняющие X_0 в X.

Для каждой полугруппы $T_t : X \to X$ обозначим $A : X \to X$ её генератор. Это — замкнутый плотно определенный оператор с областью определения $D(A)$, состоящей из тех $v \in X$, для которых существует

$$A(v) = \left. \frac{\partial T_t v}{\partial t} \right|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{T_t(v) - v}{t}.$$

Все используемые ниже свойства генератора можно найти, например, в классической монографии Хилле и Филлипса [61].

Лемма 1.4.1 (критерий инвариантности конечномерного подпространства). *Пусть T_t — произвольная полугруппа. Все конечномер-*

ные T_t-инвариантные подпространства X суть собственные конечномерные подпространства её генератора A, лежащие в $D(A)$.

Доказательство. Пусть $Y \subset D(A)$ и $A(Y) \subset Y$. Для каждого $y \in Y$ сумма $y_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n(y)}{n!}$ принадлежит Y. Поэтому $Y_t \subset Y$. Обратно, пусть $\dim Y < \infty$ и для каждого $t < \infty$ $Y_t \subset Y$. Сужения $T_t|_Y : Y \to Y$ образуют полугруппу, действующую на Y. Пространство Y конечномерно, поэтому генератор этой суженной полугруппы определен всюду на Y. Но ясно, что он является сужением на Y генератора A исходной полугруппы. $\square$

Пусть α_t — полугруппа на X с генератором α. Если $Q_t : B \to B$ — ещё полугруппа с генератором Q и $P : B \to X$ — непрерывный оператор, то оператор $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & P \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ генерирует полугруппу $T_t : X \times B \to X \times B$, задаваемую формулами

$$T_t \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_t & \int\limits_0^t \alpha_s P Q_{t-s} d\, s \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Пусть $B = \mathbb{R}^2$, $Q_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задается, как в замечании 3:

$$Q_t \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + tz \\ z \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Пусть $g \in X$. Отображение $P : B = \mathbb{R}^2 \to X$ определим формулой

$$P(y, z) = y \cdot g. \tag{10}$$

Полугруппу $T_t : X \times B \to X \times B$ определим формулой (8). Соответствующие генераторы таковы:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \varphi \begin{pmatrix} f \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(f) + yg \\ z \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Любое L, дополняющее X в $X \times \mathbb{R}^2$, является линейной оболочкой векторов $(k, 1, 0)$ и $(l, 0, 1)$ для каких-то $k, l \in X$. Выясним, каким условиям должны удовлетворять k и l, чтобы L было T_t-инвариантным.

Лемма 1.4.2. *Пусть* $\alpha_t : X \to X$ *— полугруппа,* $g \in X$*,* Q_t *и* $P(y,z)$ *определены формулами (9) и (10). Пусть полугруппа* $T_t : X \times \mathbb{R}^2 \to X \times \mathbb{R}^2$ *определена формулой (8). Векторы* $u = (k,1,0)$ *и* $v = (l,0,1)$ *порождают* T_t*-инвариантное подпространство* L *тогда и только тогда, когда* $k, l \in \operatorname{dom}\alpha$*,* $g = -\alpha(k)$*,* $k = \alpha(l)$*.*

Доказательство. Пусть u, v — базис инвариантного пространства L. Из (11) и леммы 1.4.1 следует: k и $l \in \operatorname{dom}\alpha$ и $\varphi(u) = (\alpha(k)+g,0,0) = 0$, т. е. $\alpha(k)+g = 0$. Далее, $\varphi(v) = (\alpha(l),1,0) = v$, т. е. $\alpha(l) = k$. $\square$

Пример 4. Оператор дифференцирования α порождает полугруппу сдвигов на пространстве $C(\mathbb{R}_+)$. На пространстве $C_0(\mathbb{R}_+)$ функций, стремящихся к нулю, эта полугруппа асимптотически нульмерна:

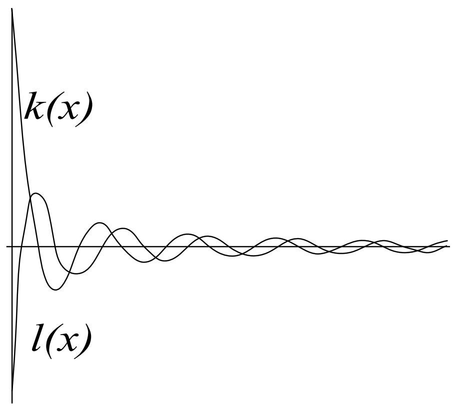
$$X = X_0 = C_0(\mathbb{R}_+) = \{f \in C(\mathbb{R}_+) \mid f(x) \to 0\},\ (\alpha_t f)(x) = f(x+t), \alpha(f) = f'.$$

Пусть $g(x) \in X$ и операторы Q_t и P такие, как в (9) и (10). Формула (8) задаёт асимптотически 2-мерную полугруппу $T_t : X \times \mathbb{R}^2 \to X \times \mathbb{R}^2$:

$$T_t \begin{pmatrix} f(x) \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+t) + \int\limits_0^t g(x+s)(y+(t-s)z)ds \\ y+tz \\ z \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Из леммы 1.4.2 и того, что $\alpha(f) = f'$ следует, что полугруппа T_t обладает инвариантным дополняющим X в $X \times \mathbb{R}^2$ пространством тогда и только тогда, когда у функции $g(x)$ найдутся первая и вторая первообразные, имеющие нулевой предел.

Рассмотрим в качестве $g(x)$ функцию $\frac{\sin(x)}{x}$. Рассмотрим функции $k(x) = -\operatorname{Si}(x) + \frac{\pi}{2}$, $l(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x)\right) - \cos x$, они удовлетворяют условиям леммы 1.4.2. Их графики приведены на рисунке. Исследуя асимптотику интегрального синуса, можно убедиться, что $k(x)$ и $l(x)$ стремятся к нулю, т. е. лежат в X.



Таким образом, соответствующая полугруппа имеет двумерное инвариантное подпространство, дополняющее X в $X\times\mathbb{R}^2$. Покажем, что подпространство $L=0\times\mathbb{R}^2\subset X\times\mathbb{R}^2$ не является почти стабилизируемым. Доказательство нестабилизируемости требует некоторых вычислений и аккуратных оценок.

Теорема 1.4. *Пусть $g(x)=\frac{\sin(x)}{x}$. Пространство $L=(0\times\mathbb{R}^2)\subset C_0(\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}^2$ не является почти стабилизируемым относительно действия полугруппы (12).*

Доказательство. Для вектора $u\in L_t$ обозначим $R(u)$ вектор, соединяющий u с проекцией u на пространство L_{t+1} параллельно $C_0(\mathbb{R}_+)$. В ключевом рассуждении теоремы 1.2 использовалось то, что для любого $u\in L_t$ $R(u)\underset{t\to\infty}{\to}0$, причем сходимость равномерна, т. е. $\max\{\frac{|R(u)|}{|u|}\mid 0\neq u\in L_t\}\underset{t\to\infty}{\to}0$. Оказывается, равномерность может не иметь места, если полугруппа неограничена. В нашем примере это именно так. Покажем это. Пусть $v(t)=T_t(0,-t,1)$. Вектор $v(t+1)$ является проекцией вектора $v(t)$ на подпространство L_{t+1} параллельно X. В самом деле, подставляя вектор $v(t)$ в формулу (12), убеждаемся, что

$$v(t)=\begin{pmatrix}-\int\limits_0^t\frac{\sin(x+s)}{x+s}sds\\0\\1\end{pmatrix},\ R(v(t))=v(t)-v(t+1)=\begin{pmatrix}\int\limits_t^{t+1}\frac{\sin(x+s)}{x+s}sds\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Величина $\int\limits_a^b\frac{\sin(x+s)}{x+s}sds=\cos|_{b+x}^{a+x}-x\mathrm{Si}|_{b+x}^{a+x}$ равномерно ограничена при всех x,a,b, так как $\mathrm{Si}(p)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{\cos p}{p}$ при $p\to\infty$. Тогда $\frac{|R(v(t))|}{|v(t)|}\not\to 0$ при $t\to\infty$, так как

$$|R(v(t))|=\left\|\int\limits_t^{t+1}\frac{\sin(x+s)}{x+s}sds\right\|_X=\max_{x\geqslant 0}\left|\int\limits_t^{t+1}\frac{\sin(x+s)}{x+s}sds\right|\overset{x:=0}{\geqslant}|\cos|_{t+1}^t|\not\to 0.$$

Итак, расстояние от вектора $v(t)=T_t(0,-t,1)$ до его проекции $v(t+1)$ на пространство L_{t+1} достаточно велико.

Из формулы (12) следует, что все элементы пространства L_t имеют вид

$$\begin{pmatrix} h^t_{a,b}(x) \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^t \frac{\sin(x+s)}{x+s} \cdot (a - sb) ds \\ a \\ b \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Мы показали, что найдутся сколь угодно большие $t < \infty$ такие, что расстояние от вектора $v(t) = (h^t_{0,1}, 0, 1) \in L_t$ до его проекции $(h^{t+1}_{0,1}, 0, 1)$ на L_{t+1} отделено от нуля некоторым числом $k > 0$. Осталось заметить, что для таких t расстояние от $v(t)$ до всех других векторов $(h^{t+1}_{y,z}, y, z) \in L_{t+1}$

$$\rho_X\{v(t) - (h^{t+1}_{y,z}, y, z)\} = \max_{0<x<\infty}\{|h^t_{0,1} - h^{t+1}_{y,z}|\} + \sqrt{y^2 + (z-1)^2} \tag{14}$$

тоже отграничено от нуля снизу при всех $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Это следует из того, что при (y, z) близких к $(0, 1)$ первое слагаемое в (14) не может сразу стать малым (необходимая оценка проста и оставляется читателю), а при дальнейшем удалении (y, z) от $(0, 1)$ становится существенным второе слагаемое.

Симметричные рассуждения показывают, что расстояние от вектора $(h^{t+1}_{0,1}, 0, 1)$ до пространства L_t тоже отграничено снизу от нуля. Итак, с ростом t угол между подпространствами L_t и L_{t+1} не стремится к нулю. Теорема 1.4 доказана.

1.5 Стабилизируемость в медленно растущих полугруппах

В данном пункте все полугруппы асимптотически конечномерны.

Условие ограниченности полугруппы $Q_t : L \to L$ в представлении (1) не зависит от выбора подпространства L, дополняющего X_0 в X. Ясно также, что если полугруппа операторов на конечномерном пространстве неограничена, то её рост не ниже первой степени по t, это легко следует из рассмотрения жорданова представления.

Назовем полугруппу *медленно растущей*, если полугруппа Q_t ограничена. Анализируя в представлении (8) верхний правый элемент матрицы, нетрудно провести оценки, показывающие, что условие медленного роста полугруппы T_t равносильна условию $\|T_t\| = o(t)|_{t\to\infty}$.

Пример 5. Рассмотрим полугруппу, определенную формулой (8), где $X_0 = C_0(\mathbb{R}_+)$, $L = \mathbb{R}$, $P(y) = g \cdot y$, где $g \in X_0$ (ср. пример 4),

$$T_t \begin{pmatrix} f(x) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+t) + y \cdot \int\limits_0^t g(x+s)ds \\ y \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Интеграл от $g(x)$ может достигать произвольно больших значений. Поэтому полугруппа (15) не обязана быть ограниченной. В то же время порядок роста $\|T_t\|$ определяется ростом функции $\int_0^t g(p)dp = o(t)$ и поэтому $\|T_t\| = o(t)$ при $t \to \infty$. Например, если $g(x) = \frac{1}{x+1}$, то, полагая в (15) $f \equiv 0$ и $y = 1$, получим:

$$T_t(0,1) = (\ln \frac{x+1+t}{x+1}, 1), \quad \|T_t\| \geqslant\sim \sup\{\ln \frac{x+1+t}{x+1} \mid x \geqslant 0\} \sim \ln t.$$

Замечание 5. Таким методом мы можем получать полугруппы с разнообразными предписанными оценками роста $s(t) = o(t)$. Для этого в качестве функции g нужно брать производную функции s.

Итак, класс медленно растущих полугрупп шире класса ограниченных полугрупп. Тем не менее для этого класса заключение теоремы 1.2 также справедливо.

Теорема 1.5. *Заключение теоремы 1.2 верно для всех медленно растущих полугрупп. Именно, если асимптотически конечномерная полугруппа T_t растёт медленно и подпространство L дополняет X_0, то L почти стабилизируемо, т. е. для каждого $t < \infty$*

$$\sup_{s<t} \angle(L_P, L_{P+s}) \to 0 \text{ \textit{при} } P \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $X = X_0 \oplus L$, $\dim L < \infty$, $T_t = \begin{pmatrix} \alpha_t & b_t \\ 0 & Q_t \end{pmatrix}$.

Рассмотрим сначала случай $\dim L = 1$. Этот случай содержит основную идею общего доказательства, но особенно прост, поскольку всякая одномерная полугруппа $Q_t : L \to L$ имеет вид умножения на число $\exp(ct)$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. По условию теоремы $c \leqslant 0$. Согласно следствию теоремы 1.1 $c = 0$. Пусть $y \in L$ и $t > 0$. Тогда $y_t = x(t) + y$, где $x(t) \in X_0$. Таким образом, $|y_t| \geqslant |y|$. В то же время

$$|T_P(y_t) - T_P(y)| = |T_P(y_t - y)| = |T_P(x(t))| \underset{P\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому угол между прямыми L_t и L_{P+t} мал при больших P.

Переходя к общему случаю, заметим: если полугруппа $Q_t : L \to L$ ограничена сверху и ограничена снизу на каждом векторе, то она двусторонне ограничена и равномерно. Это выводится из следствия теоремы 1.1, а также леммы 1.2.1, примененной к самой *конечномерной* полугруппе $Q_t : L \to L$. Можно дать и непосредственное доказательство: конечномерная полугруппа L в некотором базисе имеет вид e^{At}, причем ввиду поточечной ограниченности все собственные значения матрицы A имеют нулевые вещественные части.

Итак, существует $k < \infty$ такое, что для всех $y \in L$ и для всех $t > 0$ справедлива оценка $|y| \leqslant k|Q_t(y)|$. Значит, тем более, $|y| \leqslant k|T_t(y)|$.

Пусть $t > 0$. Шар $B \subset L$ радиуса k компактен, компактен и его образ B_t. Тогда множество

$$K := X_0 \cap (B_t - B) = \{u - v \in X_0 \mid u \in B_t,\ v \in B\}$$

тоже компактно. Множество K играет в оставшейся части доказательства ту же роль, что и точка $x(t)$ в исследовании одномерного случая.

Пусть $z \in L_P$, $|z| = 1$. Рассмотрим вектор $y \in L$, такой, что $z = y_P$. Тогда $|y| \leqslant k$, т.е. $y \in B$. Существует $x \in X_0$ такой, что $y + x \in L_t$. Тогда $x \in K$. В то же время $z + x_P = (y + x)_P \in L_{P+t}$. Поэтому

$$\rho(z, L_{P+t}) \leqslant x_P \leqslant |K_P| := \sup\{|x| \mid x \in K_P\}.$$

Число $|K_P|$ не зависит от выбора y_P, поэтому $\angle(L_P, L_{P+t}) \leqslant |K_P|$ по определению угла. Но множество K компактно и лежит в X_0, поэтому $|K_P| \underset{P\to\infty}{\to} 0$. Следовательно, и $\angle(L_P, L_{P+t})$ тоже стремится к нулю при $P \to \infty$. Осталось ещё раз применить принцип равномерной ограниченности, рассуждая как при завершении доказательства теоремы 1.2 $\square$.

Пример 4 и теорема 1.4 показывают, что условие медленного роста полугруппы Q_t в теореме 1.5 существенно уже в случае codim $X_0 = 2$. Однако для асимптотически *одномерных* полугрупп T_t можно не требовать ничего. В самом деле, как уже отмечено, отображение $Q_t : L \to L$ в представлениях (1) такой полугруппы есть умножение на число e^{ct}. Операторы $\psi_t := e^{-ct}T_t$ также образуют полугруппу, «гомотетичную» исходной и притом медленно растущую. Из теоремы 1.5 следует, что подпространство L почти стабилизируемо в полугруппе ψ_t, а, значит, и в полугруппе T_t (так как углы при гомотетии сохраняются). Если при этом полугруппа ψ_t неограничена (например, как в примере 5), то угол между прямой L_t и пространством X_0 стремится к нулю (прямая L_t «ложится» в X_0).

Заметим также, что если асимптотически конечномерная полугруппа медленно растет, но неограничена, то она не расщепляема, т.е. стабильных подпространств, дополняющих X_0, не существует. В самом деле, представление (1) такой полугруппы не может быть диагональным, ибо прямое произведение ограниченных полугрупп ограничено.

Дополнение: полнота системы d-мерных подпространств

Замечание 4 использует полноту множества $G(X, n)$ всех d-мерных подпространств пространства X, здесь мы докажем эту полноту.

Назовем множество $D \subset X$ d-мерным диском (или, короче, d-диском), если D — единичный шар в пространстве L для некоторого $L \in G(X, n)$.

Нетрудно заметить, что хаусдорфово расстояние (см. формулу (1) в главе 6) между двумя d-дисками D_1 и D_2 мало тогда и только тогда, когда раствор между соответствующими подпространствами L_1 и L_2 мал. В самом деле, легко видеть, что угол между L_1 и L_2 отличается от хаусдорфова расстояния между этими дисками не больше, чем в два раза.

Пространство $Exp(X)$ компактных подмножеств в X полно, так как полно само X (теорема Бляшке). Поэтому чтобы установить полноту множества $G(X,n)$, нам достаточно доказать замкнутость в $Exp(X)$ множества $D(d,X)$. То есть всё, что нам нужно — это установить, что если D_n — сходящаяся в метрике Хаусдорфа последовательность d-мерных дисков в пространстве X, то предел K этой последовательности тоже является d-мерным диском. Имеем:

$$x \in K \Leftrightarrow \exists x_n \in D_n \mid x_n \to x.$$

Ясно, что K — симметричное компактное выпуклое множество, содержащееся в единичном шаре пространства X. Чтобы установить, что это d-диск, надо убедиться в двух вещах. Во-первых, установить, что вместе с любым вектором $x \neq 0$ множество K содержит сонаправленный вектор единичной длины, то есть вектор $\frac{x}{|x|}$. И во-вторых, установить равенство $\dim \operatorname{Lin} K = d$ (здесь Lin означает линейную оболочку). Тогда ясно, что K будет d-мерным диском радиуса 1 в подпространстве $\operatorname{Lin} K$.

1. Пусть $x \in K$ и $x \neq 0$. Рассмотрим $x_n \in D_n$ такие, что $x_n \to x$ в X. Но тогда $\frac{x_n}{|x_n|} \in D_n$ и $\frac{x_n}{|x_n|} \to \frac{x}{|x|}$, поэтому $\frac{x}{|x|} \in K$.

2a. $\dim \operatorname{Lin} K \leqslant d$. Предположим, что не так, тогда в K найдутся $d+1$ линейно независимых векторов. Но свойство конечного набора векторов нормированного пространства X быть линейно независимыми, как нетрудно видеть, сохраняется при малых возмущениях этой системы.

Итак, если $x_1, \dots, x_{d+1} \in K$ линейно независимы, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что ε-шевеление этих векторов сохраняет независимость. Рассмотрим такой большой номер N, что в D_N есть элементы, ε — близкие к каждому из элементов $x_i, i = 1, \dots, d+1$. Но так как диск D_N всего лишь d-мерен, соответствующие элементы линейно зависимы. Противоречие. Итак, $\dim \operatorname{Lin} K \leqslant d$.

2b. $\dim \operatorname{Lin} K \geqslant d$. Предположим противное: $\dim \operatorname{Lin} K = m < d$.

Выберем в K линейно независимые векторы $e_1, \ldots, e_m$. Эти векторы образуют базис подпространства $\operatorname{Lin} K$. В силу эквивалентности норм существует такая константа $C < \infty$, что

$$\forall x = \sum_{i=1}^{m} t_i e_i \in K \; |t_1| + \ldots + |t_m| \leqslant C.$$

Существует такой большой номер N, для которого в D_N найдутся векторы $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m$, являющиеся $\frac{1}{3C}$-близкими к соответствующим векторам $e_1, \ldots, e_m$. Натянем на векторы $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m$ подпространство L.

Имеем, $\dim L \leqslant m < d$ и при этом каждый вектор $x = \sum_{i=1}^{m} t_i e_i$ из K является $\frac{1}{3}$-близким к вектору $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} t_i \tilde{e}_i \in L$, поскольку

$$|x - \tilde{x}| = |\sum_{i=1}^{m} t_i(e_i - \tilde{e}_i)| \leqslant \sum |t_i(e_i - \tilde{e}_i)| \leqslant (|t_1| + \ldots + |t_m|) \cdot \frac{1}{3C} \leqslant \frac{1}{3}$$

Но поскольку D_N — единичный диск d-мерного подпространства, а $d > m$, то, согласно лемме об ε-перпендикуляре, имеем: $\exists y \in D_N$ такой, что для каждого $\tilde{x} \in L$ выполнено $|y - \tilde{x}| > \frac{2}{3}$. Но тогда каждый элемент x множества K удалён от этого y не менее, чем на $1/3$, так как этот элемент x является $\frac{1}{3}$ близким к некоторому $\tilde{x} \in L$ и

$$|y - x| = |y - \tilde{x} + \tilde{x} - x| \geqslant |y - \tilde{x}| - |\tilde{x} - x| > \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Это противоречит тому, что y, будучи лежащим в D_N, близок к некоторому элементу K.

Итак, $\dim \operatorname{Lin} K = d$. Замкнутость множества d-дисков (а, значит, полнота множества $G(X, n)$ в угловой метрике) установлена.

Глава 2

К теоремам Ролевича и ван Нервена

Результаты этой главы опубликованы в работах [94] и [97].

C_0-полугруппа $T_t : X \to X$ называется равномерно экспоненциально устойчивой (РЭУ), или равномерно экспоненциально ограниченной, если нормы $\|T_t\|$ убывают к нулю при $t \to \infty$ (тогда убывание, очевидно, экспоненциальное).

В конечномерном случае это условие эквивалентно убыванию $|T_t x|$ к нулю при $t \to \infty$ для каждого $x \in X$. Стандартный бесконечномерный контрпример — полугруппа сдвигов, скажем, на пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$. Здесь $(T_t x)(s) = x(s+t)$ и $\|T_t\| = 1$ для каждого $t \geqslant 0$, но $X_0 = X$. Здесь $\|T_t\| \equiv 1$, но $|T_t x| \to 0$ для всех x, так как если $x \in L_2(\mathbb{R}_+)$, то

$$\|T_t x\|^2 = \int_0^\infty |(T_t x)(s)|^2\, ds = \int_t^\infty |x(s)|^2\, ds \to_{t\to\infty} 0.$$

Однако, отсутствие (РЭУ) у полугруппы влечет существование векторов, орбиты которых если и уходят в ноль, то «очень медленно», например, для каждой неубывающей положительной функции f существует $x \in X$ такой, что

$$\int_0^\infty f(|T_t(x)|) dt = \infty. \tag{1}$$

Датко получил этот результат в [3] для функции $f(z) = z^2$ и гильбертова X. (Это — аналог теоремы Ляпунова об устойчивости.) Паци обобщил этот результат в [4] для функций вида $f(z) = z^p$, $p \in [1, \infty)$. Зябчик в [5] показал, что если $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — выпуклая возрастающая функция, $\lim_{s\to 0} f(s) = 0$ и C_0-полугруппа T_t не РЭУ, то существует $x \in X$ такой, что для каждого $\alpha > 0$ $\int_0^\infty f(\alpha \cdot |T_t x|)dt = \infty$. Для непрерывных строго возрастающих функций соответствующий результат получил Литтман в [6].

Далецкий и Крейн в [7] исследовали связь скорости роста решений $x(t)$ как стационарной, так и нестационарной задач Коши с показателями роста эволюционного оператора $U(t, \tau) : X \to X$. Из их результата, в частности, следуют результаты Датко и Паци.

Ролевич в [8] обобщил результаты Далецкого — Крейна и Зябчика. Используя вспомогательный результат Далецкого и Крейна, он показал следующее. Пусть эволюционное семейство $U(t, s) : X \to X$, $t \geqslant s \geqslant 0$ равномерно ограничено, но не равномерно экспоненциально ограничено. Предположим, что $N(\alpha, u) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывно и функции $f_\alpha(u) := N(\alpha, u)$ являются правильными для каждого α. Тогда существует $x \in X$ такой, что для всех α $\sup\limits_{s<\infty} \int_0^\infty f_\alpha(|U(s + p, s)(x)|)dp = \infty$.

Теоремы типа Ролевича получены, например, в работах [9, 10].

В **первом параграфе** настоящей главы доказана **теорема 2.1**, являющаяся некоторым усилением теоремы Ролевича. Основным достижением этого параграфа автор диссертации считает не эти усиления, а идею короткого доказательства, заключающуюся в использовании леммы 2.1.1.

Во **втором параграфе** исследуются некоторые вопросы поведения полугруппы с точки зрения слабой топологии. Эти вопросы впервые появились и стали обсуждаться в [13, 14, 15]. Обзор этой темы можно найти в [16]. Вопрос, аналогичный формуле (1) для слабой топологии таков: когда можно утверждать, что для каждой неубывающей положительной функции h

$$\exists x \in X,\ x' \in X' \ \int_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)\,dt = \infty. \tag{2}$$

Одного только отсутствия РЭУ здесь не достаточно, как показывает ([51]; [52], пример 1.5) полугруппа сдвигов на $L^1(\mathbb{R}_+, e^t dt) \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Эта полугруппа не РЭУ, но слабо L^1-устойчива, то есть

$$\forall x \in X,\ x' \in X' \ \int_0^\infty |\langle x', T_t x\rangle|\,dt < \infty.$$

Геометрически это несколько неожиданно: некоторые орбиты «далеки» от нуля; в то же время все орбиты почти все время «сколь угодно близки» к каждой гиперплоскости $\ker x'$.

Для полугрупп определены *показатель равномерного роста* ω_0 и *показатель роста* ω_1. Пусть A — генератор полугруппы T_t, $D(A)$ — область определения A. Отображение $z(t) = T_t x$ задаёт решение абстрактной задачи Коши $\frac{dz}{dt} = Az,\ z(0) = x \in X$. Если начальные данные x принадлежат $D(A)$, то соответствующее отображение естественно называть классическим, или гладким, решением, а начальные данные x — гладким вектором. Параметры ω_0 и ω_1 ограничивают рост произвольных (и, соответственно, гладких), решений:

$$\omega_0(T) = \sup_{x\in X}\Big\{\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|T_t x|}{t}\Big\},\quad \omega_1(T) := \sup_{x\in D(A)}\Big\{\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|T_t x|}{t}\Big\}.$$

Ясно, что $\omega_1 \leqslant \omega_0$. Полугруппа является (РЭУ) тогда и только тогда, когда $\omega_0(T) < 0$. Если $\omega_1(T) < 0$, то говорят об *экспоненциальной устойчивости (ЭУ)*.

Заключение (2) было установлено, например, для ограниченных C_0-полугрупп, если отказать полугруппе не только в *РЭУ*, но и просто в *ЭУ*, см. [16], теоремы 4.6.3(i) и 4.6.4) и предложение 2 в § 2.2. ниже.

Пусть $s_0(A)$ — абсцисса равномерной ограниченности резольвенты A, т.е. нижняя граница таких $r \in \mathbb{R}$, для которых норма $\|(A - \lambda I)^{-1}\|$

равномерно ограничена в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant r$. Всегда $\omega_0 \geqslant s_0 \geqslant \omega_1$. Неравенства могут быть и строгими, см. примеры в параграфе 2.2.

Оказывается, условие (2) справедливо и для неограниченных полугрупп. Кроме того, условие «отсутствия ЭУ» ($\omega_1(T) \geqslant 0$) можно заменить более слабым условием неограниченности резольвенты в правой полуплоскости «$s_0(A) \geqslant 0$». Это легко вытекает из основной теоремы второго параграфа:

Теорема 2.2. *Пусть $T_t : X \to X$ — C_0-полугруппа, $s_0(A) \geqslant 0$. Для любых двух последовательностей ($0 < m_1 < m_2 < \cdots$) и ($0 < \gamma_k \to 0$) найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ и множества $U_k \subset \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$ такие, что*

$$\mu(U_k) \geqslant m_k, \quad \forall t \in U_k \quad |\langle x', T_t x\rangle| > \gamma_k.$$

Замечание. Фактически, доказательство теоремы 4.6.3 в [16] использует как раз s_0 вместо ω_1. Однако, предположение ограниченности полугруппы там существенно.

Можно ли в теореме 2.2 выбрать вектор x гладким? Ясно, что этого нельзя сделать, если, например, $\omega_1 < s_0 = 0$ — в этом случае полугруппа ЭУ, поэтому орбиты гладких векторов убывают слишком быстро. В **параграфе 2.3** мы показываем (**теорема 2.3**), что если нижняя граница спектра $s(A) \geqslant 0$ достигается, то в теореме 2.2 вектор x можно подобрать «бесконечно гладкий», т.е. принадлежащим областям определения A^n для каждого n.

Заметим, что теорема 2.3 кажется довольно естественной, если иметь в виду полугруппу сдвигов: ясно, что функция на $[0, \infty)$ может убывать сколь угодно медленно, и бесконечная дифференцируемость, как локальное явление, здесь не помеха.

2.1 Теорема Ролевича для эволюционных семейств операторов

Будем говорить, что функция $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *правильна,* если f не убывает.

Известно, что если C_0-полугруппа $\{T_t : X \to X\}$ не является экспоненциально ограниченной, т.е. $\|T_t\|$ не убывает экспоненциально при $t \to \infty$, то для каждой правильной функции f существует $x \in X$ такой, что $\int_0^\infty f(|T_t(x)|)dt = \infty$.

Датко получил этот результат в [3] для функции $f(z) = z^2$ и гильбертова X. (Тем самым он получил аналог теоремы Ляпунова об устойчивости.) Паци обобщил этот результат в [4] для функций вида z^p, $p \in [1, \infty)$. Для непрерывных строго монотонных правильных функций соответствующий результат получил Литтман в [6]. Зябчик в [5] получил следующий результат. Пусть $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ — выпуклая возрастающая функция, $\lim_{s \to 0} f(s) = 0$. Если C_0 — полугруппа T_t не является РЭУ, то существует $x \in X$ такой, что для любого числа $\alpha > 0$ $\int_0^\infty f(\alpha \cdot |T_t x|)dt = \infty$.

Далецкий и Крейн в [7] подробно исследовали связь скорости роста решений $x(t)$ стационарной и нестационарной задач Коши с показателями роста (обратимого) эволюционного оператора $U(t, \tau) : X \to X$. Опишем, что такое эволюционный оператор. Напомним сначала, что генератор полугруппы T_t — это такой (замкнутый) оператор $A : X \to X$, что решения задачи Коши

$$x'(t) = Ax(t), x(0) = x_0$$

имеют вид $x(t) = T_t x_0$. Символично можно записать $T_t = e^{tA}$.

Рассмотрим теперь нестационарную задачу Коши

$$x'(t) = A(t)x(t) \in X, x(\tau) = x_\tau.$$

Её решение можно записать так: $x(t) = U(t, \tau)x_\tau$, где $U(t, \tau) : X \to X$ — некоторые операторы, которые и называются эволюционным семейством операторов (или просто эволюционным оператором). Семейство $U(t, \tau)$ так же относится к «нестационарному генератору» $A(t)$, как полугруппа $T(t) : X \to X$ к генератору A. В стационарном случае $A(t) \equiv A$ эволюционный оператор можно символично записать в виде операторной экспоненты $U(t, \tau) = e^{(t-\tau)A}$ или $U(t, \tau) = T_{t-\tau}$ (при $t \geqslant \tau$). Этот частный случай соответствует полугруппе $T_t = U(t, 0)$ с генератором A.

Эволюционный оператор удовлетворяет свойствам

$$U(t, t) = Id,\ U(t, s) \circ U(s, \tau) = U(t, \tau).$$

Далецкий и Крейн приводят результат (гл. III, теорема 6.2 и замечание 6.2 к этой теореме), который в наших терминах формулируется так: если эволюционное семейство операторов не является равномерно экспоненциально ограниченным (т.е. величина $\sup_{s \geqslant 0} \|U(s+p, s)\|$ не является экспоненциально убывающей по p), то

$$\forall q \geqslant 1\ \exists x \in X \ \ | \ \ \sup_{s<\infty} \int_0^\infty |U(s+p, s)(x)|^q dp = \infty.$$

Заметим, что цитированные выше результаты Датко (1970 г.) и Пацци (1972 г.) являются частными случаями результата Далецкого и Крейна (1970).

Ролевич в [8] обобщил результаты Далецкого — Крейна и Зябчика. Существенно используя вспомогательный результат Далецкого и Крейна, (теорему 6.1 главы III), он показал следующее. Пусть эволюционное семейство $U(t, s) : X \to X$, $t \geqslant s \geqslant 0$ равномерно ограничено, но не является равномерно экспоненциально ограниченным. Предположим, что $N(\alpha, u) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывно и функции $f_\alpha(u) := N(\alpha, u)$ являются правильными для каждого α. Тогда существует $x \in X$ такой, что для всех α

$$\sup_{s<\infty} \int_0^\infty f_\alpha(|U(s+p, s)(x)|) dp = \infty. \tag{3}$$

(Результат Ролевича имеет несколько иную формулировку, однако нет проблемы заметить, что она эквивалентна данной.)

Упомянутый выше вспомогательный результат Далецкого и Крейна в нашей терминологии можно сформулировать так: если существуют числа $w > 0$, $q < 1$ такие, что для каждого $x \in X$ и для любого $t \geqslant 0$ в интервале $[0, w]$ найдется τ такое, что $|U(t+\tau, t)x| \leqslant q|x|$, то семейство операторов является равномерно экспоненциально ограниченным.

Основное содержание данного параграфа — элементарное и короткое доказательство теоремы, являющейся некоторым обобщением теоремы Ролевича:

Теорема 2.1. *Пусть $U(t, s)$ — эволюционное семейство операторов на банаховом пространстве X, являющееся равномерно ограниченным, но не являющееся равномерно экспоненциально ограниченным. Если $f_\alpha(u) = N(\alpha, u)$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ — непрерывное по α и правильное по u семейство функций, то найдётся $x \in X$ такой, что условие* (3) *выполнено для каждого $f \in \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}^m\}$.*

Заметим, что в [10] условие непрерывности по u также опускается.

Лемма 2.1.1. *Пусть $T_n : X \to X$ — линейные операторы на банаховом пространстве и $\|T_n\| \not\to 0$. Для каждой положительной последовательности $a_n \to 0$ существует x такой, что $\overline{\lim}\{\frac{|T_n(x)|}{a_n}\} = \infty$. Если f — правильная функция и $b_n \to \infty$, то найдется x такой, что*

$$\overline{\lim}\, b_n f(|T_n(x)|) = \infty.$$

Доказательство. Применим теорему Банаха — Штейнгауза к неограниченному семейству операторов $\{\frac{T_n}{a_n}\}$. Чтобы получить вторую часть леммы, заметим: для правильной f существует последовательность $a_n \to 0$ такая, что $f(a_n) \geqslant (b_n)^{-\frac{1}{2}}$ при больших n. Далее, если $|T_{n_k}(x)| \geqslant a_{n_k}$, то

$$b_{n_k} \cdot f(|T_{n_k}(x)|) \geqslant b_{n_k} \cdot f(a_{n_k}) \geqslant \sqrt{b}_{n_k} \to \infty. \ \square$$

Лемма 2.1.2. *Если $f_\alpha(u) = N(\alpha, u)$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ непрерывна по α и правильна по u, то найдётся правильная f такая, что $f(u) \leqslant f_\alpha(u)$ при $u \to 0$ для каждого $\alpha \in \mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Исчерпаем $\mathbb{R}^m$ какими-нибудь компактами $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ и положим $f_n = \inf\{f_\alpha \mid \alpha \in K_n\}$. Функции f_n правильны и $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots$. Теперь для $u \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ положим $f(u) = f_n(u)$.□

Доказательство теоремы 2.1. Возьмём f как в лемме 2.1.2. Условие (3), будучи выполненным для f, выполняется, очевидно, и для каждой функции f_α, $\alpha \in \mathbb{R}^m$.

Заметим, что

$$\sup_{s \geqslant 0}\{\|U(p+s,s)\|\} = \lambda_p \geqslant 1$$

для всех $p \geqslant 0$. В самом деле, если бы $\lambda_p < 1$, то семейство $\{U\}$ было бы экспоненциально ограниченным, так как

$$\|U(pn+s,s)\| \leqslant \|U(pn+s,p(n-1)+s) \circ \cdots \circ U(p+s,s)\| \leqslant \lambda_p^n$$

и $\|U(t+s,s)\| \underset{t\to\infty}{=} O(e^{\frac{\ln \lambda_p}{p}t})$. В частности, найдётся последовательность s_n такая, что

$$\|U(n+s_n,s_n)\| \not\to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Положим $c = \sup\{\|U\|\}$. Используя закон композиции эволюционного семейства, видим, что если $n \geqslant p$, то для каждого s $\|U(n+s,s)\| \leqslant c\|U(p+s,s)\|$. Тогда

$$\forall n \geqslant p \quad |U(p+s,s)(x)| \geqslant |U(n+s,s)\left(\frac{x}{c}\right)|$$

и

$$\int_0^\infty f\Big(|U(p+s_n,s_n)(x)|\Big)dp \geqslant \int_0^n f\Big(|U(p+s_n,s_n)(x)|\Big)dp \geqslant$$
$$\geqslant n \cdot f\left(\left|U(n+s_n,s_n)\left(\frac{x}{c}\right)\right|\right).$$

Согласно лемме 2.1.1 правая часть неравенства неограничена для некоторого x. Теорема доказана.

Замечание 1. Лемма 2.1.1 использует лишь принцип равномерной ограниченности, поэтому теорема 2.1 справедлива и для нормированных бочечных пространств, а также для пространств Фреше (если мы вместо $|x|$ будем рассматривать величину $\rho(0,x)$). Кроме того, мы можем заменить $\mathbb{R}^m$ на произвольное σ-компактное топологическое пространство Y.

Замечание 2. Мюллер в [62] показал, что если спектральный радиус оператора T равен 1, то для любой последовательности чисел $1 > a_n$ стремящейся к нулю существует вектор $y \in X$, для которого, начиная с некоторого $n \geqslant k$, будет выполнено $|T^n y| \geqslant a_n$. Ван Нервен [63] показал, что можно выбрать y так, чтобы эти неравенства выполнялись для всех $n \geqslant 0$. Использовав это в [64], ван Нервен обобщил теорему Датко — Паци в другом направлении, заменив интеграл $\int$ более общим функционалом. Как мы видим, для теоремы оказалось применимым и более слабое по сути элементарное заключение леммы 2.1.1.

В следующем предложении полугруппа может быть неограниченной.

Предложение 1. *Предположим, что полугруппа не является равномерно экспоненциально устойчивой, то есть* $\forall t \geqslant 0$ $\|T_t\| \geqslant 1$. *Тогда для каждой неубывающей функции* $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *(«хорошей» функции) существует* $x \in X$ *такой, что*

$$\int_0^\infty h(|T_t x|)dt = \infty.$$

Более того, если полугруппа T_t *неограничена, то для некоторых* $x \in X$ $|T_t x| > 1$ *для* t *из множества бесконечной меры.*

Существуют разные доказательства подобных теорем, восходящих к [3, 4, 8]. В доказательстве ниже первая часть принадлежит автору (фактически, это — основная идея доказательства теоремы 2.1), вторая часть аналогична началу доказательства теоремы 3.2.2 в [16].

Доказательство предложения 1. Для ограниченной C_0-полугруппы справедлива следующая «оценка назад»:

$$\text{Пусть } C = \sup_{t>0}\{\|T_t\|\}. \text{ Тогда } \forall t_0\ \forall t \in [0,t_0],\ \forall x \in X\ |T_t x| \geqslant \frac{|T_{t_0} x|}{C} \quad (*)$$

Пусть числа $\alpha_n \to 0$ убывают так медленно, что $n \cdot h(\alpha_n) \to \infty$. Имеем: $\lim \frac{\|T_n\|}{\alpha_n} = \infty$. Используя принцип равномерной ограниченности, найдем $x \in X$, такой, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|T_n x|}{\alpha_n} \geqslant C.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty h(|T_t x|)dt = \sup_n \int\limits_0^n h(|T_t x|)dt \overset{(*)}{\geqslant} \sup_n \int\limits_0^n h\left(\frac{|T_n x|}{C}\right) dt \geqslant \sup_n n \cdot h(\alpha_n) = \infty.$$

Пусть теперь C_0-полугруппа T_t неограничена. Теперь справедлив более слабый аналог формулы $(*)$ — «оценка назад на конечное время». Например:

$$\text{Если } \ C = \sup_{t\in[0,1]} \{\|T_t\|\}, \text{ то } \ \forall t_0 \ \forall t \in [t_0 - 1, t_0], \ \forall x \in X \ |T_t x| \geqslant \frac{|T_{t_0} x|}{C} \quad (**)$$

Оценка $(**)$ хуже оценки $(*)$. Зато, согласно принципу равномерной ограниченности, для неограниченной полугруппы найдется $x \in X$, орбита которого $T_t x$ не стремится к нулю. Пусть $|T_{n_k} x| > C$, $n_k \to \infty$. Из $(**)$ следует, что $|T_t x| > 1$ при $t \in \cup_{k=1}^\infty [n_k - 1, n_k]$.$\Box$

2.2 Препятствия к равномерной устойчивости C_0-полугруппы

C_0-полугруппа $T_t : X \to X$ является равномерно экспоненциально устойчивой (РЭУ), если $|T_t x|$ убывает экспоненциально по t для всех $x \in X$. Используя принцип равномерной ограниченности, нетрудно показать, что это условие равносильно тому, что $\|T_t\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Предложение 1 в конце предыдущего параграфа — типичный пример отсутствия оценки сверху на скорость убывания «в интегральном смысле». Вопрос, аналогичный заключению предложения 1 для слабой топологии таков: при каких предположениях о полугруппе можно утверждать, что для каждой хорошей функции h

$$\exists x \in X,\ x' \in X' \ \int_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)\, dt = \infty. \qquad (4)$$

Проблемы, касающиеся плохого приближения орбит к нулю в слабой топологии пространства X, впервые появились и стали обсуждаться в [13, 14, 15]. Обзор этой темы можно найти в [16].

Одно только отсутствие РЭУ не влечет существование «плохих» x и x', как в условии (4). Это показывает **пример 3** ниже полугруппы сдвигов на $L^1(\mathbb{R}_+, e^t dt) \cap L^p(\mathbb{R}_+)$. Эта полугруппа не РЭУ, но в то же время слабо L^1-устойчива, т.е.

$$\forall x \in X,\ x' \in X' \ \int_0^\infty |\langle x', T_t x\rangle|\, dt < \infty.$$

Геометрически пример выглядит довольно неожиданным: некоторые орбиты «далеки» от нуля; в то же время орбита каждого вектора x проводит почти все время «сколь угодно близко» к каждой гиперплоскости $(\ker x')$.

Известно, что заключение (4) имеет место, например, для ограниченных C_0-полугрупп, если потребовать отсутствие не только *равномерной экспоненциальной устойчивости*, но и просто *экспоненциальной устойчивости:*

Предложение 2 *(см. [16], теоремы 4.6.3(i) и 4.6.4). Если ограниченная C_0-полугруппа $T_t : X \to X$ не является экспоненциально устойчивой, то выполнены следующие утверждения:*

1) для каждой «хорошей» функции $h > 0$ существуют $x \in X$ и $x' \in X'$ такие, что $\int_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)dt = \infty$;

2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $m > 0$ найдутся единичные $x \in X$ и $x' \in X'$ такие, что $m < mes\{t \mid |\langle x', T_t x\rangle| \geqslant \varepsilon\}$.

Основной результат настоящего параграфа — **теорема 2.2**. Из неё, в частности, следует, что условие ограниченности полугруппы в предложении 2 несущественно.

Теорема 2.2. *Пусть A — генератор C_0-полугруппы $T_t : X \to X$ и $s_0(A) \geqslant 0$, где s_0 — абсцисса равномерной ограниченности резольвенты A. Для любых последовательностей $(0 < m_1 < m_2 < \cdots)$ и $(0 < \gamma_k \to 0)$ найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ и семейство множеств $U_k \subset \mathbb{R}_+$ таких, что*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \mu(U_k) \geqslant m_k,\ \forall t \in U_k \quad |\langle x', T_t x\rangle| > \gamma_k.$$

В п. 2.2.1 мы опишем и кратко обсудим асимптотические характеристики полугруппы и некоторые примеры. Пункт 2.2.2 — доказательство основного результата. В пункте 2.2.3 мы покажем, что при несколько более сильных спектральных ограничениях, чем в теореме 2.2, вектор x может быть выбран «бесконечно гладким».

2.2.1 Асимптотические параметры полугруппы и основные результаты

Напомним, что показатель ω_0 равномерного роста полугруппы и, соответственно, показатель ω_1 роста полугруппы — это числа

$$\omega_0(T) = \sup_{x\in X}\left\{\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|T_t x|}{t}\right\}, \quad \omega_1(T) := \sup_{x\in D(A)}\left\{\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|T_t x|}{t}\right\}.$$

Здесь A — генератор полугруппы, $D(A)$ — область определения A. Эти величины оценивают рост решений $z(t) = T_t x$ абстрактной задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = Az,\ z(0) = x \in X.$$

Величина ω_0 оценивает рост решений с произвольными начальными данными $x \in X$, а величина ω_1 — рост «гладких» решений, т.е. решений с «гладкими» начальными данными $x \in D(A)$.

Ясно, что $\omega_1 \leqslant \omega_0$. Легко видеть, что полугруппа равномерно экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда $\omega_0(T) < 0$. Если

$\omega_1(T) < 0$, то полугруппа называется просто экспоненциально устойчивой (ЭУ).

Полугруппа сдвигов, упомянутая в начале параграфа после формулы (4), см. пример 3 ниже, имеет показатели роста $\omega_1 < 0 = \omega_0$, поэтому она хоть и не *равномерно*, но все же *экспоненциально устойчива*.

Предложение 2, сформулированное выше, «спасает» для слабой топологии предложение 1 из прошлого параграфа, если потребовать, чтобы полугруппа была не только не РЭУ, но даже не ЭУ.

Введём еще две спектральные характеристики, между которыми «зажат» рост ω_1 полугруппы. Это — правая граница $s(A)$ спектра A и абсцисса равномерной ограниченности $s_0(A)$ резольвенты A.

Имеют место неравенства: $\begin{array}{ccc} \omega_1 & \leftarrow & \omega_0 \\ \downarrow & \nwarrow & \downarrow \\ s & \leftarrow & s_0 \end{array}$ (здесь «$\leftarrow$» означает «$\leqslant$»).

Если пространство X гильбертово, то $s_0 = \omega_0$ ([65]). Для положительных полугрупп $s = \omega_1 = s_0$; более того, s достигается на некотором элементе спектра $\sigma(A)$, т.е. существует $\lambda \in \sigma(A)$, $\mathrm{Re}(\lambda) = s$ ([51, 66, 67]).

В то же время для каждой стрелки в квадратной диаграмме выше существует пример строгого неравенства. Упомянем кратко некоторые работы с соответствующими примерами.

Пример 0 (Фойяш [68]): X гильбертово, $\mathbf{-2 = s < s_0 = \omega_0 = 0}$. Этот пример почти неизвестен, однако, по-видимому исторически первый. В качестве первого примера в основном ссылаются на следующую работу Зябчика [69]. Заметим, что сам Зябчик в [69] на Фойаша ссылается.

Пример 1 ([69]): $s < \omega_1 = \omega_0$; s достигается и $\|T_t\| = e^{t\omega_0}$. Если нормировать эту полугруппу так, чтобы $\mathbf{s = -1}$, $\boldsymbol{\omega_1} = \mathbf{s_0} = \boldsymbol{\omega_0} = \mathbf{0}$, $\|T_t\| = 1$ для всех t, то, будет выполнено асимптотическое соотношение ([70]): $|T_t x| = O(1/t)$ для всех $x \in D(A^{1+\varepsilon})$ $\forall \varepsilon > 0$.

Пример 2 ([71]; основан на примере 1): $\mathbf{s} < \boldsymbol{\omega_1} < \mathbf{s_0} = \boldsymbol{\omega_0}$. Таким образом, полугруппа может экспоненциально расти, а на $D(A)$ экспоненциально убывать. Кроме этого, $\omega_n = 2^{-n}$, где ω_n — рост полугруппы на

$D(A^n)$.

Пример 3. (см. [51]; [52], пример 1.5). Пусть $T_t : X \to X$ — полугруппа сдвигов на $X = L^1(R_+, e^t dt) \cap L^p(R_+)$. Эта полугруппа положительна, $\mathbf{s} = \omega_\mathbf{1} = \mathbf{s_0} < \mathbf{0} = \omega_\mathbf{0}$. Таким образом, она (ЭУ), но не (РЭУ). Более интересно то, что она даже слабо L^1-устойчива, т.е. $\forall x \in X,\ x' \in X'$ $\int_0^\infty |\langle x', T_t x\rangle|\, dt < \infty$. Этот пример показывает, что прямое слабое обобщение предложения 1 предыдущего параграфа не имеет места.

Оказывается, заключение предложения 2 справедливо и для неограниченных полугрупп, а условие «не ЭУ» ($\omega_1(T) \geqslant 0$) можно заменить более слабым условием «$s_0(A) \geqslant 0$». Это следует из основного результата данного параграфа:

Теорема 2.2. *Пусть A — генератор C_0-полугруппы $T_t : X \to X$ и $s_0(A) \geqslant 0$. Для любых двух последовательностей $0 < m_1 < m_2 < \cdots$ и $\gamma_k > 0$, $\gamma_k \to 0$ найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ и семейство множеств $U_k \subset \mathbb{R}_+$ таких, что*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \mu(U_k) \geqslant m_k,\ \forall t \in U_k \quad |\langle x', T_t x\rangle| > \gamma_k.$$

Чтобы из теоремы 2.2 вывести первую часть предложения 2, достаточно для функции h подобрать числа m_k растущими столь быстро, чтобы $m_k \cdot h(\gamma_k) \to \infty$, тогда интеграл в предложении 2 расходится (ср. с доказательством предложения 1 в §2.1). Вторая часть предложения 1 следует уже из вспомогательной леммы 2.2.1 ниже.

Замечание. Фактически, доказательство теоремы 4.6.3 в [16] использует как раз s_0 вместо ω_1. Однако, предположение ограниченности полугруппы там существенно (доказательство в [16] основано на технике перестановочно инвариантных функциональных пространств). Доказательство нашей теоремы 2.2 потребует несколько как идейных, так и технических приемов, которые были бы излишними в предположении ограниченности полугруппы. Оно занимает следующие восемь страниц.

2.2.2 Доказательство теоремы 2.2

В основе доказательства теоремы 2.2 лежит следующая лемма.

Лемма 2.2.1. *Пусть* $s_0(A) = 0$. *Тогда для каждого положительного числа* δ *и конечного времени* t_0 *найдутся* $\beta = \beta(\delta, t_0) \in \mathbb{R}$ *и вектор* $y \in D(A)$ *такие, что* $|y| = 1$, $|Ay| \approx |\beta|$ *и* $|T_t y - e^{i\beta t} y| < \delta$ *для всех* $t \in [0, t_0]$. *Более того, такой* y *можно выбрать в* $D(A^\infty) = \cap_n D(A^n)$.

Замечание. Геометрически лемма 2.2.1 означает, что существует вектор y, такой, что вектор $T_t y$ долгое время не отходит от (комплексной) прямой $\mathbb{C}y$ (при этом этот вектор «крутится» с угловой скоростью β в соответствующей вещественной плоскости). В то же время заключение 2) предложения 2 означает всего лишь, что существует вектор, в течение долгого времени находящийся далеко от какой-то гиперплоскости вида $\ker\, x'$. Таким образом, ясно, что заключение 2), доказанное, кстати в [16] с использованием заключения 1) того же предложения, следует уже из леммы 2.2.1.

Доказательство леммы 2.2.1. Заметим: если A — генератор полугруппы T_t, то

$$\forall x \in D(A)\ \forall t > 0, \beta \in \mathbb{R} \ \ |T_t x - e^{i\beta t} x| \leqslant t \cdot \sup_{s \in [0,t]} \|T_s\| \cdot |(A - i\beta)x|. \tag{5}$$

В самом деле, оператор $(A - i\beta)$ служит генератором полугруппы $e^{-i\beta t} T_t$, поэтому

$$|T_t x - e^{i\beta t} x| = |e^{-i\beta t} T_t x - x| \leqslant \int_0^t |T_s (A - i\beta) x| ds.$$

Остальное очевидно и формула (5) установлена.

Поскольку $s_0(A) = 0$, резольвента $(A - \lambda)^{-1}$ оператора A неограничена вблизи мнимой оси. Выберем

$$\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n \in \mathbb{C}, \quad \alpha_n \to 0, \quad \|(\lambda_n - A)^{-1}\| \to \infty.$$

Найдутся векторы $y_n \in D(A)$ такие, что $|y_n| = 1$, но $(A - \lambda_n)y_n \to 0$. В частности, $(A - i\beta_n)y_n \to 0$. Возьмем такое большое n, чтобы

$$|(A - i\beta_n)y_n| < \frac{\delta}{t_0 \cdot \sup_{s\in[0,t]} \|T_s\|}.$$

Множество $D(A^\infty)$ плотно в $D(A)$ в норме графика ([66], 1.9(iii)), поэтому вектор $y = y_n$ можно выбрать и в $D(A^\infty)$. Осталось применить формулы (5).$\square$

Доказательство теоремы 2.2. Ясно, что если найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ и $\delta > 0$ такие, что $mes\{t > 0 \mid |\langle x', T_t x\rangle| > \delta\} = \infty$, то доказывать нечего. Поэтому можно, в частности, предполагать с самого начала, что

$$\forall x \in D(A^\infty)\ \forall x' \in X'\ \forall \delta > 0\ \ mes\{t > 0 \mid |\langle x', T_t x\rangle| > \delta\} < \infty. \qquad (6)$$

Предположим, что X сепарабельно, это позволит нам использовать секвенциальную компактность единичного шара пространства X' в $*$-слабой топологии. Общность это также не ограничивает: нетрудно заметить, что в общем случае можно применить теорему 2.2 к подходящему сепарабельному подпространству $X_s \subset X$, инвариантному относительно действия полугруппы, а потом продлить соответствующий функционал $x'_s \in (X_s)'$, пользуясь теоремой Хана — Банаха, до функционала x' на всем X.

Заметим наконец, что теорему достаточно доказать хотя бы для одной фиксированной последовательности $\gamma'_k \to 0$. (Поясним, почему и это не ограничивает общность. Пусть дана произвольная последовательность m_k и $\gamma_k \to 0$. Можно предполагать, что $\gamma_k < \gamma'_1$ для всех k. Введем число m'_k, положив

$$n(k) = \max\{n \mid \gamma_n \geqslant \gamma'_k\}, \quad m'_k = m_1 + \cdots + m_{n(k)}.$$

Легко видеть, что x, x', удовлетворяющие теореме 2.2 для m'_k и γ'_k, будут удовлетворять теореме 2.2 и для исходных m_k, γ_k.)

Мы будем доказывать теорему для последовательности $\gamma_k = \frac{5}{10^{2^k-1}}$.

Следуя лемме 2.2.1, выберем такую последовательность $y_n \in D^\infty(A)$, что $|y_n| = 1$ и

$$|T_t y_n - e^{i\beta_n t} y_n| \leqslant \frac{1}{10}$$

для некоторого $\beta_n \in \mathbb{R}$ и всех $t \in [0, n]$.

Для каждого y_n выберем какой-нибудь двойственный функционал

$$y'_n \in X', \quad |y'_n| = \langle y'_n, y_n \rangle = 1.$$

Последовательность y'_n содержит подпоследовательность, $*$-слабо сходящуюся к какому-то $y' \in X'$. (В этом месте мы используем предположение о сепарабельности X, см. рассуждения после формулы (6)). Можно считать, что уже $y'_n \xrightarrow{\sigma^*} y'$. Легко видеть, что

$$\forall t \in [0, n] \ \frac{9}{10} < |T_t y_n| < \frac{11}{10}, \ \frac{9}{10} < |\langle y'_n, T_t y_n \rangle| < \frac{11}{10}. \tag{7}$$

Наша цель — построить x и x', как пределы x_k и x'_k,

$$x_k = \sum_{l=1}^{k} \frac{\pm y_{n_l}}{10^{2^{l-1}-1}}, \ x'_k = \sum_{l=1}^{k} \frac{\pm y'_{n_l}}{10^{2^{l-1}-1}},$$

где номера n_l и знаки $\pm$ нам предстоит найти.

Построение вектора x_1. Пусть $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant m_1$. Положим

$$U_1 = [0, n_1], \quad x'_1 := y'_{n_1}, \quad x_1 := y_{n_1}.$$

Тогда

$$\forall t \in U_1 \ |\langle x'_1, T_t x_1 \rangle| > \frac{9}{10}. \tag{8}$$

Построение вектора x_2. Предположение, выражаемое формулой (6), позволяет выбрать достаточно большое, но компактное множество $\tilde{U}_2$, такое, что $\mu(\tilde{U}_2) \geqslant 4m_2$ и

$$\forall t \in \tilde{U}_2 \ |\langle y', T_t x_1 \rangle| < 1. \tag{9}$$

Выберем номер $n_2 \geqslant n_1$ настолько большой, чтобы $\tilde{U}_2 \subset [0, n_2]$.

Положим

$$x_2 = x_1 \pm \frac{y_{n_2}}{10}, \quad x_2' = x_1' \pm \frac{y_{n_2}'}{10}.$$

Какую пару знаков $\pm$ из четырех возможных пар выбрать, мы решим позже. Пока наша задача — показать, что

$$\forall t \in U_1 \ |\langle x_2', T_t x_2 \rangle| > \frac{9}{10} - \frac{3}{10}. \tag{10}$$

Имеем:

$$\langle x_2', T_t x_2 \rangle = \langle x_1', T_t x_1 \rangle \pm \langle x_1', \ \frac{T_t y_{n_2}}{10} \rangle \pm \langle \frac{y_{n_2}'}{10}, T_t x_2 \rangle$$

для всех t. Поэтому

$$|\langle x_2', T_t x_2 \rangle| \geqslant |\langle x_1', T_t x_1 \rangle| - \frac{S_1(t)}{10}, \quad S_1(t) = \left(|\langle x_1', T_t y_{n_2} \rangle| + |\langle y_{n_2}', T_t x_2 \rangle| \right). \tag{11}$$

Если $t \in U_1$, то $S_1(t) < 3$. В самом деле, при каждом $t \in U_1$ справедлива оценка сверху $|\langle x_1', T_t y_{n_2} \rangle| \leqslant |T_t y_{n_2}| \leqslant \frac{11}{10}$ и

$$|\langle y_{n_2}', T_t x_2 \rangle| \leqslant |T_t x_2| = |T_t(y_1 \pm \frac{y_{n_2}}{10})| \leqslant \frac{11}{10} + \frac{11}{10^2}.$$

Вспоминая (8), получаем (10).

При $t \notin U_1$ формула (11) бесполезна для оценки снизу числа $|\langle x_2', T_t x_2 \rangle|$ хотя бы потому, что мы не можем оценить снизу уменьшаемое $|\langle x_1', T_t x_1 \rangle|$. Поэтому воспользуемся другим приемом (назовем этот прием «деление на четыре»). Заметим, что

$$2\frac{y_{n_2}'}{10} = (x_1' + \frac{y_{n_2}'}{10}) - (x_1' - \frac{y_{n_2}'}{10}), \text{ и аналогично } 2\frac{y_{n_2}}{10} = (x_1 + \frac{y_{n_2}}{10}) - (x_1 - \frac{y_{n_2}}{10}).$$

Значит, каково бы ни было t, выполнено

$$4\left|\left\langle \frac{y_{n_2}'}{10}, T_t \frac{y_{n_2}}{10} \right\rangle\right| \leqslant \sum_{\pm \in \{+,-\}} \left|\left\langle (x_1' \pm \frac{y_{n_2}'}{10}), T_t(x_1 \pm \frac{y_{n_2}}{10}) \right\rangle\right|,$$

и для каждого $t \in \tilde{U}_2$ по крайней мере одно из четырех слагаемых правой части не меньше числа $\frac{1}{10^2}|\langle y'_{n_2}, T_t y_{n_2}\rangle|$. В то же время, согласно оценкам (7), для всех $t \in \tilde{U}_2 \subset [0, n_2]$ имеет место оценка снизу $|\langle y'_{n_2}, T_t y_{n_2}\rangle| > \frac{9}{10}$. Поэтому можно выбрать подмножество $U_2 \subset \tilde{U}_2$ таким образом, чтобы его мера была не меньше четверти меры $\tilde{U}_2$, то есть $\mu(U_2) \geqslant \frac{1}{4}\mu(\tilde{U}_2) \geqslant m_2$ и для некоторой пары знаков $\pm$ (для определенности можно считать, что это будет «++») выполнено

$$\forall t \in U_2 \ \left|\langle (x'_1 + \frac{y'_{n_2}}{10}), T_t(x_1 + \frac{y_{n_2}}{10})\rangle\right| = |\langle x'_2, T_t x_2\rangle| > \frac{9}{10^3}. \tag{12}$$

Построение вектора x_3. Пусть компактное множество $\tilde{U}_3$ таково, что

$$\mu(\tilde{U}_3) \geqslant 4m_3, \quad \forall t \in \tilde{U}_3 \ \ |\langle y', T_t x_2\rangle| < 1.$$

Вернемся на время к множеству U_2. Из формулы (9), компактности множества $\{T_t x \mid t \in \tilde{U}_2\} \subset X$ и того, что последовательность функционалов y'_n сходится к функционалу y' в σ^*-топологии, следует, что

$$\exists n_3 \geqslant n_2 \mid \tilde{U}_3 \subset [0, n_3], \ \forall n \geqslant n_3, \forall t \in U_2 \ |\langle y'_n, T_t x_1\rangle| < 1. \tag{13}$$

Положим

$$x_3 = x_2 \pm \frac{y_{n_3}}{10^3}, \quad x'_3 = x'_2 \pm \frac{y'_{n_3}}{10^3}.$$

Пару знаков $\pm$ выберем позже, а пока, рассуждая так же, как при выводе неравенства (11), получаем:

$$\forall t \ |\langle x'_3, T_t x_3\rangle| \geqslant |\langle x'_2, T_t x_2\rangle| - \frac{S_2(t)}{10^3},$$

$$S_2(t) = |\langle x'_2, T_t y_{n_3}\rangle| + |\langle y'_{n_3}, T_t x_3\rangle|. \tag{14}$$

Покажем, что $\forall t \in U_1 \cup U_2 \ S_2(t) < 3$. Ясно, что $|x'_2| \leqslant \frac{11}{10}$. Рассуждая так же, как при оценке $S_1(t)$, получаем:

$$\forall t \in U_1 \ S_2(t) \leqslant \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{11}{10} + \frac{11}{10^2} + \frac{11}{10^4}\right) < 3.$$

Если $t \in U_2$, то нужны чуть более сложные рассуждения. Первое слагаемое числа $S_2(t)$ оценивается по-старому: если $t \in U_2 \subset [0, n_3]$, то $|T_t y_{n_3}| \leqslant \frac{11}{10}$ и $|\langle x_2', T_t y_{n_3}\rangle| \leqslant (\frac{11}{10})^2$. Рассмотрим слагаемое $|\langle y_{n_3}', T_t x_3\rangle|$. Вспомним, что

$$T_t x_3 = \left(T_t x_1 + \frac{T_t y_{n_2}}{10} \pm \frac{T_t y_{n_3}}{10^3}\right).$$

Норма суммы двух последних слагаемых $|\frac{T_t y_{n_2}}{10} \pm \frac{T_t y_{n_3}}{10^3}|$ при $t \in U_2$ меньше, чем $\frac{11}{10^2} + \frac{11}{10^4}$.

Все могло бы испортить первое слагаемое — вектор $T_t x_1 = T_t y_{n_1}$, который при $t \in U_2$ a priori может стать длинным. Но в силу неравенств (13) значение функционала y_{n_3}' на этом векторе при $t \in U_2$ не превосходит числа 1. Следовательно,

$$\forall t \in U_2 \ \ \left|\langle y_{n_3}', T_t x_3\rangle\right| \leqslant \left(1 + \frac{11}{10^2} + \frac{11}{10^4}\right).$$

Итак,

$$\forall t \in U_2 \ S_2(t) < \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(1 + \frac{11}{10^2} + \frac{11}{10^4}\right) < 3.$$

Теперь из (14), (10), (12) следует, что

$$\forall t \in U_1 \ |\langle x_3', T_t x_3\rangle| > \frac{9}{10} - \frac{3}{10} - \frac{3}{10^3},$$

$$\forall t \in U_2 \ |\langle x_3', T_t x_3\rangle| > \frac{9}{10^3} - \frac{3}{10^3}.$$

Наконец, выберем пару знаков «$\pm$» и множество $U_3 \subset \tilde{U}_3$, $\mu(U_3) \geqslant m_3$ с помощью приема «деления на 4». Имеем:

$$\forall t \in U_3 \ |\langle x_3', T_t x_3\rangle| > \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10^3}\right)^2 = \frac{9}{10^7}.$$

Заметим, что построить вектор x_1 было совсем просто. На втором шаге нам понадобился прием «деления на 4». На шаге 3 новым было использование формулы (13), причем заготовку для нее (формулу (9)) пришлось сделать в самом начале шага 2. Следующие шаги принципиально от шага 3 не отличаются.

Построение вектора x_l, $l \geqslant 3$. Предположим, что мы уже построили множества $U_1, \ldots, U_l$, числа $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_l$, векторы $x_1, \ldots, x_l$ вида

$$x_l = \sum_{i=1}^{l} \pm \frac{y_{n_i}}{10^{2^{i-1}-1}}$$

и функционалы $x'_1, \ldots, x'_l$ аналогичного вида

$$x'_l = \sum_{i=1}^{l} \pm \frac{y'_{n_i}}{10^{2^{i-1}-1}},$$

такие, что выполнены следующие пять свойств:

$1_l\Big)$	$U_i \subset [0, n_i], \mu(U_i) \geqslant m_i,$	$i = 1, 2, \ldots, l;$
$2_l\Big)$	$\forall t \in U_i \ \lvert\langle y', T_t x_{i-1}\rangle\rvert < 1,$	$i = 2, \ldots, l;$
$3_l\Big)$	$\forall t \in U_i \ \forall n \geqslant n_{i+1} \ \lvert\langle y'_n, T_t x_{i-1}\rangle\rvert < 1,$	$i = 2, \ldots, l-1;$
$4_l\Big)$	$\forall t \in U_i \ \lvert\langle x'_l, T_t x_l\rangle\rvert \geqslant \frac{9}{10^{2^i-1}} - 3\sum_{j=i}^{l-1} \frac{1}{10^{2^j-1}},$	$i = 1, \ldots, l-1;$
$5_l\Big)$	$\forall t \in U_l \ \lvert\langle x'_l, T_t x_l\rangle\rvert \geqslant \frac{9}{10^{2^l-1}}.$	

Построим множество U_{l+1}, число n_{l+1}, вектор x_{l+1} и соответствующий функционал x'_{l+1} так, чтобы свойства $1_{l+1}) - 5_{l+1})$ тоже выполнялись.

Выберем компактное множество $\tilde{U}_{l+1}$ такое, что $\mu(\tilde{U}_{l+1}) \geqslant 4m_{l+1}$ и такое, что

$$\forall t \in \tilde{U}_{l+1} \ |\langle y', T_t x_l \rangle| < 1.$$

Возможность этого выбора следует из формулы (6).

Пусть $n_{l+1} \geqslant n_l$ такой, что

$$\tilde{U}_{l+1} \subset [0, n_{l+1}], \quad \forall n \geqslant n_{l+1} \ \forall t \in U_l \ |\langle y'_n, T_t x_{l-1} \rangle| < 1.$$

Такой n_{l+1} найдется в силу условия 2_l), см. рассуждения перед формулой (13). Получилось условие 3_{l+1}).

Положим

$$x_{l+1} = x_l \pm \frac{y_{n_{l+1}}}{10^{2^l - 1}}, \quad x'_{l+1} = x'_l \pm \frac{y'_{n_{l+1}}}{10^{2^l - 1}}.$$

Выберем пару знаков $\pm$ и множество $U_{l+1} \subset \tilde{U}_{l+1}$ с помощью приема «деление на 4», описанного выше формулы (12). Таким образом, условия 1_{l+1}, 2_{l+1} будут выполняться вместе с условием 5_{l+1}:

$$\forall t \in U_{l+1} \ |\langle x'_{l+1}, T_t x_{l+1} \rangle| \geqslant \left| \langle \frac{y'_{n_{l+1}}}{10^{2^l - 1}}, \frac{T_t y_{n_{l+1}}}{10^{2^l - 1}} \rangle \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10^{2^l - 1}} \right)^2 = \frac{9}{10^{2^{l+1} - 1}}.$$

Проверим, наконец, условие 4_{l+1}. Для каждого t выполнено

$$|\langle x'_{l+1}, T_t x_{l+1} \rangle| \geqslant |\langle x'_l, T_t x_l \rangle| - \frac{S_l(t)}{10^{2^l - 1}},$$

$$(S_l(t) = |\langle x'_l, T_t y_{n_{l+1}} \rangle| + |\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{l+1} \rangle|).$$

Достаточно установить, что при всех $t \in U_1 \cup \dots \cup U_l$ число $S_l(t) < 3$. Первое слагаемое $|\langle x'_l, T_t y_{n_{l+1}} \rangle|$ в выражении для $S_l(t)$ меньше, чем $|x'_l| \cdot |T_t y_{n_{l+1}}| \leqslant \frac{12 \cdot 11}{100}$. Оценим второе слагаемое $|\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{l+1} \rangle|$.

Если $t \in U_i \subset [0, n_i]$, то, записав

$$x_{l+1} = x_{i-1} + \sum_{j=i}^{l+1} (\pm \frac{y_{n_j}}{10^{2^{j-1} - 1}}),$$

имеем:

$$|\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{l+1}\rangle| = \left|\left\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{i-1} + \sum_{j=i}^{l+1}(\pm\frac{T_t y_{n_j}}{10^{2^{j-1}-1}})\right\rangle\right| <$$

$$< |\langle y'_{n_{l+1}}, T_t x_{i-1}\rangle| + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

Неравенства в последней формуле обеспечиваются тем, что длины $|T_t y_{n_j}|$ невелики при $j \geqslant i$ (так как $t \in U_i \subset [0, n_i]$) и условием 3_{l+1}, уже установленным выше. (ср. оценку $S_2(t)$ при $t \in U_2$.)

Пусть $x' = \lim x'_k$ и $x = \lim x_k$. Тогда согласно «4_∞», имеем

$$\forall t \in U_i \ |\langle x', T_t x\rangle| \geqslant \frac{9}{10^{2^i-1}} - 3\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{10^{2^j-1}} > \frac{5}{10^{2^i-1}}.$$

Теорема доказана.

2.2.3 О возможной гладкости вектора x в теореме 2.2

Можно ли в теореме 2.2 выбрать «плохой» вектор x, гладким? Ясно, что этого нельзя сделать, если, например, $\omega_1 < s_0 = 0$ — в этом случае полугруппа ЭУ, поэтому орбиты гладких векторов убывают слишком быстро. Опираясь на пример [69], Вробель в [71] построил полугруппу, для которой $s < \omega_1 < s_0 = \omega_0$, причем в примере Вробеля $\omega_n = 2^{-n}$, где ω_n — рост полугруппы на $D(A^n)$. Таким образом, если эту полугруппу перенормировать так, чтобы $\omega_1 = 0$, то получим неограниченную полугруппу, которая удовлетворяет теореме 2.2, однако экспоненциально убывает на каждом гладком векторе (причем чем выше гладкость, тем быстрее убывание). Сама полугруппа в [69], перенормированная так, чтобы $s = -1$, $\omega_1 = s_0 = \omega_0 = 0$, не является даже ЭУ, однако, согласно [70], «достаточно» гладкие элементы под действием полугруппы убывают как $\frac{1}{t}$, то есть

$$|T_t x| = O(1/t) \ \text{ для всех } \ x \in D(A^{1+\varepsilon}) \ \ \forall\varepsilon > 0.$$

В [70] скорость убывания $|T_t x| \to 0$ при $x \in D(A^\alpha)$ оценивается через поведение спектра $\sigma(A)$ вблизи его левой границы — вертикальной линии $x+iy : x = s(A)$. Главный инструмент в анализе роста такого рода — формула обращения для преобразования Лапласа степеней резольвенты. Мы упоминали уже эти работы выше в примерах 1 и 2.

Что может помешать построенному в теореме 2.2 вектору

$$x = \sum \gamma_j y_{n_j}$$

попасть в $D(A)$, ведь числовой ряд $\sum \gamma_i \in \mathbb{R}$ сходится и $y_{n_j} \in D^\infty(A)$, $|y_{n_j}| = 1$? Ответ простой: ряд

$$\sum \gamma_j A y_{n_j}$$

не обязан сходиться в X, так как так как нормы $|Ay_{n_j}| \approx |\beta_{n_j}|$ могут быстро расти по j (см. доказательство леммы 2.2.1).

Предположим, что $s_0 = s = 0$, и граница спектра достигается, т.е. существует $\lambda \in \sigma(A)$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Тогда числа $i\beta_n$ в лемме 2.2.1 можно выбрать в окрестности λ (а не где-то «на мнимой бесконечности») и, нормы $|Ay_{n_j}| \approx |\beta_{n_j}|$ будут ограничены по j. Тогда ряд $\sum \gamma_j A y_{n_j}$ сходится. В силу замкнутости оператора A вектор x попадает в $D(A)$. Докажем, что можно найти даже *бесконечно* гладкий вектор x:

Теорема 2.3. *Предположим, что $s(A) \geqslant 0$ достигается. Тогда найдутся $x' \in X'$, $x \in D(A^\infty)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2.2.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$, $\operatorname{Re}(\lambda) = s$. Домножая A на $e^{-\lambda}$, можно считать, что $s = 0 \in \sigma(A)$. Нам достаточно подобрать векторы $y_n \in D(A^\infty)$ в доказательстве теоремы 2.2 таким образом, чтобы ряд $\sum_n \gamma_n A^k y_n$ сходился в X для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$. В следующей лемме мы покажем, что это возможно. Эта лемма интересна и сама по себе.

Лемма 2.3.1. *Если $0 \in \sigma(A)$ принадлежит границе спектра, то для всякого $\delta > 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $y_n \in D(A^\infty)$ такой, что*

$$|y_n| = 1, \ \forall i \leqslant n \ \ |A^i y_n| < \delta. \tag{15_n}$$

Доказательство. Пусть $n = 1$. Оператор $(\lambda - A)^{-1}$ неограничен по λ в окрестности нуля, поэтому (15_1) следует из леммы 2.2.1.

Для $n > 1$ используем соболевскую шкалу ассоциированных полугрупп ([66], A-I 3.5). Рассмотрим на пространстве $D(A^n)$ норму «итерированного» графика

$$|x|_n = |x| + |Ax| + \cdots + |A^n x|.$$

Полугруппа $T_t : D(A^{n-1}) \to D(A^{n-1})$ с генератором $A : D(A^n) \to D(A^{n-1})$ изоморфна первоначальной. Условие (15_1), переписанное для этой полугруппы, означает: существует вектор $y_n \in D(A^\infty)$ такой, что

$$|y_n| + |Ay_n| + \cdots + |A^{n-1}y_n| = 1, \ |Ay_n| + \cdots + |A^n y_n| < \delta. \tag{16}$$

Из второго выражения (неравенства) формулы (16) следует, в частности, что малы слагаемые этого неравенства:

$$|Ay_n|, \ |A^2 y_n|, \ldots, \ |A^n y_n|.$$

И теперь из первого *равенства* (16) мы получаем, что $|y_n|$ близко к 1. Остается нормировать вектор y_n. Лемма 2.3.1 и теорема 2.3 доказаны.

Глава 3

Притягивающие компакты, теорема Ву — Сайна и компактная суперцикличность

Результаты этой главы опубликованы в работе [95].

В этой главе $T : X \to X$ — линейный оператор, ограниченный со степенями. Он порождает полугруппу степеней $\{T^n : X \to X \mid n \in \mathbb{N}\}$. Как и для однопараметрической полугруппы в первой главе, обозначим X_0 подпространство «исчезающих» векторов

$$X_0 = \{x \in X \mid T^n x \underset{n\to\infty}{\to} 0\}.$$

Оператор T будем называть *асимптотически конечномерным*, если $\operatorname{codim} X_0 < \infty$, т.е. соответствующая полугруппа его степеней асимптотически конечномерна.

Если $Y \subseteq X$ и $x \in X$, обозначаем $\rho(x, Y)$ расстояние между x и Y.

Подмножество $K \subseteq X$ назовем *притягивающим* для T, если орбита каждого элемента из единичного шара B_X стремится к множеству K:

$$\forall x \in B_X \ \lim_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\lim = 0)$$

Определение для однопараметрической полугруппы аналогично.

Известно, что для ограниченного со степенями оператора существование компактного притягивающего множества влечет асимптотическую конечномерность и *расщепляемость* полугруппы, т.е. существование инвариантного конечномерного подпространства $L \subseteq X$, дополняющего X_0, так что пространство X разлагается в прямую сумму $X \cong X_0 \oplus L$ и полугруппа $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ представляется в виде прямой суммы полугрупп

$$T^n = (T|_{X_0})^n \oplus (T|_L)^n : X_0 \oplus L \to X_0 \oplus L. \qquad (X = X_0 \oplus L).$$

Аналогичные факты верны и для ограниченной C_0-полугруппы. Этот результат был получен в [17] для марковских полугрупп в L_1, для положительных операторов в банаховых решетках — в [19]. Для операторов Фробениуса — Перрона условие, аналогичное условию «$\lim = 0$», изучалось ещё в работе [18].

Общий случай (расщепляемость полугруппы при условиях «$\lim = 0$») был получен в работах Ву [20] и Сайна [21]. Мы будем называть этот результат теоремой Ву — Сайна. (Отметим, что иногда, например, в работе [2], эта теорема названа теоремой Фонга — Сайна, потому что полное имя первого автора Ву Куок Фонг).

Из результатов настоящей главы вытекает, что заключение теоремы Ву — Сайна остается справедливым, даже если существует лишь «иногда притягивающий» компакт K:

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0 \quad (\forall x \in B_X). \qquad (\liminf = 0)$$

Методы работ [20], [21] используют результаты о спектральном разложении слабо почти периодической полугруппы, восходящие к работам Джекобса [22] и де Лю — Гликсберга [23]. Мы используем более элементарный факт: непустоту существенного спектра ограниченного оператора в бесконечномерном пространстве. Оказалось удобным использовать технику так называемых последовательностей Вейля.

В **первом параграфе** показано, что у изометрии бесконечномерного пространства не может существовать «иногда притягивающий» компакт.

Теорема 3.1. *Пусть* $\dim X = \infty$. *Если* $T : X \to X$ *— изометрия, то «иногда притягивающих» компактов у* T *нет.*

Во **втором параграфе** теорема 3.1 применяется к распространению упомянутых результатов из [20], [21] на случай полугрупп с «иногда притягивающим» компактом. Результатом являются две теоремы.

Теоремы (3.2 — для степеней оператора; **3.3** — для C_0-полугруппы). *Если полугруппа* $(T^n)_{n=0}^{\infty}$ *(соответственно, полугруппа* $T_t,\ t \geqslant 0$*) удовлетворяет условию* $(\liminf\, = \,0)$, *то она асимптотически конечномерна и расщепляема, т.е. выполняется разложение в прямую сумму* $(X = X_0 \oplus L)$.

Третий параграф посвящен другому приложению теоремы 3.1.

Пусть X — вещественное или комплексное бесконечномерное банахово пространство и $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Оператор $T : X \to X$ называется *суперциклическим*, если орбита $O(x) = \{T^n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ некоторого вектора $x \in X$, будучи умножена на основное поле, плотна в X. Соответствующий вектор x называется *суперциклическим вектором.*

Мы получаем (в том числе в вещественном случае) результат, для комплексного X имеющийся у Ансари и Бурдона в [24] и Миллера в [25]:

Теорема 3.4. *Изометрия* $T : X \to X$ *не может быть суперциклической. Более того, если* T *ограничен со степенями и суперциклический, то* $T^n x$ *стремится к нулю для каждого* $x \in X$.

И в [24], и в [25] использовался факт, восходящий к Годеману [34]: любая изометрия комплексного X имеет собственное инвариантное замкнутое подпространство. В пятой главе мы докажем этот факт и в вещественном случае. Однако теорема 3.4 (для вещественного и комплексного случая) из теоремы 3.1 следует непосредственно.

Замечание. В [25] Миллер доказал, что изометрия комплексного X не может быть даже *финитно-суперциклической* т.е. для любого конечного множества $K \subseteq X$ множество $F \cdot O(K)$ не является всюду плотным в X.

Позже, однако, Перис в [53] установил, что для локально выпуклых пространств финитная суперцикличность совпадает с суперцикличностью. Более слабым свойством оказалась *N-суперцикличность* [54, 55]. Оператор T является N-суперциклическим, если существует конечномерное подпространство $L \subset X$ такое, что

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{F} \cdot O(B_L)) = X. \qquad (*)$$

Условие $(*)$ равносильно тому, что замыкание орбиты всего L содержит шар:

$$\mathrm{Cl}(O(L)) \supset B_X \qquad (**)$$

Естественно назвать оператор $T : X \to X$ *компактно-суперциклическим*, если существует компакт $K \subseteq X$ такой, что

$$\mathrm{Cl}(O(K)) \supset B_X.$$

Это определение содержательно лишь в бесконечномерном пространстве.

Заметим: аналогичное условию $(*)$ условие «$\mathrm{Cl}(\mathbb{F} \cdot O(K) = X$» выполнено в любом сепарабельном банаховом пространстве X даже для тождественного отображения $T = Id : X \to X$. В качестве компакта K возьмем последовательность $K = \{\frac{x_n}{n}\}$, где $\{x_n\}$ — произвольная плотная последовательность в B_X.

Следуя этой традиции, мы можем назвать $T : X \to X$ *компактно-суперциклическим*, если существует компакт $K \subseteq X$ такой, что $F \cdot O(K)$ плотно в X. ($F \in \{\mathbb{R},\ \mathbb{C}\}$ — основное поле.) Это определение содержательно только в бесконечномерном пространстве.

Например, для изометрии $T : X \to X$ существование иногда притягивающего компакта равносильно компактной суперцикличности T^{-1}. Поэтому теорему 3.1 можно переформулировать так: *В бесконечномерном X нет компактно-суперциклических изометрий.*

3.1 Последовательности Вейля и отсутствие «иногда притягивающих» компактов у изометрий

Напомним: компакт $K \subseteq X$ мы называем «*иногда притягивающим*» для оператора T, если

$$\forall x \in B_X \ \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\liminf = 0)$$

Теорема 3.1. *Пусть X — вещественное или комплексное банахово пространство,* $\dim X = \infty$*. Если $T : X \to X$ — линейная изометрия, то «иногда притягивающих» компактов у T нет.*

Доказательство. Сначала предположим, что X комплексное. Пусть $\sigma_{ess}(T)$ — существенный спектр оператора T:

$$\lambda \in \sigma_{ess}(T) \ \Leftrightarrow \ \dim\ker(T-\lambda) = \infty \text{ или } \ \mathrm{Im}(T-\lambda) \text{ не замкнуто в } \ X.$$

Существенный спектр ограниченного оператора непуст. См., например, ([72], теорема 5.33, примечание 1).

Говорим, что ограниченная последовательность $z_n \in X$ *разрежена*, если из нее нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что для любого $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ существует разреженная последовательность «аппроксимативно собственных векторов» $z_n \in B_X$, т.е. такая, что $Tz_n - \lambda z_n \to 0$. Следуя терминологии, употребляемой для самосопряженных операторов гильбертова пространства, назовем такую z_n *последовательностью Вейля.* Заметим, что по существу использование существенного спектра и критерий Вейля существенного спектра для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве восходит именно к последовательностям в работе Вейля [73].

Следующее утверждение не использует изометричности T.

Утверждение. *Для каждого $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ найдется последовательность Вейля z_n, не имеющая предельных точек в пространстве X и такая, что $Tz_n - \lambda z_n \to 0$.*

Доказательство. Положим $S = (T - \lambda) : X \to X$. Возможны две ситуации: или $\dim\ker S = \infty$, или образ $S(X)$ не замкнут в X.

Если $\dim\ker S = \infty$, то утверждение очевидно.

Если $\dim\ker S < \infty$, то $\ker S$ имеет замкнутое дополнение $V \subseteq X$. Рассмотрим оператор $S|_V : V \to X$. Его ядро нулевое, а образ $S|_V(V) = S(X)$ не является замкнутым подпространством в пространстве X. Поэтому обратный оператор $(S|_V)^{-1} : S(X) \to V$ неограничен. Рассмотрим последовательность векторов $z_n \in V$ таких, что $|z_n| = 1$ и $Sz_n \to 0$. Последовательность z_n не имеет предельных точек (они были бы ненулевыми элементами ядра оператора S_V). □

Пусть T — изометрический оператор. Если $z_n \in X$ — разреженная последовательность и $Tz_n - \lambda z_n \to 0$ то

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ |T^k z_n - \lambda T^{k-1} z_n| = |Tz_n - \lambda z_n| \to 0. \tag{1}$$

Пусть множество $K \subset X$ является иногда притягивающим компактом для оператора T. В этом случае для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют k_n и $a_n \in K$ такие, что $|T^{k_n} z_n - a_n| < \frac{1}{n}$. Перейдя к подпоследовательности, считаем, что

$$a_n \to a, \quad |T^{k_n} z_n - a| \to 0, \text{ т.е. } T^{k_n} z_n \to a.$$

Из (1) следует, что $Ta = \lambda a$. Стало быть, вектор $T^n a = \lambda^n a$ определён не только для положительных, но и для отрицательных степеней и $\mathbb{Z}$-орбита $\{T^n a \mid n \in \mathbb{Z}\}$ вектора a лежит в некотором одномерном подпространстве $L(a) \subseteq X$. Но тогда

$$\rho(z_n, L(a)) \leqslant |z_n - T^{-k_n} a| = |T^{k_n} z_n - a| \to 0,$$

т.е. последовательность z_n притягивается одномерным подпространством и не может быть разрежена. В комплексном случае теорема доказана.

Вещественный случай требует вспомогательной леммы.

Лемма 3.1.1 (аналог спектра в вещественном пространстве). *Пусть X — вещественное пространство и $T : X \to X$ — ограниченный оператор. Найдутся два числа $r, s \in \mathbb{R}$ такие, что оператор $S := T^2 + rT + s$ не биективен. Более того, если $\dim X = \infty$, то существуют $r, s \in \mathbb{R}$ и разреженная последовательность x_n такая, что*

$$T^2 x_n + rTx_n + sx_n \to 0.$$

Пример. *Если $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот плоскости на $\alpha \in (0, \pi)$, то $T^2 - \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} T + 1 = 0$.*

Доказательство. Любое комплексное число λ является корнем квадратного трёхчлена с вещественными коэффициентами

$$S_\lambda(t) = (t - \lambda)(t - \overline{\lambda}) = t^2 - t(\lambda + \overline{\lambda}) + |\lambda|^2.$$

Сформулируем необходимые нам свойства комплексификации. Комплексификацией вещественного пространства X называется пространство $X_\mathbb{C}$, элементы которого имеют вид $z = (x + iy)$, векторы $x, y \in X$ естественно называть вещественной ($\operatorname{Re} z$) и мнимой ($\operatorname{Im} z$) частями z. Норма на $X_\mathbb{C}$ такова:

$$\|z\|^2_{X_\mathbb{C}} = \max\{\|\operatorname{Re} \lambda z\|^2_X + \|\operatorname{Im} \lambda z\|^2_X \mid \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\}.$$

Эта норма эквивалентна норме прямой суммы $X \oplus X$. Оператор $T : X \to X$ комплексифицируется так: $T_\mathbb{C}(x + iy) = (Tx + iTy)$. Ясно, что $(T^n)_\mathbb{C} = T^n_\mathbb{C}$.

Если $\lambda \in \sigma(T_\mathbb{C})$, то оператор $T_\mathbb{C} - \lambda$ не биективен, следовательно, не биективен и оператор $S_\lambda(T_\mathbb{C})$. С другой стороны, коэффициенты полинома S_λ вещественны, поэтому $S_\lambda(T_\mathbb{C}) = (S_\lambda(T))_\mathbb{C}$. Следовательно, $S_\lambda(T) : X \to X$ также не биективен.

Если $\dim X = \infty$, пусть $\lambda \in \sigma_{ess}(T_\mathbb{C})$ и $z_n = x_n + iy_n \in X_\mathbb{C}$ — соответствующая последовательность Вейля. Тогда $S_\lambda(T_\mathbb{C}) z_n \to 0$. Но тогда для вещественного квадратного трёхчлена $S_\lambda(T)$ выполнено

$$S_\lambda(T)x_n \to 0, \quad S_\lambda(T)y_n \to 0.$$

Последовательности x_n и y_n не обязаны быть разреженными, но если окажется, что, например, из последовательности $y_n \in X$ мнимых частей $z_n \in X_\mathbb{C}$ можно выбрать сходящуюся подледовательность $y_{n_k} \in X$, то уже подпоследовательность вещественных частей $x_{n_k} \in X$ будет заведомо разрежена. Лемма 3.1.1 доказана.$\Box$

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 3.1 в вещественном случае. Пусть x_n — разреженная последовательность такая, что $T^2x_n+rTx_n+sx_n \to 0$. Рассуждая, как при доказательстве комплексного случая, найдем $a \in K$ такой, что $T^2a + rTa + sa = 0$. Орбита вектора a лежит в двумерном подпространстве $L(a)$, притягивающем некоторую подпоследовательность в x_n. Это противоречит разреженности x_n. Теорема 3.1 доказана полностью.

3.2 Возвращающиеся векторы и асимптотическая конечномерность

Определение. Назовём вектор a *возвращающимся*, если в его орбите есть элементы, сколь угодно близкие к нему, т.е.

$$\liminf_{n\to\infty} |T^n a - a| = 0.$$

Замечание. Вектор $a \in X$ является возвращающимся тогда и только тогда, когда a — предельная точка последовательности $a, Ta, T^2a, \ldots$, т.е.

$$\exists n_k > 0 \ | \ T^{n_k}a \underset{k\to\infty}{\to} a.$$

При этом сама последовательность степеней итераций n_k не обязана стремиться к бесконечности, от нее требуется только положительность. Например, если $n_k = 5$ при всех k и $T^{n_k}a \underset{k\to\infty}{\to} a$, то $T^5a = a$ и, разумеется, a — возвращающийся вектор.

Лемма 3.2.1. *Пусть $T : X \to X$ и $\|T\| \leqslant 1$. Предположим, что у оператора T имеется «иногда притягивающий» компакт K. Если a — возвращающийся вектор, то подпространство $L(a) = \mathrm{cl}(\mathrm{span}(O(a))$ состоит из возвращающихся векторов, $T : L(a) \to L(a)$ — биективная изометрия и подпространство $L(a)$ конечномерно.*

Доказательство. Заметим, что $|a| = |Ta| = |T^2a| = \ldots$. В самом деле, последовательность этих норм не возрастает, так как $\|T\| \leqslant 1$. Вектор a — возвращающийся, поэтому эта последовательность не может и убывать. Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$ вектор $T^n a$ тоже возвращающийся, таковы же и линейные комбинации векторов орбиты a. В частности, для каждого $x \in L(a)$ имеем: $|Tx| = |x|$. Наконец, множество $T(L(a))$ плотно в $L(a)$ и поэтому $T(L(a)) = L(a)$. Итак, сужение оператора T на подпространство $L(a)$ является изометрией.

Если бы пространство $L(a)$ было бы бесконечномерным, то у оператора T, согласно теореме 3.1, не могло бы быть «иногда притягивающего» компакта. В то же время легко видеть, что если K — иногда притягивающий компакт для оператора $T : X \to X$, то множество $K \cap L(a)$ является иногда притягивающим компактом для оператора $T : L(a) \to L(a)$. Конечномерность $L(a)$ вытекает из теоремы 3.1. □

Лемма 3.2.2. *Пусть $\|T\| \leqslant 1$. Предположим, что у оператора T имеется «иногда притягивающий» компакт K. Линейная оболочка L множества всех возвращающихся векторов состоит из возвращающихся векторов. В частности, $T : L \to L$ — изометрия и L конечномерно.*

Доказательство. Ясно, что если a возвращается, то и λa тоже. Достаточно доказать, что сумма двух возвращающихся векторов возвращается. Пусть $a = a_1 + a_2$, причем, в отличие от предыдущей леммы, эти слагаемые могут принадлежать орбитам разных векторов. Нам надо построить для вектора a «возвращающую» последовательность итераций T^{m_k}, т.е. такую, чтобы $T^{m_k} a \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Проблема в том, что «возвращающая» a_1 последовательность итераций может не «возвращать» a_2. Оказывается, однако, что можно выбрать m_k так, чтобы a_2 тоже «возвращался». Ясно, что это и будет искомая последовательность T^{m_k}.

Орбиты векторов a_1 и a_2 относительно компактны. В самом деле, эти орбиты — ограниченные подмножества конечномерных (согласно лемме 3.2.1) подпространств $L(a_1)$ и $L(a_2)$. Выберем строго возрастающую последовательность степеней $n_k \to \infty$ так, чтобы последовательности итераций $T^{n_k}a_i$ сходились к какому-то вектору b_i и при $i = 1$, и при $i = 2$. Рассмотрим последовательность разностей $m_k = n_{k+1} - n_k$. Заметим, что при каждом k число m_k положительно. Имеем: $T^{m_k}(a_i) \to a_i$ для каждого $i = 1, 2$, так как

$$|T^{m_k}(a_i) - a_i| = |T^{n_{k+1}-n_k}(a_i) - a_i| = |T^{n_{k+1}}(a_i) - T^{n_k}a_i| \to |b_i - b_i| = 0$$

(здесь мы использовали то, что,согласно лемме 3.2.1, на каждом пространстве $L(a_i)$ оператор T действует изометрично).

Итак, последовательность T^{m_k} «возвращает» одновременно оба вектора a_1, a_2. Поэтому она «возвращает» и вектор $a = a_1 + a_2$. Окончание доказательства леммы (доказательство конечномерности подпространства L) совпадает с окончанием доказательства предыдущей леммы. □

Теорема 3.2. *Пусть X — банахово пространство, $T : X \to X$ – ограниченный со степенями оператор. Если найдётся компакт K, удовлетворяющий условию* $(\liminf = 0)$*, т.е. такой, что*

$$\forall x \in B_X \ \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0,$$

то полугруппа $(T^n)_{n=0}^{\infty}$ асимптотически конечномерна и расщепляема, т.е. найдется конечномерное подпространство $L \subseteq X$, такое, что для каждого $x \in X$ $\lim_{n\to\infty} \rho(T^n x, L) = 0$ и выполнено $(X = X_0 \oplus L)$. Пространство L порождается всеми возвращающимися векторами T.

Доказательство. Можно считать, что $\|T\| \leqslant 1$, перенормировав X эквивалентной нормой

$$|x| := \sup\{|x|, |Tx|, |T^2x|, \ldots\}. \tag{2}$$

Для каждого $x \in B_X$ у орбиты $O(x)$ существует предельная точка $a \in K$. Заметим, что $T^n x \to O(a)$, т.е. расстояние $\rho(T^n x, O(a)) \to 0$ от вектора $T^n x$ до орбиты $O(a)$ стремится к нулю.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Вектор $T^m x$ при какой-то итерации T^m окажется ε-близок к вектору a: $|T^m x - a| \leqslant \varepsilon$. Но тогда и при всех последующих итерациях $T^n x$, $n > m$ вектор $T^n x$ будет ε-близок к вектору $T^{n-m} a \in O(a)$ (орбита вектора a как бы «втягивает» векторы $T^n x$). Таким образом

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m\ \forall n > m\ \rho(T^n x, O(a) \leqslant |T^n x - T^{n-m} a| \leqslant \varepsilon.$$

Ясно, что a — возвращающийся вектор. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ и оба векторы $T^{n_1} x$ и $T^{n_2} x$ ε-близки к вектору a, $n_2 > n_1$. Имеем:

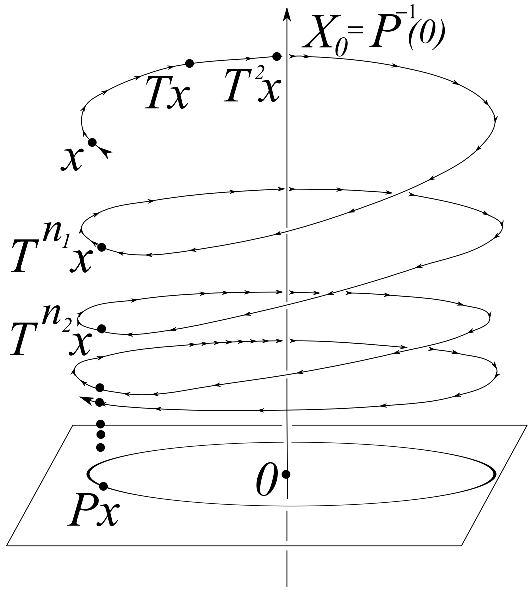
$$|T^{n_2 - n_1} a - a| \leqslant |T^{n_2} a - T^{n_1} a| = |T^{n_2} a - T^{n_1 + n_2} x + T^{n_1 + n_2} x - T^{n_1} a| =$$

$$= |T^{n_2}(a - T^{n_1} x) + T^{n_1}(T^{n_2} x - a)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon.$$

Таким образом, вектор $T^{n_2 - n_1} a$ будет 2ε-близок к вектору a.

В соответствии с леммой 3.2.1 орбита возвращающегося вектора $O(a)$ лежит в инвариантном конечномерном подпространстве $L(a)$.

Разные векторы единичного шара X могут притягиваться, вообще говоря, орбитами разных векторов a из компакта K. Согласно лемме 3.2.2, линейная оболочка L всех таких векторов a целиком состоит из возвращающихся векторов и сужение оператора T на подпространство L является изометрией — изометрия (в эквивалентной норме (2)), причём $\dim L < \infty$.



Теперь надо построить пространство X_0 и показать, как происходит расщепление $X = X_0 \oplus L$. Мы построим проектор $P : X \to L$. Для каждого $x \in X$ существует вектор $a \in L$ (вообще говоря, не один) такой, что $T^n x \to O(a) \subseteq L$. Рассмотрим функцию ρ_x из L в $\mathbb{R}$, $a \mapsto \rho_x(a)$, полагая

$$\rho_x(a) = \liminf_n |T^n x - T^n a|.$$

Эта функция непрерывна на L и принимает сколь угодно малые значения. Ввиду локальной компактности *конечномерного* подпространства L она достигает минимума 0. Ясно, что этот минимум достигается на единственном элементе пространства L, обозначим этот элемент $P(x)$. По его определению имеем: $|T^n x - T^n P(x)| \to 0$. Линейность и ограниченность отображения $P : x \mapsto P(x)$ легко следуют из единственности $P(x)$. Кроме того, $P : X \to L$ — проектор, так как при $x \in L$ $Px = x$. Ясно, что $X_0 = \ker P$, так как $x \in \ker P \Leftrightarrow T^n x \to 0$. Разложение $X = X_0 \oplus L$ — искомое расщепление. Теорема 3.2 доказана.

Теперь докажем соответствующую теорему для однопараметрической полугруппы $\{T_t \mid t \geqslant 0 : X \to X\}$.

Теорема 3.3. *Пусть $(T_t)_{t\geqslant 0}$ — ограниченная C_0-полугруппа в банаховом пространстве X. Если существует иногда притягивающий компакт $K \subseteq X$, то полугруппа T асимптотически конечномерна и расщепляема, т.е.*

$$T_t = (T|_{X_0})_t \oplus (T|_L)_t : X_0 \oplus L \to X_0 \oplus L,\ \forall x_0 \in X_0\ T_t x_0 \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Принципиальных моментов по сравнению с теоремой 3.2 тут нет. Надо только проследить, что между целочисленными итерациями оператора $T_1, T_2, \ldots,$ образующими «костяк» полугруппы, ничего особенного не происходит. Построим компакт $\tilde{K}$, который притягивает и целочисленные, и нецелочисленные «итерации» $T_t x$, $|x| \leqslant 1$.

В качестве кандидата на притягивающее множество рассмотрим

$$\tilde{K} = \cup_{t\in[0,1]} T_t(K) \subseteq X.$$

Это множество компактно, ибо оно является образом компакта $K \times [0,1]$ при непрерывном отображении $f(x,t) = T_t x$.

Покажем, что множество $\tilde{K}$ является иногда притягивающим компактом для полугруппы степеней

$$\{T_1, T_2 = T_1^2, \ldots, T_n = T_1^n, \ldots\},$$

т.е. оператор $T_1 : X \to X$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Пусть $|x| \leqslant 1$, по условию найдется последовательность $t_n \to \infty$ такая, что $\rho(T_{t_n} x, K) \to 0$. Эта последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $a \in K$; можно считать, что уже $T_{t_n} x \to a$. Пусть $[t_n]$ и $\{t_n\}$ — целая и дробная части числа $t_n \in \mathbb{R}$. Положим $m_n = [t_n] + 1$ — ближайшее к t_n целое число, строго большее t_n и $r_n = m_n - t_n = 1 - \{t_n\}$, $0 < r_n \leqslant 1$. Тогда расстояние от вектора $T_{m_n} x = T_{r_n} T_{t_n} x$ до вектора $T_{r_n} a$ стремится к нулю при $n \to \infty$. В то же время при каждом n вектор $T_{r_n} a$ принадлежит компакту $\tilde{K}$. Итак, компакт $\tilde{K}$ «иногда притягивает» целочисленные итерации $T_n x = T_1^n(x)$.

По теореме 3.2 имеется конечномерное подпространство L, притягивающее X под действием целых степеней T_1, т.е. для каждого $x \in X$ выполнено $T_n x \underset{n\to\infty}{\to} L$.

Покажем, что для любого x выполнено $T_t x \underset{t\to\infty}{\to} L$. Это доказывается методом, «двойственным» рассуждению, проведенному выше.

Предположим, что для какого-то x это не так, то есть существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $t_n \in \mathbb{R}, t_n \to \infty$ такая, что расстояние $\rho(T_{t_n} x, L)$ от элементов $T_{t_n} x$ до подпространства L при всех t_n остается большим числа ε. Дробные части ограничены, поэтому можно, перейдя к подпоследовательности, считать, что $\{t_n\} \to \beta \in [0,1]$. Тогда

$$T_{t_n}x = T_{[t_n]+\{t_n\}}x = T_{[t_n]}T_{\{t_n\}}x \sim T_{[t_n]}T_\beta x \to L.$$

Противоречие. Итак, пространство L притягивает при всех достаточно больших t, а не только при целых. Расщепляемость очевидна. Теорема 3.2 доказана.

3.3 Приложение к суперциклическим операторам

Лемма 3.3.1. *Пусть $\|T\| \leqslant 1$ — произвольный ограниченный линейный оператор на банаховом пространстве X. Если $T^n a \not\to 0$ и найдутся λ_k и n_k такие, что $\lambda_k T^{n_k} a \to a$ (например, если a суперциклический), то a — возвращающийся вектор.*

Доказательство. Если $T^n a \not\to 0$, то существует *ограниченная* последовательность скаляров c_k и последовательность степеней $l_k \to \infty$ такие, что $c_k T^{l_k} a \to a$. Выберем подпоследовательность m_k такую, что $c_k \to c$ и $cT^{m_k} a \to a$. Ясно, что $|c| = 1$. В этом случае

$$c^2 T^{2m_k} a \to a,\ c^3 T^{3m_k} a \to a, \dots$$

Но число 1 — предельная точка множества $\{c^m \mid m \in \mathbb{N}\}$, поэтому a — предельная точка множества $\{T^{m \cdot n_k} a \mid m, k \in \mathbb{N}\}$.□

Теорема 3.4. *Изометрия $T : X \to X$ не может быть суперциклической. Более того, если T ограничен со степенями и суперциклический, то $T^n x$ стремится к нулю для каждого $x \in X$.*

Доказательство: Перенормировав X нормой (2), можно считать, что $\|T\| \leqslant 1$. Пусть a — суперциклический вектор. В частности, он циклический, т.е. множество $\operatorname{span}(O(a))$ плотно в X.

Допустим, что $T^n a \not\to 0$. По лемме 3.3.1 вектор a возвращающийся и, согласно лемме 3.2.1, $T : X \to X$ — биективная изометрия.

Для каждого $x \in B_X$ существуют λ_k, $|\lambda_k| \leqslant 1$ и $n_k \to \infty$ такие, что $|\lambda_k T^{n_k} a - x| \to 0$ или, что то же самое, $|\lambda_k a - T^{-n_k} x| \to 0$. Поэтому (одномерный) компакт $K = \{\lambda a \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ является иногда притягивающим для *изометрии* T^{-1}. Противоречие с теоремой 3.1.

Таким образом, $T^n a \to 0$. Но в этом случае $T^n x \to 0$ для каждого x. В самом деле, для каждого $\varepsilon > 0$ существует вектор вида $cT^k(a)$, который ε-близок к x. Итерируя T, получаем: $cT^{k+n}(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, значит, $|T^n x| < \varepsilon$ при больших n. Следовательно, $T^n x \to 0$. $\square$

Глава 4

Границы асимптотической конечномерности

Результаты этой главы опубликованы в [96], [98], [99]. Как и в предыдущей главе, $T : X \to X$ — линейный оператор, ограниченный со степенями, $X_0 = \{x \in X \quad | \quad T^n x \underset{n\to\infty}{\to} 0\}$. Оператор T асимптотически конечномерен, если такова полугруппа его степеней, т.е. $\operatorname{codim} X_0 < \infty$.

Напомним: при выполнении условия ($\lim = 0$), т.е. при наличии компакта $K \subset X$ такого, что $\forall x \in B_X \ \lim_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0$ полугруппа асимптотически конечномерна и даже расщепляема, т.е. X_0 дополняется инвариантным пространством (Ву [20], Сайн [21]). Для преемственности формулировок перепишем условие ($\lim = 0$) в эквивалентном виде

$$\forall x \in B_X \ \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) = 0. \qquad (\limsup = 0)$$

В прошлой главе мы показали, что заключение теоремы Ву — Сайна остается справедливым, даже если существует лишь «иногда притягивающий» компакт K:

$$\forall x \in B_X \liminf_{t\to\infty} \rho(T_t x, K) = 0. \qquad (\liminf = 0)$$

Что, если от компакта не требовать, чтобы он притягивал «вплотную», как в условиях ($\limsup = 0$) или ($\liminf = 0$), но чтобы он затягивал (иногда) орбиты векторов в свою η-окрестность при $\eta < 1$?

Известно, что в бесконечномерном пространстве шар радиуса чуть меньшего единицы в известном смысле «бесконечно мал» по сравнению с единичным шаром. Поэтому условия вида компакт (иногда) «притягивает, но, быть может, не вплотную») достаточно естественно рассмотреть в качестве кандидатов на условия асимптотической конечномерности:

$$\forall x \in B_X \quad \limsup_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \leqslant \eta < 1, \tag{$\limsup \leqslant \eta$}$$

$$\forall x \in B_X \quad \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \leqslant \eta < 1. \tag{$\liminf \leqslant \eta$}$$

Последнее условие слабее трёх предыдущих вынесенных условий.

Постановку соответствующих задач можно выразить в терминах малой меры некомпактности притягивающих множеств. Мерой некомпактности $\chi(A)$ произвольного подмножества A в нормированном пространстве называется нижняя грань таких чисел r, для которых A можно поместить в конечное (или, что эквивалентно, с центрами в некотором компакте) объединение шаров радиуса r. Компакты — в точности множества меры некомпактности 0. С другой стороны, всякий шар радиуса R в бесконечномерном пространстве имеет меру некомпактности R. В этих терминах условие ($\limsup \leqslant \eta$) можно сформулировать так: существует притягивающее орбиты единичных векторов множество A, мера некомпактности которого равна $\eta < 1$.

В случае ($\limsup \leqslant \eta$) асимптотическая конечномерность установлена в [26], см. также работу [1], где, среди прочего, условие ($\limsup \leqslant \eta$) исследовано для произвольных абелевых полугрупп операторов. В более ранних работах вариант условия ($\limsup \leqslant \eta$) исследовался в работе [27] для марковских операторов в L_1, затем для банаховых решеток — в работах [28, 29, 30]. В контексте марковских операторов по-видимому в самом общем на настоящий момент виде условие ($\limsup \leqslant \eta$) исследовано в работе [31] — для так называемых сетей Лотца — Ребигера.

В настоящей главе мы задаёмся вопросом: имеется ли асимптотическая конечномерность при выполнении самого слабого ограничения

($\liminf \leqslant \eta$), т.е. когда компакт K «притягивает лишь иногда и не сильно». Этот вопрос поставлен в книге [33], (problem 1.3.33).

В **параграфе 4.1** мы, опираясь на понятие аппроксимативно собственных векторов, вводим понятие «медленно меняющихся векторов». Это — те аппроксимативно собственные векторы, соответствующие единичным по модулю элементам спектра, которые почти не укорачиваются при итерациях T. Формульно: оператор T имеет медленные векторы, если для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор x единичной длины такой, что в комплексной единичной окружности Λ найдется такое λ, что $|Tx - \lambda x| < \varepsilon$ и $|T^n x| > 1 - \varepsilon \; \forall n = 0, 1, 2 \ldots$.

Теорема 4.1 утверждает, что медленные векторы появляются уже при $X_0 \neq X$, т.е. при первой же возможности; если же $\operatorname{codim} X_0 = \infty$, то медленных векторов много: можно найти сколь угодно многомерные подпространства, сферы которых состоят только из медленных векторов.

Результаты § 4.1 используются в **параграфе 4.2** для доказательства асимптотической конечномерности при условии ($\liminf \leqslant \eta < 1$) в случае рефлексивного X (**теорема 4.2**). Результат без труда можно получить и для однопараметрической полугруппы операторов $\{T_t : X \to X, t \geqslant 0\}$.

Заметим, что как раз в рефлексивном случае асимптотическая конечномерность у ограниченной полугруппы влечет расщепляемость ($X_0 \oplus L$), см. [2], [93] или первую главу.

В оставшихся параграфах мы показываем, что число $\eta = \frac{1}{2}$ служит границей условия асимптотической конечномерности. Именно, в **параграфе 4.3** основной результат — **теорема 4.3**, в которой асимптотическая конечномерность установлена при условии ($\liminf \leqslant \eta < \frac{1}{2}$), а в **параграфе 4.4** доказаны **теоремы 4.4 и 4.5**, в которых показано устройство *изометрий* с условием ($\liminf \leqslant \frac{1}{2}$) на пространствах $C(M)$ непрерывных функций на произвольном нульмерном компакте M, где в роли притягивающего множества K можно подобрать *точку.*

В частности, если c — банахово пространство сходящихся последовательностей, $\lambda_n \in \mathbb{C}, |\lambda_n| \equiv 1$, $\lambda_n \to \lambda$ и $\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ — множество Кронекера, то оператор умножения $T : c \to c$, $(Tx)_n = \lambda_n x_n$ — изометрия, удовлетворяющая условию ($\liminf \leqslant \frac{1}{2}$) для одноточечного K.

Отметим, что операторы из c в c вида $(Tf)_n = \lambda_n f_n$, $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ (λ_n попарно различны), согласно наблюдению Любича [56], не обладая полной системой собственных конечномерных подпространств, являются тем не менее скалярно почти периодичными. Что касается рефлексивного пространства, то Любич в [56] показал, что в нём (и вообще, в слабо полном пространстве) полнота системы собственных подпространств оператора эквивалентна скалярной почти периодичности. Возможно, результаты параграфа 4.2 также справедливы для слабо полного пространства, а не только для рефлексивного.

4.1 Медленно меняющиеся векторы

В этом параграфе $T : X \to X$ — линейный оператор на комплексном банаховом пространстве X, ограниченный со степенями, $\|T^n\| \leqslant C$.

Если спектральный радиус оператора T равен единице (это заведомо так, если $X_0 \neq X$), то на окружности Λ существуют точки спектра $\sigma(T)$.

Единичный вектор $x \in X$ называется *ε-почти собственным* (или просто *ε-собственным*) вектором оператора T, если существует $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $|Tx - \lambda x| < \varepsilon$. Такие векторы существуют для каждого $\lambda \in \sigma(T) \cap \Lambda$. Нам понадобятся те ε-собственные векторы, которые при итерациях T^n не слишком укорачиваются.

Определение 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Назовем вектор $x \in X$ *ε-медленным*, если $\exists \lambda \in \Lambda \mid |Tx - \lambda x| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |T^n x| > 1 - \varepsilon \ \forall n = 0, 1, 2 \ldots.$

Например, собственные векторы x, $Tx = \lambda x$, $\lambda \in \Lambda$ — медленные.

Пример 1. $T : l_2 \to l_2$ — сдвиг вправо, $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Это вложение изометрическое, значит, любой единичный ε-собственный вектор будет и ε-медленным. Собственных векторов нет.

Пример 1*. $T : l_2 \to l_2$ — сдвиг влево, $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Спектр содержит Λ, но $T^n x \to 0$ для всех x и медленных векторов нет.

Заметим, что если вектор x ε-медленный, то для каждого n векторы $T^n x$ будут $C\varepsilon$-медленными. В самом деле,

$$|T(T^n x) - \lambda T^n x| = |T^n(Tx - \lambda x)| \leqslant C|(Tx - \lambda x)| \leqslant C\varepsilon.$$

Таким образом, угол между (комплексными) прямыми $T^n x$ и $T^{n+1}x$ будет мал не только при $n = 0$, но и при всех $n \in \mathbb{N}$ (т. е. направление вектора, а не только сам вектор при итерациях меняется медленно).

Замечание. Наша терминология не связана с названиями «медленный вектор», «медленная переменная» классической теории динамических систем. В названии параграфа медленные векторы названы медленно меняющимися.

Определение 2. У оператора T *есть медленные векторы*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-медленные векторы. У оператора T *много медленных векторов*, если $\dim X = \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ и $n < \infty$ в X найдутся n-мерные подпространства, единичные сферы которых состоят из ε-медленных векторов.

Если $X_0 = X$, то ясно, что медленных векторов нет. Рассмотрим очевидную ситуацию, когда медленных векторов много. Это ситуация, когда степени $\|T^n\|$ отделены от нуля снизу, т. е. существует число $c > 0$ такое, что

$$\forall x \ \ c|x| \leqslant |T^n x|.$$

В этом случае если $|x| = 1$ и x — $c\varepsilon$-собственный вектор, то вектор $\frac{x}{c}$ ε-медленный. В то же время, аппроксимативно собственных векторов, как мы уже знаем, много. Например, каждому элементу существенного спектра оператора уже соответствует много аппроксимативно собственных векторов, см. соответствующий комментарий в теореме 3.1.

Фактически, оператор, степени которого ограничены и сверху, и снизу по своим геометрическим свойствам мало отличается от изометрии и является изометрией в эквивалентной норме

$$|x|_1 = \limsup_{n\to\infty} |T^n x|, \quad c \leqslant \frac{|\ |_1}{|\ |} \leqslant C.$$

Пример 2. С ходу может возникнуть впечатление, что отсутствие исчезающих векторов у оператора T, т.е. условие $X_0 = 0$ уже гарантирует равномерную отделенность снизу от нуля орбит $T^n x$. Однако это не так. Рассмотрим гильбертово пространство $l_2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей вида $x = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$. Оператор $T : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ взвешенного правого сдвига определим формулой

$$(Tx)_n = \begin{cases} \frac{x_{n-1}}{2} & n \leqslant 0 \\ x_{n-1} & n > 0 \end{cases}.$$

Чтобы понять, что происходит при итерациях этого оператора, почему он не отделён от нуля снизу и почему для него $X_0 = 0$, достаточно написать друг под другом несколько итераций вектора $a = (a_n)_{n=\infty}^{\infty} = \ldots 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \mathbf{0}\ 0\ 0\ 0 \ldots$ (жирным выделена координата a_0).

$$\begin{array}{c}
\ldots\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \mathbf{0}\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ 0\ \mathbf{0}\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ \tfrac{1}{4}\ \mathbf{0}\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \boldsymbol{\tfrac{1}{8}}\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{0}\ \tfrac{1}{8}\ 0\ 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{0}\ 0\ \tfrac{1}{8}\ 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{0}\ 0\ 0\ \tfrac{1}{8}\ \ldots
\end{array}$$

Ясно, что $\|T\| = 1$, $X_0 = 0$, но $\forall \varepsilon > 0\ \exists x, |T^n x| \leqslant_{n\to\infty} \varepsilon |x|$.

У этого оператора тоже много медленных векторов. Это ясно хотя бы из того, что сужение оператора на собственное подпространство

$$l_2^+ = \{x \in l_2(Z), x_n = 0\ \forall n < 0\}$$

— это просто правый сдвиг, как в примере 1.

В следующей теореме мы покажем, что условие $X_0 = X$ — единственное препятствие к существованию медленных векторов, а «малость количества» медленных векторов у оператора T равносильно его асимптотической конечномерности (то есть асимптотической конечномерности полугруппы его степеней).

Теорема 4.1 *Пусть X — банахово пространство, $T : X \to X$, $\|T^n\| < C$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Если $X_0 \neq X$, то у T есть медленные векторы. Если* $\operatorname{codim} X_0 = \infty$*, то медленных векторов много.*

Доказательство использует соответствующие факты об аппроксимативно собственных векторах. Без ограничения общности, перейдя к эквивалентной норме $|x| := \sup\limits_n\{|T^n x|\}$, можно считать, что $\|T\| \leqslant 1$.

План доказательства таков:

(a) $X_0 = 0 \Rightarrow$ медленные векторы существуют;

(b) $X_0 = 0 \Rightarrow$ медленных векторов много;

(c) codim $X_0 = \infty \Rightarrow$ медленных векторов много.

(a) Введем на X норму $|\ |_p$, уже, быть может, не эквивалентную норме $|\ |$, но не большую её:

$$|x|_p := \lim_{n\to\infty} |T^n x|.$$

В этой норме T является изометрией. Нормы $|\ |_p$ и $|\ |$ не обязательно эквивалентны (в примере 2 выше $|a| = 1$, однако $|a|_p = \frac{1}{8}$ и т.п.). Однако для всех x

$$|T^k x| \sim_{k\to\infty} |T^k x|_p. \tag{1}$$

Заметим, что подобная процедура пополнения применялась в статье [57], как нам указал А. Г. Баскаков.

Если среди чисел вида $|T^k(x)|$, $|x| = 1$, $k = 1, 2, \dots$ есть сколь угодно малые (как в примере 2), то пространство $(X, |\ |_p)$ не полно. (В самом деле, если бы оно было полным, то, согласно основному принципу Банаха, нормы $|\ |_p$ и $|\ |$ были бы эквивалентны). Пусть $\widehat{X}$ — пополнение X по норме $|\ |_p$. Продолжим изометрию T пространства $(X, |\ |_p)$ на пространство $\widehat{X}$, обозначив это продолжение буквой $\widehat{T}$. Пусть $\lambda \in \sigma(\widehat{T}) \cap \Lambda$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\widehat{x} \in \widehat{X}$ — единичный ε-собственный вектор оператора $\widehat{T}$, соответствующий λ. Учитывая, что $\widehat{T} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ — изометрия, получаем

$$|\widehat{T}\widehat{x} - \lambda\widehat{x}|_p < \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall n\ |\widehat{T}^n\widehat{x}|_p = |\widehat{x}|_p = 1 > 1 - \varepsilon.$$

Множество X плотно в $\widehat{X}$. Если вектор $x \in X$ достаточно близок к $\widehat{x}$ в $|\ |_p$-норме, то все строгие неравенства последней формулы сохранятся и для вектора x. Итак, существует вектор $x \in X \subset \widehat{X}$, единичный с точки зрения $\widehat{X}$ (хотя, возможно, очень длинный в X) такой, что

$$|Tx - \lambda x|_p < \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall n\ |T^n x|_p > 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Таким образом, вектор x является ε-медленным вектором оператора T относительно нормы $|\ |_p$. Он, конечно, не обязан быть медленным относительно исходной нормы, так как число $|Tx - \lambda x|$ может быть велико. Однако, навешивая на формулу (2) $|\ |_p$-изометрию T^k и втаскивая ее под скобки, получаем:

$$\forall k\ |T(T^k x) - \lambda T^k x|_p < \varepsilon \quad \text{и} \quad \forall n\ |T^n(T^k x)|_p > 1 - \varepsilon. \tag{3}$$

В силу (1) начиная с некоторого $k = k_0$ неравенства (3) будут выполнены и для нормы $|\ |$, т. е. начиная с некоторого k вектор $T^k x$ будет медленным и относительно исходной нормы пространства X. Доказательство пункта (a) закончено.

(b) Возьмем число $\lambda \in \Lambda$ из *существенного* спектра изометрии $\widehat{T}$ пространства $(\widehat{X}, |\ |_p)$. Такому λ соответствует много аппроксимативно собственных векторов оператора $\widehat{T}$. (Заметим, хоть это для наших целей излишне, что существуют не только сколь угодно многомерные, но даже бесконечномерные сферы из ε-собственных векторов (см. [72], гл. IV, теоремы 5.33, 5.9).

(Поясним, что здесь сферой мы называем единичную сферу в произвольном линейном подпространстве. *Эллипсоидами* мы далее называем образы сфер при инъективном линейном отображении).

Пусть $l < \infty$ и S — некоторая l-мерная единичная (относительно нормы $|\ |_p$) сфера в каком-то $l+1$-мерном подпространстве пространства $\widehat{X}$, состоящая из ε-собственных векторов оператора $\widehat{T}$. Поскольку множество X плотно в $\widehat{X}$, можно, пошевелив конечномерное пространство, в котором эта сфера лежит, сделать эту сферу S «эллипсоидом», лежащим в $X \subset \widehat{X}$. Все векторы эллипсоида $S \subset X$ удовлетворяют (2) и (3). Согласно (1) для каждого $x \in S$ начиная с некоторого k_0 векторы $T^{k_0}x$ будут медленными векторами оператора $T : X \to X$. Эллипсоид S компактен, поэтому k_0 можно выбрать общим для всех $x \in S$. Итак, X содержит l-мерные эллипсоиды вида $T^{k_0}(S)$, состоящие из медленных векторов.

(c) Рассмотрим фактор-пространство $[X] := X/X_0$, $[x] := x + X_0$ — его элементы. Норма $||[x]||$ такова:

$$||[x]|| = \rho(x, X_0) = \inf\{|x - x_0|,\ x_0 \in X_0\}.$$

Поскольку $T(X_0) \subset X_0$, оператор $[T] : [X] \to [X]$ определён корректно и $[T]^n = [T^n]$. Легко показать (см начало доказательства теоремы 4.3 параграфа 4.3, что если $[x] \neq [0]$, то $[T]^n[x] \not\to 0$, то есть $[X]_0 = 0$.

Согласно (b) у оператора $[T]$ много медленных векторов, т. е. для любого l в $[X]$ найдутся l-мерные эллипсоиды $\tilde{S}$ из медленных векторов $[x]$ оператора $[T]$.

Рассмотрим такой эллипсоид $\tilde{S}$. Он имеет вид $[S] = S + X_0$ для какого-то эллипсоида S в некотором l-мерном подпространстве Y, дополняющем X_0 в X. В самом деле, имеется линейный изоморфизм $\varphi : [X] \cong Y$, положим $S = \varphi(\tilde{S})$.

Имеем:

$$\forall n \geqslant 0\ ||[T]^n[x]|| > 1 - \varepsilon \quad \text{и} \quad ||[T][x] - \lambda[x]|| < \varepsilon\ \forall [x] \in [S].$$

Ввиду того, что $T^k x_0 \to 0$ при $x_0 \in X_0$, получаем: при больших k для каждого $x \in [x] = x + X_0 \in [S]$ выполнены оценки

$$\forall n \geqslant 0\ |T^n(T^k x)| > 1 - \varepsilon \quad \text{и} \quad |T(T^k x) - \lambda T^k x| < \varepsilon. \tag{4}$$

Компактность S позволяет теперь утверждать, что оценки (4) равномерны по k для $x \in S$, т.е. начиная с некоторого k эллипсоиды $T^k S \subset X$ состоят из медленных векторов оператора T. Теорема 4.1 доказана.

Положим для $\lambda \in \mathbb{C}$ $S_{m,\lambda} = \frac{1}{m+1}\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{T^m}{\lambda^m}\right)$ — чезаровское среднее оператора T/λ.

Закончим параграф леммой, характеризующей обилие медленных векторов наличием многомерных «T-несплющиваемых» сфер в образе чезаровских средних. Эта лемма понадобится нам в следующем параграфе.

Лемма 4.1.1. *Пусть $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Если у T есть медленные векторы, то существует такое $\lambda \in \Lambda$, что*

$$\exists x \in B_X \mid |S_{m,\lambda}x - x| < \delta \quad \text{и} \quad \forall n \ |T^n(S_{m,\lambda}x)| > 1 - \delta. \tag{5}$$

Если у T много медленных векторов, то существуют подпространства $W \subset X$ сколь угодно большой размерности, единичные сферы S которых состоят из векторов x, удовлетворяющих неравенствам (5).

Доказательство. Рассмотрим такое $\lambda \in \Lambda$, которому соответствуют медленные векторы. (Существование такого λ легко следует из компактности Λ.) Если число $\varepsilon := \varepsilon(\delta, m)$ очень мало и x — ε-медленный вектор, соответствующий числу λ, то $S_{m,\lambda}(x) \approx x$ и вектор $S_{m,\lambda}(x)$ удовлетворяет (5). Оставшаяся часть доказательства пояснений не требует. $\square$

Замечание. Геометрически лемма 4.1.1 означает, что для любого m найдутся сколь угодно многомерные сферы, которые почти не сплющиваются под действием отображений $T^n(S_{m,\lambda})$, каково бы ни было n.

4.2 Асимптотическая конечномерность в рефлексивном случае

В этом параграфе мы показываем асимптотическую конечномерность оператора T, ограниченного со степенями на рефлексивном комплексном

X при наличии компакта $K \subset X$ и числа $\eta < 1$, такого, что

$$\forall x \in B_X \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \leqslant \eta \qquad (\liminf \leqslant \eta)$$

Можно считать, что в этом условии K — уравновешенное множество, т.е. K переходит в себя при умножении на любой скаляр, по модулю не больший единицы.

Лемма 4.2.1. *Пусть $|x| \leqslant 1$. Для любого k найдутся $a_1, \ldots, a_k \in K$, номера $m_1 > m_2 > \cdots > m_k$ и числа $t_1, \ldots, t_k$, $|t_i| \leqslant \eta^{i-1}$, такие, что*

$$\left| T^{m_1} x - \left[t_1 T^{m_2} a_1 + t_2 T^{m_3} a_2 + \cdots + t_{k-1} T^{m_k} a_{k-1} + t_k a_k \right] \right| \leqslant \eta^k. \qquad (6)$$

Доказательство. Сначала предположим, что $|x| < 1$. Выпишем неравенства (6) для $k = 1, 2, 3$. Первое из этих неравенств следует из условия $(\liminf \leqslant \eta < 1)$ и того, что $|x|$ строго меньше единицы. Справедливость каждого следующего неравенства обеспечивается применением условия $(\liminf \leqslant \eta)$ к предыдущему неравенству, умноженному на η:

$$\exists n_1 \mid |T^{n_1} x - t_1 a_1| < \eta, \quad |t_1| \leqslant 1,$$

$$\exists n_2 \mid |T^{n_2}(T^{n_1} x - t_1 a_1) - t_2 a_2| < \eta^2, \quad |t_2| \leqslant \eta,$$

$$\exists n_3 \mid |T^{n_3}(T^{n_2}(T^{n_1} x - t_1 a_1) - t_2 a_2) - t_3 a_3| < \eta^3, \quad |t_3| \leqslant \eta^2,$$

и т.д. После раскрытия скобок мы получим (6), где $m_j = n_j + \cdots + n_k$. Переход от случая $|x| < 1$ к случаю $|x| \leqslant 1$ затруднений не вызывает. $\square$

Сумма модулей коэффициентов $|t_i|$ в формуле (6) не превосходит числа $h := \sum_{i=1}^{k} \eta^i = \frac{1}{1-\eta}$. Значит каждый вектор единичного шара B_X притягивается выпуклой оболочкой $\widehat{K}$ множества $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^i(hK)$, т. е.

$$\forall x \in B_X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists a \in \widehat{K} \mid |T^n x - a| < \varepsilon. \qquad (7)$$

Покажем теперь, что T не может действовать умножением на единичный скаляр на слишком многомерных подпространствах X.

Лемма 4.2.2. *Для каждого* $\lambda \in \Lambda \quad \dim\ker(T-\lambda I) < \infty$.

Доказательство. Выберем в K конечную $(1-\eta)$-сеть, пусть в ней k векторов. Натянем на нее подпространство Y. По теореме Крейна — Красносельского — Мильмана [74] в любом подпространстве $Z \subset X$ таком, что $\dim Z > \dim Y$, найдется вектор z единичной длины такой, что $\rho(z, Y) = 1$. По условиям $(\liminf \leqslant \eta < 1)$ для некоторого n имеем

$$\rho(T^n z, Y) < \eta + (1-\eta) = 1.$$

Поэтому Tz не может иметь вид $\lambda \cdot z$. □

Теорема 4.2. *Пусть X рефлексивно и оператор $T : X \to X$ удовлетворяет условию* $(\liminf \leqslant \eta)$ *для некоторого $\eta < 1$. Тогда у T не может быть много медленных векторов и, значит,* $\operatorname{codim} X_0 < \infty$.

Доказательство. Достаточно доказать, что никакому $\lambda \in \Lambda$ не соответствует много медленных векторов. Можно считать, что $\lambda = 1$.

Согласно статистической эргодической теореме (см., например, [76], § 2), операторные средние

$$S_{m,1} = S_m = \frac{1}{m+1}\left(\sum_0^m T^k\right)$$

сходятся к проектору P пространства X на подпространство $\ker(I-T)$. По лемме 4.2.2 $\dim\ker(I-T) < \infty$.

На компакте K сходимость $S_m - P$ к нулю равномерна (см., например, [75], доказательство необходимости в теореме Гельфанда 3(1.IX). Операторы S_m коммутируют с T, поэтому сходимость $(S_m - P) \to 0$ равномерна и на множестве $\widehat{K}$. Значит, начиная с некоторого m для всех $a \in \widehat{K}$ число $|S_m(a) - P(a)|$ достаточно мало, например меньше числа $\frac{1}{3}$. Но согласно формуле (7) для каждого $x \in B$ при больших n вектор $T^n x$ близок к $\widehat{K}$. Поэтому

$$\exists m \; \forall x \in B_X \; |(S_m - P)T^n x| = |T^n(S_m x) - Px| \leqslant_{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, например, что под действием $T^n \circ S_m$ любая k-мерная сфера такая, что $k > \dim\ker(I - T)$, при больших n «сплющивается» по крайней мере в 3 раза вдоль некоторого радиуса x (надо взять такой радиус x в этой сфере, что $Px = 0$).

Последнее согласно лемме 4.1.1 и замечанию к ней означает, что медленных векторов у оператора T не много.

Теперь неравенство codim $X_0 < \infty$ следует из теоремы 4.1, которая обязывает асимптотически бесконечномерную полугруппу иметь много медленных векторов. $\square$

В параграфе 4.4 мы увидим, что рефлексивность в теореме 4.2 существенна, предъявив изометрии, удовлетворяющие условию ($\liminf \leqslant \frac{1}{2}$) с *одноточечным* притягивающим компактом на нерефлексивном пространстве. В следующем же параграфе мы установим асимптотическую конечномерность в случае $\eta < \frac{1}{2}$ в условии ($\liminf \leqslant \eta$) для любого банахова пространства.

4.3 Условие ($\liminf \leqslant \eta < \frac{1}{2}$) влечёт асимптотическую конечномерность

В этом параграфе X — банахово пространство (вещественное или комплексное), $T : X \to X$ — оператор, ограниченный со степенями, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}\ \|T^n\| \leqslant C < \infty$.

Мы доказываем асимптотическую конечномерность, т.е. конечную коразмерность пространства $X_0 = \{x \in X \mid T^n x \to 0\}$ при $\eta < \frac{1}{2}$ в следующем условии: существует компакт $K \subset X$ такой, что

$$\forall x \in B_X \liminf_{n\to\infty} \rho(T^n x, K) \leqslant \eta. \qquad (\liminf \leqslant \eta)$$

Теорема 4.3. *Пусть X — произвольное банахово пространство и степенно-ограниченный оператор T удовлетворяет ($\liminf \leqslant \eta$) для какого-то $\eta < \frac{1}{2}$. Тогда T асимптотически конечномерен.*

Доказательство. Оператор T переводит пространство X_0 в себя. Профакторизуем (как уже делали в доказательстве теоремы 4.1) по X_0, получим фактор-оператор $[T]$ на факторпространстве $[X] = X/X_0$ со стандартной факторнормой

$$|[x + X_0]|_{X/X_0} = \inf\{|y| \ \mid \ x - y \in X_0\},$$

снова удовлетворяющий условию ($\liminf \leqslant \eta$) с тем же η относительно компакта

$$\overline{K} = [K + X_0] \subset [X].$$

Покажем, что пространство исчезающих «фактор-векторов» нулевое, т.е. $(X/X_0)_0 = \{0\}$. Именно, нужно проверить, что если $x \neq X_0$, то факторнорма $|T^n[x + X_0]|_{X/X_0}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. Но эта факторнорма — не что иное, как расстояние от $T^n x$ до подпространства X_0 в пространстве X и легко показать, что оно отделено от нуля снизу при $x \notin X_0$ (см. лемму 1.1.1 первой главы).

Итак, чтобы доказать теорему, достаточно показать конечномерность X, предполагая, что $X_0 = 0$.

Сначала мы доказываем, что условие $\eta < \frac{1}{2}$ гарантирует равномерную отделенность от нуля итераций $|T^n x|$ (**лемма 4.3.1**):

$$\forall n \ \ \frac{1 - 2\eta}{C}|x| \leqslant |T^n x| \leqslant C|x|.$$

Из этой оценки ясно, что на пространстве X норма

$$|x|_1 = \limsup_{n\to\infty} |T^n x|$$

эквивалентна исходной. В новой норме оператор T — изометрия. Однако в новой норме условие ($\liminf \leqslant \eta$) может перестать выполняться.

Лемма 4.3.2 выводит из условия ($\liminf \leqslant \eta$) условие (8), достаточно громоздкое, зато сохраняющееся при перенормировках:

$$\left.\begin{array}{c}\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbb{N}:\text{для всякого множества } F=\{x_1,\dots,x_m\}\subset B_X\\ \exists x_{i_1},\dots,x_{i_p}\in F,\ i_1<\dots<i_p,\ n_1\leqslant\ldots\leqslant n_p\in\mathbb{N},\\ |\sum_{j=1}^{p}\pm T^{n_j}x_{i_j}|\leqslant\varepsilon\end{array}\right\}\quad(8)$$

(Полные формулировки и доказательства лемм мы дадим чуть ниже).

Продолжим доказывать теорему 4.3. Предположим, что изометрия T бесконечномерного пространства X удовлетворяет условию (8) и придем к противоречию. Рассмотрим малое ε, возьмем какое-нибудь $m=m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, как в условии (8). Всякая изометрия допускает собственные T-инвариантные подпространства (для комплексного X этот результат восходит к [34], для вещественного X это показано в нашей статье [100], изложению этого результата посвящена глава 5 данной диссертации) и вложенные цепочки таких подпространств произвольной длины, в частности, длины, большей m — этот факт и приводит к противоречию. Рассмотрим такую цепочку

$$X=L_1\supset L_2\supset\cdots\supset L_m\supset L_{m+1}.$$

Выберем для каждого $i\in\{1,\dots,m\}$ в пространстве L_i ε-перпендикуляр к L_{i+1}, т.е. такой вектор $x_i\in L_i$, что

$$|x_i|=1,\quad \rho(x_i,L_{i+1})>1-\varepsilon.$$

Пусть $F=\{x_1,\dots,x_m\}$.

Согласно (8), найдутся номера $i_1<i_2<\dots<i_p\in\{1,\dots,m\}$ и степени $n_1<n_2<\dots<n_p\in\mathbb{N}$ такие, что для какого-то выбора знаков $\pm$

$$|T^{n_1}x_{i_1}\pm T^{n_2}x_{i_2}+\dots\pm T^{n_p}x_{i_p}|_1\leqslant\varepsilon. \tag{9}$$

T — изометрия, а n_1 — самая маленькая степень из всех степеней итераций T, участвующих в (9). Вынося в (9) изометрию T^{n_1} за скобки и опуская ее, получаем

$$|x_{i_1} \pm T^{n_2-n_1}x_{i_2} \pm \cdots \pm T^{n_p-n_1}x_{i_p}|_1 \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Последнее неравенство невозможно, так как в нём все слагаемые, кроме первого, лежат в пространстве L_{i_2}, а первое слагаемое $(1-\varepsilon)$-удалено от L_{i_2}. Итак, $|\quad|_1$-норма в (10) не может быть меньше $1-\varepsilon$. Полученное противоречие показывает, что $\dim X < \infty$ (даже $< m$). Теорема 4.3 доказана.

Точные формулировки и доказательства лемм 4.3.1 и 4.3.2.

Лемма 4.3.1. *Если в условии* $(\liminf \leqslant \eta)$ *число* η *меньше* $\frac{1}{2}$, *то*

$$\forall x \in X \ \forall n \ |T^n x| \geqslant \frac{1-2\eta}{C}\rho(x, X_0).$$

В частности, если $\eta < \frac{1}{2}$ *и* $X_0 = 0$, *то*

$$\forall x \in X \ \forall n \ |T^n x| \geqslant \frac{1-2\eta}{C}|x|.$$

Доказательство проведем в три этапа. Фиксируем $\alpha, 2\eta < \alpha < 1$.

1) Для каждого вектора $x \in X$ существуют сколь угодно большие пары степеней $n_1 < n_2$, n_2 сколь угодно больше n_1, такие, что

$$|T^{n_1}x - T^{n_2}x| \leqslant \alpha|x|.$$

Именно, в силу компактности K некоторые итерации $T^{n_i}\left(\frac{x}{|x|}\right)$ единичного вектора $\frac{x}{|x|}$ подходят $\frac{\alpha}{2}$-близко к одному и тому же элементу K, а, значит, α-близки между собой, то есть $|T^{n_1}\left(\frac{x}{|x|}\right) - T^{n_2}\left(\frac{x}{|x|}\right)| \leqslant \alpha$. Остальное следует из однородности нормы и оператора:

$$|T^{n_1}x - T^{n_2}x| = |x| \cdot |T^{n_1}\left(\frac{x}{|x|}\right) - T^{n_2}\left(\frac{x}{|x|}\right)| \leqslant \alpha|x|.$$

2) Пусть $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Если для некоторого n $|T^n x| \leqslant \varepsilon$, то найдется вектор x_1 такой, что

$$|x - x_1| \leqslant C\varepsilon \text{ и для некоторого } m \ |T^m x_1| \leqslant \alpha\varepsilon.$$

В самом деле, шаг 1), примененный к вектору $T^n x$, позволяет заметить: существуют $m_1 > n$, $m_2 > m_1 + n$ такие, что $|T^{m_1}x - T^{m_2}x| \leqslant \alpha\varepsilon$. Положим $x_1 = x - T^{m_2-m_1}x$. Тогда

$$|x - x_1| = |T^{m_2-m_1}x| \leqslant C|T^n x| \leqslant C\varepsilon, \quad |T^{m_1}x_1| = |T^{m_1}x - T^{m_2}x| \leqslant \alpha\varepsilon.$$

3) Если для некоторого n $|T^n x| \leqslant \varepsilon$, то

$$\rho(x, X_0) \leqslant \frac{1}{1-\alpha} C\varepsilon.$$

В самом деле, строим x_1, как в 2): $|x - x_1| \leqslant C\varepsilon$ и для какого-то m_1 $|T^{m_1}x_1| \leqslant \alpha\varepsilon$. Применяя 2) уже к вектору x_1, строим x_2, такой, что

$$|x_1 - x_2| \leqslant C\alpha\varepsilon \text{ и для некоторого } m_2\ |T^{m_2}x_2| \leqslant \alpha^2\varepsilon.$$

Продолжая применять рассуждение 2) к вновь построенным векторам, получаем последовательность векторов x_k такую, что

$$|x_k - x_{k-1}| \leqslant C\alpha^{k-1}\varepsilon, |T^{m_k}x_k| \leqslant \alpha^k\varepsilon.$$

Последовательность x_k сходится к вектору x_∞, лежащему в X_0. Но тогда

$$\rho(x, X_0) \leqslant |x - x_\infty| \leqslant |x - x_1| + |x_1 - x_2| + \cdots \leqslant (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots)C\varepsilon = \frac{1}{1-\alpha} C\varepsilon.$$

Устраняя ε и обращая неравенства, перепишем утверждение 3) в эквивалентном виде:

$$\text{для всех } n \ \ |T^n x| \geqslant \frac{1-\alpha}{C} \rho(x, X_0).$$

Остальная часть леммы очевидна.

Замечание. Напомним, что одно условие $X_0 = 0$ еще не гарантирует равномерную отделенность от нуля орбит $T^n x$, см. пример 2 взвешенного правого сдвига в $l_2(\mathbb{Z})$ в параграфе 4.1.

Не исключено, что равномерная отделенность снизу от X_0 имеет место и при $\frac{1}{2} \leqslant \eta < 1$). Однако следующая лемма при $\eta \geqslant \frac{1}{2}$ уже неверна.

Лемма 4.3.2. *Пусть оператор* T *удовлетворяет* ($\liminf \leqslant \eta$) *и* $\eta < \frac{1}{2}$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $m = m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *такое, что для всякого множества* $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset B_X$ *из* m *элементов*

$$\exists x_{i_1}, \ldots, x_{i_p} \in F\ (i_1 < \cdots < i_p),\ n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p \in \mathbb{N},\ |\sum_{j=1}^{p} \pm T^{n_j} x_{i_j}| \leqslant \varepsilon$$

при некоторой подходящей расстановке знаков $\pm$.

Доказательство. Возьмем то же α, что в лемме 4.3.1, то есть удовлетворяющее неравенству $2\eta < \alpha < 1$ и покажем, как подобрать $m(\alpha)$. Потом окажется, что можно взять $m(\alpha^n) = m(\alpha)^n$. Это закончит доказательство, поскольку число α^n может быть сделано сколь угодно малым, если взять показатель n достаточно большим.

Пусть $\delta = \frac{\alpha}{2} - \eta > 0$. В компакте K существует конечная δ-сеть $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$, положим $m = m_\alpha = s + 1$.

Пусть $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset B_X$ — произвольное подмножество из m элементов. Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ в орбите $\{T^n x_i\ n \in \mathbb{N}\}$ есть сколь угодно большие степени n, для которых $T^n x_i$ η-близки к компакту K, среди этих степеней, в свою очередь, найдется бесконечное множество $N(i)$ такое, что для каждого $n \in N(i)$ вектор $T^n x_i$ $(\eta+\delta)$-близок к какому-то фиксированному элементу $y_{j(i)}$ сети, $j(i) \in \{1, \ldots, s\}$. (Ср. с первым шагом доказательства леммы 4.3.1.) Поскольку $m > s$, то для некоторых $i_1 < i_2$ $j(i_1) = j(i_2) = j$ и для любых $n_1 \in N(i_1)$, $n_2 \in N(i_2)$ выполнено

$$|T^{n_1} x_{i_1} - T^{n_2} x_{i_2}| \leqslant |T^{n_1} x_{i_1} - y_j| + |y_j - T^{n_2} x_{i_2}| \leqslant 2(\eta + \delta) = \alpha.$$

В силу однородности нормы и линейного оператора получаем импликацию:

$$|x_1|, \ldots, |x_m| \leqslant r \Rightarrow\ \exists i_1 < i_2,\ n_1 < n_2 : |T^{n_1} x_{i_1} - T^{n_2} x_{i_2}| \leqslant \alpha r. \qquad (11)$$

Итак, лемма доказана для $\varepsilon = \alpha$. Перейдем от α к α^2. В качестве $m(\alpha^2)$ возьмем число $m^2 = m(\alpha)^2$. Рассмотрим произвольный набор F, состоящий из m^2 векторов B_X. Разобьем его на m последовательных упорядоченных наборов $F_1, \ldots, F_m$ по m векторов. В каждом F_j можно, согласно уже доказанному, выбрать пару векторов $x_{i_{(j,1)}}$ и $x_{i_{(j,2)}}$, $i_{(j,1)} < i_{(j,2)}$ и подобрать степени $n_{(j,1)} \leqslant n_{(j,2)}$ так, что $\forall j = 1, \ldots, m$

$$y_j := T^{n_{(j,1)}} x_{i_{(j,1)}} - T^{n_{(j,2)}} x_{i_{(j,2)}}, \ |y_j| \leqslant \alpha. \tag{12}$$

Теперь уже из этих $y_1, \ldots, y_m$, согласно (11), выберем y_{j_1}, y_{j_2}, $j_1 < j_2$ такие, что

$$\exists k_1 < k_2, \quad |T^{k_1} y_{j_1} - T^{k_2} y_{j_2}| \leqslant \alpha^2. \tag{13}$$

После подстановки в (13) выражений y_j из (12) получаем

$$|T^{k_1}(T^{n_{(j_1,1)}} x_{i_{(j_1,1)}} - T^{n_{(j_1,2)}} x_{i_{(j_1,2)}}) - T^{k_2}(T^{n_{(j_2,1)}} x_{i_{(j_2,1)}} - T^{n_{(j_2,2)}} x_{i_{(j_2,2)}})| \leqslant \alpha^2.$$

Число k_2 следует выбрать настолько больше k_1, чтобы $k_1 + n_{(j_1,2)} \leqslant k_2 + n_{(j_2,1)}$. После раскрытия скобок получится сумма четырех векторов, степени и номера которых не убывают, как того и требует заключение доказываемой леммы.

Повторяя рассуждение, начатое после формулы (11), получаем последующие оценки. Для α^3 формула будет выглядеть так:

$$\Big|\big(T^{\cdot}(T^{\cdot}x_{\cdot} - T^{\cdot}x_{\cdot}) - T^{\cdot}(T^{\cdot}x_{\cdot} - T^{\cdot}x_{\cdot})\big) - \big(T^{\cdot}(T^{\cdot}x_{\cdot} - T^{\cdot}x_{\cdot}) - T^{\cdot}(T^{\cdot}x_{\cdot} - T^{\cdot}x_{\cdot})\big)\Big| \leqslant \alpha^3$$

(в этом выражении громоздкие индексы заменены точками). При раскрытии скобок получится формула нужного вида ($\sum \pm T^{\cdot\cdot} \leqslant \alpha^3$)

В качестве $m(\alpha^n)$ берем $m^n(\alpha)$. (При этом в формуле ($\sum \pm T^{\cdot\cdot} \leqslant \alpha^n$) будет 2^n слагаемых). Лемма 4.3.2 доказана.

4.4 Условие ($\liminf \leqslant \frac{1}{2}$) не влечёт асимптотической конечномерности: изометрии с плотными обмотками тора в $C(M)$

В этом параграфе мы показываем, как можно строить изометрии T бесконечномерного банахова пространства $X = C(M)$, для которых существуют точки, орбиты которых для каждого $\eta > \frac{1}{2}$ являются η-плотными в 1-шаре X. Из этого результата следует, что условие рефлексивности пространства X в теореме 4.2 существенна, а теорему 4.3 для общих банаховых пространств нельзя усилить, увеличив η.

Прежде чем переходить к общему изложению, покажем, как плотная обмотка тора позволяет дать пример в конечномерном случае.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство с нормой

$$|z|_\infty = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}.$$

Поликруг — это единичный шар. Рассмотрим в нём тор радиуса r:

$$O^n(r) = \{z \mid |z_1| = \ldots = |z_n| = r\}.$$

В торах существуют плотные обмотки. Например, в торе O^n радиуса 1 существуют такие $f \in O^n$, что множество $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ плотно в O^n. Достаточно взять $f \in O^n$, координаты $f_1, \ldots, f_n$ которой линейно независимы над полем рациональных чисел. (Ниже будет ясно, почему для обозначения элемента мы взяли букву f, которой принято обозначать функции.)

Рассмотрим оператор умножения $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, определенный так:

$$T(z_1, \ldots, z_n) = (f_1 z_1, \ldots, f_n z_n). \qquad (*)$$

Орбита каждой точки $z \in \mathbb{C}$ плотно заполняет тор радиуса $|z|$. В частности, орбита любой точки $z \in O^n(\frac{1}{2})$ плотна в торе $O^n(\frac{1}{2})$ радиуса $\frac{1}{2}$. Это верно и для орбиты оператора T^{-1}.

Но, в свою очередь, тор радиуса $\frac{1}{2}$ является $\frac{1}{2}$-плотным множеством в поликруге, поскольку каждая точка $z = (z_1, \ldots, z_n)$ поликруга находится на расстоянии не большем $\frac{1}{2}$ от точки

$$\widetilde{z} = \left(\frac{z_1}{|z_1|}, \ldots, \frac{z_n}{|z_n|} \right) \in O^n\big(\frac{1}{2}\big)$$

(при этом если вдруг какая-то координата p_i нулевая, то можно положить, например, $\widetilde{z}_i = \frac{1}{2}$).

Мы доказали следующее: если координаты $f = (f_1, \ldots f_n) \in O^n(\frac{1}{2})$ линейно независимы над полем рациональных (комплексных) чисел, то

$$\forall z \in B \ \liminf_{n\to\infty} |T^n f - z| \leqslant \frac{1}{2},$$

то есть орбита точки $f \in O^n(\frac{1}{2})$ под действием оператора умножения $(*)$ является $\frac{1}{2} + \varepsilon$-плотной в поликруге.

Опишем конструкцию иначе, чтобы затем перейти к бесконечномерному случаю.

Пространство $\mathbb{C}^n$ с нормой, рассмотренной нами, можно отождествить с пространством $C(M)$ непрерывных комплекснозначных функций на n-элементном дискретном пространстве $M = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, отождествив вектор $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ с функцией $z : M \to \mathbb{C}$, действующей по формуле $z(\lambda_i) = z_i$. Мы показали, что для любого конечного множества M существуют функции $f \in C(M)$, степени которых плотно заполняют тор. Между тем это утверждение справедливо и для произвольных компактных подмножеств $M \subset \Lambda$, а не только для конечных. Эту конструкцию мы сейчас и опишем. Роль набора рационально независимых чисел будут играть так называемые множества Кронекера в единичной окружности $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

Пусть $C(M)$ — пространство непрерывных комплекснозначных функций $C(M)$ на произвольном нульмерном метрическом компакте. Оказывается, существуют функции $f \in C(M)$, $|f| \equiv 1$ такие, что оператор $T : C(M) \to C(M)$ умножения на f будет удовлетворять условию

($\liminf \leqslant \frac{1}{2}$) с притягивающей *точкой* $K \in C(M)$. Очевидно, что T — изометрия. Поскольку изометрические операторы не являются асимптотически конечномерными (для них $X_0 = 0$), примеры данного параграфа дают отрицательный ответ на вопрос ([33],1.3.33). Заметим, что в силу результатов предыдущего параграфа «глубину притягивания» $\eta = \frac{1}{2}$ уменьшить нельзя: операторы, удовлетворяющие условию ($\liminf \leqslant \eta$) при $\eta < \frac{1}{2}$ асимптотически конечномерны.

Ниже все упоминаемые функции предполагаются непрерывными, а M всегда компакт.

Обозначим $D \subset \mathbb{C}$ — круг радиуса 1, $\Lambda = \partial D$ — единичная окружность. Соответственно, если $r > 0$, то $r\Lambda$ обозначает окружность радиуса r в комплексной плоскости.

Единичный шар $B_{C(M)} \subset C(M)$ — это функции вида $f : M \to D$. *Тором радиуса r назовем* назовем множество функций f, принимающих значения в $r\Lambda$, т.е. таких, что $\forall x \in M \ |f(x)| = r$. Символом $O(M) \subset C(M)$ обозначим тор радиуса 1.

Заметим, что

$$f \in O(M) \Longleftrightarrow f(M) \subset \Lambda \Longleftrightarrow \forall x \in M \ |f(x)| = 1 \Longleftrightarrow \|f\| = \|\frac{1}{f}\| = 1.$$

Лемма 4.4.1. *Пусть $M \subset \Lambda$. Тор радиуса $\frac{1}{2}$ является $(\frac{1}{2}+\varepsilon)$-плотным в единичном шаре $B_{C(M)}$, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall f : M \to D \ \exists \tilde{f} : M \to \Lambda, \ \|f - \frac{1}{2}\tilde{f}\| < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Доказательство. Если $\forall t \in M \ f(t) \neq 0$, то положим $\tilde{f} = \frac{f}{|f|}$ («сдвиг значения по радиусу»). Если функция f принимает значение 0, то перед нормированием её надо сначала с этого нуля «сдвинуть», т.е. найти близкую функцию, не принимающую значение 0. Покажем, как это можно сделать. В книге [77] сходное рассуждение называется «борьба с химерой (доказательство леммы о свободной точке)».

Для наглядности удобнее считать, что f задана на всей окружности Λ — продление возможно в силу, например, теоремы Титце — Урысона. Итак, наша задача — пошевелить непрерывную функцию $f : \Lambda \to D$ так, чтобы она не принимала значение 0. Химерическая трудность заключается в том, что значения f могут заполнять целую окрестность нуля или даже весь диск D, как в отображении Пеано. Эта трудность преодолевается так: сначала аппроксимируем f кусочно-«линейной» функцией $\widehat{f}$, выбрав в качестве узлов интерполяции конечное множество в окружности Λ, заполняющее окружность достаточно тесно. В силу равномерной непрерывности функции f функцию $\widehat{f}$ можно сделать сколь угодно близкой к ней. В то же время образ функции $\widehat{f}$ — ломаная в D — сдвигается с нуля без проблем. Лемма доказана.

Топологическое замечание. Лемма 4.4.1 верна для метрических компактов M при условии, что $\dim M \leqslant 1$. Если же M содержит топологический 2-диск (тогда можно считать, что $M = D$), то лемма неверна. Тогда, например, *тождественная* функция $f : D \to D$ удалена от *любой* функции вида $\frac{\tilde{f}}{2} : D \to \frac{1}{2}\Lambda$ на расстояние *ровно* $\frac{3}{2}$ (дальше не бывает!). В самом деле, пусть $\tilde{f} : D \to \Lambda$. Сужение $\tilde{f}$ на Λ является отображением степени 0, поэтому на окружности Λ найдётся точка λ, в которой $f(\lambda) = -\lambda$. Тогда $\|f - \frac{\tilde{f}}{2}\| = \frac{3}{2}$, так как

$$|f(\lambda) - \frac{\tilde{f}}{2}(\lambda)| = |\lambda + \frac{1}{2}\lambda| = \frac{3}{2}.$$

Вообще, если $g, h : \Lambda \to \Lambda$ и степени $\deg g$ $\deg h$ отображений различны, то $\|g - h\| = 2$, так как найдётся $\lambda \in \Lambda$ такое, что $g(\lambda) = -h(\lambda)$. (В самом деле, если $\|g - h\| < 2$, то нетрудно построить гомотопию, соединяющую отображения g и h и, стало быть, их степени одинаковы).

Из топологии вернёмся в анализ. Пусть $M \subset \mathbb{C}$. Определим оператор умножения $T : C(M) \to C(M)$ формулой

$$(Tf)(t) = tf(t), t \in M.$$

Если $M \subset \Lambda$, то $\forall t \in M$ $|t| = 1$ и T — изометрия.

Оказывается, что для множеств M специального вида (так называемых множеств Кронекера) T-орбиты точек тора $O(M)$ плотны в $O(M)$.

Множество $M \subset \Lambda$ называется множеством Кронекера, если всякую непрерывную функцию $f : M \to \Lambda$ можно равномерно приблизить характерами Λ (функциями вида $t \to t^n$, $n \in \mathbb{Z}$; достаточно и $n \in \mathbb{N}$). Нам удобно сформулировать понятие кронекеровости следующим образом.

Лемма 4.4.2. *Множество $M \subset \Lambda$ является множеством Кронекера тогда и только тогда, когда для любой $f \in O(M)$ орбита $\{f, Tf, T^2 f, \ldots\}$ плотна в $O(M)$.*

Доказательство. T — изометрия, поэтому достаточно предполагать, что $f \equiv 1 \in O(M)$. В этом случае $T^n f(t) = t^n$. Остальное очевидно.

Ясно, что в лемме 4.4.2 оператор T можно заменить на оператор T^{-1}.

Теорема 4.4. *Пусть $M \subset \mathbb{C}$ и $T : C(M) \to C(M)$ — оператор умножения на t,*

$$(Tf)(t) = tf(t).$$

Если $M \subset \Lambda$ — множество Кронекера, то для каждой $f \in B_{C(M)}$ и для каждой функции $k \in O(M)$ найдется последовательность степеней $m_n \to \infty$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \|T^{m_n} f - \frac{k}{2}\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

В частности, оператор T удовлетворяет условию $(\liminf \leqslant \frac{1}{2})$, но не является асимптотически конечномерным, если пространство $C(M)$ бесконечномерно, т.е. компакт M содержит бесконечное множество точек.

Доказательство. Легко следует из лемм 4.4.1 и 4.4.2. Нужно только заметить, что $\|T^{m_k} f - \frac{k}{2}\| = \|f - T^{-m_k} \frac{k}{2}\|$.

Теорема 4.5. *Пусть M — нульмерный метрический компакт, в котором содержится бесконечно много точек. Существует гомеомор-*

физм $g : M \to g(M) \subset \Lambda$ *такой, что и оператор умножения* $T : C(M) \to C(M)$, $(Tf)t = g(t)f(t)$ *удовлетворяет условию* $(\liminf \leqslant \frac{1}{2})$, *но не является асимптотически конечномерным.*

Доказательство. M гомеоморфен подмножеству любого совершенного множества, например, какого-нибудь совершенного множества Кронекера (такие бывают — см., например, [78]). Но кронекеровость наследуется замкнутыми подмножествами. Остальное очевидно.

Замечание. Спектр $\sigma(T) = g(M)$ — множество Кронекера.

Пример. Пусть c — банахово пространство сходящихся последовательностей. Пусть $\lambda_n \in \mathbb{C}, \lambda_n \to \lambda$. Можно отождествить c и $C(M)$,

$$M = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots\} \cup \{\lambda\},$$

относясь к сходящимся последовательностям $(f_n) \in c$ как к функциям $f \in C(M)$, $f(\lambda_n) = f_n; f(\lambda) = \lim f_n$. Определим оператор $T : c \to c$, $(Tf)_n = \lambda_n f_n$. Если множество $M = \{\lambda_n \to \lambda\}$ кронекерово, то оператор T — изометрия, удовлетворяющая условию $4_{\frac{1}{2}}$ для любого одноточечного $K = \{k\} \subset \frac{O(M)}{2}$.

Отметим, что операторы из c в c вида $(Tf)_n = \lambda_n f_n$, $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ (λ_n попарно различны), согласно наблюдению Любича [56], не обладая полной системой собственных конечномерных подпространств, являются тем не менее скалярно почти периодичными. Последнее означает, что для любого функционала $h' \in c'$ и для любого $f \in c$ последовательность $\langle T^n f, h' \rangle$ будет почти периодична.

Вообще, в статье [56] Любич показал, что в рефлексивном пространстве (и вообще, в слабо полном пространстве) условие полноты системы собственных подпространств эквивалентно скалярной почти периодичности. По-видимому, результаты параграфа 4.2 этой главы справедливы и для слабо полного пространства.

Глава 5

Инвариантные пространства у операторов на вещественных банаховых пространствах

Инвариантными подпространствами называются *собственные замкнутые* подпространства X, переходящие в себя под действием оператора $T : X \to X$. В этой главе доказано существование инвариантных подпространств у некоторых линейных операторов на вещественных банаховых пространствах, в частности, у изометрий. Результаты опубликованы в работе [100].

5.1 Необходимые сведения из спектральной теории и формулировка основной теоремы

Пусть $T : X \to X$ — ограниченный линейный оператор на комплексном банаховом пространстве. Символами $\sigma(T)$ и $R(\lambda, T)$ обозначим его спектр и резольвенту. Пусть $\sigma(T)$ несвязен, F и $\sigma \backslash F$ — открыто-замкнутые части спектра. Охватим контуром γ множество F. Образ $[F]$ и ядро $[\sigma \backslash F]$

спектрального проектора

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, T)d\lambda$$

— инвариантные подпространства и $\sigma(T|_{[F]}) = F$.

Пусть спектр связен. Тогда, вырезая контуром γ подмножество F в спектре, надо домножать резольвенту на подходящую весовую функцию g, малую в окрестности точек пересечения $\gamma \cap F$:

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, T)g(\lambda)d\lambda.$$

Так можно строить спектральные подпространства при ограничениях на рост резольвенты, см. [36, 37], которые заведомо выполнены, если степени оператора $T^{\pm n}$ растут не слишком быстро. Например, условие неквазианалитичности оператора

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|T^n\|}{1+n^2} < \infty$$

гарантирует отделимость спектра [38].

Пусть теперь $T : X \to X$ и X вещественно. Спектральный проектор, соответствующий некоторой симметричной (относительно комплексного сопряжения в $\mathbb{C}$) компоненте спектра комплексификации $T_\mathbb{C} : X_\mathbb{C} \to X_\mathbb{C}$, если этот спектр несвязен, даёт симметричное (относительно комплексного сопряжения в $X_\mathbb{C}$) инвариантное подпространство $L_\mathbb{C}$. Его вещественная часть $L \subset X$ будет T-инвариантной, см., например, теорему 5.3 работы [39].

Между тем и в случае связного спектра $T_\mathbb{C}$ легко получить симметричное $T_\mathbb{C}$-подпространство методом, обрисованным выше: нужно интегрировать по *симметричному* контуру с *симметричной* функцией g. «Вещественная часть» образа $f(T_\mathbb{C})$ будет T-инвариантным подпространством в X. Ниже мы изложим более подробно «овеществление» одного из спектральных методов. Как приложение, получаем теорему, в комплексном случае доказанную Вермером в [35]. Последнее утверждение теоремы в комплексном случае нередко используется и восходит к теореме J из работы Годемана [34].

Теорема 5.1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, $T : X \to X$ — обратимый линейный оператор, такой, что*

$$\|T^n\| \underset{n\to\pm\infty}{=} O(|n|^k), k < \infty.$$

Если $\dim X > 2$, *то оператор T имеет инвариантное подпространство. В частности, линейная изометрия $T : X \to X$ вещественного пространства имеет инвариантное подпространство, если* $\dim X > 2$.

Следствие. *Если вещественная размерность банахова пространства X (комплексного или вещественного) не меньше числа $2m$, то существует цепочка длины m последовательно строго вложенных друг в друга инвариантных подпространств.*

Наиболее близки по духу к настоящей главе оказались результаты работы [39]. Заметим, что, в отличие от результатов Вермера и Годемана, известные теоремы Ароншайна — Смита и Ломоносова о наличии инвариантных пространствах у компактных операторов обобщались на вещественный случай, см. [43, 44, 45] и ссылки там.

Разумеется, не все инвариантные подпространства получают спектральными методами. Бывают операторы вольтерровского типа, сужение которых на инвариантные подпространства имеет тот же спектр, что и исходный оператор: $\sigma(T|_L) = \sigma(T) = [0, 1]$, см. [58]. Вообще говоря, если у $T_{\mathbb{C}}$ есть инвариантные подпространства, то неизвестно, есть ли среди них симметричные; утверждение о существовании последних равносильно гипотезе 3 работы [43].

5.2 Комплексификация вещественного пространства и доказательство теоремы 5.1

Пусть X — комплексное банахово пространство и $x \in X$. Отображение $\lambda \mapsto R(\lambda, T)x$ — голоморфная, определенная вне $\sigma(T)$ функция со значениями в X. Максимальное однозначное аналитическое продолжение этой функции (если оно существует) называется *локальной резольвентой в точке* x. Её область определения обозначим $\rho(x)$. Множество $\sigma(x) := \mathbb{C}\backslash\rho(x) \subset \sigma(T)$ называется локальным спектром x.

Пусть теперь пространство X вещественное. Напомним, что комплексификацией X называется пространство $X_{\mathbb{C}}$, элементы которого имеют вид $z = (x + iy)$, векторы $x, y \in X$ естественно называть вещественной ($\operatorname{Re} z$) и мнимой ($\operatorname{Im} z$) частями z. Мы уже пользовались комплексификацией в лемме 3.1.1. На $X_{\mathbb{C}}$ задано сопряжение $J : x + iy \mapsto x - iy$. $\mathbb{C}$-однородная норма на $X_{\mathbb{C}}$ такова:

$$\|z\|^2 = \max\{\|\operatorname{Re} \lambda z\|^2 + \|\operatorname{Im} \lambda z\|^2 \mid \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\}.$$

Эта норма эквивалентна норме прямой суммы $X \oplus X$. Оператор $T : X \to X$ комплексифицируется так: $T_{\mathbb{C}}(x + iy) = (Tx + iTy)$. Ясно, что $(T^n)_{\mathbb{C}} = (T_{\mathbb{C}})^n$.

Назовем подмножество $F \subset \mathbb{C}$ симметричным, если F симметрично относительно вещественной оси, т.е. $F = \overline{F}$. Аналогично, подмножество $Z \subset X_{\mathbb{C}}$ назовем симметричным, если $J(Z) = Z$. Легко видеть, что если *подпространство* $Z \subset X_{\mathbb{C}}$ симметрично, то $Z = L_{\mathbb{C}}$, где $L = \operatorname{Re} Z = \operatorname{Im} Z$. В самом деле, пусть $L = \operatorname{Re} Z$ и $x \in L$, то есть существует $y \in X$ такой, что $x + iy \in Z$. Последнее, в силу симметричности, равносильно тому, что $x - iy \in Z$. Далее,

$$x - iy \in Z \Leftrightarrow i(x - iy) = (y + ix) \in Z \Leftrightarrow y \in L.$$

Лемма 5.2.1. *Пусть оператор $T_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией оператора $T : X \to X$. Тогда спектр $\sigma(T_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{C}$ симметричен.*

Если оператор $T_{\mathbb{C}}$ обладает локальной резольвентой в точке $z \in X_{\mathbb{C}}$, то и в точке Jz тоже. При этом $\sigma(J(z)) = \overline{\sigma(z)}$.

Доказательство. Легко проверить равенство

$$R(\bar{\lambda}, T_{\mathbb{C}}) = J \circ R(\lambda, T_{\mathbb{C}}) \circ J,$$

поэтому спектр оператора $T_{\mathbb{C}}$ симметричен (в [39] это лемма 4.1). Далее, если $z \in X_{\mathbb{C}}$ и функция f аналитически продолжает резольвенту $R(\lambda, T)z$, то функция

$$J \circ f \circ J : \lambda \to J \circ R(\lambda, T)(J(z))$$

аналитически продолжает резольвенту $R(\bar{\lambda}, T_{\mathbb{C}})z$. Поэтому области определения максимальных продолжений совпадают и $\sigma(J(z)) = \overline{\sigma(z)}$. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему 5.1. Предположим сначала, что спектр $T_{\mathbb{C}}$ состоит более, чем из двух точек. Пусть F — симметричная дуга окружности, содержащая собственную часть спектра оператора $T_{\mathbb{C}}$ и $[F] \subset X_{\mathbb{C}}$ — подпространство, состоящее из векторов, локальный спектр которых содержится в F. Поскольку спектр оператора $T_{\mathbb{C}}$ отделим ([38]), подпространство $[F] \subset X_{\mathbb{C}}$ собственное. Оно инвариантно относительно $T_{\mathbb{C}}$. Из леммы 5.2.1 следует, что это подпространство симметрично. Поэтому $\mathrm{Re}[F] \subset X$ — T-инвариантное подпространство.

Возможно, что спектр $T_{\mathbb{C}}$ содержит не больше двух точек $\eta, \bar{\eta} \in \Lambda$, поэтому нет симметричной дуги F, содержащей *часть* спектра. В этом случае отделимость спектра и ограничение на рост $\|T^{\pm n}\|$ позволяет применить теорему Гельфанда—Хилле [79, 80] (ср. доказательство теоремы 3 в [35]), пользуясь которой, легко заключить, что $((T_{\mathbb{C}} - \eta)(T_{\mathbb{C}} - \bar{\eta}))^{k+1} = 0$, поэтому замыкание образа оператора

$$T_{\mathbb{C}}^2 - aT_{\mathbb{C}} + bI = (T_{\mathbb{C}} - \eta)(T_{\mathbb{C}} - \bar{\eta})$$

не совпадает со всем $X_{\mathbb{C}}$. Коэффициенты a, b вещественны, поэтому образ оператора $(T_{\mathbb{C}}^2 - aT_{\mathbb{C}} + bI) = (T^2 - aT + bI)_{\mathbb{C}}$ совпадает (при естественном вложении в $X_{\mathbb{C}}$) с комплексификацией образа оператора $T^2 - aT + bI$. Итак, замыкание образа оператора $T^2 - aT + bI$ не совпадает со всем X.

Это замыкание является либо инвариантным подпространством в X, либо нулем.

В последнем случае каждый $x \in X$ порождает не более чем двумерное инвариантное подпространство $\operatorname{span}\{x, Tx\}$.

Рассмотрим случай изометрии T. Если она биективна, то $\|T^{\pm n}\| = 1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и все доказано. Если же $TX \neq X$, то TX — искомое замкнутое инвариантное подпространство. Теорема 5.1 доказана.

Замечание 1. Мы использовали весьма общие результаты об отделимости спектра работы [38], однако для отделимости спектрального пространства $[F]$ в условиях нашей теоремы хватило бы ссылки на работу Лифа [37] и даже на базовые результаты Данфорда [36] или см. следствие 9 главы XVI §5 [81].

Замечание 2. В конце работы Любича, Мацаева и Фельдмана [38] упоминается, что Вермер установил существование инвариантных подпространств «разумеется, при наличии в спектре более, чем одной точки». Это не совсем точно. В упоминаемой работе Вермера [35] одноточечный случай отдельно разобран в доказательстве теоремы 3, именно это рассуждение мы применили при доказательстве теоремы 5.1 в случае, когда комплексификация имеет двухточечный спектр. Если спектр оператора $T_{\mathbb{C}}$ отделим (например, оператор неквазианалитичен), но рост степеней $\|T^n\|$ более полиномиального, то для получения симметричного инвариантного подпространства нашим методом необходимы **три** точки спектра.

Глава 6

О геометрии конусов, сфер и гиперплоскостей

Результаты этой главы опубликованы в работах [101, 102, 103].

В работе Крейна [46] введено понятие нормального конуса. В работе Емельянова и Вольфа [47] появилось условие строгой нормальности. Одно из основных приложений строгой нормальности — теорема 9 работы [47] — утверждает: если положительная полугруппа операторов на банаховом пространстве, упорядоченном строго нормальным конусом, имеет притягивающее множество вида

$$(\text{порядковый интервал с концами } \pm y) + (\text{шар радиуса } \eta < 1)$$

и если замыкание выпуклой оболочки орбиты y имеет инвариантную точку ω, то порядковый интервал с концами $\pm\frac{1}{1-\eta}\omega$ притягивает все элементы 1-шара. Эта теорема справедлива и для мультипараметрических положительных полугрупп операторов. В наших терминах условие теоремы аналогично условию ($\limsup \leqslant \eta$), исследованному нами в главе 4. Вместо компакта в этом условии — порядковый интервал.

В [47] было отмечено, что неизвестно, является ли каждый нормальный конус строго нормальным. В **параграфе 6.1** мы отвечаем на этот вопрос, приводя примеры нормальных, но не строго нормальных конусов. Мы также характеризуем строгую нормальность телесного конуса K в терминах геометрии его гиперплоской базы.

В **§ 6.2** мы показываем, что в счетномерном пространстве C_{00}, элементами которого являются финитные вещественные последовательности, существует конус K, не содержащий прямых, архимедово замкнутый, но не замкнутый относительно некоторой почти максимальной топологии τ на C_{00}, сопряженной с двойственностью $\langle C_{00}, F\rangle$. Архимедова замкнутость подмножества K означает замкнутость пересечений K с конечномерными подпространствами.

Всякое разделяющее элементы W подпространство F в алгебраически сопряженном пространстве $W^{\#}$ линейных функционалов на W определяет топологию Макки $\langle W \mid F\rangle$ — максимальную локально выпуклую топологию, согласованную с двойственностью.

Если $F \neq W^{\#}$, то в $\langle W \mid F\rangle$ имеются незамкнутые архимедовы множества. В частности, каждый разрывный функционал $h \in W^{\#}\backslash F$ определяет незамкнутую гиперплоскость $\ker h$. В работе [1] установлено, что если пространство W несчетномерно, то его любая локально выпуклая топология допускает архимедовы выпуклые незамкнутые конусы, не содержащие прямых. Наличие построенного нами конуса показывает заодно, какие гиперплоскости в счетномерном пространстве заведомомо тонкие.

В **параграфе 6.3** мы показываем, что верхний топологический предел произвольного семейства векторных подпространств X_α коразмерности k обязательно содержит какое-то подпространство X_0 коразмерности k. Ранее такое утверждение было установлено Арутюновым для банаховых пространств и последовательностей подпространств.

Верхний топологический пределом семейства $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ подмножеств топологического пространства X — это множество $Ls\{X_\alpha\}$, элементами которого являются такие точки x, каждая окрестность U которой пересекается с бесконечным количеством множеств X_α. Из нашего результата вытекает, в частности, что лемма Арутюнова справедлива для произвольных нормированных пространств и пространств Фреше.

6.1 Строго нормальные конусы и свойство MLUR

6.1.1 порядковые интервалы и крайние точки

Пусть E — нормированное упорядоченное пространство, $K = X_+$ — его положительный конус, он упорядочивает пространство X так: $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in K$. Конус порождает E, если $E = K - K$. Порядковым интервалом $\langle a, b\rangle$ называется множество

$$\langle a, b\rangle = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = (a + K)\bigcap(b - K).$$

Напомним, что расстояние между точкой a и подмножеством B метрического пространства M — это число $dist(a, B) = \inf\{\rho(a, b) \mid b \in B\}$. Несимметричным расстоянием от множества A до множества B называется число

$$\widetilde{dist}(A, B) = \sup_{a\in A} dist(a, B).$$

Хаусдорфовым расстоянием между A и B называется число

$$dist(A, B) = \max\{\widetilde{dist}(A, B), \widetilde{dist}(B, A)\}. \tag{1}$$

В работе Крейна [46] появилось понятие нормального конуса. В нашей терминологии конус нормален, если функция $\rho(x, y) = dist(\langle 0, x\rangle, \langle 0, y\rangle)$ расстояния между порядковыми интервалами, «начинающимися» в нуле и «кончающимися» в точках x и y, заданная на множестве $K \times K$, непрерывна в $(0, 0)$. Заметим, что в работе [46] Крейн дополнительно требовал в определении нормальности, чтобы конус был телесный, т.е. имел непустую внутренность. В последующих работах требование телесности ушло, однако заметим, что все конусы в этом параграфе телесные.

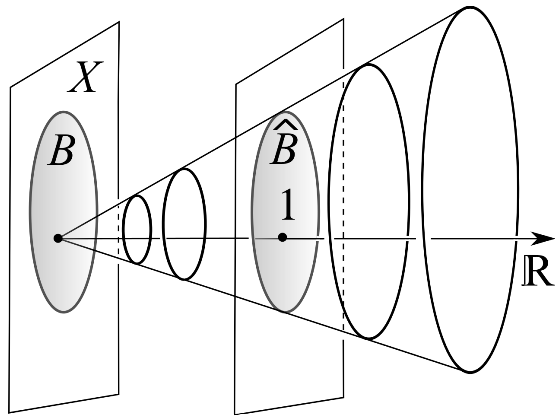
В работе [47] появилось условие строгой нормальности: непрерывность функции ρ на всем $K \times K$, а не только в точке $(0,0)$.

Нетрудно заметить, что функция ρ непрерывна на $K \times K$ если она непрерывна в точках вида (x,x) по одному аргументу, т.е. когда для любого $x \in K$ $\rho(x,y_n) \to 0$ при $y_n \to x$. В дальнейшем фраза вида «функция ρ непрерывна в точке x» будет подразумевать именно это.

Строгая нормальность на языке многозначных отображений — непрерывность отображения $z \mapsto \langle 0,z\rangle$ во всех точках $z \in K$. Можно определить условия «полустрогой» нормальности: полунепрерывность функции $z \mapsto \langle 0,z\rangle$. Полунепрерывность сверху (соответственно, снизу) означает, что при $y_n \to x$

$$\widetilde{dist}(\langle 0,y_n\rangle,\langle 0,x\rangle) \to 0 \quad (\text{соответственно,}\quad \widetilde{dist}(\langle 0,x\rangle,\langle 0,y_n\rangle) \to 0).$$

Всюду в этом параграфе X — вещественное пространство, $B \subset X$ — ограниченное выпуклое замкнутое множество в X с непустой внутренностью, $\widehat{X} = \mathbb{R} \times X$, $K \subset \mathbb{R} \times X$ — конус, порожденный базой $\widehat{B} := \{1\} \times B$, то есть объединение всех лучей, выходящих из нуля и проходящих через точки множества $\widehat{B}$. Ясно, что такой конус нормален и порождает пространство $\mathbb{R}\times X$. Норму в $\widehat{X}$ зададим так: $\|(t\times x)\| = |t|+\|x\|$. Если $x \subset X$, то символом $\widehat{x}$ будем обозначать вектор $(1 \times x) \in \widehat{X}$.



Отрезком $[a,b]$ в векторном пространстве называем обычный геометрический отрезок. Вынесем два обозначения:

$$[a,b] = \{x = a + t(b-a) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \quad \langle a,b\rangle = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

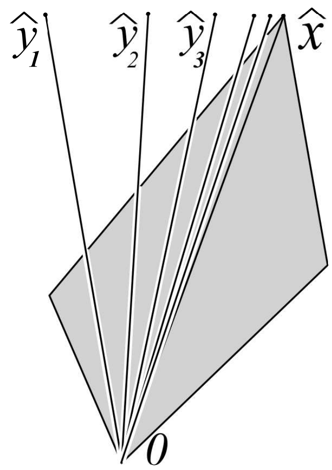
Ясно, что если $z \in K$, то $[0,z] \subset \langle 0,z\rangle$. Назовем толщиной порядкового интервала $\langle 0,z\rangle$ расстояние от $\langle 0,z\rangle$ до отрезка $[0,z] \subset \langle 0,z\rangle$.

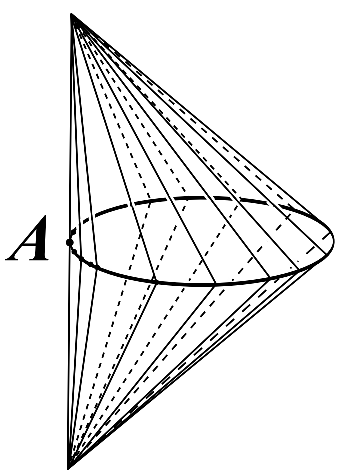
Нетрудно заметить, что x — крайняя точка B тогда и только тогда, когда толщина порядкового интервала $\langle 0, \widehat{x}\rangle$ равна нулю, т.е. когда $[0, \widehat{x}] = \langle 0, \widehat{x}\rangle$. См., например, [82], определение 1.42 и лемму 1.43.

Теорема 6.1. *Пусть $x \in B$. Если x не крайняя, но лежит в замыкании множества крайних точек B, то функция ρ разрывна в $\widehat{x}$.*

Доказательство. Пусть y_n — крайние точки множества B, $y_n \to x$. Порядковые интервалы $\langle 0, \widehat{y_n}\rangle$ совпадают с отрезками $[0, \widehat{y_n}]$ и сходятся к отрезку $[0, \widehat{x}]$, в то время, как порядковый интервал $\langle 0, \widehat{x}\rangle$ «толстый», т.е. содержит, кроме отрезка $[0, \widehat{x}]$, посторонние точки. (На левом рисунке ниже $\langle 0, \widehat{x}\rangle$ — это серый параллелограмм.) Остальное очевидно.

В любом выпуклом компакте $B \subset \mathbb{R}^2$ множество крайних точек замкнуто. (В самом деле, если $A \in B$ не крайняя, то A лежит на границе B на каком-то отрезке и у неё есть окрестность в множестве B, выглядящая, как открытый полукруг с добавленным диаметром. В этой окрестности крайних точек множества B нет.) Однако в $\mathbb{R}^3$ уже существуют выпуклые компакты, в которых крайние точки не образуют замкнутого множества. Один из примеров — правый рисунок ниже. Рассмотрим горизонтальную окружность, на которой лежит середина A вертикального отрезка. Пусть B — выпуклая оболочка отрезка и окружности. Точка $A \in B$ не крайняя, но все остальные точки окружности крайние.





Этот пример есть в книге Рокафеллара [83] после следствия 18.5.3.

Следствие. *В* $\mathbb{R}^4$ *есть нормальный, но не строго нормальный конус.*

Пример. Конус с базой $\widehat{B}$, где $B \subset \mathbb{R}^3$ — «волчок Рокафеллара».

Интуитивно ясно, что все неожиданные «превращения» порядковых интервалов должны происходить на границе конуса, и следующая теорема показывает, что это в самом деле так. Доказательство её несложно, но сравнительно длинно, оно приведено в конце параграфа.

Теорема 6.2. *Пусть* B *— ограниченное выпуклое подмножество* X*. Функция* $\rho(x, y)$ *непрерывна во внутренних точках конуса* $K \subset \mathbb{R} \times X$*.*

Лемма о посторонней точке.

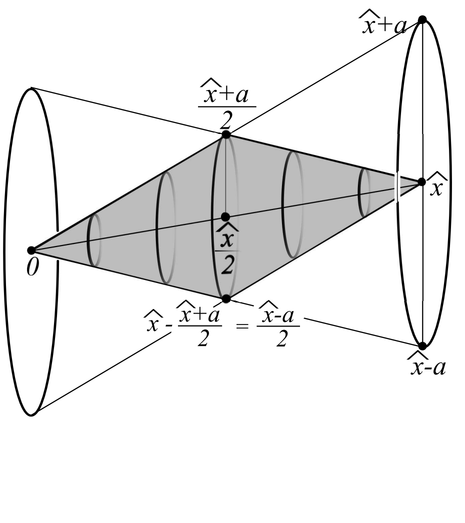
Пусть $x \in B$ *и* $a \in X$*.*

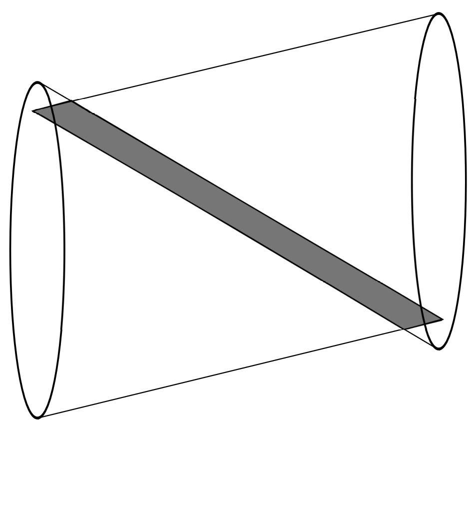
1. Следующие условия a) и b) эквивалентны:

a) $[x - a, x + a] \subset B$*, b)* $\frac{\widehat{x}+a}{2} \in \langle 0, \widehat{x} \rangle$*.*

2. Если $l(x)$ *— супремум длин отрезков* B *с серединой в* $x \subset B$*, то толщина интервала* $\langle 0, \widehat{x} \rangle$ *не меньше, чем* $\frac{\|l\|}{4}$ *и не больше, чем* $\|l\|$ *.*

Доказательства просты и мы их опустим, ограничившись рисунками. Множества B на обоих рисунках — правые вертикальные эллипсы. На левом рисунке самая длинная хорда множества B с серединой в точке $\widehat{x}$ велика и соответствующий порядковый интервал (пересечение «встречных» конусов) «толстый». На правом рисунке самая длинная хорда мала и порядковый интервал «худой», закрашена та часть порядкового интервала $\langle 0, \widehat{x} \rangle$, в которой находятся самые далекие точки от отрезка $[0, \widehat{x}]$.





Лемма о серединах длинных хорд.

Пусть x — крайняя точка B. Следующие условия эквивалентны:

a) имеется сходящаяся к x последовательность «равномерно не крайних» точек y_n, т.е. середин хорд B длин, больших некоторого $l > 0$;

b) Функция ρ разрывна в точке $\widehat{x}$.

Доказательство. Поскольку x — крайняя точка B, то $\langle 0, \widehat{x}\rangle = [0, x]$.

Пусть $\widehat{y}_n \to \widehat{x}$. Отрезки $[0, \widehat{y}_n]$ сходятся к отрезку $[0, \widehat{x}] = \langle 0, \widehat{x}\rangle$. Поэтому расстояние от интервалов $\langle 0, \widehat{y}_n\rangle$ до $\langle 0, \widehat{x}\rangle = [0, \widehat{x}]$ стремится к нулю тогда и только тогда, когда толщины интервалов $\langle 0, \widehat{y}_n\rangle$ стремятся к нулю. Осталось вспомнить часть 2 леммы о посторонней точке.□

Теорема 6.3 о полунепрерывности.

1. Если X конечномерно, то функция ρ полунепрерывна снизу независимо от порождающего конус множества B, т.е. предельный порядковый интервал может лишь «увеличиться».

2. Если X строго выпукло, т.е. все точки единичной сферы S — крайние точки шара B, то функция ρ полунепрерывна сверху, т.е. предельный порядковый интервал может лишь «уменьшиться».

Первая часть теоремы несложно следует из компактности конечномерного шара и рассуждений, которые читатель проделал при доказательстве леммы о посторонней точке. Вторая часть следует из того, что интервалы $\langle 0, \widehat{x}\rangle$ совпадают с отрезками $[0, \widehat{x}]$ (ср. с доказательством леммы о длинных хордах) и теоремы 6.2.

6.1.2 Строгая нормальность и свойство MLUR

В теореме 6.3 нам встретилось условие строгой выпуклости X: каждая точка единичной сферы S является крайней точкой шара B. Пространство называется равномерно выпуклым, если из условий

$$x_n \in S,\ y_n \in S,\ \frac{x_n + y_n}{2} \to S$$

следует, что $\|x_n - y_n\| \to 0$. Пространство называется локально равномерно выпуклым [59], если в предыдущем определении дополнительно «закрепить» один конец хорд: $x_n \equiv x \in S$.

Если же следить не за концом, а за серединой хорды, то получится то, что Андерсон [48] назвал midpoint locally uniform rotundity (MLUR).

Именно, X обладает свойством (MLUR), если для точек $x_n \pm v_n$ из условия

$$x_n \to x \in S,\ |x \pm v_n| \to S$$

следует, что $v_n \to 0$. Геометрически это означает, что любая точка x сферы S равномерно далека от середин длинных хорд этой сферы. Свойство MLUR, на наш взгляд, симметричнее свойства локальной равномерной выпуклости. Именно это свойство используется в нашей лемме о серединах длинных хорд. Из этой леммы следует, что в крайней точке x шара условие MLUR равносильно непрерывности функции ρ в точке $\widehat{x}$. Поскольку во внутренних точках конуса функция ρ непрерывна всегда (теорема 6.2), справедлива следующая теорема.

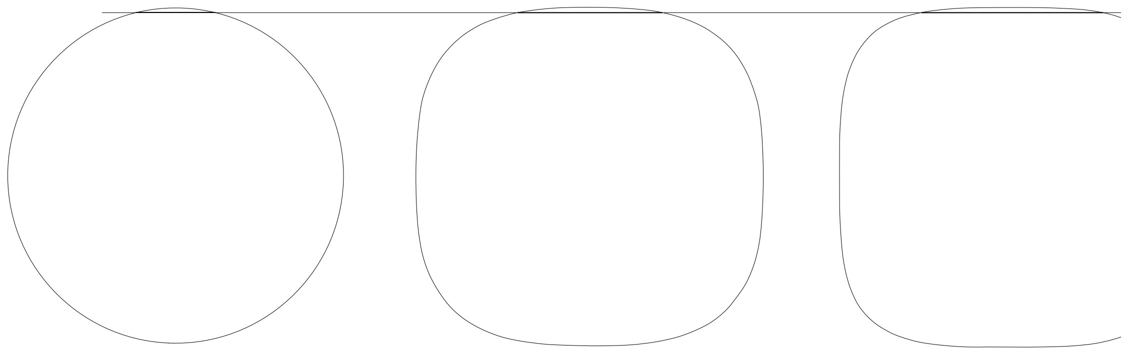
Теорема 6.4. *Пусть X строго выпукло, B — единичный шар в X. Конус $K \subset \mathbb{R} \times X$ является строго нормальным тогда и только тогда, когда $X \in MLUR$.*

Изучению свойства MLUR, сравнению его с другими характеристиками выпуклости сферы, вопросам двойственности и возможностям MLUR и не-MLUR перенормировок посвящено заметное количество работ. В частности, Кадец [49] установил, что сепарабельное банахово пространство изоморфно локально равномерно выпуклому, а, значит, и MLUR, пространству. С другой стороны, большинство хороших пространств допускают не MLUR-перенормировки. Укажем, например, на работу [50], там можно найти три примера не MLUR-пространств. Приведем пару наших примеров.

Пример 1. $B \subset l_\infty$. Элементы B нам удобно сгруппировать по два:

$$B \ni z = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots),\ |x_k|^k + |y_k|^k \leqslant 1,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Множество B замкнуто, выпукло. Рассматриваемое, как единичный шар, оно определяет в l_∞ норму, эквивалентную стандартной. Устроено B как произведение двумерных кругов в l_p-метриках с показателями $p = 1, 2, \ldots$. Известно, что при больших показателях p эти круги (т.е. множества, ограниченные кривой $x^p + y^p = 1$) всё больше походят на единичные квадраты со сторонами, параллельными координатным осям. Нарисуем круги, у которых $p = 2, 3, 4$, чтобы было ясно, откуда возьмутся длинные хорды, близкие к сфере:



При очень больших p эти круги практически неотличимы от квадрата (то есть круга в метрике l_∞ на плоскости $\mathbb{R}^2$), а соответствующая хорда становится почти равной длине стороны этого квадрата.

Легко видеть, что $z = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ — крайняя точка в B. Рассмотрим теперь точки вида z^k, отличающиеся от точки z координатой $(x_k) = 1 - \frac{1}{k}$. Легко показать, что точки z_k являются центрами достаточно длинных отрезков (в k-том координатном круге). В то же время $z^k \to z$.

Пример 2. (Выпуклое замкнутое подмножество в гильбертовом пространстве H с крайней точкой, приближаемой центрами бесконечномерных дисков радиуса 1, содержащихся в B.)

Пусть $\{e_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ — гильбертов базис в H и пусть B_n — единичный шар в подпространстве, натянутом на векторы e_i с номерами, не меньшими n. Положим для $n \geqslant 1$

$$Z_n = \left\{ te_1 + B_n \mid |t| \leqslant \frac{n}{n+1} \right\}.$$

Пусть B — замыкание выпуклой оболочки объединения всех Z_n. Внутренность B непуста (так как уже внутренность Z_1 непуста — она содержит шар в H радиуса $\frac{1}{2}$). Последовательность $y_n = \frac{n}{n+1} e_1$ центров (бесконечномерных!) дисков $B_n + y_n \subset B$ сходится к крайней точке e_1 множества B. Таким образом, если рассмотреть в H такую норму, в которой множество B будет единичным шаром, то эта норма будет эквивалентна исходной, но не будет обладать свойством MLUR.

Доказательство теоремы 6.2

Заметим: если K_1 и K_2 — два конуса и $K_1 \subset K_2$, то для всех x порядковый интервал $\langle 0, x \rangle_1$, определяемый первым конусом, содержится в порядковом интервале $\langle 0, x \rangle_2$, определяемым вторым конусом. В самом деле, для каждого $y \in \langle 0, x \rangle_1$ имеем:

$$y \in \langle 0, x \rangle_1 \Leftrightarrow y \in K_1, x - y \in K_1 \Rightarrow y \in K_2, x - y \in K_2 \Leftrightarrow y \in \langle 0, x \rangle_2.$$

Во-вторых, если конус K' получен из конуса K линейным преобразованием f, то $f(\langle 0, x \rangle) = \langle 0, f(x) \rangle'$.

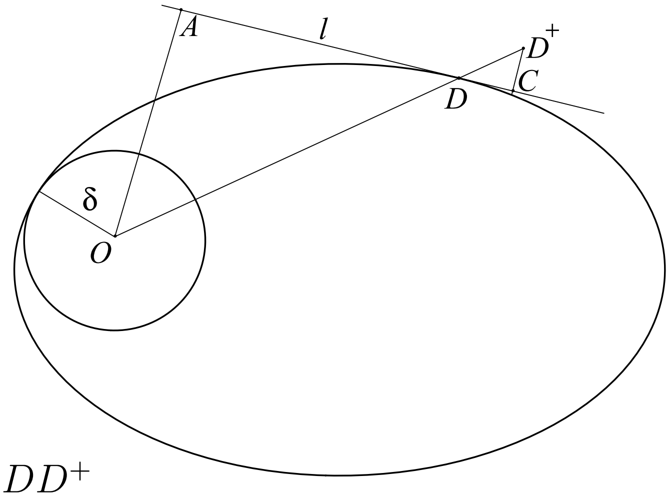
Пусть теперь $\widehat{x} \in \operatorname{int}(K)$ и $\widehat{y}_n \to \widehat{x}$. Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{x} = (1 \times 0) \in \widehat{B}$ (но помним, что B не обязательно шар). Мы должны показать, что $\langle 0, \widehat{y}_n \rangle \to \langle 0, \widehat{x} \rangle$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим линейные преобразования f_+ и f_- пространства $\mathbb{R} \times X$, которые сохраняют первую координату, а «вторую координату», т.е. гиперплоскость X, растягивают в $1 \pm \varepsilon$ раз относительно O:

$$f_\pm(t \times z) = (t \times (1 \pm \varepsilon) z).$$

Конус K оказывается «зажат» между конусами $f_\pm(K)$.

Множества $B_\pm = (1 \pm \varepsilon)(B)$ отделены от множества B. Более точно, расстояние от границ множеств $B_\pm$ до границы множества B не меньше $\varepsilon \cdot \delta$, где δ — радиус шара с центром в точке $x = 0$, содержащегося в B.



Покажем это на рисунке. Пусть l — опорная плоскость к множеству B в точке $D \in B$, $D^+ = (1+\varepsilon)D$. Ясно, что расстояние от точки D^+ до множества B не меньше, чем длина отрезка $|CD^+|$. Из подобия треугольников DAO и DCD^+ следует, что

$$\frac{CD^+}{OA} = \frac{DD^+}{OD} = \varepsilon,$$

поэтому $|CD^+| = \varepsilon|OA| \geqslant \varepsilon\delta$. Аналогичные рассуждения показывают, что расстояние от точки D до множества B_- также не меньше, чем число $\varepsilon\delta$. Итак, множество B входит в «промежуток» $B_- \subset B \subset B_+$ вместе со своей $\varepsilon\delta$-окрестностью.

Рассмотрим ещё линейные преобразования $g_n : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R} \times X$, тоже сохраняющие первую координату, а гиперплоскость $\widehat{X}$ аффинно сдвигающие так, чтобы точка $\widehat{y_n} = (1, y_n)$ перешла в $(1,0)$. Формально,

$$g_n(t \times z) = (t \times (z - ty_n)).$$

Обозначим порядковые интервалы, определяемые конусами $g_n(K)$, символом $\langle , \rangle_n$, а конусами $f_\pm(K)$ — символами $\langle , \rangle_\pm$. Из предыдущего рассуждения следует, что если $\|y_n - x\| < \varepsilon\delta$, то $K_- \subset K_n \subset K_+$. Поэтому и для порядковых интервалов

$$f_-(\langle 0, x\rangle) = \langle 0, x\rangle_- \subset \langle 0, x\rangle_n \subset \langle 0, x\rangle_+ = f_+(\langle 0, x\rangle).$$

Теперь вспомним, что $\langle 0, x\rangle_n = g_n\langle 0, g_n^{-1}x\rangle = g_n\langle 0, y_n\rangle$. Но при больших n порядковые интервалы $g_n(\langle 0, y_n\rangle)$ будут близки к интервалам $\langle 0, y_n\rangle$. Итак, при больших n имеем:

$$f_-(\langle 0, x\rangle) \subset \langle 0, y_n\rangle \subset f_+(\langle 0, x\rangle).$$

Поскольку при малых ε порядковые интервалы $f_\pm\langle 0, x\rangle$ близки к интервалу $\langle 0, x\rangle$, теорема 6.2 доказана.

6.2 Тонкие гиперплоскости F в $C_{00}^{\#}$ и незамкнутый конус в $\langle C_{00} \mid F\rangle$

В этом параграфе мы показываем, что в пространстве C_{00}, элементами которого являются финитные вещественные последовательности, существует конус K, не содержащий прямых, архимедово замкнутый, но не замкнутый относительно некоторой почти максимальной топологии τ на C_{00}, сопряженной с двойственностью $\langle C_{00}, F\rangle$.

Архимедова замкнутость (далее просто архимедовость) подмножества K локально выпуклого векторного пространства W означает замкнутость пересечений K с конечномерными подпространствами.

Всякое разделяющее элементы W подпространство F в алгебраически сопряженном пространстве $W^{\#}$ линейных функционалов на W определяет топологию Макки $\langle W \mid F\rangle$ — максимальную локально выпуклую топологию, согласованную с двойственностью.

Если $F \neq W^{\#}$, то в $\langle W \mid F\rangle$ имеются незамкнутые архимедовы множества. В частности, каждый разрывный функционал (то есть функционал $h \in W^{\#}$, не принадлежащий множеству F) определяет незамкнутую гиперплоскость $\ker h$. В работе [86] установлено, что если пространство W несчетномерно, то его любая локально выпуклая топология допускает архимедовы выпуклые незамкнутые конусы, не содержащие прямых.

Там же установлено, что если пространство W счетномерно, то максимальная топология двойственности $\langle W \mid W^{\#}\rangle$ не допускает таких конусов. Следуя терминологии статьи [86], подпространство функционалов $F \subset W^{\#}$ назовем тонким в $W^{\#}$ подпространством, если упомянутые конусы имеются.

В этом параграфе мы показываем, что для счетномерного пространстве в его алгебраически сопряженном пространстве существует тонкая гиперплоскость. В качестве счетномерного пространства мы используем пространство C_{00} всех финитных числовых последовательностей (в работе [86] используется обозначение $\mathbb{S}_{fin}$). Сопряженное пространство $C_{00}^{\#}$ состоит из всех числовых последовательностей $f = (a_1, a_2, \ldots)$, спаривание $\langle C_{00} \mid C_{00}^{\#} \rangle$ задается формулой

$$\langle (x_n), (a_n) \rangle = \sum a_i x_i.$$

Во втором сопряженном пространстве $C_{00}^{\#\#}$ имеется такой элемент L, что если числовая последовательность a_n сходится и $f = (a_n)$, то $L(f) = \lim a_n$. Для получения такого L (банахова предела) нужно как-нибудь продлить функционал $L = \lim$, пользуясь теоремой Хана—Банаха, с подпространства $c \subset C_{00}^{\#}$ сходящихся последовательностей на все $C_{00}^{\#}$.

В $C_{00}^{\#}$ определим гиперплоскость функционалов $F = \ker L$.

Все, что нам потребуется знать о элементах F, содержится в следующем условии (*): если $f = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in F$, то последовательность a_n либо сходится к нулю, либо не имеет конечного предела.

Теорема 6.5. *Гиперплоскость $F = \ker L \subset C_{00}^{\#}$ является тонкой.*

Доказательство.

Сначала покажем, что выпуклое архимедово замкнутое и не содержащее лучей множество

$$C = \Big\{ x \in C_{00} \mid \sum_{n \geqslant 1} x_n = 1, \sup\big\{ |x_1|, \frac{|x_2|}{2}, \frac{|x_3|}{3}, \cdots, \frac{|x_n|}{n} \cdots \big\} \leqslant 1 \Big\}$$

не замкнуто, ибо 0 не отделяется от C никаким функционалом $f \in F$.

Пусть $f \in F$ задается последовательностью a_n. Если какая-то координата a_n равна нулю, то ясно, что элемент $z \in C_{00}$, у которого на n-той позиции единица, а на остальных местах нули, принадлежит множеству C, но не отделяется от точки 0 функционалом f. Осталось разобрать случай, когда никакие a_n не равны нулю.

Согласно условиям (*), последовательность a_n либо стремится к нулю, либо не имеет конечного предела. Легко проверить, что в обоих случаях существует такое $\delta > 0$, что для некоторых сколь угодно больших номеров $m_k < n_k$, выполнено

$$|a_{n_k} - a_{m_k}| \geqslant \delta \cdot |a_{n_k}| > 0.$$

Если, например, $a_n \to 0$ (или $|a_n| \to \infty$), то для любого m существует $n > m$ такой, что $|a_n| \leqslant \frac{1}{2}|a_m|$ (соответственно, $|a_m| \leqslant \frac{1}{2}|a_n|$). Тогда $|a_n - a_m| \geqslant \frac{1}{2}|a_n|$ (соответственно, $|a_n - a_m| \geqslant \frac{1}{2}|a_m|$) и в качестве δ можно взять число $\frac{1}{2}$. Очевидно, что также можно поступить и в том случае, когда 0 или ∞ — частичные пределы последовательности $|a_n|$. Осталось рассмотреть вариант, когда ни 0, ни ∞ не являются частичными пределами. Тогда имеется по крайней мере два конечных ненулевых частичных предела $b \neq c$, положим $\delta = \frac{(|b-c|)}{2|b|}$, тогда $|b - c| = 2\delta|b| > 0$. Теперь ясно, что если $a_{n_k} \to_{k\to\infty} b$ и $a_{m_k} \to_{k\to\infty} c$, то при достаточно больших k будет выполнено $|a_{n_k} - a_{m_k}| \geqslant \delta \cdot |a_{n_k}| > 0$.

Для каждого k рассмотрим такой элемент $z^k \in C_{00}$:

$$z^k = (0, 0, \ldots, \frac{a_{n_k}}{(a_{m_k} - a_{n_k})}, 0, \ldots, 0, \frac{-a_{m_k}}{(a_{m_k} - a_{n_k})}, 0, 0, \ldots).$$

На всех позициях, кроме m_k и n_k координаты нулевые. Первая из ненулевых координат ограничена сверху по модулю величиной $\frac{1}{\delta}$, а вторая — величиной $\frac{1}{\delta} + 1$. Поэтому при больших k (именно: при таких k, что n_k и m_k больше числа $1 + \frac{1}{\delta}$) выполнено $z^k \in C$.

С другой стороны, легко видеть, что

$$f(z^k) = \sum a_n (z^k)_n = a_{m_k} \frac{a_{n_k}}{a_{m_k} - a_{n_k}} + a_{n_k} \frac{-a_{m_k}}{a_{m_k} - a_{n_k}} = 0.$$

Итак, начало координат неотделимо от C никаким непрерывным функционалом $f \in \langle C_{00} \mid F\rangle'$ (то есть никаким функционалом из множества F). Теорема о строгой отделимости позволяет заключить теперь, что множество C не замкнуто в топологии C_{00}, сопряженной с двойственностью $\langle C_{00} \mid F\rangle$.

Теперь рассмотрим коническую оболочку K множества C и базы $p = (\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \ldots)$, то есть объединение всех лучей, выходящих из точки p и проходящих через всевозможные точки множества C. Вместо указанной точки p можно взять любую точку, координаты которой удовлетворяют условию $0 < \sum x_i < 1$).

Легко видеть, что K архимедово замкнуто. Покажем, что оно не содержит прямых. Ясно, что K лежит в полупространстве $\sum x_i \geqslant \frac{1}{2}$. Если бы существовала какая-то прямая, лежащая в этом конусе, то эта прямая принадлежала бы целиком данному полупространству, а, значит, лежала бы в гиперплоскости вида $(\sum x_i = c) \subset C_{00}$ для некоторого $c > \frac{1}{2}$. Но тогда и база C содержала бы целую прямую, чего нет.

Из того, что K лежит в полупространстве $\sum x_i \geqslant \frac{1}{2}$ следует еще, что он не содержит точки 0. Остается заметить, что точка 0 неотделима от K. В самом деле, как показано выше, она неотделима уже от его базы — множества $C \subset K$.

Остается рассмотреть конус $(K - p)$, ясно, что он удовлетворяет всем условиям теоремы 6.5., которая, таким образом, доказана.

Замечание. Тот факт, что гиперплоскость F тонкая, можно было бы попытаться вывести из теоремы 4.1 работы [86]. Согласно той теореме, если в топологическом векторном пространстве X существует некоторое архимедово выпуклое множество C, не содержащее лучей, лежащее в некоторой гиперплоскости $\Pi \subset X$ и не замкнутое в этой гиперплоскости, то имеется и требуемый незамкнутый архимедов конус во всем пространстве. Но для того, чтобы использовать эту теорему при доказательстве нашего результата, мы должны проверить, что множество C, принадлежащее гиперплоскости $\Pi = \{x \mid \sum x_i = 1\}$, незамкнуто в этой гиперплоскости. Но последнее не верно, множество C в Π замкнуто, несмотря на то, что C незамкнуто во всём пространстве $\langle C_{00} \mid F \rangle$! Это следует из такого результата, который может быть полезен и сам по себе:

Утверждение. *Пусть X — векторное пространство и F — гиперплоскость в алгебраически сопряженном пространстве $X^{\#}$. Пусть $f \in X^{\#}$ и Π_f — гиперплоскость в X, задаваемая уравнением $f(x) = const$.*

Следующие условия равносильны:

1. $f \notin F$,

2. Топология двойственности $\langle X \mid F \rangle$ *индуцирует на* $\Pi_f \subset X$ *максимальную топологию.*

В частности, если $f \notin F$, *то любое выпуклое множество, лежащее в* Π_f, *будет замкнутым в этой плоскости*, если оно архимедово.

Доказательство. Можно считать, что $const = 0$.

$1 \Rightarrow 2$. Пусть выполнено условие 1, то есть f — разрывный на X функционал. Нам нужно доказать, что произвольный линейный функционал $g \in \Pi_f^{\#}$ непрерывен на гиперплоскости Π_f — ядре f. Для этого достаточно найти элемент $h \in F$, сужение которого на плоскость Π_f совпадает с g. Рассмотрим произвольный функционал $h' \in X^{\#}$, который продолжает функционал g. Поскольку F — гиперплоскость в $X^{\#}$ и $f \notin F$, то найдется такое число λ, что $h := h' - \lambda f \in F$, то есть h непрерывен на X. В то же время ясно, что $h|_{\Pi_f} = h'|_{\Pi_f} = g$. Остальное очевидно.

$2 \Rightarrow 1$. Если f в условии утверждения принадлежит множеству F, то индуцированная топология на $\Pi_f = \ker f \subset X$ не максимальна, так как произвольный функционал не из F обязан быть разрывным не только на всём X, но уже на гиперплоскости Π_f. В самом деле, если сужение какого-то функционала g на Π_f непрерывно, то, по определению индуцированной топологии, имеется функционал $h \in F$, совпадающий с g на множестве Π_f. Но тогда разность $h-g$ на Π_f равна нулю, и, следовательно, $g - h = \lambda f$ для какого-то λ. Из последнего следует, что $g = \lambda f + h$ и g лежит в F. Утверждение доказано.

Для нас остается открытым вопрос: всякая ли гиперплоскость в пространстве $C_{00}^{\#}$, разделяющая элементы C_{00}, является тонкой?

6.3 О верхнем топологическом пределе семейства векторных подпространств коразмерности k

Пусть I — бесконечное множество индексов, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подмножеств топологического пространства X. Мощность множества I обозначаем $|I|$.

Множество $Ls\{X_\alpha\}$, состоящее из всех точек x таких, что для каждой окрестности U точки x множество

$$\{\alpha \in I \mid U \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$$

бесконечно, будем называть верхним топологическим пределом семейства $\{X_\alpha\}$ (см., например, Хаусдорф [85] или Куратовский [84]). В работе [85, 84] такое определение дано для метрического пространства X и при $I = \mathbb{N}$, в этом случае множество $Ls\{X_n\}$ состоит из всевозможных предельных точек последовательностей вида $\{x_n \in X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$). Несложно видеть, что $Ls\{X_\alpha\}$ — замкнутое множество.

Следующее утверждение имеет содержательные приложения при исследовании необходимых условий второго порядка в теории экстремальных задач с ограничениями и задач оптимального управления (см. работы [87]—[91]), это утверждение использовалось для доказательства компактности множества множителей Лагранжа, которые соответствуют «большим» подпространствам положительной определённости функционала Лагранжа. В частности, это утверждение использовалось для доказательства компактности множества множителей Лагранжа, которые соответствуют «большим» подпространствам положительной определённости функционала Лагранжа.

Утверждение 1 (лемма Арутюнова). *Пусть X — банахово пространство, $k \in \mathbb{N}$, $\{X_n\}$ — последовательность замкнутых подпространств X таких, что* $\operatorname{codim} X_n \leqslant k$. *Тогда $Ls\{X_n\}$ содержит за-*

мкнутое подпространство $X_0 \subset X$ *такое, что* $\operatorname{codim} X_0 \leqslant k$.

В работах [88] и [89] эта лемма сформулирована и использовалась в случае рефлексивных пространств. В полной общности она доказана в работе [90], где лемма выводится из следующего утверждения:

Утверждение 2. *Пусть* X *— банахово пространство,* $k < \infty$, $A_n : X \to \mathbb{R}^k$, $n = 1, 2, \dots$ *— последовательность линейных операторов, сходящихся по норме к оператору* A. *Тогда существует замкнутое подпространство* $X_0 \subset X$ *такое, что*

$$\operatorname{codim} X_0 \leqslant k, \quad X_0 \subset Ls\{\ker A_n\} \subset \ker A.$$

Ключевой момент в доказательстве леммы Арутюнова заключается в построении с помощью ультрафильтров так называемого оператора Дубовицкого $\mathcal{D}^k$. Этот оператор действует из пространства

$$l_\infty^k = \{v = (v_n \in \mathbb{R}^k)_{n\in\mathbb{N}} \mid \|v\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n| < \infty\}$$

в пространство $\mathbb{R}^k$ и обладает следующим свойством: любой элемент $\{v_i\}$ из ядра $\mathcal{D}^k$ обязательно имеет частичным пределом нуль, то есть для каждого ε множество $\{i \mid |v_i| < \varepsilon\}$ бесконечно. Наличие такого оператора по существу следует из критерия компактности в терминах сходимости по ультрафильтрам. Опишем для его построение: пусть $\mathcal{F}$ — произвольный свободный ультрафильтр на множестве натуральных чисел, тогда любая ограниченная последовательность $v = (v_n)$ элементов $v_n \in \mathbb{R}^k$ имеет предел по данному ультрафильтру, который и обозначим $\mathcal{D}^k(v)$.

В случае, когда пространство X гильбертово или конечномерно, доказательство не требует теории ультрафильтров и имеется в [87], § 5.17, а также в [91].

Утверждения 1 и 2 равносильны. Заметим, что в утверждении 2 вместо сходимости по норме достаточно требовать обычной сильной (т.е. поточечной) сходимости $A_n \to A$ или даже слабой сходимости (которая, впрочем, в силу конечномерности образа операторов, совпадает в данном случае с сильной сходимостью). В самом деле, в силу принципа равномерной ограниченности все операторы A_n равномерно ограничены по норме, а тогда ясно, что $Ls\{\ker A_n\} \subset \ker A$, поскольку если $x \notin \ker A$, то $|A(x)| > 0$ и ввиду равномерной ограниченности существует такая окрестность U точки x, что для всех достаточно больших номеров n сужение операторов A_n на U по модулю не меньше числа $\frac{|A(x)|}{2} > 0$, в частности, $x \notin Ls\{\ker A_n\}$. Теперь остается применить утверждение 1.

Мы заменим, во-первых, последовательности операторов их произвольными семействами и, во-вторых, банахово пространство произвольным топологическим векторным пространством.

Теорема 6.6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, X — топологическое векторное пространство, I — бесконечное множество индексов, $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — семейство подпространств таких, что* codim $X_\alpha \leqslant k$. *Тогда существует подпространство X_0 такое, что* codim $X_0 \leqslant k$ *и для любого $x \in X_0$ найдётся семейство $\{x_\alpha \in X_\alpha \mid \alpha \in I\}$, имеющее x точкой полного накопления, то есть для каждой окрестности U точки x мощность множества $\{\alpha \mid x_\alpha \in U\}$ равна мощности всего множества I:*

$$\forall x \in X_0 \ \exists (x_\alpha \in X_\alpha) : \ \forall U \in \mathcal{N}(x) \ |\{\alpha \in I \mid x_\alpha \in U\}| = |I| \tag{2}$$

Замыкание $\overline{X_0}$ такого подпространства содержится в множестве $Ls\{X_\alpha\}$. В самом деле, пусть $y \in \overline{X_0}$ и U — произвольная окрестность y в пространстве X. Тогда множество $U \cap X_0$ непусто, то есть является также окрестностью некоторого элемента $x \in X_0$. Остальное ясно.

В частности, мы получаем

Следствие. *Лемма Арутюнова справедлива для произвольных нормированных пространств и пространств Фреше.*

Замечание. В ходе доказательства теоремы «притягивающее» пространство X_0 не обязательно получается замкнутым. Для замыкания пространства X_0 теоремы 6.6 выполнено «не равномерное» условие:

$$\forall x \in \overline{X_0}\ \forall U \in \mathcal{N}(x)\ \exists (x_\alpha \in X_\alpha):\ |\{\alpha \in I \mid x_\alpha \in U\}| = |I| \qquad (3)$$

Ясно, что условие, выражаемое в (3), слабее «равномерного» условия (2), поскольку в (2) семейство x_α одно и то же для всех окрестностей точки $x \in X_0$. С другой стороны, условие (3) можно записать короче:

$$\forall x \in \overline{X_0}\ \forall U \in \mathcal{N}(x)\ \ |\{\alpha \in I \mid X_\alpha \cap U \neq \emptyset\}| = |I| \qquad (4)$$

Из условия (4) тоже сразу следует, что $\overline{X_0} \subset Ls\{X_\alpha\}$.

Доказательство теоремы 6.6.

Пусть I — наше семейство индексов (упорядоченность не предполагается), а $\mathcal{F}$ — ультрафильтр на множестве I, т.е. такое семейство бесконечных подмножеств $F \subset I$, которое замкнуто относительно операций конечного пересечения, взятия надмножества и такое, что для каждого $G \subset I$ либо $G \in \mathcal{F}$, либо $I \backslash G \in \mathcal{F}$.

Потребуем вдобавок от нашего ультрафильтра, чтобы он был равномерным, т.е. чтобы все его элементы имели мощность $|I|$. Равномерные ультрафильтры существуют (см., например, [92]). Для полноты изложения и ввиду несложности покажем это. Пусть F — совокупность всех подмножеств I, дополнение к которым имеет мощность, меньшую чем $|I|$. Семейство F является фильтром и содержится в каком-нибудь максимальном фильтре $\mathcal{F}$. Последний, ввиду максимальности, является ультрафильтром. Покажем, что он равномерный. Предположим, что это не так, тогда какое-то множество $G \in \mathcal{F}$ имеет мощность, меньшую I. Но тогда $I \backslash G$ содержится в F. Итак,

$$G \in \mathcal{F},\ I \backslash G \in F \subset \mathcal{F}.$$

Такого не может быть. Поэтому все подмножества $\in \mathcal{F}$ имеют максимальную мощность $|I|$ и ультрафильтр $\mathcal{F}$ равномерный.

Напомним: семейство $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ элементов X сходится по $\mathcal{F}$ к точке $x \in X$, если для любой её окрестности U множество индексов

$\{\alpha \mid x_\alpha \in U\}$ принадлежит $\mathcal{F}$. Для доказательства теоремы достаточно установить существование подпространства X_0, коразмерность которого не больше k и такого, что

$$\forall x \in X_0\ \exists \{l_\alpha \in X_\alpha\}, l_\alpha \underset{\mathcal{F}}{\to} x.$$

Любое числовое семейство t_α расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ сходится по ультрафильтру $\mathcal{F}$ к какому-то $t \in \overline{\mathbb{R}}$ — это легко следует из компактности $\overline{\mathbb{R}}$. Доказательство теоремы использует лишь этот факт и не выходит за рамки применения теорем о сумме и отношении пределов. Далее все сходимости понимаются по ультрафильтру. Запись типа $s_\alpha \to s$ подразумевает, в частности, что s_α определены для некоторого множества индексов $\alpha \in F \in \mathcal{F}$. Отметим также, что замкнутость подпространств и непрерывность функционалов не предполагается.

Теорему будем доказывать индукцией по k.

Пусть $k = 1$, т.е. X_α — гиперплоскости в пространстве X. Выберем линейные функционалы φ_α так, чтобы данные гиперплоскости являлись их ядрами: $X_\alpha = \ker \varphi_\alpha$. Возможны два случая:

1. Для каждого $y \in X$ существует $x \in X$ такой, что $\frac{\varphi_\alpha(y)}{\varphi_\alpha(x)} \to 0$. Для таких y и x положим

$$l_\alpha = y - \frac{\varphi_\alpha(y)}{\varphi_\alpha(x)} x.$$

Ясно, что $l_\alpha \in \ker \varphi_\alpha$ и $l_\alpha \to y$. Таким образом, для каждого $y \in X$ нашлось семейство $l_\alpha \in X_\alpha$, сходящееся к y. Поэтому каждый элемент $y \in X$ принадлежит также X_0 и подпространство X_0 совпадает со всем пространством X и codim $X_0 = 0$.

2. Пусть случай 1 не имеет место, то есть существует $y \in X$ такой, что $\frac{\varphi_\alpha(y)}{\varphi_\alpha(x)} \not\to 0$ для каждого $x \in X$ или, что то же самое, $|\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}| \not\to \infty$, то есть $\lim \frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}$ конечен для каждого x. (Поскольку семейство $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}$ числовое, этот предел по ультрафильтру существует.) Определим линейный

функционал ψ на X формулой

$$\psi(x) = \lim \frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}.$$

Пусть $X_0 = \ker\psi$. Покажем, что X_0 — искомая гиперплоскость. В самом деле, для каждого $x \in X_0$ имеем $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)} \to 0$ и поэтому семейство

$$l_\alpha = \left(x - \frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(y)}y\right) \in \ker\varphi_\alpha = X_\alpha$$

сходится к x. Итак, подпространство X_0 найдено, оно имеет коразмерность 1 и база индукции построена.

Заметим, что в обоих случаях сходящаяся по ультрафильтру к $y \in X_0$ последовательность векторов принадлежит одной прямой, содержащей предельный вектор y.

Шаг индукции. Пусть $\operatorname{codim} X_\alpha \leqslant k$. Снова разберём два случая.

1. Каждый вектор $y \in X$ «близок к системе $\{X_\alpha\}$» в следующем смысле: существуют $l_\alpha \in X_\alpha$ такие, что $l_\alpha \to y$. Тогда искомое подпространство X_0 совпадает со всем пространством X.

2. Существует вектор $y \in X$, «далёкий от системы $\{X_\alpha\}$», то есть такой, что $l_\alpha \not\to y$ для любых $l_\alpha \in X_\alpha$. Рассмотрим линейные расширения пространств X_α элементом y, положив $M_\alpha = \operatorname{Lin}(X_\alpha, y) \subset X$. При этом $\operatorname{codim} M_\alpha \leqslant k-1$.

В силу индуктивного предположения, для этих подпространств найдётся подпространство M, коразмерность которого не больше числа $k-1$ и такое, что для каждого $x \in M$ существует семейство $x_\alpha \in M_\alpha$, $x_\alpha \to x$. Каждый вектор x_α представляется в виде

$$x_\alpha = l_\alpha + t_\alpha y, \quad l_\alpha \in X_\alpha, \quad t_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что для каждого $x \in M$ числовое семейство t_α сходится к конечному числу $t = t(x)$, не зависящему от выбора семейства $x_\alpha \to x$.

Конечность. Если

$$x_\alpha = l_\alpha + t_\alpha y \to x, \quad t_\alpha \to \infty,$$

то $\frac{x_\alpha}{t_\alpha} = \frac{l_\alpha}{t_\alpha} + y \to 0$, чего, однако, не может быть в силу удаленности y от подпространств X_α.

Независимость от x_α. Предположим, что

$$x_\alpha = l_\alpha + t_\alpha y \to x \text{ и } \tilde{x}_\alpha = \tilde{l}_\alpha + \tilde{t}_\alpha y \to x.$$

Вычитая одно выражение из другого, получаем: $(\tilde{l}_\alpha - l_\alpha) + (\tilde{t}_\alpha - t_\alpha)y \to 0$, что возможно только если $(\tilde{t}_\alpha - t_\alpha) \to 0$.

Очевидно, $t : M \to \mathbb{R}$ — линейный функционал (быть может, нулевой). Покажем, что $X_0 = \ker t \subset M$ — искомое подпространство. Для каждого $x \in \ker t$ имеем:

$$l_\alpha + t_\alpha y \to x, \; t_\alpha \to 0,$$

а, значит, $l_\alpha \to x$. Наконец, коразмерность X_0 не больше, чем codim $M + 1$, то есть не больше k. Теорема 6.6 доказана.

Замечание. В доказательстве можно было использовать вместо пространства $\overline{\mathbb{R}}$ одноточечную компактификацию. Вообще теорема 6.6 справедлива и для векторных пространств над полем $\mathbb{C}$, нужно лишь в доказательстве вместо $\overline{\mathbb{R}}$ в качестве компактификации основного поля рассматривать расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$.

Заключение

Отметим возможные продолжения исследований по главам.

Глава 1. В замечании 5 намечен способ получения полугрупп с предписанными оценками роста $s(t) = o(t)$. Такого рода задачи, хоть и лежат в стороне от наших основных исследований, в теории полугрупп имеются. Было бы интересным посмотреть, удастся ли получить намеченным методом какие-нибудь содержательные результаты.

Глава 2. Лемма 2.1.1 использует лишь принцип равномерной ограниченности, поэтому теорема 2.1 справедлива и для нормированных бочечных пространств. Возможно, наш элементарный подход может быть применим и к другим задачам полугрупп на бочечных пространствах.

Глава 3. Результаты, касающиеся суперцикличности, скорее всего, были бы полезны и для более тонкого анализа в теории гиперциклических операторов и других операторов со стохастическими свойствами.

Глава 4. По-видимому, результаты параграфа 4.2 этой главы справедливы и для слабо полного пространства. Однако доказательство, скорее всего, будет другим. Ещё один вопрос: как вообще может быть устроен оператор, порождающий асимптотически бесконечномерную полугруппу степеней, но удовлетворяющий при этом условию $(\liminf \leqslant \frac{1}{2})$? Например, его спектр, скорее всего, обязан быть множеством Хелсона.

Глава 5. Было бы интересно развить теорию овеществления неспектрального метода с целью получить доказательства наличия инвариантных подпространств для вещественных операторов более общего вида.

Полезно было бы также рассмотреть группы, а не только полугруппы этих операторов.

Глава 6. Было бы актуально построить более подробную теорию, связывающую геометрию сфер и конусов нормированного пространства применительно к теории упорядоченных пространств. Кроме того, остается пока неотвеченным естественный вопрос: является ли тонкой произвольная гиперплоскость в пространстве $C_{00}^{\#}$. И ещё нам не известно, существуют ли для «плохих» топологических векторных пространств, (не удовлетворяющих, скажем, первой аксиоме счетности), замкнутые подпространства X_0, удовлетворяющие «равномерному» условию (2) теоремы 6.6 (даже если все подпространства X_α замкнуты).

Литература

[1] Emel'yanov, E.U.; Wolff, M. Quasi constricted linear representations of abelian semigroups on Banach spaces. // Math. Nachr. 233/234 (2002), 103–110.

[2] Емельянов Э. Ю. Условия асимптотической конечномерности C_0-полугруппы. // Сиб. мат. журн. 2003, т. 44 , №5, с. 1015–1020.

[3] R. Datko. Extending a theorem of A.M.Liapounov to Hilbert space.// J.Math.Anal.Appl. 32 (1970), 610 – 616.

[4] A. Pazy. On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert Space. // SIAM J. Math.Anal, v.3 (1972), 291-294.

[5] Zabczyk, J. Remarks on the control of discrete-time distributed parameter systems. // SIAM J. Control 12 (1974), 721–735.

[6] W.Littman. A generalization of a theorem of Datko and Pazy, in / Lecture Notes in Control and Inform. Sci., v. 130, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 318–323.

[7] Ю.Л.Далецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. / М.:Наука, 1970 г.

[8] S. Rolewicz. On uniform N-equistability. // J. Math. Anal. Appl. 115 (1986), 434–441.

[9] Buse, C.; Dragomir, S. New characterizations of asymptotic stability for evolution families on Banach spaces. // Electron. J. Differential Equations 2004, 38, 9 pp. (electronic).

[10] Q. Zheng. Exponential stability and perturbation problems for linear evolution systems in Banach spaces (Chinese, english rewiew). // J. Sichuan Univ. 25 (1988), 4, 401–411.

[11] Dragičević, D. Datko-Pazy conditions for nonuniform exponential stability.// J. Difference Equ. Appl. 24 (2018), no. 3, 344–357.

[12] Dragičević, D. Strong nonuniform behaviour: a Datko type characterization.// J. Math. Anal. Appl. 459 (2018), no. 1, 266–290.

[13] Pritchard, A. J.; Zabczyk, J. Stability and stabilizability of infinite-dimensional systems. // SIAM Rev. 23 (1981), №. 1, 25–52.

[14] Huang, Fa Lun. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. // Ann. Differential Equations 1 (1985), №. 1, 43–56.

[15] Weiss, G. Weak L^p-stability of a linear semigroups on a Hilbert space implies exponential stability. // J.Differential Equations 76 (1988), 2, 269–285.

[16] Van Neerven, J. M. A. M. The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators. / Birkhauser, Basel, 1996.

[17] Lasota A., Li T. Y., Yorke J. A. Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators. // Trans. Amer. Math. Soc. 1984 v 286 №2, 751–764.

[18] Lasota, A.; Yorke, James A. Exact dynamical systems and the Frobenius-Perron operator. // Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), №1, 375–384.

[19] Bartoszek, W. Asymptotic periodicity of the iterates of positive contractions on Banach lattices. // Studia Math. 91 (1988), 3, 179–188.

[20] Ву Куок Фонг. Асимптотическая почти периодичность и компактифицирующие представления полугрупп. // Укр. мат. журн., 1986. Т. 38. с. 688–692.

[21] R. Sine. Constricted systems. // Rocky Mountain J. Math. 21 (1991) 1373–1383.

[22] Konrad Jacobs. Fastperiodizitatseigenschaften allgemeiner Halbgruppen in Banach-Raumen. // Math. Z. 67 (1957) 83–92.

[23] K. de Leeuw, I. Glicksberg. The decomposition of certain group representations. // J. Anal. Math. 15 (1965) 135–192.

[24] S. Ansari, P. Bourdon. Some properties of cyclic operators. // Acta Sci. Math. (Szeged) 63 (1–2) (1997) 195–207.

[25] V.G. Miller. Remarks on finitely hypercyclic and finitely supercyclic operators. // Integral Equations Operator Theory 29 (1) (1997) 110–115.

[26] E.Yu. Emel'yanow; M.P.H. Wolff. Quasi constricted linear operators on Banach spaces. // Studia Math. 144 (2001), №2, 169–179.

[27] Komornik, Jozef; Lasota, Andrzej. Asymptotic decomposition of Markov operators. // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987), №5-6, 321–327.

[28] Räbiger, F. Attractors and asymptotic periodicity of positive operators on Banach lattices. // Forum Math. 7 (1995), №. 6, 665–683.

[29] Emel'yanov, E. Yu.; Wolff, M. Mean ergodicity on Banach lattices and Banach spaces. // Arch. Math. (Basel) 72 (1999), №. 3, 214–218.

[30] С. Г. Горохова, Э. Ю. Емельянов. Достаточное условие порядковой ограниченности аттрактора положительного эргодичного оператора, действующего в банаховой решетке. // Матем. тр., 2:2 (1999), с. 3–11.

[31] Emel'yanov, E.; Erkursun, N. Lotz–Räbiger's nets of Markov operators in L_1-spaces. // J. Math. Anal. Appl. 371 (2010), 777–783.

[32] Баскаков А. Г., Струкова И. И., Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. // Сиб. Мат. Журн., т. 59 (2018), №2, с. 293-308.

[33] Emel'yanov E. Yu. Non-spectral asymtotic analysis of one-parameter operator semigroups. / Basel, Birkhäuser Verlag (Oper. Theory: Advances and Appl.; V. 173), 2007.

[34] R. Godement. Théorèmes taubériens et théorie spectrale. // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 64 (1947), 119-138.

[35] Wermer, J. The existence of invariant subspaces. // Duke Math. J. 19, (1952), 615–622.

[36] N. Dunford. Spectral Theory, II. Resolutions of the identity. // Pacific J. Math., 2 (1952), 559–614.

[37] Leaf, G.K. A spectral theory for a class of linear operators. // Pacific J. Math. 13 (1963), 141–155.

[38] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман. Об операторах с отделимым спектром. // Функц. анализ и его прил., 7:2 (1973), с. 52–61.

[39] А. Г. Баскаков, А. С. Загорский. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах. // Мат. заметки, т. 81, вып. 1 (2007), с. 17—31.

[40] Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков. Гармонический анализ некоторых классов линейных операторов в вещественном банаховом пространстве.// Матем. заметки, т. 97, вып. 5 (2015), с. 670–680.

[41] Aronszajn, N; Smith, K. Invariant subspaces of completely continuous operators. // Annals of Mathematics. Second Series 60 (2), 345–350. (Русский перевод: Математика 2 : 1 (1958), с. 97-102.)

[42] В. И. Ломоносов. Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным. // Функц. анализ и его прил., 7:3 (1973), с. 55–56.

[43] Abramovich, Y. A.; Aliprantis, C. D.; Sirotkin, G.; Troitsky, V. G. Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem. // Positivity 9 (2005), №. 3, 273–286.

[44] В. И. Ломоносов, В. С. Шульман. Инвариантные подпространства для коммутирующих операторов в вещественном банаховом пространстве.// Функц. анализ и его прил., 52:1 (2018), с. 65–69.

[45] В. И. Ломоносов, В. С. Шульман. Проблемы Халмоша и связанные с ними результаты теории инвариантных подпространств.// УМН, 73:1(439) (2018), с. 35–98.

[46] Krein, M. Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach. // (French) C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 28, (1940), 13–17.

[47] Emelyanov, E. Yu.; Wolff, M. P. H. Positive operators on Banach spaces ordered by strongly normal cones. // Positivity 7 (2003), №. 1-2, p. 3–22.

[48] K. W. Anderson. Midpoint local uniform convexity, and other geometric properties of Banach spaces. / Ph.D. dissertation, Univ. Illinois, Urbana, IL, 1960.

[49] Кадец, М. И. О пространствах, изоморфных локально равномерно выпуклым пространствам. // Изв. вузов, математика, 1959, №6(13), с. 51—57.

[50] Smith, Mark A. Some examples concerning rotundity in Banach spaces. // Math. Ann. 233 (1978), №. 2, 155–161.

[51] G. Greiner, J. Voigt, and M. Wolff. On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators. // J. Operator Th. 5 (1981), 245–256.

[52] Van Neerven, J. M. A. M.; Straub, B.; Weis, L. On the asymptotic behaviour of a semigroup of linear operators. // Indag. Math. (N.S.) 6 (1995), 4, 453–476.

[53] A. Peris. Multi-hypercyclic operators are hypercyclic. // Math. Z. 236 (4) (2001) 779–786.

[54] N. Feldman. n-Supercyclic operators. // Studia Math. 151 (2) (2002) 141–159.

[55] P. Bourdon, N. Feldman, J. Shapiro. Some properties of N-supercyclic operators. // Studia Math. 165 (2) (2004) 135–157.

[56] Любич Ю. И. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора. // УМН, 18:1 (1963), с. 165—171.

[57] Скляр Г.М., Ширман В.Я. Об асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. междувед. науч. сб. / Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. – Вып. 37. – Х. : Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1982. – С. 127 – 132.

[58] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев. К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве. // ДАН СССР, т.131, №1 (1960), с. 21-23.

[59] A. R. Lovaglia. Locally uniformly convex Banach spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. 78, (1955), 225-238.

[60] M.Levin, S.Saxon. Every countable-codimensional subspace of a barrelled space is barrelled. // Proc. Amer. Math. Soc 1971, V.29, №1, 91–96

[61] Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. / М.: ИЛ., 1962.

[62] Müller, V. Local spectral radius formula for operators in Banach spaces. // Czechoslovak Math. J. 38(113) (1988), 4, 726–729.

[63] J.M.A.M. van Neerven. On the orbits of an operator with spectral radius one. // Czechoslovak Math. J. 45(120) (1995), 3, 495–502.

[64] J.M.A.M. van Neerven. Lower semicontinuity and the theorem of Datko and Pazy. // Integral Equations Operator Theory 42 (2002), 4, 482–492.

[65] L. Gearhart. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces. // Trans. Am. Math. Soc. 236 (1978), 385–394.

[66] R. Nagel (ed.). One-parameter Semigroups of Positive Operators. / Springer Lect. Notes in Math. 1184 (1986).

[67] F. Neubrander. Laplace transform and asymptotic behavior of strongly continuous semigroups.// Houston J. Math. 12 (1986), 549-561.

[68] Foias, C. Sur une question de M. Reghis. // Analele Univ. Timisoara Ser. Sti. Mat. 11 (1973), 111–114.

[69] J. Zabczyk. A note on C_0-semigroups.// Bull. Acad. Polon. Sci. 23 (1975), 895-898.

[70] Batkai, Andras; Engel, Klaus-Jochen; Pruss, Jan; Schnaubelt, Roland. Polynomial stability of operator semigroups. // Math. Nachr. 279 (2006), №. 13-14, 1425–1440.

[71] V. Wrobel. Asymptotic behavior of C_0-semigroups in B-convex spaces. // Indiana Univ. Math. J. 38 (1989), 101-114.

[72] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. / М.: Мир, 1972.

[73] H. Weyl. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. // Mathematische Annalen 68, 220—269 (1910).

[74] Крейн М. Г., Красносельский М. А., Мильман Д. П. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах. // Сб. тр. Ин-та математики АН УССР 1948, вып. 11, с. 97–112.

[75] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. / М.: Физматгиз, 1959.

[76] Любич Ю. И. Введение в теорию банаховых представлений групп. / Харьков, ХГУ 1985.

[77] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. / М.: Наука, 1989.

[78] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. / М.: Наука, 1980 г.

[79] I. Gelfand. Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Gruppen. // Матем. сб., 9(51): 1 (1941), 49–50.

[80] Hille, Einar. On the theory of characters of groups and semi-groups in normed vector rings. // Proc. Nat. Acad. Sci.U. S. A. 30, (1944), 58–60.

[81] Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Том 3. Спектральные операторы. / М.:Мир, 1974.

[82] Aliprantis, Charalambos D.; Tourky, Rabee. Cones and duality. / Graduate Studies in Mathematics, 84. AMS, Providence, RI, 2007.

[83] Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ. / М.:Мир, 1973.

[84] К. Куратовский. Топология. Т.2. / М.:Мир. 1969.

[85] Хаусдорф Ф. Теория множеств.М.- Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.

[86] А.Е. Гутман, Э. Ю. Емельянов, А. В. Матюхин. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах. Владикавк. матем. журн., 17:3 (2015), 36–43.

[87] Ф. П. Васильев. Методы оптимизации. В двух книгах. Книга 1. М.:МЦНМО, 2011 г.

[88] А. В. Арутюнов, Н.Т. Тынянский. К необходимым условиям локального минимума в теории оптимального управления // Докл. АН СССР, 275:2 (1984), с. 268–272.

[89] А.В.Арутюнов. К необходимым условиям оптимальности в задаче с фазовыми ограничениями. Докл. АН СССР , 280:5 (1985), с. 1033–1037.

[90] А.В. Арутюнов. Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения // Изв. РАН. Сер. матем., 60:1 (1996), с. 37–62.

[91] А.В. Арутюнов. Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа // Успехи мат. наук, 2012, т. 67, вып. 3 (405), с. 3–62.

[92] W.W. Comfort, S. Negrepontis. The theory of ultrafilters, Springer (1974).

Работы автора по теме диссертации

[93] Сторожук К. В. Стабилизируемость в асимптотически конечномерных полугруппах. // Сибирский математический журнал. — 2003. — т. 44, №6. — С. 1365–1376.

[94] Storozhuk, K. V. On the Rolewicz theorem for evolution operators. // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2007. — Vol. 135, №6. — P. 1861–1863.

[95] Storozhuk K. V. An extension of the Vu-Sine theorem and compact-supercyclicity. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2007. — Vol. 332, №2. — P. 1365–1370.

[96] Сторожук К. В. Медленно меняющиеся векторы и асимптотическая конечномерность полугруппы операторов. // Сибирский математический журнал. — 2009. — Т. 50, №4. — С. 928–932.

[97] Сторожук К. В. Препятствия к равномерной устойчивости C_0-полугруппы. // Сибирский математический журнал. — 2010. — Т. 51, №2. — С. 410–419.

[98] Сторожук К. В. Условие асимптотической конечномерности полугруппы операторов. // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52, №6. — С. 1389–1393.

[99] Сторожук К.В. Изометрии с плотными обмотками тора в $C(M)$. // Функциональный анализ и его приложения. — 2012. — Т. 46, №3. — С. 89–91.

[100] Сторожук К. В. Симметричные инвариантные подпространства у комплексификаций линейных операторов. // Математические заметки. — 2012. — т. 91, вып. 4. — С. 638–640.

[101] Storozhuk, K.V. Strongly normal cones and midpoint locally uniform rotundity. // Positivity. — 2013. — Vol. 17, Issue 3. — P. 935–940.

[102] К. В. Сторожук. О верхнем топологическом пределе семейства векторных подпространств коразмерности k.// Сибирские электронные математические известия. — 2015. — Т. 12. — С. 432–435.

[103] К. В. Сторожук. Тонкие гиперплоскости.// Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1553–1555.