

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи  
УДК 519.7

Паршина Ольга Геннадьевна

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В МОРФИЧЕСКИХ  
СЛОВАХ И РАСКРАСКАХ БЕСКОНЕЧНЫХ  
ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ**

Специальность 01.01.09 —

«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

к.ф.-м.н.

Сергей Владимирович Августинovich

PhD, профессор

Лука Замбони

Новосибирск — 2019

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Глава 1. Арифметические подпоследовательности в морфических словах</b> . . . . .	15
1.1 Определения . . . . .	15
1.2 Длины арифметических прогрессий в обобщённом слове Туэ-Морса . . . . .	16
1.3 Арифметический индекс в обобщённом слове Туэ-Морса . . . . .	24
1.3.1 Верхняя оценка на функцию арифметического индекса . . . . .	24
1.3.2 Нижняя оценка на функцию арифметического индекса . . . . .	25
<b>Глава 2. Закрытые и открытые факторы в словах Арну-Рози</b> . . . . .	27
2.1 Определения и обозначения . . . . .	27
2.2 Количество закрытых факторов в словах Арну-Рози . . . . .	28
<b>Глава 3. Совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов</b> . . . . .	37
3.1 Определения и предварительные сведения . . . . .	37
3.2 Совершенные раскраски графа $Ci_\infty(I_{cn})$ . . . . .	39
3.3 Совершенные раскраски графа $Ci_\infty(I_{on})$ . . . . .	45
<b>Глава 4. О размере носителя векторов в координатно транзитивных линейных пространствах</b> . . . . .	54
4.1 Определения и необходимые сведения . . . . .	54
4.2 Случай векторов веса два . . . . .	55
4.3 О векторах веса три . . . . .	57
4.4 Замечания . . . . .	59
<b>Заключение</b> . . . . .	61
<b>Список литературы</b> . . . . .	62

## Введение

**Актуальность темы.** Результаты, описанные в диссертации, находятся на стыке алгебраической комбинаторики, теории графов, комбинаторики слов и символической динамики. Работа была проведена по двум направлениям, в рамках одного из которых рассматриваются задачи комбинаторики слов, а именно, изучаются локальные арифметические свойства бесконечных апериодических слов; в рамках другого направления исследуются совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов ограниченной степени.

В данном тексте мы используем следующие обозначения:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  и  $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Рассмотрим бесконечную циклическую группу  $(\mathbb{Z}, +)$ . Фактически диссертация посвящена изучению отображений из бесконечной циклической группы в какое-либо конечное множество. В некоторых случаях мы называем это множество алфавитом и изучаем арифметические свойства соответствующих бесконечных слов. В других случаях наше множество состоит из цветов, а объектом исследования становятся совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов. Здесь на передний план выходят их периодические свойства. Нами сделана попытка подойти к данным понятиям с единых позиций, но, очевидно, что основная работа ещё впереди.

Так, в рамках работы над совершенными раскрасками, исследуются графы Кэли группы  $(\mathbb{Z}, +)$  с множеством порождающих  $\{d_1, -d_1, d_2, -d_2, \dots, d_n, -d_n\}$  для заданного набора попарно различных  $\{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$  натуральных чисел. Любая совершенная раскраска такого графа в конечное число цветов является периодической. Основной задачей в этой области является перечисление совершенных раскрасок данных графов в  $t$  цветов.

В комбинаторике слов рассматриваются арифметические подструктуры в бесконечных (вправо) словах над алфавитом мощности  $t$ . Под арифметической подструктурой мы понимаем последовательность символов заданного слова  $x = x_0x_1x_2 \dots$  с индексами, образующими арифметическую прогрессию  $\{i + kd\}_{k \in \mathbb{N}}$ , где  $i, d \in \mathbb{N}$ . Задачи, поставленные в этой области, вдохновлены теоремой Ван дер Вардена о монохромных арифметических прогрессиях в множестве натуральных чисел.

**Теорема** (Ван дер Варден) *Пусть множество натуральных чисел раскрашено в конечное число цветов. Тогда найдётся арифметическая прогрессия сколь угодно большой конечной длины, члены которой окрашены в один цвет.*

Помимо арифметических подпоследовательностей в бесконечных словах нас интересует распределение их периодических подслов особого вида, а именно тех, которые являются полными первыми возвратами к некоторому подслову. Фактически, взяв некоторую последовательность  $x$  подряд идущих символов в заданном бесконечном слове  $x$ , мы ищем её следующее вхождение в  $x$ , и определяем *полный первый возврат* как слово, имеющее только два вхождения  $x$ : как префикс и как суффикс. Мы задаёмся вопросом о том, сколько факторов заданной длины  $n$  в слове  $x$  являются полными первыми возвратами.

Актуальность исследований в каждом из описанных направлений опишем по отдельности.

*Комбинаторика слов* берёт свое начало в 1900-х годах с работ Норвежского математика А. Туэ. Он заинтересовался вопросом, существует ли бесконечное слово над конечным алфавитом, в котором не встретится два одинаковых последовательно идущих блоков символов, и дал на него положительный ответ в виде бесконечного слова над алфавитом из трёх символов. Нетрудно убедиться, что в случае бинарного алфавита бесконечной последовательности с таким свойством не существует. Туэ построил бесконечное слово над бинарным алфавитом, не содержащее трёх одинаковых последовательно идущих блоков [1]. Данное слово  $x = x_0x_1x_2\cdots$  задается следующим образом: для каждого неотрицательного целого  $n$  символ  $x_n$  является суммой по модулю два цифр в двоичном представлении  $n$ .

Несколькими годами позже М. Морс и Г. Хедлунд, вдохновлённые изучением классических динамических систем, дали начало новой области математики, сейчас известной как символическая динамика. Любопытно, что определяющие в данной области статьи Морса и Хедлунда продемонстрировали прочную связь с более ранней работой Туэ. Эта связь в большей степени продиктована использованием бесконечных слов для описания бесконечных геодезических кривых на поверхности отрицательной кривизны. Так, бесконечное слово  $x$ , определённое выше и первоначально введённое Туэ для изучения комбинаторных свойств слов, было вновь открыто М. Морсом [2] в связи с дифференциальной геометрией. Сейчас  $x$  известно как *слово Туэ-Морса* и, несмотря на простоту

задания, оно обладает множеством интересных свойств и находит применение в теории чисел, комбинаторике и дифференциальной геометрии.

Приведём основные определения. *Алфавитом* будем называть непустое конечное множество элементов (символов или букв) и обозначать символом  $\mathbb{A}$ . Пусть  $n$  — натуральное число. Конечную последовательность  $u = u_0u_1u_2 \cdots u_{n-1}$  символов алфавита  $\mathbb{A}$  назовём *словом*. *Длину* конечного слова  $u$ , то есть количество символов в нём, обозначим через  $|u|$ . *Бесконечным словом* над алфавитом  $\mathbb{A}$  называется бесконечная вправо последовательность  $x = x_0x_1x_2 \cdots$  символов алфавита  $\mathbb{A}$ . *Конкатенацией* конечного слова  $u$  и слова  $v$  (конечного или бесконечного) называется слово  $uv = x = x_0x_1x_2 \cdots$  такое, что  $x_i = u_i$  для  $0 \leq i < |u|$  и  $x_i = v_{i-|u|}$  для  $i \geq |u|$ . Через  $\varepsilon$  обозначим *пустое слово*, являющееся единственным словом длины 0 и определённое следующим равенством:  $u\varepsilon = \varepsilon u = u$  для любого слова  $u$ . Множество всех конечных слов над алфавитом  $\mathbb{A}$  обозначается через  $\mathbb{A}^*$ . Слово  $v$  называется *подсловом* или *фактором* слова  $u$ , если существуют слова  $x$  и  $y$  такие, что  $u = xvy$ . Если при этом  $x = \varepsilon$  ( $y = \varepsilon$ ), то  $v$  называется *префиксом* (*суффиксом*) слова  $u$ .

Конечное слово  $u$  называется *периодическим*, если существует такое положительное число  $t$ , что  $u_i = u_{i+t}$  для любого  $i = 0, 1, 2, \dots, |u| - t - 1$ . Число  $t$  называется *периодом* слова  $u$ . Слово  $u$  является *степенью* некоторого слова  $v$ , если для некоторого натурального  $n$  его можно представить в виде конкатенации  $n$  копий слова  $v$ . В таком случае слово  $u$  можно записать как  $u = v^n$ , и оно периодически с периодом  $|v|$ . Отметим, что период  $|v|$  не обязательно является минимальным. В случае, если слово  $u$  бесконечно и представимо в виде  $u = vvv \cdots$  для некоторого конечного слова  $v$ , его можно записать как  $u = v^\omega$ . Такое слово  $u$  называется *периодическим*. Слово  $u$  является *со временем периодическим*, если его можно представить в виде  $u = xv^\omega$  для конечных слов  $x$  и  $v$ , в противном случае  $u$  — *апериодическое*.

*Арифметической подпоследовательностью* (*арифметическим фактором* или *подсловом*) длины  $k$  с начальным индексом  $c$  и разностью  $d$  в бесконечном слове  $u = u_0u_1u_2 \cdots$  называется последовательность  $u_c u_{c+d} u_{c+2d} \cdots u_{c+(k-1)d}$ . В случае, когда все символы в этом слове одинаковы, будем говорить, что она *однородная*. Мы также будем называть однородные подпоследовательности *арифметическими прогрессиями*.

Исследование арифметических свойств бесконечных слов над конечным алфавитом восходит к классическим работам Б. Л. Ван дер Вардена [3] и Э. Семереди [4] о монокромных арифметических прогрессиях в множестве натуральных чисел. В частности, в этих работах утверждается, что ограничить константой длину однородной арифметической подпоследовательности в произвольном бесконечном слове над конечным алфавитом невозможно. Эффективной верхней оценки на величину отрезка бесконечного слова над алфавитом фиксированной мощности, содержащего арифметическую прогрессию заданной длины (число Ван дер Вардена), не получено, и задача улучшения существующих оценок интересует ученых из различных областей математики.

Интересен также вопрос, какими свойствами должно обладать бесконечное слово, чтобы содержать бесконечную арифметическую прогрессию. Задача классификации таких слов носит не только теоретический характер, но и имеет приложения в моделировании динамических систем, затрагивает символическую динамику, эргодическую теорию и теорию автоматных последовательностей. Нас интересуют не только однородные случаи, но структура арифметических подпоследовательностей в выделенных классах слов в целом.

Одной из важнейших характеристик слова является его комбинаторная сложность. Функция  $p_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  называется *комбинаторной сложностью* бесконечного слова  $x$ , если для каждого  $n \in \mathbb{N}$  величина  $p_x(n)$  равна количеству различных подслов длины  $n$  в  $x$ . Данная функция была впервые представлена в работе Хедлунда и Морса 1938 года [5]. Эта функция является важным показателем «случайности» слова. Так, периодические слова имеют ограниченную комбинаторную сложность, в то время как слова, являющиеся  $q$ -значными ( $q \in \mathbb{N}$ ) разложениями нормальных чисел имеют максимально возможную комбинаторную сложность. Теорема Морса и Хедлунда утверждает, что каждое апериодическое слово содержит не менее  $n + 1$  различных подслов каждой длины  $n$ . Апериодические слова, имеющие минимальную комбинаторную сложность, называются словами Штурма.

С момента введения комбинаторной сложности, был определён ряд других сложностных мер, оказавшихся полезными в изучении бесконечных слов и их комбинаторных свойств. Это множество включает абелеву сложность [6–11], палиндромную сложность [6], циклическую сложность [7], привилегированную сложность [10], групповую сложность [8], максимальную шаблонную сложность

[12] и другие. В рамках работы над данной диссертацией введены новые сложные функции слова, а именно, закрытая и открытая сложности (Глава 2).

Результаты первой главы тесно связаны с арифметической сложностью, введённой в 2000 году С. В. Августиновичем, Д. Г. Фон-дер-Флаассом и А. Э. Фрид [13]. Функция арифметической сложности для каждого фиксированного  $n$  определяет количество различных арифметических подслов длины  $n$  в данном слове.

Отметим, что множество арифметических подслов заданного слова с разностью 1 есть не что иное, как множество его факторов, из чего следует, что функция арифметической сложности не может расти медленней, чем функция комбинаторной сложности. Но помимо этого очевидного наблюдения, других связей между скоростями роста этих функций нет. К примеру, существуют бесконечные слова с линейной комбинаторной сложностью, но чья арифметическая сложность может расти как линейно, так и экспоненциально [13]. Арифметическая сложность слов Штурма, имеющих минимально возможную комбинаторную сложность среди апериодических слов  $(n + 1)$ , растёт как  $O(n^3)$  [14]. А. Фрид охарактеризовала равномерно рекуррентные слова, имеющие линейную арифметическую сложность [15]. С. Августинович, Ж. Кассень и А. Фрид изучали вопрос о минимально возможной сложности среди равномерно рекуррентных слов [16]. Также А. Фрид было построено семейство слов с субполиномиальной арифметической сложностью [17].

Слова, арифметическая сложность которых максимальна, называются арифметически универсальными. Хорошо известным примером такого слова является последовательность Туэ-Морса, определённая выше. Исследованию арифметических свойств слова Туэ-Морса и его обобщения для алфавита простой мощности посвящена Глава 1. Получена точная верхняя оценка на длины арифметических прогрессий в данном слове [18; 19]. Частичные результаты по этой теме представлены в [20; 21].

Помимо арифметических прогрессий и их распределения в бесконечных словах, нас интересуют периодические арифметические подпоследовательности с периодом большим, чем единица. В случае бинарного алфавита такие подслова имеют вид  $(01)^{\mathbb{N}}$ . Существует гипотеза, что слова с периодом два имеют наибольшую минимальную разность вхождения в слово Туэ-Морса как арифметические подслова.

Для того, чтобы проверить данную гипотезу, было решено ввести понятие арифметического индекса. Пусть дано натуральное число  $q$  и бесконечное слово  $x$  над алфавитом  $\mathbb{A}_q = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ . Для каждого конечного слова  $u$  из множества арифметических подпоследовательностей  $x$  мы стремимся определить наименьшее число  $d$  такое, что  $u$  является арифметическим подсловом  $x$  с разностью  $d$ . *Арифметическим индексом* слова  $u$  в  $x$  назовём длину  $q$ -ичного представления разности  $d$ .

Компьютерные эксперименты показали, что множество слов с максимальным арифметическим индексом в слове Туэ-Морса содержит слова с периодом два, но они — не единственные члены данного семейства. Описание этого множества даже для конкретного слова оказалось непростой задачей.

В Главе 1 получены верхняя и нижняя оценки на функцию арифметического индекса для обобщённого слова Туэ-Морса над алфавитом простой мощности [19].

В Главе 2 введены и изучены две новых сложностных функции, основанные на определениях открытых и закрытых слов. Слово  $u \in \mathbb{A}^+$  называется *закрытым*, если является буквой алфавита  $\mathbb{A}$ , пустым словом, или полным первым возвратом к некоторому своему собственному подслову  $v \in \mathbb{A}^+$ . Иными словами,  $u$  — закрытое слово, если оно имеет в точности два вхождения  $v$ , одно в качестве префикса и второе в качестве суффикса. В данном случае  $v$  называется рамкой слова  $u$ . Если  $u$  не является закрытым, будем называть его *открытым*. Таким образом, слово  $u \in \mathbb{A}^+ \setminus \mathbb{A}$  закрыто тогда и только тогда, когда оно имеет рамку, и если его максимальная по длине рамка входит в  $u$  только как префикс и как суффикс. Максимальная по длине рамка закрытого слова называется *фронтир*. Например, слово  $aabaaba$  закрыто с фронтиром  $aaba$ . Слово  $ab$  не имеет рамки, а значит, открыто; слово  $abaabbababbaaba$  открыто, так как его максимальная по длине рамка  $aba$  имеет три вхождения в  $u$ . Нетрудно видеть, что все привилегированные слова [10] являются закрытыми, а значит, закрыты и все палиндромные слова насыщенных слов [22]. Открытые и закрытые слова были впервые представлены в работе 2013 года [23], хотя понятие закрытого слова было известно из статьи А. Карпи и А. де Лука [24]. Обзор результатов по теме открытых и закрытых слов можно найти в статье Г. Фичи [25].



Пусть дано бесконечное слово  $x \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ , рассмотрим функции  $f_x^c, f_x^o : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , подсчитывающие (соответственно) количество закрытых и открытых подслов длины  $n \in \mathbb{N}$  в  $x$ . В Главе 2 мы исследуем поведение функции  $f_x^c$ , где  $x$  — слово Арну-Рози. Слова Арну-Рози были впервые представлены в 1991 году для алфавита из трёх символов [26]. Эти слова являются естественным обобщением слов Штурма для алфавита, состоящего из более двух символов. Если  $x \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$  — слово Арну-Рози, то его комбинаторная сложность равна  $p_x(n) = (|\mathbb{A}| - 1)n + 1$  для каждого натурального  $n$ . Более того, каждый фактор  $u$  слова  $x$  имеет в точности  $|\mathbb{A}|$  различных первых возвратов в  $x$ .

В Главе 2 получена точная формула для функции, подсчитывающей количество закрытых факторов заданной длины в словах Арну-Рози [27; 28]. В связи с равенством  $f_x^c(n) + f_x^o(n) = p_x(n)$ , эта формула позволяет вычислить количество закрытых факторов заданной длины в данных словах.

Помимо бесконечных слов, в диссертации исследуются циркулянтные графы и их совершенные раскраски. Раскраской вершина графа  $G = (V, E)$  в  $k$  цветов называется отображение  $\phi : V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ . Раскраску вершин графа называют совершенной, если все его одинаково окрашенные вершины имеют одинаковый цветовой состав окружения.

Пусть дан набор натуральных чисел  $I = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$ , упорядоченных по возрастанию. *Бесконечным циркулянтным графом* с набором дистанций  $I$  назовём граф  $Si_{\infty}(I)$ , множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а рёбрами соединены те вершины  $i, j \in \mathbb{Z}$ , для которых выполнено  $|i - j| \in I$ .

Любой бесконечный циркулянт с вершинами, раскрашенными цветами из конечного множества цветов  $\mathbb{A}$  можно рассматривать как слово над алфавитом  $\mathbb{A}$ . Набор параметров совершенной раскраски накладывает определённые условия на множество соответствующих ему раскрасок. А именно, он определяет множество конфигураций, неизбежно встречающихся в раскрасках, соответствующих данным параметрам. В терминах комбинаторики слов задачи перечисления совершенных раскрасок бесконечных циркулянтных графов можно сформулировать, используя понятие частичного слова. Частичное слово — это обычное слово, в котором часть букв по каким-то причинам отсутствует. Для обозначения отсутствующих символов добавим к алфавиту  $\mathbb{A}$  символ  $\diamond$ . *Частичное слово* длины  $n$  — это отображение из множества  $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  на

расширенный алфавит  $\mathbb{A} \cup \{\diamond\}$ . Изучение комбинаторных свойств частичных слов в явном виде началось в 1999 году [29]; с тех пор получено множество результатов, посвященных обобщению уже известных свойств слов.

В данных терминах задача описания совершенных раскрасок может быть сформулирована следующим образом: Дано множество частичных слов  $S$  над алфавитом  $\mathbb{A} \cup \{\diamond\}$ . Перечислить все бесконечные слова, содержащие в своём языке подслова из  $S$ .

В Главе 3 рассматриваются совершенные раскраски бесконечных циркулянтов с множествами дистанций  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  и  $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$  для натурального  $n$ . Получено полное описание совершенных раскрасок таких графов в 2 цвета [30—33]. Также сформулированы гипотезы о характеристике совершенных раскрасок таких графов в произвольное число цветов [32; 34; 35]. В соавторстве с М. А. Лисицыной [36] получен результат, подтверждающий гипотезу о совершенных раскрасках бесконечного циркулянтного графа с набором дистанций  $\{1, 2\}$ . Для  $n > 2$  задача еще не решена.

Граф бесконечной  $n$ -мерной прямоугольной решётки допускает естественный гомоморфизм на любой циркулянтный граф с  $n$  дистанциями [37]. Поэтому разнообразие параметров совершенных раскрасок (как и самих раскрасок) в решётке гораздо богаче, чем в циркулянтных графах.

Совершенные раскраски бесконечной квадратной решётки изучались ранее. Допустимые матрицы третьего порядка графа  $G(\mathbb{Z}^2)$  были перечислены С. А. Пузыниной [38]. Совершенные раскраски  $G(\mathbb{Z}^2)$  вплоть до 9 цветов описаны Д. С. Кротовым [39]. Совершенная раскраска называется дистанционно регулярной, если её матрица параметров приводима к трёхдиагональному виду. Это означает, что цвета в раскраске можно упорядочить так, что каждый из них кроме себя будет видеть лишь два соседних цвета, при этом каждый из крайних цветов (первый и последний) образует полностью регулярный код. Параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решётки перечислены С. В. Августиновичем, А. Ю. Васильевой и И. В. Сергеевой [40]. Изучались совершенные раскраски треугольной и гексагональной бесконечных решёток. С. А. Пузынина доказала периодичность совершенных раскрасок таких решёток [41]. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной треугольной решётки были перечислены А. Ю. Васильевой [42], гексагональной — С. В. Августиновичем, Д. С. Кротовым и А. Ю. Васильевой [43].

Пусть  $G = (V, E)$  — граф,  $M = (m_{ij})$  — квадратная матрица порядка  $n$ ,  $r \geq 1$ . Раскраска графа  $G$  называется совершенной радиуса  $r$  с матрицей параметров  $M$ , если  $m_{ij}$  — это количество вершин цвета  $j$  на расстоянии не более  $r$  от вершины цвета  $i$ . М. Аксенович в [37] перечислила все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиусов 1 в 2 цвета для графа бесконечной прямоугольной решётки  $G(\mathbb{Z}^2)$  и нашла некоторые необходимые условия для допустимости матрицы параметров в случае  $r \geq 2$ . Параметры и свойства совершенных раскрасок  $G(\mathbb{Z}^2)$  в своей кандидатской диссертации изучала С. А. Пузынина [38]. В своих работах она показала, что все совершенные раскраски радиуса  $r > 1$  бесконечной прямоугольной решётки являются периодическими, а также доказала их периодизуемость в случае  $r = 1$ .

Ряд результатов для совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов получен Д. Б. Хорошиловой [44; 45]. Перечислим некоторые результаты, посвящённые совершенным раскраскам графов, схожим по строению с циркулянтными и с графами бесконечных решёток.

Изучением совершенных 2-раскрасок  $n$ -мерного булева куба занимался Д. Г. Фон-Дер-Флаасс. Он получил первые необходимые условия на параметры возможных совершенных 2-раскрасок этого графа и построил рекурсивную конструкцию, дающую бесконечную серию таких раскрасок [46]. Позднее им же была получена граница корреляционной иммунности [47], позволяющая получить необходимое условие существования совершенных раскрасок гиперкуба. Впоследствии Фон-Дер-Флаасс изучал раскраски, достигающие этой границы в 12-мерном кубе [48]. Еще одна конструкция, которая позволила построить множество различных совершенных 2-раскрасок по матрицам параметров, была предложена в совместной работе Д. Г. Фон-Дер-Флаасса и К. В. Воробьева [49]. Заметим, что на сегодняшний день полного описания всех матриц совершенных раскрасок гиперкуба не получено даже для случая двух цветов.

Графом Джонсона  $J(n, \omega)$  называется граф, вершинами которого являются двоичные векторы длины  $n$  веса  $\omega$ , пара векторов соединяется ребром, если они отличаются ровно в двух координатах. У. Мартин показал, что совершенную 2-раскраску  $J(n, \omega)$  можно получить, покрасив блоки  $(\omega - 1) - (n, \omega, \lambda)$ -схемы в один цвет, а оставшиеся вершины  $J(n, \omega)$  в другой цвет [50]. Систематическое исследование проблемы существования совершенных 2-раскрасок графов Джонсона, включающее в себя вопросы существования  $(\omega - 1) - (n, \omega, \lambda)$ -схем

выполнено в диссертации И. Ю. Могильных [51]. Он получил ряд конструкций совершенных 2-раскрасок графов Джонсона и установил несколько необходимых условий существования таких раскрасок. Впоследствии эти результаты были использованы для перечисления параметров всех совершенных 2-раскрасок графов Джонсона  $J(n, \omega)$  для  $n \leq 8$ . А. Л. Гаврилюк и С. В. Горяинов [52] получили полное описание допустимых матриц второго порядка графа  $J(n, 3)$  для нечётных  $n$ . Задача классификации совершенных раскрасок графа Джонсона  $J(n, \omega)$  не решена для многих пар  $(n, \omega)$  даже для случая двух цветов.

Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов с не более чем 18 вершинами охарактеризованы С. В. Августиновичем и М. А. Лисицыной. Они рассмотрели бесконечные семейства графов призмы, лестницы Мёбиуса, скрещенной призмы, хордальных циклов, обобщённых графов Петерсена, усечённых графов [53]. Те же авторы описали все совершенные раскраски в любое конечное число цветов графа бесконечной призмы, являющимся прямым произведением бесконечной цепи на ребро [54].

Результаты, полученные в Главе 3, посвящены совершенным раскраскам в два цвета. В рамках этого случая представляется возможным разработать инструменты для изучения совершенных раскрасок в большее число цветов, не перегружая исследования перебором большого числа параметров.

В Главе 4 рассматривается проблема минимального носителя в координатно транзитивных линейных пространствах. Мы ограничиваемся наиболее простым случаем, когда транзитивность задана циклической группой [55]. Исследования показали, что данная проблема связана с существованием тайлингов в циклической группе.

Хорошо известно [56; 57], что проблема определения размера минимального носителя ненулевых векторов произвольного линейного пространства (над  $GF(2)$ , над  $\mathbb{Z}$  или над  $\mathbb{R}$  в равной степени) является  $NP$ -трудной. В некотором смысле эта задача эквивалентна определению кодового расстояния линейного кода, заданного своей порождающей матрицей. Кроме прочего, является естественным желание задать базис линейного пространства максимально компактным образом. Во многих значимых случаях упомянутое пространство априорно имеет богатую группу автоморфизмов. Скажем, собственные пространства транзитивных графов именно таковы. Таким образом задача поиска векторов с минимально возможным носителем в транзитивных линейных пространствах

представляется актуальной. Забегая вперёд, скажем, что сложностной статус этой проблемы нам неизвестен, хотя и кажется, что она может иметь отношение к проблеме изоморфизма графов Кэли.

**Целью** данной работы является изучение периодических структур в бесконечной аддитивной группе.

**Задачи:**

- Получить оценки на длины периодических арифметических подпоследовательностей в морфических словах;
- Исследовать распределение закрытых и открытых слов в словах Арну-Рози;
- Перечислить совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов.

**Научная новизна.** Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы при дальнейшем исследовании совершенных раскрасок и в комбинаторике слов.

**Методы исследования.** В работе используются методы классической комбинаторики, комбинаторики слов, линейной алгебры.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Получена точная верхняя оценка длины однородных арифметических подпоследовательностей в обобщённом слове Туэ-Морса над алфавитом простой мощности.
2. Получены верхняя и нижняя оценки на величину арифметического индекса в обобщённом слове Туэ-Морса над алфавитом простой мощности.
3. Получена точная формула для функции закрытой (и как следствие, открытой) сложности в словах Арну-Рози.
4. Приведено полное описание совершенных раскрасок в два цвета бесконечных циркулянтных графов с набором дистанций  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  для  $n \in \mathbb{N}$ .
5. Выведен критерий минимальности носителя векторов для координатно транзитивных пространств, порождённых вектором веса два, и получена достижимая нижняя оценка на отношение размера носителя вектора к размерности линейного пространства.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: Международной конференции «Mons Theoretical Computer Science Days» (Таланс, Франция, 2018), международной конференции и летней школе «G2R2 — Graphs and Groups, Representations and Relations» (2018, г. Новосибирск, Россия), международном семинаре «Workshop on Words and Complexity» (2018, г. Вийёрбан, Франция), международной конференции «WORDS» (2017, г. Монреаль, Канада, 2015, г. Киль, Германия), международной школе и конференции «CANT — Combinatorics, Automata and Number Theory» (2016, г. Марсель, Франция), международной школе и конференции для молодых учёных «Современные проблемы математики и её приложений» (2016, г. Екатеринбург, Россия), международной конференции и летней школе «G2A2 — Group and Graphs, Algorithms and Automata» (2015, г. Екатеринбург, Россия), международной конференции–семинаре «Workshop on Automatic Sequences» (2015, г. Льеж, Бельгия), Мальцевских чтениях (2012, г. Новосибирск, Россия), семинаре «Квазигруппы и смежные вопросы» (2018, 2017, г. Новосибирск, Россия), семинаре «Теория кодирования» (2018, 2015, 2013, г. Новосибирск, Россия), семинаре «Combinatorics and Number theory» (2017, г. Вийёрбан, Франция).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 8 — в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 68 страниц с 9 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 67 наименований.

# Глава 1. Арифметические подпоследовательности в морфических словах

## 1.1 Определения

Пусть  $q \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим конечный алфавит  $\mathbb{A}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$ . Определим функцию  $R_q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A}_q$ , которая каждому натуральному числу  $x$  сопоставляет его  $q$ -ичную запись. Через  $r_q(x)$  обозначим сумму по модулю  $q$  цифр в  $q$ -ичном представлении  $x$ . Иными словами,  $x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot q^i$ ,  $R_q(x) = x_{n-1} \dots x_1 x_0$ , и  $r_q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \pmod q$ . Обобщённое слово Туэ-Морса над алфавитом  $\mathbb{A}_q$  определяется следующим образом:  $w_{(q)} = w_0 w_1 w_2 w_3 \dots$ , где  $w_i = r_q(i) \in \mathbb{A}$ .

Рассмотрим функцию  $L_w(c, d)$ , которая паре натуральных чисел  $c$  и  $d$  сопоставляет длину арифметической прогрессии с начальным символом  $w_c$  и разностью  $d$  в слове  $w$ . Значением функции  $L_w(d) = \max_c L(c, d)$  является максимальная среди длин арифметических прогрессий с разностью  $d$  в слове  $w$ .

В качестве примера рассмотрим обобщённое слово Туэ-Морса над троичным алфавитом:

$$w_{(3)} = 0121202011120201012201012120 \dots$$

Так как данное слово является бескубным, т.е. не содержит подслова вида  $v^3$  для  $v \in \mathbb{A}_3^*$ ,  $L_{w_{(3)}}(1) = 2$ . Легко видеть, что  $L_{w_{(3)}}(0, 5) = 2$ ,  $L_{w_{(3)}}(2, 2) = L_{w_{(3)}}(20, 2) = 3$ , и мы утверждаем, что  $L_{w_{(3)}}(2) = 3$ .

Пусть  $w = w_0 w_1 w_2 \dots$  — произвольное бесконечное слово над алфавитом  $\mathbb{A}$ . Для каждого натурального числа  $d$  определим множество  $A_w(d) = \{w_c w_{c+d} w_{c+2d} \dots w_{c+(k-1)d} \mid c, k \in \omega\}$ , содержащее все арифметические подпоследовательности слова  $w$  с разностью  $d$ .

Арифметическое замыкание слова  $w$  — это множество  $A_w = \bigcup_{d=1}^{\infty} A_w(d)$ , состоящее из всех его арифметических факторов. Через  $a_w(n) = |A_w \cap \mathbb{A}^n|$  обозначим функцию *арифметической сложности* слова  $w$ .

Для данных бесконечного слова  $w$  и конечного слова  $u \in A_w$  нас интересует наименьшее положительное число  $d$  такое, что  $u$  принадлежит  $A_w(d)$ .

Обозначим длину  $q$ -ичной записи  $d$  через  $i_w(u)$  и назовём это число *арифметическим индексом*  $u$  в  $w$ . Для каждого натурального  $n$  рассмотрим функцию  $I_w(n) = \max_{u \in A_w \cap \mathbb{A}^n} i_w(u)$ . Отметим, что данная функция определена над множеством арифметических факторов  $w$ .

## 1.2 Длины арифметических прогрессий в обобщённом слове Туэ-Морса

В данном параграфе сформулирована и доказана теорема о длинах однородных арифметических подпоследовательностей в обобщённом слове Туэ-Морса над алфавитом простой мощности. В теореме приводятся значения функции  $\max_{d < q^n} L_{w(q)}(d)$ , которая заданному натуральному  $n$  сопоставляет максимальную длину арифметической прогрессии, полученную с разностью  $d$  из полуинтервала  $[1, q^n)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $q$  — простое число, и  $w(q)$  — обобщённое слово Туэ-Морса над алфавитом  $\mathbb{A}_q$ . Для любого натурального числа  $n \geq 1$  имеет место следующая формула:

$$\max_{d < q^n} L_{w(q)}(d) = \begin{cases} q^n + 2q, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{q}, \\ q^n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Более того, максимум данной функции достигается на разности  $d = q^n - 1$  в обоих случаях.

*Доказательство.* Сначала покажем, что для фиксированного натурального  $n$  неравенство  $d \neq q^n - 1$  влечёт неравенство  $L_{w(q)}(d) \leq q^n$ . Часто в процессе доказательства нам придётся использовать значения  $q - 1$  и  $q - 2$ , поэтому для удобства изложения введём обозначения  $\dot{q} := q - 1$ ,  $\ddot{q} := q - 2$ .



### Случай $d \neq q^n - 1$

Отметим, что последовательности слова  $w_{(q)}$ , составленные из букв с индексами, имеющими одинаковый остаток от деления на  $q$ , эквиваленты  $w_{(q)}$  с точностью до переименования символов. Из этого следует, что достаточно рассматривать разности  $d$ , которые не делятся на  $q$ .

**Лемма 1.** Пусть  $q$  — простое число, и  $w_{(q)}$  — обобщённое слово Туэ-Морса над алфавитом  $\mathbb{A}_q$ . Для любых натуральных чисел  $n \geq 1$  и  $d \leq q^n - 1$  максимальная длина арифметической прогрессии с разностью  $d$  в слове  $w_{(q)}$  не больше, чем  $q^n$ .

*Доказательство.* Каждое натуральное число  $c$  представимо в виде  $c = yq^n + x$ , где  $x, y$  — произвольные неотрицательные числа, причём  $x < q^n$ . В рамках данного доказательства будем называть  $x$  суффиксом  $c$ .

Рассмотрим множество  $X = \{0, 1, 2, \dots, q^n - 1\}$  мощности  $|X| = q^n$ . Отметим, что каждая разность  $d$  и суффикс  $x$  числа  $c$  принадлежат  $X$ . Более того, число  $d$  взаимно просто с  $|X|$ . Таким образом, каждая разность  $d$  является порождающим элементом аддитивной циклической группы  $X$ , и для каждого  $x \in X$  множество  $\{x + id\}_{i=0}^{q^n-1}$  совпадает с  $X$ .

Для доказательства леммы достаточно для каждого  $d \neq q^n - 1$  найти число  $x \in X$  такое, что:

- (a)  $x + d < q^n$ ;
- (b)  $s_q(x + d) \neq s_q(x)$ .

Действительно, рассмотрим число  $c = yq^n + x$ , где  $y$  — произвольное неотрицательное число, а  $x$  удовлетворяет (a) и (b). Используя (a), имеем  $c + d = yq^n + (x + d)$ , что влечёт равенства  $s_q(c) = s_q(y) + s_q(x) \pmod{q}$  и  $s_q(c + d) = s_q(y) + s_q(x + d) \pmod{q}$ . Используя (b), получаем  $s_q(c + d) \neq s_q(c)$ . Это значит, что любая арифметическая подпоследовательность с разностью  $d$  в обобщённом слове Туэ-Морса, имеющая длину хотя бы  $q^n + 1$ , содержит символ с индексом  $c$ , суффикс которого удовлетворяет (a) и (b). Иными словами, данная подпоследовательность содержит хотя бы два различных символа алфавита  $\mathbb{A}_q$ . Таким образом, в данном случае любая арифметическая прогрессия в  $w_{(q)}$  имеет длину не больше, чем  $q^n$ .

Найдём подходящие значения суффиксов для каждой разности  $d$ .

Если  $s_q(d) \neq 0$ , тогда  $x = 0$  подходит. Иначе воспользуемся неравенством  $d \neq q^n - 1$ , означающим, что существует хотя бы один индекс  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  такой, что символ  $d_j$  в  $q$ -ичной записи разности  $S_q(d) = d_{n-1} \cdots d_1 d_0$  отличен от  $\dot{q}$ . Имеем две возможности:

1. Существует хотя бы один индекс  $j$  такой, что  $d_j < \dot{q}$ , и  $d_{j-1} = \dot{q}$ .

В данном случае значение  $x = q^{j-1}$  удовлетворяет (а) и (б). Действительно,  $q$ -ичную запись числа  $c$  можно представить как  $S_q(y)S_q(x)$ , где все символы  $x_i$  являются нулями, за исключением  $x_{j-1} = 1$ . Таким образом,  $s_q(c) = s_q(y) + 1$ . Число  $d$  в  $q$ -ичной записи выглядит следующим образом:  $d_{n-1} \cdots d_j \dot{q} d_{j-2} \cdots d_0$ . Сумма цифр в данной записи сравнима с нулем по модулю  $q$ . Иными словами,  $\sum_{i=0, i \neq j-1}^{n-1} d_i + \dot{q} \equiv 0 \pmod{q}$ , или  $\sum_{i=0, i \neq j-1}^{n-1} d_i - 1 \equiv 0 \pmod{q}$ . После добавления разности  $d$  к  $c$ , получим число  $c + d$  с  $q$ -ичным представлением  $S_q(y)d_{n-1} \cdots (d_j + 1)0d_{j-2} \cdots d_0$ , где  $d_j + 1 \leq \dot{q}$ . Тогда  $s_q(c) = s_q(y) + s_q(d) + 1 - \dot{q} = s_q(y) + 2$ , что отлично от  $s_q(c) = s_q(y) + 1$ .

2. Для любого  $j$  неравенство  $d_j \neq \dot{q}$  значит, что все символы в  $q$ -ичной записи  $d$  с индексами меньшими, чем  $j$ , отличны от  $\dot{q}$ .

Если  $j > 0$ , тогда  $d_1, d_0 \neq \dot{q}$ . Так как  $d$  не делится на  $q$ , значение  $d_0$  отлично от нуля. Подходящим значением  $x$  в данном случае является  $q - d_0$ , т.к.  $s_q(x + d) = s_q(1 - d_0) \neq s_q(q - d_0) = s_q(x)$ .

Но в случае  $S_q(d) = \underbrace{\dot{q} \cdots \dot{q}}_{n-1} d_0$  ( $j = 0$ ), значения  $x$ , удовлетворяющего

(а) и (б), не существует.

Рассмотрим  $x$  с  $q$ -ичным представлением вида  $S_q(x) = x_{n-1} \cdots x_1 \dot{q}$ , где каждый  $x_i$  — произвольный символ алфавита  $\mathbb{A}_q$ . Мы утверждаем, что вне зависимости от значения  $y$  после не более двух добавлений разности к числу  $c = yq^n + x$  мы получим число с суммой цифр в  $q$ -ичной записи, отличным от  $s_q(c) = s_q(y) + s_q(x)$ . Рассмотрим каждый из этих двух шагов.

После добавления разности вида  $\dot{q} \cdots \dot{q} d_0$  к числу  $c$  с  $S_q(c) = S_q(y) x_{n-1} \cdots x_1 \dot{q}$  и  $s_q(c) = s_q(y) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \dot{q}$ , получим число  $c + d$  с  $S_q(c + d) = S_q(y + 1)x_{n-1} \cdots x_1 \dot{d}_0$ . Сумма цифр в  $q$ -ичной записи данного числа равна  $s_q(y + 1) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i + \dot{d}_0$ . Если это значение отлично от  $s_q(c)$ , тогда выбранный  $x$  подходит. Если же значения  $s_q(c)$  и  $s_q(c + d)$

совпадают, то справедливо неравенство  $s_q(y+1) + d_0 \equiv s_q(y) \pmod{q}$ . Из этого следует, что  $q$ -ичная запись  $y$  заканчивается на  $0 \underbrace{\dot{q} \cdots \dot{q}}_{\dot{q}-d_0}$ , что

значит,  $q$ -ичная запись  $y+1$  заканчивается нулём. После следующего добавления разности  $d$  возможны два случая.

Если  $2d_0 \geq q$ , имеем  $S_q(y+2)x_{n-1} \cdots x_1(2\dot{d}_0)$  с  $s(y+2) = s(y+1) + 1$  и  $s_q(c+2d) = s_q(y+1) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2d_0 \pmod{q}$ . Если  $s_q(c+2d) = s_q(c+d)$ , то  $d_0 = \dot{q}$ , что противоречит начальному предположению, а значит, имеет место неравенство  $s_q(c+2d) \neq s_q(c+d)$ .

Если  $2d_0 < q$ , то имеем число с  $q$ -ичной записью вида  $S_q(c+2d) = S_q(y+2)x_{n-1} \cdots x_2x_1(2\dot{d}_0)$ , где  $s_q(c+2d) = s_q(y+1) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i + 2d_0 - 1$ . Для сохранения однородности арифметической подпоследовательности необходимо  $d_0 \equiv 0 \pmod{q}$ , что противоречит неравенству  $d_0 \neq 0$ .

Таким образом, существует  $q(n-1)$  различных значений  $x$  таких, что для любого неотрицательного числа  $c$  с суффиксом  $x$  или  $s_q(c+d) \neq s_q(c)$ , или  $s_q(c+2d) \neq s_q(c+d)$ . Это значит, что любая арифметическая прогрессия с разностью  $d$  такой, что  $S_q(d) = \underbrace{\dot{q} \cdots \dot{q}}_{n-1} d_0$ ,  $d_0 \neq 0, d_0 \neq \dot{q}$ , не может быть длиннее, чем  $q^n$ . Все возможные значения разности  $d \neq q^n - 1$  рассмотрены, и лемма доказана.  $\square$

**Случай**  $d = q^n - 1$

**Лемма 2.** Пусть  $q$  — простое число, и  $w_{(q)}$  — обобщённое слово Туэ-Морса над алфавитом  $\mathbb{A}_q$ . Пусть  $d = q^n - 1$ ,  $c = zq^{2n} + yq^n + x$ , где  $x + y = q^n - 1$ , а  $z$  — неотрицательное целое число, тогда выполнено следующее:

$$\max_z L_{w_{(q)}}(c, d) = \begin{cases} x + q + 1, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{q}, \\ x + 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Для простоты изложения рассмотрим Таблицу 1, в которой для каждого значения  $i = 0, 1, 2, x + q + 1$  представлены  $q$ -ичные записи чисел

$c + id$  и значения  $s_q(c + id)$ . Отметим, что значения в третьем столбце взяты по модулю  $q$ .

Таблица 1 — Случай  $d = q^n - 1$ ,  $c = zq^{2n} + yq^n + x$ , где  $x + y = q^n - 1$ ,  $z \in \mathbb{N}$ .

$\mathbf{i}$	$\mathbf{S}_q(\mathbf{c} + \mathbf{id})$						$\mathbf{s}_q(\mathbf{c} + \mathbf{id})$
0	$S_q(z)$	$y_{n-1}$	$\cdots$	$y_1 y_0$	$x_{n-1} \cdots x_1 x_0$		$n\dot{q} + s_q(z)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$+x d$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$x$	$S_q(z)$	$\dot{q}$	$\cdots$	$\dot{q} \dot{q}$	0	$\cdots$	$n\dot{q} + s_q(z)$
$x + 1$	$S_q(z)$	$\dot{q}$	$\cdots$	$\dot{q} \dot{q}$	$\dot{q}$	$\cdots$	$2n\dot{q} + s_q(z)$
$x + 2$	$S_q(z + 1)$	0	$\cdots$	0 0	$\dot{q}$	$\cdots$	$n\dot{q} - 1 + s_q(z + 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$+(q - 2) d$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$x + q$	$S_q(z + 1)$	0	$\cdots$	0 $\ddot{q}$	$\dot{q}$	$\cdots$	$n\dot{q} - 1 + s_q(z + 1)$
$x + q + 1$	$S_q(z + 1)$	0	$\cdots$	0 $\dot{q}$	$\dot{q}$	$\cdots$	$n\dot{q} + \ddot{q} + s_q(z + 1)$

Так как  $d = q^n - 1$ , можно представить действие  $c + d$  как два одновременных действия  $x - 1$  и  $y + 1$ . Таким образом, пока суффикс числа  $c + id$  больше нуля, сумма цифр в  $S_q(c + id)$  равна  $\dot{q}n$ . Это значение сохраняется в течение первых  $x$  прибавлений разности  $d$  к  $c$  (т.е. когда  $i = 0, 1, \dots, x$ ). При значении  $i = x$  длина арифметической прогрессии с разностью  $d$  и начальным индексом  $c$  равна  $x + 1$ .

При следующем прибавлении разности ( $i = x + 1$  в Таблице 1) сумма цифр в  $q$ -ичном представлении полученного числа становится равной  $2\dot{q}n + s_q(z)$ . Для того, чтобы сохранить однородность арифметической подпоследовательности, необходимо  $\dot{q}n \equiv 2\dot{q}n \pmod{q}$ , т.е.  $n \equiv 0 \pmod{q}$ .

После следующего добавления разности  $z$  становится  $z + 1$ ,  $y$  — нулём, а  $x = q^n - 2$ . Сумма по модулю  $q$  цифр в  $q$ -ичной записи полученного числа равна  $s_q(z + 1) + s_q(x) = s_q(z + 1) + n\dot{q} - 1$ .

Если  $z$  такое число, что  $s_q(z) = 1$  и  $s_q(z + 1) = 2$  (например,  $z = 1$ ), то однородность арифметической подпоследовательности будет сохраняться в течение следующих  $q - 2$  добавлений разности  $d$ , пока мы не попадём в ситуацию  $y = q - 2$ ,  $x = q^n - \dot{q}$ .

На следующем шаге  $y$  станет равным  $\dot{q}$ , и  $x = q^n - q - 1$ . Тогда  $s_q(y) + s_q(x) = n\dot{q} + \ddot{q} \pmod{q}$ , что отлично от предыдущего значения  $n\dot{q} - 1$ .

Таким образом, длина арифметической прогрессии равна  $x + q + 1$ , если  $q|n$ , и равна  $x + 1$  иначе.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $q$  — простое число, и  $w_{(q)}$  — обобщённое слово Туэ-Морса над алфавитом  $\mathbb{A}_q$ . Пусть  $n \equiv 0 \pmod{q}$ ,  $d = q^n - 1$ ,  $c = zq^{2n} + yq^n + x$ ,  $y = q^n - \dot{q}$ ,  $x = \dot{q}$ , и  $z$  — произвольное неотрицательное число, тогда  $\max_z L_{w_{(q)}}(c, d) = q^n + 2q$ .

*Доказательство.* Сумма по модулю  $q$  цифр в  $S_q(c)$  равна  $s_q(z) + n\dot{q} + 1$ . Используя логику, схожую с логикой доказательства Леммы 2, это значение останется неизменным, пока суффикс числа  $c + id$  не меньше нуля, т.е. в течение  $\dot{q}$  добавлений разности  $d$ . На последнем шаге мы попадаем в ситуацию, когда  $y = x = 0$  и  $z$  становится  $z + 1$ . Однородность арифметической подпоследовательности сохранится, если, к примеру,  $z = 0$ .

После следующего добавления  $d$  мы окажемся в условиях Леммы 2 при  $x = q^n - 1$ , используя утверждение которой, мы получим арифметическую прогрессию длины  $q^n + q$ .

Отнимем  $d$  от изначального значения  $c$ , чтобы убедиться, что  $s_q(c - d) \neq s_q(c)$ , и мы не можем получить более длинную арифметическую прогрессию. Действительно,  $c - d = zq^{2n} + (q^n - \dot{q})q^n + q$ , и сумма цифр в  $q$ -ичном представлении этого числа равна  $n\dot{q} - \dot{q} + 1$ , тогда как для  $c$  такая сумма равна  $n\dot{q} + 1$ . Таким образом, длина арифметической прогрессии равна  $1 + \dot{q} + q^n + q = q^n + 2q$ , лемма доказана.  $\square$

Теперь докажем, что невозможно построить однородную арифметическую прогрессию с разностью  $d = q^n - 1$  и длиной больше, чем  $q^n + 2q$ .

Для этого представим начальный индекс  $c$  арифметической подпоследовательности в виде  $c = yq^n + x$ ,  $x < q^n$ .

Случай, когда для числа  $c$  выполнено  $x_j + y_j = \dot{q}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$  описан в Лемме 2. Иначе найдётся хотя бы один индекс  $j$  такой, что  $x_j + y_j \neq \dot{q}$ . Среди всех индексов  $s$  таким свойством выберем минимальный. Существует  $q\dot{q}$  вариантов значений для пары  $(y_j, x_j)$ :  $(0, 0), (0, 1), \dots, (0, \dot{q}), (1, 0), \dots, (\dot{q}, \dot{q})$ .

Числа  $y$  и  $x$  имеют  $q$ -ичные записи  $S_q(y) = y_{s-1} \dots y_{j+l+1} \dot{q} \dots \dot{q} y_j \dots y_0$  и  $S_q(x) = x_{n-1} \dots x_{j+m+1} 0 \dots 0 x_j \dots x_0$  соответственно. Значения индексов  $l$  и  $m$  удовлетворяют неравенствам  $0 \leq l \leq s - j$ ,  $0 \leq m \leq n - j$ ,  $y_{j+l+1} \neq \dot{q}$ , кроме того,  $x_{j+m+1} \neq 0$ .

Добавим  $q^{j+1}d$  к  $c$ . Если  $l \neq 0$ , блок  $\dot{q} \cdots \dot{q}$  в  $S_q(y)$  заменится блоком из нулей; если  $m \neq 0$ , то блок из нулей в  $S_q(x)$  станет  $\dot{q} \cdots \dot{q}$ , значение  $y_{j+l+1}$  увеличится на 1, и  $x_{j+m+1}$  уменьшится на 1. Для сохранения однородности подпоследовательности необходимо, чтобы  $l$  и  $m$  были сравнимы по модулю  $q$ .

Возможны два случая.

1. Если  $x_j < \dot{q} - y_j$ , тогда после  $(x_j + 1)q^j$  добавлений разности  $d$  мы получим число с  $q$ -ичным представлением

$$y_{s-1} \cdots y_{j+l+2}(y_{j+l+1} + 1)0 \cdots 0$$

$(y_j + x_j + 1)y_{j-1} \cdots y_0 x_{n-1} \cdots x_{j+m+2}x_{j+m+1}\dot{q} \cdots \dot{q}\dot{q}x_{j-1} \cdots x_0$  с суммой цифр  $s_q(y) + s_q(x) + \dot{q} \neq s_q(y) + s_q(x) = s_q(c)$ . Таким образом, длина полученной арифметической прогрессии не больше  $q^j(q + x_j + 1) \leq q^n$ , если  $j < n - 1$ .

2. Если  $x_j > \dot{q} - y_j$ , добавив  $(q - y_j)q^j d$ , получим число вида  $y_{s-1} \cdots y_{j+l+2}(y_{j+l+1} + 1)0 \cdots 010y_{j-1} \cdots y_0 x_{n-1} \cdots x_{j+m+2}x_{j+m+1}\dot{q} \cdots \dot{q}(x_j - q + y_j)x_{j-1} \cdots x_0$  с суммой цифр  $s_q(y) + 1 - l\dot{q} + 1 - y_j + s_q(x) + m\dot{q} - 1 - q + y_j = s_q(y) + s_q(x) + 1$ . Длина полученной арифметической прогрессии в данном случае не превысит  $q^j(2q - y_j) \leq q^n$ , если  $j < n - 1$ .

**Пример 1.** Рассмотрим пример для  $q = 5$ ,  $m = l = 3$ ,  $n = 6$ ,  $j = 1, (y_j, x_j) = (1, 1)$ ,  $d = 15624$ ,  $S_5(d) = 444444$ .

$i$	$c + 5i d$ ,	$S_5(c + 5i d)$	$s_5(c + 5i d)$
0	$c = 97396881$	144413200011 + 44444400	1
5	$c + 25 d$	<u>200013144411</u> + 4444440	1
6	$c + 30 d$	<u>200023144401</u> + 4444440	1
7	$c + 35 d$	<u>200033144341</u>	0

Случай  $j = n - 1$  требует особого рассмотрения.

Будем действовать схожим способом: добавив  $x d$  к  $c$ , занулим его суффикс, затем добавим  $d$  необходимое число раз. Таким образом, худшим является случай, когда  $S_q(x) = x_{n-1}\dot{q}\cdots\dot{q}$  и  $S_q(y) = y_{s-1}\cdots y_n y_{n-1} 0\cdots 0$ . Длина арифметической прогрессии равна  $x + 2 < q^n + 2$ , если  $n \equiv 0 \pmod q$ , и равна  $x + 1 \leq q^n$  иначе. Но так как  $y_{n-1} + x_{n-1} \neq \dot{q}$ , требуют рассмотрения два случая, для каждого из которых представим таблицу. В Таблице 2 рассмотрен случай  $r = y_{n-1} + x_{n-1} < \dot{q}$ , в Таблице 3 — случай  $r = y_{n-1} + x_{n-1} > \dot{q}$ .

Таблица 2 — Случай  $r = y_{n-1} + x_{n-1} < \dot{q}$ .

$\mathbf{i}$	$\mathbf{S}_q(\mathbf{c} + \mathbf{id})$				$\mathbf{s}_q(\mathbf{c} + \mathbf{id})$
0	$y_{s-1}\cdots y_n$	$y_{n-1}$	$0\cdots 0$	$x_{n-1} \dot{q}\cdots\dot{q} \dot{q}$	$n\dot{q} - \dot{q} + r + y_n + \dots + y_{s-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$+x d$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x$	$y_{s-1}\cdots y_n$	$r$	$\dot{q}\cdots\dot{q}$	$0 \ 0\cdots 0 \ 0$	$n\dot{q} - \dot{q} + r + y_n + \dots + y_{s-1}$
$x + 1$	$y_{s-1}\cdots y_n$	$r$	$\dot{q}\cdots\dot{q}$	$\dot{q} \ \dot{q}\cdots\dot{q} \ \dot{q}$	$2n\dot{q} - \dot{q} + r + y_n + \dots + y_{s-1}$
$x + 2$	$y_{s-1}\cdots y_n(r + 1)$	$0\cdots 0$	$\dot{q}$	$\dot{q}\cdots\dot{q} \ \ddot{q}$	$n\dot{q} + r + y_n + \dots + y_{s-1}$

Таблица 3 — Случай  $r = y_{n-1} + x_{n-1} > \dot{q}$ .

$\mathbf{i}$	$\mathbf{S}_q(\mathbf{c} + \mathbf{id})$				$\mathbf{s}_q(\mathbf{c} + \mathbf{id})$
0	$y_{s-1}\cdots y_n$	$y_{n-1}$	$0\cdots 0$	$x_{n-1} \dot{q}\cdots\dot{q} \dot{q}$	$n\dot{q} - \dot{q} + r + y_n + \dots + y_{s-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$+x d$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x$	$y'_{s-1}\cdots y'_n$	$(r - q)$	$\dot{q}\cdots\dot{q}$	$0 \ 0\cdots 0 \ 0$	$n\dot{q} - \dot{q} + r + y'_n + \dots + y'_{s-1}$
$x + 1$	$y'_{s-1}\cdots y'_n$	$(r - q)$	$\dot{q}\cdots\dot{q}$	$\dot{q} \ \dot{q}\cdots\dot{q} \ \dot{q}$	$2n\dot{q} - \dot{q} + r + y'_n + \dots + y'_{s-1}$
$x + 2$	$y'_{s-1}\cdots y'_n$	$(r - q + 1)$	$0\cdots 0$	$\dot{q} \ \dot{q}\cdots\dot{q} \ \ddot{q}$	$n\dot{q} + r + y'_n + \dots + y'_{s-1}$

Здесь через  $y'_{s-1}\cdots y'_n$  обозначены символы  $y_{s-1}\cdots y_n$ , изменённые после увеличения  $y_n$  на 1 на шаге  $x$ ; для сохранения однородности подпоследовательности сумма этих символов должна быть равна  $y_{s-1} + \dots + y_n \pmod q$ .

Таким образом, все возможные случаи рассмотрены и теорема доказана.  $\square$

### 1.3 Арифметический индекс в обобщённом слове Туэ-Морса

#### 1.3.1 Верхняя оценка на функцию арифметического индекса

Пусть  $q$  — простое число,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $q^{n-1} \leq m < q^n$ , и  $u$  — конечное слово длины  $m$  над алфавитом  $\mathbb{A}_q$ .

Наша цель — найти вхождение слова  $u$  в обобщённое слово Туэ-Морса  $w_{(q)}$  в качестве арифметического подслова. Для этого рассмотрим арифметическое подслово  $w_{(q)}$  вида  $0^{m-1}\beta_1 \cdots \beta_m$ , где  $\beta_i \in \mathbb{A}_q$  и  $\beta_1 \neq 0$ . Такой фактор может быть получен с разностью  $d = q^n - 1$  и начальным индексом  $c$ , описанным в Лемме 3.

Определим «базис»  $\{b_i\}_{i=1}^m$ , с помощью которого найдём арифметическое вхождение  $u$  в  $w_{(q)}$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ \beta_1; \\ b_2 &= 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ \beta_1 \ \beta_2; \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ b_m &= \beta_1\beta_2\beta_3 \ \cdots \ \beta_{m-1} \ \beta_m. \end{aligned}$$

Каждый базисный элемент является арифметическим подсловом  $w_{(q)}$  с разностью  $d$  и начальными индексами  $c_1 = c$ ,  $c_{i+1} = c + i d$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ . Слово  $u$  может быть представлено в следующем виде:

$$u = \bigoplus_{i=1}^m \alpha_i b_i, \text{ где } \alpha_i \in \mathbb{A}_q \text{ для } i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.1)$$

Здесь  $\bigoplus$  означает посимвольное сложение по модулю  $q$ .

Начальный индекс  $c_u$  арифметического подслова  $u$  имеет  $q$ -ичную запись  $S_q(c_u) = \underbrace{S_q(c_1) \cdots S_q(c_1)}_{\alpha_1} \cdots \underbrace{S_q(c_m) \cdots S_q(c_m)}_{\alpha_m}$ . По Лемме 3 длина каждого слова  $S_q(c_i)$  не превосходит  $2n + q$ . Для того, чтобы упростить процесс построения, добавим необходимое количество нулей слева от каждого  $S_q(c_i)$ , чтобы его длина стала в точности  $2n + q$ . Тогда длина  $S_q(c_u)$  не превышает  $(2n + q)m\dot{q}$ . Разность  $d_u$  имеет  $q$ -ичную запись  $S_q(d_u) = \underbrace{0 \cdots 0}_{n+q} \underbrace{\dot{q} \cdots \dot{q}}_n \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_{n+q} \underbrace{\dot{q} \cdots \dot{q}}_n$  той же



длины, что и  $S_q(c_u)$ . Следовательно, слово  $u$  гарантировано является арифметическим фактором  $w_{(q)}$  с разностью  $d_u$  и начальным индексом  $c_u$ .

Худшим случаем является тот, когда все базисные элементы в сумме 1.1 взяты с коэффициентами  $\dot{q}$ . В таком случае длина  $q$ -ичной записи разности  $d_u$  равна  $|S_q(d_u)| = (2n + q)\dot{q}m = (2\lceil \log_q m \rceil + q)\dot{q}m$ . Это значение является верхней оценкой на функцию арифметического индекса в слове  $w_{(q)}$ . Таким образом, доказано следующее неравенство:

$$I_{w_{(q)}}(m) \leq (2\lceil \log_q m \rceil + q)\dot{q}m. \quad (1.2)$$

### 1.3.2 Нижняя оценка на функцию арифметического индекса

Рассмотрим множество  $A_w(d)$  всех арифметических подпоследовательностей с разностью  $d$  в слове  $w$  над алфавитом  $\mathbb{A}_q$ . Определим функцию  $A_w(d, m) = |A_w(d) \cap \mathbb{A}_q^m|$ , которая подсчитывает количество различных арифметических подслов длины  $m$  с разностью  $d$  в слове  $w$ . Ясно, что  $|A_w(1) \cap \mathbb{A}_q^m| = p_w(m)$ . Более того,  $A_w(d, m) = |A_w(d) \cap \mathbb{A}_q^m| \leq p_w(dm)$ .

Для получения нижней оценки на функцию  $I_w(m)$  найдём нижнюю оценку на  $x$  в следующем неравенстве:

$$a_w(m) \leq \sum_{d=1}^x A_w(d, m) \leq \sum_{d=1}^x p_w(dm). \quad (1.3)$$

Слово Туэ-Морса и его обобщение являются неподвижными точками равноблочных морфизмов, комбинаторная сложность таких слов растёт линейно [58], т.е.  $p_{w_{(q)}}(m) \leq C m$  для некоторого положительного числа  $C$ . Из работы [13] следует, что  $a_{w_{(q)}}(m) = q^m$ . Неравенство 1.3 для обобщённого слова Туэ-Морса принимает следующую форму:

$$q^m \leq \sum_{d=1}^x C d m = \frac{C m x(x+1)}{2}, \quad (1.4)$$

откуда следует, что  $x \geq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2q^m}{Cm}} - \frac{1}{2}$ .

Нас интересует целая часть  $\log_q x$ . Значение  $\lceil \log_q(x + \frac{1}{2}) \rceil$  может быть равно  $\lceil \log_q x \rceil$  или  $\lceil \log_q x \rceil + 1$ . Значит,  $\lceil \log_q x \rceil + 1 \geq \lceil \log_q(x + \frac{1}{2}) \rceil \geq \left\lceil \log_q \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2q^m}{Cm}} \right\rceil$ .

Используя описанные ниже неравенства, получим нижнюю оценку на функцию арифметического индекса в  $w_{(q)}$ .

$$I_{w_{(q)}}(m) \geq \lceil \log_q x \rceil \geq \left\lceil \log_q \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2q^m}{Cm}} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{1}{2} \log_q \frac{2q^m}{Cm} \right\rceil, \quad (1.5)$$

После упрощения  $I_{w_{(q)}}(m) \geq \lceil C(m - \log_q(m)) \rceil$  для некоторого положительного числа  $C$ .

Таким образом, верхняя оценка на арифметический индекс в обобщённом слове Туэ-Морса растёт как  $O(m \log m)$ , нижняя оценка растёт линейно.

Отметим, что, зная комбинаторную и арифметическую сложности некоторого бесконечного слова, легко вычислить нижнюю оценку на его арифметический индекс. Получение верхней оценки требует более глубоких знаний о структуре слова.

## Глава 2. Закрытые и открытые факторы в словах Арну-Рози

### 2.1 Определения и обозначения

Пусть  $t \geq 2$  — натуральное число, и пусть  $x$  — бесконечное слово над алфавитом  $\mathbb{A}_t$ . За  $f_x^c, f_x^o : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  обозначим функции, которые подсчитывают количество закрытых и открытых подслов в  $x$  длины  $n \in \mathbb{N}$ . В данной главе мы исследуем поведение функции  $f_x^c$ , когда  $x$  — слово Арну-Рози.

Рекуррентное слово  $x \in \mathbb{A}_t^{\mathbb{N}}$  называется словом Арну-Рози, если для каждого  $n \geq 0$  оно содержит в точности один специальный справа фактор  $R_n$  длины  $n$  и в точности один специальный слева фактор  $L_n$  длины  $n$ . Более того,  $R_n$  является префиксом  $t$  различных подслов  $x$  длины  $n + 1$ , а  $L_n$  является суффиксом  $t$  различных подслов  $x$  длины  $n + 1$ . В частности, верна формула  $p_x(n) = (t - 1)n + 1$ , и каждое подслово  $u$  слова  $x$  имеет в точности  $t$  различных полных первых возвратов. В случае, когда  $t = 2$ ,  $x$  является словом Штурма.

В Теореме 2, сформулированной и доказанной в параграфе 2.2, представлена формула функции замкнутой сложности  $f_x^c(n)$  для слова Арну-Рози  $x$  над алфавитом  $\mathbb{A}_t, t \geq 2$ . В связи с тем, что для каждого слова  $x \in \mathbb{A}_t^{\mathbb{N}}$  выполнено равенство  $f_x^c(n) + f_x^o(n) = p_x(n)$ , значения функции  $f_x^o(n)$  могут быть непосредственно вычислены с использованием уже известных значений  $f_x^c(n)$  и  $p_x(n)$ .

Формула записана в терминах двух последовательностей, связанных с  $x$ . Первая из них — это последовательность  $(b_k)_{k \geq 0}$  длин биспециальных подслов  $\varepsilon = B_0, B_1, B_2, \dots$  слова  $x$ , упорядоченных по возрастанию длины. Вторая последовательность  $(p_a^{(k)})_{a \in \mathbb{A}_t}^{k \in \omega}$ , где для каждого  $k \in \omega, t$  координат вектора  $(p_a^{(k)})_{a \in \mathbb{A}_t}$  являются длинами  $t$  первых возвратов к  $B_k$  в  $x$ . Обе последовательности были широко изучены в литературе.

Для каждого  $k \in \omega$  координаты  $(p_a^{(k)})_{a \in \mathbb{A}_t}$  взаимно просты, и каждый из них является периодом  $B_k$ . Более того, каждое  $B_k$  является экстремальным словом в смысле Файна и Вильфа, т.е. любое слово  $u$  с периодами  $(p_a^{(k)})_{a \in \mathbb{A}_t}$ , имеющее большую, чем  $b_k$ , длину, является степенью некоторой буквы алфавита  $\mathbb{A}_t$  (см. [59]). Через  $\text{Fac}(x)$  обозначим множество подслов, или факторов,  $x$ . Фактор  $v$  слова  $x$  называется *специальным справа (слева)*, если  $va$  и  $vb$  ( $av$

и  $bv$ ) являются факторами слова  $x$  для двух разных букв  $a, b \in \mathbb{A}_t$ . Подслово, являющееся специальным и справа, и слева, называется *биспециальным*. Пусть даны подслова  $u$  и  $v$  слова  $x$ , будем говорить, что  $u$  — *первый возврат* к  $v$  в  $x$ , если  $uv$  является подсловом  $x$ , имеющим в точности два вхождения подслова  $v$ : одно в качестве префикса и одно в качестве суффикса. Слово  $uv$  в данном случае называется полным первым возвратом к  $v$ .

## 2.2 Количество закрытых факторов в словах Арну-Рози

Слова Арну-Рози образуют специальный класс слов, обобщающих слова Штурма (см. напр. [60—62]), а следовательно, каждый фактор  $u$  слова Арну-Рози насыщен палиндромами, т.е.  $u$  содержит в точности  $|u| + 1$  различных факторов-палиндромов (включая пустое слово  $\varepsilon$ ). При доказательстве Теоремы 2 мы воспользуемся характеристикой насыщенных слов из работы [61].

**Теорема 2.** Пусть  $x \in \mathbb{A}_t^{\mathbb{N}}$  — слово Арну-Рози. Для каждого  $k \in \omega$  и  $a \in \mathbb{A}_t$  определим интервал  $I_{k,a} = [b_k - 2p_k + p_a^{(k)} + 2, b_k + p_a^{(k)}]$ , где  $p_k = \min_{b \in \mathbb{A}_t} \{p_b^{(k)}\}$ . Пусть

$$F(a, n) = \sum_{\substack{k \in \omega \\ n \in I_{k,a}}} (d(n, I_{k,a}) + 1), \quad (2.1)$$

где для  $n \in I_{k,a}$  число  $d(n, I_{k,a})$  обозначает минимальное расстояние между  $n$  и концами интервала  $I_{k,a}$ . Тогда множество закрытых подслов  $x$  длины  $n$  выражается следующим выражением:  $f_x^c(n) = \sum_{a \in \mathbb{A}} F(a, n)$ .

Отметим, что для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и  $a \in \mathbb{A}_t$  сумма 2.1 конечна, так как включает в себя только те  $k$ , для которых  $n \in I_{k,a}$ .

Как следствие из Теоремы 2, мы покажем, что если  $x$  — слово Арну-Рози, то  $\liminf f_x^c(n) = +\infty$ .

Интересно, что  $\liminf f_x^c(n) = 0$ , когда  $x$  — слово Дракона (см. [63]). Иными словами, существует бесконечно много значений  $n$  таких, что все подслова  $x$  длины  $n$  открыты.

**Лемма 4.** (Предложение 3 в [61]) *Слово  $u \in \mathbb{A}^+$  насыщено тогда и только тогда, когда максимальный палиндромный суффикс каждого его префикса  $v$  имеет единственное вхождение в  $v$ .*

Далее в этой главе через  $x \in \mathbb{A}_t^{\mathbb{N}}$  обозначается слово Арну-Рози, через  $\varepsilon = B_0, B_1, B_2, \dots$  — последовательность его биспециальных подслов, упорядоченных по возрастанию длины. Пусть  $b_k = |B_k|$ , тогда  $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \dots$ . Напомним следующую характеристику биспециальных подслов  $B_k$  слова  $x$  в терминах палиндромного замыкания (см. [61; 64]). Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  существует единственная буква  $a_k \in \mathbb{A}_t$  такая, что  $B_{k-1}a_k$  является специальным влево фактором слова  $x$ . Последовательность  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  называется направляющей последовательностью слова  $x$ . Таким образом, слово  $B_{k-1}a_k$  является префиксом  $B_k$ , и более того, слово  $B_k$  является палиндромным замыканием  $B_{k-1}a_k$ , а именно, минимальным по длине палиндромом, начинающимся с  $B_{k-1}a_k$ . Иными словами, если через  $S_k$  обозначить максимальный палиндромный суффикс слова  $B_{k-1}a_k$  и представить данное слово в виде  $B_{k-1}a_k = x_k S_k$ , где  $x_k \in \mathbb{A}^*$ , тогда  $B_k = x_k S_k \overline{x_k}$  (Лемма 5 в [64]).

**Лемма 5.** *Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  максимальный палиндромный суффикс  $S_k$  биспециального подслова  $B_k$  имеет в него единственное вхождение. В частности,  $S_k$  не является подсловом  $B_{k-1}$ .*

*Доказательство.* Ясно, что  $S_k$  является подсловом  $B_k$ . Предположим, что  $S_k$  имеет более одного вхождения в слово  $B_k$ . Так как  $S_k$  и  $B_k$  палиндромы, и  $B_k = x_k S_k \overline{x_k}$ , слово  $S_k$  имеет как минимум два вхождения в  $x_k S_k = B_{k-1}a_k$ . Но это противоречит Лемме 4, так как  $S_k$  определён как максимальный по длине палиндромный суффикс  $B_{k-1}a_k$ .  $\square$

Определим функцию  $\varphi : \text{Fac}(x) \rightarrow \omega$  следующим образом. Для каждого  $v \in \text{Fac}(x)$  значение  $\varphi(v)$  — это наименьшее  $k \in \omega$  такое, что  $v$  является подсловом  $B_k$ . В частности,  $\varphi(v) = 0 \Leftrightarrow v = \varepsilon$ .

**Лемма 6.** *Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и  $v \in \mathbb{A}_t^+$ . Тогда  $v \in \varphi^{-1}(k)$  тогда и только тогда, когда  $v$  является подсловом  $B_k$ , содержащим  $S_k$  как подслово. В частности, каждое слово  $v \in \varphi^{-1}(k)$  имеет единственное вхождение в  $B_k$ .*

*Доказательство.* Предположим, что  $v$  является подсловом  $B_k$ , содержащим  $S_k$  в качестве подслова. В соответствии с Леммой 5, слово  $v$  не является фактором

$B_{k-1}$ , а следовательно, не является фактором  $B_j$  для  $j < k$ . Таким образом,  $\varphi(v) = k$ .

Предположим теперь, что  $\varphi(v) = k$ . Тогда  $v$  является подсловом  $B_k$ , но не является подсловом  $B_{k-1}$ . Так как  $B_k = x_k S_k \bar{x}_k = B_{k-1} a_k \bar{x}_k = x_k a_k B_{k-1}$ , слово  $v$  содержит  $S_k$  в качестве подслова. Установив, что  $v \in \varphi^{-1}(k)$  содержит  $S_k$ , и используя Лемму 5, получаем, что  $v$  имеет единственное вхождение в  $B_k$  как подслово.  $\square$

Для каждого  $k \in \omega$  и  $a \in \mathbb{A}_t$  через  $R_a^{(k)}$  обозначим полный первый возврат к  $B_k$  в  $x$ , начинающийся с  $B_k a$ . Пусть  $p_a^{(k)} = |R_a^{(k)}| - b_k$ , иными словами,  $p_a^{(k)}$  — это длина первого возврата к  $B_k$ , обозначенного через  $R_a^{(k)}$ . Отметим, что  $R_a^{(0)} = a$  для каждой буквы  $a \in \mathbb{A}_t$ . Последовательность длин  $(p_a^{(k)})_{a \in \mathbb{A}_t}^{k \in \omega}$  может быть рекурсивно вычислена следующим образом: каждой  $a \in \mathbb{A}_t$  значение  $p_a^{(0)} = 1$ . Для каждого  $k \geq 1$  значение  $p_{a_k}^{(k)} = p_{a_k}^{(k-1)}$ , и  $p_b^{(k)} = p_b^{(k-1)} + p_{a_k}^{(k-1)}$  для  $b \in \mathbb{A}_t \setminus \{a_k\}$ . Индукцией несложно проверить, что

$$b_k = \frac{\sum_{a \in \mathbb{A}} p_a^{(k)} - t}{t - 1}. \quad (2.2)$$

Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  определим  $p_k = p_{a_k}^{(k)}$ . Так как  $B_k$  является полным первым возвратом к  $B_{k-1}$ , начинающимся с  $B_{k-1} a_k$  (т.е.  $R_{a_k}^{(k-1)} = B_k$ ), верно следующее:

$$p_k = p_{a_k}^{(k)} = p_{a_k}^{(k-1)} = |R_{a_k}^{(k-1)}| - b_{k-1} = b_k - b_{k-1}. \quad (2.3)$$

Из рекурсивного определения  $p_a^{(k)}$  немедленно следует, что  $p_k = \min\{p_a^{(k)} \mid a \in \mathbb{A}\}$ .

**Лемма 7.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ . Через  $J_k$  обозначим отрезок  $[b_k - 2p_k + 2, b_k]$ . Если  $v \in \varphi^{-1}(k)$ , то  $|v| \in J_k$ , и для каждого  $t \in J_k$  множество  $\varphi^{-1}(k)$  содержит в точности  $d(t, J_k) + 1$  различных слов длины  $t$ . Здесь через  $d(t, J_k)$  обозначено минимальное расстояние между  $t$  и концами отрезка  $J_k$ . В частности,  $|\varphi^{-1}(k)| = p_k^2$ .

*Доказательство.* По Лемме 6 имеем, что  $v \in \varphi^{-1}(k)$  тогда и только тогда, когда  $v$  является фактором слова  $B_k$ , содержащим  $S_k$  как подслово. Отсюда следует, что  $|S_k| \leq |v| \leq |B_k|$ . Из равенств  $B_k = B_{k-1} a_k \bar{x}_k$  и 2.3 следует, что  $p_k = b_k - b_{k-1} = |x_k| + 1$ . Более того, так как  $B_k = x_k S_k \bar{x}_k$ , имеем  $|S_k| =$

$|B_k| - 2|x_k| = b_k - 2(p_k - 1) = b_k - 2p_k + 2$ . Таким образом,  $b_k - 2p_k + 2 \leq |v| \leq b_k$ . Предположим, что  $m \in J_k$ . Для того, чтобы показать, что  $\varphi^{-1}(k)$  содержит  $d(m, J_k) + 1$  различных слов длины  $m$ , используем факт, что каждое  $v \in \varphi^{-1}(k)$  содержит  $S_k$  и имеет лишь одно вхождение в  $B_k$  (см. Лемму 6). Наконец,

$$|\varphi^{-1}(k)| = 1 + 2 + \dots + (p_k - 1) + p_k + (p_k - 1) + \dots + 2 + 1 = 2 \left( \frac{p_k(p_k - 1)}{2} \right) + p_k = p_k^2.$$

□

Пусть  $k \in \mathbb{N}$ , и  $v \in \varphi^{-1}(k)$ . Как следствие Леммы 6, существует единственное представление биспециального фактора  $B_k = u_1 v u_2$ , где  $u_1, u_2 \in \mathbb{A}^*$ . В частности,  $v u_2$  специален справа в  $x$ , а  $u_1 v$  специален слева в  $x$ .

Предположим, что  $u$  является закрытым подсловом в  $x$  с фронтиром  $v$ . В частности, слово  $u$  начинается и заканчивается на  $v$ . Так как слово  $x$  рекуррентное и апериодическое, слово  $v u_2$  является префиксом  $u$ , а  $u_1 v$  является суффиксом  $u$ , откуда следует, что  $u_1 u u_2$  — полный первый возврат к  $B_k$ . Фактически,  $u_1 u u_2$  начинается и заканчивается на  $B_k$  и не имеет других вхождений  $B_k$ , иначе слово  $v$  имело бы внутреннее вхождение в  $u$  (не в качестве префикса или суффикса). Таким образом,  $u_1 u u_2 = R_a^{(k)}$  для некоторой буквы  $a \in \mathbb{A}_t$ .

В дальнейшем нам понадобится следующее определение. Пусть  $u$  — закрытый фактор  $x$ , и  $a \in \mathbb{A}_t$ . Будем говорить, что  $u$  имеет  $\text{min } a$ , если  $u = a$ , или если закрытость  $u$  с фронтиром  $v \in \mathbb{A}_t^*$  влечёт равенство  $u_1 u u_2 = R_a^{(k)}$ , где  $k = \varphi(v)$ , и  $B_k = u_1 v u_2$ .

Если  $u$  — закрытый фактор слова  $x$  типа  $a \in \mathbb{A}_t$ , и фронтир  $v \in \mathbb{A}_t^+$ , тогда

$$|u| - |v| = |R_a^{(k)}| - (|u_1| + |u_2| + |v|) = |R_a^{(k)}| - |B_k| = p_a^{(k)}, \quad (2.4)$$

где  $k = \varphi(v)$ . Отметим, что равенство  $|u| - |v| = p_a^{(k)}$  в 2.4 сохраняется и в случае  $u \in \mathbb{A}_t$  (здесь  $v = \varepsilon$  и  $k = 0$ ).

Обозначим через  $C(x)$  множество всех закрытых подслов  $x$ , и для каждого  $u \in C(x)$  через  $\text{fr}(u) \in \mathbb{A}_t^*$  обозначим его фронтир. Будем считать, что  $\text{fr}(a) = \varepsilon$  для каждой буквы  $a \in \mathbb{A}_t$ . Для каждого  $k \in \omega$  и  $a \in \mathbb{A}_t$  через  $C_{k,a}(x)$  обозначим множество всех закрытых подслов  $u$  слова  $x$  типа  $a$ , чей фронтир  $\text{fr}(u)$  принадлежит  $\varphi^{-1}(k)$ .

**Лемма 8.** Множества  $\{C_{k,a}(x) : k \in \omega, a \in \mathbb{A}_t\}$  образуют разбиение множества  $C(x)$ , и отображение  $\text{fr} : C_{k,a}(x) \rightarrow \varphi^{-1}(k)$  является биекцией.

*Доказательство.* Каждое закрытое подслово  $u \in C(x)$  имеет уникальный тип, и его фронт  $\text{fr}(u)$  принадлежит  $\varphi^{-1}(k)$  для единственного значения  $k \in \omega$ . Таким образом, каждый закрытый фактор  $u$  слова  $x$  принадлежит только одному множеству  $C_{k,a}(x)$ . По определению, если  $u \in C_{k,a}(x)$ , тогда  $\text{fr}(u) \in \varphi^{-1}(k)$ . Более того,  $u$  однозначно определена своим фронтом  $\text{fr}(u)$  и её типом. фактически, если  $u \in C_{k,a}(x)$ , то  $u_1 u u_2 = R_a^{(k)}$ , где  $u_1, u_2$  единственным образом определяются разложением  $B_k = u_1 \text{fr}(u) u_2$ . Это доказывает, что отображение  $\text{fr}$  инъективно. Чтобы показать его сюръективность, предположим, что  $v \in \varphi^{-1}(k)$ . Тогда мы можем представить биспециальный фактор  $B_k$  в виде  $B_k = u_1 v u_2$  для некоторых  $u_1, u_2 \in \mathbb{A}_t^*$ . Таким образом,  $R_a^{(k)}$  начинается с  $u_1$  и заканчивается на  $u_2$ . Отсюда следует, что  $u = u_1^{-1} R_a^{(k)} u_2^{-1}$  закрытый фактор слова  $x$  типа  $a$ , и  $\text{fr}(u) = v$ .  $\square$

*Доказательство Теоремы 2.* Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$ . По Лемме 8 имеем

$$f_x^c(n) = |C(x) \cap \mathbb{A}^n| = \sum_{\substack{k \in \omega \\ a \in \mathbb{A}}} |C_{k,a}(x) \cap \mathbb{A}^n|. \quad (2.5)$$

Предположим, что  $u \in C_{k,a} \cap \mathbb{A}^n$ . Пусть  $v = \text{fr}(u) \in \varphi^{-1}(k)$ . Тогда по 2.4 имеем  $n = |u| = |v| + p_a^{(k)}$ . По Лемме 7,  $|v| = n - p_a^{(k)} \in J_k = [b_k - 2p_k + 2, b_k]$ . По Лемме 8 количество слов  $u \in C_{k,a}(x) \cap \mathbb{A}^n$  совпадает с количеством слов  $v \in \varphi^{-1}(k)$  длины  $n - p_a^{(k)}$ , которое, в свою очередь, по Лемме 7 равно  $d(n - p_a^{(k)}, J_k) + 1 = d(n, I_{k,a}) + 1$ , где  $I_{k,a} = [b_k - 2p_k + p_a^{(k)} + 2, b_k + p_a^{(k)}]$ . Это завершает доказательство Теоремы 2.  $\square$

В случае бинарного алфавита, то есть, когда  $x$  — слово Штурма, каждое биспециальное подслово  $B_k$  имеет в точности два первых возврата, обозначим их длины через  $p_k < q_k$ . Таким образом, для  $a \in \mathbb{A}_2$  и  $k \in \mathbb{N}$  имеем

$$p_a^{(k)} = \begin{cases} p_k, & \text{если } a = a_k; \\ q_k, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Если  $a = a_k$ , то  $I_{k,a} = [q_k, q_k + 2p_k - 2]$ , иначе  $I_{k,a} = [2q_k - p_k, 2q_k + p_k - 2]$ . Введя обозначения  $P_k = [q_k, q_k + 2p_k - 2]$  и  $Q_k = [2q_k - p_k, 2q_k + p_k - 2]$ , получим



формулу для количества закрытых подслов длины  $n$  в слове Штурма  $x$ :

$$f_x^c(n) = \sum_{\substack{k \in \omega \\ n \in P_k}} (d(n, P_k) + 1) + \sum_{\substack{k \in \omega \\ n \in Q_k}} (d(n, Q_k) + 1). \quad (2.7)$$

**Пример 2.** Рассмотрим слово Фибоначчи

$$x_{fib} = abaababaabaababa \dots,$$

являющееся неподвижной точкой морфизма  $a \mapsto ab$ ,  $b \mapsto a$ . В этом случае  $p_k = F_k$ , и  $q_k = F_{k+1}$ , где  $(F_k)_{k \in \omega}$  — последовательность Фибоначчи, рекурсивно заданная формулами  $F_0 = F_1 = 1$ ,  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$  для  $k \geq 1$ .

В Таблице 4 показано количество закрытых подслов длины  $n \leq 15$  в слове Фибоначчи, вычисленное с помощью 2.7.

Таблица 4 — Количество закрытых подслов в слове Фибоначчи.

<b>n</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
<b><math>f_{x_{fib}}^c(n)</math></b>	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	9	10

Например, для  $n = 11$  необходимо определить те значения  $k$ , для которых или  $11 \in P_k$ , или  $11 \in Q_k$ . Нетрудно проверить, что 11 принадлежит только отрезкам  $P_4 = [8, 16]$ ,  $Q_3 = [7, 11]$  и  $Q_4 = [11, 19]$ . Следовательно,

$$f_{x_{fib}}^c(11) = d(11, P_4) + 1 + d(11, Q_3) + 1 + d(11, Q_4) + 1 = 4 + 1 + 1 = 6.$$

График функции  $f_{x_{fib}}^c$  изображен на рисунке 2.1. Ясно, что данная функция не является монотонной.

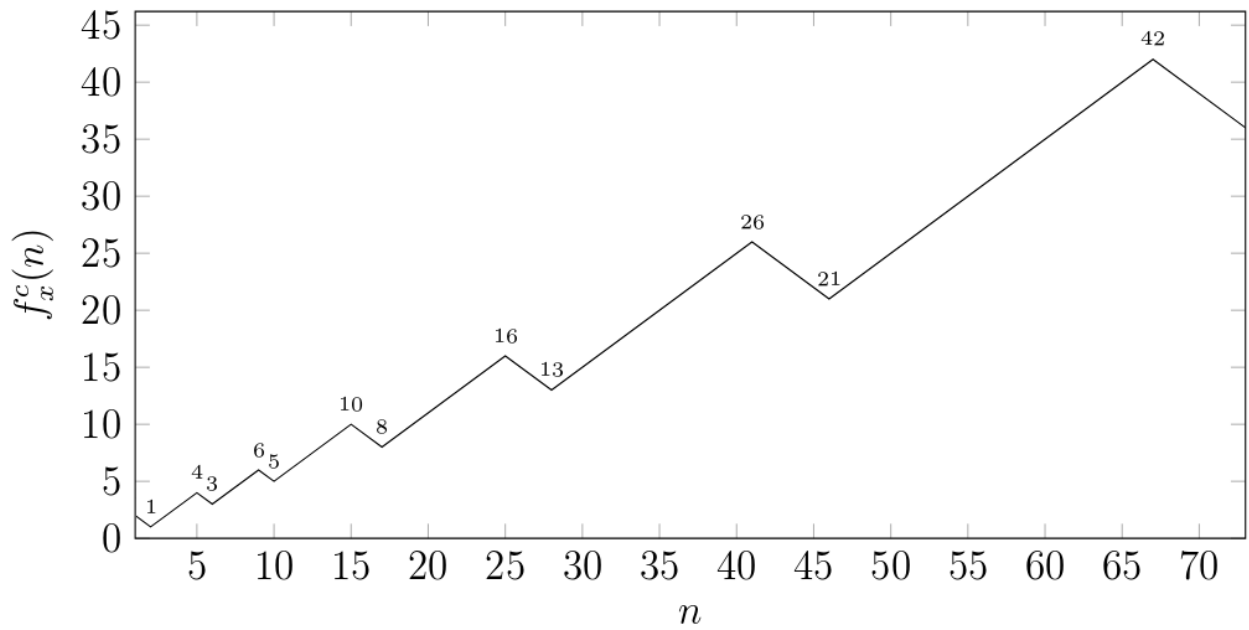


Рисунок 2.1 — Количество закрытых подслов в слове Фибоначчи

На рисунке 2.2 показано поведение функции закрытой сложности слова Трибоначчи.

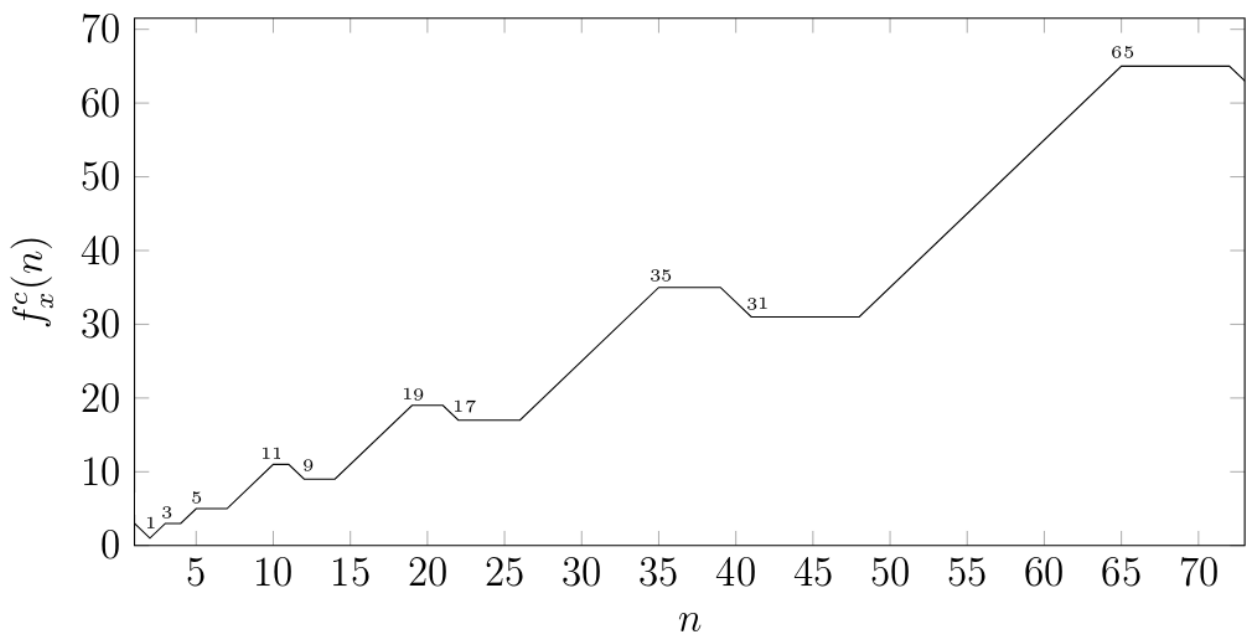


Рисунок 2.2 — Количество закрытых подслов в слове Трибоначчи

На рисунке 2.3 изображена закрытая сложность слова Штурма  $x_r$ , чья генерирующая последовательность начинается с  $0010000011110111110101101110011000011 \dots$ .

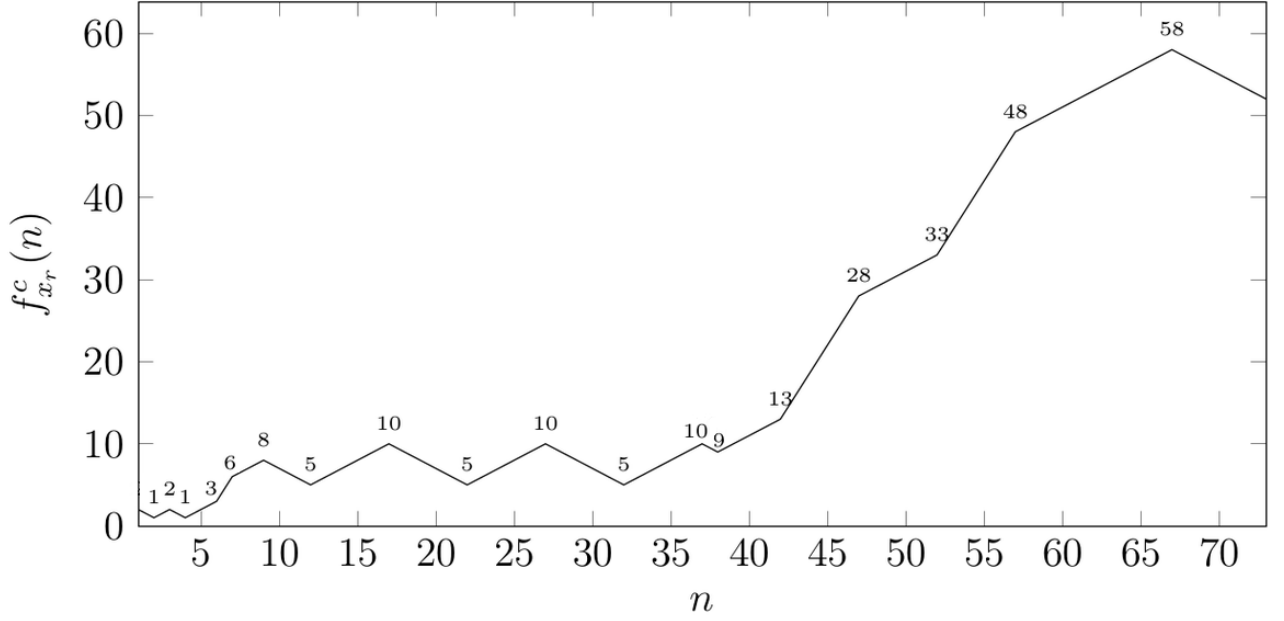


Рисунок 2.3 — Количество закрытых подслов в слове  $x_r$

Приведённые примеры показывают, что последовательность значений функции  $f_x^c(n)$  стремится к бесконечности, хотя и не обязательно монотонна, и график функции может иметь плато и точки перегиба.

**Следствие 1.** Пусть  $t \in \mathbb{N}$ , и  $x \in \mathbb{A}_t^{\mathbb{N}}$  — слово Арну-Рози. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_x^c(n) = +\infty.$$

*Доказательство.* Для каждого  $k \in \omega$  определим отрезки  $I_k = [b_k - p_k + 2, b_k + p_k]$ , т.е.,  $I_0 = [1, 1]$ , и  $I_k = I_{a_k, k}$  для  $k \geq 1$ . Из того, что  $p_k \geq 1$  для каждого  $k \in \mathbb{N}$ , следует  $\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \omega} I_k$ . Пусть  $m \in \mathbb{N}$ , выберем такое число  $j$ , что  $p_j - 1 > 2m$ , и возьмём  $N = b_j + 2$ . Покажем, что  $f_x^c(n) \geq m$  для всех  $n \geq N$ . В связи с тем, что  $b_k = b_{k-1} + p_k$ , левым концом отрезка  $I_{j+1}$  является число  $b_j + 2$ . Таким образом, для каждого  $n \geq N$  существует натуральное число  $k \geq j$  такое, что  $n \in I_{k+1}$ . Имеем  $|I_{k+1}| = 2p_{k+1} - 2 \geq 2p_j - 2 > 4m$ . Если  $d(n, I_{k+1}) \geq m$ , то из Теоремы 2 следует неравенство  $f_w^c(n) \geq m$ . Иначе имеем или i)  $b_{k+1} + p_{k+1} - n < m$ , или ii)  $n - (b_k + 2) < m$ . В случае i) получим уравнение

$$n - b_{k+1} > p_{k+1} - m \geq p_j - m > m + 1. \quad (2.8)$$

Так как  $m + 1 \geq 2$ , число  $n$  также принадлежит отрезку  $I_{k+2}$ . Покажем, что  $d(n, I_{k+2}) \geq m$ . По 2.8 имеем  $n - (b_{k+1} + 2) \geq m$ . Также

$$b_{k+2} + p_{k+2} - n \geq b_{k+2} + p_{k+2} - (b_{k+1} + p_{k+1}) = 2p_{k+2} - p_{k+1} \geq p_{k+2} \geq p_j > 2m + 1.$$

Таким образом,  $d(n, I_{k+2}) \geq m$ , и, в соответствии с утверждением Теоремы 2, верно  $f_x^c(n) \geq m$ .

В случае ii) выполнено  $n < b_k + 2 + m \leq b_k + 2m + 1 < b_k + p_k$ , следовательно,  $n \in I_k$ . Покажем, что  $d(n, I_k) \geq m$ . Действительно,  $b_k + p_k - n > p_k - 2 - m \geq p_j - 2 - m \geq m$ . Более того, используя  $n \in I_{k+1}$ , имеем, что  $n - (b_{k-1} + 2) \geq b_k + 2 - (b_{k-1} + 2) = p_k \geq p_j > 2m + 1$ , то есть  $d(n, I_k) \geq m$ .  $\square$

Отметим, что нижний предел функции закрытой сложности не обязательно равен бесконечности для всех апериодических слов. Например, в случае, когда  $x$  — слово Дракона,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_x^c(n) = 0$ . Действительно, в [63] построен конечный автомат, имеющий 11 состояний и допускающий язык, состоящий из двоичных представлений тех натуральных  $n$ , для которых существует закрытый фактор слова Дракона длины  $n$  (см. рис. 1 в [63]). Как альтернативный пример, можно рассмотреть слово  $x$ , являющееся неподвижной точкой, начинающейся с  $a$ , 2-равноблочного морфизма  $\varphi$  над алфавитом  $\{a, b, c, d\}$ , заданным следующим образом:  $\varphi : a \mapsto ac, b \mapsto ad, c \mapsto bc, d \mapsto bd$ . Легко показать, что все подслова  $x$  длины  $2^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) открыты.

## Глава 3. Совершенные раскраски бесконечных циркулянтных графов

### 3.1 Определения и предварительные сведения

Рассмотрим граф  $G = (V, E)$  с множеством вершин  $v$  и множеством рёбер  $E$ . Пусть  $k$  — натуральное число, а  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^k$  — неотрицательная целая матрица порядка  $k$ . Раскраской вершин графа  $G$  в  $k$  цветов называется отображение  $\phi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ . Если при этом  $\phi(v) = s$  для некоторой вершины  $v$ , то говорят, что  $s$  — цвет вершины  $v$ . Далее под раскраской графа будем понимать раскраску множества его вершин.

Раскраска  $\phi$  называется *совершенной* с матрицей параметров  $M$ , если для любых  $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$  любая вершина цвета  $i$  имеет в точности  $m_{ij}$  соседей цвета  $j$ .

Рассмотрим множество  $I = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$  упорядоченных по возрастанию натуральных чисел. Через  $Ci_\infty(I)$  обозначим бесконечный граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а рёбрами соединены те из них, которые находятся на расстоянии  $d \in I$ .

По графу  $Ci_\infty(I)$  построим соответствующий ему псевдограф длины  $t$ , обозначив его через  $Ci_t(I)$ . Множество вершин графа  $Ci_t(I)$  совпадает с множеством элементов группы  $\mathbb{Z}_t$ , и для любой вершины  $v \in \mathbb{Z}_t$  мультимножество инцидентных ей рёбер имеет вид  $\{(v, v + d_i \bmod t) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Представленные графы являются циркулянтными, множество  $I$  называется множеством дистанций соответствующего графа.

Для изучения и перечисления совершенных раскрасок графов будем использовать следующее понятие. *Гомоморфизмом* из графа  $G_1 = (V_1, E_1)$  на граф  $G_2 = (V_2, E_2)$  называется сюръективное отображение  $h : V_1 \rightarrow V_2$ , сохраняющее отношение смежности вершин.

**Предложение 1.** Пусть даны графы  $G_1$  и  $G_2$ . Если существует гомоморфизм из  $G_1$  на  $G_2$ , тогда каждая совершенная раскраска графа  $G_2$  индуцирует совершенную раскраску графа  $G_1$  с той же матрицей параметров.

Доказательство этого утверждения немедленно следует из определения гомоморфизма.

Предложение 1 позволяет строить совершенные раскраски одного графа, используя совершенные раскраски других, часто более просто устроенных, графов. Например, существует естественный гомоморфизм графа  $Ci_\infty(I)$  на псевдограф  $Ci_t(I)$ , соответствующий гомоморфизму из  $\mathbb{Z}$  на  $\mathbb{Z}_t$ . Он позволяет перейти от бесконечных графов к конечному случаю.

Раскраску  $\phi$  вершин бесконечного циркулянтного графа будем называть периодической с длиной периода  $t$ , если для всех  $i \in \mathbb{Z}$  верно равенство  $\phi(i) = \phi(i + t)$ . Период такой раскраски будем обозначать через  $[\phi(i)\phi(i + 1)\phi(i + 2) \cdots \phi(i + t - 1)]$  для некоторого целого  $i$ .

Следующее утверждение касается совершенных раскрасок бесконечной цепи, которая в наших терминах является бесконечным циркулянтным графом  $Ci_\infty(\{1\})$ .

**Предложение 2.** Пусть  $k$  — натуральное число. Множество совершенных  $k$ -раскрасок графа  $Ci_\infty(\{1\})$  исчерпывается совершенными раскрасками со следующими периодами:

1.  $[123 \cdots (k - 1)k]$ ;
2.  $[k(k - 1) \cdots 212 \cdots (k - 2)(k - 1)]$ ;
3.  $[k(k - 1) \cdots 212 \cdots (k - 1)k]$ ;
4.  $[k(k - 1) \cdots 2112 \cdots (k - 1)k]$ .

Доказательство этого предложения может быть найдено, например, в [54] (Лемма 2). Отметим, что раскраски с такими периодами являются совершенными для бесконечных циркулянтных графов с любым набором дистанций, так как получены с помощью орбитного метода.

В данной главе рассмотрены графы с наборами дистанций  $I_{cn} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  и  $I_{on} = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$ . Отметим, что графы  $Ci_\infty(I_{cn})$  и  $Ci_\infty(I_{on})$  имеют степень  $2n$ , более того, граф с множеством нечётных дистанций является двудольным.

Результаты главы посвящены совершенным раскраскам графов  $Ci_\infty(I_{cn})$  и  $Ci_\infty(I_{on})$  в два цвета. Матрица параметров в этом случае выглядит следующим образом:  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Из того, что рассматриваемые графы имеют степень  $2n$ , следуют равенства:  $a + b = 2n$ ,  $c + d = 2n$ , или  $a = 2n - b$ ,  $d = 2n - c$ .

Таким образом, матрица параметров раскраски легко восстанавливается лишь по значениям параметров  $b$  и  $c$ . Не теряя общности, можно считать, что  $b \geq c$ . Если соответствующая совершенная раскраска графа  $Si_\infty(I)$  существует, будем говорить, что пара  $(b, c)$  *допустима* для  $Si_\infty(I)$ .

Для удобства записи множество цветов 2-раскрасок будем описывать как  $\{\text{чёрный, белый}\} = \{\bullet, \circ\}$ . Строка  $\bullet^k \circ^l$  будет изображать последовательность подряд идущих вершин, в которой сначала идут  $k$  чёрных вершин, а затем  $l$  белых вершин.

Для случая двух цветов нам понадобится следующее определение. Последовательность вершин вида  $\{v_i | i = ks, s \text{ — целое}\}$  будем называть  $k$ -*цепью*. Если все вершины такой цепи окрашены одинаково, то будем говорить, что она *однородная*, а если цвета вершин в ней чередуются, то назовем ее *чередующейся*.

### 3.2 Совершенные раскраски графа $Si_\infty(I_{cn})$

В данном параграфе перечислены все допустимые параметры совершенных 2-раскрасок бесконечных циркулянтов с набором дистанций  $I_{cn}$  и все их совершенные раскраски в два цвета. Сформулирована гипотеза о совершенных раскрасках графов из данного семейства в произвольное число цветов.

**Теорема 3.** Пусть  $n$  — натуральное число. Рассмотрим граф  $Si_\infty(I_{cn})$ , где  $I_{cn} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Множество его совершенных 2-раскрасок состоит из раскрасок, порождённых совершенными 2-раскрасками бесконечной цепи и графов  $Si_t(I_{cn})$  для  $t = 2n, 2n + 1, 2n + 2$ .

Покажем, что если пара  $(b, c)$  допустима, то  $b + c \in \{2n, 2n + 1, 2n + 2\}$ .

**Лемма 9.** Пусть  $b, c$  и  $n$  — натуральные числа. Пара  $(b, c)$  является допустимой для графа  $Si_\infty(I_{cn})$  тогда и только тогда, когда  $b + c \in \{2n, 2n + 1, 2n + 2\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим две соседние разноокрашенные вершины  $v_i$  и  $v_{i+1}$ . Без ограничения общности можно считать, что вершина  $v_i$  — чёрная. В состав окружения  $v_i$  входят две вершины, не лежащие в окружении  $v_{i+1}$ :  $v_{i-n}$  и сама  $v_{i+1}$ . Аналогично, в составе окружения  $v_{i+1}$  имеются вершины  $v_{i+n+1}$

и  $v_i$ , не принадлежащие окружению вершины  $v_i$ . Рассмотрим все возможные варианты раскрасок пары вершин  $(v_{i-n}, v_{i+n+1})$ :

$(\bullet, \circ)$  Цветовые составы окружений  $v_i$  и  $v_{i+1}$  совпадают, что значит  $c = a = 2n - b \Leftrightarrow b + c = 2n$ ;

$(\bullet, \bullet)$  В окружении  $v_{i+1}$  на одну чёрную вершину больше, чем в окружении  $v_i$ , то есть  $c = a + 1 = 2n - b + 1 \Leftrightarrow b + c = 2n + 1$ ;

$(\circ, \bullet)$  В окружении  $v_i$  на две белых вершины больше, чем в окружении  $v_{i+1}$ , иными словами,  $b = d + 2 = 2n - c + 2 \Leftrightarrow b + c = 2n + 2$ ;

$(\circ, \circ)$  Аналогичен случаю  $(\bullet, \bullet)$ . □

Теперь для каждого значения суммы  $b + c$  построим совершенные раскраски графа  $Ci_\infty(I_{cn})$ .

### Случай $b + c = 2n + 1$

Матрица параметров совершенной раскраски, соответствующей данной паре  $(b, c)$  имеет вид  $M_1 = \begin{pmatrix} 2n - b & b \\ c & 2n - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n - b & b \\ 2n - b + 1 & b - 1 \end{pmatrix}$ . Нетрудно убедиться, что раскраска с периодом вида  $\bullet^c \circ^b$  соответствует данной матрице параметров. Длина периода  $T = 2n + 1$ . Рассмотрим гомоморфизм  $h$  из множества вершин графа  $Ci_\infty(I_{cn})$  на множество вершин графа  $Ci_T(I_{cn})$ . Из Предложения 1 следует, что совершенная раскраска графа  $Ci_T(I_{cn})$  порождает совершенную раскраску  $Ci_\infty(I_{cn})$ , причём матрицы параметров этих раскрасок совпадают. Так как  $Ci_T(I_{cn})$  — полный граф, любая его раскраска с  $b$  белыми и  $c$  чёрными вершинами является совершенной с матрицей параметров  $M_1$ . Применив  $h^{-1}$ , получим совершенную раскраску графа  $Ci_\infty(I_{cn})$  с той же матрицей параметров. Таким образом, для матрицы  $M_1$  найдена серия совершенных раскрасок с периодом длины  $T = 2n + 1$ , в котором произвольным образом расположены  $b$  белых и  $c$  чёрных вершин.

Заметим, что раскраска, соответствующая паре  $(b, c)$ , где  $b + c = 2n + 1$ , образует разбиение графа на совершенные коды.



**Случай**  $b + c = 2n$

Матрица параметров для такой пары  $(b, c)$  имеет вид  $M_2 = \begin{pmatrix} 2n - b & b \\ 2n - b & b \end{pmatrix}$ .

**Лемма 10.** Пусть  $\{v_i | i - \text{целое}\}$  множество вершин графа  $Ci_\infty(I_{cn})$ , и пусть матрица параметров совершенной раскраски имеет вид  $M_2$ . Тогда верны следующие утверждения:

- a) Если  $\phi(v_i) \neq \phi(v_{i+1})$ , то  $\phi(v_{i-n}) = \phi(v_i)$ , а  $\phi(v_{i+1+n}) = \phi(v_{i+1})$ ;
- b) Если  $\phi(v_i) = \phi(v_{i+1})$ , то  $\phi(v_{i-n}) = \phi(v_{i+1+n})$ ;
- c) Если  $\phi(v_i) \neq \phi(v_{i+n})$ , то  $\phi(v_{i-1}) = \phi(v_i)$ , а  $\phi(v_{i+n+1}) = \phi(v_{i+n})$ .

*Доказательство.* Из вида матрицы  $M_2$  следует, что цветовой состав окружения каждой вершины не зависит от ее цвета. Таким образом, пункты а) и б) данной леммы становятся очевидными. Рассмотрим пункт с). Предположим, что  $\phi(v_{i-1}) \neq \phi(v_i)$ , тогда из а) следует, что  $\phi(v_{i+n}) = \phi(v_i)$ , а это противоречит условию пункта с). Аналогично,  $\phi(v_{i+n+1}) = \phi(v_{i+n})$ .  $\square$

Найдем периоды раскрасок, соответствующих матрице  $M_2$ .

Рассмотрим  $n$ -цепи в графе  $Ci_\infty(I_{cn})$ . Если все такие  $n$ -цепи однородные, то длина периода раскраски равна  $n$ . Иначе существует  $i$  такое, что  $\phi(v_i) \neq \phi(v_{i+n})$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\phi(v_i) = 1$ . Тогда, согласно пункту с) Леммы 10, имеем  $\phi(v_{i-1}) = \phi(v_i) = 1$ ,  $\phi(v_{i+n+1}) = \phi(v_{i+n}) = 0$ . Далее, из пункта б) Леммы 10 следует, что  $\phi(v_{i+2n+1}) = \phi(v_i) = 1$ , снова обратившись к утверждению с), имеем  $\phi(v_{i+2n+2}) = \phi(v_{i+2n+1}) = 1$ . Продолжая эту процедуру, получаем две одинаковые чередующиеся  $(n + 1)$ -цепи. Пусть  $v_{i+n+2}$  — чёрная вершина. Тогда, согласно пункту а) Леммы 10,  $v_{i+1}$  — белая. Согласно пункту б) Леммы 10, вершина  $v_{i+2n+3}$  не может быть чёрной. Если же  $v_{i+n+2}$  белая, то из пункта б) Леммы 10 следует, что вершина  $v_{i+1}$  чёрная (т.к. уже известно, что вершина  $v_{i+2n+2}$  — чёрная). Продолжая, снова получаем чередующиеся  $(n + 1)$ -цепи. Т.е. имеем раскраску графа с длиной периода  $T = 2n + 2$ , в котором число чёрных вершин равно числу белых вершин, и на расстоянии  $n + 1$  находятся разноокрашенные вершины.

Рассмотрим гомоморфизм из множества вершин графа  $Ci_\infty(I_{cn})$  на множество вершин графа  $Ci_{2n+2}(I_{cn})$ , обратным гомоморфизмом получим совер-

шенную раскраску графа  $Ci_\infty(I_{cn})$  с длиной периода  $2n + 2$ . В данном случае матрица параметров имеет вид  $\begin{pmatrix} n & n \\ n & n \end{pmatrix}$ , и  $b = c$ .

Теперь рассмотрим аналогичный гомоморфизм из множества вершин графа  $Ci_\infty(I_{cn})$  на множество вершин графа  $Ci_n(I_{cn})$ . Пусть в графе  $Ci_n(I_{cn})$  белым цветом покрашено  $s$  вершин, а чёрным —  $t$  вершин. Тогда каждая белая вершина смежна ровно с  $2s$  белыми и  $2t$  чёрными вершинами, откуда следует, что числа  $b$  и  $c$  — чётные.

Таким образом, получено два возможных периода раскраски графа  $Ci_\infty(I_{cn})$ , причём в случае периода длины  $T = n$ , параметры  $b$  и  $c$  обязательно чётные. Если  $T = 2n + 2$ , то  $b$  и  $c$  могут быть нечётными, но в этом случае  $b = c$ , и совершенная раскраска вершин графа состоит из чередующихся  $(n + 1)$ -цепей, взятых в произвольном порядке.

Нетрудно убедиться, что раскраска  $\bullet^{c/2} \circ^{b/2}$  соответствует матрице параметров  $M_2$ . Более того, из вида мультиграфа  $Ci_n(I_{cn})$  ясно, что любая раскраска с периодом  $T = n$ , в котором произвольным образом расположено  $b/2$  белых и  $c/2$  чёрных вершин, является совершенной с матрицей параметров  $M_2$ .

### Случай $b + c = 2n + 2$

Матрица параметров совершенной раскраски, соответствующая паре  $(b, c)$  в этом случае, имеет вид  $M_3 = \begin{pmatrix} 2n - b & b \\ 2n - b + 2 & b - 2 \end{pmatrix}$ .

**Лемма 11.** Пусть  $\{v_i | i \text{ — целое}\}$  — множество вершин графа  $Ci_\infty(I_{cn})$ , и пусть матрица параметров совершенной раскраски имеет вид  $M_3$ . Тогда верны следующие утверждения:

- a) Если  $\phi(v_i) \neq \phi(v_{i+1})$ , то  $\phi(v_{i-n}) = \phi(v_{i+1})$ ,  $\phi(v_{i+1+n}) = \phi(v_i)$ ;
- b) Если  $\phi(v_i) = \phi(v_{i+1})$ , то  $\phi(v_{i-n}) = \phi(v_{i+1+n})$ ;
- c) Если  $\phi(v_i) \neq \phi(v_{i+1+n})$ , то  $\phi(v_{i+1}) = \phi(v_i)$ , а  $\phi(v_{i+n}) = \phi(v_{i+1+n})$ .

*Доказательство.* Рассмотрим две соседние вершины  $v_i$  и  $v_{i+1}$  и цветовые составы их окружений. Как говорилось выше, в состав окружения вершины  $v_i$  входят две вершины, не лежащие в окружении вершины  $v_{i+1}$ :  $v_{i-n}$  и сама  $v_{i+1}$ .

Аналогично, в составе окружения  $v_{i+1}$  имеются вершины  $v_{i+n+1}$  и  $v_i$ , не принадлежащие окружению вершины  $v_i$ . Если вершины  $v_i$  и  $v_{i+1}$  окрашены одинаково ( $\phi(v_i) = \phi(v_{i+1})$ ), то цветовые составы их окружения должны совпадать, то есть, вершины  $v_{i-n}$  и  $v_{i+1+n}$  тоже должны быть окрашены одинаково. Тем самым показано, что пункт б) выполняется.

Пусть  $\phi(v_i) \neq \phi(v_{i+1})$ , будем считать вершину  $v_i$  чёрной ( $\phi(v_i) = \bullet$ ). Тогда из вида матрицы параметров  $M_3$  следует, что в окружении вершины  $v_i$  должно быть на две белые вершины больше, чем в окружении вершины  $v_{i+1}$ , а это значит, что  $\phi(v_{i-n}) = \circ$ ,  $\phi(v_{i+1+n}) = \bullet$ . Если цвета исходных вершин инвертировать, получим аналогичные равенства:  $\phi(v_{i-n}) = \bullet$ ,  $\phi(v_{i+1+n}) = \circ$ . Таким образом, пункт а) верен.

Перейдём к пункту с). Предположим, что  $\phi(v_{i+1}) \neq \phi(v_i)$ , тогда из а) следует, что  $\phi(v_{i+1+n}) = \phi(v_i)$ , а это противоречит условию пункта с). Аналогично получим равенство  $\phi(v_{i+1+n}) = \phi(v_{i+n})$ , которое завершает доказательство леммы.  $\square$

Найдем периоды раскрасок, соответствующих матрице  $M_3$ . Для этого рассмотрим  $(n+1)$ -цепи в графе  $Ci_\infty(I_{cn})$ . Если все  $(n+1)$ -цепи однородные, то длина периода раскраски равна  $(n+1)$ . Иначе существует  $i$  такое, что  $\phi(v_i) \neq \phi(v_{i+n+1})$ . Без ограничения общности, предположим, что вершина  $v_i$  — чёрная, тогда вершина  $v_{i+n+1}$  — белая. Тогда, согласно пункту с) Леммы 11, имеем  $\phi(v_{i+1}) = \phi(v_i) = \bullet$ ,  $\phi(v_{i+n}) = \phi(v_{i+n+1}) = \circ$ . Далее, из пункта б) Леммы 11 следует, что  $\phi(v_{i+2n+1}) = \phi(v_i) = \bullet$ , из пункта с) имеем  $\phi(v_{i+2n}) = \phi(v_{i+2n+1}) = \bullet$ . Продолжая эту процедуру, получаем две одинаковые чередующиеся  $n$ -цепи. Пусть  $v_{i+n+2}$  — чёрная вершина. Тогда, согласно пункту а) Леммы 11,  $v_{i+2n+2}$  — белая, и, согласно пункту б) Леммы 11, вершина  $v_{i+2}$  не может быть чёрной (т.к. вершина  $v_{i-n+1}$  белая). Если же  $v_{i+n+2}$  белая, то из пункта б) Леммы 11 следует, что вершина  $v_{i+2n+2}$  чёрная, и из пункта с) следует, что  $v_{i+2}$  — чёрная. Продолжая, снова получаем чередующиеся  $n$ -цепи. Т.о. получаем раскраску графа с длиной периода  $T = 2n$ , в котором количество чёрных вершин равно количеству белых, и на расстоянии  $n$  находятся разноокрашенные вершины.

Рассмотрим гомоморфизм из множества вершин графа  $Ci_\infty(I_{cn})$  на множество вершин графа  $Ci_{2n}(I_{cn})$ , обратным гомоморфизмом получим совершен-

ную раскраску  $Ci_\infty(I_{cn})$ . В данном случае матрица параметров имеет вид  $\begin{pmatrix} n-1 & n+1 \\ n+1 & n-1 \end{pmatrix}$ , и  $b = c$ .

Теперь рассмотрим аналогичный гомоморфизм из множества вершин графа  $Ci_\infty(I_{cn})$  на множество вершин графа  $Ci_{n+1}(I_{cn})$ . Пусть в графе  $Ci_{n+1}(I_{cn})$   $t$  белых и  $s$  чёрных вершин, тогда каждая белая вершина смежна ровно с  $2s$  белыми и  $2(t-1)$  чёрными вершинами, что значит, числа  $b$  и  $c$  чётные.

Таким образом, мы получили два возможных периода раскраски графа  $Ci_\infty(I_{cn})$ , причём если длина периода  $T = n + 1$ , то  $b$  и  $c$  обязательно чётные. Если же  $T = 2n$ , то  $b$  и  $c$  могут быть нечётными, но в этом случае  $b = c$ , и раскраска вершин графа из чередующихся  $n$ -цепей, взятых в произвольном порядке. На Рисунке 3.1 изображены примеры совершенных раскрасок конечных циркулянтных графов.

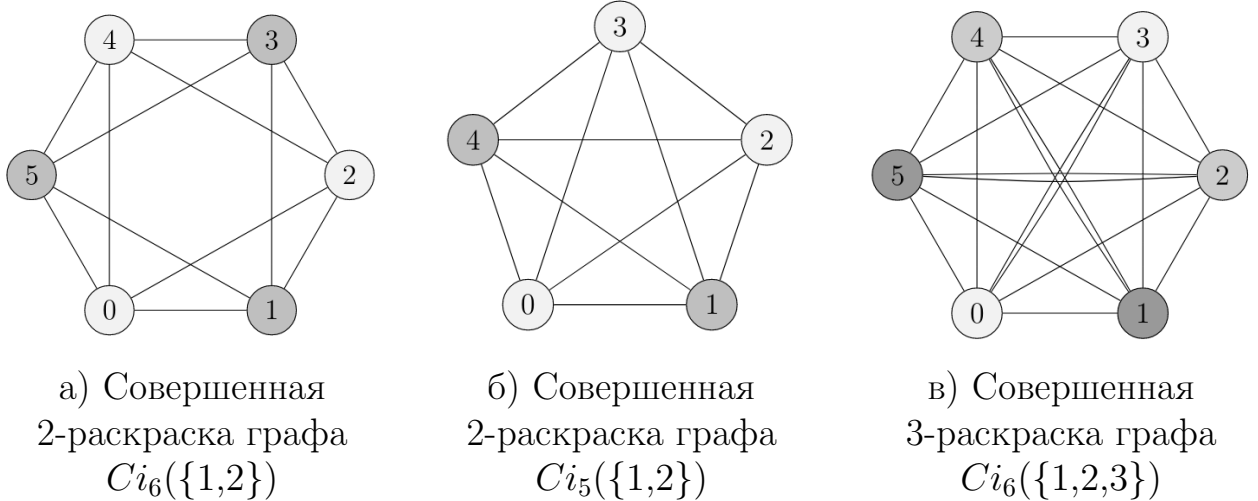


Рисунок 3.1 — Совершенные раскраски конечных циркулянтов с набором дистанций  $I_{cn}$

Нетрудно убедиться, что раскраска  $\bullet^{c/2} \circ^{b/2}$  соответствует матрице параметров  $M_3$ . Более того, из вида мультиграфа  $Ci_{n+1}(I_{cn})$  ясно, что любая раскраска с периодом  $T = n + 1$ , в котором произвольным образом расположено  $b/2$  белых и  $c/2$  чёрных вершин, тоже соответствует  $M_3$ .

Сформулируем гипотезу о совершенных раскрасках графа  $Ci_\infty(I_{cn})$ .

**Гипотеза 1.** Пусть  $k$  и  $n$  — натуральные числа. Множество совершенных  $k$ -раскрасок графа  $Ci_\infty(I_{cn})$  состоит из раскрасок, порождённых совершенными  $k$ -раскрасками бесконечной цепи и графов  $Ci_t(I_{cn})$  для  $t = 2n, 2n + 1, 2n + 2$ .

Данная гипотеза верна для случая двух цветов и была подтверждена для графа  $Ci_\infty(\{1,2\})$  и раскрасок в произвольное число цветов [36].

### 3.3 Совершенные раскраски графа $Ci_\infty(I_{on})$

В данном параграфе перечислены совершенные раскраски бесконечных циркулянтов с набором дистанций  $I_{on} = \{1,3,5,\dots,2n-1\}$  в два цвета, сформулирована гипотеза о совершенных раскрасках графов из данного семейства в произвольное число цветов.

Графы из этого семейства имеют степень  $2n$  и являются двудольными. Одна доля двудольных графов  $Ci_l(I_{on}) = (V,E)$ , где  $l \in 2\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , состоит из вершин с чётными индексами, другая — из вершин с нечётными индексами. Представим этот граф в виде  $Ci_l(I_{on}) = (V_e \cup V_o, E)$ , где через  $V_e$  обозначена доля с вершинами, имеющими чётные индексы (его *чётная* доля), а через  $V_o$  обозначена доля с вершинами, имеющими нечётные индексы (*нечётная* доля). В случае необходимости указания, к какой из долей графа принадлежит вершина  $v$ , будем сопровождать её индексом  $v_e$  ( $v_o$ ) в случае, если она принадлежит доле  $V_e$  ( $V_o$ ).

Будем говорить, что раскраска  $\varphi$  двудольного графа является двудольной, если множество цветов его чётной и нечётных долей не пересекаются.

**Теорема 4.** Пусть  $n$  — натуральное число. Рассмотрим граф  $Ci_\infty(I_{on})$ ,  $I_{on} = \{1,3,5,\dots,2n-1\}$ . Множество его совершенных 2-раскрасок состоит из раскрасок, порождённых совершенными 2-раскрасками бесконечной цепи и графов  $Ci_t(I_{on})$  для  $t = 4n-2, 4n, 4n+2$ .

Предваряя доказательство теоремы, докажем несколько лемм.

**Лемма 12.** Пусть  $n$  — натуральное число. Пара  $(b,c)$  натуральных чисел является допустимой для графа  $Ci_\infty(I_{on})$  тогда и только тогда, когда  $b+c \in \{4n, 2n, 2n+1, 2n-1\}$ .

*Доказательство.* Двудольная раскраска графа  $Ci_\infty(I_{on})$  имеет период  $[\bullet\circ]$  и матрицу параметров  $\begin{pmatrix} 0 & 2n \\ 2n & 0 \end{pmatrix}$ , тогда  $b+c = 4n$ .

Пусть  $\varphi$  — совершенная раскраска  $Ci_\infty(I_{on})$  с периодом длины больше, чем два. Это значит, существует такое целое  $i$ , что  $\varphi(v_i) \neq \varphi(v_{i+2})$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\varphi(v_i) = \bullet$ . Окрестности вершин  $i$  и  $i + 2$  ( $N(v_i)$  и  $N(v_{i+2})$  соответственно) имеют  $2n - 2$  общих вершин. Верны следующие соотношения:  $N(v_i) \setminus N(v_{i+2}) = \{v_{i-2n+1}\}$ ,  $N(v_{i+2}) \setminus N(v_i) = \{v_{i+2n+1}\}$ . Рассмотрим пары вершин  $(v_{i-2n+1}, v_{i+2n+1})$  и возможные варианты их цветов.

1. Если  $\varphi(v_{i-2n+1}) = \varphi(v_{i+2n+1})$ , окрестности  $N(v_i)$  и  $N(v_{i+2})$  содержат одинаковое количество белых и чёрных вершин. Это значит, что цветовой состав окружения любой вершины не зависит от её цвета, и совпадает для всех вершин графа. В таком случае матрица параметров совершенной раскраски имеет вид  $\begin{pmatrix} c & b \\ c & b \end{pmatrix}$ , и  $b + c = 2n$ . Более того, цвета вершин  $v_{i-2n+1}$  и  $v_{i+2n+1}$  совпадают для любого  $i \in \mathbb{Z}$ , что значит, раскраска в данном случае периодична с длиной периода  $4n$ .
2. Пусть  $(\varphi(v_{i-2n+1}), \varphi(v_{i+2n+1})) = (\circ, \bullet)$ . В этом случае в окрестности каждой чёрной вершины на одну белую вершину больше, чем в окрестности каждой белой вершины. Матрица параметров имеет вид  $\begin{pmatrix} c - 1 & b \\ c & b - 1 \end{pmatrix}$ , и  $b + c = 2n + 1$ .
3. Пусть  $(\varphi(v_{i-2n+1}), \varphi(v_{i+2n+1})) = (\bullet, \circ)$ . В данном случае в окрестности каждой чёрной вершины на одну чёрную вершину больше, чем в окрестности каждой белой вершины. Раскраска соответствует матрице параметров  $\begin{pmatrix} c + 1 & b \\ c & b + 1 \end{pmatrix}$ , что значит  $b + c = 2n - 1$ .

Таким образом,  $b + c \in \{4n, 2n, 2n + 1, 2n - 1\}$ . □

**Лемма 13.** Пусть  $n, b, c$  — натуральные числа, и пара  $(b, c)$  допустима для графа  $Ci_\infty(I_{on})$ . Пусть  $\varphi$  — одна из соответствующих паре  $(b, c)$  раскрасок. Рассмотрим вершины  $i$  и  $i + 2$  графа  $Ci_\infty(I_{on})$ . Верно следующее:

1. Если  $\varphi(i) = \varphi(i + 2)$ , тогда  $\varphi(i - 2n + 1) = \varphi(i + 2n + 1)$ ;
2. Если  $\varphi(i) \neq \varphi(i + 2)$ , и  $b + c = 2n + 1$ , тогда  $\varphi(i - 2n + 1) = \varphi(i + 2)$ , и  $\varphi(i + 2n + 1) = \varphi(i)$ ;
3. Если  $\varphi(i) \neq \varphi(i + 2)$ , и  $b + c = 2n - 1$ , тогда  $\varphi(i - 2n + 1) = \varphi(i)$ , и  $\varphi(i + 2n + 1) = \varphi(i + 2)$ .

*Доказательство.* Доказательство немедленно следует из определения совершенной раскраски и доказательства Леммы 12. □

Пусть  $G$  — бесконечный циркулянтный граф,  $\varphi$  — его совершенная 2-раскраска, и  $s$  — натуральное число. Множество вершин  $\{v_{i+js}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  графа  $G$  для  $i \in \mathbb{Z}$  называется  $s$ -цепью. Если для каждого  $j \in \mathbb{Z}$  выполнено неравенство  $\varphi(v_{i+js}) \neq \varphi(v_{i+(j+1)s})$ , то последовательность вершин  $\{v_{i+js}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  называется чередующейся  $s$ -цепью.

**Лемма 14.** Пусть  $n, b$  и  $c$  — натуральные числа. Рассмотрим допустимую для графа  $Ci_\infty(I_{on})$  пару  $(b, c)$ . Если  $b + c = 2n + 1$ , то каждая совершенная 2-раскраска  $\varphi$ , соответствующая паре  $(b, c)$  либо имеет период длины  $2n + 1$ , либо состоит из чередующихся  $(2n - 1)$ -цепей.

*Доказательство.* Предположим, что  $b + c = 2n + 1$ , и что существует вершина  $i$  графа  $Ci_\infty(I_{on})$  такая, что  $\varphi(i) \neq \varphi(i + 2n + 1)$ . Пусть  $\varphi(i) = x \in \{0, 1\}$ , тогда  $\varphi(i + 2n + 1) = 1 - x = \bar{x}$ . Рассмотрим вершину  $i + 2$ . Она не может иметь цвет  $\bar{x}$ , так как это противоречит пункту 2 Леммы 13. То есть,  $\varphi(i + 2) = x$ . Согласно пункту 1 Леммы 13, вершина  $i - 2n + 1$  имеет цвет  $\bar{x}$ . Следуя той же логике, вершина  $i + 2n - 1$  имеет цвет  $\bar{x}$ , и  $i + 4n$  имеет цвет  $x$ . Применяя пункты 2 и 1 Леммы 13 к паре вершин  $i + 2n - 1, i + 4n$ , получим равенства  $\varphi(i + 4n - 2) = x$  и  $\varphi(i + 6n - 1) = \bar{x}$ .

Последовательно применяя утверждения из пунктов 2 и 1 Леммы 13 к парам вершин  $(i + (2n - 1)j, i + 2n + 1 + (2n - 1)j)_{j \in \mathbb{N}}$  и  $(i + 2 - (2n + 1)j, i - 2n - 1 - (2n + 1)j)_{j \in \mathbb{N}}$ , получим две чередующиеся  $(2n - 1)$ -цепи  $\{i + (2n - 1)j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  и  $\{i + 2 + (2n - 1)j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Две чередующиеся  $(2n - 1)$ -цепи в графе  $Ci_\infty(I_{on})$ , построенные описанным способом, показаны на Рисунке 3.2. Рёбра серого цвета не существуют в данном графе, а изображены для наглядности и соединяют пары вершин  $(l, l + 2n + 1)_{l \in \mathbb{Z}}$ .

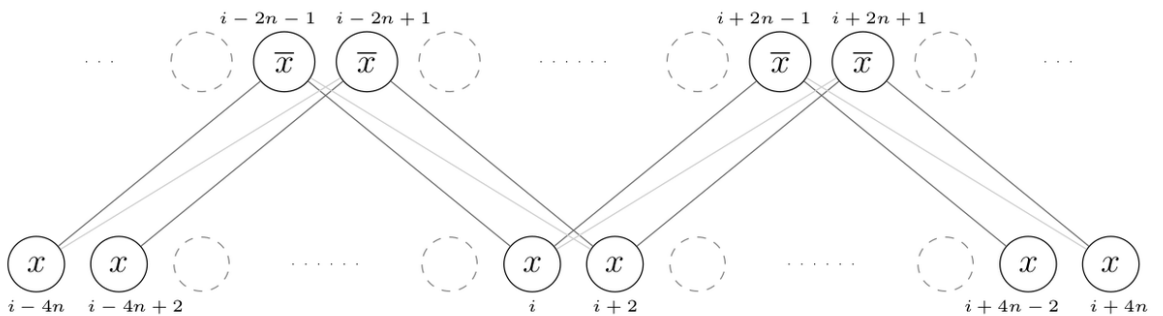


Рисунок 3.2 — Чередующиеся  $(2n - 1)$ -цепи в графе  $Ci_\infty(I_{on})$ .

Построив чередующиеся цепи, изображенные на Рисунке 3.2, рассмотрим вершины  $i+4$  и  $i+2n+3$ . Используя неравенство  $\varphi(i+2) \neq \varphi(i-2n+3)$  и применяя пункты 1 и 2 Леммы 13, получим неравенство  $\varphi(i+4) \neq \varphi(i+2n+3)$ . Продолжая процедуру, получим чередующуюся  $(2n-1)$ -цепь  $\{i+4+(2n-1)j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . В итоге весь граф окажется раскрашенным чередующимися  $(2n-1)$ -цепями. Длина периода получившейся раскраски равна  $4n-2$ , и количество чёрных и белых вершин в периоде совпадает. Отметим, что такая раскраска может быть рассмотрена как полученная из одной из совершенных раскрасок графа  $Ci_{4n-2}(I_{on})$  с помощью обратного гомоморфизма из  $Ci_{4n-2}(I_{on})$  в  $Ci_{\infty}(I_{on})$ .  $\square$

**Лемма 15.** Пусть  $n, b$  и  $c$  — натуральные числа, и пусть пара  $(b, c)$  является допустимой для графа  $Ci_{\infty}(I_{on})$ . Если  $b + c = 2n - 1$ , то каждая совершенная 2-раскраска  $\varphi$ , соответствующая паре  $(b, c)$  или состоит из чередующихся  $(2n+1)$ -цепей, или имеет длину периода  $2n-1$ .

*Доказательство.* Доказательство данной леммы в некотором роде повторяет доказательство Леммы 14. Рассмотрим вершину  $i$ , для которой верно неравенство  $\varphi(i) \neq \varphi(i+2n-1)$ . Поочередно применяя пункт 3 и пункт 1 Леммы 13, построим чередующуюся  $(2n+1)$ -цепь. Соответствующая этому процессу цепь изображена на Рисунке 3.3. Рёбра серого цвета являются рёбрами цепи.

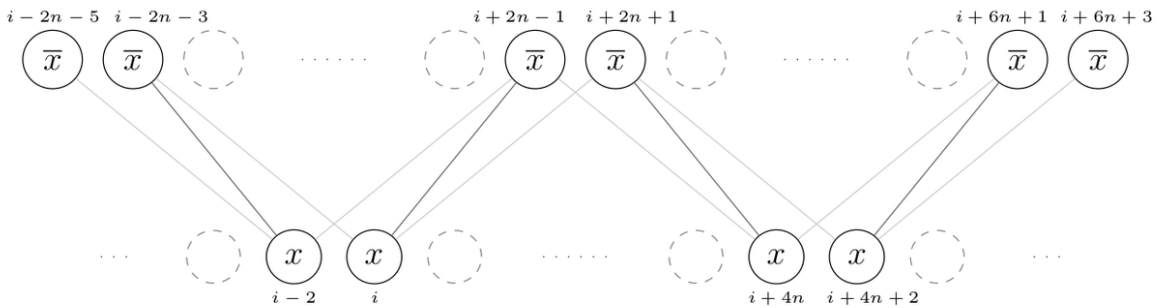


Рисунок 3.3 — Чередующиеся  $(2n+1)$ -цепи в графе  $Ci_{\infty}(I_{on})$

Применяя пункты 3 и 1 Леммы 13 к  $(2n+1)$ -цепям  $\{i+2s+(2n+1)j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  для  $s = 1, 2, \dots, 2n-1$ , получим раскраску графа  $Ci_{\infty}(I_{on})$  чередующимися  $(2n+1)$ -цепями. Раскраска имеет длину периода  $4n+2$ .  $\square$

*Доказательство Теоремы 4.* В случае двух цветов множество совершенных раскрасок бесконечной цепи  $Ci_{\infty}(\{1\})$  состоит из трёх элементов с периода-



ми  $[\bullet \circ \circ \bullet], [\bullet \circ \circ]$  и  $[\bullet \circ]$ . Все эти раскраски являются совершенными для графа  $Ci_\infty(I_{on})$  для любого натурального  $n$ .

По утверждению Леммы 12, сумма  $b + c$  может быть равна  $4n, 2n, 2n + 1$  и  $2n - 1$ .

Единственная возможная совершенная раскраска, соответствующая паре  $(b, c)$  с  $b + c = 4n$  является двудольной и уже перечислена как раскраска графа  $Ci_\infty(\{1\})$ . Рассмотрим другие значения суммы  $b + c$ .

1. Пусть  $b + c = 2n$ . По утверждению Леммы 12, каждая совершенная раскраска, соответствующая паре  $(b, c)$  периодична с длиной периода  $4n$ .

Рассмотрим граф  $Ci_{4n}(I_{on}) = (V, E)$  с  $V = \{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\}$ . По Утверждению 1, каждая совершенная раскраска  $\phi$  этого графа порождает совершенную раскраску графа  $Ci_\infty(I_{on})$  с периодом  $[\phi(0)\phi(1)\phi(2) \cdots \phi(4n - 1)]$ .

2. Пусть  $b + c = 2n + 1$ . По утверждению Леммы 14, каждая совершенная раскраска, соответствующая паре  $(b, c)$  либо состоит из чередующихся  $(2n - 1)$ -цепей, либо имеет период  $2n + 1$ .

Рассмотрим графа  $Ci_{4n+2}(I_{on})$ . Множество его совершенных раскрасок описано в параграфе 3.3. Каждая раскраска  $\phi$  графа  $Ci_{4n+2}(I_{on})$  порождает совершенную раскраску графа  $Ci_\infty(I_{on})$  с периодом  $[\phi(0)\phi(1)\phi(2) \cdots \phi(4n + 1)]$ .

3. Пусть  $b + c = 2n - 1$ . По утверждению Леммы 15 каждая совершенная раскраска, соответствующая паре  $(b, c)$  или состоит из чередующихся  $(2n + 1)$ -цепей, или имеет длину периода  $2n - 1$ .

Рассмотрим граф  $Ci_{4n-2}(I_{on})$ . Множество его совершенных раскрасок описано в параграфе 3.3. Каждая раскраска  $\phi$  графа  $Ci_{4n-2}(I_{on})$  порождает совершенную раскраску графа  $Ci_\infty(I_{on})$  с периодом  $[\phi(0)\phi(1)\phi(2) \cdots \phi(4n - 3)]$ .

□

Для завершения описания множества совершенных раскрасок графа  $Ci_\infty(I_{on})$  перечислим совершенные раскраски графов  $Ci_t(I_{on})$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , и  $t \in \{4n, 4n - 2, 4n + 2\}$ .

## Совершенные раскраски конечных двудольных циркулянтов

Случай  $t = 4n$

Граф  $Ci_{4n}(I_{on})$  является полным двудольным графом  $K_{2n,2n}$ . Раскраска этого графа совершенна, если она двудольна, или если чётная и нечётная доли графа имеют одинаковое количество вершин каждого цвета. На Рисунке 3.4 изображён граф  $Ci_8(\{1,3\})$  и одна из его совершенных раскрасок в три цвета.

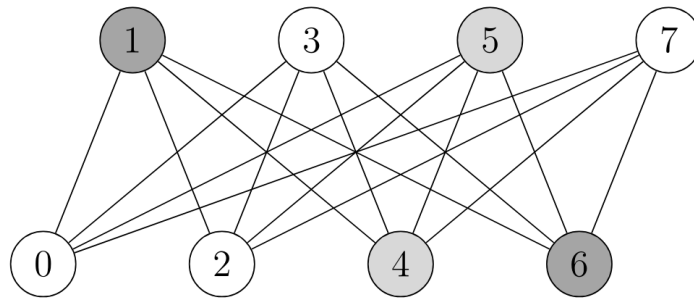


Рисунок 3.4 — Совершенная 3-раскраска графа  $Ci_8(\{1,3\})$

Случай  $t = 4n + 2$

Напомним, что *совершенным паросочетанием* в графе называется его независимое множество рёбер, в котором каждая вершина графа инцидентна в точности одному ребру, входящему в паросочетание. В случае двудольного графа рассмотрим совершенное паросочетание, состоящее из рёбер  $(v_i, v_j)$ , где одна из вершин принадлежит чётной доле графа, а другая — нечётной. Назовём такое совершенное паросочетание *ориентированным*.

Граф  $Ci_{4n+2}(I_{on}) = (V_e \cup V_o, E)$  является полным двудольным графом  $K_{2n+1,2n+1}$ , из которого удалили совершенное паросочетание  $P_{2n+1} = \{(i, i + 2n + 1) | i = 0, 1, 2, \dots, 2n\}$ . Иными словами, каждая вершина  $i$  одной доли графа  $Ci_{4n+2}(I_{on})$  смежна со всеми вершинами другой доли, за исключением вершины  $j$  такой, что  $(i, j) \in P_{2n+1}$ .

Пусть  $\varphi$  — раскраска графа  $Ci_{4n+2}(I_{on})$ . Рассмотрим ребро  $(i, j) \in P_{2n+1}$ , через  $\varphi(i), \varphi(j)$  обозначим цвета вершин  $i$  и  $j$ .

Если раскраска  $\varphi$  совершенна, то для любого ребра паросочетания  $P_{2n+1}$  факт, что одна его вершина окрашена цветом  $\varphi(i)$ , влечёт, что другая его вершина окрашена цветом  $\varphi(j)$ , и наоборот. Из этого условия следует, что количество цветов двудольной совершенной раскраски чётно.

Для того, чтобы построить двудольную раскраску  $\varphi$  графа  $Ci_{4n+2}(I_{on})$ , разобьём множество его цветов  $C$  на два непересекающихся равномоощных подмножества  $C = C_e \cup C_o$ . Разобьём цвета на пары  $(c_i, c_j)$ , где  $i, j \in \{1, 2, \dots, |C_e|\}$ , и  $c_i \in C_e, c_j \in C_o$ . Каждое ребро  $(v_e, v_o)$  из  $P_{2n+1}$  покрасим определёнными выше парами цветов так, чтобы  $\varphi(v_e) \in C_e, \varphi(v_o) \in C_o$ .

Рассмотрим метод построения недвудольной совершенной раскраски  $\varphi$  данного графа. В этом случае доли графа должны иметь одинаковое количество вершин каждого цвета.

Для этого разобьём множество цветов на два непересекающихся подмножества  $C = C_1 \cup C_2$  так, чтобы величина  $|C_2|$  была чётной. Вместе с этим разобьём множество рёбер совершенного паросочетания  $P_{2n+1}$  на два непересекающихся подмножества  $P_1$  и  $P_2$ , где  $|P_2|$  чётно. Концы рёбер из множества  $P_1$  покрасим цветами множества  $C_1$  так, чтобы концы каждого ребра имели один и тот же цвет.

Разобьём множества цветов  $C_2$  и рёбер из  $P_2$  на пары. Рассмотрим пару цветов  $(c_1, c_2)$  из  $C_2$ . Предположим, что мы хотим покрасить этой парой цветов несколько пар рёбер из  $P_2$ . Тогда каждую пару рёбер  $(v_e, v_o), (u_e, u_o)$  из  $P_2$  покрасим так, чтобы концы каждого ребра имели разные цвета, но  $\varphi(v_e) = \varphi(u_o)$ , и  $\varphi(v_o) = \varphi(u_e)$ . Совершенство полученной раскраски  $\varphi$  непосредственно следует из определения.

Пример совершенной 4-раскраски графа  $Ci_{4n+2}(I_{on})$  для  $n = 2$  изображен на Рисунке 3.5. Отсутствующим совершенным паросочетанием является множество  $P_{10} = \{(0,5), (1,6), (2,7), (3,8), (4,9)\} = P_1 \cup P_2$ , где  $P_1 = \{(0,5), (1,6), (3,8)\}$  и  $P_2 = \{(2,7), (4,9)\}$ .

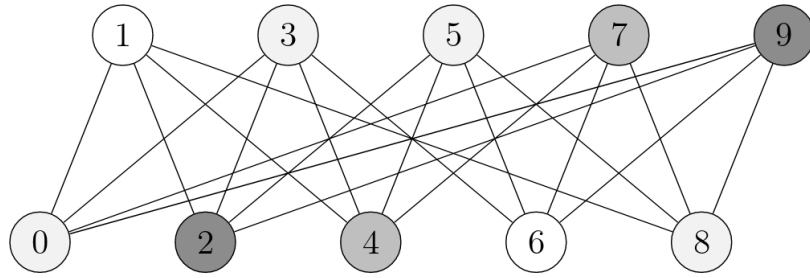


Рисунок 3.5 — Совершенная 4-раскраска графа  $Ci_{10}(\{1,3\})$

Отметим, что в случае двух цветов  $C = \{\bullet, \circ\}$  возможны два варианта:

1.  $C_1 = C = \{\bullet, \circ\}$ ,  $C_2 = \emptyset$ . В данном случае оба конца каждого ребра  $(i, i + 2n + 1)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2n$ , совершенного паросочетания  $P_{2n+1}$  покрашены цветом  $\bullet$ , или цветом  $\circ$ .
2.  $C_1 = \emptyset$ ,  $C_2 = \{\bullet, \circ\}$ . Единственной возможной совершенной раскраской в этом случае является двудольная.

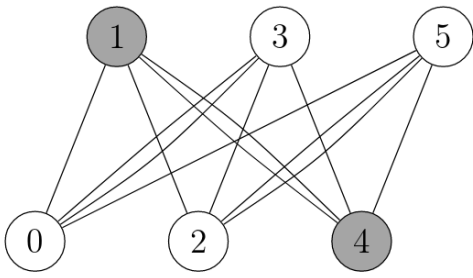
### Случай $t = 4n - 2$

Рассмотрим совершенное паросочетание на  $4n - 2$  вершинах  $P_{2n-1} = \{(i, i + 2n - 1) | i = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2\}$ . Каждая вершина  $i \in V_e$  двудольного псевдографа  $Ci_{4n-2}(I_{on}) = (V_e \cup V_o, E)$  смежна со всеми вершинами доли  $V_o$  и имеет два общих ребра с вершиной  $j$  такой, что  $(i, j) \in P_{2n-1}$ . То же самое верно для каждой вершины доли  $V_o$ .

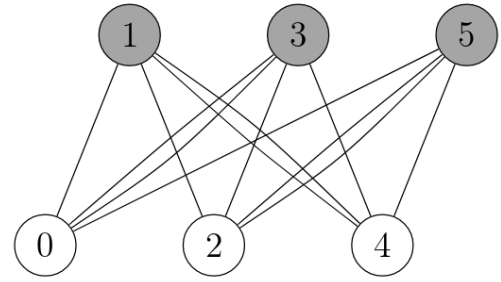
Процесс построения совершенных раскрасок такого графа совпадает с процедурой для графа  $Ci_{4n-2}(D_n)$ . На Рисунке 3.6 изображены два примера совершенных раскрасок графа  $Ci_6(\{1,3\})$ . На 3.6а множество цветов  $C = \{\text{белый, серый}\}$  совпадает с множеством  $C_1$ , а множества  $C_2$  и  $P_2$  пусты. На 3.6б изображена двудольная раскраска.

В заключение сформулируем гипотезу о совершенных раскрасках графа  $Ci_\infty(I_{on})$ .

**Гипотеза 2.** Пусть  $k$  и  $n$  — натуральные числа. Множество совершенных  $k$ -раскрасок графа  $Ci_\infty(I_{on})$  состоит из раскрасок, порождённых совершенными  $k$ -раскрасками бесконечной цепи и графов  $Ci_t(I_{on})$  для  $t = 4n - 2, 4n, 4n + 2$ .



а) Раскраска  $\varphi$  с  $C_2 = \emptyset$ ,  
 $C_1 = \{\text{белый, серый}\}$



б) Двудольная 2-раскраска

Рисунок 3.6 — Совершенные 2-раскраски графа  $C_{i_6}(\{1,3\})$

Теорема 4 подтверждает гипотезу 2 для случая двух цветов. Случай большего числа цветов остаётся открытым.

## Глава 4. О размере носителя векторов в координатно транзитивных линейных пространствах

### 4.1 Определения и необходимые сведения

Пусть  $L$  — произвольное линейное подпространство размерности  $k$  в евклидовом пространстве  $E^n$ , координаты которого проиндексированы множеством  $M = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Группой автоморфизмов  $Aut(L)$  пространства  $L$  будем считать множество всех подстановок на  $M$ , оставляющих  $L$  на месте. В том случае, когда  $Aut(L)$  действует на  $M$  транзитивно, будем говорить, что  $L$  является координатно транзитивным пространством. Для построения координатно транзитивного линейного пространства можно действовать следующим образом. Рассмотрим транзитивную группу подстановок  $G$ , регулярно действующую на множестве  $M = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . В этом случае можно считать, что  $M$  является множеством номеров элементов группы  $G$ . Для произвольного вектора  $v$  из  $E^n$  определим линейное замыкание  $L_G(v)$  как линейную оболочку вектора  $v$  и всех его образов (эти образы мы будем называть сдвигами вектора  $v$ ) под действием элементов группы  $G$ . Заметим, что  $G$  является подгруппой группы  $Aut(L_G(v))$ , а обратное верно не всегда. В данной главе мы будем иметь дело с координатно транзитивными линейными пространствами, полученными вышеописанным способом, называя их *однопорожждёнными*. Глава посвящена вопросу о размере минимального носителя ненулевых векторов произвольного однопорождённого координатно транзитивного линейного пространства для фиксированных группы  $G$  и вектора  $v$ .

Назовем *весом*  $W(v)$  вектора  $v = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$  число его ненулевых координат (фактически — размер его носителя). Не теряя общности в дальнейшем будем считать, что  $v_0 = 1$ . Обозначим через  $P_G(v)$  минимальный вес векторов из  $L_G(v)$ . Вектор называется *однородным*, если все его ненулевые компоненты равны 1, и *полуоднородным*, если его компоненты принадлежат множеству  $\{0, 1, -1\}$ . Во всех остальных случаях векторы неоднородные. Каждому однородному вектору  $v$  можно поставить в соответствие подмножество  $B(v)$  элементов группы  $G$ , отвечающих единичным компонентам. В некотором

смысле  $v$  является характеристическим вектором для множества  $B(v)$ . Замкнув  $B(v)$  относительно групповой операции, получим подгруппу  $O(v)$  группы  $G$ , которую будем называть *орбитой* вектора  $v$ . В случае, когда  $B(v)$  совпадает с орбитой, такой вектор назовем *орбитным*.

Довольно очевидно, что вопрос о минимальном носителе вектора сводится к тому же вопросу в рамках его орбиты.

Вектор будем называть *уравновешенным*, если сумма всех его компонент равна нулю. Легко понять, что множество уравновешенных векторов образует линейное пространство (обозначим его  $U_n$ ), размерность которого на 1 меньше размерности всего пространства. Ясно также, что ни один орт не принадлежит  $U_n$ , а все полуоднородные векторы веса 2 принадлежат, поэтому размер минимального носителя векторов в  $U_n$  равен 2. Будем говорить, что вектор  $v$  — *полного ранга*, если  $L_G(v) = E^n$ ,  $L_G(v)$  в таком случае *полноранговое*. В противном случае ранг вектора неполон.

Нам также понадобится дополнительное определение. Вектор будем называть *редуцируемым*, если в  $L_G(v)$  найдется вектор меньшего веса, чем  $W(v)$ . Изучение  $P_G(v)$  будет обычно сводиться к следующему. Если  $v$  полноранговый, то  $P_G(v) = 1$ , в противном случае встает вопрос о его редуцируемости к вектору промежуточного веса.

Заметим, что  $L_G(v)$  порождается ровно  $n$  векторами (сдвигами  $v$ ), а это означает, что любая нетривиальная линейная зависимость этих векторов влечёт неполноранговость  $L_G(v)$ .

## 4.2 Случай векторов веса два

Если вектор  $v$  имеет вес два, то вопрос о мощности носителя порождаемого им линейного подпространства  $L_G(v)$  сводится к тому, является ли оно полноранговым. Заметим, что в произвольной группе  $G$  орбита вектора  $v$  веса два циклическая, поскольку  $B(v)$  содержит, кроме единичного, еще ровно один элемент, который и порождает циклическую подгруппу. В случае, когда вектор  $v$  имеет полный ранг,  $P_G(v) = 1$ , иначе  $P_G(v) = 2$ , и, в отличие от случая, когда вектор имеет вес  $s \geq 3$ , других возможных вариантов нет.

**Теорема 5.** Пусть  $G$  — циклическая группа порядка  $n = 2^k \cdot q$ , где  $q$  нечётно. Рассмотрим однородный вектор  $v \in E^n$  веса 2 такой, что  $v_0 = v_a = 1$  для некоторого  $a \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Тогда

$$P_G(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } 2^k | a, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть  $A \leq G$  — подгруппа, порождённая элементом  $a$ , иными словами,  $A = \langle a \rangle = \{0, a, 2a, \dots, (|A| - 1)a\}$ . Рассмотрим набор представителей смежных классов по этой подгруппе в  $G$ :  $0 = b_0, b_1, \dots, b_t$ , где  $t = |G|/|A|$ . Группа  $G$  может быть представлена в виде объединения смежных классов по подгруппе  $A$ :  $G = (b_0 + A) \cup (b_1 + A) \cup \dots \cup (b_t + A)$ .

Пусть  $2^k \nmid a$ . В этом случае необходимо показать, что существует нетривиальная линейная комбинация векторов множества  $L_G(v)$ , равная нулю. Для этого приведем два подходящих вектора для  $v$ :  $l$  и  $w$ , где  $l = (1/2, 1/2, \dots, 1/2)$ ,

$$w_x = \begin{cases} 1, & x = b_i + s \cdot a, s \text{ — чётно, } i = 0, 1, \dots, t; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Каждый из этих векторов вместе с вектором  $v$  образует линейную комбинацию, равную единичному вектору  $\bar{1}$ . Вычтем первую линейную комбинацию из второй и получим искомую нетривиальную нулевую линейную комбинацию векторов. Таким образом пространство, порождённое вектором  $v$ , неполноранговое, а значит, не существует линейной комбинации векторов из  $L_G(v)$ , образующей орт, т.е. вектор веса 1.

Пусть теперь  $2^k | a$ . Рассматривая знакопеременную сумму циклических сдвигов вектора  $v$ , несложно убедиться в том, что эта сумма образует орт.  $\square$

Из Теоремы 5 следует, что в произвольной группе для распознавания полноранговости вектора веса 2 достаточно выяснить чётность его орбиты.

Заметим также, что неоднородный вектор веса два в любой группе имеет полный ранг, а полуоднородный всегда неполноранговый.



### 4.3 О векторах веса три

Рассмотрим множество  $L_G(v)$ , где  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  — однородный вектор. Нетрудно видеть, что  $L_G(v) = E^n$  тогда и только тогда, когда определитель следующей матрицы отличен от нуля:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ v_n & v_1 & \dots & v_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_2 & v_3 & \dots & v_1 \end{pmatrix}$$

Матрица  $V$  носит название *циркулянт*, её определитель (см. напр. [65]) равен  $\prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)$ , где  $f(x) = \sum_{l=0}^{n-1} v_{l+1} \cdot x^l$ ,  $\varepsilon_k = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{2\pi k}{n})$ , где  $k$  — целое.

Вопрос о полноранговости порождаемого некоторым вектором  $v$  подпространства сводится к вопросу о невырожденности соответствующей ему матрицы  $V$ . Для того, чтобы определитель  $V$  был равен нулю, необходимо равенство нулю хотя бы одного из значений  $f(\varepsilon_k)$ . Рассмотрим данный полином для некоторого  $\varepsilon_k = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{2\pi k}{n}) = e^{i \cdot \frac{2\pi k}{n}}$ . Без ограничения общности считаем, что  $v_1 = 1$ , тогда  $f(\varepsilon_k) = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} v_{l+1} \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi k l}{n}} = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} v_{l+1} \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi k l}{n}} = 0$ ,  $v_l \in \{0, 1\}$ .

Для выполнения равенства необходимы следующие условия:

1.  $\sum_{l=1}^{n-1} v_{l+1} \sin(\frac{2\pi k l}{n}) = 0$ ;
2.  $\sum_{l=1}^{n-1} v_{l+1} \cos(\frac{2\pi k l}{n}) = -1$ .

Если эти условия не выполняются, то определитель матрицы отличен от нуля, пространство  $L_G(v)$  полноранговое, а значит содержит орт — вектор веса 1. В случае выполнения данных условий можно лишь утверждать, что размер минимального носителя  $L_G(v)$  не меньше 2.

Для случая, когда вес вектора  $v$  равен 3, эти условия принимают более простой вид. Пусть  $B(v) = \{0, l, h\}$ , тогда определитель соответствующей вектору  $v$  циркулянтной матрицы равен  $f(x) = 1 + e^{i \cdot \frac{2\pi k l}{n}} + e^{i \cdot \frac{2\pi k h}{n}}$ ,  $1 < l < h \leq n$ .

Условия 1. и 2. в этом случае можно переписать следующим образом:

1.  $\sin(\frac{2\pi k l}{n}) + \sin(\frac{2\pi k h}{n}) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin(\frac{\pi k(h+l)}{n}) \cos(\frac{\pi k(h-l)}{n}) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\sin(\frac{\pi k(h+l)}{n}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi k(h+l)}{n} = \pi s, s \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = \frac{ns}{h+l}$ ;

$$2. \cos\left(\frac{2\pi kl}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi kh}{n}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi k(h+l)}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi k(h-l)}{n}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\cos(\pi s) \cos\left(\frac{\pi k(h-l)}{n}\right) = -\frac{1}{2}$ . В данном случае возможны два варианта:

$$(a) \ s \text{ — нечётно, } \cos\left(\frac{\pi k(h-l)}{n}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi k(h-l)}{n} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi r, r \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{s(h-l)}{h+l} = \pm\frac{1}{3} + 2r \Leftrightarrow s = \frac{(h+l)(6r \pm 1)}{3(h-l)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3|(h+l);$$

$$(b) \ s \text{ — чётно, } \cos\left(\frac{\pi k(h-l)}{n}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi k(h-l)}{n} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi r, r \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$s = \frac{(h+l)(6r \pm 2)}{3(h-l)} \Leftrightarrow 3|(h+l).$$

Нетрудно видеть, что полученные из пунктов 1. и 2. условия  $3|(h+l)$  и  $k = \frac{ns}{h+l}$  эквивалентны следующим:

$$1' \ 3|n;$$

$$2' \ l \equiv 1 \pmod{3}, h \equiv 2 \pmod{3}.$$

В группе  $Z_n$ , где  $n$  кратно трём, рассмотрим подгруппу  $H$  порядка  $n/3$ . Однородный вектор  $v$  веса 3 называется *репрезентативным*, если множество  $B(v)$  содержит ровно по одному представителю каждого смежного класса подгруппы  $H$ , иначе вектор *нерепрезентативный*.

Используя введенную выше терминологию, условия 1', 2' можно переформулировать следующим образом:

**Теорема 6.** *Пусть  $n$  кратно трём. Однородный вектор веса три имеет полный ранг над группой  $Z_n$  тогда и только тогда, когда он не является репрезентативным.*

Заметим, как следствие, что для некратных трём  $n$  любой вектор веса три над группой  $Z_n$  имеет полный ранг.

## О редуцируемости векторов веса 3

Как показано в предыдущем параграфе, все нерепрезентативные векторы веса 3 являются полноранговыми и редуцируются к векторам веса 1. Осталось рассмотреть случай репрезентативных векторов и исследовать вопрос их редуцируемости к векторам веса 2.

Нетрудно показать, что все орбитные векторы в  $Z_n$  являются нередуцируемыми. Действительно, сдвиги такого вектора либо совпадают с ним самим, либо имеют непересекающийся с ним носитель.

Вычисления с помощью стандартных компьютерных программ показали, что все остальные неполноранговые однородные векторы редуцируются к полунормированным векторам веса 2 для циклических групп вплоть до порядка  $n = 18$ . Мы предполагаем, что данная ситуация в циклических группах сохраняется для всех остальных порядков.

#### 4.4 Замечания

Напомним, что орбитные векторы являются нередуцируемыми в циклической группе. Ясно, что и в произвольной группе это свойство орбитных векторов сохранится. Более того, выполнено следующее предложение.

**Предложение 3.** Пусть  $L$  — произвольное координатно транзитивное линейное подпространство размерности  $k$  в  $E^n$ . Тогда минимальный размер  $P(L)$  нетривиального носителя векторов из  $L$  удовлетворяет неравенству:

$$P(L) \geq \frac{n}{k}. \quad (4.1)$$

*Доказательство.* Рассмотрим вектор  $v$  из  $L$  минимального веса и квадратную матрицу  $M$  порядка  $n$ , строками которой являются все образы вектора  $v$  под действием элементов группы  $G$ . Некоторые строки могут совпадать. Если  $P(L) < n/k$ , то мы без труда выберем в нашей матрице больше  $k$  линейно независимых векторов, следя за тем, чтобы каждый новый вектор своими ненулевыми координатами покрывал какую-либо новую координату. Заметим, при таком подходе равенство в 4.1 достигается лишь в том случае, если носители всех выбранных векторов не пересекаются между собой. Это в свою очередь возможно лишь если  $L$  порождено вектором, носитель которого соответствует некоторому однородному орбитному вектору.  $\square$

Также отметим, что каждому однородному вектору  $v$  можно поставить в соответствие граф Кэли группы  $G$  с множеством порождающих  $B(v)$ . Этот граф будет ориентированным и связным на орбите вектора  $v$  и её смежных классах. Из общих соображений ясно, что для решения рассматриваемой нами задачи могут оказаться полезными инварианты описанного графа, и в част-

ности — его собственных пространств и ориентированных совершенных раскрасок. Представляется интересным ответить на следующий вопрос. Пусть  $v$  и  $w$  — два произвольных вектора одинаковой длины. Как распознать совпадение или изоморфизм порождённых ими линейных пространств  $L_G(v)$  и  $L_G(w)$ ? Как минимум, такое совпадение не произойдёт, если размеры минимальных носителей векторов в этих пространствах различны.

В наших рассуждениях практически отсутствовали пространства, порождённые неоднородными векторами. В этом случае пришлось бы иметь в виду совокупную рациональную сравнимость компонент таких векторов, что значительно усложняет анализ.

Кажется естественным исследовать поведение минимального носителя для циркулянтных матриц и однородных порождающих векторов. В этом случае прослеживается определенная связь с понятием тайлинга циклической группы [66; 67]. Действительно, дополняемость вектора до тайлинга автоматически означает его неполноранговость.

Пара  $(A, T)$  подмножеств группы  $G$  образует её *тайлинг*, если каждый элемент  $g \in G$  может быть однозначно представлен в виде  $g = t + a$ , где  $t \in T, a \in A$ . Два вектора образуют тайлинг группы  $G$ , если их представители образуют тайлинг.

Вектор  $v$  *дополняемый*, если существует такой вектор  $w$ , что пара  $(v, w)$  образует тайлинг группы  $G$ . Вектор  $w$  назовем *дополняющим* для вектора  $v$ .

Если вектор  $v$  дополняемый, то его ранг неполон. Пусть существует вектор  $w$  такой, что пара  $(v, w)$  — тайлинг группы  $G$ . Это значит, что существует линейная комбинация элементов множества  $L_G(v)$ , порождающая единичный вектор  $\bar{\mathbf{1}} = (1, 1, \dots, 1)$ :  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v^{g_i} = \bar{\mathbf{1}}$ . Так как речь идет об однородных векторах,  $\alpha_i \in \{0, 1\}$ . Подействовав на данное равенство неединичным элементом  $h$  группы  $G$ , получим:  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v^{h(g_i)} = \bar{\mathbf{1}}$

Разность этих равенств дает нетривиальную линейную зависимость сдвигов вектора  $v$ , а это значит, что он имеет неполный ранг.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получена точная верхняя оценка длины однородных арифметических подпоследовательностей в обобщённом слове Туэ-Морса над алфавитом простой мощности.
2. Получены верхняя и нижняя оценки на величину арифметического индекса в обобщённом слове Туэ-Морса над алфавитом простой мощности.
3. Получена точная формула для функции закрытой (и как следствие, открытой) сложности в словах Арну-Рози.
4. Приведено полное описание совершенных раскрасок в два цвета бесконечных циркулянтных графов с набором дистанций  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  для  $n \in \mathbb{N}$ .
5. Выведен критерий минимальности носителя векторов для координатно транзитивных пространств, порождённых вектором веса два, и получена достижимая нижняя оценка на отношение размера носителя вектора к размерности линейного пространства.

## Список литературы

1. *Thue A.* Über die gegenseitige Lage gleicher Teile Gewisser Zeichenreihen // Skr. Vid.-Kristiana I. Mat. Naturv. Klasse. — 1912. — Т. 1. — С. 1–67.
2. *Morse M.* Recurrent Geodesics on a Surface of Negative Curvature // Transactions of the American Mathematical Society. — 1921. — Vol. 22, no. 1. — Pp. 84–100.
3. *Van der Waerden B. L.* Beweis einer Baudetschen Vermutung // Nieuw Arch. Wisk. — 1927. — Т. 15. — С. 212–216.
4. *Szemerédi E.* On sets of integers containing no  $k$  elements in arithmetic progression // Acta Arith. — 1975. — Vol. 27. — Pp. 199–245. — Collection of articles in memory of Ju. V. Linnik.
5. *Morse M., Hedlund G.* Symbolic dynamics // Amer. J. Math. — 1938. — Vol. 60. — Pp. 815–866.
6. Palindrome complexity / J.-P. Allouche [et al.] // Theoret. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 292. — Pp. 9–31. — Selected papers in honor of Jean Berstel.
7. Cyclic complexity of words / J. Cassaigne [et al.] // J. Combin. Theory Ser. A. — 2017. — Vol. 145. — Pp. 36–56.
8. *Charlier E., Puzynina S., Zamboni L. Q.* On a group theoretic generalization of the Morse-Hedlund theorem // Proceedings of the AMS. Vol. 145. — 2017. — Pp. 3381–3394.
9. *Coven E. M., Hedlund G. A.* Sequences with minimal block growth // Math. Systems Theory. — 1973. — Vol. 7. — Pp. 138–153.
10. *Peltomäki J.* Introducing privileged words: privileged complexity of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. — 2013. — Vol. 500. — Pp. 57–67.
11. *Richomme G., Saari K., Zamboni L. Q.* Abelian complexity of minimal subshifts // J. Lond. Math. Soc. — 2011. — Vol. 83, no. 2. — Pp. 79–95.
12. *Kamae T., Zamboni L. Q.* Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2002. — Vol. 22. — Pp. 1191–1199.

13. *Augustinovich S. V., Fon-der-Flaass D. G., Frid A. E.* Arithmetical complexity of infinite words // Words, Languages and Combinatorics III. — Singapore : World Scientific, 2003. — Pp. 51–62.
14. *Cassaigne J., Frid A.* On the arithmetical complexity of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. — 2007. — Vol. 380. — Pp. 304–316.
15. *Frid A.* Sequences of linear arithmetical complexity // Theoret. Comput. Sci. — 2005. — T. 339. — C. 68–87.
16. *Augustinovich S., Cassaigne J., Frid A.* Sequences of low arithmetical complexity // Theoret. Inform. Appl. — 2006. — Vol. 40. — Pp. 569–582.
17. *Frid A.* On possible growths of arithmetical complexity // Theoret. Inform. Appl. — 2006. — Vol. 40. — Pp. 443–458.
18. *Parshina O. G.* On arithmetic progressions in the generalized Thue-Morse word // In: Manea F., Nowotka D. (eds) Combinatorics on Words. WORDS 2015. Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9304. — Pp. 191–196. — DOI: 10.1007/978-3-319-23660-5\_16.
19. *Parshina O. G.* On arithmetic index in the generalized Thue-Morse word // In: Brlek S., Dolce F., Reutenauer C., Vandomme É. (eds) Combinatorics on Words. WORDS 2017. Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — Vol. 10432. — Pp. 121–131. — DOI: 10.1007/978-3-319-66396-8\_12.
20. *Паршина О. Г.* О длинах арифметических прогрессий в слове Туэ-Морса // Материалы 52-й международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс математика. (Новосибирск, 11–18 апреля 2014 г.) — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2014. — С. 218.
21. *Паршина О. Г.* Однородные арифметические прогрессии в слове Туэ-Морса // Материалы 53-й международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс математика. (Новосибирск, 11–17 апреля 2015 г.) — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2015. — С. 124.
22. Palindromic richness / A. Glen [et al.] // European J. Combin. — 2009. — Vol. 30, no. 2. — Pp. 510–531.

23. *Bucci M., De Luca A., Fici G.* Enumeration and Structure of Trapezoidal Words // Theoret. Comput. Sci. — 2013. — Vol. 468. — Pp. 12–22.
24. *Carpi A., De Luca A.* Periodic-like words, periodicity and boxes // Acta. Inform. — 2001. — Vol. 37. — Pp. 597–618.
25. *Fici G.* Open and closed words // Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS. — 2017. — Vol. 123. — Pp. 138–147.
26. *Arnoux P., Rauzy G.* Représentation géométrique de suites de complexité  $2n+1$  // Bull. Soc. Math. France. — 1991. — T. 119, № 2. — С. 199–215.
27. *Parshina O. G., Zamboni L.* Open and closed factors in Arnoux-Rauzy words // Advances in Applied Mathematics. — 2019. — Vol. 107. — Pp. 22–31. — DOI: 0.1016/j.aam.2019.02.007.
28. *Parshina O. G., Zamboni L. Q.* Open and closed factors in Arnoux-Rauzy words // Abstracts of the conference “Mons Theoretical Computer Science Days” (Talence, France, September 10–14, 2018). — 2018. — Pp. 17–20.
29. *Berstel J., Boasson L.* Partial words and a theorem of Fine and Wilf // Theor. Comp. Sci. — 1999. — Vol. 218. — Pp. 135–141.
30. *Паршина О. Г.* О совершенных 2-раскрасках некоторых циркулянтов // Материалы 50-й международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс математика. (Новосибирск, 13–19 апреля 2012 г.) — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2012. — С. 142.
31. *Паршина О. Г.* Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискретн. анализ и исслед. операций. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 76–83. — (Перевод: Parshina O. G. Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances // J. Appl. Industr. Math. — 2014. — V.8, № 3. — Pp. 357–361.)
32. *Parshina O. G., Lisitsyna M. A.* Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School “Groups and Graphs, Representations and relations” (Novosibirsk, Russia, August 06–19, 2018). — 2018. — P. 74.



33. *Паршина О.* Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Международная конференция МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ (12–16 ноября 2012 г.) Тезисы докладов. — 2012. — С. 73.
34. *Parshina O. G.* Perfect  $k$ -colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School “Groups and Graphs, Algorithms and Automata” (Ekaterinburg, Russia, August 09–15, 2015). — 2015. — P. 80.
35. *Паршина О. Г.* Совершенные раскраски сплошных циркулянтных графов // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс математика. (Новосибирск, 12–18 апреля 2013 г.) — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ, 2013. — С. 226.
36. *Лисицына М. А., Паршина О. Г.* Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 5–19.
37. *Axenovich M. A.* On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. — 2003. — Vol. 268, no. 1–3. — Pp. 31–48.
38. *Пузынина С. А.* Совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решетки : дис. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.09. — Новосибирск, 2008. — 79 с.
39. *Krotov D. S.* Perfect colorings of  $Z^2$ : Nine colors. — 2009. — E-print 0901.0004 arXiv.org, Available at <http://arxiv.org/abs/0901.0004>.
40. *Августиневич С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В.* Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решетки // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 3–10.
41. *Puzynina S. A.* On periodicity of perfect colorings of the infinite hexagonal and triangular grids // Sib Math. J. — 2011. — Vol. 52, no. 1. — Pp. 91–104.

42. *Vasil'eva A. Y.* Distance regular colorings of the infinite triangular grid // Collection of Abstracts of the International Conference “Mal'tsev Meeting”. — 2014. — P. 98.
43. *Avustinovich S. V., Krotov D. S., Vasileva A. Y.* Completely regular codes in the infinite hexagonal grid // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — Vol. 13. — Pp. 987–1016.
44. *Хорошилова Д. Б.* О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 80–92.
45. *Хорошилова Д. Б.* О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 82–89.
46. *Фон-Дер-Флаасс Д. Г.* Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. матем. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 923–930.
47. *Fon-Der-Flaass D. G.* A bound on correlation immunity // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2007. — Vol. 4. — Pp. 133–135.
48. *Фон-Дер-Флаасс Д. Г.* Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 292–295.
49. *Воробьёв К. В., Фон-Дер-Флаасс Д. Г.* О совершенных 2-раскрасках гиперкуба // Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 65–75.
50. *Martin W. J.* Completely Regular Designs // J. Combin. Designs. — 1998. — Vol. 6. — Pp. 261–273.
51. *Могильных И. Ю.* Совершенные 2-раскраски графов Джонсона : дис. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук : 01.01.09. — Новосибирск, 2010. — 105 с.
52. *Gavrilyuk A. L., Goryainov S. V.* On Perfect 2-Colorings of Johnson Graphs  $J(v,3)$  // J. Combin. Designs. — 2013. — Vol. 21, no. 6. — Pp. 232–252.
53. *Августинович С. В., Лисицына М. А.* Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 3–17. — (Перевод: Avustinovich S. V., Lisitsyna M. A. Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — V.5, № 4. — Pp. 519–528.)

54. *Лисицына М. А., Августинovich С.* Совершенные раскраски призмы // Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 1116–1128.
55. *Августинovich С. В., Паршина О. Г.* Оценки размера носителя векторов в координатно-транзитивных линейных пространствах // Сиб. электрон. матем. изв. — 2015. — Т. 12. — С. 960–966. — DOI: 10.17377/semi.2015.12.082.
56. *Vardy A.* Algorithmic Complexity in Coding Theory and the Minimum Distance Problem // Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. — El Paso, Texas, USA : ACM, 1997. — Pp. 92–109. — (STOC '97).
57. *Berlekamp E. R., McEliece R. J., Van Tilborg H. C. A.* On the inherent intractability of certain coding problems // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1978. — No. 24. — Pp. 384–386.
58. *Ehrenfeucht A., Lee K., Rozenberg G.* Subword complexities of various classes of deterministic developmental languages without interactions // Theoret. Comput. Sci. — 1975. — Vol. 1. — Pp. 59–75.
59. *Tijdeman R., Zamboni L. Q.* Fine and Wilf words for any periods // Indag. Math. (N.S.) — 2003. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 135–147.
60. *Berstel J.* Sturmian and episturmian words (A survey of some recent results) // Proceedings of CAI. Vol. 4728. — 2007. — Pp. 23–47.
61. *Droubay X., Justin J., Pirillo G.* Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy // Theoret. Comput. Sci. — 2001. — Vol. 255. — Pp. 539–553.
62. *Justin J., Pirillo G.* Episturmian words and episturmian morphisms // Theoret. Comput. Sci. — 2002. — Vol. 276. — Pp. 281–313.
63. *Schaeffer L., Shallit J.* Closed, palindromic, rich, privileged, trapezoidal, and balanced words in automatic sequences // Electron. J. Comb. — 2016. — Vol. 23, no. 1. — Pp. 1–25.
64. *de Luca A.* Sturmian words: structure, combinatorics and their arithmetics // Theoret. Comput. Sci. — 1997. — Vol. 183. — Pp. 45–82.
65. *Cvetković D., Doob M., Sachs H.* Spectra of Graphs: Theory and Application. — Berlin : Academic Press, 1980. — 368 pp.

66. *Dinitz M.* Full rank tilings of finite abelian groups // SIAM J. Discrete Math. — 2006. — No. 20. — Pp. 160–170.
67. *Zhukov D. K.* Tilings of  $p$ -ary cyclic groups // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2013. — № 10. — C. 562–565.