

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

На правах рукописи

Гусев Сергей Валентинович

## РЕШЕТКА МНОГООБРАЗИЙ МОНОИДОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, доцент  
Б. М. Верников

Екатеринбург  
2019

## Оглавление

|  |     |
|--|-----|
| Введение.....  | 3   |
| 1. Актуальность темы и обзор результатов,<br>предшествующих диссертации .....    | 3   |
| 2. Постановка задач и обсуждение результатов диссертации ...                     | 5   |
| 3. Теоретическая и практическая значимость, научная<br>новизна .....             | 9   |
| 4. Методология и методы исследования. Степень<br>достоверности .....             | 9   |
| 5. Положения, выносимые на защиту .....  | 9   |
| 6. Апробация и публикации.....   | 10  |
| 7. Структура диссертации .....   | 10  |
| § 1. Предварительные сведения .....  | 11  |
| 1.1. О многообразиях моноидов.....   | 11  |
| 1.2. $k$ -разложение слова и связанные с ним понятия .....                       | 17  |
| § 2. Отсутствие нетривиальных тождеств .....                                     | 26  |
| § 3. Цепные многообразия .....   | 29  |
| 3.1. Формулировка основного результата .....                                     | 29  |
| 3.2. Доказательство необходимости .....  | 29  |
| 3.2.1. Редукция к случаю, когда $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{V}$ .....        | 30  |
| 3.2.2. Редукция к случаю, когда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$ .....          | 33  |
| 3.2.3. Случай, когда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$ .....                     | 42  |
| 3.3. Доказательство достаточности: все многообразия,<br>кроме $\mathbf{K}$ ..... | 48  |
| 3.4. Доказательство достаточности: многообразии $\mathbf{K}$ .....               | 51  |
| 3.4.1. Редукция к интервалу $[\mathbf{E}, \mathbf{K}]$ .....                     | 51  |
| 3.4.2. Несколько вспомогательных результатов .....                               | 53  |
| 3.4.3. Редукция к интервалам вида $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$ .....       | 70  |
| 3.4.4. Структура интервала $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$ .....              | 76  |
| 3.5. Следствия .....   | 90  |
| § 4. Специальные элементы .....  | 94  |
| Заключение .....   | 101 |
| Список литературы .....  | 102 |
| Публикации автора по теме диссертации .....                                      | 105 |

## Введение

### 1. Актуальность темы и обзор результатов, предшествующих диссертации

Одним из основных направлений современной общей алгебры является изучение многообразий алгебр. Этому направлению посвящено большое количество монографий и обзорных статей. Не претендуя на полноту, отметим здесь, например, монографии [3, 10, 11, 16, 35]. При этом значительное внимание уделяется как исследованию многообразий универсальных алгебр, так и рассмотрению многообразий различных конкретных типов алгебр — групп, полугрупп, колец, решеток и др. Совокупность всех многообразий алгебр одного и того же типа образует решетку относительно включения. Исследование этой решетки относится к числу важнейших направлений изучения многообразий. Отметим, что исследование решеток многообразий естественно вписывается в более общий подход, связанный с рассмотрением производных решеток алгебраических объектов — таких, как решетки подалгебр, конгруэнций и т.п. (см., например, монографии [13, 52, 57] и обзор [44]).

В частности, с начала 60-х годов прошлого века активно изучается решетка многообразий полугрупп, которую мы будем обозначать через  $SEM$ . Число работ, полностью или частично посвященных этой решетке, в настоящее время исчисляется несколькими сотнями. Результаты, полученные на начальном этапе изучения решетки  $SEM$ , приведены в обзорах [1, 24]. Обзор более поздних исследований по многообразиям полугрупп дается в статьях [18–20, 64]. Можно отметить еще обзоры [36, 54]. В них рассматриваются многообразия (а в [54] — и другие классы) различных типов алгебр, среди которых полугруппы занимают видное место. Обзор [18] посвящен решеточному направлению в теории многообразий полугрупп и отражает его состояние, близкое к современному. Не так давно вышел еще один обзор [61], посвященный не всей решетке  $SEM$ , а только ее специальным элементам.

На этом фоне резким контрастом выглядит крайне незначительное число работ, в которых изучается решетка всех многообразий моноидов, которую мы будем обозначать через  $MON$  (говоря о многообразиях моноидов, мы имеем в виду, что 0-арная операция, выделяющая единицу, входит в сигнатуру). По существу, можно назвать всего несколько работ, полностью или в существенной степени посвященных этой решетке. Прежде чем приступить к перечислению этих работ следует сказать, что, поскольку решетка  $SEM$  изучена достаточно хорошо по сравнению с  $MON$ , в процессе изложения мы будем постоянно оглядываться на решетку  $SEM$ , сравнивая моноидные результаты с их полугрупповыми аналогами. Мы увидим, что несмотря на близость двух алгебр — полугрупп и моноидов, а также тот легко проверяемый факт, что  $MON$  изоморфно вкладывается в  $SEM$  (см. предложение 1.1 ниже), уже с самых первых работ, посвященных решетке  $MON$ , начинает прослеживаться существенная разница между свойствами этой решетки и решетки  $SEM$ . В данной диссертации мы еще не раз убедимся в том, что одна и та же постановка задачи для решеток  $SEM$  и  $MON$  зачастую приводит к совершенно различным результатам. Чтобы сделать

картину более полной, отметим, что встречаются и противоположные ситуации, когда свойства решеток  $\text{SEM}$  и  $\text{MON}$  оказываются аналогичными. Одна из причин таких аналогий указана в § 1 диссертации после предложения 1.1.

По-видимому, первой статьёй о решетке  $\text{MON}$  является работа Т.Хида [30]. В ней дается полное описание решетки коммутативных многообразий моноидов. В частности, доказываем, что эта решетка является счетной и дистрибутивной. Для сравнения, заметим, что решетка многообразий коммутативных полугрупп также счетна (П.Перкинс [47]), но не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству (С.Баррис и Э.Нельсон [22]).

В работе Д.Поллака [49] изучается свойство покрываемости в решетках многообразий алгебр различных типов. В частности, в ней указан пример многообразия моноидов, не имеющего покрытий в решетке  $\text{MON}$ . Этот факт контрастирует с доказанным А.Н.Трахтманом в [15] результатом о том, что всякое собственное многообразие полугрупп (т.е. многообразие, отличное от многообразия всех полугрупп) имеет покрытие в решетке  $\text{SEM}$ .

Третьей работой, в существенной степени посвященной решетке  $\text{MON}$ , является статья Ш.Висмат [66]. В ней дано полное описание решеток многообразий и псевдомногообразий идемпотентных моноидов. Отметим, что решетка многообразий идемпотентных полугрупп полностью описана намного раньше независимо А.П.Бирюковым [4], Ч.Фенмором [25] и Дж.Герхардом [26].

Статьи [30, 49, 66], по-видимому, исчерпывают список работ, полностью или в существенной степени посвященных решетке  $\text{MON}$ , опубликованных до 2018 г. Для полноты картины отметим только еще статьи [59, 67], посвященные не решетке  $\text{MON}$ , а решеткам многообразий моноидов с некоторыми дополнительными унарными операциями.

В последнее время ситуация начала постепенно меняться. В работах ряда авторов (в первую очередь, М.Джексона и Э.Ли), посвященных в основном изучению тождеств в моноидах, появляются и промежуточные результаты, относящиеся к решеткам многообразий (см., например, [31, 38–42, 68]). В основном они представляют собой описание решеток подмногообразий некоторых конкретных многообразий моноидов. В частности, в [38] построен первый, насколько нам известно, пример многообразия моноидов с модулярной решеткой подмногообразий. А в недавней статье М.Джексона и Э.Ли [32] получен уже некоторый результат о решетке многообразий моноидов, представляющий несомненный самостоятельный интерес. А именно, в этой работе построены многообразия моноидов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  такие, что решетки их подмногообразий конечны, а решетка подмногообразий их объединения  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  континуальна и не удовлетворяет условию максимальности. Более того, из доказательств работы [32] легко вытекает, что последняя решетка не удовлетворяет и условию минимальности. Тем самым, показано, что в классе решеток подмногообразий многообразий моноидов конечность решетки, условие максимальности и условие минимальности не замкнуты относительно объединения многообразий. Совсем недавно автором диссертации в [9] был анонсирован еще один пример многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  с ука-

занными выше свойствами. При этом в примере из [9], в отличие от примера из [32], многообразие  $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$  покрывает одно из многообразий  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Таким образом, в указанном выше классе решеток конечность решетки, условие максимальности и условие минимальности не замкнуты еще и относительно перехода к покрытиям. Этот результат автора не включен в диссертацию, так как он пока не опубликован. Интересно, что для многообразий полугрупп ответы на вопросы, аналогичные обсуждаемым сейчас, относительно конечности и условия минимальности отрицательны (М.В.Сапир [50]), а относительно условия максимальности неизвестны (соответствующий вопрос сформулирован в [18, вопрос 10.2]).

Подведем итоги. Решетке многообразий моноидов до последнего времени уделялось незаслуженно мало внимания. Результаты об этой решетке носили фрагментарный характер. Систематически решетка  $\mathbf{MON}$  до настоящего времени не исследовалась, и данная диссертация является первой попыткой заполнить этот пробел.

## 2. Постановка задач и обсуждение результатов диссертации

При изучении решетки многообразий полугрупп большое внимание уделялось рассмотрению ограничений, формулирующихся в терминах тождеств (см. [18, §11]). Поэтому изучение решетки  $\mathbf{MON}$  естественно начать с рассмотрения такого типа ограничений, что и является **целью** нашей работы.

Как мы уже упоминали выше, решетка  $\mathbf{MON}$  не является модулярной. Однако до последнего времени не было известно, удовлетворяет ли эта решетка какому-либо нетривиальному тождеству. Первый из основных результатов данной диссертации дает отрицательный ответ на этот вопрос (см. теорему 2.1 и следствие 2.2 ниже).

Обсудим этот результат подробнее. Многообразие моноидов называется *надкоммутативным*, если оно содержит многообразие всех коммутативных моноидов. Ясно, что совокупность всех надкоммутативных многообразий моноидов образует подрешетку в решетке всех многообразий моноидов, которую будем обозначать через  $\mathbf{OC}$ . Как и в случае полугрупп, решетка  $\mathbf{MON}$  является дизъюнктивным объединением решетки  $\mathbf{OC}$  и решетки *периодических* многообразий (т.е. многообразий, состоящих из периодических моноидов). В данной диссертации доказано отсутствие нетривиальных тождеств в решетке  $\mathbf{OC}$ , откуда, в частности, следует отсутствие нетривиальных тождеств во всей решетке  $\mathbf{MON}$ . Отметим, что, как показала недавно И.А.Михайлова, решетка периодических многообразий моноидов также не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству (не опубликовано).

Для сравнения заметим, что отсутствие нетривиальных тождеств в решетке многообразий полугрупп было доказано еще в 1971 г. в двух работах С.Барриса и Э.Нельсона [22, 23]. Что касается решетки надкоммутативных многообразий полугрупп, то в статье [63] М.В.Волковым было дано описание этой решетки в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр некоторого специального типа. В качестве следствия из указанного результата, в этой статье был доказан полугрупповой аналог нашего результата, а

именно тот факт, что решетка всех надкоммутативных многообразий полугрупп не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Отсутствие нетривиальных тождеств в решетках надкоммутативных многообразий как в полугрупповом, так и в моноидном случаях — один из немногих примеров ситуаций, когда свойства решеток SEM и MON аналогичны.

После доказательства отсутствия нетривиальных тождеств в решетке MON естественно начать изучение многообразий моноидов с модулярной или дистрибутивной решеткой подмногообразий. Для решетки SEM аналогичные проблемы были сформулированы Т.Эвансом в 1971 г. [24] и Л.Н.Шевриным в 1979 г. [12, задача 2.60a] соответственно. Для решения первой из этих проблем потребовалось более двадцати лет усилий ряда математиков. Окончательно она была решена М.В.Волковым в начале 1990-х годов (см. [7], а также [18, раздел 11.1]). Параллельно с решением проблемы Эванса, М.В.Волков значительно продвинулся и в решении проблемы Шеврина и описал многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в очень широком частном случае. В общем случае проблема Шеврина остается не решенной до сих пор (более подробные комментарии см. в [18, раздел 11.3]). Поскольку решетка MON пока изучена слабо, трудно рассчитывать на решение задачи описания многообразий моноидов с модулярной или дистрибутивной решеткой подмногообразий в ближайшее время. В качестве первого шага в этом направлении представляется естественным рассмотреть предельное усиление тождества дистрибутивности, а именно — свойство быть цепью. Многообразие, решетка подмногообразий которого является цепью, принято называть *цепным*. Для большинства классических типов алгебр задача описания цепных многообразий решена 35–40 и более лет назад. В частности, негрупповые цепные многообразия полугрупп описаны Е.В.Сухановым в 1982 г. [14] (см. рис. 3 на стр. 92), а локально конечные цепные многообразия групп — В.А.Артамоновым в 1978 г. [2]. Отметим, что задача описания произвольных цепных многообразий групп представляется трансцендентно сложной. Это вытекает из результатов П.А.Кожевникова [37], согласно которым существует континуум периодических не локально конечных многообразий групп, решетка подмногообразий которых является 3-элементной цепью.

Отдельные нетривиальные примеры цепных многообразий моноидов появлялись в некоторых работах в процессе доказательств основных результатов (см., в частности, [31, 38, 41]). Однако систематически цепные многообразия моноидов до последнего времени не изучались. В данной диссертации получено полное описание негрупповых цепных многообразий моноидов (см. теорему 3.1 и следствие 3.34 ниже).

Минимальные нецепные многообразия принято называть *почти цепными*. В [14, следствие 2] отмечается, что всякое негрупповое цепное многообразие полугрупп содержится в некотором максимальном цепном многообразии, а всякое негрупповое не цепное многообразие полугрупп содержит некоторое почти цепное подмногообразие. В случае моноидов ни одно из этих утверждений места не имеет (см. рис. 2 на стр. 91 и следствие 3.37 ниже).

В [14] негрупповые цепные многообразия полугрупп описаны двумя спо-

собами: на языке тождеств и на языке минимальных запрещенных подмногообразий. Второй способ описания состоит в указании полного списка негрупповых почти цепных многообразий полугрупп. Это действительно дает характеризацию цепных многообразий, поскольку, в силу упомянутого выше следствия 2 из [14], негрупповое многообразие полугрупп является цепным тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного почти цепного многообразия. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что в случае моноидов этот способ описания цепных многообразий невозможен. Поэтому почти цепные многообразия моноидов ниже не рассматриваются.

В данной диссертации мы рассматриваем еще несколько ограничений, связанных с тождествами дистрибутивности и модулярности. Речь идет о специальных элементах в решетке  $\text{MON}$ . Напомним определения тех типов специальных элементов, которые будут возникать в данной работе. Элемент  $x$  решетки  $L$  называют

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| <i>нейтральным</i> , если      | $\forall y, z \in L: (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$<br>$= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$ |
| <i>костандартным</i> , если    | $\forall y, z \in L: (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z);$   |
| <i>кодистрибутивным</i> , если | $\forall y, z \in L: x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$   |
| <i>модулярным</i> , если       | $\forall y, z \in L: y \leq z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$                                     |
| <i>верхнемодулярным</i> , если | $\forall y, z \in L: y \leq x \longrightarrow x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z).$                                     |

*Нижнемодулярные* элементы определяются двойственно к верхнемодулярным. Хорошо известно, что элемент  $x \in L$  нейтрален тогда и только тогда, когда для всех  $y, z \in L$  подрешетка в  $L$ , порожденная  $x, y$  и  $z$ , дистрибутивна (см., например, [28, теорема 254]). Нейтральные элементы играют важную роль в общей теории решеток. В частности, элемент  $a$  является нейтральным элементом решетки  $L$  тогда и только тогда, когда  $L$  разложима в подпрямое произведение главного идеала и главного фильтра, порожденных элементом  $a$  (см, например, [28, теорема 254]). Таким образом, знание нейтральных элементов решетки позволяет судить о строении этой решетки в целом. Очевидно, что всякий нейтральный элемент нижнемодулярен и костандартен одновременно; всякий костандартный модулярен; всякий кодистрибутивный верхнемодулярен. Хорошо известно также, что всякий костандартный элемент кодистрибутивен (см., например, [28, теорема 253]). Некоторую информацию о специальных элементах в произвольных решетках можно найти в [28, раздел III.2] и [53, глава 1].

К настоящему времени получено много интересных и глубоких результатов о специальных элементах решетки  $\text{SEM}$  (см. обзоры [18, § 14] и [61], а также недавние работы [29, 55, 56, 58, 62]). В частности, нейтральные элементы решетки  $\text{SEM}$  были полностью описаны М.В.Волковым в [65, предложение 4.1], а Б.М.Верников в [6, теорема 1.3] доказал, что многообразие полугрупп является костандартным элементом решетки  $\text{SEM}$  тогда и только тогда, когда оно является нейтральным элементом этой решетки. Кодистрибутивные элементы решетки  $\text{SEM}$  изучались в работе [6], а верхнемодулярные — в работах [5, 60].

Специальные элементы решетки  $\text{MON}$  до настоящего времени не изучались. В диссертации полностью описаны нейтральные и костандартные элементы этой решетки (теоремы 4.1 и 4.2 ниже). При этом оказалось, что в отличие от решетки  $\text{SEM}$ , в решетке  $\text{MON}$  свойства быть нейтральным и костандартным элементом не эквивалентны. Кроме того, нами получена существенная информация о кодистрибутивных и верхнемодулярных элементах этой решетки (предложения 4.3 и 4.4 ниже). Для того, чтобы охарактеризовать эти результаты, напомним, что, как и в полугрупповом случае, многообразие моноидов называют *вполне регулярным*, если оно состоит из *вполне регулярных* моноидов (объединений групп). Нами доказано, что любое собственное многообразие моноидов (т.е. многообразие, отличное от многообразия всех моноидов), являющееся верхнемодулярным элементом решетки  $\text{MON}$ , либо коммутативно, либо вполне регулярно (предложение 4.3). При этом оказалось, что всякое коммутативное многообразие моноидов является кодистрибутивным элементом решетки  $\text{MON}$  (предложение 4.4). Поскольку всякий кодистрибутивный элемент верхнемодулярен, предложения 4.3 и 4.4 полностью сводят изучение верхнемодулярных и кодистрибутивных элементов решетки  $\text{MON}$  к вполне регулярному случаю. В этом случае задачи полного описания кодистрибутивных и верхнемодулярных элементов решетки  $\text{MON}$  остаются до сих пор открытыми (как и аналогичные задачи для решетки  $\text{SEM}$ ), что объясняется некоторыми объективными трудностями. Хорошо известно, что решетка многообразий групп модулярна, но не дистрибутивна. Следовательно, она содержит 5-элементную модулярную, но не дистрибутивную подрешетку. Ясно, что попарно несравнимые элементы этой подрешетки не являются кодистрибутивными элементами решетки  $\text{MON}$ . Мы видим, что задача описания кодистрибутивных элементов решетки  $\text{MON}$  тесно связана с задачей описания многообразий групп с дистрибутивной решеткой подмногообразий. Упомянутый выше результат работы [37] о существовании континуума периодических многообразий групп с 3-элементной решеткой подмногообразий показывает, что последняя задача чрезвычайно трудна даже в периодическом случае. Следовательно, задача описания кодистрибутивных элементов решетки  $\text{MON}$  также является чрезвычайно трудной. То же можно сказать и о задаче описания верхнемодулярных элементов этой решетки, поскольку класс всех таких элементов включает в себя все ее кодистрибутивные элементы.

Подводя итог сказанному, сформулируем явно задачи, решению которых посвящена диссертация:

- 1) выяснить, удовлетворяет ли решетка многообразий моноидов какому-либо нетривиальному тождеству;
- 2) описать цепные негрупповые многообразия моноидов;
- 3) описать нейтральные элементы решетки многообразий моноидов;
- 4) описать костандартные элементы той же решетки.



### **3. Теоретическая и практическая значимость, научная новизна**

Все результаты диссертации являются новыми. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории полугрупп и теории многообразий. Результаты, полученные в диссертации, значительно расширяют круг наших знаний о строении решетки многообразий моноидов. Для решения рассмотренных в диссертации задач потребовалось найти критерии выполнимости тождества (т.е. решить проблему равенства слов) в целом ряде конкретных многообразий моноидов. Для этого в диссертации разработан метод, основанный на целом ряде понятий, связанных с комбинаторикой слов ( $k$ -разложение слова,  $k$ -блоки и  $k$ -разделители слова, глубина буквы в слове и др.). Эти понятия введены и изучены в диссертации (рассмотрению их свойств посвящен раздел 1.2), Нам представляется, что потенциал этого подхода к изучению многообразий моноидов далеко не исчерпан задачами, рассмотренными в диссертации. Он может оказаться полезным как при рассмотрении других задач, связанных с решеткой многообразий моноидов, так и при изучении вопросов о конечной и бесконечной базируемости моноидов.

### **4. Методология и методы исследования. Степень достоверности**

В работе применяются методы теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

Достоверность результатов исследования обеспечивается использованием научно-обоснованных методов с опорой на основополагающие теоретические положения в области математики, на фундаментальные работы по теории полугрупп, теории решеток и теории многообразий, использованием общеалгебраических и специальных методов исследований в области теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

### **5. Положения, выносимые на защиту**

На защиту выносятся:

- 1) утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке надкоммутативных многообразий моноидов, а значит, и в решетке всех моноидных многообразий; опубликовано в статье [69];
- 2) полное описание всех негрупповых цепных многообразий моноидов; опубликовано в статье [71];
- 3) полное описание нейтральных элементов решетки всех многообразий моноидов; опубликовано в статье [70];
- 4) полное описание нестандартных элементов той же решетки; опубликовано в статье [70].

## 6. Апробация и публикации

Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 2015), Международной конференции «Группы и графы, метрики и многообразия» (Екатеринбург, 2017), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2017), Международной молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2018), 56-й летней школе по алгебре и упорядоченным множествам (Шпиндлерув Млын, Чехия, 2018). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на Екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы» (2016–2019).

По теме диссертации опубликовано семь работ [69–75]. Из них три работы опубликованы в журналах из списка ВАК [69–71]. Одна работа написана совместно с Б.М.Верниковым [71]. В этой работе постановка задачи, указание на основные идеи и методы доказательства и усовершенствование первоначального варианта изложения принадлежат Б.М.Верникову, а само доказательство найдено диссертантом.

## 7. Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех параграфов, заключения и списка литературы. В § 1 собраны необходимые для дальнейшего определения, обозначения и вспомогательные результаты. В § 2 доказываются отсутствие нетривиальных тождеств в решетке надкоммутативных многообразий моноидов, § 3 посвящен цепным многообразиям моноидов, а в § 4 рассматриваются специальные элементы решетки многообразий моноидов.

## § 1. Предварительные сведения

### 1.1. О многообразиях моноидов

Мы начнем со следующего фольклорного факта (в явном виде он отмечался, например, в [32, раздел 1.1]).

**Предложение 1.1.** *Отображение из  $\text{MON}$  в  $\text{SEM}$ , сопоставляющее многообразию моноидов, порожденному моноидом  $M$ , многообразию полугрупп, порожденное этим моноидом, является вложением решетки  $\text{MON}$  в решетку  $\text{SEM}$ .*  $\square$

Отметим, что из предложения 1.1 вытекает, что многие «положительные» решеточные свойства, прежде всего — свойства наследуемые подрешетками, переносятся с «составных частей» решетки  $\text{SEM}$  на соответствующие части решетки  $\text{MON}$ . Так, например, из дезарговости решетки вполне регулярных многообразий полугрупп, доказанной тремя различными способами Ф.Пастейном в [45, 46] и М.Петричем и Н.Райли в [48], вытекает дезарговость решетки вполне регулярных многообразий моноидов, а из финитной аппроксимируемости решетки надкоммутативных многообразий полугрупп, доказанной М.В.Волковым в [63], следует финитная аппроксимируемость решетки надкоммутативных многообразий моноидов.

Нам понадобится ряд обозначений и определений. Через  $F$  мы будем обозначать абсолютно свободную полугруппу счетного ранга над некоторым фиксированным алфавитом. Как обычно, элементы полугруппы  $F$  будем называть *словами*, а элементы алфавита — *буквами*. И слова, и буквы будут обозначаться маленькими латинскими буквами, но, в отличие от букв, слова, заведомо не являющиеся буквами или не обязанные ими быть, выделяются жирным шрифтом. Через  $F^1$  будем обозначать полугруппу  $F$  с внешнеприсоединенной единицей. Эту единицу мы будем трактовать как пустое слово и обозначать символом  $\lambda$ . Как обычно, через  $\text{End}(F)$  и  $\text{End}(F^1)$  будут обозначаться моноиды эндоморфизмов полугруппы  $F$  и моноида  $F^1$  соответственно. Две части тождества мы будем соединять знаком  $\approx$ , а обычным знаком равенства будет, среди прочего, обозначаться отношение равенства на моноиде  $F^1$ . Слово называется *полугрупповым*, если оно не содержит 1. Тождество принято называть *полугрупповым*, если обе его части являются полугрупповыми словами. Заметим, что любое тождество, записанное в сигнатуре умножения и 0-арной операции, выделяющей единицу, эквивалентно системе полугрупповых тождеств. Действительно, любое тождество вида  $\mathbf{w} \approx 1$  можно заменить парой тождеств вида  $\mathbf{w}\mathbf{y} \approx \mathbf{y}\mathbf{w} \approx \mathbf{y}$ , где  $\mathbf{y}$  — произвольная буква, не входящая в запись слова  $\mathbf{w}$ . При этом слово  $\mathbf{w}$  можно считать полугрупповым, поскольку всякий моноид удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \cdot 1 \cdot \mathbf{v} \approx \mathbf{u}\mathbf{v}$  для любых слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что все тождества, с которыми мы имеем дело, являются полугрупповыми.

Следующее утверждение является специализацией для моноидов общеизвестного универсально-алгебраического факта.

**Лемма 1.2.** *Тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии моноидов, заданном системой тождеств  $\Sigma$ , тогда и только тогда, когда существует*

последовательность слов  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n = \mathbf{v}$  такая, что для любого  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  найдутся слова  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in F^1$ , эндоморфизм  $\xi_i \in \text{End}(F^1)$  и тождество  $\mathbf{u}_i \approx \mathbf{v}_i$  из системы  $\Sigma$ , для которых либо  $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{u}_i) \mathbf{b}_i$ , а  $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{v}_i) \mathbf{b}_i$ , либо  $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{v}_i) \mathbf{b}_i$ , а  $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{u}_i) \mathbf{b}_i$ .  $\square$

Через  $\text{con}(\mathbf{w})$  обозначается *содержание* слова  $\mathbf{w}$ , т.е. множество всех букв, входящих в запись этого слова. Многообразие всех полурешеток, как обычно, будем обозначать через  $\mathbf{SL}$ . Следующее утверждение хорошо известно, но, насколько мы знаем, нигде не появлялось в такой форме. Для полноты изложения приведем здесь его доказательство.

**Лемма 1.3.** *Для многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  следующие условия эквивалентны:*

- а)  $\mathbf{V}$  является многообразием групп;
- б)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , для которого  $\text{con}(\mathbf{u}) \neq \text{con}(\mathbf{v})$ ;
- в)  $\mathbf{SL} \not\subseteq \mathbf{V}$ .

*Доказательство.* Импликация а)  $\longrightarrow$  б) очевидна.

Импликация в)  $\longrightarrow$  б) вытекает из того очевидного факта, что многообразие  $\mathbf{SL}$  удовлетворяет любому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , для которого  $\text{con}(\mathbf{u}) = \text{con}(\mathbf{v})$ .

б)  $\longrightarrow$  а) Согласно условию, существует буква  $x$ , входящая только в одно из слов  $\mathbf{u}$  или  $\mathbf{v}$ . Пусть  $y$  — буква, не входящая в  $\text{con}(\mathbf{u}\mathbf{v})$ . Ясно, что тождества  $\mathbf{u}y \approx \mathbf{v}y$  и  $y\mathbf{u} \approx y\mathbf{v}$  выполняются в  $\mathbf{V}$ . Подставим 1 вместо всех букв, входящих в эти тождества, кроме  $x$  и  $y$ . Мы получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $x^n y \approx y$  и  $y x^n \approx y$  для некоторого  $n$ . Это означает, что  $\mathbf{V}$  является многообразием групп.  $\square$

Многообразие абелевых групп экспоненты  $n$  обозначается через  $\mathbf{A}_n$ .

**Лемма 1.4** ([30]). *Если  $\mathbf{V}$  — периодическое коммутативное многообразие моноидов, то  $\mathbf{V} = \mathbf{A}_n \vee \mathbf{Q}$ , где  $n$  — некоторое натуральное число, а  $\mathbf{Q}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  или  $\mathbf{C}_m$  для некоторого  $m \geq 2$ .*  $\square$

Многообразие моноидов называется *комбинаторным*, если все его группы одноэлементны. Из предложения 1.1 и леммы 2.6 работы [60] вытекает

**Лемма 1.5.** *Если  $\mathbf{V}$  — комбинаторное многообразие моноидов, а  $\mathbf{G}$  — многообразие периодических групп, то  $\mathbf{G}$  является наибольшим групповым подмногообразием многообразия  $\mathbf{G} \vee \mathbf{V}$ .*  $\square$

Буква называется *простой* [*кратной*] в слове  $\mathbf{w}$ , если она входит в  $\mathbf{w}$  один [не менее двух] раз. Множество всех простых [кратных] букв слова  $\mathbf{w}$  обозначается через  $\text{sim}(\mathbf{w})$  [соответственно  $\text{mul}(\mathbf{w})$ ]. Следующее утверждение хорошо известно и легко проверяется.

**Предложение 1.6.** *Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{C}_2$  тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\text{sim}(\mathbf{u}) = \text{sim}(\mathbf{v}) \text{ и } \text{mul}(\mathbf{u}) = \text{mul}(\mathbf{v}). \quad (1.1)$$

Следующая конструкция впервые появилась в статье [47] и многократно возникала в работах по теории многообразий полугрупп (см., например, [31–33, 38, 41]; в [32, замечание 2.4] указан целый ряд других ссылок). Пусть  $W$  — множество слов. Через  $S(W)$  обозначим фактор-моноид Риса свободного моноида  $F^1$  по идеалу всех слов, не являющихся подсловами слов из  $W$ . Если  $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ , то полугруппу  $S(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\})$  будем обозначать через  $S(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k)$ .

Слово  $\mathbf{w}$  называется *изотермом* для данного класса полугрупп, если из того, что все полугруппы из этого класса удовлетворяют тождеству  $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$ , следует, что  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ . Следующее утверждение играет важную роль в дальнейших рассуждениях.

**Лемма 1.7.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, а  $W$  — множество слов. Моноид  $S(W)$  принадлежит  $\mathbf{V}$  тогда и только тогда, когда каждое слово из  $W$  является изотермом для  $\mathbf{V}$ .*

*Доказательство.* Простые соображения (см. абзац после леммы 3.3 в работе [31]) показывают, что достаточно рассмотреть случай, когда множество  $W$  состоит из одного слова. В этом случае необходимость очевидна, а достаточность доказана в [33, лемма 5.3].  $\square$

Через  $\text{var } \Sigma$  обозначается многообразие моноидов, заданное системой тождеств  $\Sigma$ , а через  $\text{var } M$  — многообразие, порожденное моноидом  $M$ . Для всякого  $n \geq 2$  положим

$$\mathbf{C}_n = \text{var}\{x^n \approx x^{n+1}, xy \approx yx\}.$$

**Лемма 1.8** ([21, следствие 6.1.5]). *Для любого натурального  $n$  выполнено равенство  $\mathbf{C}_{n+1} = \text{var } S(x^n)$ .*  $\square$

**Лемма 1.9.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, а  $n$  — натуральное число. Если  $\mathbf{C}_{n+1} \not\subseteq \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+m}$  для некоторого натурального  $m$ .*

*Доказательство.* Мы можем считать, что  $\mathbf{V}$  не является многообразием групп, поскольку в противном случае заключение леммы очевидно. В силу лемм 1.7 и 1.8, в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено нетривиальное тождество вида  $x^n \approx \mathbf{w}$ . Тогда, по лемме 1.3,  $\text{con}(\mathbf{w}) = \{x\}$ , откуда следует, что  $\mathbf{w} = x^k$  для некоторого  $k \neq n$ . Очевидно, что при любом  $k$  тождество  $x^n \approx x^k$  влечет тождество  $x^n \approx x^{n+m}$  для некоторого  $m$ . Таким образом, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+m}$ .  $\square$

Хорошо известно, что многообразие вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству  $x \approx x^{m+1}$  для некоторого  $m$ . Из этого наблюдения, леммы 1.9 и того очевидного факта, что многообразие  $\mathbf{C}_2$  не является вполне регулярным, вытекает

**Следствие 1.10.** *Многообразие моноидов  $\mathbf{V}$  является вполне регулярным тогда и только тогда, когда  $\mathbf{C}_2 \notin \mathbf{V}$ .*  $\square$

Введем обозначения для следующих трех конкретных тождеств:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &: xyzxty \approx yxzxty, \\ \sigma_2 &: xtyzxy \approx xtyzyx, \\ \gamma_1 &: y_1y_0x_1y_1x_0x_1 \approx y_1y_0y_1x_1x_0x_1.\end{aligned}$$

Заметим, что тождества  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  являются двойственными друг другу, а тождество  $\gamma_1$  принадлежит счетной серии тождеств  $\gamma_k$  которая будет определена в подразделе 3.4.1. С «содержательной точки зрения» тождества  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\gamma_1$  позволяют переставлять местами две смежных буквы в слове при выполнении некоторого дополнительного условия. Для тождества  $\sigma_1$  [соответственно  $\sigma_2$ ] это условие состоит в том, что переставляются не первые [не последние] вхождения букв в данном слове, а для тождества  $\gamma_1$  — в том, что для одной из букв переставляемое вхождение является не первым, а для другой — не последним. Для любого натурального  $k$  положим

$$\mathbf{D}_k = \text{var}\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx yx^2, \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, x^2y_1y_2 \cdots y_k \approx xy_1xy_2x \cdots xy_kx\}.$$

Из доказательства предложения 4.1 работы [41] вытекает

**Лемма 1.11.**  $\mathbf{D}_1 = \text{var } S(xy)$  и  $\mathbf{D}_{n+1} = \text{var } S(xy_1xy_2x \cdots xy_nx)$  для любого натурального  $n$ .  $\square$

Тривиальное многообразие моноидов обозначим через  $\mathbf{T}$ . Положим

$$\mathbf{D} = \text{var}\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx yx^2, \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1\}.$$

Как обычно, через  $L(\mathbf{X})$  обозначается решетка подмногообразий многообразия  $\mathbf{X}$ . Из предложения 4.1 работы [41] и его доказательства легко вытекает

**Лемма 1.12.** *Решетка  $L(\mathbf{D})$  является цепью  $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{D}_k \subset \cdots \subset \mathbf{D}$ .*  $\square$

Положим

$$\mathbf{LRB} = \text{var}\{xy \approx yux\} \text{ и } \mathbf{RRB} = \text{var}\{yx \approx yux\}.$$

Следующее утверждение вытекает из [66, предложение 4.7].

**Лемма 1.13.** (i) *Всякое многообразие идемпотентных моноидов либо содержит многообразие  $\mathbf{LRB} \vee \mathbf{RRB}$ , либо содержится в этом многообразии.*

(ii) *Решетка  $L(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{RRB})$  имеет вид, изображенный на рис. 1а).*  $\square$

Положим

$$\mathbf{E} = \text{var}\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx yux, x^2y^2 \approx y^2x^2\}.$$

Следующая лемма доказана в [38, предложение 4.1(i) и лемма 3.3(iv)].

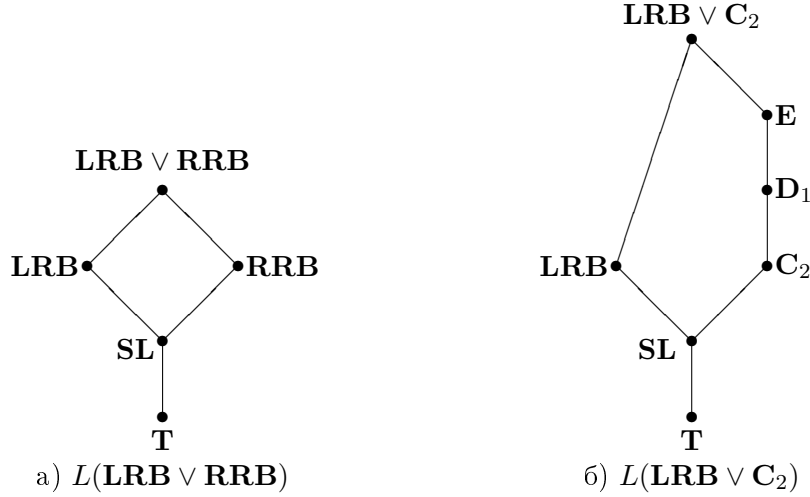


Рис. 1: решетки  $L(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{RRB})$  и  $L(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{C}_2)$

**Лемма 1.14.** (i)  $\mathbf{LRB} \vee \mathbf{C}_2 = \text{var}\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx xyx\}$ .

(ii) Решетка  $L(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{C}_2)$  имеет вид, изображенный на рис. 1б).  $\square$

Если  $\mathbf{w} \in F$  и  $x \in \text{con}(\mathbf{w})$ , то через  $\text{осс}_x(\mathbf{w})$  обозначим число вхождений буквы  $x$  в слово  $\mathbf{w}$ . Если  $x \in \text{con}(\mathbf{w})$  и  $i \leq \text{осс}_x(\mathbf{w})$ , то через  $\ell_i(\mathbf{w}, x)$  будем обозначать длину минимального префикса  $\mathbf{p}$  слова  $\mathbf{w}$  такого, что  $\text{осс}_x(\mathbf{p}) = i$ . Приведем пример, иллюстрирующий эти обозначения.

**Пример 1.15.** Пусть  $\mathbf{w} = xyx^2zy$ . Тогда  $\text{осс}_x(\mathbf{w}) = 3$ ,  $\text{осс}_y(\mathbf{w}) = 2$  и  $\text{осс}_z(\mathbf{w}) = 1$ . Кроме того, очевидно, что кратчайшими префиксами  $\mathbf{p}$  слова  $\mathbf{w}$ , для которых  $\text{осс}_x(\mathbf{p}) = 1$ ,  $\text{осс}_x(\mathbf{p}) = 2$  и  $\text{осс}_x(\mathbf{p}) = 3$ , являются слова  $x$ ,  $xyx$  и  $xyx^2$  соответственно. Следовательно,  $\ell_1(\mathbf{w}, x) = 1$ ,  $\ell_2(\mathbf{w}, x) = 3$  и  $\ell_3(\mathbf{w}, x) = 4$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\ell_1(\mathbf{w}, y) = 2$ ,  $\ell_2(\mathbf{w}, y) = 6$  и  $\ell_1(\mathbf{w}, z) = 5$ .

Мы часто будем иметь дело с неравенствами вида  $\ell_i(\mathbf{w}, x) < \ell_j(\mathbf{w}, y)$ . Ясно, что это неравенство на самом деле означает, что  $i$ -е вхождение  $x$  в  $\mathbf{w}$  предшествует  $j$ -му вхождению  $y$  в  $\mathbf{w}$ .

Если  $\mathbf{w}$  — слово, а  $X$  — множество букв, то через  $\mathbf{w}_X$  обозначается слово, полученное из  $\mathbf{w}$  вычеркиванием всех букв, содержащихся в  $X$ . Договоримся писать  $\mathbf{w}_x$  вместо  $\mathbf{w}_{\{x\}}$ .

**Лемма 1.16.** Если некоммутативное многообразие моноидов  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , для которого выполнено условие (1.1), то

$$\mathbf{u}_{\text{mul}(\mathbf{u})} = \mathbf{v}_{\text{mul}(\mathbf{u})}. \quad (1.2)$$

*Доказательство.* Из условия (1.1) следует, что  $\text{sim}(\mathbf{u}) = \text{sim}(\mathbf{v})$  и  $\text{mul}(\mathbf{u}) = \text{mul}(\mathbf{v})$ . Очевидно, что условие (1.2) выполняется в случае, когда  $\text{sim}(\mathbf{u})$  содержит менее двух букв. Предположим, что  $\text{sim}(\mathbf{u})$  содержит по крайней мере две различные буквы, а условие (1.2) не выполняется. Тогда существуют такие буквы  $x, y \in \text{sim}(\mathbf{u})$ , что  $\ell_1(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, y)$  и  $\ell_1(\mathbf{v}, x) > \ell_1(\mathbf{v}, y)$ .

Подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , кроме  $x$  и  $y$ . Мы получим тождество  $xy \approx yx$ , что противоречит некоммутативности многообразия  $\mathbf{V}$ .  $\square$

**Предложение 1.17.** *Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{D}_1$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (1.1) и (1.2).*

*Доказательство. Необходимость.* Из включения  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{D}_1$  и предложения 1.6 следует, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  удовлетворяет условию (1.1). Поскольку многообразию  $\mathbf{D}_1$  является некоммутативным, из леммы 1.16 вытекает, что выполняется условие (1.2).

*Достаточность.* Предположим, что выполняются условия (1.1) и (1.2). Пусть  $\text{sim}(\mathbf{u}) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Без ограничения общности можно считать, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 y_1 \mathbf{u}_1 y_2 \mathbf{u}_2 \cdots y_m \mathbf{u}_m,$$

где  $\text{cop}(\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m) = \text{mul}(\mathbf{u})$ . Тогда из условия (1.1) следует, что  $\text{sim}(\mathbf{v}) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Далее, согласно условию (1.2),  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 y_1 \mathbf{v}_1 y_2 \mathbf{v}_2 \cdots y_m \mathbf{v}_m$ . Снова воспользуемся условием (1.1) и получим равенство  $\text{cop}(\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m) = \text{cop}(\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_m)$ . Теперь нетрудно заметить, что из системы тождеств

$$\{x^2 \approx x^3, x^2 y \approx x y x \approx y x^2\}$$

следуют тождества

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 y_1 \mathbf{u}_1 y_2 \mathbf{u}_2 \cdots y_m \mathbf{u}_m \approx \mathbf{v}_0 y_1 \mathbf{v}_1 y_2 \mathbf{v}_2 \cdots y_m \mathbf{v}_m = \mathbf{v},$$

откуда вытекает, что  $\mathbf{D}_1$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ .  $\square$

**Лемма 1.18.** *Если многообразие моноидов  $\mathbf{V}$  не вполне регулярно и не коммутативно, то  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$ .*

*Доказательство.* Возьмем произвольное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в многообразии  $\mathbf{V}$ . Из следствия 1.10 вытекает, что  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{V}$ , откуда следует, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполняется в  $\mathbf{C}_2$ . Тогда, согласно предложению 1.6, выполняется условие (1.1). Условие (1.2) вытекает из леммы 1.16 и некоммутативности многообразия  $\mathbf{V}$ . Нам остается применить предложение 1.17 и заключить, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполняется в многообразии  $\mathbf{D}_1$ .  $\square$

**Лемма 1.19.** *Если  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов и  $\mathbf{D}_{n+1} \not\subseteq \mathbf{X}$  для некоторого  $n$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству вида*

$$x y_1 x y_2 x \cdots x y_n x \approx x^{k_1} y_1 x^{k_2} y_2 x^{k_2} \cdots x^{k_n} y_n x^{k_{n+1}}, \quad (1.3)$$

где  $k_i > 1$  для некоторого  $i$ .

*Доказательство.* Если многообразие  $\mathbf{X}$  коммутативно, то оно удовлетворяет тождеству

$$x y_1 x y_2 x \cdots x y_n x \approx x^{n+1} y_1 y_2 \cdots y_n.$$



Если  $\mathbf{X}$  является вполне регулярным, то оно удовлетворяет тождеству  $x \approx x^m$  для некоторого  $m > 1$ . Ясно, что тогда в  $\mathbf{X}$  выполнено тождество

$$xy_1xy_2x \cdots xy_nx \approx x^m y_1xy_2x \cdots xy_nx.$$

Таким образом, нам остается рассмотреть ситуацию, когда  $\mathbf{X}$  не вполне регулярно и не коммутативно. Тогда из леммы 1.18 следует, что  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$ . В силу лемм 1.7 и 1.11,  $\mathbf{X}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $xy_1xy_2x \cdots xy_nx \approx \mathbf{w}$ . Применим теперь предложение 1.17 и получим, что

$$\mathbf{w} = x^{k_1}y_1x^{k_2}y_2x^{k_2} \cdots y_nx^{k_{n+1}}.$$

Если  $k_i > 1$  для некоторого  $i$ , то доказывать нечего. Предположим, что  $k_i \leq 1$  для всех  $i$ . Поскольку тождество  $xy_1xy_2x \cdots xy_nx \approx \mathbf{w}$  нетривиально, найдется такое  $1 \leq i \leq n + 1$ , что  $k_i = 0$ . Подставим  $xy_i$  вместо  $y_i$  в это тождество для всех  $i$ , для которых  $k_i = 0$ . Если  $k_{n+1} = 0$ , то умножим полученное тождество справа на  $x$ . В результате, мы получим тождество вида (1.3), где  $k_i > 1$  для некоторого  $i$ .  $\square$

## 1.2. $k$ -разложение слова и связанные с ним понятия

В этом разделе мы введем ряд понятий, связанных со словами, и изучим их свойства. Доказанные здесь результаты будут играть ключевую роль в наиболее сложной части доказательства теоремы 3.1 — разделе 3.4.

Если  $\mathbf{w}$  — слово, а  $x_1, x_2, \dots, x_k$  — буквы из  $\text{con}(\mathbf{w})$ , то обозначим через  $\mathbf{w}(x_1, x_2, \dots, x_k)$  слово, получающееся из  $\mathbf{w}$  удалением всех букв, кроме  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Пусть  $\mathbf{w}$  — слово и  $\text{sim}(\mathbf{w}) = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $\mathbf{w}(t_1, t_2, \dots, t_m) = t_1t_2 \cdots t_m$ . Тогда

$$\mathbf{w} = t_0\mathbf{w}_0t_1\mathbf{w}_1 \cdots t_m\mathbf{w}_m, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  — некоторые (возможно пустые) слова, а  $t_0 = \lambda$ . Слова  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  назовем *0-блоками* слова  $\mathbf{w}$ , а  $t_0, t_1, \dots, t_m$  — *0-разделителями* этого слова. Представление слова  $\mathbf{w}$  в виде произведения чередующихся 0-разделителей и 0-блоков, начиная с 0-разделителя  $t_0$  и заканчивая 0-блоком  $\mathbf{w}_m$ , будем называть *0-разложением* слова  $\mathbf{w}$ .

Пусть  $k$  — натуральное число. Определим  $k$ -разложение слова  $\mathbf{w}$  индукцией по  $k$ . Пусть (1.4) является  $(k - 1)$ -разложением слова  $\mathbf{w}$  с  $(k - 1)$ -блоками  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  и  $(k - 1)$ -разделителями  $t_0, t_1, \dots, t_m$ . Для каждого  $i = 0, 1, \dots, m$  обозначим через  $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ir_i}$  все простые буквы  $(k - 1)$ -блока  $\mathbf{w}_i$ , не входящие в запись слова  $\mathbf{w}_0t_1\mathbf{w}_1 \cdots t_{i-1}\mathbf{w}_{i-1}$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $\mathbf{w}_i(s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ir_i}) = s_{i1}s_{i2} \cdots s_{ir_i}$ . Тогда

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_{i0}s_{i1}\mathbf{v}_{i1}s_{i2}\mathbf{v}_{i2} \cdots s_{ir_i}\mathbf{v}_{ir_i} \quad (1.5)$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{v}_{i0}, \mathbf{v}_{i1}, \dots, \mathbf{v}_{ir_i}$ . Положим  $s_{i0} = t_i$ . Слова  $\mathbf{v}_{i0}, \mathbf{v}_{i1}, \dots, \mathbf{v}_{ir_i}$  назовем  *$k$ -блоками* слова  $\mathbf{w}$ , а буквы  $s_{i0}, s_{i1}, \dots, s_{ir_i}$  —  *$k$ -разделителями* этого слова.

**Замечание 1.20.** Заметим, что только первое вхождение буквы в слово может быть  $k$ -разделителем этого слова. Поэтому мы будем использовать ниже выражения вида «буква  $x$  является (или не является)  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ », имея в виду, что первое вхождение буквы  $x$  в  $\mathbf{w}$  обладает указанным свойством.

Для каждого  $i = 0, 1, \dots, m$  представим  $(k-1)$ -блок  $\mathbf{w}_i$  в виде (1.5). В результате мы получим представление слова  $\mathbf{w}$  в виде произведения чередующихся  $k$ -разделителей и  $k$ -блоков, начиная с  $k$ -разделителя  $s_{00} = t_0$  и заканчивая  $k$ -блоком  $\mathbf{v}_{mr_m}$ . Такое представление назовем  $k$ -разложением слова  $\mathbf{w}$ .

**Замечание 1.21.** Поскольку длина слова  $\mathbf{w}$  конечна, существует такое число  $k$ , что  $k$ -разложение слова  $\mathbf{w}$  совпадает с  $n$ -разложением этого слова для всех  $n > k$ .

Для удобства читателя проиллюстрируем введенные только что понятия следующим примером.

**Пример 1.22.** Положим  $\mathbf{w} = xyxzytszxs$ . Единственной простой буквой в слове  $\mathbf{w}$  является буква  $t$ . Следовательно, 0-разложение слова  $\mathbf{w}$  имеет вид

$$\lambda \cdot \underline{xyxzy} \cdot t \cdot \underline{szxs} \quad (1.6)$$

(в примере 1.22 мы будем подчеркивать блоки, чтобы отличать их от разделителей). Буква  $z$  является единственной простой буквой 0-блока  $xyxzy$ ; 0-блок  $szxs$  содержит две простые буквы, а именно  $z$  и  $x$ , но обе эти буквы встречаются в слове  $\mathbf{w}$  слева от этого блока. Следовательно, 1-разложение слова  $\mathbf{w}$  имеет вид

$$\lambda \cdot \underline{xyx} \cdot z \cdot \underline{y} \cdot t \cdot \underline{szxs}.$$

Аналогичным образом можно показать, что 2-разложение слова  $\mathbf{w}$  имеет вид

$$\lambda \cdot \underline{x} \cdot y \cdot \underline{x} \cdot z \cdot \underline{y} \cdot t \cdot \underline{szxs},$$

а  $k$ -разложение  $\mathbf{w}$  при  $k \geq 3$  — вид

$$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot x \cdot \underline{\lambda} \cdot y \cdot \underline{x} \cdot z \cdot \underline{y} \cdot t \cdot \underline{szxs}.$$

Для данного слова  $\mathbf{w}$ , буквы  $x \in \text{con}(\mathbf{w})$ , натурального числа  $i \leq \text{occ}_x(\mathbf{w})$  и  $k \geq 0$ , назовем  $(i, k)$ -ограничителем буквы  $x$  в слове  $\mathbf{w}$  и обозначим через  $h_i^k(\mathbf{w}, x)$  самый правый  $k$ -разделитель слова  $\mathbf{w}$ , предшествующий  $i$ -му вхождению  $x$  в  $\mathbf{w}$ . Это понятие иллюстрируется следующим примером.

**Пример 1.23.** Пусть  $\mathbf{w}$  — то же слово, что и в примере 1.22. Напомним, что 0-разложение слова  $\mathbf{w}$  имеет вид (1.6). Мы видим, что самым правым 0-разделителем слова  $\mathbf{w}$ , предшествующим первым двум вхождениям  $x$ , обоим вхождениям  $y$  и первым вхождениям  $z$  и  $t$ , является пустое слово  $\lambda$ . Самым правым 0-разделителем слова  $\mathbf{w}$ , предшествующим третьему вхождению  $x$ , второму вхождению  $z$  и обоим вхождениям  $s$ , является  $t$ . Это означает, что  $h_1^0(\mathbf{w}, x) = h_2^0(\mathbf{w}, x) = \lambda$ ,  $h_3^0(\mathbf{w}, x) = t$ ,  $h_1^0(\mathbf{w}, y) = h_2^0(\mathbf{w}, y) = \lambda$ ,  $h_1^0(\mathbf{w}, z) = \lambda$ ,  $h_2^0(\mathbf{w}, z) = t$ ,  $h_1^0(\mathbf{w}, s) = h_2^0(\mathbf{w}, s) = t$  и  $h_1^0(\mathbf{w}, t) = \lambda$ . Аналогичным образом, основываясь на примере 1.22, легко вычислить все остальные ограничители букв в слове  $\mathbf{w}$ . Все они приведены в табл. 1.

Таблица 1: ограничители букв слова  $xyzzytszxs$

| $a$ | $k$      | $i$ | $h_i^k(\mathbf{w}, a)$ | $a$       | $k$      | $i$      | $h_i^k(\mathbf{w}, a)$ |     |
|-----|----------|-----|------------------------|-----------|----------|----------|------------------------|-----|
| $x$ | 0        | 1   | $\lambda$              | $z$       | 0        | 1        | $\lambda$              |     |
|     |          | 2   | $\lambda$              |           |          | 2        | $t$                    |     |
|     |          | 3   | $t$                    |           |          | 1        | $\lambda$              |     |
|     | 1        | 1   | $\lambda$              |           | 2        | $t$      |                        |     |
|     |          | 2   | $\lambda$              |           | 2        | 1        | $y$                    |     |
|     |          | 3   | $t$                    |           |          | 2        | $t$                    |     |
|     | 2        | 1   | $\lambda$              |           | $\geq 3$ | 1        | $y$                    |     |
|     |          | 2   | $y$                    |           |          | 2        | $t$                    |     |
|     |          | 3   | $t$                    |           |          | 0        | 1                      | $t$ |
|     | $\geq 3$ | 1   | $\lambda$              |           | $s$      | 2        | $t$                    |     |
|     |          | 2   | $y$                    |           |          | 1        | 1                      | $t$ |
|     |          | 3   | $t$                    |           |          |          | 2                      | $t$ |
| 0   |          | 1   | $\lambda$              | 2         |          | 1        | $t$                    |     |
|     |          | 2   | $\lambda$              |           |          | 2        | $t$                    |     |
| $y$ |          | 1   | 1                      | $\lambda$ |          | $\geq 3$ | 1                      | $t$ |
|     | 2        |     | $z$                    | 2         | $t$      |          |                        |     |
|     | 2        | 1   | $\lambda$              | $t$       | 0        | 1        | $\lambda$              |     |
|     |          | 2   | $z$                    |           | 1        | 1        | $z$                    |     |
|     | $\geq 3$ | 1   | $x$                    |           | 2        | 1        | $z$                    |     |
|     |          | 2   | $z$                    |           | $\geq 3$ | 1        | $z$                    |     |

**Лемма 1.24.** Пусть  $\mathbf{w}$  — слово,  $t$  — буква, а  $k$  и  $r$  — такие числа, что  $r < k$ .

- (i) Если  $t$  является  $r$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ , то  $t$  является также  $k$ -разделителем этого слова.
- (ii) Если  $h_1^k(\mathbf{w}, x) = h_2^k(\mathbf{w}, x)$ , то  $h_1^r(\mathbf{w}, x) = h_2^r(\mathbf{w}, x)$ .
- (iii) Если  $t_0\mathbf{w}_0t_1\mathbf{w}_1 \cdots t_m\mathbf{w}_m$  —  $k$ -разложение слова  $\mathbf{w}$  и  $m > 0$ , то  $t_m \in \text{sim}(\mathbf{w})$ .

*Доказательство.* Утверждения (i) и (ii) очевидны. Проверим утверждение (iii). Предположим, что  $t_m \in \text{mul}(\mathbf{w})$ . Тогда  $t_m$  не является 0-разделителем слова  $\mathbf{w}$ . Пусть  $p$  — наименьшее натуральное число, для которого  $t_m$  является  $p$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ . Очевидно, что  $p \leq k$ .

Предположим, что  $h_1^{p-1}(\mathbf{w}, t_m) = h_2^{p-1}(\mathbf{w}, t_m)$ . Это означает, что в слове  $\mathbf{w}$  не существует  $(p-1)$ -разделителей между первым и вторым вхождением  $t_m$  в  $\mathbf{w}$ . Иными словами, первое и второе вхождения буквы  $t_m$  в слово  $\mathbf{w}$  лежат в одном и том же  $(p-1)$ -блоке этого слова. Следовательно, буква  $t_m$  не является простой в этом  $(p-1)$ -блоке. В частности, она не может быть  $p$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ , что противоречит выбору  $t_m$ . Таким образом,  $h_1^{p-1}(\mathbf{w}, t_m) \neq h_2^{p-1}(\mathbf{w}, t_m)$ . Отметим, что рассуждения данного абзаца очень

типичны. Мы много раз будем использовать аналогичные рассуждения, не расписывая их так подробно.

Заметим, что  $t_m \neq h_2^{p-1}(\mathbf{w}, t_m)$ , так как буква  $t_m$  не является  $(p-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ . Положим  $t_{m+1} = h_2^{p-1}(\mathbf{w}, t_m)$ . Поскольку  $p-1 < k$ , из утверждения (i) следует, что  $t_{m+1}$  является  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ . Последним  $k$ -разделителем этого слова является буква  $t_m$ . Следовательно, первое вхождение  $t_{m+1}$  в слово  $\mathbf{w}$  предшествует первому вхождению  $t_m$  в это слово. Но тогда  $h_1^{p-1}(\mathbf{w}, t_m) = t_{m+1} = h_2^{p-1}(\mathbf{w}, t_m)$ , что противоречит доказанному в предыдущем абзаце.  $\square$

Для данного слова  $\mathbf{w}$  и буквы  $x \in \text{con}(\mathbf{w})$  определим некоторое число, которое назовем *глубиной* буквы  $x$  в слове  $\mathbf{w}$ , и обозначим его через  $D(\mathbf{w}, x)$ . Если  $x \in \text{sim}(\mathbf{w})$ , то положим  $D(\mathbf{w}, x) = 0$ . Предположим, что  $x \in \text{mul}(\mathbf{w})$ . Если найдется такое натуральное  $k$ , что первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{w}$  лежат в различных  $(k-1)$ -блоках слова  $\mathbf{w}$ , то глубину буквы  $x$  в слове  $\mathbf{w}$  положим равной наименьшему числу с таким свойством. Если же для любого  $k$  первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{w}$  лежат в одном и том же  $k$ -блоке слова  $\mathbf{w}$ , то положим  $D(\mathbf{w}, x) = \infty$ . Иными словами,  $D(\mathbf{w}, x) = k$  тогда и только тогда, когда  $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$  и  $k$  — наименьшее число с таким свойством, а  $D(\mathbf{w}, x) = \infty$  тогда и только тогда, когда  $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x) = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$  для любого  $k$ . Определение глубины буквы в слове проиллюстрируем следующим примером.

**Пример 1.25.** Пусть  $\mathbf{w}$  — то же слово, что в примерах 1.22 и 1.23, т.е.  $\mathbf{w} = xyxzytszxs$ . Используя информацию об ограничителях букв в слове  $\mathbf{w}$  из табл. 1, вычислим глубину всех букв в этом слове. Поскольку  $h_1^k(\mathbf{w}, x) = \lambda$  для всех  $k$ , а  $h_2^0(\mathbf{w}, x) = h_2^1(\mathbf{w}, x) = \lambda$  и  $h_2^2(\mathbf{w}, x) = y$ , мы имеем, что  $D(\mathbf{w}, x) = 3$ . Далее,  $h_1^0(\mathbf{w}, y) = h_2^0(\mathbf{w}, y) = \lambda$ ,  $h_1^1(\mathbf{w}, y) = \lambda$  и  $h_2^1(\mathbf{w}, y) = z$ . Следовательно,  $D(\mathbf{w}, y) = 2$ . Из равенств  $h_1^0(\mathbf{w}, z) = \lambda$  и  $h_2^0(\mathbf{w}, z) = t$  вытекает, что  $D(\mathbf{w}, z) = 1$ . Далее, поскольку  $h_1^k(\mathbf{w}, s) = h_2^k(\mathbf{w}, s) = t$  для всех  $k \geq 0$ , мы имеем, что  $D(\mathbf{w}, s) = \infty$ . Наконец,  $D(\mathbf{w}, t) = 0$ , так как  $t \in \text{sim}(\mathbf{w})$ .

Следующее утверждение мы часто будем использовать в дальнейших рассуждениях.

**Лемма 1.26.** *Буква  $t$  является  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$  тогда и только тогда, когда  $D(\mathbf{w}, t) \leq k$ .*

*Доказательство.* Если  $k = 0$ , то утверждение очевидно, поскольку свойство буквы  $t$  быть 0-разделителем слова  $\mathbf{w}$  и равенство  $D(\mathbf{w}, t) = 0$  эквивалентны свойству буквы  $t$  быть простой в слове  $\mathbf{w}$ . Далее, если  $k > 0$ , то  $t$  является  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$  тогда и только тогда, когда первое и второе вхождения  $t$  в  $\mathbf{w}$  лежат в различных  $(k-1)$ -блоках слова  $\mathbf{w}$ . В свою очередь, последнее утверждение эквивалентно неравенству  $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, t) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{w}, t)$ , т.е. утверждению, что  $D(\mathbf{w}, t) \leq k$ .  $\square$

Слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  назовем  *$k$ -эквивалентными*, если они имеют одинаковые наборы  $k$ -разделителей, и эти  $k$ -разделители появляются в  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  в одинаковом порядке.

**Лемма 1.27.** Пусть  $k$  — целое неотрицательное число. Слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются  $k$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.1) и для любого  $x \in \text{con}(\mathbf{uv})$  такого, что либо  $D(\mathbf{u}, x) \leq k$ , либо  $D(\mathbf{v}, x) \leq k$ , выполняется равенство  $h_1^k(\mathbf{u}, x) = h_1^k(\mathbf{v}, x)$ .

*Доказательство. Достаточность.* Предположим, что

$$t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_m \mathbf{u}_m \quad (1.7)$$

и  $s_0 \mathbf{v}_0 s_1 \mathbf{v}_1 \cdots s_r \mathbf{v}_r$  являются  $k$ -разложениями слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно. Ясно, что  $t_0 = s_0 = \lambda$ . Если  $m = r = 0$ , то требуемый факт очевиден. Пусть теперь  $m > 0$ . По лемме 1.26,  $D(\mathbf{u}, t_i) \leq k$  для любого  $1 \leq i \leq m$ . Тогда  $t_{i-1} = h_1^k(\mathbf{u}, t_i) = h_1^k(\mathbf{v}, t_i)$  для любого  $1 \leq i \leq m$ , откуда следует, что  $t_{i-1}$  является  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{v}$ . Согласно лемме 1.24(iii),  $t_m \in \text{sim}(\mathbf{u})$ . Тогда из условия (1.1) следует, что  $t_m \in \text{sim}(\mathbf{v})$ , откуда получаем, что  $t_m$  является 0-разделителем слова  $\mathbf{v}$ . По лемме 1.24(i),  $t_m$  является также  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{v}$ . Таким образом, буквы  $t_1, t_2, \dots, t_m$  являются  $k$ -разделителями слова  $\mathbf{v}$ . В частности, отсюда вытекает, что  $m \leq r$ . В силу симметрии,  $r \leq m$ . Таким образом, мы доказали, что  $m = r$  и  $\{t_1, t_2, \dots, t_m\} = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ . Ясно, что  $t_1$  совпадает с  $s_p$  для некоторого  $p$ . Если  $p \neq 1$ , то  $h_1^k(\mathbf{v}, t_1) \neq t_0$ . Это противоречит тому, что  $h_1^k(\mathbf{v}, t_1) = h_1^k(\mathbf{u}, t_1) = t_0$ . Таким образом,  $p = 1$  и, следовательно,  $t_1 = s_1$ . Используя индукцию, легко проверить, что  $t_j = s_j$  для любого  $j \leq m$ .

*Необходимость.* Предположим, что (1.7) —  $k$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда  $k$ -разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид

$$t_0 \mathbf{v}_0 t_1 \mathbf{v}_1 \cdots t_m \mathbf{v}_m. \quad (1.8)$$

Пусть  $x \in \text{con}(\mathbf{u})$  и  $D(\mathbf{u}, x) \leq k$ . Из леммы 1.26 следует, что  $x = t_i$  для некоторого  $1 \leq i \leq m$ . Следовательно,  $h_1^k(\mathbf{v}, x) = h_1^k(\mathbf{u}, x) = t_{i-1}$ . Аналогичным образом можно проверить, что если  $x \in \text{con}(\mathbf{v})$  и  $D(\mathbf{v}, x) \leq k$ , то  $h_1^k(\mathbf{v}, x) = h_1^k(\mathbf{u}, x)$ .  $\square$

**Лемма 1.28.** Пусть  $k$  — натуральное число,  $\mathbf{w}$  — слово,  $x$  — кратная в нем буква, а  $t$  —  $(k-1)$ -разделитель этого слова. Предположим, что  $D(\mathbf{w}, x) = k$ .

- (i) Если  $t = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$ , то  $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t)$ .
- (ii) Если  $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_2(\mathbf{w}, x)$ , то  $D(\mathbf{w}, t) = k - 1$ ; если, кроме того,  $k > 1$ , то  $\ell_2(\mathbf{w}, x) < \ell_2(\mathbf{w}, t)$ .

*Доказательство.* (i) Предположим, что  $\ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_1(\mathbf{w}, x)$ . Тогда, поскольку  $t = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$ , имеем  $t = h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x)$ . Следовательно,  $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x) = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$ . Но это противоречит равенству  $D(\mathbf{w}, x) = k$ . Таким образом,  $\ell_1(\mathbf{w}, x) \leq \ell_1(\mathbf{w}, t)$ . Поскольку  $t$  —  $(k-1)$ -разделитель, из леммы 1.26 вытекает, что  $D(\mathbf{w}, t) \leq k - 1$ . Тогда  $D(\mathbf{w}, t) \neq D(\mathbf{w}, x)$ , откуда получаем, что  $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t)$ .

(ii) Предположим, что  $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_2(\mathbf{w}, x)$ . Положим  $r = D(\mathbf{w}, t)$ . В силу леммы 1.26,  $r \leq k - 1$ . Предположим, что  $D(\mathbf{w}, t) = r <$

$k - 1$ . Тогда, по лемме 1.26,  $t$  является  $r$ -разделителем. Следовательно,  $t = h_2^r(\mathbf{w}, x)$ . Далее,  $t \neq h_1^r(\mathbf{w}, x)$ , так как  $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t)$ . Таким образом,  $h_1^r(\mathbf{w}, x) \neq h_2^r(\mathbf{w}, x)$ . Это означает, что  $D(\mathbf{w}, x) \leq r + 1 < k$ , что противоречит условию. Следовательно,  $D(\mathbf{w}, t) = k - 1$ .

Пусть теперь  $k > 1$ . Тогда  $t \in \text{mul}(\mathbf{w})$ . Предположим, что  $\ell_2(\mathbf{w}, t) < \ell_2(\mathbf{w}, x)$ . Положим  $s = h_2^{k-2}(\mathbf{w}, t)$ . В силу утверждения (i), имеем  $\ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_1(\mathbf{w}, s)$ . Теперь, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из предыдущего абзаца, мы можем показать, что  $D(\mathbf{w}, s) = k - 2$ . Тогда, по лемме 1.26,  $s$  является  $(k - 2)$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ . Выбор  $s$  гарантирует, что первое вхождение  $s$  в  $\mathbf{w}$  предшествует второму вхождению  $t$ . С другой стороны, второе вхождение  $t$  предшествует второму вхождению  $x$ . Следовательно, первое вхождение  $s$  предшествует второму вхождению  $x$ . В то же время, первое вхождение  $x$  предшествует первому вхождению  $s$ , поскольку  $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_1(\mathbf{w}, s)$ . Следовательно, первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{w}$  лежат в разных  $(k - 2)$ -блоках. Отсюда вытекает, что  $D(\mathbf{w}, x) \leq k - 1$ , что противоречит условию.  $\square$

**Лемма 1.29.** Пусть  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — слова, а  $\ell$  — натуральное число. Предположим, что выполнено условие (1.1) и

$$h_i^{\ell-1}(\mathbf{u}, x) = h_i^{\ell-1}(\mathbf{v}, x) \text{ для всех } x \in \text{con}(\mathbf{u}) \text{ и } i = 1, 2. \quad (1.9)$$

Тогда слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  имеют одинаковый набор  $\ell$ -разделителей.

*Доказательство.* Пусть  $t$  — произвольный  $\ell$ -разделитель слова  $\mathbf{u}$ . Если  $t \in \text{sim}(\mathbf{u})$ , то из условия (1.1) вытекает, что  $t \in \text{sim}(\mathbf{v})$ . Тогда  $t$  является 0-разделителем слова  $\mathbf{v}$ , а значит, по лемме 1.24(i), и  $\ell$ -разделителем этого слова. Предположим теперь, что  $t \in \text{mul}(\mathbf{u})$ . Тогда из условия (1.1) вытекает, что  $t \in \text{mul}(\mathbf{v})$ . Поскольку  $t$  —  $\ell$ -разделитель слова  $\mathbf{u}$ , получаем, что  $h_1^{\ell-1}(\mathbf{u}, t) \neq h_2^{\ell-1}(\mathbf{u}, t)$ . Тогда, согласно условию (1.9),  $h_1^{\ell-1}(\mathbf{v}, t) \neq h_2^{\ell-1}(\mathbf{v}, t)$ . Следовательно,  $t$  является  $\ell$ -разделителем слова  $\mathbf{v}$ . Аналогично можно показать, что если некоторая буква является  $\ell$ -разделителем слова  $\mathbf{v}$ , то она также является  $\ell$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ .  $\square$

**Лемма 1.30.** Пусть  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — слова, а  $k$  — натуральное число. Предположим, что выполнены условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = k$ . Тогда условие (1.9) выполняется также при  $\ell = s$  для любого  $1 \leq s \leq k$ .

*Доказательство.* Если  $k = 1$ , то доказывать нечего. Предположим, что  $k > 1$ . Пусть (1.7) —  $(k - 1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда, по лемме 1.27,  $(k - 1)$ -разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид (1.8). Пусть  $s$  — наименьшее число такое, что  $s < k$  и не выполняется условие (1.9) при  $\ell = s$ . Тогда существует такая буква  $x$ , что  $h_i^{s-1}(\mathbf{u}, x) \neq h_i^{s-1}(\mathbf{v}, x)$  для некоторого  $i \in \{1, 2\}$ . Из определения  $(i, s - 1)$ -ограничителя следует, что  $h_i^{s-1}(\mathbf{u}, x)$  и  $h_i^{s-1}(\mathbf{v}, x)$  являются некоторыми  $(s - 1)$ -разделителями слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно. Из леммы 1.24(i) следует, что  $(s - 1)$ -разделители слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются также  $(k - 1)$ -разделителями этих слов. Тогда  $h_i^{s-1}(\mathbf{u}, x) = t_p$  и  $h_i^{s-1}(\mathbf{v}, x) = t_q$  для некоторых  $p \neq q$ . Без ограничения общности можно считать, что  $p < q$ . Тогда, согласно условию,  $h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x) = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$ , откуда следует,

что  $h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x) = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x) = t_n$  для некоторого  $n$ . Ясно, что  $n \geq q$ , так как  $s < k$ . Поскольку  $t_p$  является  $(i, s-1)$ -ограничителем буквы  $x$  в слове  $\mathbf{u}$ , не существует  $(s-1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$  между первым вхождением  $t_p$  и  $i$ -м вхождением  $x$  в  $\mathbf{u}$ . В частности, это означает, что  $t_q$  не является  $(s-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Тогда из леммы 1.26 вытекает, что  $D(\mathbf{u}, t_q) > s-1 \geq 0$ . Следовательно,  $t_q \in \text{mul}(\mathbf{u})$ . Если  $s = 1$ , то  $t_q$  является 0-разделителем слова  $\mathbf{v}$ , откуда следует, что  $t_q$  — простая в  $\mathbf{v}$  буква. Это противоречит условию (1.1). Таким образом,  $s > 1$ . Это означает, что  $h_1^{s-2}(\mathbf{u}, t_q) = h_2^{s-2}(\mathbf{u}, t_q)$ . Поскольку условие (1.9) выполнено при  $\ell = s-1$ , мы имеем, что  $h_1^{s-2}(\mathbf{v}, t_q) = h_2^{s-2}(\mathbf{v}, t_q)$ . По лемме 1.24(ii),  $h_1^{r-2}(\mathbf{v}, t_q) = h_2^{r-2}(\mathbf{v}, t_q)$  для всех  $r \leq s$ , откуда следует, что  $D(\mathbf{v}, t_q) > s-1$ . Тогда из леммы 1.26 вытекает, что  $t_q$  не является  $(s-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{v}$ , что противоречит равенству  $t_q = h_i^{s-1}(\mathbf{v}, x)$ .  $\square$

**Лемма 1.31.** Пусть  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — слова, а  $k$  — натуральное число. Предположим, что выполнены условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = k$ . Тогда  $D(\mathbf{u}, x) = k$  тогда и только тогда, когда  $D(\mathbf{v}, x) = k$  для любого  $x \in \text{con}(\mathbf{u})$ .

*Доказательство.* Ввиду леммы 1.30, условие (1.9) выполняется при  $\ell = s$  для любого  $1 \leq s \leq k$ . Предположим, что  $D(\mathbf{u}, x) = k$ . Тогда

$$h_1^{s-1}(\mathbf{v}, x) = h_1^{s-1}(\mathbf{u}, x) = h_2^{s-1}(\mathbf{u}, x) = h_2^{s-1}(\mathbf{v}, x)$$

при  $1 \leq s < k$ , но

$$h_1^{k-1}(\mathbf{v}, x) = h_1^{k-1}(\mathbf{u}, x) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{u}, x) = h_2^{k-1}(\mathbf{v}, x).$$

Следовательно,  $D(\mathbf{v}, x) = k$ . В силу симметрии, из равенства  $D(\mathbf{v}, x) = k$  вытекает равенство  $D(\mathbf{u}, x) = k$ .  $\square$

**Лемма 1.32.** Пусть  $\mathbf{w}$  — слово,  $r > 1$  — натуральное число, а  $y$  — такая буква, что  $D(\mathbf{w}, y) = r-2$ . Тогда если  $\ell_1(\mathbf{w}, z) < \ell_1(\mathbf{w}, y)$  для некоторой буквы  $z$ , удовлетворяющей неравенству  $D(\mathbf{w}, z) \geq r$ , то  $\ell_2(\mathbf{w}, z) < \ell_1(\mathbf{w}, y)$ .

*Доказательство.* Пусть  $z$  — такая буква, что  $D(\mathbf{w}, z) \geq r$  и  $\ell_1(\mathbf{w}, z) < \ell_1(\mathbf{w}, y)$ . Из леммы 1.26 следует, что  $y$  является  $(r-2)$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ . Предположим, что  $\ell_1(\mathbf{w}, y) < \ell_2(\mathbf{w}, z)$ . Это означает, что  $(r-2)$ -разделитель  $y$  находится между первым и вторым вхождениями  $z$  в  $\mathbf{w}$ , что противоречит равенству  $h_1^{r-2}(\mathbf{w}, z) = h_2^{r-2}(\mathbf{w}, z)$ . Случай, когда  $\ell_1(\mathbf{w}, y) = \ell_2(\mathbf{w}, z)$ , очевидно, невозможен. Следовательно,  $\ell_2(\mathbf{w}, z) < \ell_1(\mathbf{w}, y)$ .  $\square$

Ниже, чтобы облегчить понимание наших рассуждений, мы иногда будем писать над буквой в скобках число, равное номеру вхождения этой буквы в данное слово; например, мы можем написать

$$\mathbf{w} = x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(2)} x_3^{(1)} x_2^{(2)} x_1^{(3)}.$$

**Лемма 1.33.** Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, а  $s$  — натуральное число. Предположим, что выполнены условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = s$  и существует такая буква  $x_s$ , что  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$ . Тогда найдутся такие буквы

$x_0, x_1, \dots, x_{s-1}$ , что  $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$  для всех  $0 \leq r < s$  и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{2s+1} \overset{(1)}{x_s} \mathbf{u}_{2s} \overset{(1)}{x_{s-1}} \mathbf{u}_{2s-1} \overset{(2)}{x_s} \mathbf{u}_{2s-2} \overset{(1)}{x_{s-2}} \mathbf{u}_{2s-3} \overset{(2)}{x_{s-1}} \mathbf{u}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{s-3}} \\
& \cdot \mathbf{u}_{2s-5} \overset{(2)}{x_{s-2}} \cdots \mathbf{u}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{u}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{u}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{u}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{u}_0 \\
\approx & \mathbf{v}_{2s+1} \overset{(1)}{x_s} \mathbf{v}_{2s} \overset{(1)}{x_{s-1}} \mathbf{v}_{2s-1} \overset{(2)}{x_s} \mathbf{v}_{2s-2} \overset{(1)}{x_{s-2}} \mathbf{v}_{2s-3} \overset{(2)}{x_{s-1}} \mathbf{v}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{s-3}} \\
& \cdot \mathbf{v}_{2s-5} \overset{(2)}{x_{s-2}} \cdots \mathbf{v}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{v}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{v}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{v}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{v}_0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

для некоторых слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2s+1}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2s+1}$ .

*Доказательство.* В силу леммы 1.30, условие (1.9) выполнено при  $\ell = r$  для всех  $1 \leq r \leq s$ . Мы будем многократно использовать этот факт ниже без явных ссылок на него.

Положим  $x_{s-1} = h_2^{s-1}(\mathbf{u}, x_s)$ . Из условия (1.9) при  $\ell = s$  следует, что  $h_2^{s-1}(\mathbf{v}, x_s) = h_2^{s-1}(\mathbf{u}, x_s) = x_{s-1}$ . В силу леммы 1.28,  $D(\mathbf{u}, x_{s-1}) = s-1$  и  $\ell_j(\mathbf{u}, x_s) < \ell_j(\mathbf{u}, x_{s-1})$  для любого  $j = 1, 2$ . Напомним, что  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$ . Тогда, по лемме 1.31,  $D(\mathbf{v}, x_s) = s$ . Снова применим лемму 1.28 и получим, что  $D(\mathbf{v}, x_{s-1}) = s-1$  и  $\ell_j(\mathbf{v}, x_s) < \ell_j(\mathbf{v}, x_{s-1})$  для любого  $j = 1, 2$ .

Далее, положим  $x_{s-2} = h_2^{s-2}(\mathbf{u}, x_{s-1})$ . По лемме 1.28,  $D(\mathbf{u}, x_{s-2}) = s-2$  и  $\ell_j(\mathbf{u}, x_{s-1}) < \ell_j(\mathbf{u}, x_{s-2})$  для любого  $j = 1, 2$ . Тогда из условия (1.9) при  $\ell = s-1$  вытекает, что  $h_2^{s-2}(\mathbf{v}, x_{s-1}) = h_2^{s-2}(\mathbf{u}, x_{s-1}) = x_{s-2}$ . Снова применим лемму 1.28 и получим, что  $D(\mathbf{v}, x_{s-2}) = s-2$  и  $\ell_j(\mathbf{v}, x_{s-1}) < \ell_j(\mathbf{v}, x_{s-2})$  для любого  $j = 1, 2$ . Поскольку  $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$ , из леммы 1.32 следует, что  $\ell_2(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\ell_2(\mathbf{v}, x_s) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{s-2})$ .

Продолжая эти рассуждения, мы определим одну за другой буквы  $x_r = h_2^r(\mathbf{u}, x_{r+1})$  для всех  $r = s-3, s-4, \dots, 1$  и докажем, что  $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$ ,  $\ell_2(\mathbf{u}, x_{r+2}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_r)$ ,  $\ell_2(\mathbf{v}, x_{r+2}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_r)$ ,  $\ell_j(\mathbf{u}, x_{r+1}) < \ell_j(\mathbf{u}, x_r)$  и  $\ell_j(\mathbf{v}, x_{r+1}) < \ell_j(\mathbf{v}, x_r)$  для любого  $j = 1, 2$ .

Наконец, положим  $x_0 = h_2^0(\mathbf{u}, x_1)$ . Ввиду леммы 1.28,  $D(\mathbf{u}, x_0) = 0$  и  $\ell_1(\mathbf{u}, x_1) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$ . Из условия (1.9) при  $\ell = 1$  следует, что  $h_2^0(\mathbf{v}, x_1) = h_2^0(\mathbf{u}, x_1) = x_0$ . Снова применим лемму 1.28 и получим, что  $D(\mathbf{v}, x_0) = 0$  и  $\ell_1(\mathbf{v}, x_1) < \ell_1(\mathbf{v}, x_0)$ . Поскольку  $\ell_1(\mathbf{u}, x_2) < \ell_1(\mathbf{u}, x_1) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$ , из леммы 1.32 следует, что  $\ell_2(\mathbf{u}, x_2) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\ell_2(\mathbf{v}, x_2) < \ell_1(\mathbf{v}, x_0)$ .

Из вышесказанного следует, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид (1.10) для некоторых слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2s+1}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2s+1}$ .  $\square$

**Лемма 1.34.** Пусть  $\mathbf{w} = y_1 y_2 \cdots y_n$  — слово, где буквы  $y_1, y_2, \dots, y_n$  не обязательно попарно различны. Предположим, что  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' \xi(\mathbf{w}) \mathbf{u}''$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{u}''$  и некоторого эндоморфизма  $\xi \in \text{End}(F^1)$ . Положим  $\mathbf{w}_i = \xi(y_i)$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Если  $D(\mathbf{w}, y_i) > 0$ , то подслово  $\mathbf{w}_i$  слова  $\mathbf{u}$  не содержит никаких  $r$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$  для всех  $r < D(\mathbf{w}, y_i)$ .

*Доказательство.* Пусть  $1 \leq i \leq n$  и  $D(\mathbf{w}, y_i) > 0$ . Тогда  $y_i \in \text{mul}(\mathbf{w})$ , откуда вытекает, что  $\text{con}(\mathbf{w}_i) \subseteq \text{mul}(\xi(\mathbf{w})) \subseteq \text{mul}(\mathbf{u})$ . Следовательно, подслово



$\mathbf{w}_i$  не содержит никаких 0-разделителей слова  $\mathbf{u}$ . Пусть теперь  $r > 0$  — наименьшее число, для которого найдется такое  $i$ , что  $D(\mathbf{w}, y_i) > r$ , но подслово  $\mathbf{w}_i$  содержит некоторый  $r$ -разделитель  $t$  слова  $\mathbf{u}$ . Из выбора  $r$  и леммы 1.26 следует, что  $D(\mathbf{u}, t) = r$ . Ясно, что  $t \notin \text{con}(\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_{i-1})$ , откуда, в частности, следует, что буква  $y_i$  не совпадает ни с одной из букв  $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$ . Поскольку  $y_i \in \text{mul}(\mathbf{w})$ , существует такое  $j \geq i$ , что  $\mathbf{w}_j$  содержит второе вхождение буквы  $t$  в  $\mathbf{u}$ . Положим  $x = h_2^{r-1}(\mathbf{u}, t)$ . В силу леммы 1.28(i),  $\ell_1(\mathbf{u}, t) < \ell_1(\mathbf{u}, x)$ . Тогда найдется такое  $i \leq \ell \leq j$ , что  $\mathbf{w}_\ell$  содержит  $(r-1)$ -разделитель  $x$  слова  $\mathbf{u}$ . Ввиду выбора числа  $r$ , мы имеем, что  $D(\mathbf{w}, y_\ell) \leq r-1$ . Следовательно, что  $y_i \neq y_\ell$ , откуда получаем, что  $\ell_1(\mathbf{w}, y_i) < \ell_1(\mathbf{w}, y_\ell)$ . Далее, поскольку  $y_i \in \text{mul}(\mathbf{w})$ , существует  $p \geq j$  такое, что  $y_i = y_p$ . Заметим, что  $\ell < p$ , поскольку  $y_p = y_i \neq y_\ell$ . Таким образом, мы получаем, что  $\ell_1(\mathbf{w}, y_i) < \ell_1(\mathbf{w}, y_\ell) < \ell_2(\mathbf{w}, y_i)$ . Заметим, что из леммы 1.26 следует, что  $y_\ell$  является  $(r-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{w}$ . Это означает, что  $h_1^{r-1}(\mathbf{w}, y_i) \neq h_2^{r-1}(\mathbf{w}, y_i)$ . Получаем противоречие с леммой 1.26 и неравенством  $D(\mathbf{w}, y_i) > r$ .  $\square$

## § 2. Отсутствие нетривиальных тождеств

Первым основным результатом диссертации является

**Теорема 2.1.** *Решетка  $\mathbb{O}\mathbb{C}$  надкоммутативных многообразий моноидов не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.*

Очевидно, что из теоремы 2.1 вытекает

**Следствие 2.2.** *Решетка  $\mathbb{M}\mathbb{O}\mathbb{N}$  не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.*  $\square$

Для того, чтобы доказать теорему 2.1, нам понадобятся некоторые определения, обозначения и один вспомогательный результат.

Как обычно, главный идеал решетки  $L$ , порожденный элементом  $a \in L$ , обозначим через  $(a)_L$ , а решетку разбиений множества  $X$  — через  $\text{Part}(X)$ . Через  $L_{\text{FIC}}(F^1)$  обозначим решетку всех вполне инвариантных конгруэнций на  $F^1$ , а через  $\text{FIC}(\mathbf{V})$  — вполне инвариантную конгруэнцию на  $F^1$ , отвечающую многообразию моноидов  $\mathbf{V}$ . Общеизвестно, что отображение  $\text{FIC}$  из  $\mathbb{M}\mathbb{O}\mathbb{N}$  в  $L_{\text{FIC}}(F^1)$ , ставящее в соответствие многообразию  $\mathbf{V}$  вполне инвариантную конгруэнцию  $\text{FIC}(\mathbf{V})$ , является антиизоморфизмом решеток. Для любых  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F$  положим  $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ , если  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\xi(\mathbf{u})\mathbf{b}$  для некоторых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^1$  и некоторого  $\xi \in \text{End}(F)$ . Определенное таким образом отношение  $\leq$  является отношением квазипорядка на  $F$ . Для произвольной антицепи  $A \subseteq F$  рассмотрим множество  $L_A$  всех многообразий моноидов  $\mathbf{V}$ , для которых  $A$  является объединением  $\text{FIC}(\mathbf{V})$ -классов. Определим отображение  $\varphi_A: L_A \rightarrow \text{Part}(A)$  правилом  $\varphi_A(\mathbf{V}) = \text{FIC}(\mathbf{V})|_A$  для любого  $\mathbf{V} \in L_A$ .

Ключевую роль в доказательстве теоремы 2.1 играет следующая лемма, доказательство которой во многом аналогично доказательству леммы 3 работы [17].

**Лемма 2.3.** *Пусть  $A$  — произвольная антицепь в  $F$  и для любых двух слов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$  и любого непустого множества  $X \subseteq \text{con}(\mathbf{u})$  выполнены равенства  $\text{con}(\mathbf{u}) = \text{con}(\mathbf{v})$  и  $\mathbf{u}_X = \mathbf{v}_X$ . Тогда:*

- (i) *множество  $L_A$  является подрешеткой решетки  $\mathbb{M}\mathbb{O}\mathbb{N}$ ;*
- (ii) *отображение  $\varphi_A$  является антигомоморфизмом решетки  $L_A$  на решетку  $\text{Part}(A)$ ;*
- (iii) *для любого разбиения  $\beta \in \text{Part}(A)$  существует надкоммутативное многообразие моноидов  $\mathbf{V} \in L_A$  такое, что  $\varphi_A(\mathbf{V}) = \beta$ .*

*Доказательство.* (i) Рассмотрим разбиение  $\alpha$  моноида  $F^1$  на два класса:  $A$  и  $F^1 \setminus A$ . Его главный идеал  $(\alpha)_{\text{Part}(F^1)}$  состоит из всех разбиений  $\beta$  таких, что  $A$  является объединением  $\beta$ -классов. Из этого наблюдения и определения множества  $L_A$  следует, что  $L_A$  является прообразом подрешетки  $(\alpha)_{\text{Part}(F^1)} \cap L_{\text{FIC}}(F^1)$  решетки  $L_{\text{FIC}}(F^1)$  при антиизоморфизме  $\text{FIC}$ . Следовательно,  $L_A$  — подрешетка в  $\mathbb{M}\mathbb{O}\mathbb{N}$ .

(ii) Рассмотрим отображение  $\psi_A: (\alpha)_{\text{Part}(F^1)} \rightarrow \text{Part}(A)$ , определенное по правилу  $\psi_A(\beta) = \beta|_A$  для любого  $\beta \in (\alpha)_{\text{Part}(F^1)}$ . Из хорошо известного

описания главных идеалов решеток разбиений (см. [28, лемма 403(v)]) вытекает, что решетка  $(\alpha]_{\text{Part}(F^1)}$  разложима в прямое произведение решеток  $\text{Part}(A)$  и  $\text{Part}(F^1 \setminus A)$ , причем отображение  $\psi_A$  есть проекция на первый сомножитель. Следовательно,  $\psi_A$  — гомоморфизм решеток. Отображение  $\varphi_A$  по определению является композицией антиизоморфизма  $\text{FIC}$ , ограниченного на  $L_A$ , и гомоморфизма  $\psi_A$ , ограниченного на  $(\alpha]_{\text{Part}(F^1)} \cap L_{\text{FIC}}(F^1)$ , а потому является антигомоморфизмом. Остается доказать сюръективность  $\varphi_A$ . Возьмем произвольное разбиение  $\beta \in \text{Part}(A)$  и обозначим через  $\beta^*$  отношение эквивалентности на  $A$ , соответствующее  $\beta$ . Рассмотрим многообразие  $\mathbf{V}$ , для которого  $\beta^*$  (рассматриваемое как множество пар слов) является базисом тождеств, и убедимся, что  $\mathbf{V} \in L_A$  и  $\varphi_A(\mathbf{V}) = \beta$ . Это так, если каждый  $\beta^*$ -класс является  $\text{FIC}(\mathbf{V})$ -классом. Таким образом, нужно показать, что если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{u} \in A$ , то  $\mathbf{u} \beta^* \mathbf{v}$ . Лемма 1.2 по индукции сводит проверку к случаю, когда  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\xi(\mathbf{u}')\mathbf{b}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{a}\xi(\mathbf{v}')\mathbf{b}$  для некоторых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^1$ , некоторого  $\xi \in \text{End}(F^1)$  и слов  $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$  таких, что  $\mathbf{u}' \beta^* \mathbf{v}'$ . Предположим сначала, что  $\xi(x) = \lambda$  для некоторой буквы  $x \in \text{con}(\mathbf{u}')$ . Тогда  $\xi(\mathbf{u}') = \xi(\mathbf{v}')$ , поскольку, согласно условию,  $\mathbf{u}'_X = \mathbf{v}'_X$  для любого непустого множества  $X \subseteq \text{con}(\mathbf{u}')$ . В этом случае получаем, что  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , откуда  $\mathbf{u} \beta^* \mathbf{v}$ . Предположим теперь, что эндоморфизм  $\xi$  переводит все буквы из  $\text{con}(\mathbf{u}')$  в непустые слова. Тогда существует эндоморфизм  $\zeta \in \text{End}(F)$  такой, что  $\xi|_{\text{con}(\mathbf{u}')} = \zeta|_{\text{con}(\mathbf{u}')}$ . Отсюда  $\mathbf{u} = \mathbf{a}\zeta(\mathbf{u}')\mathbf{b}$ . Это означает, что  $\mathbf{u}' \leq \mathbf{u}$ . Поскольку  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in A$  и  $A$  — антицепь, получаем, что  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ . Тогда  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \lambda$  и  $\xi$  действует тождественно на всех буквах слов  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{v}'$ . Следовательно,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ . Итак,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' \beta^* \mathbf{v}' = \mathbf{v}$ , и потому  $\mathbf{u} \beta^* \mathbf{v}$ .

(iii) В ходе доказательства утверждения (ii) мы показали, что если  $\beta \in \text{Part}(A)$  и  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов, для которого  $\beta^*$  является базисом тождеств, то  $\mathbf{V} \in L_A$  и  $\varphi_A(\mathbf{V}) = \beta$ . Если мы покажем, что  $\mathbf{V}$  надкоммутативно, то утверждение (iii) будет доказано. Пусть  $\mathbf{u} \beta^* \mathbf{v}$ , а  $x \in \text{con}(\mathbf{u})$ . Положим  $X = \text{con}(\mathbf{u}) \setminus \{x\}$ . Согласно условию,  $\mathbf{u}_X = \mathbf{v}_X$ , откуда  $\text{occ}_x(\mathbf{u}) = \text{occ}_x(\mathbf{v})$ . Принимая во внимание равенство  $\text{con}(\mathbf{u}) = \text{con}(\mathbf{v})$ , получаем, что  $\text{occ}_x(\mathbf{u}) = \text{occ}_x(\mathbf{v})$  для любой буквы  $x$ . Хорошо известно, что это влечет надкоммутативность многообразия  $\mathbf{V}$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 2.1.* Пусть  $n$  — произвольное натуральное число. Покажем, что множество слов

$$A_n = \{x^{n-i}yx^i \mid 0 \leq i \leq n\}$$

является антицепью. Предположим противное. Тогда существуют различные  $i, j$  такие, что  $x^{n-i}yx^i = \mathbf{a}\xi(x^{n-j}yx^j)\mathbf{b}$  для некоторых  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^1$  и некоторого  $\xi \in \text{End}(F)$ . Заметим, что длины слов  $x^{n-i}yx^i$  и  $x^{n-j}yx^j$  равны  $n+1$ , в то время как слово  $\xi(x^{n-j}yx^j)$  имеет длину  $\geq n+1$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \lambda$  и эндоморфизм  $\xi$  переводит буквы в буквы. В этом случае нетрудно видеть, что  $x^{n-i}yx^i$  не может совпадать с  $\xi(x^{n-j}yx^j)$ , каким бы ни был эндоморфизм  $\xi$ . Итак, мы показали, что множество слов  $A_n$  является антицепью. Кроме того, очевидно, что  $\mathbf{u}_x = \mathbf{v}_x = x^n$ ,  $\mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y = y$  и  $\mathbf{u}_{\{x,y\}} = \mathbf{v}_{\{x,y\}} = \lambda$  для любых  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A_n$ . Применяя пп. (i) и (ii) леммы 2.3, получаем, что отображение  $\varphi_{A_n}$  является антигомоморфизмом решетки  $L_{A_n}$

на решетку  $\text{Part}(A_n)$ . Из леммы 2.3(iii) следует, что ограничение антигомоморфизма  $\varphi_{A_n}$  на решетку  $L_{A_n} \cap \mathbb{O}\mathbb{C}$  является антигомоморфизмом этой решетки на  $\text{Part}(A_n)$ .

Итак, решетка разбиений произвольного конечного множества является антигомоморфным образом некоторой подрешетки решетки  $\mathbb{O}\mathbb{C}$ . Предположим, что последняя решетка удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству  $\varepsilon$ . Тогда тождество, двойственное к  $\varepsilon$ , выполнено в  $\text{Part}(A_n)$  для любого  $n$ . Но, как хорошо известно (см., например, [8, следствие IV.4.6]), класс всех решеток разбиений конечных множеств не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Это завершает доказательство теоремы 2.1.  $\square$

### § 3. Цепные многообразия

В этом параграфе будут полностью описаны негрупповые цепные многообразия моноидов. Параграф делится на 5 разделов. В разделе 3.1 приводится формулировка основного результата параграфа, разделы 3.2–3.4 посвящены его доказательству, а в разделе 3.5 собраны следствия из основного результата.

#### 3.1. Формулировка основного результата

Зафиксируем обозначения для следующих двух многообразий:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \text{var}\{xyx \approx xyx^2, x^2y^2 \approx y^2x^2, x^2y \approx x^2yx\}, \\ \mathbf{N} &= \text{var}\{x^2y \approx yx^2, x^2yz \approx xyxzx, \sigma_2, \gamma_1\}.\end{aligned}$$

Чтобы определить еще одно многообразие, нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $S_n$  симметрическую группу на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Для любых подстановок  $\pi, \tau \in S_n$  определим слова

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_n(\pi, \tau) &= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) x \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right), \\ \mathbf{w}'_n(\pi, \tau) &= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x^2 \left( \prod_{i=1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right).\end{aligned}$$

Заметим, что слова  $\mathbf{w}_n(\pi, \tau)$  и  $\mathbf{w}'_n(\pi, \tau)$  с тривиальными подстановками  $\pi$  и  $\tau$  встречались ранее в [31, доказательство предложения 5.5]. Положим

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \text{var}\{x^2y \approx yx^2, xyxzx \approx x^2yz, \sigma_1, \sigma_2, \\ &\quad \mathbf{w}_n(\pi, \tau) \approx \mathbf{w}'_n(\pi, \tau) \mid n \in \mathbb{N}, \pi, \tau \in S_n\}.\end{aligned}$$

Через  $\overleftarrow{\mathbf{X}}$  обозначается многообразие моноидов, двойственное к многообразию  $\mathbf{X}$  (т.е. состоящее из моноидов, антиизоморфных моноидам из  $\mathbf{X}$ ).

Основным результатом этого параграфа является

**Теорема 3.1.** *Негрупповое многообразие моноидов является цепным тогда и только тогда, когда оно содержится в одном из многообразий  $\mathbf{C}_n$  для некоторого  $n \geq 2$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\overleftarrow{\mathbf{K}}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{LRB}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\overleftarrow{\mathbf{N}}$  и  $\mathbf{RRB}$ .*

Отметим, что полный список всех негрупповых цепных многообразий моноидов будет приведен в разделе 3.5 в следствии 3.34.

#### 3.2. Доказательство необходимости

На протяжении данного раздела через  $\mathbf{V}$  обозначается фиксированное негрупповое цепное многообразие моноидов. Цель раздела — проверить, что  $\mathbf{V}$  содержится в одном из многообразий, перечисленных в формулировке теоремы 3.1. Доказательство этого факта разбивается на три этапа, которым соответствуют три подраздела данного раздела.

### 3.2.1. Редукция к случаю, когда $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{V}$

Из леммы 1.3 вытекает, что  $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{V}$ . Если  $\mathbf{V}$  содержит нетривиальную группу, то многообразие, порожденное этой группой, несравнимо с  $\mathbf{SL}$ . Это противоречит тому, что  $\mathbf{V}$  является цепным. Следовательно, многообразие  $\mathbf{V}$  комбинаторно. Тогда оно удовлетворяет тождеству  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n$ . Если  $\mathbf{V}$  коммутативно, то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{SL} \subseteq \mathbf{C}_2$  при  $n = 1$  и  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_n$  в противном случае.

Далее, если  $\mathbf{V}$  является многообразием идемпотентных моноидов, то из леммы 1.13 и наблюдения, что  $\mathbf{V}$  не может одновременно содержать многообразия  $\mathbf{LRB}$  и  $\mathbf{RRB}$ , следует, что  $\mathbf{V}$  содержится в одном из этих двух многообразий.

Предположим теперь, что  $\mathbf{V}$  некоммутативно и не является многообразием идемпотентных моноидов. Тогда  $\mathbf{V}$  не вполне регулярно, так как каждое комбинаторное вполне регулярное многообразие состоит из идемпотентных моноидов. В этом случае из леммы 1.18 вытекает, что  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$ . Для того, чтобы продолжить наши рассуждения, нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 3.2.** *Пусть  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов, содержащее многообразие  $\mathbf{D}_1$ . Тогда либо  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству вида*

$$x^s y x^t \approx y x^r, \quad (3.1)$$

где  $s \geq 1$ ,  $t \geq 0$ ,  $s + t \geq 2$  и  $r \geq 2$ , либо для любого тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненного в  $\mathbf{X}$ , выполняется условие

$$h_1^0(\mathbf{u}, x) = h_1^0(\mathbf{v}, x) \text{ для всех } x \in \text{con}(\mathbf{u}). \quad (3.2)$$

*Доказательство.* Предположим, что многообразие  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Из включения  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$  и предложения 1.17 следует, что выполняются условия (1.1) и (1.2). Из этих двух условий вытекает, что если (1.7) является 0-разложением слова  $\mathbf{u}$ , то 0-разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид (1.8). Предположим, что условие (3.2) не выполняется. Тогда существует такая буква  $x \in \text{mul}(\mathbf{u})$ , что  $h_1^0(\mathbf{u}, x) \neq h_1^0(\mathbf{v}, x)$ . Из условия (1.1) вытекает, что  $x \in \text{mul}(\mathbf{v})$ . Далее, без ограничения общности можно предположить, что существуют такие  $i < j$ , что  $t_i = h_1^0(\mathbf{u}, x)$  и  $t_j = h_1^0(\mathbf{v}, x)$ . Подставим  $y$  вместо  $t_j$ , а 1 вместо всех букв, входящих в тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , кроме  $x$  и  $t_j$ . Мы получим, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству вида (3.1), где  $s \geq 1$ ,  $t \geq 0$ ,  $s + t \geq 2$  и  $r \geq 2$ .  $\square$

Будем говорить, что мы выполняем подстановку

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$$

в некоторое тождество, если мы одновременно для каждого  $i = 1, 2, \dots, k$  подставляем слово  $\mathbf{u}_i$  вместо буквы  $x_i$  в это тождество.

**Предложение 3.3.** *Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{E}$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (1.1) и (3.2).*

*Доказательство. Необходимость.* Предположим, что многообразии  $\mathbf{E}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Из включения  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{E}$  и предложения 1.17 следует, что это тождество удовлетворяет условию (1.1). Предположим, что условие (3.2) не выполняется. Тогда из леммы 3.2 вытекает, что  $\mathbf{E}$  удовлетворяет тождеству вида (3.1), где  $s \geq 1$ ,  $t \geq 0$ ,  $s+t \geq 2$  и  $r \geq 2$ . Рассмотрим полугруппу

$$P = \langle e, a \mid e^2 = e, ae = a, ea = 0 \rangle = \{e, a, 0\}.$$

Заметим, что  $\mathbf{E}$  содержит моноид  $P^1$  (т.е. полугруппу  $P$  с внешнеприсоединенной единицей). Выполним подстановку  $(x, y) \mapsto (e, a)$  в тождество (3.1). Мы получим неверное равенство  $0 = a$ . Следовательно,  $P^1$ , и потому  $\mathbf{E}$ , не удовлетворяет тождеству (3.1).

*Достаточность.* Предположим, что выполняются условия (1.1) и (3.2). Пусть (1.7) — 0-разложение слова  $\mathbf{u}$ . Ввиду леммы 1.27, 0-разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид (1.8). Проверим, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{E}$ . Напомним, что многообразие  $\mathbf{E}$  задается системой тождеств

$$\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx xyx, x^2y^2 \approx y^2x^2\}. \quad (3.3)$$

Положим  $X = \text{con}(\mathbf{u}_0) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . Ясно, что любой блок произвольного слова не содержит простых букв этого слова. Поэтому, учитывая систему тождеств (3.3), можно считать, что  $\mathbf{u}_0 = x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$ .

Докажем индукцией по  $m$ , что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{E}$ .

*База индукции.* Пусть  $m = 0$ . Из условия (1.1) вытекает, что  $\text{con}(\mathbf{u}_0) = \text{con}(\mathbf{v}_0)$ . Поскольку многообразии  $\mathbf{E}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2y^2 \approx y^2x^2, \quad (3.4)$$

оно также удовлетворяет и тождеству  $\mathbf{v}_0 \approx x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$ . Следовательно, в  $\mathbf{E}$  выполнены тождества

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{u}_0 = t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 \approx t_0 \mathbf{v}_0 = \mathbf{v},$$

что и требовалось доказать.

*Шаг индукции.* Пусть теперь  $m > 0$ . Из системы тождеств (3.3) вытекает тождество

$$\mathbf{u} \approx t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 t_1(\mathbf{u}_1)_X \cdots t_m(\mathbf{u}_m)_X.$$

Согласно условию (3.2),  $\text{con}(\mathbf{u}_0) = \text{con}(\mathbf{v}_0)$ , откуда следует, что система тождеств (3.3) влечет тождество

$$\mathbf{v} \approx t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 t_1(\mathbf{v}_1)_X \cdots t_m(\mathbf{v}_m)_X.$$

Положим  $\mathbf{u}' = (\mathbf{u}_1)_X \cdots t_m(\mathbf{u}_m)_X$  и  $\mathbf{v}' = (\mathbf{v}_1)_X \cdots t_m(\mathbf{v}_m)_X$ . Легко проверить, что тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  удовлетворяет условиям (1.1) и (3.2). По предположению индукции, тождество  $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$  выполнено в многообразии  $\mathbf{E}$ , откуда следует, что это многообразие удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} \approx t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 t_1 \mathbf{u}' \approx t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 t_1 \mathbf{v}' \approx \mathbf{v}.$$

Таким образом,  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{E}$ . □

**Лемма 3.4.** Пусть  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов, не являющееся вполне регулярным. Если  $\mathbf{E} \not\subseteq \mathbf{X}$  и  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2 \approx x^3, \quad (3.5)$$

то в  $\mathbf{X}$  выполнено тождество

$$yx^2 \approx x^2yx^2. \quad (3.6)$$

*Доказательство.* Если многообразие  $\mathbf{X}$  коммутативно, то оно удовлетворяет тождествам  $yx^2 \approx yx^4 \approx x^2yx^2$ . Предположим теперь, что  $\mathbf{X}$  не является коммутативным. Тогда из леммы 1.18 следует, что  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$ . Поскольку  $\mathbf{E} \not\subseteq \mathbf{X}$ , существует тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{X}$ , но не выполненное в  $\mathbf{E}$ . Тогда из включений  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$  и предложения 3.3 следует, что условие (1.1) выполнено, а условие (3.2) — нет. Теперь из леммы 3.2 вытекает, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству вида (3.1), где  $s \geq 1$ ,  $t \geq 0$ ,  $s+t \geq 2$  и  $r \geq 2$ . Подставим  $x^2$  вместо  $x$  в это тождество и применим необходимое число раз тождество (3.5). Мы получим, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству (3.6).  $\square$

Вернемся к цепному многообразию  $\mathbf{V}$ . Напомним, что мы свели наши рассуждения к случаю, когда  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$ . Поскольку многообразия  $\mathbf{C}_3$  и  $\mathbf{D}_1$  несравнимы,  $\mathbf{C}_3 \not\subseteq \mathbf{V}$ . Тогда из леммы 1.9 и комбинаторности многообразия  $\mathbf{V}$  следует, что оно удовлетворяет тождеству (3.5). Предположим, что  $\mathbf{D}_2 \not\subseteq \mathbf{V}$ . Очевидно, что  $\mathbf{V}$  не содержит по крайней мере одно из несравнимых многообразий  $\mathbf{E}$  или  $\overline{\mathbf{E}}$ . Предположим без ограничения общности, что  $\overline{\mathbf{E}} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Тогда из леммы, двойственной к лемме 3.4, следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2y \approx x^2yx^2. \quad (3.7)$$

Согласно лемме 1.19, в  $\mathbf{V}$  выполнено также тождество

$$xux \approx x^qyx^r, \quad (3.8)$$

в котором либо  $q > 1$ , либо  $r > 1$ .

Если  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — слова, а  $\varepsilon$  — тождество, то запись  $\mathbf{u} \stackrel{\varepsilon}{\approx} \mathbf{v}$  означает, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  следует из  $\varepsilon$ . Если  $q > 1$ , то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$xux \stackrel{(3.8)}{\approx} x^qyx^r \stackrel{(3.7)}{\approx} x^qyx^{r+2} \stackrel{(3.5)}{\approx} x^2yx^2 \stackrel{(3.7)}{\approx} x^2y.$$

Напомним, что в  $\mathbf{V}$  также выполнено тождество (3.5). Тогда из леммы 1.14(i) следует, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{LRBVC}_2$ . Поскольку  $\mathbf{V}$  — цепное многообразие, не состоящее из идемпотентных моноидов, из леммы 1.14(ii) вытекает, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{E}$ . Следовательно,  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$ .

Предположим теперь, что  $q \leq 1$ . Тогда  $r > 1$ . Если  $q = 0$ , то, поскольку  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.5), из утверждения, двойственного к лемме 1.14, следует, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{D}$ .

Предположим наконец, что  $q = 1$ . Тогда многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$xux \approx xux^2, \quad (3.9)$$



поскольку в этом многообразии выполнено тождество (3.5). Следовательно, в  $\mathbf{V}$  выполняются тождества  $x^2yx \stackrel{(3.9)}{\approx} x^2yx^2 \stackrel{(3.7)}{\approx} x^2y$ . Таким образом,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x^2y \approx x^2yx. \quad (3.10)$$

Из того, что  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$ , вытекает  $\mathbf{LRB} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Следовательно, существует тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{V}$ , но не выполненное в  $\mathbf{LRB}$ . Словом *первых вхождений* слова  $\mathbf{w}$  называют слово, которое получается из  $\mathbf{w}$  удалением всех, кроме первого, вхождений всех букв. Это слово обозначается через  $\text{ini}(\mathbf{w})$ . Очевидно, что тождество  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{LRB}$  тогда и только тогда, когда  $\text{ini}(\mathbf{a}) = \text{ini}(\mathbf{b})$ . Отсюда следует, что  $\text{ini}(\mathbf{u}) \neq \text{ini}(\mathbf{v})$ . Из предложения 1.6 вытекает, что  $\text{con}(\mathbf{u}) = \text{con}(\mathbf{v})$ . Поэтому мы можем считать, что существуют такие буквы  $x, y \in \text{con}(\mathbf{u})$ , что  $\mathbf{u}(x, y) = x^s y \mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{v}(x, y) = y^t x \mathbf{w}_2$ , где  $s, t > 0$  и  $\text{con}(\mathbf{w}_1) = \text{con}(\mathbf{w}_2) = \{x, y\}$ . Если  $s = 1$ , то подставим  $x^2$  вместо  $x$  в тождество  $\mathbf{u}(x, y) \approx \mathbf{v}(x, y)$ . Мы получим тождество  $x^{2s} y \mathbf{w}'_1 \approx y^t x^2 \mathbf{w}'_2$ . Следовательно, мы можем считать, что  $s \geq 2$ . В силу симметрии, мы можем предполагать, что  $t \geq 2$ . Более того, тождество (3.5) позволяет считать, что  $s = t = 2$ . Теперь мы можем применить тождество (3.10) к тождеству  $x^s y \mathbf{w}_1 \approx y^t x \mathbf{w}_2$  и вывести тождество  $x^2 y^k \approx y^2 x^m$  для некоторых  $k, m > 1$ . Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$x^2 y^2 \stackrel{(3.5)}{\approx} x^2 y^k \approx y^2 x^m \stackrel{(3.5)}{\approx} y^2 x^2,$$

а значит, и тождеству (3.4). Отсюда вытекает, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$ .

Таким образом, нам осталось рассмотреть случай, когда  $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{V}$ .

### 3.2.2. Редукция к случаю, когда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$

Здесь нам потребуются некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть  $n$  и  $m$  — произвольные неотрицательные целые числа такие, что  $n + m > 0$ . Для любой подстановки  $\theta \in S_{n+m}$  положим

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{n,m}(\theta) &= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_{\theta(i)} \right) x \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right), \\ \mathbf{w}'_{n,m}(\theta) &= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x^2 \left( \prod_{i=1}^{n+m} z_{\theta(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} t_i z_i \right). \end{aligned}$$

Отметим, что слова  $\mathbf{w}_n(\pi, \tau)$  и  $\mathbf{w}'_n(\pi, \tau)$ , введенные в разделе 3.1, являются словами вида  $\mathbf{w}_{n,n}(\theta)$  и  $\mathbf{w}'_{n,n}(\theta)$  соответственно для подходящей подстановки  $\theta \in S_{2n}$ .

**Лемма 3.5.** *Многообразие  $\mathbf{L}$  удовлетворяет тождествам вида*

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \approx \mathbf{w}'_{n,m}(\theta) \quad (3.11)$$

для всех  $n, m$  и  $\theta \in S_{n+m}$ .

*Доказательство.* Проверим, что каждое тождество вида (3.11) следует из некоторого тождества вида

$$\mathbf{w}_n(\pi, \tau) \approx \mathbf{w}'_n(\pi, \tau). \quad (3.12)$$

Для этого зафиксируем тождество вида (3.11). Оно имеет вид

$$\mathbf{p}_0 x \mathbf{q}_0 x \mathbf{r}_0 \approx \mathbf{p}_0 x^2 \mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0,$$

где  $\mathbf{p}_0 = z_1 t_1 \cdots z_n t_n$ ,  $\mathbf{q}_0 = z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m)}$  и  $\mathbf{r}_0 = t_{n+1} z_{n+1} \cdots t_{n+m} z_{n+m}$ . Заметим, что слово  $\mathbf{q}_0$  может быть единственным образом представлено в виде

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k,$$

где  $\text{con}(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_k) = \{z_1, \dots, z_n\}$  и  $\text{con}(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k) = \{z_{n+1}, \dots, z_{n+m}\}$  (мы полагаем, что  $\mathbf{u}_1 = \lambda$ , если  $\theta(1) > n$ , и  $\mathbf{v}_k = \lambda$ , если  $\theta(n+m) \leq n$ ). Каждое из слов  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  (кроме  $\mathbf{u}_1$ , когда  $\mathbf{u}_1 = \lambda$ ) имеет вид  $z_{j_1} \cdots z_{j_s}$ , где  $j_1, \dots, j_s \leq n$ , в то время как каждое из слов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  (кроме  $\mathbf{v}_k$ , когда  $\mathbf{v}_k = \lambda$ ) имеет вид  $z_{j_1} \cdots z_{j_s}$ , где  $j_1, \dots, j_s > n$ .

Предположим сначала, что  $\mathbf{u}_1 = \lambda$ . Пусть  $z$  и  $t$  — буквы, не входящие в запись слова  $\mathbf{p}_0 \mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0 x$ . Положим  $\mathbf{p}' = z t \mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{q}' = z \mathbf{q}_0$  и  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0$ . Тождество  $\mathbf{p}' x \mathbf{q}' x \mathbf{r}' \approx \mathbf{p}' x^2 \mathbf{q}' \mathbf{r}'$ , очевидно, следует из тождества (3.11). Ясно, что с точностью до переименования букв тождество  $\mathbf{p}' x \mathbf{q}' x \mathbf{r}' \approx \mathbf{p}' x^2 \mathbf{q}' \mathbf{r}'$  имеет вид, указанный в предыдущем абзаце. Однако в данном случае слово  $\mathbf{u}_1$  не может быть пустым. Таким образом, мы можем считать, что  $\mathbf{u}_1 \neq \lambda$ . Аналогичные рассуждения позволяют предположить, что  $\mathbf{v}_k \neq \lambda$ .

Предположим теперь, что  $\mathbf{u}_1 = z_{j_1} \cdots z_{j_s}$ , где  $j_1, \dots, j_s \leq n$ , а  $z'_{j_1}, t'_{j_1}, \dots, z'_{j_{s-1}}, t'_{j_{s-1}}$  — буквы, не входящие в запись слова  $\mathbf{p}_0 \mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0 x$ . Положим  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0$ . Обозначим через  $\mathbf{q}_1$  слово, полученное из  $\mathbf{q}_0$  заменой слова  $\mathbf{u}_1$  на слово  $z_{j_1} z'_{j_1} \cdots z_{j_{s-1}} z'_{j_{s-1}} z_{j_s}$ . Положим также слово  $\mathbf{r}_1$  равным  $\mathbf{r}_0 t'_{j_1} z'_{j_1} \cdots t'_{j_{s-1}} z'_{j_{s-1}}$ . Заметим, что тождество  $\mathbf{p}_0 x \mathbf{q}_0 x \mathbf{r}_0 \approx \mathbf{p}_0 x^2 \mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0$  следует из тождества  $\mathbf{p}_1 x \mathbf{q}_1 x \mathbf{r}_1 \approx \mathbf{p}_1 x^2 \mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1$ , поскольку первое тождество можно получить из второго подстановкой 1 вместо букв  $z'_{j_1}, t'_{j_1}, \dots, z'_{j_{s-1}}, t'_{j_{s-1}}$ .

Пусть  $\mathbf{v}_1 = z_{j_1} \cdots z_{j_s}$ , где  $j_1, \dots, j_s > n$ , а  $z'_{j_1}, t'_{j_1}, \dots, z'_{j_{s-1}}, t'_{j_{s-1}}$  — буквы, не входящие в запись слова  $\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1 x$ . Положим  $\mathbf{p}_2 = z'_{j_1} t'_{j_1} \cdots z'_{j_{s-1}} t'_{j_{s-1}} \mathbf{p}_1$ . Через  $\mathbf{q}_2$  обозначим слово, полученное из  $\mathbf{q}_1$  заменой слова  $\mathbf{v}_1$  на слово  $z_{j_1} z'_{j_1} \cdots z_{j_{s-1}} z'_{j_{s-1}} z_{j_s}$ . Положим также  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$ . Тождество  $\mathbf{p}_1 x \mathbf{q}_1 x \mathbf{r}_1 \approx \mathbf{p}_1 x^2 \mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1$  следует из тождества  $\mathbf{p}_2 x \mathbf{q}_2 x \mathbf{r}_2 \approx \mathbf{p}_2 x^2 \mathbf{q}_2 \mathbf{r}_2$ , поскольку первое тождество можно получить из второго подстановкой 1 вместо букв  $z'_{j_1}, t'_{j_1}, \dots, z'_{j_{s-1}}, t'_{j_{s-1}}$ .

Продолжая данный процесс, модифицируем слова  $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ . В результате мы получим тождество

$$\mathbf{p}_{2k} x \mathbf{q}_{2k} x \mathbf{r}_{2k} \approx \mathbf{p}_{2k} x^2 \mathbf{q}_{2k} \mathbf{r}_{2k}, \quad (3.13)$$

из которого следует тождество (3.11), зафиксированное в начале доказательства. Мы можем очевидным образом переименовать буквы в полученном тождестве. Это позволяет нам считать, что  $\mathbf{p}_{2k} = z_1 t_1 \cdots z_p t_p$ ,  $\mathbf{q}_{2k} = z_{\xi(1)} \cdots z_{\xi(p+q)}$  и  $\mathbf{r}_{2k} = t_{p+1} z_{p+1} \cdots t_{p+q} z_{p+q}$  для некоторых натуральных  $p, q$

и такой подстановки  $\xi \in S_{p+q}$ , что  $\xi(i) \leq p$  для всех нечетных  $i$ , и  $\xi(i) > p$  для всех четных  $i$ . Нам остается проверить, что  $p = q$ . Для всех  $i = 1, \dots, k$  мы будем обозначать длину слова  $\mathbf{u}_i$  через  $n_i$ , а длину слова  $\mathbf{v}_i$  через  $m_i$ . Тогда  $n_1 + \dots + n_k = n$  и  $m_1 + \dots + m_k = m$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} p &= n + (m_1 - 1) + \dots + (m_k - 1) = n + m - k \\ &= m + n - k = m + (n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) = q. \end{aligned}$$

Таким образом, тождество (3.13) имеет вид (3.12) и влечет тождество (3.11), что и требовалось доказать.  $\square$

**Лемма 3.6.** Пусть в многообразии моноидов  $\mathbf{X}$  выполнены тождества

$$xuxzx \approx x^2yz, \quad (3.14)$$

$$x^2y \approx yx^2 \quad (3.15)$$

и (3.11) для всех  $n, m$  и  $\theta \in S_{n+m}$ ,  $\mathbf{u}$  — слово, а  $x$  — кратная в слове  $\mathbf{u}$  буква. Тогда если  $\mathbf{u}(x, y) \neq xux$  ни для какой буквы  $y$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx x^2\mathbf{u}_x. \quad (3.16)$$

*Доказательство.* Предположим сначала, что  $\text{осс}_x(\mathbf{u}) > 2$ . Тогда существует такое  $n > 2$ , что  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1x\mathbf{u}_2x\mathbf{u}_3 \cdots \mathbf{u}_n x \mathbf{u}_{n+1}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$ , не содержащих букву  $x$ . Тогда многообразию  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1x\mathbf{u}_2x\mathbf{u}_3 \cdots \mathbf{u}_n x \mathbf{u}_{n+1} \stackrel{(3.14)}{\approx} \mathbf{u}_1x^2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3 \cdots \mathbf{u}_{n+1} \stackrel{(3.15)}{\approx} x^2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_{n+1} = x^2\mathbf{u}_x,$$

откуда следует, что в этом многообразии выполнено тождество (3.16).

Таким образом, нам остается рассмотреть ситуацию, когда  $\text{осс}_x(\mathbf{u}) = 2$ . В этом случае  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1x\mathbf{u}_2x\mathbf{u}_3$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ , не содержащих букву  $x$ . Если  $\mathbf{u}_2 = \lambda$ , то в  $\mathbf{X}$  выполнены тождества  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1x^2\mathbf{u}_3 \stackrel{(3.15)}{\approx} x^2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_3 = x^2\mathbf{u}_x$ , что и требуется доказать.

Пусть теперь  $\mathbf{u}_2 \neq \lambda$ . Тогда  $\text{con}(\mathbf{u}_2)$  содержит некоторую букву  $y$ . Если  $y \in \text{sim}(\mathbf{u})$ , то  $\mathbf{u}(x, y) = xux$ , что противоречит условию. Следовательно,  $y \in \text{mul}(\mathbf{u})$  для любой буквы  $y \in \text{con}(\mathbf{u}_2)$ . Предположим, что  $\text{осс}_y(\mathbf{u}) > 2$ . Тогда, используя те же рассуждения, что и в первом абзаце доказательства, мы получим, что многообразию  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx y^2\mathbf{u}_y$ . Это тождество можно переписать в виде  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'_1x\mathbf{u}'_2x\mathbf{u}'_3$ , где  $\mathbf{u}'_1 = y^2\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}'_2 = (\mathbf{u}_2)_y$  и  $\mathbf{u}'_3 = (\mathbf{u}_3)_y$ . Таким образом, мы можем удалить из  $\mathbf{u}_2$  все буквы, входящие в слово  $\mathbf{u}$  более двух раз. Иными словами, можно предположить, что либо  $\mathbf{u}_2 = \lambda$ , либо  $\text{осс}_y(\mathbf{u}) = 2$  для любой буквы  $y \in \text{con}(\mathbf{u}_2)$ . Первый случай уже рассмотрен в предыдущем абзаце. Рассмотрим второй случай.

Напомним, что слово  $\mathbf{w}$  называют *линейным*, если  $\text{осс}_x(\mathbf{w}) \leq 1$  для любой буквы  $x$ . Предположим, что слово  $\mathbf{u}_2$  является линейным, т.е.  $\mathbf{u}_2 = y_1y_2 \cdots y_k$  для некоторых попарно различных букв  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . Тогда либо  $y_i \in \text{con}(\mathbf{u}_1) \setminus \text{con}(\mathbf{u}_3)$ , либо  $y_i \in \text{con}(\mathbf{u}_3) \setminus \text{con}(\mathbf{u}_1)$  для любого  $1 \leq i \leq k$ . Переименованием букв  $y_1, y_2, \dots, y_k$ , если это необходимо, мы можем добиться

того, что  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \text{con}(\mathbf{u}_1) \setminus \text{con}(\mathbf{u}_3)$  и  $y_{n+1}, \dots, y_{n+m} \in \text{con}(\mathbf{u}_3) \setminus \text{con}(\mathbf{u}_1)$  для некоторых  $n$  и  $m$  таких, что  $n + m = k$ . Тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 x y_{\theta(1)} y_{\theta(2)} \cdots y_{\theta(n+m)} x \mathbf{u}_3$$

для некоторой подходящей подстановки  $\theta \in S_{n+m}$  такой, что

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_0 y_1 \mathbf{w}_1 y_2 \mathbf{w}_2 \cdots y_n \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_{n+1} y_{n+1} \mathbf{w}_{n+2} y_{n+2} \cdots \mathbf{w}_{n+m} y_{n+m} \mathbf{w}_{n+m+1}$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+m+1}$ . Тогда  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{w}_0 \left( \prod_{i=1}^n y_i \mathbf{w}_i \right) x \left( \prod_{i=1}^{n+m} y_{\theta(i)} \right) x \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{w}_i y_i \right) \mathbf{w}_{n+m+1} \\ &\stackrel{(3.11)}{\approx} \mathbf{w}_0 \left( \prod_{i=1}^n y_i \mathbf{w}_i \right) x^2 \left( \prod_{i=1}^{n+m} y_{\theta(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{w}_i y_i \right) \mathbf{w}_{n+m+1} \\ &\stackrel{(3.15)}{\approx} x^2 \mathbf{w}_0 \left( \prod_{i=1}^n y_i \mathbf{w}_i \right) \left( \prod_{i=1}^{n+m} y_{\theta(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{w}_i y_i \right) \mathbf{w}_{n+m+1} \\ &= x^2 \mathbf{u}_x. \end{aligned}$$

Таким образом, мы снова получаем, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству (3.16).

Нам осталось рассмотреть ситуацию, когда слово  $\mathbf{u}_2$  не является линейным. В этом случае найдется такая буква  $y \in \text{con}(\mathbf{u}_2)$ , что  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3$ , где  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_3$  — слова,  $y \notin \text{con}(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)$ , а слово  $\mathbf{v}_2$  является либо пустым, либо линейным. Если  $\mathbf{v}_2$  линейно, то используя те же рассуждения, что и в предыдущем абзаце, мы можем показать, что в  $\mathbf{X}$  выполнены тождества

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 x \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 x \mathbf{u}_3 \approx y^2 \mathbf{u}_y = y^2 \mathbf{u}_1 x \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 x \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}'_1 x \mathbf{u}'_2 x \mathbf{u}_3,$$

где  $\mathbf{u}'_1 = y^2 \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3$ . Если же  $\mathbf{v}_2 = \lambda$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 x \mathbf{v}_1 y^2 \mathbf{v}_3 x \mathbf{u}_3 \stackrel{(3.15)}{\approx} y^2 \mathbf{u}_1 x \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 x \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}'_1 x \mathbf{u}'_2 x \mathbf{u}_3,$$

где  $\mathbf{u}'_1 = y^2 \mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3$ . В любом из этих случаев  $y \notin \text{con}(\mathbf{u}'_2)$ . Иными словами, мы можем удалить букву  $y$  из слова  $\mathbf{u}_2$ . Мы будем повторять аналогичные рассуждения до тех пор, пока слово  $\mathbf{u}_2$  не станет либо пустым, либо линейным. Оба эти случая уже были рассмотрены выше. Следовательно, мы доказали, что многообразие  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству (3.16).  $\square$

**Лемма 3.7.**  $\mathbf{L} = \text{var } S(xzxyty)$ .

*Доказательство.* Положим  $\mathbf{Z} = \text{var } S(xzxyty)$ . Доказательство леммы разбивается на две части, в первой из которых проверяется включение  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{L}$ , а во второй — противоположное включение.

*Включение  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{L}$ .* Ввиду леммы 1.7, достаточно проверить, что слово  $xzxyty$  является изотермом для  $\mathbf{L}$ . Положим

$$\begin{aligned} \Psi &= \{x^2 y \approx y x^2, x y x z x \approx x^2 y z, \sigma_1, \sigma_2, \\ &\quad \mathbf{w}_n(\pi, \tau) \approx \mathbf{w}'_n(\pi, \tau) \mid n \in \mathbb{N}, \pi, \tau \in S_n\}. \end{aligned}$$

Напомним, что  $\mathbf{L} = \text{var } \Psi$ . Если  $\mathbf{L}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $xzxyty \approx \mathbf{w}$  для некоторого слова  $\mathbf{w}$ , то, согласно лемме 1.2, существует вывод тождества  $xzxyty \approx \mathbf{w}$  из системы тождеств  $\Psi$ , т.е. такая последовательность слов

$$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \quad (3.17)$$

что  $\mathbf{v}_0 = xzxyty$ ,  $\mathbf{v}_m = \mathbf{w}$ , и для любого  $0 \leq i < m$  существуют слова  $\mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{b}_i$ , тождество  $\mathbf{s}_i \approx \mathbf{t}_i \in \Psi$  и эндоморфизм  $\xi_i \in \text{End}(F^1)$  такие, что либо  $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{s}_i) \mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{t}_i) \mathbf{b}_i$ , либо  $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{t}_i) \mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{s}_i) \mathbf{b}_i$ . Без ограничения общности можно считать, что последовательность (3.17) является кратчайшим выводом тождества  $xzxyty \approx \mathbf{w}$  из системы тождеств  $\Psi$ . В частности, это означает, что  $xzxyty \neq \mathbf{v}_1$ . Заметим, что если  $\xi_0(x) = \lambda$ , то  $\xi_0(\mathbf{s}_0) = \xi_0(\mathbf{t}_0)$  для любого тождества  $\mathbf{s}_0 \approx \mathbf{t}_0 \in \Psi$ . Нетрудно видеть, что последнее равенство противоречит тому, что  $xzxyty \neq \mathbf{v}_1$ . Таким образом, мы можем считать, что  $\xi_0(x) \neq \lambda$ .

Предположим, что  $xzxyty = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{s}_0) \mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{t}_0) \mathbf{b}_0$ . Случай, когда  $\mathbf{s}_0 = x^2y$ , невозможен, так как слово  $\xi_0(\mathbf{s}_0)$  содержит квадрат непустого слова, в то время как слово  $xzxyty$  является бесквадратным. Случай, когда  $\mathbf{s}_0 = xyxzx$ , также не может иметь места, потому что в этом случае слово  $\xi_0(\mathbf{s}_0)$  обязано содержать букву, встречающуюся в нем по крайней мере три раза, в то время как каждая буква слова  $xzxyty$  входит в это слово не более двух раз. Наконец, случай, когда  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{w}_n(\pi, \tau)$  для некоторых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\pi, \tau \in S_n$ , невозможен потому, что существует такая кратная в слове  $\xi_0(\mathbf{s}_0)$  буква  $c \in \xi_0(x)$ , что всякая буква, расположенная между первым и вторым вхождением  $c$  в  $\xi_0(\mathbf{s}_0)$ , является кратной, в то время как в слове  $xzxyty$  между первым и вторым вхождением любой кратной буквы обязательно найдется простая буква. Таким образом, тождество  $\mathbf{s}_0 \approx \mathbf{t}_0$  совпадает либо с  $\sigma_1$ , либо с  $\sigma_2$ . В силу симметрии, нам достаточно рассмотреть только первый случай  $\mathbf{s}_0 = xyzxty$  и  $\mathbf{t}_0 = yxzxty$ . Поскольку  $\xi_0(x) \neq \lambda$ , множество  $\text{con}(\xi_0(x))$  не пусто и, следовательно, содержит некоторую букву  $a$ . Очевидно,  $a$  является кратной в слове  $\xi_0(\mathbf{s}_0)$ , откуда  $a \in \{x, y\}$ . Предположим, что  $a = x$ . Тогда  $\xi_0(y) = \lambda$ , поскольку

$$xzxyty = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{s}_0) \mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 \xi_0(x) \xi_0(y) \xi_0(z) \xi_0(x) \xi_0(t) \xi_0(y) \mathbf{b}_0.$$

Следовательно,  $\xi_0(\mathbf{t}_0) = \xi_0(x) \xi_0(z) \xi_0(x) \xi_0(t) = \xi_0(\mathbf{s}_0)$ . Тогда

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{t}_0) \mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{s}_0) \mathbf{b}_0 = xzxyty,$$

что невозможно, так как последовательность (3.17) является кратчайшим выводом тождества  $xzxyty \approx \mathbf{w}$  из системы тождеств  $\Psi$ . Случай, когда  $a = y$  рассматривается аналогично.

Предположим теперь, что  $xzxyty = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{t}_0) \mathbf{b}_0$ . Случай, когда

$$\mathbf{t}_0 \in \{yx^2, x^2yz, \mathbf{w}'_n(\pi, \tau) \mid n \in \mathbb{N}, \pi, \tau \in S_n\}$$

невозможен, потому что в этом случае слово  $\xi_0(\mathbf{t}_0)$  содержит квадрат непустого слова, в то время как слово  $xzxyty$  является бесквадратным. Следовательно, тождество  $\mathbf{s}_0 \approx \mathbf{t}_0$  совпадает либо с  $\sigma_1$ , либо с  $\sigma_2$ . Рассуждая как

в предыдущем абзаце, мы можем получить противоречие с тем, что слова  $xzxyty$  и  $\mathbf{v}_1$  различны.

Мы проверили, что  $xzxyty$  является изотермом для  $\mathbf{L}$ , откуда  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{L}$ .

*Включение  $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{Z}$ .* Предположим, что  $\mathbf{Z}$  удовлетворяет некоторому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Докажем, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в  $\mathbf{L}$ . Лемма 3.5 позволяет нам сослаться на лемму 3.6. Пусть  $x$  — такая кратная в слове  $\mathbf{u}$  буква, что  $\mathbf{u}(x, y) \neq xyx$  для любой буквы  $y$ . По лемме 3.6, многообразие  $\mathbf{L}$  удовлетворяет тождеству (3.16). Очевидно, что  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{Z}$ , откуда, учитывая предложение 1.6, получаем, что  $x \in \text{mul}(\mathbf{v})$ . Поскольку  $xzxyty$  является изотермом для  $\mathbf{Z}$ , слово  $xyx$  также обладает этим свойством. Следовательно,  $\mathbf{v}(x, y) \neq xyx$  для любой буквы  $y$ . Применим снова лемму 3.6 и получим, что в  $\mathbf{L}$  выполнено тождество  $\mathbf{v} \approx x^2\mathbf{v}_x$ . Таким образом, если тождество  $\mathbf{u}_x \approx \mathbf{v}_x$  выполняется в многообразии  $\mathbf{L}$ , то это многообразие удовлетворяет также тождествам  $\mathbf{u} \approx x^2\mathbf{u}_x \approx x^2\mathbf{v}_x \approx \mathbf{v}$ . Следовательно, мы можем удалить из тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  все такие кратные буквы  $x$ , что  $\mathbf{u}(x, y) \neq xyx$  для любого  $y$ . Иными словами, без ограничения общности можно считать, что для любой буквы  $x \in \text{mul}(\mathbf{u})$  найдется такая буква  $y$ , что  $\mathbf{u}(x, y) = xyx = \mathbf{v}(x, y)$ . В частности, это означает, что  $\text{occ}_x(\mathbf{u}), \text{occ}_x(\mathbf{v}) \leq 2$  для любой буквы  $x$ .

Далее, в силу леммы 1.3,  $\text{con}(\mathbf{u}) = \text{con}(\mathbf{v})$ . Очевидно, что для любых букв  $a, b \notin \text{con}(\mathbf{u})$ , тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  и  $a\mathbf{u}b \approx a\mathbf{v}b$  эквивалентны в классе моноидов. Поэтому без ограничения общности можно считать, что первая и последняя буквы в каждом из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются простыми в этих словах. Пусть  $\text{sim}(\mathbf{u}) = \text{sim}(\mathbf{v}) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ . Мы можем полагать, что  $\mathbf{v}(t_1, t_2, \dots, t_m) = t_1t_2 \cdots t_m$ . Ввиду леммы 1.11,  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{Z}$ . Тогда из предложения 1.17 следует, что

$$\mathbf{u} = t_0\mathbf{a}_1t_1\mathbf{a}_2t_2 \cdots t_{m-1}\mathbf{a}_mt_m \text{ и } \mathbf{v} = t_0\mathbf{b}_1t_1\mathbf{b}_2t_2 \cdots t_{m-1}\mathbf{b}_mt_m$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  и  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ .

Пусть  $0 \leq i \leq m-1$ . Тогда  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1t_i\mathbf{a}_{i+1}t_{i+1}\mathbf{w}_2$ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \begin{cases} t_0\mathbf{a}_1t_1 \cdots t_{i-1}\mathbf{a}_i, & \text{если } 0 < i \leq m-1, \\ \lambda, & \text{если } i = 0, \end{cases} \\ \mathbf{w}_2 &= \begin{cases} \mathbf{a}_{i+2}t_{i+2} \cdots \mathbf{a}_mt_m, & \text{если } 0 \leq i < m-1, \\ \lambda, & \text{если } i = m-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Проверим, что

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{u}_1\mathbf{u}'_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}'_2 \cdots \mathbf{u}_k\mathbf{u}'_k \quad (3.19)$$

и, следовательно,  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1t_i\mathbf{u}_1\mathbf{u}'_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}'_2 \cdots \mathbf{u}_k\mathbf{u}'_kt_{i+1}\mathbf{w}_2$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_k$  и непустых слов  $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}_k$  таких, что  $\text{con}(\mathbf{u}_j) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_1)$  и  $\text{con}(\mathbf{u}'_j) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_2)$  для всех  $j = 1, \dots, k$ . Если  $\mathbf{a}_{i+1} = \lambda$ , то равенство (3.19) выполняется при  $k = 1$  и  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1 = \lambda$ . Предположим теперь, что  $\mathbf{a}_{i+1} \neq \lambda$ . Пусть  $x \in \text{con}(\mathbf{a}_{i+1})$ . Ясно, что буква  $x$  является кратной в  $\mathbf{u}$ , поскольку  $\text{sim}(\mathbf{u}) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ . Как мы доказали выше, в слове  $\mathbf{u}$  существует простая буква  $y$  такая, что  $\mathbf{u}(x, y) = xyx$ . Отсюда, очевидно, следует, что  $x$  является простой в слове  $\mathbf{a}_{i+1}$ . Тогда  $x \in \text{con}(\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2)$ .

Итак, мы доказали, что каждая буква из  $\text{con}(\mathbf{a}_{i+1})$  является простой в  $\mathbf{a}_{i+1}$  и встречается либо в  $\mathbf{w}_1$ , либо в  $\mathbf{w}_2$ . Пусть  $\mathbf{u}_1$  — максимальный префикс слова  $\mathbf{a}_{i+1}$  такой, что  $\text{con}(\mathbf{u}_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_1)$  (если первая буква слова  $\mathbf{a}_{i+1}$  не входит в  $\mathbf{w}_1$ , то считаем, что  $\mathbf{u}_1 = \lambda$ ). Тогда  $\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{u}_1\mathbf{b}$  для некоторого (возможно пустого) слова  $\mathbf{b}$ . Если  $\mathbf{b} = \lambda$ , то равенство (3.19) выполняется при  $k = 1$  и  $\mathbf{u}'_1 = \lambda$ . В противном случае пусть  $\mathbf{u}'_1$  — такой максимальный префикс слова  $\mathbf{b}$ , что  $\text{con}(\mathbf{u}'_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_2)$ . Тогда  $\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{u}_1\mathbf{u}'_1\mathbf{c}$  для некоторого (возможно пустого) слова  $\mathbf{c}$ . Если  $\mathbf{c} = \lambda$ , то равенство (3.19) выполняется при  $k = 1$ . В противном случае обозначим через  $\mathbf{u}_2$  такой максимальный префикс слова  $\mathbf{c}$ , что  $\text{con}(\mathbf{u}_2) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_1)$ . Продолжая этот процесс, мы получим равенство (3.19).

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_1 &= \begin{cases} t_0\mathbf{b}_1t_1 \cdots t_{i-1}\mathbf{b}_i, & \text{если } 0 < i \leq m-1, \\ \lambda, & \text{если } i = 0, \end{cases} \\ \mathbf{w}'_2 &= \begin{cases} \mathbf{b}_{i+2}t_{i+2} \cdots \mathbf{b}_mt_m, & \text{если } 0 \leq i < m-1, \\ \lambda, & \text{если } i = m-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем абзаце, показывают, что  $\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{v}_1\mathbf{v}'_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}'_2 \cdots \mathbf{v}_k\mathbf{v}'_k$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_k$  и непустых слов  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}_k$  таких, что  $\text{con}(\mathbf{v}_j) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}'_1)$  и  $\text{con}(\mathbf{v}'_j) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}'_2)$  для всех  $j = 1, \dots, k$ . Следовательно,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}'_1t_i\mathbf{v}_1\mathbf{v}'_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}'_2 \cdots \mathbf{v}_r\mathbf{v}'_rt_{i+1}\mathbf{w}'_2.$$

Далее, без ограничения общности можно считать, что  $k \geq r$ . Проверим, что  $k = r$ ,  $\text{con}(\mathbf{u}_j) = \text{con}(\mathbf{v}_j)$  и  $\text{con}(\mathbf{u}'_j) = \text{con}(\mathbf{v}'_j)$  для всех  $j = 1, \dots, k$ .

Возьмем  $x$  из  $\text{con}(\mathbf{u}_1)$ . Как мы показали выше,  $\mathbf{u}(x, t_i) = xt_ix$ . Следовательно,  $\mathbf{v}(x, t_i) = xt_ix$ , откуда  $\text{осс}_x(\mathbf{w}'_1) = 1$ . Заметим, что  $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) \neq xt_{i+1}x$ , поскольку  $\mathbf{u}(x, t_{i+1}) = x^2t_{i+1}$ . Таким образом,  $x \notin \text{con}(\mathbf{w}'_2)$ , откуда следует, что  $x \in \text{con}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_r)$ . Если  $x \notin \text{con}(\mathbf{v}_1)$ , то  $x \in \text{con}(\mathbf{v}_p)$  для некоторого  $p > 1$ . Тогда в  $\text{con}(\mathbf{v}'_{p-1})$  существует некоторая буква, скажем  $y$ . Заметим, что  $\mathbf{u}(y, t_{i+1}) = \mathbf{v}(y, t_{i+1}) = yt_{i+1}y$ . Следовательно,  $y \in \text{con}(\mathbf{w}_2)$ , откуда  $y \in \text{con}(\mathbf{u}'_j)$  для некоторого  $1 \leq j \leq k$ . Тогда  $\mathbf{u}(x, y, t_i, t_{i+1}) = xt_ixyt_{i+1}y$ , а  $\mathbf{v}(x, y, t_i, t_{i+1}) = xt_ixyt_{i+1}y$ . Это противоречит тому, что слово  $xt_ixyt_{i+1}y$  является изотермом для  $\mathbf{Z}$ . Следовательно,  $x \in \text{con}(\mathbf{v}_1)$ , откуда следует, что  $\text{con}(\mathbf{u}_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{v}_1)$ . Аналогичным образом можно проверить, что  $\text{con}(\mathbf{v}_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{u}_1)$ . Таким образом,  $\text{con}(\mathbf{u}_1) = \text{con}(\mathbf{v}_1)$ .

Возьмем теперь  $x$  из  $\text{con}(\mathbf{u}'_1)$ . Как мы показали выше,  $\mathbf{u}(x, t_{i+1}) = xt_{i+1}x$ . Следовательно,  $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) = xt_{i+1}x$ , откуда  $\text{осс}_x(\mathbf{w}'_2) = 1$ . Заметим, что  $\mathbf{v}(x, t_i) \neq xt_ix$ , поскольку  $\mathbf{u}(x, t_i) = t_ix^2$ . Таким образом,  $x \notin \text{con}(\mathbf{w}'_1)$ , откуда  $x \in \text{con}(\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2 \cdots \mathbf{v}'_r)$ . Если  $x \notin \text{con}(\mathbf{v}'_1)$ , то  $x \in \text{con}(\mathbf{v}'_p)$  для некоторого  $p > 1$ . Тогда в  $\text{con}(\mathbf{v}_p)$  существует некоторая буква, скажем  $y$ . Заметим, что  $\mathbf{u}(y, t_i) = \mathbf{v}(y, t_i) = yt_iy$ . Следовательно,  $y \in \text{con}(\mathbf{w}_1)$ , откуда следует, что  $y \in \text{con}(\mathbf{u}_j)$  для некоторого  $1 \leq j \leq k$ . Заметим также, что  $y \notin \text{con}(\mathbf{u}_1)$ . Действительно, если  $y \in \text{con}(\mathbf{u}_1)$ , то  $y \in \text{con}(\mathbf{v}_1)$ , поскольку  $\text{con}(\mathbf{u}_1) = \text{con}(\mathbf{v}_1)$ . Отсюда вытекает, что  $\text{осс}_y(\mathbf{v}) \geq \text{осс}_y(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_p\mathbf{w}'_2) \geq 3$ ,

что невозможно. Таким образом,  $y \in \text{con}(\mathbf{u}_j)$  для некоторого  $2 \leq j \leq k$ . Тогда  $\mathbf{u}(x, y, t_i, t_{i+1}) = xt_i x y t_{i+1} y$ , а  $\mathbf{v}(x, y, t_i, t_{i+1}) = x t_i y x t_{i+1} y$ . Это противоречит тому, что слово  $x t_i x y t_{i+1} y$  является изотермом для  $\mathbf{Z}$ . Следовательно,  $x \in \text{con}(\mathbf{v}'_1)$ , откуда следует, что  $\text{con}(\mathbf{u}'_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{v}'_1)$ . Аналогичным образом можно проверить, что  $\text{con}(\mathbf{v}'_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{u}'_1)$ . Итак, мы доказали, что  $\text{con}(\mathbf{u}'_1) = \text{con}(\mathbf{v}'_1)$ .

Повторяя с очевидными изменениями рассуждения из предыдущих двух абзацев, мы можем проверить, что  $\text{con}(\mathbf{u}_i) = \text{con}(\mathbf{v}_i)$  и  $\text{con}(\mathbf{u}'_i) = \text{con}(\mathbf{v}'_i)$  для  $i = 2, \dots, r$ .

Если  $k > r$ , то  $\text{con}(\mathbf{u}_{r+1})$  содержит некоторую букву, скажем  $x$ . Как мы показали выше,  $\mathbf{u}(x, t_i) = x t_i x$ . Следовательно,  $\mathbf{v}(x, t_i) = x t_i x$ , откуда  $\text{osc}_x(\mathbf{w}'_1) = 1$ . Заметим также, что  $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) = \mathbf{u}(x, t_{i+1}) = x^2 t_{i+1}$ . В частности,  $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) \neq x t_{i+1} x$ . Следовательно,  $x \notin \text{con}(\mathbf{w}'_2)$ , откуда  $x \in \text{con}(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_r)$ . Тогда  $x \in \text{con}(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_r)$ , так как  $\text{con}(\mathbf{u}_i) = \text{con}(\mathbf{v}_i)$  для всех  $i = 1, 2, \dots, r$ . Таким образом,  $\text{osc}_x(\mathbf{u}) \geq \text{osc}_x(\mathbf{w}_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_{r+1}) \geq 3$ , что невозможно. Следовательно,  $k = r$ .

Итак, мы доказали, что  $k = r$ ,  $\text{con}(\mathbf{u}_i) = \text{con}(\mathbf{v}_i)$  и  $\text{con}(\mathbf{u}'_i) = \text{con}(\mathbf{v}'_i)$  для всех  $i = 1, \dots, k$ . Зафиксируем индекс  $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Слова  $\mathbf{u}_s$  и  $\mathbf{v}_s$  линейны и зависят от одних и тех же букв. То же самое верно и для слов  $\mathbf{u}'_s$  и  $\mathbf{v}'_s$ . Тождество  $\sigma_1$  [соответственно  $\sigma_2$ ] позволяет нам поменять местами первые [вторые] вхождения двух кратных букв, если эти вхождения смежны друг с другом. Следовательно, тождества  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  позволяют изменять произвольным образом порядок букв в словах  $\mathbf{u}'_s$  и  $\mathbf{u}_s$  соответственно. Таким образом, если мы заменим  $\mathbf{u}_s$  на  $\mathbf{v}_s$ , а  $\mathbf{u}'_s$  на  $\mathbf{v}'_s$  в слове  $\mathbf{u}$ , то полученное нами слово будет равно  $\mathbf{u}$  в многообразии  $\mathbf{L}$ . Это верно для всех  $s = 1, \dots, k$ . Следовательно,  $\mathbf{L}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{a}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{u}_1 \mathbf{u}'_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}'_2 \cdots \mathbf{u}_k \mathbf{u}'_k t_{i+1} \mathbf{w}_2 \\ &\approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_2 \cdots \mathbf{v}_k \mathbf{v}'_k t_{i+1} \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{b}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, если мы заменим  $\mathbf{a}_{i+1}$  на  $\mathbf{b}_{i+1}$  в слове  $\mathbf{u}$  для всех  $i = 0, \dots, m-1$ , то полученное слово будет равно  $\mathbf{u}$  в многообразии  $\mathbf{L}$ . Следовательно,  $\mathbf{L}$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{a}_1 t_1 \mathbf{a}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{a}_m t_m \approx t_0 \mathbf{b}_1 t_1 \mathbf{b}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{b}_m t_m = \mathbf{v}.$$

Лемма доказана.  $\square$

Отметим одно интересное следствие из леммы 3.7. Бесконечно базлируемое многообразие, все собственные подмногообразия которого конечно базлируемы, называется *предельным*. Многообразие  $\text{var } S(xzxyty)$  является предельным [31, предложение 5.1]. Таким образом, из леммы 3.7 вытекает

**Следствие 3.8.** *Многообразие  $\mathbf{L}$  является предельным. В частности, оно не имеет конечного базиса тождеств.*  $\square$

Из упомянутого во введении результата работы [37] следует, что существует континуум многообразий периодических групп с 3-элементной решеткой подмногообразий. Обозначим через  $\mathcal{G}$  класс всех таких многообразий. Поскольку класс конечно базлируемых многообразий групп счетен,



класс  $\mathcal{G}$  содержит бесконечно базируемые многообразия. Как хорошо известно, многообразиями групп с двухэлементной решеткой подмногообразий являются многообразия абелевых групп простой экспоненты и только они. Поскольку они конечно базируемы, все бесконечно базируемые многообразия из класса  $\mathcal{G}$  являются предельными однако явные примеры предельных многообразий групп до сих пор не известны.

Обозначим через  $\mathbf{M}$  подмногообразие многообразия  $\mathbf{N}$ , задаваемое внутри  $\mathbf{N}$  следующим тождеством:

$$\alpha_1 : x_1 y_1 x_0 x_1 y_1 \approx y_1 x_1 x_0 x_1 y_1.$$

Заметим, что  $\alpha_1$  принадлежит счетной серии тождеств  $\alpha_k$ , которую мы определим в подразделе 3.4.1.

**Лемма 3.9.** *Пусть  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов и  $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{X}$ .*

- (i) *Если  $\mathbf{L} \not\subseteq \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\gamma_1$ .*
- (ii) *Если  $\mathbf{M} \not\subseteq \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\sigma_1$ .*

*Доказательство.* (i) Согласно леммам 1.7 и 3.7, многообразие  $\mathbf{X}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $xzxyty \approx \mathbf{w}$ . Заметим, что, в силу лемм 1.7 и 1.11, слово  $xux$  является изотермом для  $\mathbf{X}$ . Тогда из факта 3.1(i) работы [51] следует, что  $\mathbf{w} = xzyxty$ . Следовательно,  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\gamma_1$ .

(ii) Из утверждения, двойственного к предложению 1 из исправления к статье [31], следует, что многообразие  $\mathbf{M}$  порождается моноидом  $S(xyzxty)$ . Тогда  $S(xyzxty) \not\subseteq \mathbf{X}$ . Теперь из леммы 1.7 следует, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $xyzxty \approx \mathbf{w}$ . Учитывая тот факт, что, согласно леммам 1.7 и 1.11, слово  $xux$  является изотермом для  $\mathbf{X}$ , применим факт 3.1(ii) работы [51] и получим, что  $\mathbf{w} = yxzxty$ . Таким образом, тождество  $\sigma_1$  выполнено в  $\mathbf{X}$ .  $\square$

Вернемся к цепному многообразию  $\mathbf{V}$ . В подразделе 3.2.1 мы свели наши рассуждения к случаю, когда  $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{V}$ . Ясно, что тогда  $\mathbf{E} \not\subseteq \mathbf{V}$ , поскольку многообразия  $\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{E}$  несравнимы. По лемме 3.4, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.6). Аналогичным образом, из того, что  $\overleftarrow{\mathbf{E}} \not\subseteq \mathbf{V}$  и утверждения, двойственного к лемме 3.4, следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.7). Отсюда вытекает, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (3.15). Если  $\mathbf{V}$  не содержит  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\overleftarrow{\mathbf{M}}$ , то из леммы 3.9 и утверждения, двойственного к утверждению (ii) этой леммы, следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\gamma_1$ , откуда  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}$ .

Таким образом, нам остается рассмотреть ситуацию, когда  $\mathbf{V}$  содержит одно из многообразий  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  или  $\overleftarrow{\mathbf{M}}$ . В этом случае  $\mathbf{V}$  не содержит многообразия  $\mathbf{D}_3$ , поскольку  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\overleftarrow{\mathbf{M}}$  несравнимы с этим многообразием. Из леммы 1.19 и того факта, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.15), следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество (3.14).

Предположим, что  $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V}$  не содержит  $\mathbf{L}$  и  $\overleftarrow{\mathbf{M}}$ . Из леммы 3.9(i) и утверждения, двойственного к лемме 3.9(ii), следует, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{N}$ . Двойственные рассуждения показывают, что если  $\overleftarrow{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{V}$ , то  $\mathbf{V} \subseteq \overleftarrow{\mathbf{N}}$ .

Таким образом, мы свели наши рассуждения к случаю, когда  $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$ .

### 3.2.3. Случай, когда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$

Как мы показали выше,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам (3.14) и (3.15) и не содержит многообразия  $\mathbf{M}$  и  $\overline{\mathbf{M}}$ . Тогда из леммы 3.9(ii) и двойственной к ней следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Следовательно,  $\mathbf{V}$  содержится в многообразии

$$\mathbf{O} = \text{var}\{x^2y \approx yx^2, xyxzx \approx x^2yz, \sigma_1, \sigma_2\}.$$

Чтобы завершить доказательство необходимости в теореме 3.1, достаточно проверить, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{L}$ . Для этого нам нужно установить, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет всем тождествам вида (3.12).

Нам потребуются одно новое обозначение и несколько вспомогательных утверждений. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq \ell \leq n$  и  $\pi, \tau \in S_n$ . Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n^{k,\ell}(\pi, \tau) &= \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^k z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) x \left( \prod_{i=k+1}^{\ell} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) x \\ &\quad \cdot \left( \prod_{i=\ell+1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right). \end{aligned}$$

Заметим, что  $\mathbf{w}_n^{0,n}(\pi, \tau) = \mathbf{w}_n(\pi, \tau)$  и  $\mathbf{w}_n^{0,0}(\pi, \tau) = \mathbf{w}'_n(\pi, \tau)$ .

**Лемма 3.10.** Пусть  $n$  — натуральное число,  $\pi, \tau \in S_n$ , а  $\mathbf{X}$  — такое многообразие моноидов, что  $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{O}$ . Если  $S(\mathbf{w}_n(\pi, \tau)) \notin \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида

$$\mathbf{w}_n(\pi, \tau) \approx \mathbf{w}_n^{k,\ell}(\pi, \tau) \quad (3.21)$$

для некоторых  $0 \leq k \leq \ell \leq n$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $S(\mathbf{w}_n(\pi, \tau)) \notin \mathbf{X}$ . Тогда по лемме 1.7,  $\mathbf{X}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида

$$\mathbf{w}_n(\pi, \tau) = \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x \left( \prod_{i=1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) x \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right) \approx \mathbf{w}. \quad (3.22)$$

Положим  $\mathbf{a} = z_{\pi(1)}$ ,  $\mathbf{b} = t_{\pi(1)} z_{\pi(1)+1} t_{\pi(1)+1} \cdots z_n t_n x$ ,  $\mathbf{c} = z_{n+\tau(1)}$  и

$$\mathbf{d} = z_{\pi(2)} z_{n+\tau(2)} \cdots z_{\pi(n)} z_{n+\tau(n)} x t_{n+1} z_{n+1} \cdots t_{n+\tau(1)-1} z_{n+\tau(1)-1} t_{n+\tau(1)}.$$

Слово  $\mathbf{w}_n(\pi, \tau)$  содержит подслово **abacdc**. Поэтому подмоноид моноида  $S(\mathbf{w}_n(\pi, \tau))$ , порожденный элементами  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ , изоморфен  $S(xzxyty)$ . В силу лемм 1.7 и 3.7, слово  $xzxyty$  является изотермом для  $\mathbf{X}$ . Проверим, что

$$\begin{aligned} \ell_2(\mathbf{w}, z_i) &< \ell_1(\mathbf{w}, z_{n+j}) \text{ тогда и только тогда, когда} \\ \ell_2(\mathbf{w}_n(\pi, \tau), z_i) &< \ell_1(\mathbf{w}_n(\pi, \tau), z_{n+j}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

для любых  $1 \leq i, j \leq n$ . Действительно, пусть  $1 \leq i, j \leq n$ . Слово  $xux$  является изотермом для многообразия  $\mathbf{X}$ . Тогда, поскольку  $[\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_i, t_i) = z_i t_i z_i$ ,  $[\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_{n+j}, t_{n+j}) = z_{n+j} t_{n+j} z_{n+j}$  и тождество (3.22) выполнено в  $\mathbf{X}$ , мы имеем  $\mathbf{w}(z_i, t_i) = z_i t_i z_i$  и  $\mathbf{w}(z_{n+j}, t_{n+j}) = z_{n+j} t_{n+j} z_{n+j}$ . Поскольку  $\mathbf{X}$  не коммутативно,  $\ell_1(\mathbf{w}, t_i) < \ell_1(\mathbf{w}, t_{n+j})$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(z_i, t_{n+j}) &= [\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_i, t_{n+j}) = z_i^2 t_{n+j}, \\ \mathbf{w}(z_{n+j}, t_i) &= [\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_{n+j}, t_i) = t_i z_{n+j}^2.\end{aligned}$$

Подводя итог сказанному выше, получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(z_i, t_i, t_{n+j}) &= [\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_i, t_i, t_{n+j}) = z_i t_i z_i t_{n+j}, \\ \mathbf{w}(z_{n+j}, t_i, t_{n+j}) &= [\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_{n+j}, t_i, t_{n+j}) = t_i z_{n+j} t_{n+j} z_{n+j}.\end{aligned}$$

Предположим, что  $\ell_2(\mathbf{w}, z_i) < \ell_1(\mathbf{w}, z_{n+j})$ . Тогда из сказанного в предыдущем абзаце следует, что

$$\mathbf{w}(z_i, z_{n+j}, t_i, t_{n+j}) = z_i t_i z_i z_{n+j} t_{n+j} z_{n+j}.$$

Поскольку слово  $xzxyty$  является изотермом для  $\mathbf{X}$ ,

$$[\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_i, z_{n+j}, t_i, t_{n+j}) = z_i t_i z_i z_{n+j} t_{n+j} z_{n+j} = \mathbf{w}(z_i, z_{n+j}, t_i, t_{n+j}),$$

откуда следует, что  $\ell_2(\mathbf{w}_n(\pi, \tau), z_i) < \ell_1(\mathbf{w}_n(\pi, \tau), z_{n+j})$ .

Предположим теперь, что  $\ell_2(\mathbf{w}_n(\pi, \tau), z_i) < \ell_1(\mathbf{w}_n(\pi, \tau), z_{n+j})$ . Тогда

$$[\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_i, z_{n+j}, t_i, t_{n+j}) = z_i t_i z_i z_{n+j} t_{n+j} z_{n+j}.$$

Снова учитывая тот факт, что  $xzxyty$  является изотермом для  $\mathbf{X}$ , получаем, что

$$\mathbf{w}(z_i, z_{n+j}, t_i, t_{n+j}) = [\mathbf{w}_n(\pi, \tau)](z_i, z_{n+j}, t_i, t_{n+j}) = z_i t_i z_i z_{n+j} t_{n+j} z_{n+j},$$

откуда следует, что  $\ell_2(\mathbf{w}, z_i) < \ell_1(\mathbf{w}, z_{n+j})$ .

Итак, утверждение (3.23) доказано. Тогда

$$\mathbf{w}_x = \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right).$$

Поскольку  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{O}$ , в  $\mathbf{X}$  выполняются тождества  $xuxzx \approx x^2yz \approx yzx^2$ . Поэтому можно считать, что  $\text{осс}_x(\mathbf{w}) = 2$ . Таким образом, слово  $\mathbf{w}$  имеет вид

$$\left( \prod_{i=1}^n \mathbf{p}_{2i-1} z_i \mathbf{p}_{2i} t_i \right) \mathbf{q}_0 \left( \prod_{i=1}^n z_{\pi(i)} \mathbf{q}_{2i-1} z_{n+\tau(i)} \mathbf{q}_{2i} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i \mathbf{r}_{2i-2n-1} z_i \mathbf{r}_{2i-2n} \right),$$

где

$$\left( \prod_{i=1}^{2n} \mathbf{p}_i \right) \left( \prod_{i=0}^{2n} \mathbf{q}_i \right) \left( \prod_{i=1}^{2n} \mathbf{r}_i \right) = x^2.$$

Предположим сначала, что  $x \in \text{con}(\mathbf{p}_{2j-1}\mathbf{p}_{2j})$  для некоторого  $1 \leq j \leq n$  и  $j$  является наименьшим числом с таким свойством. Если  $\mathbf{p}_{2j-1}\mathbf{p}_{2j} = x$ , то

$$\left( \prod_{i=2j+1}^{2n} \mathbf{p}_i \right) \left( \prod_{i=0}^{2n} \mathbf{q}_i \right) \left( \prod_{i=1}^{2n} \mathbf{r}_i \right) = x.$$

В этом случае подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество (3.22), кроме  $x$  и  $t_j$ . Мы получим тождество  $t_j x^2 \approx x t_j x$ , что невозможно, поскольку слово  $xzx$  является изотермом для  $\mathbf{X}$ . Следовательно,  $\mathbf{p}_{2j-1}\mathbf{p}_{2j} = x^2$ , т.е. либо  $\mathbf{p}_{2j-1} = \mathbf{p}_{2j} = x$ , либо  $\mathbf{p}_{2j-1} = x^2$ , либо  $\mathbf{p}_{2j} = x^2$ . Если  $\mathbf{p}_{2j-1} = \mathbf{p}_{2j} = x$ , то  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n(\pi, \tau) &\approx \mathbf{w} = \left( \prod_{i=1}^{j-1} z_i t_i \right) x z_j x t_j \left( \prod_{i=j+1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right) \\ &\stackrel{\sigma_1}{\approx} \left( \prod_{i=1}^{j-1} z_i t_i \right) z_j x^2 t_j \left( \prod_{i=j+1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right) \\ (3.15) \quad &\approx \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) x^2 \left( \prod_{i=1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right) \\ &= \mathbf{w}'_n(\pi, \tau) = \mathbf{w}_n^{0,0}(\pi, \tau), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Если  $\mathbf{p}_{2j-1} = x^2$  или  $\mathbf{p}_{2j} = x^2$ , то мы легко получим необходимое заключение, применив тождество (3.15). Итак, мы можем считать, что  $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_{2n} = \lambda$ .

Случай, когда  $x \in \text{con}(\mathbf{r}_{2j-1}\mathbf{r}_{2j})$  для некоторого  $1 \leq j \leq n$ , рассматривается аналогично предыдущему, только вместо тождества  $\sigma_1$  используется тождество  $\sigma_2$ .

Пусть, наконец,  $x \notin \text{con}(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_{2n} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \cdots \mathbf{r}_{2n})$ . Тогда

$$\mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_{2n} = x^2.$$

Заметим, что либо  $x \notin \text{con}(\mathbf{q}_0)$ , либо  $x \notin \text{con}(\mathbf{q}_{2n})$ , поскольку в противном случае тождество (3.22) становится тривиальным. Предположим без ограничения общности, что  $x \notin \text{con}(\mathbf{q}_0)$ . Тогда  $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \cdots \mathbf{q}_{2n} = x^2$ . Пусть  $k$  — наименьшее натуральное число такое, что  $x \in \text{con}(\mathbf{q}_k)$ . Если  $\mathbf{q}_k = x^2$ , то, применив тождество (3.15), мы легко получим необходимое заключение. Предположим теперь, что  $x \in \text{con}(\mathbf{q}_{\ell+1})$  для некоторого  $k \leq \ell \leq 2n-1$ .

Каждое вхождение  $x$  в слово  $\mathbf{w}$  лежит либо в подслове вида  $z_{\pi(i)} x z_{n+\tau(i)}$ , либо в подслове вида  $z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} x z_{\pi(i+1)} z_{n+\tau(i+1)}$ . Нам нужно проверить, что  $\mathbf{w}$  равно в  $\mathbf{X}$  некоторому слову, имеющему ту же структуру, что и  $\mathbf{w}$ , но содержащему вхождения буквы  $x$  только второго типа. Если оба вхождения буквы  $x$  в  $\mathbf{w}$  являются вхождениями второго типа, то доказывать нечего. Предположим, что оба эти вхождения являются вхождениями первого типа.

Тогда многообразие  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_n(\pi, \tau) &\approx \mathbf{w} = \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{k-1} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) z_{\pi(k)} x z_{n+\tau(k)} \left( \prod_{i=k+1}^{\ell} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \\
&\quad \cdot \underline{z_{\pi(\ell+1)} x z_{n+\tau(\ell+1)}} \left( \prod_{i=\ell+2}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right) \\
&\stackrel{\sigma_2}{\approx} \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^{k-1} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) z_{\pi(k)} \underline{x z_{n+\tau(k)}} \left( \prod_{i=k+1}^{\ell} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \\
&\quad \cdot x \left( \prod_{i=\ell+1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right) \\
&\stackrel{\sigma_1}{\approx} \left( \prod_{i=1}^n z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^k z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) x \left( \prod_{i=k+1}^{\ell} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) x \\
&\quad \cdot \left( \prod_{i=\ell+1}^n z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i \right) \\
&= \mathbf{w}_n^{k,\ell}(\pi, \tau)
\end{aligned}$$

(для удобства читателя, в данной цепочке тождеств мы подчеркиваем две смежные буквы, которые мы переставляем местами, применяя одно из тождеств  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ). Наконец, если вхождения  $x$  в  $\mathbf{w}$  имеют различные типы, то наши рассуждения будут аналогичны предыдущим, но более просты. А именно, если вхождение первого типа лежит в  $\mathbf{q}_k$  [в  $\mathbf{q}_{\ell+1}$ ], то достаточно применить только тождество  $\sigma_1$  [соответственно  $\sigma_2$ ]. Таким образом, мы доказали, что тождество вида (3.21) в любом случае выполнено в многообразии  $\mathbf{X}$ .  $\square$

**Лемма 3.11.** Пусть  $m$  — натуральное число,  $0 \leq k < \ell < m$ ,  $q = \ell - k$  и  $\pi, \tau \in S_m$ . Тогда найдутся такие подстановки  $\rho, \sigma \in S_q$ , что тождество  $\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi, \tau) \approx \mathbf{w}_m^{k,k}(\pi, \tau)$  следует из тождества  $\mathbf{w}_q(\rho, \sigma) \approx \mathbf{w}_q^l(\rho, \sigma)$ .

*Доказательство.* Положим

$$\begin{aligned}
\{z_{\pi(k+1)}, z_{\pi(k+2)}, \dots, z_{\pi(\ell)}\} &= \{z_{p_1}, z_{p_2}, \dots, z_{p_q}\}, \\
\{z_{m+\tau(k+1)}, z_{m+\tau(k+2)}, \dots, z_{m+\tau(\ell)}\} &= \{z_{r_1}, z_{r_2}, \dots, z_{r_q}\},
\end{aligned}$$

где  $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_q \leq m < r_1 < r_2 < \dots < r_q \leq 2m$ . Тогда слово  $\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi, \tau)$  имеет вид

$$\mathbf{u}_0 z_{p_1} \mathbf{u}_1 \cdots z_{p_q} \mathbf{u}_q x z_{\pi(k+1)} z_{m+\tau(k+1)} \cdots z_{\pi(\ell)} z_{m+\tau(\ell)} x \mathbf{u}_{q+1} z_{r_1} \cdots \mathbf{u}_{2q} z_{r_q} \mathbf{u}_{2q+1},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_0 &= \prod_{i=1}^{p_1-1} z_i t_i, \\
\mathbf{u}_s &= t_{p_s} \left( \prod_{i=p_s+1}^{p_{s+1}-1} z_i t_i \right) \text{ для всех } 1 \leq s < q,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_q &= t_{p_q} \left( \prod_{i=p_q+1}^m z_i t_i \right) \left( \prod_{i=1}^k z_{\pi(i)} z_{m+\tau(i)} \right), \\
\mathbf{u}_{q+1} &= \left( \prod_{i=\ell+1}^m z_{\pi(i)} z_{m+\tau(i)} \right) \left( \prod_{i=m+1}^{r_1-1} t_i z_i \right) t_{r_1}, \\
\mathbf{u}_{q+1+s} &= \left( \prod_{i=r_{s-1}+1}^{r_s-1} t_i z_i \right) t_{r_s} \text{ для всех } 1 \leq s < q, \\
\mathbf{u}_{2q+1} &= \prod_{i=r_q+1}^{2m} t_i z_i.
\end{aligned}$$

Переименуем все буквы в слове  $\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi, \tau)$ , кроме буквы  $x$ . Начнем с букв из множества

$$\text{con}(\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi, \tau)) \setminus \{x, z_{p_1}, z_{p_2}, \dots, z_{p_q}, z_{r_1}, z_{r_2}, \dots, z_{r_q}\}.$$

Заменим их некоторыми попарно различными буквами, не входящими в запись слова  $\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi, \tau)$ . Затем выполним подстановку

$$(z_{p_1}, z_{p_2}, \dots, z_{p_q}, z_{r_1}, z_{r_2}, \dots, z_{r_q}) \mapsto (z_1, z_2, \dots, z_q, z_{q+1}, z_{q+2}, \dots, z_{2q}).$$

В результате мы получим слово

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_0 z_1 \mathbf{u}'_1 \cdots z_q \mathbf{u}'_q x z_{\rho(1)} z_{q+\sigma(1)} \cdots z_{\rho(q)} z_{q+\sigma(q)} x \mathbf{u}'_{q+1} z_{q+1} \cdots \mathbf{u}'_{2q} z_{2q} \mathbf{u}'_{2q+1}$$

для подходящих подстановок  $\rho, \sigma \in S_q$  и некоторых слов  $\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_{2q+1}$ .

Затем выполним подстановку  $(t_1, t_2, \dots, t_{2q}) \mapsto (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_{2q})$  в тождество  $\mathbf{w}_q(\rho, \sigma) \approx \mathbf{w}'_q(\rho, \sigma)$  и получим тождество

$$\begin{aligned}
& z_1 \mathbf{u}'_1 \cdots z_q \mathbf{u}'_q x z_{\rho(1)} z_{q+\sigma(1)} \cdots z_{\rho(q)} z_{q+\sigma(q)} x \mathbf{u}'_{q+1} z_{q+1} \cdots \mathbf{u}'_{2q} z_{2q} \\
& \approx z_1 \mathbf{u}'_1 \cdots z_q \mathbf{u}'_q x^2 z_{\rho(1)} z_{q+\sigma(1)} \cdots z_{\rho(q)} z_{q+\sigma(q)} \mathbf{u}'_{q+1} z_{q+1} \cdots \mathbf{u}'_{2q} z_{2q}.
\end{aligned}$$

Далее, применив последнее тождество к слову  $\mathbf{u}'$ , выводим тождество

$$\mathbf{u}' \approx \mathbf{u}'_0 z_1 \mathbf{u}'_1 \cdots z_q \mathbf{u}'_q x^2 z_{\rho(1)} z_{q+\sigma(1)} \cdots z_{\rho(q)} z_{q+\sigma(q)} \mathbf{u}'_{q+1} z_{q+1} \cdots \mathbf{u}'_{2q} z_{2q} \mathbf{u}'_{2q+1}.$$

Наконец, проведем переименование букв в этом тождестве, обратное к сделанному выше. Мы получим тождество

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi, \tau) & \approx \mathbf{u}_0 z_{p_1} \mathbf{u}_1 \cdots z_{p_q} \mathbf{u}_q x^2 z_{\pi(k+1)} z_{m+\tau(k+1)} \cdots z_{\pi(\ell)} z_{m+\tau(\ell)} x \\
& \cdot \mathbf{u}_{q+1} z_{r_1} \cdots \mathbf{u}_{2q} z_{r_q} \mathbf{u}_{2q+1} = \mathbf{w}_m^{k,k}(\pi, \tau).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

Теперь мы можем завершить доказательство необходимости в теореме 3.1. Напомним, что мы свели наши рассуждения к случаю, когда  $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{O}$ . Обозначим через  $\mathcal{K}$  класс всех многообразий вида  $\text{var } S(\mathbf{w}_n(\pi, \tau))$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , а  $\pi, \tau \in S_n$ . Ясно, что если  $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$ , то  $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{X}$ . Ниже мы неоднократно будем использовать этот факт, не ссылаясь на него

явно. Пусть  $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$ . Проверим, что в этом случае  $\mathbf{X}$  содержит по крайней мере два несравнимых подмногообразия из класса  $\mathcal{K}$ .

Для произвольной подстановки  $\xi \in S_n$  определим другие две подстановки из  $S_{n+2}$ :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \xi(1)+2 & 1 & 2 & \xi(2)+2 & \xi(3)+2 & \dots & \xi(n)+2 \end{pmatrix}, \\ \xi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \xi(1)+2 & 2 & 1 & \xi(2)+2 & \xi(3)+2 & \dots & \xi(n)+2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Если  $\mathbf{X} = \text{var } S(\mathbf{w}_n(\pi, \tau))$  для некоторых  $n$ ,  $\pi$  и  $\tau$ , то положим  $T_1 = S(\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1, \tau_1))$  и  $T_2 = S_{n+2}(\mathbf{w}_{n+2}(\pi_2, \tau_1))$ . Если  $T_1 \notin \mathbf{X}$ , то, по лемме 3.10,  $\mathbf{X}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}_{n+2}^{k,\ell}(\pi_1, \tau_1)$  для некоторых  $1 \leq k \leq \ell \leq n+2$ . Подставим

- 1 вместо  $z_1, z_2, z_{n+3}, z_{n+4}, t_1, t_2, t_{n+3}$  и  $t_{n+4}$ ,
- $z_{i-2}$  вместо  $z_i$  при  $3 \leq i \leq n+2$ , и  $z_{i-4}$  вместо  $z_i$  при  $n+5 \leq i \leq 2n+4$ ,
- $t_{i-2}$  вместо  $t_i$  при  $3 \leq i \leq n+2$ , и  $t_{i-4}$  вместо  $t_i$  при  $n+5 \leq i \leq 2n+4$

в тождество  $\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}_{n+2}^{k,\ell}(\pi_1, \tau_1)$ . Мы получим, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_n(\pi, \tau) \approx \mathbf{w}_n^{s,t}(\pi, \tau)$ , где

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } k \leq 3, \\ k-2, & \text{если } k > 3, \end{cases} \quad \text{а} \quad t = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell \leq 3, \\ \ell-2, & \text{если } \ell > 3. \end{cases}$$

Поскольку  $s \geq 1$ , полученное тождество нетривиально. Следовательно, мы получили противоречие с тем, что  $\mathbf{X} = \text{var } S(\mathbf{w}_n(\pi, \tau))$  и леммой 1.7. Таким образом, мы доказали, что  $T_1 \in \mathbf{X}$ . Аналогичным образом можно показать, что  $T_2 \in \mathbf{X}$ .

Предположим, что  $T_1 \in \text{var } T_2$ . По лемме 1.7, слово  $\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1, \tau_1)$  является изотермом для многообразия  $\text{var } T_2$ . В то же время, легко проверить, что  $\text{var } T_2$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}'_{n+2}(\pi_1, \tau_1)$ . Следовательно,  $\text{var } T_1 \not\subseteq \text{var } T_2$ . Аналогично,  $\text{var } T_2 \not\subseteq \text{var } T_1$ . Мы видим, что многообразия  $\text{var } T_1$  и  $\text{var } T_2$  несравнимы. Кроме того, очевидно, что они оба лежат в  $\mathcal{K}$ .

Таким образом, мы показали, что если  $\mathbf{X} = \text{var } S(\mathbf{w}_n(\pi, \tau))$  для некоторых  $n$ ,  $\pi$  и  $\tau$ , то многообразие  $\mathbf{X}$  не является цепным. Следовательно,  $S(\mathbf{w}_n(\pi, \tau)) \notin \mathbf{V}$  для всех  $n$ ,  $\pi$  и  $\tau$ . Для произвольного  $n$  обозначим тривиальную подстановку из  $S_n$  через  $\varepsilon$ . По лемме 3.10,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет нетривиальному тождеству вида  $\mathbf{w}_1(\varepsilon, \varepsilon) \approx \mathbf{w}_1^{k,\ell}(\varepsilon, \varepsilon)$  для некоторых  $0 \leq k \leq \ell \leq 1$ . Поскольку  $\mathbf{w}_1^{0,0}(\varepsilon, \varepsilon) = \mathbf{w}'_1(\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\mathbf{w}_1^{0,1}(\varepsilon, \varepsilon) = \mathbf{w}_1(\varepsilon, \varepsilon)$  и тождество  $\mathbf{w}_1(\varepsilon, \varepsilon) \approx \mathbf{w}_1^{k,\ell}(\varepsilon, \varepsilon)$  нетривиально, мы видим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет одному из тождеств  $\mathbf{w}_1(\varepsilon, \varepsilon) \approx \mathbf{w}'_1(\varepsilon, \varepsilon)$  и  $\mathbf{w}_1(\varepsilon, \varepsilon) \approx \mathbf{w}_1^{1,1}(\varepsilon, \varepsilon)$ . Ясно, что второе тождество вместе с тождеством (3.15) влечет первое. Следовательно,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_1(\varepsilon, \varepsilon) \approx \mathbf{w}'_1(\varepsilon, \varepsilon)$ .

Таким образом, найдется такое число  $n$ , что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам вида (3.12) для всех  $\pi, \tau \in S_n$  (например,  $n = 1$ ). Проверим, что любое  $n$  обладает этим свойством. Предположим, что утверждение верно для

$n = 1, 2, \dots, r$ . Проверим, что оно верно для  $n = r + 1$ . Возьмем произвольные  $\pi_1, \tau_1 \in S_{r+1}$ . Поскольку  $S(\mathbf{w}_{r+1}(\pi_1, \tau_1)) \notin \mathbf{V}$ , из леммы 3.10 следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_{r+1}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}_{r+1}^{k,\ell}(\pi_1, \tau_1)$  для некоторых  $0 \leq k \leq \ell < r + 1$ . Если  $k < \ell$ , то применим лемму 3.11 при  $m = r + 1$ ,  $\pi = \pi_1$  и  $\tau = \tau_1$  и получим, что существуют такие подстановки  $\rho, \sigma \in S_{\ell-k}$ , что тождество  $\mathbf{w}_{\ell-k}(\rho, \sigma) \approx \mathbf{w}'_{\ell-k}(\rho, \sigma)$  влечет тождество  $\mathbf{w}_{r+1}^{k,\ell}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}_{r+1}^{k,k}(\pi_1, \tau_1)$ . Первое из этих тождеств выполнено в  $\mathbf{V}$ , так как  $\ell - k \leq r$ . Следовательно,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_{r+1}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}_{r+1}^{k,k}(\pi_1, \tau_1)$  при любых  $0 \leq k \leq \ell < r + 1$ . Заметим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет также тождеству  $\mathbf{w}_{r+1}^{k,k}(\pi_1, \tau_1) \stackrel{(3.15)}{\approx} \mathbf{w}_{r+1}^{0,0}(\pi_1, \tau_1) = \mathbf{w}'_{r+1}(\pi_1, \tau_1)$ . Таким образом, в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{w}_{r+1}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}'_{r+1}(\pi_1, \tau_1)$  для любых  $\pi_1, \tau_1 \in S_{r+1}$ . Следовательно,  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ .

Мы завершили доказательство необходимости в теореме 3.1.

### 3.3. Доказательство достаточности: все многообразия, кроме $\mathbf{K}$

В этом и следующем разделах мы докажем, что если  $\mathbf{X}$  — подмногообразие одного из многообразий, перечисленных в теореме 3.1, то  $\mathbf{X}$  является цепным. Поскольку свойство быть цепным многообразием наследуется подмногообразиями, можно считать, что  $\mathbf{X}$  совпадает с одним из многообразий, перечисленных в теореме 3.1. В силу симметрии, мы можем исключить из рассмотрения многообразия  $\overleftarrow{\mathbf{K}}$  и  $\overleftarrow{\mathbf{N}}$ . Таким образом, нам достаточно проверить, что многообразия  $\mathbf{C}_n$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{LRB}$ ,  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{RRB}$  являются цепными. В данном разделе мы рассмотрим все перечисленные многообразия, кроме многообразия  $\mathbf{K}$ , которому будет посвящен раздел 3.4.

Из лемм 1.12 и 1.13(ii) следует, что многообразия  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{LRB}$  и  $\mathbf{RRB}$  являются цепными. Остается рассмотреть многообразия  $\mathbf{C}_n$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{N}$ .

**Предложение 3.12.** *Решетка  $L(\mathbf{C}_n)$  является цепью*

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{C}_3 \subset \dots \subset \mathbf{C}_n.$$

*Доказательство.* Обозначим через  $\mathbf{V}$  произвольное подмногообразие многообразия  $\mathbf{C}_n$ . Ясно, что  $\mathbf{V}$  коммутативно и комбинаторно. Если  $\mathbf{C}_2 \not\subseteq \mathbf{V}$ , то, согласно следствию 1.10,  $\mathbf{V}$  вполне регулярно. В этом случае  $\mathbf{V}$  совпадает либо с  $\mathbf{T}$ , либо с  $\mathbf{SL}$ . Следовательно, нам остается доказать, что если  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_n$ , то  $\mathbf{V} = \mathbf{C}_s$  для некоторого  $2 \leq s \leq n$ . Будем доказывать это индукцией по  $n$ . Если  $n = 2$ , то требуемое утверждение очевидно. Пусть теперь  $n > 2$ . Предположим, что  $\mathbf{V} \neq \mathbf{C}_n$ . Тогда из леммы 1.9 следует, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $x^{n-1} \approx x^n$ . Это означает, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_{n-1}$ . Тогда, согласно предположению индукции,  $\mathbf{V} = \mathbf{C}_s$  для некоторого  $2 \leq s \leq n - 1$ .  $\square$

Из леммы 3.7 и [31, лемма 5.10] следует, что любое собственное подмногообразие многообразия  $\mathbf{L}$  содержится в  $\text{var } S(xyx)$ . Теперь из лемм 1.11 и 1.12 вытекает

**Предложение 3.13.** *Решетка  $L(\mathbf{L})$  является цепью  $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{L}$ .*  $\square$



**Предложение 3.14.** Решетка  $L(\mathbf{N})$  является цепью

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{N}.$$

*Доказательство.* Проверим сначала, что  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождеству вида (3.11) для всех  $n, m$  и  $\theta \in S_{n+m}$ . Положим

$$\mathbf{p} = z_1 t_1 \cdots z_n t_n, \mathbf{q} = z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m)} \text{ и } \mathbf{r} = t_{n+1} z_{n+1} \cdots t_{n+m} z_{n+m}.$$

Тогда  $\mathbf{w}_{n,m}(\theta) = \mathbf{p} \mathbf{x} \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{r}$ . Предположим сначала, что  $\theta(n+m) \leq n$ . Тогда

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) = z_1 t_1 \cdots z_{\theta(n+m)}^{(1)} t_{\theta(n+m)} \cdots z_n t_n^{(1)} x z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m)}^{(2)} x \mathbf{r}.$$

Мы видим, что вторые вхождения букв  $z_{\theta(n+m)}$  и  $x$  в  $\mathbf{w}_{n,m}(\theta)$  смежны друг с другом. Тождество  $\sigma_2$  позволяет нам переставить местами эти вхождения. Иными словами,  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \stackrel{\sigma_2}{\approx} \mathbf{p} \mathbf{x} z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m-1)} x z_{\theta(n+m)} \mathbf{r}.$$

Предположим теперь, что  $\theta(n+m) > n$ . Тогда

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) = \mathbf{p} x^{(1)} z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m)}^{(1)} x^{(2)} t_{n+1} z_{n+1} \cdots t_{\theta(n+m)} z_{\theta(n+m)}^{(2)} \cdots t_{n+m} z_{n+m}.$$

Мы видим, что первое вхождение буквы  $z_{\theta(n+m)}$  и второе вхождение буквы  $x$  в  $\mathbf{w}_{n,m}(\theta)$  смежны друг с другом. Тождество  $\gamma_1$  позволяет нам переставить местами эти вхождения. Иными словами,  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \stackrel{\gamma_1}{\approx} \mathbf{p} \mathbf{x} z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m-1)} x z_{\theta(n+m)} \mathbf{r}.$$

Таким образом, в любом случае тождество

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \approx \mathbf{p} \mathbf{x} z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m-1)} x z_{\theta(n+m)} \mathbf{r}$$

выполнено в  $\mathbf{N}$ . Аналогичным образом мы можем последовательно переставить второе вхождение  $x$  с буквами  $z_{\theta(n+m-1)}, z_{\theta(n+m-2)}, \dots, z_{\theta(1)}$  и получить, что  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \approx \mathbf{p} \mathbf{x}^2 z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m)} \mathbf{r} = \mathbf{p} \mathbf{x}^2 \mathbf{q} \mathbf{r} = \mathbf{w}'_{n,m}(\theta).$$

Это позволяет нам применять ниже лемму 3.6.

Предположим, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{N}$ . Если  $\mathbf{M} \not\subseteq \mathbf{V}$ , то, по лемме 3.9(ii),  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}$ , откуда следует, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_2$ . Поэтому, в силу леммы 1.12, достаточно рассмотреть случай, когда  $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ . Проверим, что  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{M}$  или  $\mathbf{N}$ . Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — произвольное тождество, выполненное в  $\mathbf{V}$ . Проверим, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  либо влечет тождество  $\alpha_1$ , либо выполнено в многообразии  $\mathbf{N}$ . Из предложения 1.6 следует, что  $\text{sim}(\mathbf{u}) = \text{sim}(\mathbf{v})$ . Пусть  $\text{sim}(\mathbf{u}) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ . Как и в доказательстве леммы 3.7, мы можем считать, что

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{a}_1 t_1 \mathbf{a}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{a}_m t_m \text{ и } \mathbf{v} = t_0 \mathbf{b}_1 t_1 \mathbf{b}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{b}_m t_m$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  и  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ .

Пусть  $x$  — такая кратная в слове  $\mathbf{u}$  буква, что  $\mathbf{u}(x, y) \neq xyx$  для любой буквы  $y$ . По лемме 3.6, многообразию  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.16). В силу предложения 1.6,  $x \in \text{mul}(\mathbf{v})$ . Поскольку  $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ , из лемм 1.7 и 1.11 следует, что слово  $xyx$  является изотермом для  $\mathbf{V}$ . Следовательно,  $\mathbf{v}(x, y) \neq xyx$  для любой буквы  $y$ . Снова применим лемму 3.6 и получим, что тождество  $\mathbf{v} \approx x^2\mathbf{v}_x$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Следовательно, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  является следствием всех тождеств вида (3.16) вместе с тождествами  $\mathbf{v} \approx x^2\mathbf{v}_x$  и  $\mathbf{u}_x \approx \mathbf{v}_x$ . Таким образом, мы можем удалить из тождества  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  все такие кратные буквы  $x$ , что  $\mathbf{u}(x, y) \neq xyx$  для любого  $y$ . Иными словами, можно считать, что для любой буквы  $x \in \text{mul}(\mathbf{u})$  существует такая буква  $y$ , что  $\mathbf{u}(x, y) = xyx = \mathbf{v}(x, y)$ . В частности,  $\text{oss}_x(\mathbf{u}), \text{oss}_x(\mathbf{v}) \leq 2$  для любой буквы  $x$ .

Пусть  $0 \leq i \leq m - 1$ . Тогда  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{a}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2$ , где выполняются равенства (3.18). Аналогично,  $\mathbf{v} = \mathbf{w}'_1 t_i \mathbf{b}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}'_2$ , где справедливы равенства (3.20). Предположим, что слово  $\mathbf{a}_{i+1}$  содержит подслово  $\mathbf{d} = x_i x_j$ , где  $x_i \in \text{con}(\mathbf{w}_1)$ , а  $x_j \in \text{con}(\mathbf{w}_2)$ . Тогда вхождение буквы  $x_i$  в слово  $\mathbf{d}$  является вторым вхождением  $x_i$  в  $\mathbf{u}$ , а вхождение буквы  $x_j$  в слово  $\mathbf{d}$  — первым вхождением этой буквы в  $\mathbf{u}$ . Тождество  $\gamma_1$  позволяет переставить эти два вхождения местами. Следовательно, многообразию  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2$ , где  $\text{con}(\mathbf{p}_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_2)$  и  $\text{con}(\mathbf{q}_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_1)$ . Аналогичным образом мы можем показать, что  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{v} \approx \mathbf{w}'_1 t_i \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2 t_{i+1} \mathbf{w}'_2$ , где  $\text{con}(\mathbf{p}_2) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}'_2)$  и  $\text{con}(\mathbf{q}_2) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}'_1)$ .

Проверим, что  $\text{con}(\mathbf{p}_1) = \text{con}(\mathbf{p}_2)$  и  $\text{con}(\mathbf{q}_1) = \text{con}(\mathbf{q}_2)$ . Возьмем  $x \in \text{con}(\mathbf{p}_1)$ . Тогда  $\mathbf{u}(x, t_{i+1}) = x t_{i+1} x$ . Поэтому  $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) = x t_{i+1} x$ . Это означает, что  $x \in \text{con}(\mathbf{w}'_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2)$  и  $x \in \text{con}(\mathbf{w}'_2)$ . Если  $x \in \text{con}(\mathbf{q}_2)$ , то  $x \in \text{con}(\mathbf{w}'_1)$ , откуда вытекает, что  $\text{oss}_x(\mathbf{v}) \geq 3$ . Следовательно,  $x \notin \text{con}(\mathbf{q}_2)$ . Заметим, что  $\mathbf{u}(x, t_i) = t_i x^2$ . Тогда  $\mathbf{v}(x, t_i) \neq x t_i x$ , откуда  $x \notin \text{con}(\mathbf{w}'_1)$ . Следовательно,  $x \in \text{con}(\mathbf{p}_2)$ . Таким образом, мы доказали, что  $\text{con}(\mathbf{p}_1) \subseteq \text{con}(\mathbf{p}_2)$ . В силу симметрии,  $\text{con}(\mathbf{p}_2) \subseteq \text{con}(\mathbf{p}_1)$ , и потому  $\text{con}(\mathbf{p}_1) = \text{con}(\mathbf{p}_2)$ . Аналогичные рассуждения показывают, что  $\text{con}(\mathbf{q}_1) = \text{con}(\mathbf{q}_2)$ .

Таким образом,  $\mathbf{p}_1 = x_1 x_2 \cdots x_k$  и  $\mathbf{p}_2 = x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(k)}$  для некоторых букв  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \text{con}(\mathbf{w}_2) \cap \text{con}(\mathbf{w}'_2)$  и некоторой подстановки  $\pi \in S_k$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 t_i x_1 x_2 \cdots x_k \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2 \text{ и } \mathbf{v} \approx \mathbf{w}'_1 t_i x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(k)} \mathbf{q}_2 t_{i+1} \mathbf{w}'_2.$$

Тогда в  $\mathbf{N}$  выполнено тождество

$$\mathbf{w}_1 t_i x_1 x_2 \cdots x_k \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}'_1 t_i x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(k)} t_{i+1} \mathbf{q}_2 \mathbf{w}'_2. \quad (3.24)$$

Предположим, что подстановка  $\pi$  не является тривиальной. Тогда существуют такие  $j$  и  $\ell$ , что  $j < \ell$ , но  $\pi(j) > \pi(\ell)$ . Подставляя 1 вместо всех букв, входящих в тождество (3.24), кроме  $x_j, x_\ell$  и  $t_{i+1}$ , мы получим тождество  $x_j x_\ell t_{i+1} \mathbf{s} \approx x_\ell x_j t_{i+1} \mathbf{s}'$ , где  $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \{x_j x_\ell, x_\ell x_j\}$ . Теперь применим тождество  $\sigma_2$  и получим тождество  $x_j x_\ell t_{i+1} x_j x_\ell \approx x_\ell x_j t_{i+1} x_j x_\ell$ . Переименованием букв из последнего тождества можно получить тождество  $\alpha_1$ . Итак, если подстановка  $\pi$  нетривиальна, то  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\alpha_1$ . Это означает, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{M}$ , откуда  $\mathbf{V} = \mathbf{M}$ . Иными словами, если  $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$ , то  $\mathbf{V} = \mathbf{M}$ .

Пусть теперь  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ . Слова  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  линейны и  $\text{con}(\mathbf{q}_1) = \text{con}(\mathbf{q}_2) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_1) \cap \text{con}(\mathbf{w}'_1)$ . Поэтому если  $x_i$  входит в  $\text{con}(\mathbf{q}_1)$ , то это вхождение является вторым вхождением  $x_i$  в слово  $\mathbf{w}_1 t_i x_1 x_2 \cdots x_k \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2$ . Тождество  $\sigma_2$  позволяет нам изменить произвольным образом порядок букв в подслове  $\mathbf{q}_1$ . Поэтому если мы заменим  $\mathbf{q}_1$  на  $\mathbf{q}_2$  в слове  $\mathbf{w}_1 t_i x_1 x_2 \cdots x_k \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2$ , то полученное слово будет равно  $\mathbf{u}$  в многообразии  $\mathbf{N}$ . Следовательно,  $\mathbf{N}$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{a}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2 t_{i+1} \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{b}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2.$$

Это верно для  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Следовательно, в  $\mathbf{N}$  выполнено тождество

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{a}_1 t_1 \mathbf{a}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{a}_m t_m \approx t_0 \mathbf{b}_1 t_1 \mathbf{b}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{b}_m t_m = \mathbf{v},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

### 3.4. Доказательство достаточности: многообразие $\mathbf{K}$

В данном разделе мы проверим, что многообразие  $\mathbf{K}$  является цепным. Этот случай намного сложнее, чем все рассмотренные в предыдущем разделе вместе взятые. Для удобства читателя, этот раздел делится на четыре подраздела.

#### 3.4.1. Редукция к интервалу $[\mathbf{E}, \mathbf{K}]$

Положим

$$\Phi = \{xyx \approx xyx^2, x^2y^2 \approx y^2x^2, x^2y \approx x^2yx\}.$$

Заметим, что  $\mathbf{K} = \text{var } \Phi$ . Для любых  $k \in \mathbb{N}$  и  $1 \leq m \leq k$  положим

$$\mathbf{b}_{k,m} = x_{k-1} x_k x_{k-2} x_{k-1} \cdots x_{m-1} x_m$$

и  $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{k,1}$ ; будем полагать также, что  $\mathbf{b}_0 = \lambda$ . Введем обозначения для следующих четырех счетных серий тождеств:

$$\begin{aligned} \alpha_k &: x_k y_k x_{k-1} x_k y_k \mathbf{b}_{k-1} \approx y_k x_k x_{k-1} x_k y_k \mathbf{b}_{k-1}, \\ \beta_k &: x x_k x \mathbf{b}_k \approx x_k x^2 \mathbf{b}_k, \\ \gamma_k &: y_1 y_0 x_k y_1 \mathbf{b}_k \approx y_1 y_0 y_1 x_k \mathbf{b}_k, \\ \delta_k^m &: y_{m+1} y_m x_k y_{m+1} \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1} \approx y_{m+1} y_m y_{m+1} x_k \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1}, \end{aligned}$$

где  $k \in \mathbb{N}$  и  $1 \leq m \leq k$ . Заметим, что тождества  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$  уже появлялись выше. Определим следующие четыре счетные серии многообразий:

$$\mathbf{F}_k = \text{var}\{\Phi, \alpha_k\}, \mathbf{H}_k = \text{var}\{\Phi, \beta_k\}, \mathbf{I}_k = \text{var}\{\Phi, \gamma_k\}, \mathbf{J}_k^m = \text{var}\{\Phi, \delta_k^m\}.$$

Следующее утверждение описывает строение решетки  $L(\mathbf{K})$ . Его доказательству и посвящен весь раздел 3.4.

**Предложение 3.15.** 1) Решетка  $L(\mathbf{K})$  является теоретико-множественным объединением решетки  $L(\mathbf{E})$  и интервала  $[\mathbf{E}, \mathbf{K}]$ .

- 2) Решетка  $L(\mathbf{E})$  является цепью  $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{E}$ .
- 3) Если  $\mathbf{X}$  — такое многообразие моноидов, что  $\mathbf{E} \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{K}$ , то  $\mathbf{X}$  принадлежит интервалу  $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$  для некоторого  $k$ .
- 4) Интервал  $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$  является цепью

$$\mathbf{F}_k \subset \mathbf{H}_k \subset \mathbf{I}_k \subset \mathbf{J}_k^1 \subset \mathbf{J}_k^2 \subset \dots \subset \mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{F}_{k+1}. \quad (3.25)$$

Из предложения 3.15 следует, что решетка  $L(\mathbf{K})$  является цепью

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{E} \subset \mathbf{F}_1 \subset \mathbf{H}_1 \subset \mathbf{I}_1 \subset \mathbf{J}_1^1 \\ \subset \mathbf{F}_2 \subset \mathbf{H}_2 \subset \mathbf{I}_2 \subset \mathbf{J}_2^1 \subset \mathbf{J}_2^2 \\ \vdots \\ \subset \mathbf{F}_k \subset \mathbf{H}_k \subset \mathbf{I}_k \subset \mathbf{J}_k^1 \subset \mathbf{J}_k^2 \subset \dots \subset \mathbf{J}_k^k \\ \vdots \\ \subset \mathbf{K}. \end{aligned}$$

В оставшейся части данного подраздела мы проверим утверждение 1) предложения 3.15. Утверждение 2) следует из леммы 1.14(ii). Утверждения 3) и 4) доказываются в подразделах 3.4.3 и 3.4.4 соответственно, а подраздел 3.4.2 содержит некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть  $\mathbf{X}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{K}$ . Проверим, что либо  $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ , либо  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}$ . Подставляя 1 вместо буквы  $y$  в тождество (3.9), мы получим, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству (3.5). Если  $\mathbf{X}$  коммутативно, то  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{E}$ , что и требовалось доказать. Следовательно, мы можем предположить, что  $\mathbf{X}$  не является коммутативным. Ясно, что многообразие  $\mathbf{X}$  является комбинаторным, поскольку оно удовлетворяет тождеству (3.5). Предположим, что  $\mathbf{X}$  вполне регулярно. Всякое комбинаторное вполне регулярное многообразие является многообразием идемпотентных моноидов, а каждый идемпотентный моноид, удовлетворяющий тождеству (3.4), коммутативен. Следовательно,  $\mathbf{X}$  не может быть вполне регулярным. Тогда, по лемме 1.18,  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$ .

Предположим, что  $\mathbf{E} \not\subseteq \mathbf{X}$ . Тогда из леммы 3.4 вытекает, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству (3.6). Кроме того, в  $\mathbf{X}$  выполнено тождество (3.10), поскольку  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{K}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождествам

$$x^2y \stackrel{(3.10)}{\approx} x^2yx^2 \stackrel{(3.6)}{\approx} yx^2.$$

Мы видим, что в  $\mathbf{X}$  выполняется тождество (3.15), а также тождества

$$xyx \stackrel{(3.9)}{\approx} xyx^2 \stackrel{(3.6)}{\approx} x^3yx^2 \stackrel{(3.5)}{\approx} x^2yx^2 \stackrel{(3.6)}{\approx} yx^2 \stackrel{(3.15)}{\approx} x^2y.$$

Следовательно, в  $\mathbf{X}$  выполнено тождество

$$xyx \approx x^2y. \quad (3.26)$$

Из тождеств (3.15) и (3.26), очевидно, вытекают тождества  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\gamma_1$ . Следовательно,  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{E}$ . Таким образом, мы показали, что если  $\mathbf{E} \not\subseteq \mathbf{X}$ , то  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}$ . Утверждение 1) предложения 3.15 доказано.

### 3.4.2. Несколько вспомогательных результатов

В этом подразделе мы докажем несколько полезных для дальнейшего утверждений.

**Лемма 3.16.** *Многообразия  $\mathbf{K}$  удовлетворяют:*

(i) тождеству  $\sigma_2$ ;

(ii) тождеству

$$xuxzx \approx xuxz; \quad (3.27)$$

(iii) любому такому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , что  $\text{con}(\mathbf{u}) = \text{con}(\mathbf{v})$  и  $\text{осс}_x(\mathbf{u}), \text{осс}_x(\mathbf{v}) \geq 2$  для любого  $x \in \text{con}(\mathbf{u})$ .

*Доказательство.* (i) Достаточно заметить, что многообразие  $\mathbf{K}$  удовлетворяет тождествам  $xzytxy \stackrel{(3.9)}{\approx} xzytx^2y^2 \stackrel{(3.4)}{\approx} xzyty^2x^2 \stackrel{(3.9)}{\approx} xzytyx$ .

(ii) В этом случае достаточно заметить, что в  $\mathbf{K}$  выполнены тождества

$$xuxzx \stackrel{(3.9)}{\approx} xux^2zx \stackrel{(3.10)}{\approx} xux^2z \stackrel{(3.9)}{\approx} xuxz.$$

(iii) Из утверждения (ii) следует, что  $\mathbf{K}$  удовлетворяет тождеству (3.27). Этот факт позволяет нам считать, что  $\text{осс}_x(\mathbf{u}) = \text{осс}_x(\mathbf{v}) = 2$  для любой буквы  $x \in \text{con}(\mathbf{u})$ . Пусть  $\text{con}(\mathbf{u}) = \text{con}(\mathbf{v}) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ . Проверим, что в  $\mathbf{K}$  выполнено тождество  $\mathbf{u} \approx x_1^2x_2^2 \cdots x_k^2$ . Докажем это индукцией по  $k$ .

*База индукции.* Если  $k = 1$ , то тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид  $x_1^2 \approx x_1^2$ . Очевидно, что оно выполняется в  $\mathbf{K}$ .

*Шаг индукции.* Пусть теперь  $k > 1$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_i) < \ell_1(\mathbf{u}, x_k)$  для любого  $1 \leq i < k$ . Тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'x_kx_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_s}x_kx_{j_{s+1}}x_{j_{s+2}} \cdots x_{j_{s+t}},$$

где  $x_{j_r} \in \text{con}(\mathbf{u}')$  для всех  $1 \leq r \leq s + t$ . Тогда в  $\mathbf{K}$  выполнены тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\stackrel{(3.9)}{\approx} \mathbf{u}'x_kx_{j_1}^2x_{j_2}^2 \cdots x_{j_s}^2x_k^2x_{j_{s+1}}^2x_{j_{s+2}}^2 \cdots x_{j_{s+t}}^2 \stackrel{(3.4)}{\approx} \mathbf{u}'x_k^3x_{j_1}^2x_{j_2}^2 \cdots x_{j_{s+t}}^2 \\ &\stackrel{(3.5)}{\approx} \mathbf{u}'x_k^2x_{j_1}^2x_{j_2}^2 \cdots x_{j_{s+t}}^2 \stackrel{(3.4)}{\approx} \mathbf{u}'x_{j_1}^2x_{j_2}^2 \cdots x_{j_{s+t}}^2x_k^2 \stackrel{(3.27)}{\approx} \mathbf{u}'x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_{s+t}}x_k^2 \\ &= \mathbf{u}_{x_k}x_k^2. \end{aligned}$$

Слово  $\mathbf{u}_{x_k}$  содержит в точности  $k - 1$  букву. Согласно предположению индукции, тождество  $\mathbf{u}_{x_k} \approx x_1^2x_2^2 \cdots x_{k-1}^2$  выполнено в многообразии  $\mathbf{K}$ , откуда следует, что это многообразие удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_{x_k}x_k^2 \approx x_1^2x_2^2 \cdots x_k^2$ . Аналогичным образом можно доказать, что в  $\mathbf{K}$  выполнено тождество  $\mathbf{v} \approx x_1^2x_2^2 \cdots x_k^2$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{K}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ .  $\square$

**Лемма 3.17.** *Система тождеств  $\Phi$  вместе с тождеством*

$$xx_kx\mathbf{b}_k \approx x^2x_k\mathbf{b}_k \quad (3.28)$$

*образует базис тождеств многообразия  $\mathbf{J}_k^k$ .*

*Доказательство.* Отметим сначала, что в многообразии  $\mathbf{J}_k^k$  выполнено тождество (3.28). Чтобы убедиться в этом, достаточно выполнить подстановку  $(y_k, y_{k+1}) \mapsto (1, x)$  в тождество  $\delta_k^k$  и воспользоваться равенством  $\mathbf{b}_k = x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1}$ . Таким образом, нам остается проверить, что тождество  $\delta_k^k$  является следствием системы тождеств  $\Phi$  и тождества (3.28). Ввиду леммы 3.16, мы можем использовать тождества  $\sigma_2$  и (3.27). Вот требуемый вывод (буквы в правом столбце отсылают к комментариям после вывода):

$$\begin{aligned}
y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}\mathbf{b}_{k,k}y_k\mathbf{b}_{k-1} &= y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}x_{k-1}x_ky_k\mathbf{b}_{k-1} & (a) \\
&\approx y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}x_{k-1}y_kx_k\mathbf{b}_{k-1} & (b) \\
&\approx y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}y_kx_k\mathbf{b}_{k-1} & (c) \\
&\approx y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}x_ky_k\mathbf{b}_{k-1} & (d) \\
&= y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}x_ky_kx_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2} & (e) \\
&\approx y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}x_ky_kx_{k-2}x_kx_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-2} & (f) \\
&\approx y_{k+1}y_ky_{k+1}x_kx_{k-1}x_ky_kx_{k-2}x_kx_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-2} & (g) \\
&\approx y_{k+1}y_ky_{k+1}x_kx_{k-1}x_ky_kx_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2} & (h) \\
&= y_{k+1}y_ky_{k+1}x_k\mathbf{b}_{k,k}y_k\mathbf{b}_{k-1}. & (i)
\end{aligned}$$

(a) Здесь мы используем равенство  $\mathbf{b}_{k,k} = x_{k-1}x_k$ .

(b) Здесь мы изменяем слово  $y_kx_ky_{k+1}x_{k-1}x_ky_k$ , используя тождество, полученное из  $\sigma_2$  подстановкой  $(x, t, y, z) \mapsto (y_k, 1, x_k, y_{k+1}x_{k-1})$ .

(c) Здесь мы пользуемся тождеством, полученным из (3.28) подстановкой  $(x, x_k) \mapsto (y_{k+1}, y_kx_k)$ , и равенством  $\mathbf{b}_k = x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1}$ .

(d) Здесь мы изменяем подслово  $y_kx_kx_{k-1}y_kx_k$ , используя тождество, полученное из  $\sigma_2$  подстановкой  $(x, t, y, z) \mapsto (y_k, 1, x_k, x_{k-1})$ .

(e) Здесь мы используем равенство  $\mathbf{b}_{k-1} = x_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2}$ .

(f) Здесь мы добавляем два новых вхождения буквы  $x_k$  после второго вхождения этой буквы в слово  $y_{k+1}^2y_k \overset{(1)}{x_k} x_{k-1} \overset{(2)}{x_k} y_kx_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2}$ , используя тождество (3.27).

(g) Здесь мы пользуемся тождеством, полученным из (3.28) подстановкой  $(x, x_k, x_{k-1}) \mapsto (y_{k+1}, y_k, x_kx_{k-1}x_k)$ , и равенством

$$\mathbf{b}_k = x_{k-1}x_kx_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2}.$$

(h) Здесь мы удаляем третье и четвертое вхождения буквы  $x_k$  в слово  $y_{k+1}y_ky_{k+1} \overset{(1)}{x_k} x_{k-1} \overset{(2)}{x_k} y_kx_{k-2} \overset{(3)}{x_k} x_{k-1} \overset{(4)}{x_k} \mathbf{b}_{k-2}$ , используя тождество (3.27).

(i) Здесь используем равенства  $\mathbf{b}_{k-1} = x_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2}$  и  $\mathbf{b}_{k,k} = x_{k-1}x_k$ .  $\square$

**Лемма 3.18.** *Справедливы включения*

$$\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{J}_k^1 \subseteq \mathbf{J}_k^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbf{J}_k^k \subseteq \mathbf{F}_{k+1}. \quad (3.29)$$

*Доказательство.* Поскольку все многообразия, встречающиеся в цепочке (3.29), содержатся в  $\mathbf{K}$ , мы можем использовать лемму 3.16. В частности, эта лемма позволяет нам применять тождества  $\sigma_2$  и (3.27).

1°. *Включение  $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{H}_k$ .* Нам нужно проверить, что  $\beta_k$  следует из  $\Phi$  и  $\alpha_k$ . Вот соответствующий вывод:

$$\begin{aligned}
xx_kx\mathbf{b}_k &= xx_kxx_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1} && \text{поскольку } \mathbf{b}_k = x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1} \\
&\approx xx_kxx_{k-1}x_kx^2\mathbf{b}_{k-1} && \text{в силу (3.27)} \\
&\approx x_kx^2x_{k-1}x_kx^2\mathbf{b}_{k-1} && \text{выполняем подстановку} \\
& && (x_k, y_k) \mapsto (x_kx, x) \text{ в } \alpha_k \\
&\approx x_kx^2x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1} && \text{в силу (3.27)} \\
&= x_kx^2\mathbf{b}_k && \text{поскольку } \mathbf{b}_k = x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1}.
\end{aligned}$$

2°. *Включение  $\mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{I}_k$ .* В этом случае нужно проверить, что  $\gamma_k$  вытекает из  $\Phi$  и  $\beta_k$ . Действительно,

$$\begin{aligned}
y_1y_0x_ky_1\mathbf{b}_k &\approx y_1y_0x_ky_1^2\mathbf{b}_k && \text{в силу (3.27)} \\
&\approx y_1y_0y_1x_ky_1\mathbf{b}_k && \text{изменяем подслово } x_ky_1^2\mathbf{b}_k, \text{ используя} \\
& && \text{тождество, полученное из } \beta_k \\
& && \text{подстановкой } y_1 \text{ вместо } x \\
&\approx y_1y_0y_1x_k\mathbf{b}_k && \text{в силу (3.27)}.
\end{aligned}$$

3°. *Включение  $\mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{J}_k^1$ .* Нам достаточно установить, что  $\delta_k^1$  вытекает из  $\gamma_k$ . Поскольку  $\mathbf{b}_{k,1} = \mathbf{b}_k$  и  $\mathbf{b}_0 = \lambda$ , тождество  $\delta_k^1$  имеет вид

$$y_2y_1x_ky_2\mathbf{b}_ky_1 \approx y_2y_1y_2x_k\mathbf{b}_ky_1.$$

Чтобы вывести это тождество из  $\gamma_k$ , достаточно изменить слово  $y_2y_1x_ky_2\mathbf{b}_k$ , используя тождество, получающееся из  $\gamma_k$  подстановкой  $(y_0, y_1) \mapsto (y_1, y_2)$ .

4°. *Включение  $\mathbf{J}_k^m \subseteq \mathbf{J}_k^{m+1}$ , где  $1 \leq m < k$ .* Нам достаточно доказать, что  $\delta_k^{m+1}$  следует из  $\delta_k^m$ . Действительно, если мы сначала умножим  $\delta_k^m$  слева на слово  $x_{-1}x_0$ , а затем увеличим на 1 индекс каждой буквы в полученном тождестве, то в результате мы получим  $\delta_k^{m+1}$ .

5°. *Включение  $\mathbf{J}_k^k \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$ .* Ввиду леммы 3.17, нам достаточно установить, что  $\alpha_{k+1}$  следует из  $\Phi$  и (3.28). Вот соответствующий вывод:

$$\begin{aligned}
x_{k+1}y_{k+1}x_kx_{k+1}y_{k+1}\mathbf{b}_k &\approx (x_{k+1}y_{k+1})^2x_k\mathbf{b}_k && \text{(a)} \\
&\approx (y_{k+1}x_{k+1})^2x_k\mathbf{b}_k && \text{(b)} \\
&\approx y_{k+1}x_{k+1}x_ky_{k+1}x_{k+1}\mathbf{b}_k && \text{(c)} \\
&\approx y_{k+1}x_{k+1}x_kx_{k+1}y_{k+1}\mathbf{b}_k. && \text{(d)}
\end{aligned}$$

(a) Здесь мы используем тождество, получающееся из тождества (3.28) подстановкой  $x_ky_k$  вместо  $x$ .

(b) Здесь мы применяем тождество  $(xy)^2 \approx (yx)^2$ , которое выполнено в многообразии  $\mathbf{K}$  в силу леммы 3.16(iii).

(c) Здесь мы используем тождество, получающееся из тождества (3.28) подстановкой  $y_kx_k$  вместо  $x$ .

(d) Здесь мы используем тождество, получающееся из тождества  $\sigma_2$  подстановкой  $(x, t, y, z) \mapsto (y_{k+1}, 1, x_{k+1}, x_k)$ .  $\square$

Мы будем часто использовать включения (3.29) без ссылок на лемму 3.18. Отметим, что на самом деле справедливы строгие включения (3.25), которые мы докажем в конце раздела 3.4.

**Лемма 3.19.** Пусть  $\mathbf{u}$  — левая или правая часть одного из тождеств  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  и  $\delta_k^m$ . Тогда:

- 1) Если  $x_i, y_j \in \text{соп}(\mathbf{u})$ , то  $D(\mathbf{u}, x_i) = i$  и  $D(\mathbf{u}, y_j) = j$ . Глубина буквы  $x$  в левой [правой] части тождества  $\beta_k$  равна  $k + 1$  [соответственно  $\infty$ ].
- 2)  $k$ -разложение слова  $\mathbf{u}$  имеет вид, указанный в табл. 2.

Таблица 2:  $k$ -разложения некоторых слов

|                           | $k$ -разложение   |   |
|---------------------------|---|---|
|                           | левая часть   | правая часть  |
| $\alpha_k$                | $\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda} \cdot y_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k y_k}$<br>$\cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$   | $\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k y_k}$<br>$\cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$   |
| $\beta_k$                 | $\lambda \cdot \underline{x} \cdot x_k \cdot \underline{x} \cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k} \cdot x_{k-2}$<br>$\cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$   | $\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{x^2} \cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k} \cdot x_{k-2}$<br>$\cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$   |
| $\gamma_k$                | $\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_1 \cdot \underline{\lambda} \cdot y_0 \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{y_1} \cdot x_{k-1}$<br>$\cdot \underline{x_k} \cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$   | $\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_1 \cdot \underline{\lambda} \cdot y_0 \cdot \underline{y_1} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_{k-1}$<br>$\cdot \underline{x_k} \cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$   |
| $\delta_k^m$ ,<br>$m < k$ | $\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_{m+1} \cdot \underline{\lambda} \cdot y_m \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{y_{m+1}}$<br>$\cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k} \cdots x_{m-1} \cdot \underline{x_m y_m} \cdot x_{m-2}$<br>$\cdot \underline{x_{m-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$ | $\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_{m+1} \cdot \underline{\lambda} \cdot y_m \cdot \underline{y_{m+1}} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda}$<br>$\cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k} \cdots x_{m-1} \cdot \underline{x_m y_m} \cdot x_{m-2}$<br>$\cdot \underline{x_{m-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$ |
| $\delta_k^k$              | $\lambda \cdot \underline{y_{k+1}} \cdot y_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{y_{k+1}} \cdot x_{k-1}$<br>$\cdot \underline{x_k y_k} \cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0$<br>$\cdot \underline{x_1}$  | $\lambda \cdot \underline{y_{k+1}} \cdot y_k \cdot \underline{y_{k+1}} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_{k-1}$<br>$\cdot \underline{x_k y_k} \cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0$<br>$\cdot \underline{x_1}$  |

*Доказательство.* Как и в примере 1.22, в табл. 2 мы подчеркиваем  $k$ -блоки слов, чтобы отличать их от  $k$ -разделителей.

Мы позволим себе проверить оба утверждения леммы только для левой части тождества  $\alpha_k$ . Во всех остальных случаях доказательство аналогично. Обозначим левую часть тождества  $\alpha_k$  через  $\mathbf{u}_k$ . Тогда

$$\mathbf{u}_k = x_k y_k x_{k-1} x_k y_k x_{k-2} x_{k-1} x_{k-3} x_{k-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1.$$

1) Буква  $x_0$  является простой в  $\mathbf{u}_k$ , откуда  $D(\mathbf{u}_k, x_0) = 0$ . Все остальные буквы из  $\text{соп}(\mathbf{u}_k)$  входят в  $\mathbf{u}_k$  ровно два раза. В частности, они являются кратными в  $\mathbf{u}_k$ . Поэтому они имеют ненулевую глубину в  $\mathbf{u}_k$ . Первое вхождение  $x_1$  в  $\mathbf{u}_k$  не предшествует никакой простой букве. Следовательно,  $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_1) = \lambda$ . Второму же вхождению  $x_1$  в  $\mathbf{u}_k$  предшествует единственная простая в  $\mathbf{u}_k$  буква, а именно буква  $x_0$ . Следовательно,  $h_2^0(\mathbf{u}_k, x_1) = x_0$ . Мы видим, что  $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_1) \neq h_2^0(\mathbf{u}_k, x_1)$ , откуда следует, что  $D(\mathbf{u}_k, x_1) = 1$ .



Как первому, так и второму вхождению буквы  $x_2$  в слово  $\mathbf{u}_k$  не предшествует никакая простая в этом слове буква. Это означает, что  $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_2) = h_2^0(\mathbf{u}_k, x_2) = \lambda$ . Следовательно,  $D(\mathbf{u}_k, x_2) > 1$ . Второму вхождению  $x_2$  в  $\mathbf{u}_k$  предшествует первое вхождение  $x_1$ , и между этими вхождениями букв  $x_1$  и  $x_2$  нет никаких других букв. Кроме того,  $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_1) \neq h_2^0(\mathbf{u}_k, x_1)$ . Следовательно,  $h_2^1(\mathbf{u}_k, x_2) = x_1$ . С другой стороны,  $h_1^1(\mathbf{u}_k, x_2) \neq x_1$ , поскольку первое вхождение  $x_2$  в слово  $\mathbf{u}_k$  предшествует всем вхождениям  $x_1$  в это слово. Таким образом,  $h_1^1(\mathbf{u}_k, x_2) \neq h_2^1(\mathbf{u}_k, x_2)$ , откуда  $D(\mathbf{u}_k, x_2) = 2$ .

Для упрощения дальнейших рассуждений нам потребуется новое обозначение. Для произвольной буквы  $a \in \text{mul}(\mathbf{u}_k)$  обозначим через  $\mathbf{u}_k[a; 1, 2]$  подслово слова  $\mathbf{u}_k$ , расположенное между первым и вторым вхождениями  $a$  в  $\mathbf{u}_k$ . Например,  $\mathbf{u}_k[x_k; 1, 2] = y_k x_{k-1}$ ,  $\mathbf{u}_k[y_k; 1, 2] = x_{k-1} x_k$ , а  $\mathbf{u}_k[x_1; 1, 2] = x_2 x_0$ . Пусть теперь  $2 < r < k$ . Предположим, что мы доказали равенство  $D(\mathbf{u}_k, x_i) = i$  для всех  $i = 0, 1, \dots, r-1$ . Проверим, что  $D(\mathbf{u}_k, x_r) = r$ . Предположим, что  $D(\mathbf{u}_k, x_r) = s < r$ . Тогда  $h_1^{s-1}(\mathbf{u}_k, x_r) \neq h_2^{s-1}(\mathbf{u}_k, x_r)$ . Следовательно, найдется такая буква  $z$ , что  $h_1^{s-2}(\mathbf{u}_k, z) \neq h_2^{s-2}(\mathbf{u}_k, z)$  и ее первое вхождение в  $\mathbf{u}_k$  лежит в  $\mathbf{u}_k[x_r; 1, 2]$ . Однако  $\mathbf{u}_k[x_{k-1}; 1, 2] = x_k y_k x_{k-2}$  и если  $r < k-1$ , то  $\mathbf{u}_k[x_r; 1, 2] = x_{r+1} x_{r-1}$ . Мы видим, что в любом случае единственной буквой, чье первое вхождение в слово  $\mathbf{u}_k$  лежит в подслове  $\mathbf{u}_k[x_r; 1, 2]$ , является буква  $x_{r-1}$ . В силу нашего предположения,  $D(\mathbf{u}_k, x_{r-1}) = r-1$ . Поскольку  $s-2 < r-2$ , из последнего равенства следует, что  $h_1^{s-2}(\mathbf{u}_k, x_{r-1}) = h_2^{s-2}(\mathbf{u}_k, x_{r-1})$ . Итак, мы доказали, что буквы  $z$  с указанными свойствами не существует. Поэтому  $D(\mathbf{u}_k, x_r) \geq r$ . Предположим, что  $D(\mathbf{u}_k, x_r) = t > r$ . Тогда  $h_1^{t-1}(\mathbf{u}_k, x_r) = h_2^{t-1}(\mathbf{u}_k, x_r)$ . Следовательно, не существует буквы  $z$  глубины  $r-1$ , первое вхождение которой в слово  $\mathbf{u}_k$  лежит в подслове  $\mathbf{u}_k[x_r; 1, 2]$ . Но из нашего предположения следует, что буква  $x_{r-1}$  обладает этими свойствами. Следовательно,  $D(\mathbf{u}_k, x_r) = r$ .

Используя рассуждения, совершенно аналогичные рассуждениям из предыдущего абзаца, можно установить, что  $D(\mathbf{u}_k, y_k) = k$ . Нужно только принять во внимание доказанное выше равенство  $D(\mathbf{u}_k, x_{k-1}) = k-1$  и тот факт, что единственной буквой, чье первое вхождение в слово  $\mathbf{u}_k$  лежит в подслове  $\mathbf{u}[y_k; 1, 2]$ , является буква  $x_{k-1}$ .

Нам осталось проверить равенство  $D(\mathbf{u}_k, x_k) = k$ . Заметим, что как первому, так и второму вхождению  $x_k$  в  $\mathbf{u}_k$  не предшествует никакая простая буква, откуда  $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_k) = h_2^0(\mathbf{u}_k, x_k) = \lambda$ . Предположим, что  $h_1^i(\mathbf{u}_k, x_k) \neq h_2^i(\mathbf{u}_k, x_k)$  для некоторого  $0 < i < k-1$ . Тогда существует буква  $z$  такая, что  $h_1^{i-1}(\mathbf{u}_k, z) \neq h_2^{i-1}(\mathbf{u}_k, z)$  и первое вхождение  $z$  в  $\mathbf{u}_k$  лежит в  $\mathbf{u}_k[x_k; 1, 2]$ . В частности,  $D(\mathbf{u}_k, z) \leq i < k-1$ . Ясно, что  $\mathbf{u}_k[x_k; 1, 2] = y_k x_{k-1}$  и вхождения букв  $y_k$  и  $x_{k-1}$  в подслово  $\mathbf{u}_k[x_k; 1, 2]$  являются первыми вхождениями этих букв в слово  $\mathbf{u}_k$ . Как мы показали выше,  $D(\mathbf{u}_k, y_k), D(\mathbf{u}_k, x_{k-1}) \geq k-1$ , что противоречит выбору буквы  $z$ . Следовательно,  $h_1^i(\mathbf{u}_k, x_k) = h_2^i(\mathbf{u}_k, x_k)$  для всех  $0 \leq i < k-1$ . Теперь проверим, что  $h_1^{k-1}(\mathbf{u}_k, x_k) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{u}_k, x_k)$ . Выше мы показали, что  $D(\mathbf{u}_k, x_{k-1}) = k-1$  и  $D(\mathbf{u}_k, y_k) = k$ . Поэтому  $h_1^{k-2}(\mathbf{u}_k, x_{k-1}) \neq h_2^{k-2}(\mathbf{u}_k, x_{k-1})$  и  $h_1^{k-2}(\mathbf{u}_k, y_k) = h_2^{k-2}(\mathbf{u}_k, y_k)$ . Следовательно,  $h_2^{k-1}(\mathbf{u}_k, x_k) = x_{k-1}$ . С другой стороны, первому вхождению  $x_k$  в  $\mathbf{u}_k$  не предшествует никакая буква, откуда  $h_1^{k-1}(\mathbf{u}_k, x_k) = \lambda$ . Мы видим, что  $h_1^k(\mathbf{u}_k, x_k) \neq h_2^k(\mathbf{u}_k, x_k)$ . Таким образом,  $D(\mathbf{u}_k, x_k) = k$ .

2) По лемме 1.26,  $k$ -разделителями слова  $\mathbf{w}$  являются в точности первые вхождения всех букв  $x \in \text{con}(\mathbf{w})$  глубины  $\leq k$  и пустое слово в начале слова  $\mathbf{w}$ . Как мы доказали выше,  $D(\mathbf{u}_k, x) \leq k$  для любой буквы  $x \in \text{con}(\mathbf{u}_k)$ . Следовательно,  $k$ -разделителями слова  $\mathbf{u}_k$  являются в точности первые вхождения всех букв из  $\text{con}(\mathbf{u}_k)$  и пустое слово в начале слова  $\mathbf{u}_k$ . Все подслова слова  $\mathbf{u}_k$  между этими  $k$ -разделителями и только они являются  $k$ -блоками слова  $\mathbf{u}_k$ . Следовательно,  $k$ -разложение слова  $\mathbf{u}_k$  имеет вид, указанный в табл. 2.  $\square$

Заметим, что утверждение 1) леммы 3.19 объясняет выбор индексов букв в тождествах  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  и  $\delta_k^m$ .

Следующее утверждение, доказательству которого посвящена вся оставшаяся часть данного подраздела, можно назвать «ядром» доказательства теоремы 3.1. Суть этой леммы состоит в том, что, при выполнении некоторых дополнительных ограничений, многообразия  $\mathbf{F}_k, \mathbf{H}_k, \mathbf{I}_k$  и  $\mathbf{J}_k^m$  удовлетворяют всякому тождеству, правая часть которого получена из левой перестановкой местами двух соседних букв, входящих в один и тот же  $(k-1)$ -блок.

**Лемма 3.20.** Пусть  $\mathbf{V}$  — такое многообразие моноидов, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}$  — слово, а  $k$  — натуральное число. Пусть, кроме того,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{u}''$ , где  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{u}''$  — (возможно пустые) слова, а  $ab$  — подслово некоторого  $(k-1)$ -блока слова  $\mathbf{u}$ . Предположим, что выполнено одно из следующих утверждений:

- (i)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\delta_k^m$ ,  $a \in \text{con}(\mathbf{u}')$  и  $D(\mathbf{u}, a) > m$ ;
- (ii)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\gamma_k$  и  $a \in \text{con}(\mathbf{u}')$ ;
- (iii)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\beta_k$  и  $D(\mathbf{u}, a) \neq D(\mathbf{u}, b)$ ;
- (iv)  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\alpha_k$ .

Тогда  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$ .

*Доказательство.* Мы будем доказывать пп. (i)–(iv) одновременно. Предположим, что многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию одного из этих четырех утверждений. В этом случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\delta_k^k$ . Пусть (1.7) —  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ , а  $ab$  — подслово слова  $\mathbf{u}_i$  для некоторого  $0 \leq i \leq m$ . Тогда  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}'_i ab\mathbf{u}''_i$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}'_i$  и  $\mathbf{u}''_i$ . Ясно, что  $\mathbf{u}' = t_0\mathbf{u}_0 t_1\mathbf{u}_1 \cdots t_i\mathbf{u}'_i$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}''_i t_{i+1}\mathbf{u}_{i+1} \cdots t_m\mathbf{u}_m$ .

Если  $a, b \in \text{con}(\mathbf{u}')$ , то

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{u}'' \stackrel{(3.9)}{\approx} \mathbf{u}'a^2b^2\mathbf{u}'' \stackrel{(3.4)}{\approx} \mathbf{u}'b^2a^2\mathbf{u}'' \stackrel{(3.9)}{\approx} \mathbf{u}'ba\mathbf{u}'',$$

что и требовалось доказать. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что

$$b \notin \text{con}(\mathbf{u}'). \quad (3.30)$$

Если  $D(\mathbf{u}, b) \leq k-1$ , то, по лемме 1.26,  $b$  является  $(k-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Но это невозможно, поскольку первое вхождение  $b$  в  $\mathbf{u}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$ . Следовательно,  $D(\mathbf{u}, b) \geq k$ . Далее, если  $a \in \text{mul}(\mathbf{u}')$ , то

из леммы 3.16(ii) следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\mathbf{u}'abu'' \approx \mathbf{u}'bu'' \approx \mathbf{u}'bau''$ . Таким образом, мы можем считать, что

$$\text{если } a \in \text{con}(\mathbf{u}'), \text{ то } a \in \text{sim}(\mathbf{u}'). \quad (3.31)$$

Дальнейшие рассуждения делятся на три случая в зависимости от глубины буквы  $b$  в слове  $\mathbf{u}$ :  $D(\mathbf{u}, b) = k$ ,  $k < D(\mathbf{u}, b) < \infty$  и  $D(\mathbf{u}, b) = \infty$ . Каждый из этих случаев делится на подслучаи, соответствующие утверждениям (i)–(iv). Таким образом, доказательство каждого из утверждений (i)–(iv) будет завершено после рассмотрения соответствующего подслучая случая 3.

*Случай 1:*  $D(\mathbf{u}, b) = k$ . Это случай является наиболее сложным с технической точки зрения. При рассмотрении двух других случаев, мы будем неоднократно ссылаться на свойства, проверенные здесь. Пусть  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  — одно из тождеств  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  или  $\delta_k^m$ . В некотором смысле тождество  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  «выглядит» как тождество  $\mathbf{u}'abu'' \approx \mathbf{u}'bau''$ . Мы имеем в виду, что слова  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  начинаются с одного и того же префикса (который является пустым у тождеств  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ ) и заканчиваются одним и тем же суффиксом, а подслово между этим префиксом и этим суффиксом в  $\mathbf{p}$  является произведением двух букв, а в  $\mathbf{q}$  — произведением этих же букв в обратном порядке. Это, в принципе, позволяет применять тождество  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$  к одной из сторон тождества  $\mathbf{u}'abu'' \approx \mathbf{u}'bau''$ , чтобы получить другую его сторону. Для того, чтобы мы получили такую возможность, нам нужно, используя тождества, выполненные в  $\mathbf{K}$ , привести, скажем, правую сторону тождества  $\mathbf{u}'abu'' \approx \mathbf{u}'bau''$  к такому виду, к которому может быть применено тождество  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ . Для этого нам сначала нужно найти «внутри» слова  $\mathbf{u}$  буквы  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , которые встречались бы в этом слове в том же порядке, что и в правой части тождества  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ .

Положим  $x_k = b$ . Пусть  $X_{k-1}$  — множество всех  $(k-1)$ -разделителей  $z$  слова  $\mathbf{u}$  таких, что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_k)$ . Из того, что  $D(\mathbf{u}, x_k) = k$  следует, что  $h_1^{k-1}(\mathbf{u}, x_k) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{u}, x_k)$ , откуда вытекает, что  $h_2^{k-1}(\mathbf{u}, x_k) \in X_{k-1}$ . Таким образом, множество  $X_{k-1}$  не пусто. Применим лемму 1.28(ii) и получим, что  $D(\mathbf{u}, z) = k-1$  и  $\ell_2(\mathbf{u}, x_k) < \ell_2(\mathbf{u}, z)$  для любого  $z \in X_{k-1}$ . Обозначим теперь через  $x_{k-1}$  такую букву из  $X_{k-1}$ , что  $\ell_2(\mathbf{u}, z) \leq \ell_2(\mathbf{u}, x_{k-1})$  для любого  $z \in X_{k-1}$ .

Пусть  $X_{k-2}$  — множество всех таких  $(k-2)$ -разделителей  $z$  слова  $\mathbf{u}$ , что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{k-1})$ . Из того, что  $D(\mathbf{u}, x_{k-1}) = k-1$  вытекает, что  $h_1^{k-2}(\mathbf{u}, x_{k-1}) \neq h_2^{k-2}(\mathbf{u}, x_{k-1})$ , откуда следует, что  $h_2^{k-2}(\mathbf{u}, x_{k-1}) \in X_{k-2}$ . Таким образом, множество  $X_{k-2}$  не пусто. Применим лемму 1.28(ii) и получим, что  $D(\mathbf{u}, z) = k-2$  и  $\ell_2(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, z)$  для любого  $z \in X_{k-2}$ . Обозначим теперь через  $x_{k-2}$  такую букву из  $X_{k-2}$ , что  $\ell_2(\mathbf{u}, z) \leq \ell_2(\mathbf{u}, x_{k-2})$  для любого  $z \in X_{k-2}$ . Поскольку  $\ell_1(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-2})$ , из леммы 1.32 вытекает, что  $\ell_2(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-2})$ .

Далее, для всех  $s = k-3, k-4, \dots, 1$  определим последовательно множество  $X_s$  и букву  $x_s$  следующим образом:  $X_s$  — множество всех таких  $s$ -разделителей  $z$  слова  $\mathbf{u}$ , что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_{s+1}) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s+1})$ , а  $x_s$  — такая буква из  $X_s$ , что  $\ell_2(\mathbf{u}, z) \leq \ell_2(\mathbf{u}, x_s)$  для любого  $z \in X_s$ . Как и в предыдущем абзаце мы можем проверить, что множество  $X_s$  не пусто,  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$ ,  $\ell_j(\mathbf{u}, x_{s+1}) < \ell_j(\mathbf{u}, x_s)$  для любого  $j = 1, 2$  и  $\ell_2(\mathbf{u}, x_{s+2}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$ .

Наконец, положим  $x_0 = h_2^0(\mathbf{u}, x_1)$ . Ввиду леммы 1.28,  $D(\mathbf{u}, x_0) = 0$  и  $\ell_1(\mathbf{u}, x_1) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$ . Поскольку  $\ell_1(\mathbf{u}, x_2) < \ell_1(\mathbf{u}, x_1)$ , из леммы 1.32 следует, что  $\ell_2(\mathbf{u}, x_2) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$ . Тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0 \quad (3.32)$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k}$ . Проверим, что если  $2 \leq s \leq k$ , то

$$\ell_2(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s-1}) \text{ для любого } z \in \text{con}(\mathbf{v}_{2s}\mathbf{v}_{2s-1}). \quad (3.33)$$

Положим

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{u}'ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_{2s+2}x_s\mathbf{v}_{2s+1}x_{s+1}.$$

Слово  $\mathbf{w}_s$  является префиксом слова  $\mathbf{u}$ , непосредственно предшествующим слову  $\mathbf{v}_{2s}$ , а слово  $\mathbf{v}_{2s-1}$  предшествует второму вхождению  $x_{s-1}$  в  $\mathbf{u}$ . Из сказанного вытекает требуемое заключение в случае, когда  $z \in \text{con}(\mathbf{w}_s)$ . Предположим теперь, что  $z \notin \text{con}(\mathbf{w}_s)$ . Тогда  $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_s)$ . Если  $z$  является  $(s-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ , то  $z \in X_{s-1}$ , откуда, в силу выбора буквы  $x_{s-1}$ , имеем, что  $\ell_2(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s-1})$ . В противном случае из леммы 1.26 следует, что  $D(\mathbf{u}, z) > s-1$ . Поскольку  $\ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$ , из леммы 1.32 вытекает, что  $\ell_2(\mathbf{u}, z) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$ . Тогда  $\ell_2(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s-1})$ .

Дальнейшая реализация плана, изложенного в начале случая 1, зависит от вида тождества  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ . Поэтому наши рассуждения делятся на четыре подслучая.

*Подслучай 1.1:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (i), т.е.  $\delta_k^m$  выполнено в  $\mathbf{V}$ ,  $a \in \text{con}(\mathbf{u}')$  и  $D(\mathbf{u}, a) > m$ . В силу утверждения (3.31),  $a \in \text{sim}(\mathbf{u}')$ . Тогда  $\mathbf{u}' = \mathbf{w}a\mathbf{v}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ . Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{w}a\mathbf{v}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots \\ \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Положим  $D(\mathbf{u}, a) = r$ . Дальнейшие рассуждения делятся на две части, соответствующие случаям  $r \leq k+1$  и  $r > k+1$ .

А)  $r \leq k+1$ . Здесь нам нужно определить еще две буквы, а именно  $y_{r-1}$  и  $y_{r-2}$ , а также уточнить расположение этих букв внутри слова  $\mathbf{u}$ . Пусть  $Y_{r-1}$  — множество всех  $(r-1)$ -разделителей  $z$  слова  $\mathbf{u}$  таких, что  $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, a)$ . Из того, что  $D(\mathbf{u}, a) = r$  следует, что  $h_1^{r-1}(\mathbf{u}, a) \neq h_2^{r-1}(\mathbf{u}, a)$ , откуда  $h_2^{r-1}(\mathbf{u}, a) \in Y_{r-1}$ . Следовательно, множество  $Y_{r-1}$  не пусто. Из леммы 1.28(ii) вытекает, что  $D(\mathbf{u}, z) = r-1$  и  $\ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_2(\mathbf{u}, z)$  для любого  $z \in Y_{r-1}$ . Тогда  $\ell_1(\mathbf{u}, b) < \ell_2(\mathbf{u}, z)$  для любого  $z \in Y_{r-1}$ . Обозначим теперь через  $y_{r-1}$  такую букву из  $Y_{r-1}$ , что  $\ell_2(\mathbf{u}, z) \leq \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1})$  для любого  $z \in Y_{r-1}$ .

Докажем некоторые дополнительные свойства буквы  $x_r$ , которые выполняются при определенных ограничениях на  $r$ . Предположим, что  $r < k+1$ . Докажем, что

$$\ell_2(\mathbf{u}, x_r) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}). \quad (3.35)$$

Положим  $y_{r-2} = h_2^{r-2}(\mathbf{u}, y_{r-1})$ . Поскольку  $D(\mathbf{u}, y_{r-1}) = r - 1$ , из леммы 1.28 следует, что  $D(\mathbf{u}, y_{r-2}) = r - 2$  и  $\ell_1(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$ . Напомним, что  $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-1})$ , откуда  $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$ . Поскольку  $D(\mathbf{u}, a) = r$ , мы можем применить лемму 1.32 и получить, что  $\ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$ . Второе вхождение  $a$  в  $\mathbf{u}$  непосредственно предшествует первому вхождению  $b = x_k$ , откуда  $\ell_1(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$ . Тогда из леммы 1.32 следует, что  $\ell_2(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$ . Из сказанного вытекает, что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$ . Если  $k - 1 \geq r$ , то, по лемме 1.32,  $\ell_2(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$ . Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим, что  $\ell_2(\mathbf{u}, x_r) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$ . В силу выбора буквы  $y_{r-2}$ , первое вхождение этой буквы в  $\mathbf{u}$  предшествует второму вхождению  $y_{r-1}$ . Поэтому  $\ell_2(\mathbf{u}, x_r) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1})$ . Итак, мы доказали, что если  $r < k + 1$ , то выполняется утверждение (3.35).

Пусть теперь  $r > 2$ . Заметим, что

$$\ell_1(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, b) = \ell_1(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \cdots < \ell_1(\mathbf{u}, x_{r-3}).$$

Если  $\ell_1(\mathbf{u}, x_{r-3}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1})$ , то буква  $x_{r-3}$  лежит между первым и вторым вхождениями  $y_{r-1}$  в  $\mathbf{u}$ . Поскольку  $x_{r-3}$  является  $(r - 3)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ , мы получаем противоречие с равенством  $D(\mathbf{u}, y_{r-1}) = r - 1$ . Следовательно, если  $r > 2$ , то

$$\ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{r-3}). \quad (3.36)$$

Вернемся к произвольному  $r \leq k + 1$ . Это ограничение на  $r$  гарантирует, что буквы  $x_{r-2}$  и  $x_{r-1}$  определены. Существует три возможности для второго вхождения  $y_{r-1}$  в  $\mathbf{u}$ :

$$\ell_1(\mathbf{u}, x_{r-2}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{r-1}); \quad (3.37)$$

$$\ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{r-2}); \quad (3.38)$$

$$\ell_2(\mathbf{u}, x_{r-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}). \quad (3.39)$$

Равенство (3.34) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{w} \mathbf{a} \mathbf{v} \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1} \mathbf{b} \mathbf{v}_{2k-2} x_{k-2} \mathbf{v}_{2k-3} x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_{2r} x_{r-1}^{(1)} \\ & \cdot \mathbf{v}_{2r-1} x_r \mathbf{v}_{2r-2} x_{r-2} \mathbf{v}_{2r-3} x_{r-1} \mathbf{v}_{2r-4} x_{r-3} \mathbf{v}_{2r-5} x_{r-2} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Предположим, что выполнено утверждение (3.37). Тогда второе вхождение  $y_{r-1}$  в  $\mathbf{u}$  принадлежит слову  $\mathbf{v}_{2r-3}$ , откуда  $\mathbf{v}_{2r-3} = \mathbf{v}'_{2r-3} y_{r-1} \mathbf{v}''_{2r-3}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{v}'_{2r-3}$  и  $\mathbf{v}''_{2r-3}$ . Далее, поскольку  $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, a)$ , первое вхождение  $y_{r-1}$  принадлежит  $\mathbf{v}$ . Следовательно,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{2k+2} y_{r-1} \mathbf{v}_{2k+1}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{v}_{2k+2}$  и  $\mathbf{v}_{2k+1}$ .

Объединив сказанное выше, мы можем прояснить представление (3.34) слова  $\mathbf{u}$  и записать это слово в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{w} \mathbf{a} \mathbf{v}_{2k+2} y_{r-1} \mathbf{v}_{2k+1} \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1} \mathbf{b} \mathbf{v}_{2k-2} x_{k-2} \mathbf{v}_{2k-3} x_{k-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_{2r} x_{r-1} \mathbf{v}_{2r-1} x_r \mathbf{v}_{2r-2} x_{r-2} \mathbf{v}'_{2r-3} y_{r-1} \mathbf{v}''_{2r-3} x_{r-1} \mathbf{v}_{2r-4} x_{r-3} \mathbf{v}_{2r-5} x_{r-2} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\mathbf{u}' = \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' &= \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2} \\ &\quad \cdot \mathbf{v}'_{2r-3}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Как и в доказательстве неравенства (3.33), можно проверить, что если  $z \in \text{con}(\mathbf{v}_{2k+2}\mathbf{v}_{2k+1})$ , то  $\ell_2(\mathbf{u}, z) \leq \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1})$ .

Теперь мы готовы начать процесс изменения слова  $\mathbf{u}$ , чтобы получить слово  $\mathbf{u}'bau''$ . Но сначала мы укажем общую схему дальнейших рассуждений. Тождество (3.27), которое, согласно лемме 3.16(ii), выполнено в многообразии  $\mathbf{K}$ , позволяет нам добавить любую кратную в слове букву в любое место после второго вхождения этой буквы. Используя это, мы добавим разные буквы или даже слова в различных местах слова  $\mathbf{u}$  (или слова, равного  $\mathbf{u}$  в  $\mathbf{V}$ ), чтобы дать возможность применить к этому слову тождество, которое выполняется в  $\mathbf{V}$  в настоящий момент (сейчас таким тождеством является  $\delta_k^m$ ). После применения этого тождества мы запустим «обратный процесс», т.е., используя тождество (3.27), удалим лишние слова и буквы из полученного слова, чтобы получить слово  $\mathbf{u}'bau''$ .

Начнем реализацию приведенного только что плана. Сначала применим тождество (3.27) к слову  $\mathbf{u}$  и вставим букву  $y_{r-1}$  после второго вхождения  $x_{r-1}$  в  $\mathbf{u}$ . Мы получим тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx & \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}a\mathbf{b}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_{2r} \overset{(1)}{x_{r-1}} \mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3} \overset{(2)}{x_{r-1}} y_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5} \\ & \cdot x_{r-2} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Далее, применим тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.41) и заменим там третье вхождение  $y_{r-1}$  на  $\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}$ , а второе вхождение  $x_{s-1}$  на  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . Мы получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}a\mathbf{b}\mathbf{p}\mathbf{v}_0, \quad (3.42)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\mathbf{v}_{2k-4} \cdots \mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3} \\ &\quad \cdot \mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}\mathbf{v}_{2r-6} \cdots \\ &\quad \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Согласно условию,  $r = D(\mathbf{u}, a) > m$ . Тогда из леммы 3.18 следует, что тождество  $\delta_k^{r-1}$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Выполним подстановку

$$(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, y_{r-1}, y_r) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, b, \mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}, a)$$

в это тождество и получим тождество

$$a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}a\mathbf{b}\mathbf{p} \approx a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}b\mathbf{a}\mathbf{p}.$$

Данное тождество вместе с тождеством (3.42) влечет тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}b\mathbf{a}\mathbf{p}\mathbf{v}_0.$$

Применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества «в обратном направлении» и заменим подслово  $\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}$  на  $y_{r-1}$ , а подслово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  на  $x_{s-1}$  для любого  $2 \leq s \leq k$ . В результате мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}b\mathbf{a}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2} \\ \cdot \mathbf{v}_{2r-3}x_{r-1}y_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-6} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Наконец, применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества и удалим третье вхождение буквы  $y_{r-1}$ . Мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}b\mathbf{a}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2} \\ \cdot \mathbf{v}'_{2r-3}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-6} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0 \\ = \mathbf{u}'b\mathbf{a}\mathbf{u}''.$$

Предположим теперь, что выполняется одно из условий (3.38) или (3.39). Проверим, что в любом случае выполняется тождество (3.41). Этого достаточно, потому что тогда мы сможем завершить доказательство теми же рассуждениями, что и выше. Если выполнено условие (3.38), то из (3.35) и (3.40) следует, что слово  $\mathbf{u}$  имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \\ \cdot \mathbf{v}_{2r} \overset{(1)}{x_{r-1}} \mathbf{v}_{2r-1}x_r \mathbf{v}'_{2r-2}y_{r-1} \mathbf{v}''_{2r-2}x_{r-2} \mathbf{v}_{2r-3} \overset{(2)}{x_{r-1}} \mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3} \mathbf{v}_{2r-5} \\ \cdot x_{r-2} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0$$

для некоторых слов  $\mathbf{v}'_{2r-2}, \mathbf{v}''_{2r-2}$  таких, что  $\mathbf{v}_{2r-2} = \mathbf{v}'_{2r-2}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-2}$ . Тогда мы добавим еще одно вхождение буквы  $y_{r-1}$  сразу после второго вхождения  $x_{r-1}$ . В результате получим тождество (3.41). Наконец, если выполнено условие (3.39), то мы воспользуемся неравенством (3.36). Слово  $\mathbf{u}$  в этом случае имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2} \overset{(1)}{y_{r-1}} \mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \\ \cdot \mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}'_{2r-4} \overset{(2)}{y_{r-1}} \mathbf{v}''_{2r-4} \overset{(1)}{x_{r-3}} \mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2} \cdots \\ \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0$$

для некоторых слов  $\mathbf{v}'_{2r-4}, \mathbf{v}''_{2r-4}$  таких, что  $\mathbf{v}_{2r-4} = \mathbf{v}'_{2r-4}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-4}$ . Тогда мы можем добавить третье вхождение буквы  $x_{r-1}$  непосредственно перед вторым вхождением  $y_{r-1}$  и получить тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2} \overset{(1)}{y_{r-1}} \mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \\ \cdot \mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}'_{2r-4}x_{r-1} \overset{(2)}{y_{r-1}} \mathbf{v}''_{2r-4} \overset{(1)}{x_{r-3}} \mathbf{v}_{2r-5} \\ \cdot x_{r-2} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Последнее тождество будет ничем иным, как тождеством (3.41) (с точностью до переименования слов).

Б)  $r > k + 1$ . Напомним, что выполняется равенство (3.34). Предположим, что слово  $\mathbf{v}$  не является пустым, и рассмотрим букву  $y \in \text{con}(\mathbf{v})$ .

Предположим, что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, y)$ . Тогда  $h_1^{k-1}(\mathbf{u}, y) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{u}, y)$ , поскольку  $x_{k-1}$  является  $(k-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Следовательно,  $y$  является  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Но это невозможно, поскольку в этом случае первое вхождение буквы  $y$  в слово  $\mathbf{u}$  находится между первым и вторым вхождениями  $a$  в это слово, а  $D(\mathbf{u}, a) = r > k + 1$ . Следовательно,  $\ell_2(\mathbf{u}, y) \leq \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1})$  для всех  $y \in \text{con}(\mathbf{v})$ . Тогда применим тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.34), а именно, вставим туда слово  $\mathbf{v}$  после второго вхождения  $b$ . Ясно, что мы можем также формально вставить слово  $\mathbf{v}$  после второго вхождения  $b$ , если  $\mathbf{v} = \lambda$ . Далее, ввиду условия (3.33), мы можем заменить второе вхождение  $x_{s-1}$  в правой части тождества (3.34) на слово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . Мы получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w} \mathbf{a} \mathbf{v} \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{p} \mathbf{v}_0, \quad (3.43)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = & \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Ввиду леммы 3.18,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\delta_k^k$ . Выполним подстановку

$$(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, y_k, y_{k+1}) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, b, \mathbf{v}, a)$$

в это тождество. Мы получим тождество  $\mathbf{a} \mathbf{v} \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{p} \approx \mathbf{a} \mathbf{v} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{p}$ , которое вместе с тождеством (3.43) влечет тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w} \mathbf{a} \mathbf{v} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{p} \mathbf{v}_0$ . Применим теперь тождество (3.27) к правой части последнего тождества «в обратном направлении», а именно, удалим слово  $\mathbf{v}$  после второго вхождения буквы  $b$  и заменим подслово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  на букву  $x_{s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx & \mathbf{w} \mathbf{a} \mathbf{v} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0 \\ = & \mathbf{u}' \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{u}''. \end{aligned}$$

*Подслучай 1.2:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (ii), т.е.  $\gamma_k$  выполнено в  $\mathbf{V}$  и  $a \in \text{con}(\mathbf{u}')$ . Напомним, что справедливо равенство (3.32). Согласно условию (3.31),  $a \in \text{sim}(\mathbf{u}')$ . Тогда, как и в случае 1.1, слово  $\mathbf{u}$  имеет вид (3.34). Заметим, что  $\mathbf{u}' = \mathbf{w} \mathbf{a} \mathbf{v}$  и

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Напомним также, что условие (3.33) справедливо для всех  $2 \leq s \leq k$ . Применим тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.34) и заменим второе вхождение  $x_{s-1}$  на слово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . Мы получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx & \mathbf{w} \mathbf{a} \mathbf{v} \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$



Положим  $\mathbf{p}_1 = a\mathbf{v}$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2 = & \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Тогда последнее тождество будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}\mathbf{p}_1\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{p}_2\mathbf{v}_0. \quad (3.44)$$

Согласно условию,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\gamma_k$ . Выполним подстановку

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, y_0, y_1) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, b, \mathbf{v}, a)$$

в это тождество. Мы получим тождество  $\mathbf{p}_1\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{p}_2 \approx \mathbf{p}_1\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{p}_2$ . Из последнего тождества вместе с тождеством (3.44) вытекает тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}\mathbf{p}_1\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{p}_2\mathbf{v}_0$ , т.е. тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx & \mathbf{w}\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Наконец, применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества «в обратном направлении» и заменим подслово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  на  $x_{s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . В результате мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0,$$

т.е. тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{u}''$ .

*Подслучай 1.3:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (iii), т.е.  $\beta_k$  выполнено в  $\mathbf{V}$  и  $D(\mathbf{u}, a) \neq D(\mathbf{u}, b)$ . Подслучай 1.2 позволяет нам предположить, что  $a \notin \text{con}(\mathbf{u}')$ . Из этого факта и условия (3.30) немедленно следует, что  $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, b)$ . Если  $D(\mathbf{u}, a) \leq k-1$ , то, по лемме 1.26,  $a$  является  $(k-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Но это не так. Следовательно,  $D(\mathbf{u}, a) \geq k$ . Поскольку  $D(\mathbf{u}, b) \neq D(\mathbf{u}, a)$  и  $D(\mathbf{u}, b) = k$ , мы имеем, что  $D(\mathbf{u}, a) > k$ .

Заметим, что  $\ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1})$ , поскольку  $h_1^{k-1}(\mathbf{u}, a) = h_2^{k-1}(\mathbf{u}, a)$  и  $x_{k-1}$  является  $(k-1)$ -разделителем. Напомним, что имеет место равенство (3.32). Тогда  $\mathbf{v}_{2k} = \mathbf{v}'_{2k}a\mathbf{v}''_{2k}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{v}'_{2k}, \mathbf{v}''_{2k}$ . Следовательно,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{v}'_{2k}a\mathbf{v}''_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Проверим, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \quad (3.45)$$

Это утверждение очевидно, когда  $\mathbf{v}'_{2k} = \lambda$ . Предположим, что  $\mathbf{v}'_{2k} = \mathbf{v}^*d$  для некоторого (возможно пустого) слова  $\mathbf{v}^*$  и некоторой буквы  $d$ . Тогда слово  $\mathbf{u}$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{u}' \overset{(1)}{a} \mathbf{b}\mathbf{v}^* \overset{(2)}{d} \overset{(2)}{a} \mathbf{v}''_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Заметим, что подслово  $da$ , расположенное между  $\mathbf{v}^*$  и  $\mathbf{v}''_{2k}$ , лежит в некотором  $(k-1)$ -блоке слова  $\mathbf{u}$ . Действительно, вхождение буквы  $d$  в это подслово не является  $(k-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ , потому что в противном случае первое и второе вхождения буквы  $a$  в слово  $\mathbf{u}$  окажутся в различных  $(k-1)$ -блоках, что невозможно в силу неравенства  $D(\mathbf{u}, a) > k$ . Вхождение же буквы  $a$  в подслово  $da$  не является  $(k-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ , поскольку это вхождение не является первым вхождением  $a$  в  $\mathbf{u}$ .

По лемме 3.18, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\gamma_k$ . Тогда в силу утверждения, доказанного в подслучае 1.2,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{v}^*ad\mathbf{v}''_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Действуя аналогичным образом, мы можем последовательно менять букву  $a$  со всеми буквами слова  $\mathbf{v}'_{2k}$  и получить, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{a}\mathbf{v}'_{2k}\mathbf{v}''_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Теперь применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества, вставив букву  $a$  после слова  $\mathbf{v}'_{2k}$ . Мы получим тождество (3.45).

Напомним, что справедливо утверждение (3.33) для всех  $2 \leq s \leq k$ . Теперь мы можем применить тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.45) и заменить второе вхождение  $x_{s-1}$  на слово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . Мы получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{p}\mathbf{v}_0, \quad (3.46)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = & \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Теперь выполним подстановку

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, b, a)$$

в тождество  $\beta_k$ . Мы получим тождество  $ab\mathbf{a}\mathbf{r}\mathbf{p} \approx ba^2\mathbf{p}$ , которое затем применим к тождеству (3.46). В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba^2\mathbf{r}\mathbf{p}\mathbf{v}_0 = & \mathbf{u}'ba^2\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_0, \end{aligned}$$

выполненное в  $\mathbf{V}$ . Теперь применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества «в обратном направлении» и заменим подслово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  на  $x_{s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . В результате мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba^2\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Повторяя рассуждения, использованные выше при выводе тождества (3.45), мы получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx \mathbf{u}'b\mathbf{a}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \\ \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}'b\mathbf{a}\mathbf{u}'' . \end{aligned}$$

*Подслучай 1.4:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (iv), т.е.  $\alpha_k$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . В силу подслучаев 1.2 и 1.3, а также условия (3.30), мы можем предполагать, что  $a, b \notin \text{con}(\mathbf{u}')$  и  $D(\mathbf{u}, b) = D(\mathbf{u}, a)$ . Напомним также, что справедливо равенство (3.32).

Заметим, что  $\ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-2})$ , потому что  $h_1^{k-2}(\mathbf{u}, a) = h_2^{k-2}(\mathbf{u}, a)$  и  $x_{k-2}$  является  $(k-2)$ -разделителем. Следовательно, найдутся такие слова  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}''$ , что выполняется одно из равенств

$$\mathbf{v}_{2k} = \mathbf{v}'a\mathbf{v}'', \quad \mathbf{v}_{2k-1} = \mathbf{v}'a\mathbf{v}'' \text{ и } \mathbf{v}_{2k-2} = \mathbf{v}'a\mathbf{v}''.$$

Тогда имеет место одно из следующих равенств:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}'ab\mathbf{v}'a\mathbf{v}''x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}'ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}'a\mathbf{v}''b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}'ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}'a\mathbf{v}''x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Мы рассмотрим только первый случай, два других рассматриваются аналогично. Поскольку многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству (3.27), это многообразие удовлетворяет также тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}ab\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \quad (3.47)$$

Напомним, что для любого  $2 \leq s \leq k$  выполнено условие (3.33). Поэтому применим тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.47) и заменим второе вхождение  $x_{s-1}$  на слово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . Мы получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{p}\mathbf{v}_0, \quad (3.48)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}ab\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1} \cdots \\ &\quad \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Теперь выполним подстановку

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, y_k) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, a, b)$$

в тождество  $\alpha_k$ . Мы получим тождество  $ab\mathbf{p} \approx ba\mathbf{p}$ , применив которое к тождеству (3.48), мы выведем тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{p}\mathbf{v}_0$ . Теперь применим тождество (3.27) «в обратном направлении» к правой части последнего тождества и заменим подслово  $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$  на  $x_{s-1}$  для всех  $2 \leq s \leq k$ . В результате мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}ab\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Снова применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества и удалим вхождение  $a$ , расположенное между  $\mathbf{v}_{2k-1}$  и вторым вхождением  $b$ . В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx \mathbf{u}'ba\mathbf{v}'a\mathbf{v}''x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0 \\ &= \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''. \end{aligned}$$

*Случай 2:*  $k < D(\mathbf{u}, b) < \infty$ . Положим  $D(\mathbf{u}, b) = r$ . Дальнейшие рассуждения делятся на три подслучая.

*Подслучай 2.1:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (i) или п. (ii). Тогда  $a \in \text{con}(\mathbf{u}')$ . Следовательно, вхождение буквы  $a$  в подслово  $ab$  слова  $\mathbf{u}$  не является первым вхождением  $a$  в  $\mathbf{u}$ . Поэтому данное вхождение  $a$  в  $\mathbf{u}$  не может быть  $(r-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Из леммы 1.26 и равенства  $D(\mathbf{u}, b) = r$  вытекает, что вхождение  $b$  подслово  $ab$  слова  $\mathbf{u}$  также не является  $(r-1)$ -разделителем  $\mathbf{u}$ . Поэтому указанное подслово содержится в некотором  $(r-1)$ -блоке слова  $\mathbf{u}$ .

Пусть

$$s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_n \mathbf{w}_n \quad (3.49)$$

является  $(r-1)$ -разложением слова  $\mathbf{u}$ . Тогда найдется такое  $0 \leq j \leq n$ , что  $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab \mathbf{w}''_j$ . Отсюда  $\mathbf{u}' = s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$ . По лемме 3.18,  $\mathbf{J}_k^m \subseteq \mathbf{J}_r^m$  и  $\mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{I}_r$ . Теперь мы можем применить утверждения, доказанные в подслучаях 1.1 и 1.2, и получить, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}' b a \mathbf{u}''$ .

*Подслучай 2.2:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (iii), т.е.  $\beta_k$  выполнено в  $\mathbf{V}$  и  $D(\mathbf{u}, a) \neq D(\mathbf{u}, b)$ . Учитывая подслучай 2.1, мы можем считать, что  $a \notin \text{con}(\mathbf{u}')$ .

Предположим, что  $D(\mathbf{u}, a) = s < r$ . Если  $s \leq k-1$ , то, по лемме 1.26,  $a$  является  $(k-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Но это невозможно, поскольку первое вхождение  $a$  в  $\mathbf{u}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$ . Следовательно,  $s \geq k$ . Пусть (3.49) —  $(s-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда существует такое число  $0 \leq j \leq n$ , что  $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab \mathbf{w}''_j$ ,  $\mathbf{u}' = s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$ . Положим  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}' b a \mathbf{u}''$ . Поскольку  $a, b \notin \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $(s-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}^*$  имеет вид  $s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}^*_j \cdots s_n \mathbf{w}_n$ , где  $\mathbf{w}^*_j = \mathbf{w}'_j b a \mathbf{w}''_j$ . Тогда выполняются условия (1.1) и (1.9) при  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^*$  и  $\ell = s$ . В силу леммы 1.31,  $D(\mathbf{u}^*, a) = s$ . Кроме того, по лемме 3.18, многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\beta_s$ . Тогда из утверждения, доказанного в подслучае 1.3, следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}' b a \mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}' a b \mathbf{u}'' = \mathbf{u}$ .

Предположим теперь, что  $D(\mathbf{u}, a) > r$ . Пусть (3.49) —  $(r-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда существует такое число  $0 \leq j \leq n$ , что  $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab \mathbf{w}''_j$ . Отсюда  $\mathbf{u}' = s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$ . По лемме 3.18,  $\mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{H}_r$ . Тогда применим утверждение, доказанное в подслучае 1.3, и получим, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}' b a \mathbf{u}''$ .

*Подслучай 2.3:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (iv), т.е.  $\alpha_k$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Учитывая подслучай 2.2, мы можем считать, что  $D(\mathbf{u}, a) = D(\mathbf{u}, b)$ . Положим  $D(\mathbf{u}, a) = r$ . Тогда подслово  $ab$  слова  $\mathbf{u}$ , указанное в формулировке леммы, лежит в некотором  $(r-1)$ -блоке слова  $\mathbf{u}$ . Пусть (3.49) —  $(r-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда существует такое число  $0 \leq j \leq n$ , что  $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab \mathbf{w}''_j$ . Отсюда  $\mathbf{u}' = s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$ . Поскольку, в силу леммы 3.18,  $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{F}_r$ , из утверждения, доказанного в подслучае 1.4, следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}' b a \mathbf{u}''$ .

*Случай 3:*  $D(\mathbf{u}, b) = \infty$ . Этот случай, как и предыдущий, делится на три подслучая.

*Подслучай 3.1:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (i) или п. (ii). Пусть  $s$  — неотрицательное число. Повторяя дословно рассуждения подслучая 2.1, мы можем получить, что подслово  $ab$  слова  $\mathbf{u}$ , указанное в формулировке леммы, лежит в некотором  $s$ -блоке слова  $\mathbf{u}$ . В силу замечания 1.21, существует такое число  $r \geq k$ , что (3.49) является  $\ell$ -разложением слова  $\mathbf{u}$  для любого  $\ell \geq r$ . Тогда  $ab$  является подсловом слова  $\mathbf{w}_j$  для некоторого  $0 \leq j \leq n$ . Это означает, что  $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab \mathbf{w}''_j$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{w}'_j$  и  $\mathbf{w}''_j$ . Тогда  $\mathbf{u}' = s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$ . Докажем, что

$$\text{осс}_z(\mathbf{w}_j) \geq 2 \quad (3.50)$$

для любой буквы  $z \in \text{con}(\mathbf{w}_j)$ . Предположим сначала, что  $s_j = h_1^r(\mathbf{u}, z)$  и  $\text{осс}_z(\mathbf{w}_j) = 1$ . Если  $\text{осс}_z(\mathbf{u}) = 1$ , то  $z$  является 0-разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Тогда из леммы 1.24(i) следует, что  $z \in \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , что невозможно. Следовательно,  $\text{осс}_z(\mathbf{u}) \geq 2$ . Поскольку  $\text{осс}_z(\mathbf{w}_j) = 1$ , мы имеем, что  $s_j \neq h_2^r(\mathbf{u}, z)$ . Это означает, что  $D(\mathbf{u}, z) \leq r + 1$ . По лемме 1.26,  $z$  является  $(r + 1)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Получаем противоречие с тем, что (3.49) является  $(r + 1)$ -разложением слова  $\mathbf{u}$ . Таким образом, если  $s_j = h_1^r(\mathbf{u}, z)$ , то справедливо условие (3.50). Предположим теперь, что  $s_j \neq h_1^r(\mathbf{u}, z)$ . Тогда  $(1, r)$ -ограничителем буквы  $z$  в  $\mathbf{u}$  является  $s_k$  для некоторого  $k < j$ . Это означает, что  $z \in \text{con}(s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_{j-1} \mathbf{w}_{j-1})$ . Тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} z \mathbf{g} \mathbf{w}_{j_1} z \mathbf{w}_{j_2} s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$$

для некоторых слов  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{w}_{j_1}$  и  $\mathbf{w}_{j_2}$ , для которых выполнены равенства  $\mathbf{f} z \mathbf{g} = s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_{j-1} \mathbf{w}_{j-1}$  и  $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_{j_1} z \mathbf{w}_{j_2}$ . Применим тождество (3.9) и получим, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{f} z \mathbf{g} \mathbf{w}_{j_1} z^2 \mathbf{w}_{j_2} s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n.$$

Таким образом, условие (3.50) выполнено для любой буквы  $z \in \text{con}(\mathbf{w}_j)$ . Тогда из леммы 3.16(iii) следует, что многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}'_j b a \mathbf{w}''_j$ , откуда вытекает, что в этом многообразии выполнено также тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}_j s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n \\ &\approx s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j b a \mathbf{w}''_j s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n = \mathbf{u}' b a \mathbf{u}'' . \end{aligned}$$

Таким образом, мы завершили доказательство утверждений (i) и (ii).

*Подслучай 3.2:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (iii), т.е.  $\beta_k$  выполнено в  $\mathbf{V}$  и  $D(\mathbf{u}, a) \neq D(\mathbf{u}, b)$ . Тогда  $D(\mathbf{u}, a) < \infty$ . Положим  $D(\mathbf{u}, a) = r$ . Повторяя рассуждения из подслучая 1.3, мы можем получить, что  $a \notin \text{con}(\mathbf{u}')$  и  $r \geq k$ . Предположим, что (3.49) является  $(r - 1)$ -разложением слова  $\mathbf{u}$ . Тогда существует такое число  $0 \leq j \leq n$ , что  $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j a b \mathbf{w}''_j$ ,  $\mathbf{u}' = s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j$  и  $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$ . Положим  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}' b a \mathbf{u}''$ . Поскольку  $a, b \notin \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $(r - 1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}^*$  имеет вид  $s_0 \mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}_j^* \cdots s_n \mathbf{w}_n$ , где  $\mathbf{w}_j^* = \mathbf{w}'_j b a \mathbf{w}''_j$ . Тогда выполняются утверждения (1.1) и (1.9) при  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^*$  и  $\ell = r$ . Применим лемму 1.31 и получим, что  $D(\mathbf{u}^*, a) = r$ . Отсюда и леммы 1.26 следует, что  $a$  является  $r$ -разделителем слова  $\mathbf{u}^*$ . Тогда  $h_1^r(\mathbf{u}^*, b) \neq h_2^r(\mathbf{u}^*, b)$ . Следовательно,

$D(\mathbf{u}^*, b) > r$ . Поскольку, в силу леммы 3.18,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\beta_r$ , мы можем применить утверждение, доказанное в подслучае 1.3, и получить, что в  $\mathbf{V}$  выполнены тождества  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}'ba\mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}'abu'' = \mathbf{u}$ .

Мы завершили доказательство утверждения (iii).

*Подслучай 3.3:*  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию п. (iv), т.е.  $\alpha_k$  выполнено в  $\mathbf{V}$ . Принимая во внимание подслучай 3.2, мы можем считать, что  $D(\mathbf{u}, a) = D(\mathbf{u}, b) = \infty$ . Отсюда и леммы 1.26 вытекает, что подслово  $ab$  слова  $\mathbf{u}$ , указанное в формулировке леммы, лежит в некотором  $s$ -блоке слова  $\mathbf{u}$  для каждого  $s$ . Теперь мы можем дословно повторить рассуждения из подслучая 3.1, заключив, что в многообразии  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$ .

Таким образом, мы завершили доказательство утверждения (iv) и леммы 3.20 в целом.  $\square$

### 3.4.3. Редукция к интервалам вида $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$

В этом подразделе мы докажем п. 3) предложения 3.15. Для этого нам потребуется несколько вспомогательных результатов.

**Лемма 3.21.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{K}$ , удовлетворяющее тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , а  $s$  — натуральное число. Предположим, что выполнены условия (1.1) и (1.9) для  $\ell = s$ , а также существуют такие буквы  $x$  и  $x_s$ , что  $D(\mathbf{u}, x_s) = s$ ,  $\ell_i(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$  и  $\ell_1(\mathbf{v}, x_s) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$  для некоторого  $i \in \{1, 2\}$ .

(i) Если  $i = 1$ , то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_s$ .

(ii) Если  $i = 2$ , то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_s^s$ .

*Доказательство.* Лемма 3.16(ii) позволяет считать, что  $\text{осс}_y(\mathbf{u}), \text{осс}_y(\mathbf{v}) \leq 2$  для любой буквы  $y$ . В силу леммы 1.33, найдутся такие буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{s-1}$ , что  $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$  для всех  $0 \leq r < s$  и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид (1.10) для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2s+1}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2s+1}$ .

Предположим, что  $i = 1$ . Тогда  $\ell_1(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$  и  $\ell_1(\mathbf{v}, x_s) < \ell_1(\mathbf{v}, x)$ . Предположим, что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_2(\mathbf{u}, x)$ . Ввиду сказанного выше,

- первое вхождение  $x$  в  $\mathbf{u}$  лежит в  $\mathbf{u}_{2s+1}$ ,
- второе вхождение  $x$  в  $\mathbf{u}$  лежит в  $\mathbf{u}_{2s}\mathbf{u}_{2s-1} \cdots \mathbf{u}_0$ ,
- первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{v}$  лежат в  $\mathbf{v}_{2s}\mathbf{v}_{2s-1} \cdots \mathbf{v}_0$ .

Подставив  $x_s x^2$  вместо  $x_s$  в тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , мы получим тождество

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{2s+1}x_sx^2\mathbf{u}_{2s}x_{s-1}\mathbf{u}_{2s-1}x_sx^2\mathbf{u}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{u}_{2s-3}x_{s-1} \cdots \\
& \quad \cdot \mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0 \\
& \approx \mathbf{v}_{2s+1}x_sx^2\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}x_sx^2\mathbf{v}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{v}_{2s-3}x_{s-1} \cdots \\
& \quad \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Затем применим тождество (3.27), удалив третье и последующие вхождения  $x$  в обе части тождества (3.51). В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2s+1}x_sx(\mathbf{u}_{2s}x_{s-1}\mathbf{u}_{2s-1}x_s\mathbf{u}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{u}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0)_x \\ & \approx \mathbf{v}_{2s+1}x_sx^2(\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}x_s\mathbf{v}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{v}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0)_x. \end{aligned}$$

Теперь подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в последнем тождестве, кроме  $x, x_0, x_1, \dots, x_s$ . Мы получим тождество

$$xx_sxx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 \approx x_sx^2x_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1,$$

т.е. тождество  $\beta_s$ . Таким образом,  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_s$ .

Предположим теперь, что  $\ell_2(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$ . Ввиду сказанного выше,

- первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{u}$  лежат в  $\mathbf{u}_{2s+1}$ ,
- первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{v}$  лежат в  $\mathbf{v}_{2s}\mathbf{v}_{2s-1}\cdots\mathbf{v}_0$ .

Теперь подставим  $x_sx^2$  вместо  $x_s$  в тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  и получим тождество (3.51). Затем применим тождество (3.27), удалив третье и последующие вхождения  $x$  в обе части тождества (3.51). В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2s+1}x_s\mathbf{u}_{2s}x_{s-1}\mathbf{u}_{2s-1}x_s\mathbf{u}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{u}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0 \\ & \approx \mathbf{v}_{2s+1}x_sx^2(\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}x_s\mathbf{v}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{v}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0)_x. \end{aligned}$$

Теперь подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в последнем тождестве, кроме  $x, x_0, x_1, \dots, x_s$ . Мы получим тождество

$$x^2x_sx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 \approx x_sx^2x_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1. \quad (3.52)$$

Следовательно,  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} x_sx^2x_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 & \stackrel{(3.52)}{\approx} x^2x_sx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 \\ & \stackrel{(3.5)}{\approx} x^3x_sx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 \\ & \stackrel{(3.52)}{\approx} xx_sx^2x_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 \\ & \stackrel{(3.27)}{\approx} xx_sxx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1, \end{aligned}$$

откуда следует, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество  $\beta_s$ . Таким образом,  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_s$ . Утверждение (i) доказано.

Предположим теперь, что  $i = 2$ . Тогда  $\ell_1(\mathbf{u}, x) < \ell_2(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$ . Если  $\ell_1(\mathbf{v}, x_s) < \ell_1(\mathbf{v}, x)$ , то мы оказываемся в условиях уже доказанного утверждения (i). Таким образом, мы можем считать, что  $\ell_1(\mathbf{v}, x) < \ell_1(\mathbf{v}, x_s)$ . Следовательно,

- первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{u}$  лежат в  $\mathbf{u}_{2s+1}$ ,
- первое вхождение  $x$  в  $\mathbf{v}$  лежит в  $\mathbf{v}_{2s+1}$ ,

- второе вхождение  $x$  в  $\mathbf{v}$  лежит в  $\mathbf{v}_{2s}\mathbf{v}_{2s-1} \cdots \mathbf{v}_0$ .

Теперь подставим  $x_s x^2$  вместо  $x_s$  в тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  и получим тождество (3.51). Затем применим тождество (3.27), удалив третьи и последующие вхождения  $x$  в обе части тождества (3.51). В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2s+1}x_s\mathbf{u}_{2s}x_{s-1}\mathbf{u}_{2s-1}x_s\mathbf{u}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{u}_{2s-3}x_{s-1} \cdots \mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0 \\ & \approx \mathbf{v}_{2s+1}x_sx(\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}x_s\mathbf{v}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{v}_{2s-3}x_{s-1} \cdots \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0)_x. \end{aligned}$$

Наконец, подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в последнем тождестве, кроме  $x, x_0, x_1, \dots, x_s$ . Мы получим тождество

$$x^2x_sx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1} \cdots x_1x_2x_0x_1 \approx xx_sxx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1} \cdots x_1x_2x_0x_1,$$

т.е. тождество (3.28) при  $k = s$ . Из леммы 3.17 следует, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_s^s$ . Утверждение (ii) доказано.  $\square$

**Лемма 3.22.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{K}$ , удовлетворяющее тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Если выполнены условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = 1$ , но для некоторого  $k > 1$  условие (1.9) при  $\ell = k$  не выполняется, то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_{\ell-1}^{\ell-1}$ .

*Доказательство.* Предположим, что условие (1.9) не выполняется для некоторого  $\ell = k > 1$  и  $k$  — наименьшее число с таким свойством. Тогда существует такая буква  $x$ , что  $h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x) \neq h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$ , где либо  $i = 1$ , либо  $i = 2$ . Пусть (1.7) —  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . В частности, множество всех  $(k-1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$  совпадает с множеством  $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ . Поскольку условие (1.9) выполнено при  $\ell = k-1$ , мы можем применить лемму 1.29 и получить, что  $\mathbf{v}$  имеет то же множество  $(k-1)$ -разделителей, что и  $\mathbf{u}$  (но порядок первых вхождений этих букв в слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  может различаться). Положим  $t_p = h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x)$  и  $t_q = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$ . Ясно, что  $p \neq q$ .

Предположим сначала, что  $\ell_i(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, t_q)$ . Выбор букв  $t_p$  и  $t_q$  гарантирует, что  $\ell_1(\mathbf{u}, t_p) < \ell_i(\mathbf{u}, x)$  и  $\ell_1(\mathbf{v}, t_q) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$ . Следовательно,  $\ell_1(\mathbf{u}, t_p) < \ell_1(\mathbf{u}, t_q)$ , откуда вытекает, что  $p < q$ . Если буква  $t_q$  является простой в  $\mathbf{u}$ , то из условия (1.1) следует, что эта буква является также простой в  $\mathbf{v}$ . В этом случае буква  $t_q$  будет 0-разделителем в словах  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Тогда, поскольку  $t_q = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$ , мы получим, что  $t_q = h_i^0(\mathbf{v}, x)$ . Из условия (1.9) при  $\ell = 1$  вытекает, что  $t_q = h_i^0(\mathbf{u}, x)$ . Но это противоречит неравенству  $p < q$ . Следовательно, буква  $t_q$  является кратной в  $\mathbf{u}$ , а значит, в силу условия (1.1), и в  $\mathbf{v}$ . Тогда  $D(\mathbf{v}, t_q) > 0$ . По лемме 1.26,  $D(\mathbf{v}, t_q) \leq k-1$ , поскольку  $t_q$  является  $(k-1)$ -разделителем слова  $\mathbf{v}$ . Положим  $r = D(\mathbf{v}, t_q)$ . Если  $i = 1$ , то применим лемму 3.21(i) при  $s = r$  и  $x_s = t_q$  и получим, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_r \subseteq \mathbf{J}_{k-1}^{k-1}$ . Если  $i = 2$ , то, используя лемму 3.21(ii) при  $s = r$  и  $x_s = t_q$ , получаем, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_r^r \subseteq \mathbf{J}_{k-1}^{k-1}$ .

Если  $\ell_i(\mathbf{v}, x) < \ell_1(\mathbf{v}, t_p)$ , то мы можем получить требуемое заключение, используя рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем абзаце.

Наконец, предположим, что  $\ell_1(\mathbf{u}, t_q) < \ell_i(\mathbf{u}, x)$  и  $\ell_1(\mathbf{v}, t_p) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$ . Из первого из этих неравенств следует, что первое вхождение  $t_q$  в  $\mathbf{u}$  предшествует  $i$ -му вхождению  $x$  в  $\mathbf{u}$ . Однако  $t_p$  является  $(i, k-1)$ -ограничителем



$x$  в  $\mathbf{u}$ . Следовательно,  $\ell_1(\mathbf{u}, t_q) < \ell_1(\mathbf{u}, t_p)$ . Аналогичным образом можно проверить, что  $\ell_1(\mathbf{v}, t_p) < \ell_1(\mathbf{v}, t_q)$ , поскольку  $\ell_1(\mathbf{v}, t_p) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$  и  $t_q = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$ . Предположим, что буква  $t_p$  является простой в  $\mathbf{u}$ . Тогда из условия (1.1) вытекает, что эта буква также является простой и в  $\mathbf{v}$ . Это означает, что  $t_p$  является 0-разделителем слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Поскольку  $t_p = h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x)$ , мы имеем, что  $t_p = h_i^0(\mathbf{u}, x)$ . Тогда из условия (1.9) при  $\ell = 1$  вытекает, что  $t_p = h_i^0(\mathbf{v}, x)$ . Заметим, что  $\ell_1(\mathbf{v}, t_p) < \ell_1(\mathbf{v}, t_q) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$ . Отсюда  $t_p = h_1^0(\mathbf{v}, t_q)$ . Тогда из условия (1.9) при  $\ell = 1$  вытекает, что  $t_p = h_1^0(\mathbf{u}, t_q)$ . Но это противоречит тому, что  $\ell_1(\mathbf{u}, t_q) < \ell_1(\mathbf{u}, t_p)$ . Следовательно, буква  $t_p$  является кратной в  $\mathbf{u}$ . Тогда  $D(\mathbf{u}, t_p) > 0$ . По лемме 1.26,  $D(\mathbf{u}, t_p) \leq k - 1$ . Положим  $r = D(\mathbf{u}, t_p)$ . Заметим, что мы находимся в условиях леммы 3.21 при  $i = 1$ ,  $s = r$ ,  $x = t_q$  и  $x_s = t_p$ . Применим п. (i) этой леммы и получим, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_r \subseteq \mathbf{J}_{k-1}^{k-1}$ .  $\square$

Следующее утверждение открывает серию однотипных утверждений, включающую в себя также предложения 3.26, 3.28 и 3.31. Они посвящены проблемам равенства слов в многообразиях  $\mathbf{F}_k$ ,  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{I}_k$ ,  $\mathbf{J}_k^m$  и  $\mathbf{K}$ . Все эти предложения доказываются по одной и той же схеме. В доказательстве необходимости эта схема почти не меняется от предложения к предложению. Что касается доказательства достаточности, то применение схемы, в целом изложенной в доказательстве предложения 3.23(i), с каждым разом будет усложняться.

**Предложение 3.23.** *Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено:*

- (i) *в многообразии  $\mathbf{F}_k$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = k$ ;*
- (ii) *в многообразии  $\mathbf{K}$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (1.1) и (1.9) для всех  $\ell$ .*

*Доказательство.* (i) *Необходимость.* Предположим, что многообразие  $\mathbf{F}_k$  удовлетворяет нетривиальному тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Из предложения 1.6 и включения  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{F}_k$  следует, что выполнено условие (1.1). Поскольку  $\mathbf{F}_k$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , из леммы 1.2 следует, что существует такая последовательность слов  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n = \mathbf{v}$ , что для любого  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  найдутся слова  $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i \in F^1$ , эндоморфизм  $\xi_i \in \text{End}(F^1)$  и тождество  $\mathbf{a}_i \approx \mathbf{b}_i \in \{\Phi, \alpha_k\}$  такие, что либо  $\mathbf{w}_i = \mathbf{p}_i \xi_i(\mathbf{a}_i) \mathbf{q}_i$  и  $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{p}_i \xi_i(\mathbf{b}_i) \mathbf{q}_i$ , либо  $\mathbf{w}_i = \mathbf{p}_i \xi_i(\mathbf{b}_i) \mathbf{q}_i$  и  $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{p}_i \xi_i(\mathbf{a}_i) \mathbf{q}_i$ . По индукции мы можем свести наши рассуждения к случаю, когда  $\mathbf{u} = \mathbf{p} \xi(\mathbf{a}) \mathbf{q}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{p} \xi(\mathbf{b}) \mathbf{q}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , эндоморфизма  $\xi \in \text{End}(F^1)$  и тождества  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{\Phi, \alpha_k\}$ .

Если  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{xyx \approx xyx^2, x^2y \approx x^2yx\}$ , то требуемое утверждение очевидно, потому что первое и второе вхождения букв слова  $\mathbf{u}$  не принимают участия в замене  $\xi(\mathbf{a})$  на  $\xi(\mathbf{b})$ . Предположим теперь, что  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$  совпадает с тождеством (3.4). Тогда, поскольку  $D(\mathbf{a}, x) = D(\mathbf{a}, y) = \infty$ , из леммы 1.34 вытекает, что подслово  $\xi(\mathbf{a})$  слова  $\mathbf{u}$ , расположенное между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , содержится в некотором  $s$ -блоке для любого  $s$ . В частности, это подслово

содержится в некотором  $(k-1)$ -блоке. Из этого вытекает справедливость утверждения (1.9) при  $\ell = k$ .

Предположим, наконец, что  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$  совпадает с  $\alpha_k$ . Тогда

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{a}) &= \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1, \\ \xi(\mathbf{b}) &= \mathbf{b}_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1\end{aligned}$$

для некоторых слов  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{b}_k$ . В этом случае

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{p} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{p} \mathbf{b}_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}.\end{aligned}$$

По лемме 3.19,  $D(\mathbf{a}, x_k) = D(\mathbf{a}, y_k) = k$ . Тогда из леммы 1.34 вытекает, что подслово  $\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k$  слова  $\mathbf{u}$ , расположенное между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{a}_{k-1}$ , содержится в некотором  $(k-1)$ -блоке. Отсюда вытекает справедливость утверждения (1.9) при  $\ell = k$ .

*Достаточность.* Наметим схему наших дальнейших рассуждений. Заметим, что достаточность в предложениях 3.26, 3.28 и 3.31 будет доказываться по той же схеме. Пусть  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, удовлетворяющее условию предложения. Мы начнем с рассмотрения  $(k-1)$ -разложения слова  $\mathbf{u}$ . Основываясь на лемме 3.20 и используя тождества, выполненные в многообразии  $\mathbf{F}_k$ , покажем, что любой  $(k-1)$ -блок слова  $\mathbf{u}$  может быть заменен на слово некоторого «канонического вида». Мы заменим все  $(k-1)$ -блоки слова  $\mathbf{u}$  этим «каноническим видом», получив некоторое слово  $\mathbf{u}^\sharp$ . После этого мы рассмотрим слово  $\mathbf{v}$ . Мы покажем, что с точностью до применения тождеств многообразия  $\mathbf{F}_k$ , это слово имеет в точности те же  $(k-1)$ -блоки и те же  $(k-1)$ -разделители, что и слово  $\mathbf{u}$ . Это позволит нам изменить  $(k-1)$ -блоки слова  $\mathbf{v}$  тем же образом, что и  $(k-1)$ -блоки слова  $\mathbf{u}$ , получив снова слово  $\mathbf{u}^\sharp$ . Из сказанного, очевидно, следует, что в  $\mathbf{F}_k$  выполнено тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ .

Приступим к реализации намеченного плана. Предположим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  удовлетворяет условиям (1.1) и (1.9) при  $\ell = k$ , а (1.7) —  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . Зафиксируем индекс  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Лемма 3.16(ii) позволяет считать, что каждая буква из  $\text{supp}(\mathbf{u}_i)$  входит в  $(k-1)$ -блок  $\mathbf{u}_i$  не более двух раз. Положим  $\text{mul}(\mathbf{u}_i) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ ,  $\text{sim}(\mathbf{u}_i) = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$  и

$$\bar{\mathbf{u}}_i = x_1^2 x_2^2 \cdots x_p^2 y_1 y_2 \cdots y_q.$$

Заметим, что  $\bar{\mathbf{u}}_i$  является ничем иным, как упомянутым выше «каноническим видом»  $(k-1)$ -блока  $\mathbf{u}_i$ . Действительно,  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_i \mathbf{w}_2$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$ . Из лемм 3.16(ii) и 3.20(iv) следует, что многообразие  $\mathbf{F}_k$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_i \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{w}_2.$$

В частности,  $\mathbf{F}_k$  удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} t_m \mathbf{u}_m \approx t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} t_m \bar{\mathbf{u}}_m.$$

Положим  $\mathbf{u}' = t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} t_m \overline{\mathbf{u}_m}$ . Заметим, что выполняются условия (1.1) и (1.9) при  $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$  и  $\ell = k$ . Тогда из леммы 1.27 вытекает, что слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}'$  являются  $(k-1)$ -эквивалентными. Следовательно,  $t_0, t_1, \dots, t_m$  являются  $(k-1)$ -разделителями слова  $\mathbf{u}'$ , а  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \overline{\mathbf{u}_m}$  являются  $(k-1)$ -блоками этого слова. Теперь мы можем повторить дословно рассуждения, приведенные выше, заменив слово  $\mathbf{u}$  на слово  $\mathbf{u}'$  и получить, что в  $\mathbf{F}_k$  выполнено тождество

$$\mathbf{u}' = t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} t_m \overline{\mathbf{u}_m} \approx t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \overline{\mathbf{u}_{m-1}} t_m \overline{\mathbf{u}_m}.$$

Продолжая этот процесс мы получим, что  $\mathbf{F}_k$  удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} t_m \mathbf{u}_m \approx t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} t_m \overline{\mathbf{u}_m} \\ &\approx t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \overline{\mathbf{u}_{m-1}} t_m \overline{\mathbf{u}_m} \approx \cdots \approx t_0 \overline{\mathbf{u}_0} t_1 \overline{\mathbf{u}_1} \cdots t_m \overline{\mathbf{u}_m}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Положим  $\mathbf{u}^\sharp = t_0 \overline{\mathbf{u}_0} t_1 \overline{\mathbf{u}_1} \cdots t_m \overline{\mathbf{u}_m}$ .

Перейдем к слову  $\mathbf{v}$ . Ввиду леммы 1.27,  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид (1.8). Из условия (1.9) при  $\ell = k$  вытекает, что  $j$ -е вхождение любой буквы в слово  $\mathbf{u}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$  тогда и только тогда, когда  $j$ -е вхождение этой буквы в слово  $\mathbf{v}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{v}_i$  для  $j = 1, 2$ . Лемма 3.16(ii) позволяет нам считать, что  $\text{осс}_x(\mathbf{u}) \leq 2$  и  $\text{осс}_x(\mathbf{v}) \leq 2$  для любой буквы  $x$ . Следовательно,  $\text{sim}(\mathbf{u}_i) = \text{sim}(\mathbf{v}_i)$  и  $\text{mul}(\mathbf{u}_i) = \text{mul}(\mathbf{v}_i)$ . Это означает, что  $(k-1)$ -блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  имеют одинаковый «канонический вид». Таким образом, многообразие  $\mathbf{F}_k$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\sharp \approx \mathbf{v}$ .

(ii) *Необходимость* следует из уже доказанного утверждения (i) данного предложения и очевидного включения  $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{K}$ , в то время как *достаточность* доказывается так же, как и в утверждении (i).  $\square$

Теперь мы готовы завершить доказательство п. 3) предложения 3.15. Пусть  $\mathbf{E} \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{K}$ . Проверим, что  $\mathbf{X} \in [\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$  для некоторого  $k$ . Предположим, что  $\mathbf{F}_1 \not\subseteq \mathbf{X}$ . Тогда найдется тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{X}$ , но не выполненное в  $\mathbf{F}_1$ . Из предложений 3.3 и 3.23(i), а также включения  $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$  следует, что выполнены условия (1.1) и (3.2), а условие (1.9) при  $\ell = 1$  не выполняется. Пусть (1.7) — 0-разложение слова  $\mathbf{u}$ . Применим лемму 1.27 и получим, что 0-разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид (1.8). Поскольку  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  не удовлетворяет условию (1.9) при  $\ell = 1$ , но удовлетворяет условию (3.2), найдется такая буква  $x$ , что  $h_2^0(\mathbf{u}, x) \neq h_2^0(\mathbf{v}, x)$ . Положим  $t_i = h_2^0(\mathbf{u}, x)$  и  $t_j = h_2^0(\mathbf{v}, x)$ . Без ограничения общности можно считать, что  $j < i$ . Поскольку справедливо условие (3.2),  $h_1^0(\mathbf{u}, x) = h_1^0(\mathbf{v}, x) = t_k$  для некоторого  $k$ . Ясно, что  $k \leq j$ . Следовательно, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\mathbf{u}_1 t_k \mathbf{u}_2 x \mathbf{u}_3 t_i \mathbf{u}_4 x \mathbf{u}_5 \approx \mathbf{v}_1 t_k \mathbf{v}_2 x \mathbf{v}_3 x \mathbf{v}_4 t_i \mathbf{v}_5$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}_p$  и  $\mathbf{v}_p$  при  $p = 1, 2, \dots, 5$ . Подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , кроме  $x$  и  $t_i$ . Мы получим тождество  $x t_i x^p \approx x^q t_i x^r$ , где  $p \geq 1$ ,  $q \geq 2$  и  $r \geq 0$ . Затем применим тождество (3.27) и получим, что  $\mathbf{X}$  удовлетворяет тождеству

$xt_i x \approx x^2 t_i$ . Отсюда и из включения  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{K}$  следует, что  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}$ , что противоречит выбору многообразия  $\mathbf{X}$ . Следовательно,  $\mathbf{F}_1 \subseteq \mathbf{X}$ . Если  $\mathbf{X}$  содержит бесконечное число многообразий вида  $\mathbf{F}_k$ , то, по предложению 3.23,  $\mathbf{X} = \mathbf{K}$ . Отсюда вытекает, что существует натуральное число  $k$  такое, что  $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{X}$ , но  $\mathbf{F}_{k+1} \not\subseteq \mathbf{X}$ . Тогда из предложения 3.23(i) следует, что выполняются условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = k$ , в то время как условие (1.9) при  $\ell = k+1$  не выполняется. Нам остается применить лемму 3.22 и заключить, что  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{J}_k^k \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$ . Утверждение 3) предложения 3.15 доказано.

#### 3.4.4. Структура интервала $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$

Здесь мы докажем п. 4) предложения 3.15. Это доказательство разбивается на 6 частей, которые мы будем обозначать буквами А)–Е).

А) Первым этапом проверки п. 4) предложения 3.15 является

**Лемма 3.24.** *Если  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов из интервала  $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$ , то либо  $\mathbf{X} = \mathbf{F}_k$ , либо  $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{H}_k$ .*

Чтобы проверить этот факт, нам потребуется два вспомогательных утверждения.

**Лемма 3.25.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие моноидов такое, что  $\mathbf{F}_s \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$  для некоторого  $s$ . Если  $\mathbf{V}$  удовлетворяет такому тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , что  $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, b)$ ,  $\ell_1(\mathbf{v}, b) < \ell_1(\mathbf{v}, a)$  и  $D(\mathbf{u}, a) = D(\mathbf{u}, b) = s$  для некоторых  $a, b \in \text{con}(\mathbf{u})$ , то  $\mathbf{V} = \mathbf{F}_s$ .*

*Доказательство.* Положим  $x_s = a$  и  $y_s = b$ . Поскольку  $\mathbf{F}_s \subseteq \mathbf{V}$ , из предложения 3.23(i) вытекают условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = s$ . Предположим, что

$$\ell_2(\mathbf{u}, x_s) < \ell_2(\mathbf{u}, y_s) \text{ и } \ell_2(\mathbf{v}, x_s) < \ell_2(\mathbf{v}, y_s). \quad (3.54)$$

По лемме 1.33, существуют буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{s-1}$  такие, что  $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$  для любого  $0 \leq r < s$ , и тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид (1.10) для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2s+1}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2s+1}$ .

Проверим, что первые вхождения  $x_s$  и  $y_s$  в  $\mathbf{u}$  лежат в одном и том же  $(s-1)$ -блоке. Положим  $t_1 = h_1^{s-1}(\mathbf{u}, x_s)$  и  $t_2 = h_1^{s-1}(\mathbf{u}, y_s)$ . Рассуждая от противного, предположим, что  $t_1 \neq t_2$ . Поскольку  $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, y_s)$ , мы имеем, что  $\ell_1(\mathbf{u}, t_1) < \ell_1(\mathbf{u}, t_2)$ . Применим лемму 1.27 при  $k = s-1$  и получим, что  $\ell_1(\mathbf{v}, t_1) < \ell_1(\mathbf{v}, t_2)$ . Тогда из условия (1.9) при  $\ell = s$  следует, что  $t_1 = h_1^{s-1}(\mathbf{v}, x_s)$  и  $t_2 = h_1^{s-1}(\mathbf{v}, y_s)$ . Но это противоречит тому, что  $\ell_1(\mathbf{v}, y_s) < \ell_1(\mathbf{v}, x_s)$ . Таким образом, первые вхождения  $x_s$  и  $y_s$  в  $\mathbf{u}$  лежат в одном и том же  $(s-1)$ -блоке. В частности, первое вхождение  $y_s$  в  $\mathbf{u}$  предшествует первому вхождению  $x_{s-1}$  в  $\mathbf{u}$ , так как  $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-1})$  и  $x_{s-1}$  является  $(s-1)$ -разделителем. Из сказанного следует, что  $\mathbf{u}_{2s} = \mathbf{u}'_{2s} y_s \mathbf{u}''_{2s}$  для некоторых слов  $\mathbf{u}'_{2s}$  и  $\mathbf{u}''_{2s}$ . Поскольку первое вхождение  $y_s$  в  $\mathbf{v}$  предшествует первому вхождению  $x_s$  в  $\mathbf{v}$ , мы имеем, что  $\mathbf{v}_{2s+1} = \mathbf{v}'_{2s+1} y_s \mathbf{v}''_{2s+1}$  для некоторых слов  $\mathbf{v}'_{2s+1}$  и  $\mathbf{v}''_{2s+1}$ .

Далее, поскольку  $\ell_1(\mathbf{u}, y_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$ , применим лемму 1.32 при  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ ,  $z = y_s$ ,  $t = x_{s-2}$  и  $r = s$  и получим, что  $\ell_2(\mathbf{u}, y_s) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s-2})$ . Тогда

$\mathbf{u}_{2s-2} = \mathbf{u}'_{2s-2}y_s\mathbf{u}''_{2s-2}$  для некоторых слов  $\mathbf{u}'_{2s-2}$  и  $\mathbf{u}''_{2s-2}$ . Аналогичным образом мы можем проверить, что  $\mathbf{v}_{2s-2} = \mathbf{v}'_{2s-2}y_s\mathbf{v}''_{2s-2}$  для некоторых слов  $\mathbf{v}'_{2s-2}$  и  $\mathbf{v}''_{2s-2}$ .

Ввиду сказанного выше, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2s+1}x_s\mathbf{u}'_{2s} \overset{(1)}{y_s} \mathbf{u}'_{2s}x_{s-1}\mathbf{u}_{2s-1}x_s\mathbf{u}'_{2s-2} \overset{(2)}{y_s} \mathbf{u}'_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{u}_{2s-3}x_{s-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0 \\ & \approx \mathbf{v}'_{2s+1} \overset{(1)}{y_s} \mathbf{v}''_{2s+1}x_s\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}x_s\mathbf{v}'_{2s-2} \overset{(2)}{y_s} \mathbf{v}''_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{v}_{2s-3}x_{s-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Лемма 3.16(ii) позволяет нам предположить, что буквы  $y_s$  и  $x_r$  при  $1 \leq r \leq s$  входят ровно по два раза в каждое из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Теперь подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , кроме  $x_0, x_1, \dots, x_s$  и  $y_s$ . Мы получим тождество

$$x_sy_sx_{s-1}x_sy_sx_{s-2}x_{s-1} \cdots x_1x_2x_0x_1 \approx y_sx_sx_{s-1}x_sy_sx_{s-2}x_{s-1} \cdots x_1x_2x_0x_1,$$

т.е. тождество  $\alpha_s$ .

Пусть теперь условие (3.54) не выполняется. Если  $\ell_2(\mathbf{u}, x_s) < \ell_2(\mathbf{u}, y_s)$ , но  $\ell_2(\mathbf{v}, y_s) < \ell_2(\mathbf{v}, x_s)$ , то рассуждения, аналогичные вышеприведенным, позволяют показать, что  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству

$$x_sy_sx_{s-1}x_sy_sx_{s-2}x_{s-1} \cdots x_1x_2x_0x_1 \approx \overset{(1)(1)}{y_sx_s} x_{s-1} \overset{(2)(2)}{y_sx_s} x_{s-2}x_{s-1} \cdots x_1x_2x_0x_1.$$

В силу леммы 3.16(i), многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет тождеству  $\sigma_2$ . Это тождество позволяет нам переставить местами вторые вхождения букв  $x_s$  и  $y_s$  в правой части последнего тождества. В результате мы снова получим тождество  $\alpha_s$ .

Наконец, если  $\ell_2(\mathbf{u}, y_s) < \ell_2(\mathbf{u}, x_s)$ , то мы можем повторить приведенные выше рассуждения, применив леммы 1.32 и 1.33 для буквы  $y_s$  вместо  $x_s$ . В результате мы получим тождество вида

$$x_sy_sx_{s-1}y_sx_sx_{s-2}x_{s-1} \cdots x_1x_2x_0x_1 \approx y_sx_sx_{s-1}\mathbf{a}x_{s-2}x_{s-1} \cdots x_1x_2x_0x_1,$$

где

$$\mathbf{a} = \begin{cases} x_sy_s, & \text{если } \ell_2(\mathbf{v}, x_s) < \ell_2(\mathbf{v}, y_s), \\ y_sx_s & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае, когда  $\mathbf{a} = x_sy_s$ , это тождество совпадает с  $\alpha_s$ . В противном случае мы еще раз применим тождество  $\sigma_2$  и получим тождество  $\alpha_s$ . Следовательно, в любом случае  $\mathbf{V}$  удовлетворяет  $\alpha_s$ , откуда следует, что  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{F}_s$ .  $\square$

**Предложение 3.26.** *Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{H}_k$  тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$  и условие*

$$\text{если либо } D(\mathbf{u}, x) \leq \ell, \text{ либо } D(\mathbf{v}, x) \leq \ell, \text{ то } h_1^\ell(\mathbf{u}, x) = h_1^\ell(\mathbf{v}, x) \quad (3.55)$$

при  $\ell = k$ .

*Доказательство. Необходимость.* Предположим, что в многообразии  $\mathbf{H}_k$  выполнено нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Из предложения 3.23(i) и включения  $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{H}_k$  следует, что справедливы условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = k$ . Как и в доказательстве необходимости в предложении 3.23(i), мы можем считать, что  $\mathbf{u} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{a})\mathbf{q}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{b})\mathbf{q}$  для некоторых слов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , эндоморфизма  $\xi \in \text{End}(F^1)$  и тождества  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{\Phi, \beta_k\}$ .

Если  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \Phi$ , то, в силу предложения 3.23(ii), условие (1.9) выполняется для любого  $\ell$ . Очевидно, что отсюда следует требуемое заключение. Пусть теперь  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$  совпадает с  $\beta_k$ . Тогда

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{a}) &= \mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1, \\ \xi(\mathbf{b}) &= \mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}^2\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\end{aligned}$$

для некоторых слов  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{a}_{k+1}$ , откуда

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{p}\mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{p}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}^2\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q}.\end{aligned}$$

По лемме 3.19,  $D(\mathbf{a}, x), D(\mathbf{a}, x_k) > k - 1$ . Тогда из леммы 1.34 следует, что подслово  $\mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}$  слова  $\mathbf{u}$ , расположенное между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{a}_{k-1}$ , содержится в некотором  $(k - 1)$ -блоке. Кроме того, ввиду леммы 1.34, оба вхождения слова  $\mathbf{a}_{k+1}$  в  $\mathbf{u}$  не содержат никаких  $k$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ , так как, по лемме 3.19,  $D(\mathbf{a}, x) > k$ . Это означает, что слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются  $k$ -эквивалентными. Применим теперь лемму 1.27 и получим, что справедливо условие (3.55) при  $\ell = k$ .

*Достаточность.* Схема наших рассуждений здесь та же, что и при доказательстве достаточности в предложении 3.23(i). Однако «канонический вид»  $(k - 1)$ -блоков слова  $\mathbf{u}$  выглядит здесь сложнее, чем в том предложении.

Предположим, что выполняются условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$  и (3.55) при  $\ell = k$ . Пусть  $(k - 1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$  имеет вид (1.7). Зафиксируем произвольное  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ . Пусть

$$t_i\mathbf{u}_i = s_0\mathbf{a}_0s_1\mathbf{a}_1 \cdots s_n\mathbf{a}_n, \quad (3.56)$$

где  $s_0, s_1, \dots, s_n$  —  $k$ -разделители слова  $\mathbf{u}$ , а  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  —  $k$ -блоки этого слова. Положим  $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n$ . Пусть  $\text{con}(\mathbf{u}_i^*) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  и

$$\bar{\mathbf{u}}_i = x_1^2x_2^2 \cdots x_p^2s_1s_2 \cdots s_n.$$

Как мы увидим ниже, слово  $\bar{\mathbf{u}}_i$  является ничем иным, как упомянутым выше «каноническим видом»  $(k - 1)$ -блока  $\mathbf{u}_i$ .

Ясно, что  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\mathbf{u}_i\mathbf{w}_2$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$ . Предположим, что  $x \in \text{con}(\mathbf{u}_i^*) \setminus \text{con}(\mathbf{w}_1)$ . Если буква  $x$  проста в  $\mathbf{u}_i$ , то эта буква обязана быть  $k$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ , что невозможно. Следовательно, буква  $x$  кратна в  $\mathbf{u}_i$ . Поскольку  $x \notin \text{con}(\mathbf{w}_1)$ , это означает, что первое и второе вхождения  $x$  в  $\mathbf{u}$  лежат в одном и том же  $(k - 1)$ -блоке слова  $\mathbf{u}$ , откуда  $D(\mathbf{u}, x) > k$ . Далее, из леммы 1.26 вытекает, что  $D(\mathbf{u}, s_j) = k$  для

всех  $j = 1, \dots, n$ . Мы видим, что если  $a \in \text{con}(\mathbf{u}_i^*)$  и  $b \in \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , то либо  $a \in \text{con}(\mathbf{w}_1)$ , либо  $D(\mathbf{u}, a) \neq D(\mathbf{u}, b)$ . Теперь воспользуемся пп. (ii) и (iii) леммы 3.20 и получим, что в  $\mathbf{H}_k$  выполнено тождество

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_i \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_i^* s_1 s_2 \cdots s_n \mathbf{w}_2.$$

Как мы видели выше, если  $x \in \text{con}(\mathbf{u}_i^*) \setminus \text{con}(\mathbf{w}_1)$ , то  $\text{осс}_x(\mathbf{u}_i^*) \geq 2$ . Если же  $x \in \text{con}(\mathbf{w}_1) \cap \text{con}(\mathbf{u}_i^*)$ , то мы можем применить тождество (3.9) и получить, что  $\text{осс}_x(\mathbf{u}_i^*) \geq 2$ . Более того, учитывая лемму 3.16(ii), мы можем считать, что  $\text{осс}_x(\mathbf{u}_i^*) = 2$  для любого  $x \in \text{con}(\mathbf{u}_i^*)$ . Тогда из леммы 3.16(iii) следует, что в  $\mathbf{H}_k$  выполнены тождества

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_i^* s_1 s_2 \cdots s_n \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{w}_2.$$

Таким образом, как и в доказательстве предложения 3.23(i), используя тождества, выполненные в многообразии  $\mathbf{H}_k$ , мы можем последовательно заменить  $(k-1)$ -блоки  $\mathbf{u}_i$  слова  $\mathbf{u}$  на их «канонический вид»  $\bar{\mathbf{u}}_i$  для всех  $i = m, m-1, \dots, 0$ . Мы получим, что многообразие  $\mathbf{H}_k$  удовлетворяет тождествам (3.53). Положим  $\mathbf{u}^\sharp = t_0 \bar{\mathbf{u}}_0 t_1 \bar{\mathbf{u}}_1 \cdots t_m \bar{\mathbf{u}}_m$ .

Перейдем к слову  $\mathbf{v}$ . По лемме 1.27,  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид (1.8). В силу условия (3.55) и леммы 1.27, слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются  $k$ -эквивалентными. Это означает, что слово  $t_i \mathbf{v}_i$  представляет собой произведение чередующихся  $k$ -разделителей  $s_0, s_1, \dots, s_n$  и  $k$ -блоков  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  слова  $\mathbf{u}$ , т.е.

$$t_i \mathbf{v}_i = s_0 \mathbf{b}_0 s_1 \mathbf{b}_1 \cdots s_n \mathbf{b}_n. \quad (3.57)$$

Из условия (1.9) при  $\ell = k$  следует, что  $j$ -е вхождение любой буквы в  $\mathbf{u}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$  тогда и только тогда  $j$ -е вхождение этой буквы в  $\mathbf{v}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{v}_i$  для любого  $j = 1, 2$ . Лемма 3.16(ii) позволяет предположить, что если первое и второе вхождения буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$  не лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$ , то эта буква не входит в  $\mathbf{u}_i$ . Следовательно,  $\text{con}(\mathbf{u}_i^*) = \text{con}(\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n)$ . Отсюда вытекает, что  $(k-1)$ -блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  имеют один и тот же «канонический вид». Дословно повторяя рассуждения, приведенные выше, получаем, что многообразие  $\mathbf{H}_k$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\sharp \approx \mathbf{v}$ .  $\square$

*Доказательство леммы 3.24.* Предположим, что  $\mathbf{F}_k \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$ . Докажем, что  $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{H}_k$ . Рассуждая от противного, предположим, что  $\mathbf{H}_k \not\subseteq \mathbf{X}$ . Тогда существует тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{X}$ , но не выполненное в  $\mathbf{H}_k$ . Из предложений 3.23(i) и 3.26, а также включения  $\mathbf{F}_k \subset \mathbf{X}$  вытекает, что выполнены условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = k$ , но не выполнено условие (3.55) при  $\ell = k$ . По лемме 1.29, слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  имеют одинаковый набор  $k$ -разделителей. Однако данные два слова не являются  $k$ -эквивалентными по лемме 1.27. Тогда найдутся такие  $k$ -разделители  $a, b$  слов  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , что  $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, b)$ , но  $\ell_1(\mathbf{v}, b) < \ell_1(\mathbf{v}, a)$ . Ввиду леммы 1.26,  $D(\mathbf{u}, a), D(\mathbf{u}, b) \leq k$ . Предположим, что  $D(\mathbf{u}, a) = r < k$ . В силу леммы 1.30, выполняется условие (1.9) при  $\ell = r$ . Поэтому из леммы 1.31 вытекает, что  $D(\mathbf{v}, a) = r$ . По лемме 1.27, слова  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  являются  $r$ -эквивалентными. Положим  $c = h_1^r(\mathbf{u}, b)$ . Поскольку, по лемме 1.26,  $a$  является  $r$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ , первое вхождение  $a$  в  $\mathbf{u}$  предшествует первому вхождению  $c$  в  $\mathbf{u}$ . С другой стороны,

условие (1.9) при  $\ell = r$  влечет равенство  $c = h_1^r(\mathbf{v}, b)$ , откуда следует, что  $\ell_1(\mathbf{v}, c) < \ell_1(\mathbf{v}, a)$ . Это противоречит  $r$ -эквивалентности слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Таким образом,  $D(\mathbf{u}, a) = k$ . Аналогично,  $D(\mathbf{u}, b) = k$ . Теперь применим лемму 3.25 при  $s = k$  и получим, что  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}_k$ . Получаем противоречие с условием. Лемма 3.24 доказана.  $\square$

Б) Вторым этапом проверки п. 4) предложения 3.15 является

**Лемма 3.27.** *Если  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов из интервала  $[\mathbf{H}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$ , то либо  $\mathbf{X} = \mathbf{H}_k$ , либо  $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{I}_k$ .*

Чтобы проверить этот факт, нам требуется

**Предложение 3.28.** *Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{I}_k$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$  и*

$$h_1^\ell(\mathbf{u}, x) = h_1^\ell(\mathbf{v}, x) \text{ для всех } x \in \text{con}(\mathbf{u}) \quad (3.58)$$

при  $\ell = k$ .

*Доказательство. Необходимость.* Предположим, что в  $\mathbf{I}_k$  выполнено нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Из предложения 3.26 и включения  $\mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{I}_k$  следует, что выполняются условия (1.1) и (1.9) при  $\ell = k$ . Как и в доказательстве предложения 3.23(i), мы можем предположить, что  $\mathbf{u} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{a})\mathbf{q}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{b})\mathbf{q}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , эндоморфизма  $\xi \in \text{End}(F^1)$  и тождества  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{\Phi, \gamma_k\}$ .

Если  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \Phi$ , то, в силу предложения 3.23(ii), условие (1.9) справедливо для любого  $\ell$ . Очевидно, что отсюда следует требуемое заключение. Предположим теперь, что  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$  совпадает с  $\gamma_k$ . Тогда

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{a}) &= \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1, \\ \xi(\mathbf{b}) &= \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \mathbf{a}_k \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

для некоторых слов  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ , откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{p} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{p} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \mathbf{a}_k \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}. \end{aligned}$$

По лемме 3.19,  $D(\mathbf{a}, x_k) = k$ . Тогда из леммы 1.34 следует, что подслово  $\mathbf{a}_k$  слова  $\mathbf{u}$ , расположенное между  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{a}_{k-1}$ , не содержит  $(k-1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ . Кроме того, подслово  $\mathbf{b}_1$  слова  $\mathbf{u}$ , лежащее между  $\mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{a}_k$ , не содержит  $s$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$  для всех  $s$ . Следовательно, подслово  $\mathbf{b}_1 \mathbf{a}_k$  слова  $\mathbf{u}$ , расположенное между  $\mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{a}_{k-1}$ , лежит в некотором  $(k-1)$ -блоке слова  $\mathbf{u}$ . Очевидно, что подслово  $\mathbf{b}_1$  слова  $\mathbf{u}$ , лежащее между  $\mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{a}_k$ , не содержит первого вхождения никакой буквы слова  $\mathbf{u}$ . Отсюда вытекает, что выполняется условие (3.58) при  $\ell = k$ .

*Достаточность.* Как и в доказательстве предложения 3.26, схема наших рассуждений будет аналогична схеме доказательства достаточности предложения 3.23(i). Однако «канонический вид» блоков будет иметь еще более сложный вид, чем в предложении 3.26.



Предположим, что выполняются условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$  и (3.58) при  $\ell = k$ . Как и в доказательстве достаточности предложения 3.26, предположим, что  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$  имеет вид (1.7), а (3.56) является представлением  $t_i \mathbf{u}_i$  в виде произведения чередующихся  $k$ -разделителей  $s_0, s_1, \dots, s_n$  и  $k$ -блоков  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ .

Для любого  $j = 0, 1, \dots, n$  положим

$$X_j = \{x \in \text{con}(\mathbf{a}_j) \mid \text{первое вхождение } x \text{ в } \mathbf{u} \text{ лежит в } \mathbf{a}_j\}.$$

Заметим, что множество  $X_j$  можно определить другим эквивалентным способом. Ясно, что буква  $x$  лежит в  $X_j$  тогда и только тогда, когда  $(1, k)$ -ограничитель этой буквы в  $\mathbf{u}$  совпадает с  $k$ -разделителем  $\mathbf{u}$ , непосредственно предшествующим  $\mathbf{a}_j$ . Иными словами,

$$X_j = \{x \in \text{con}(\mathbf{a}_j) \mid s_j = h_1^k(\mathbf{u}, x)\}.$$

Положим  $X = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_n$ ,  $\mathbf{a}'_j = (\mathbf{a}_j)_X$  и  $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{a}'_0 \mathbf{a}'_1 \dots \mathbf{a}'_n$ . Пусть  $X_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jq_j}\}$ ,  $\text{con}(\mathbf{u}_i^*) = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  и

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_i &= (c_1 c_2 \dots c_p) \cdot (x_{01}^2 \dots x_{0q_0}^2) \cdot (s_1 x_{11}^2 \dots x_{1q_1}^2) \cdot (s_2 x_{21}^2 \dots x_{2q_2}^2) \dots \\ &\quad \cdot (s_n x_{n1}^2 \dots x_{nq_n}^2). \end{aligned}$$

Как мы увидим ниже, слово  $\bar{\mathbf{u}}_i$  является ничем иным, как упомянутым выше «каноническим видом»  $(k-1)$ -блока  $\mathbf{u}_i$ .

Ясно, что  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_i \mathbf{w}_2$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$ . Пусть  $x \in X_j$ . Если буква  $x$  является простой в  $\mathbf{u}_i$ , то  $x$  либо совпадает с одним из  $k$ -разделителей  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , либо лежит  $\text{con}(\mathbf{w}_1)$ . Однако оба эти варианта противоречат выбору  $x$ . Следовательно, буква  $x$  является кратной в  $\mathbf{u}_i$ . В силу тождества (3.27), мы можем предполагать, что  $\text{oss}_x(\mathbf{u}_i) = 2$ . Таким образом,  $\mathbf{u} = \mathbf{a} \mathbf{x} \mathbf{b} \mathbf{x} \mathbf{c}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  таких, что  $\mathbf{x} \mathbf{b} \mathbf{x}$  является подсловом слова  $\mathbf{u}_i$ . Проверим, что  $\mathbf{I}_k$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{a} \mathbf{x}^2 \mathbf{b} \mathbf{c}$ . Если  $\mathbf{b} = \lambda$ , то данное утверждение очевидно. Пусть теперь  $\mathbf{b} \neq \lambda$ . Поскольку  $h_1^k(\mathbf{u}, x) = h_2^k(\mathbf{u}, x) = s_j$ , мы имеем, что  $D(\mathbf{u}, x) > k$ . Тогда применив лемму 3.20(i) при  $m = k$ , мы можем последовательно переставить второе вхождение буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$  со всеми буквами слова  $\mathbf{b}$ . Мы получим, что  $\mathbf{I}_k$  удовлетворяет тождеству  $\mathbf{u} \approx \mathbf{a} \mathbf{x}^2 \mathbf{b} \mathbf{c}$ . Без ограничения общности мы можем считать, что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_{j0}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{j1}) < \dots < \ell_1(\mathbf{u}, x_{jq_j})$ . Следовательно,  $\mathbf{I}_k$  удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 \cdot (x_{01}^2 \dots x_{0q_0}^2 \mathbf{a}'_0) \cdot (s_1 x_{11}^2 \dots x_{1q_1}^2 \mathbf{a}'_1) \dots (s_n x_{n1}^2 \dots x_{nq_n}^2 \mathbf{a}'_n) \cdot \mathbf{w}_2. \quad (3.59)$$

Из определения множества  $X$  и слов вида  $\mathbf{a}'_j$  вытекает, что  $x \in \text{con}(\mathbf{w}_1)$  для любого  $x \in \text{con}(\mathbf{u}_i^*)$ . Теперь мы можем применить лемму 3.20(ii) и получить, что в  $\mathbf{I}_k$  выполнено тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_i^* \cdot (x_{01}^2 \dots x_{0q_0}^2) \cdot (s_1 x_{11}^2 \dots x_{1q_1}^2) \dots (s_n x_{n1}^2 \dots x_{nq_n}^2) \cdot \mathbf{w}_2.$$

Как мы видели выше,  $\text{con}(\mathbf{u}_i^*) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_1)$ . Поэтому мы можем применить тождество (3.27) и сделать слово  $\mathbf{u}_i^*$  линейным. После этого применим лемму 3.16(i) и получим, что  $\mathbf{I}_k$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx \mathbf{w}_1 \cdot (c_1 c_2 \dots c_p) \cdot (x_{01}^2 \dots x_{0q_0}^2) \cdot (s_1 x_{11}^2 \dots x_{1q_1}^2) \dots (s_n x_{n1}^2 \dots x_{nq_n}^2) \cdot \mathbf{w}_2 \\ &= \mathbf{w}_1 \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{w}_2. \end{aligned}$$

Как и в доказательстве предложения 3.23(i), используя тождества, выполненные в многообразии  $\mathbf{I}_k$ , заменим последовательно  $(k-1)$ -блоки  $\mathbf{u}_i$  слова  $\mathbf{u}$  на их «канонический вид»  $\overline{\mathbf{u}_i}$  для всех  $i = m, m-1, \dots, 0$ . Мы получим, что  $\mathbf{I}_k$  удовлетворяет тождествам (3.53). Положим  $\mathbf{u}^\sharp = t_0 \overline{\mathbf{u}_0} t_1 \overline{\mathbf{u}_1} \cdots t_m \overline{\mathbf{u}_m}$ .

Перейдем к слову  $\mathbf{v}$ . По лемме 1.27,  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид (1.8). Кроме того, из условия (3.58) при  $\ell = k$  и леммы 1.27 следует, что (3.57) является представлением  $t_i \mathbf{v}_i$  в виде произведения чередующихся  $k$ -разделителей  $s_0, s_1, \dots, s_n$  и  $k$ -блоков  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Из условия (3.58) вытекает, что

$$X_j = \{x \in \text{con}(\mathbf{b}_j) \mid s_j = h_1^k(\mathbf{v}, x)\}$$

для всех  $j = 0, 1, \dots, r_i$ . Положим  $\mathbf{b}'_j = (\mathbf{b}_j)_X$ . Из условия (1.9) при  $\ell = k$  следует, что  $j$ -е вхождение любой буквы из  $\mathbf{u}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$  тогда и только тогда, когда  $j$ -е вхождение этой буквы в  $\mathbf{v}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{v}_i$  для  $j = 1, 2$ . Также лемма 3.16(ii) позволяет предположить, что если первое и второе вхождения буквы  $x$  в  $\mathbf{u}$  не лежат в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$ , то эта буква не входит в  $\mathbf{u}_i$ . Тогда  $\text{con}(\mathbf{u}_i^*) = \text{con}(\mathbf{b}'_0 \mathbf{b}'_1 \cdots \mathbf{b}'_n)$ . Отсюда вытекает, что  $(k-1)$ -блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  имеют одинаковый «канонический вид». Повторяя дословно рассуждения, приведенные выше, получаем, что многообразие  $\mathbf{I}_k$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\sharp \approx \mathbf{v}$ .  $\square$

*Доказательство леммы 3.27.* Предположим, что  $\mathbf{H}_k \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$ . Проверим, что  $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{I}_k$ . Рассуждая от противного, предположим, что  $\mathbf{I}_k \not\subseteq \mathbf{X}$ . Тогда существует тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{X}$ , но не выполненное в  $\mathbf{I}_k$ . Из предложений 3.26 и 3.28, а также включения  $\mathbf{H}_k \subset \mathbf{X}$  вытекает, что выполняются условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$  и (3.55) при  $\ell = k$ , а условие (3.58) при  $\ell = k$  не выполняется. Пусть (1.7) —  $k$ -разложение слова  $\mathbf{u}$ . Тогда из условия (3.55) и леммы 1.27 следует, что  $k$ -разложение слова  $\mathbf{v}$  имеет вид (1.8). Поскольку условие (3.58) при  $\ell = k$  не выполняется, найдется такая буква  $x$ , что  $h_1^k(\mathbf{u}, x) \neq h_1^k(\mathbf{v}, x)$ . Положим  $t_i = h_1^k(\mathbf{u}, x)$  и  $t_j = h_1^k(\mathbf{v}, x)$ . Ясно, что  $i \neq j$ . Без ограничения общности можно считать, что  $i < j$ . Тогда  $\ell_1(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, t_j)$ , но  $\ell_1(\mathbf{v}, t_j) < \ell_1(\mathbf{u}, x)$ . Из леммы 1.26 следует, что  $D(\mathbf{u}, t_j) \leq k$ . Предположим, что  $D(\mathbf{u}, t_j) = r < k$ . Если  $r = 0$ , то  $t_j$  является 0-разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Из условия (1.1) вытекает, что  $t_j$  также будет 0-разделителем слова  $\mathbf{v}$ . Тогда  $t_j = h_1^0(\mathbf{v}, x)$ , но  $t_j \neq h_1^0(\mathbf{u}, x)$ . По лемме 1.30, условие (1.9) выполняется при  $\ell = p$  для всех  $1 \leq p \leq k$ . Получаем противоречие. Таким образом,  $r \geq 1$ . Теперь применим лемму 3.21(i) при  $s = r$  и  $x_s = t_j$  и получим, что  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{H}_r \subseteq \mathbf{H}_k$ , что невозможно. Таким образом, лемма 3.27 доказана.  $\square$

В) Третьим этапом проверки п. 4) предложения 3.15 является

**Лемма 3.29.** *Если  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов из интервала  $[\mathbf{I}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$ , то либо  $\mathbf{X} = \mathbf{I}_k$ , либо  $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{J}_k^1$ .*

Для проверки этого факта, нам потребуются два вспомогательных утверждения.

**Лемма 3.30.** Пусть  $\mathbf{V}$  — подмногообразие многообразия  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  — тождество, выполненное в  $\mathbf{V}$ , а  $\ell$  и  $r$  — натуральные числа.

(i) Если справедливы условия (1.1), (1.9) и (3.58), но условие

$$\text{если } x \in \text{cop}(\mathbf{u}) \text{ и } D(\mathbf{u}, x) \leq m, \text{ то } h_2^\ell(\mathbf{u}, x) = h_2^\ell(\mathbf{v}, x) \quad (3.60)$$

при  $m = 1$  не выполняется, то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{I}_\ell$ .

(ii) Если справедливы условия (1.1), (1.9), (3.58) и (3.60) при  $m = r$ , но условие (3.60) при  $m = r + 1$  не выполняется, то  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_\ell^r$ .

*Доказательство.* Предположим, что многообразие  $\mathbf{V}$  удовлетворяет условию одного из утверждений (i) и (ii). Тогда выполняются условия (1.1), (1.9) и (3.58). Пусть  $m$  — наименьшее натуральное число для которого условие (3.60) не выполняется. Тогда найдется такая буква  $y_m$ , что  $D(\mathbf{u}, y_m) = m$  и  $h_2^\ell(\mathbf{u}, y_m) \neq h_2^\ell(\mathbf{v}, y_m)$ . Положим  $x_\ell = h_2^\ell(\mathbf{u}, y_m)$  и  $z_\ell = h_2^\ell(\mathbf{v}, y_m)$ . Ввиду леммы 1.26,  $D(\mathbf{u}, x_\ell), D(\mathbf{u}, z_\ell) \leq \ell$ . Заметим, что либо  $D(\mathbf{u}, x_\ell) = \ell$ , либо  $D(\mathbf{u}, z_\ell) = \ell$ . Действительно, если  $D(\mathbf{u}, x_\ell), D(\mathbf{u}, z_\ell) < \ell$ , то  $D(\mathbf{v}, x_\ell), D(\mathbf{v}, z_\ell) < \ell$  по лемме 1.31. В этом случае буквы  $x_\ell$  и  $z_\ell$  являются  $(\ell - 1)$ -разделителями слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Но тогда  $x_\ell = h_2^{\ell-1}(\mathbf{u}, y_m)$  и  $z_\ell = h_2^{\ell-1}(\mathbf{v}, y_m)$ , что противоречит условию (1.9). Предположим без ограничения общности, что  $D(\mathbf{u}, x_\ell) = \ell$ . В силу симметрии мы можем считать, что первое вхождение  $z_\ell$  в слово  $\mathbf{u}$  предшествует первому вхождению  $x_\ell$  в это слово. В силу условия (3.58) и леммы 1.27,  $\ell_1(\mathbf{v}, z_\ell) < \ell_1(\mathbf{v}, x_\ell)$ . Тогда  $\ell_2(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, x_\ell)$ .

Теперь применим лемму 1.33 при  $x_s = x_\ell$  и  $s = \ell$  и получим, что существуют такие буквы  $x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}$ , что для всех  $p = 0, 1, \dots, \ell - 1$  и  $q = 0, 1, \dots, \ell - 2$  выполнены равенства  $D(\mathbf{u}, x_p) = D(\mathbf{v}, x_p) = p$  и неравенства

$$\ell_1(\mathbf{w}, x_{p+1}) < \ell_1(\mathbf{w}, x_p) < \ell_2(\mathbf{w}, x_{p+1}) \text{ и } \ell_2(\mathbf{w}, x_{q+2}) < \ell_1(\mathbf{w}, x_q),$$

где  $\mathbf{w}$  — одно из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

Положим  $y_{m-1} = h_2^{m-1}(\mathbf{u}, y_m)$ . По лемме 1.28,  $D(\mathbf{u}, y_{m-1}) = m - 1$  и  $\ell_1(\mathbf{u}, y_m) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{m-1})$ . Кроме того, из условия (1.9) и леммы 1.30 следует, что  $h_2^{m-1}(\mathbf{v}, y_m) = h_2^{m-1}(\mathbf{u}, y_m) = y_{m-1}$ . Снова применим лемму 1.28 и получим, что  $D(\mathbf{v}, y_{m-1}) = m - 1$  и  $\ell_1(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-1})$ . Ввиду леммы 1.26, буква  $x_{\ell-1}$  является  $\ell$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ . Тогда  $\ell_2(\mathbf{u}, y_m) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{\ell-1})$ , поскольку  $x_\ell = h_2^\ell(\mathbf{u}, y_m)$  и  $\ell_1(\mathbf{u}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{\ell-1})$ .

Лемма 3.16(ii) позволяет считать, что буквы  $y_m$  и  $x_p$  при  $1 \leq p \leq \ell$  встречаются ровно по два раза в каждом из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая, соответствующие утверждениям (i) и (ii).

*Случай 1:*  $m = 1$ . Ввиду сказанного выше, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2\ell+4}y_1\mathbf{u}_{2\ell+3}y_0\mathbf{u}_{2\ell+2}x_\ell\mathbf{u}_{2\ell+1}y_1\mathbf{u}_{2\ell}x_{\ell-1}\mathbf{u}_{2\ell-1}x_\ell\mathbf{u}_{2\ell-2}x_{\ell-2}\mathbf{u}_{2\ell-3}x_{\ell-1}\cdots \\ & \cdot \mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0 \\ \approx & \mathbf{v}_{2\ell+4}y_1\mathbf{v}_{2\ell+3}y_0\mathbf{v}_{2\ell+2}y_1\mathbf{v}_{2\ell+1}x_\ell\mathbf{v}_{2\ell}x_{\ell-1}\mathbf{v}_{2\ell-1}x_\ell\mathbf{v}_{2\ell-2}x_{\ell-2}\mathbf{v}_{2\ell-3}x_{\ell-1}\cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2\ell+4}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2\ell+4}$  таких, что  $x_s, y_0, y_1 \notin \text{supp}(\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i)$  для  $0 \leq s \leq \ell$  и  $0 \leq i \leq 2\ell + 4$ . Подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в этом тождестве, кроме  $x_0, x_1, \dots, x_\ell, y_0$  и  $y_1$ . Мы получим тождество

$$y_1 y_0 x_\ell y_1 x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \approx y_1 y_0 y_1 x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1,$$

т.е. тождество  $\gamma_\ell$ . Утверждение (i) доказано.

*Случай 2:*  $m > 1$ . Докажем, что  $\ell_2(\mathbf{v}, x_m) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$  и  $\ell_2(\mathbf{u}, x_m) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1})$ . Положим  $y_{m-2} = h_2^{m-2}(\mathbf{v}, y_{m-1})$ . Поскольку  $D(\mathbf{v}, y_{m-1}) = m-1$ , из леммы 1.28 вытекает, что  $D(\mathbf{v}, y_{m-2}) = m-2$  и  $\ell_1(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . Напомним, что  $\ell_1(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-1})$ , откуда  $\ell_1(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . Поскольку  $D(\mathbf{v}, y_m) = m$ , мы можем применить лемму 1.32 и получить, что  $\ell_2(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . Первое вхождение  $x_\ell$  в  $\mathbf{v}$  предшествует второму вхождению  $y_m$  в  $\mathbf{v}$ , откуда следует, что  $\ell_1(\mathbf{v}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . Тогда из леммы 1.32 вытекает, что  $\ell_2(\mathbf{v}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . Следовательно,  $\ell_1(\mathbf{v}, x_{\ell-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . Если  $\ell - 1 \geq m$ , то применим лемму 1.32 и получим, что  $\ell_2(\mathbf{v}, x_{\ell-1}) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим, что  $\ell_2(\mathbf{v}, x_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . В частности,  $\ell_1(\mathbf{v}, x_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$ . В силу леммы 1.26, буквы  $x_m$  и  $y_{m-2}$  являются  $\ell$ -разделителями слова  $\mathbf{v}$ . Теперь применим лемму 1.27 и получим, что  $\ell_1(\mathbf{u}, x_m) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{m-2})$ . Тогда, по лемме 1.32,  $\ell_2(\mathbf{u}, x_m) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{m-2})$ . Далее, поскольку первое вхождение  $y_{m-2}$  в  $\mathbf{v}$  предшествует второму вхождению  $y_{m-1}$ , имеем  $\ell_2(\mathbf{v}, x_m) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$ . В силу условия (1.9) и леммы 1.30,  $h_2^{m-2}(\mathbf{u}, y_{m-1}) = h_2^{m-2}(\mathbf{v}, y_{m-1}) = y_{m-2}$ , откуда  $\ell_2(\mathbf{u}, x_m) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1})$ .

Пусть теперь  $m > 2$ . Заметим, что

$$\ell_1(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_m) < \ell_1(\mathbf{u}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{\ell-1}) < \cdots < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-3}).$$

Если  $\ell_1(\mathbf{u}, x_{m-3}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1})$ , то буква  $x_{m-3}$  лежит между первым и вторым вхождениями  $y_{m-1}$  в  $\mathbf{u}$ . Поскольку  $x_{m-3}$  является  $(m-3)$ -разделителем слова  $\mathbf{u}$ , мы получаем противоречие с равенством  $D(\mathbf{u}, y_{m-1}) = m-1$ . Следовательно, если  $m > 2$ , то  $\ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-3})$ .

Заметим, что выполняется одно из трех условий:

$$\ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2}); \quad (3.61)$$

$$\ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{m-1}); \quad (3.62)$$

$$\ell_2(\mathbf{u}, x_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}). \quad (3.63)$$

Предположим, что выполнено условие (3.61). В этом случае  $\ell_1(\mathbf{u}, y_{m-2}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2})$ . Тогда, в силу леммы 1.27,  $\ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2})$ . Поскольку, по лемме 1.30,  $y_{m-2} = h_2^{m-2}(\mathbf{v}, y_{m-1})$ , мы имеем, что  $\ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2})$ . Если  $m > 2$ , то применим лемму 1.33 при  $x_s = y_{m-2}$  и  $s = m-2$  и получим, что существуют буквы  $y_0, y_1, \dots, y_{m-3}$  такие, что  $D(\mathbf{u}, y_p) = D(\mathbf{v}, y_p) = p$  для любого  $p = 0, 1, \dots, m-2$ . Кроме того, для любого  $p = 0, 1, \dots, m-2$  и для любого  $\mathbf{w} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  выполнены неравенства

$$\ell_1(\mathbf{w}, y_{p+1}) < \ell_1(\mathbf{w}, y_p) < \ell_2(\mathbf{w}, y_{p+1}) \text{ и } \ell_2(\mathbf{w}, y_{p+2}) < \ell_1(\mathbf{w}, y_p).$$

Лемма 3.16(ii) позволяет предположить, что буквы  $y_p$  при  $1 \leq p \leq m$  входят ровно по два раза в каждое из слов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Ввиду сказанного выше, тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{2\ell+5}y_m\mathbf{u}_{2\ell+4}y_{m-1}\mathbf{u}_{2\ell+3}x_\ell\mathbf{u}_{2\ell+2}y_m\mathbf{u}_{2\ell+1}x_{\ell-1}\mathbf{u}_{2\ell}x_\ell\mathbf{u}_{2\ell-1}x_{\ell-2}\mathbf{u}_{2\ell-2}x_{\ell-1}\cdots \\
& \cdot \mathbf{u}_{2m+1}y_{m-2}\mathbf{u}_{2m}y_{m-1}\mathbf{u}_{2m-1}x_{m-1}\mathbf{u}_{2m-2}y_{m-3}\mathbf{u}_{2m-2}y_{m-2}\cdots \\
& \cdot \mathbf{u}_4y_1\mathbf{u}_3y_2\mathbf{u}_2y_0\mathbf{u}_1y_1\mathbf{u}_0 \\
\approx & \mathbf{v}_{2\ell+5}y_m\mathbf{v}_{2\ell+4}y_{m-1}\mathbf{v}_{2\ell+3}y_m\mathbf{v}_{2\ell+2}x_\ell\mathbf{v}_{2\ell+1}x_{\ell-1}\mathbf{v}_{2\ell}x_\ell\mathbf{v}_{2\ell-1}x_{\ell-2}\mathbf{v}_{2\ell-2}x_{\ell-1}\cdots \\
& \cdot \mathbf{v}_{2m+1}y_{m-2}\mathbf{v}_{2m}y_{m-1}\mathbf{v}_{2m-1}x_{m-1}\mathbf{v}_{2m-2}y_{m-3}\mathbf{v}_{2m-2}y_{m-2}\cdots \\
& \cdot \mathbf{v}_4y_1\mathbf{v}_3y_2\mathbf{v}_2y_0\mathbf{v}_1y_1\mathbf{v}_0
\end{aligned}$$

для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2\ell+5}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2\ell+5}$  таких, что  $x_s, y_t \notin \text{supp}(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i)$  для всех  $m-1 \leq s \leq \ell$ ,  $0 \leq t \leq m$  и  $0 \leq i \leq 2\ell+5$ . Подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в этом тождестве, кроме букв  $y_0, y_1, \dots, y_m$  и  $x_{m-1}, x_m, \dots, x_\ell$ . Мы получим тождество

$$\begin{aligned}
& y_my_{m-1}x_\ell y_mx_{\ell-1}x_\ell x_{\ell-2}x_{\ell-1}\cdots y_{m-2}y_{m-1}x_{m-1}y_{m-3}y_{m-2}\cdots y_1y_2y_0y_1 \\
\approx & y_my_{m-1}y_mx_\ell x_{\ell-1}x_\ell x_{\ell-2}x_{\ell-1}\cdots y_{m-2}y_{m-1}x_{m-1}y_{m-3}y_{m-2}\cdots y_1y_2y_0y_1.
\end{aligned}$$

В полученное тождество подставим  $y_i$  вместо  $x_i$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m-2$ . В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned}
& y_m y_{m-1} \overset{(1)}{x_\ell y_m x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1}} \cdots x_{m-2} \overset{(2)}{y_{m-1} x_{m-1}} \overset{(2)}{x_{m-3} x_{m-2}} \cdots \\
& \cdot x_1 x_2 x_0 x_1 \\
\approx & y_m y_{m-1} \overset{(1)}{y_m x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1}} \cdots x_{m-2} \overset{(2)}{y_{m-1} x_{m-1}} \overset{(2)}{x_{m-3} x_{m-2}} \cdots \\
& \cdot x_1 x_2 x_0 x_1.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

В силу леммы 3.16(i), мы можем переставить местами вторые вхождения букв  $x_{m-1}$  и  $y_{m-1}$  в обеих частях тождества (3.64). В результате получаем тождество  $\delta_\ell^{m-1}$ .

Предположим теперь, что выполняется условие (3.62). Если  $\ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2})$ , то  $\ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2})$ . В силу леммы 1.27,  $\ell_1(\mathbf{u}, y_{m-2}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2})$ . Поскольку, по лемме 1.30,  $y_{m-2} = h_2^{m-2}(\mathbf{v}, y_{m-1})$ , мы имеем, что  $\ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2})$ . Это противоречит условию (3.62). Следовательно,  $\ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2}) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$ .

Предположим, что  $\ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, x_{m-1})$ . Тогда тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{2\ell+5}y_m\mathbf{u}_{2\ell+4}y_{m-1}\mathbf{u}_{2\ell+3}x_\ell\mathbf{u}_{2\ell+2}y_m\mathbf{u}_{2\ell+1}x_{\ell-1}\mathbf{u}_{2\ell}x_\ell\mathbf{u}_{2\ell-1}x_{\ell-2}\mathbf{u}_{2\ell-2}x_{\ell-1}\cdots \\
& \cdot \mathbf{u}_{2m+1}x_{m-2}\mathbf{u}_{2m}y_{m-1}\mathbf{u}_{2m-1}x_{m-1}\mathbf{u}_{2m-2}x_{m-3}\mathbf{u}_{2m-2}x_{m-2}\cdots \\
& \cdot \mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0 \\
\approx & \mathbf{v}_{2\ell+5}y_m\mathbf{v}_{2\ell+4}y_{m-1}\mathbf{v}_{2\ell+3}y_m\mathbf{v}_{2\ell+2}x_\ell\mathbf{v}_{2\ell+1}x_{\ell-1}\mathbf{v}_{2\ell}x_\ell\mathbf{v}_{2\ell-1}x_{\ell-2}\mathbf{v}_{2\ell-2}x_{\ell-1}\cdots \\
& \cdot \mathbf{v}_{2m+1}x_{m-2}\mathbf{v}_{2m}y_{m-1}\mathbf{v}_{2m-1}x_{m-1}\mathbf{v}_{2m-2}x_{m-3}\mathbf{v}_{2m-2}x_{m-2}\cdots \\
& \cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0
\end{aligned}$$

для некоторых слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2\ell+5}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2\ell+5}$  таких, что  $x_s, y_{m-1}, y_m \notin \text{supp}(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, 2\ell+5$  и  $s = 0, 1, \dots, \ell$ . Подставим 1 вместо всех букв, входящих в это тождество, кроме букв  $y_{m-1}, y_m, x_0, x_1, \dots, x_\ell$ .

Мы получим тождество (3.64). Как мы уже показали выше, это тождество вместе с тождеством  $\sigma_2$  влечет тождество  $\delta_\ell^{m-1}$ .

Если  $\ell_2(\mathbf{v}, x_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$ , то рассуждения, аналогичные вышеприведенным, показывают, что в  $\mathbf{V}$  выполнено тождество

$$\begin{aligned} & y_m y_{m-1} \overset{(1)}{x_\ell y_m x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2}} \overset{(2)}{y_{m-1} x_{m-1} x_{m-3} x_{m-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1} \\ & \approx y_m y_{m-1} y_m x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2} x_{m-1} y_{m-1} x_{m-3} x_{m-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1. \end{aligned}$$

В этом случае мы можем применить тождество  $\sigma_2$  к левой части последнего тождества и получить тождество  $\delta_\ell^{m-1}$ .

Предположим, наконец, что выполняется условие (3.63). Если справедливо неравенство  $\ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, x_{m-1})$ , то тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{2\ell+5} y_m \mathbf{u}_{2\ell+4} y_{m-1} \mathbf{u}_{2\ell+3} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell+2} y_m \mathbf{u}_{2\ell+1} x_{\ell-1} \mathbf{u}_{2\ell} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell-1} x_{\ell-2} \mathbf{u}_{2\ell-2} x_{\ell-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{u}_{2m+1} x_{m-2} \mathbf{u}_{2m} x_{m-1} \mathbf{u}_{2m-1} y_{m-1} \mathbf{u}_{2m-2} x_{m-3} \mathbf{u}_{2m-2} x_{m-2} \cdots \\ & \cdot \mathbf{u}_4 x_1 \mathbf{u}_3 x_2 \mathbf{u}_2 x_0 \mathbf{u}_1 x_1 \mathbf{u}_0 \\ & \approx \mathbf{v}_{2\ell+5} y_m \mathbf{v}_{2\ell+4} y_{m-1} \mathbf{v}_{2\ell+3} y_m \mathbf{v}_{2\ell+2} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell+1} x_{\ell-1} \mathbf{v}_{2\ell} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell-1} x_{\ell-2} \mathbf{v}_{2\ell-2} x_{\ell-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_{2m+1} x_{m-2} \mathbf{v}_{2m} y_{m-1} \mathbf{v}_{2m-1} x_{m-1} \mathbf{v}_{2m-2} x_{m-3} \mathbf{v}_{2m-2} x_{m-2} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

для некоторых слов  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2\ell+5}$  и  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2\ell+5}$  таких, что  $x_s, y_{m-1}, y_m \notin \text{supp}(\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i)$  для всех  $0 \leq s \leq \ell$  и  $0 \leq i \leq 2\ell + 5$ . Подставим 1 вместо всех букв, входящих в данное тождество, кроме букв  $y_{m-1}, y_m, x_0, x_1, \dots, x_\ell$ , и получим тождество

$$\begin{aligned} & y_m y_{m-1} x_\ell y_m x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2} x_{m-1} y_{m-1} x_{m-3} x_{m-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \\ & \approx y_m y_{m-1} \overset{(1)}{y_m x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2}} \overset{(2)}{y_{m-1} x_{m-1} x_{m-3} x_{m-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1}. \end{aligned}$$

Затем, применив к правой части полученного тождества тождество  $\sigma_2$ , мы получим тождество  $\delta_\ell^{m-1}$ .

Если  $\ell_2(\mathbf{v}, x_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$ , то выполнение тождества  $\delta_\ell^{m-1}$  в  $\mathbf{V}$  доказывается рассуждениями, аналогичными приведенным выше.  $\square$

**Предложение 3.31.** *Нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{J}_k^r$  тогда и только тогда, когда выполняются условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$ , (3.58) при  $\ell = k$  и (3.60) при  $\ell = k$  и  $t = r$ .*

*Доказательство. Необходимость.* Предположим, что в  $\mathbf{J}_k^r$  выполнено нетривиальное тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$  и (3.58) при  $\ell = k$  вытекают из предложения 3.28 и включения  $\mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{J}_k^r$ . Нам остается проверить выполнение условия (3.60) при  $\ell = k$  и  $t = r$ . Как и в доказательстве предложения 3.23(i), мы можем предположить, что  $\mathbf{u} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{a})\mathbf{q}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{b})\mathbf{q}$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , эндоморфизма  $\xi \in \text{End}(F^1)$  и тождества  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{\Phi, \delta_k^r\}$ .

Если  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \Phi$ , то, по предложению 3.23(ii), условие (1.9) выполняется для любого  $\ell$ . Очевидно, что отсюда вытекает требуемое заключение.

Предположим теперь, что  $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$  совпадает с  $\delta_k^r$ . Тогда

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{a}) &= \mathbf{b}_{r+1}\mathbf{b}_r\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r\mathbf{b}_r\mathbf{a}_{r-2}\mathbf{a}_{r-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1, \\ \xi(\mathbf{b}) &= \mathbf{b}_{r+1}\mathbf{b}_r\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r\mathbf{b}_r\mathbf{a}_{r-2}\mathbf{a}_{r-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\end{aligned}$$

для некоторых слов  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  и  $\mathbf{b}_r, \mathbf{b}_{r+1}$ , откуда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{p}\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{b}_r\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r\mathbf{b}_r\mathbf{a}_{r-2}\mathbf{a}_{r-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{p}\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{b}_r\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r\mathbf{b}_r\mathbf{a}_{r-2}\mathbf{a}_{r-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q}.\end{aligned}$$

По лемме 3.19,  $D(\mathbf{a}, x_k) = k$ . Тогда из леммы 1.34 вытекает, что подслово  $\mathbf{a}_k$  слова  $\mathbf{u}$ , расположенное между  $\mathbf{b}_{r+1}$  и  $\mathbf{a}_{k-1}$ , не содержит  $(k-1)$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$ . Очевидно также, что подслово  $\mathbf{b}_{r+1}$  слова  $\mathbf{u}$ , расположенное между  $\mathbf{b}_r$  и  $\mathbf{a}_k$ , не содержит  $s$ -разделителей слова  $\mathbf{u}$  для любого  $s$ . Следовательно, подслово  $\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_k$  слова  $\mathbf{u}$ , расположенное между  $\mathbf{b}_r$  и  $\mathbf{a}_{k-1}$ , лежит в некотором  $(k-1)$ -блоке слова  $\mathbf{u}$ . Снова применим лемму 1.34 и получим, что подслово  $\mathbf{b}_{r+1}$ , расположенное между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{b}_r$ , не содержит никаких  $s$ -разделителей для всех  $s \leq r$ . Отсюда следует, что если второе вхождение некоторой буквы в слово  $\mathbf{u}$  лежит в подслове  $\mathbf{b}_{r+1}$ , расположенном между  $\mathbf{b}_r$  и  $\mathbf{a}_k$ , то глубина этой буквы  $> r$ . Отсюда следует, что условие (3.60) выполняется при  $\ell = k$  и  $m = r$ .

*Достаточность.* Как и в доказательстве предложений 3.26 и 3.28, схема наших рассуждений будет аналогична схеме доказательства достаточности предложения 3.23(i). Однако «канонический вид» блоков будет иметь еще более сложный вид, чем в предложении 3.28.

Предположим, что выполняются условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$ , (3.58) при  $\ell = k$  и (3.60) при  $\ell = k$  и  $m = r$ . Как и в доказательстве достаточности предложения 3.26, предположим, что  $(k-1)$ -разложение слова  $\mathbf{u}$  имеет вид (1.7), а (3.56) является представлением подслова  $t_i\mathbf{u}_i$  в виде произведения чередующихся  $k$ -разделителей  $s_0, s_1, \dots, s_n$  и  $k$ -блоков  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ .

Ясно, что  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\mathbf{u}_i\mathbf{w}_2$  для некоторых (возможно пустых) слов  $\mathbf{w}_1$  и  $\mathbf{w}_2$ . Для всех  $j = 0, 1, \dots, n$  положим

$$X_j = \{x \in \text{con}(\mathbf{a}_j) \mid \text{первое вхождение } x \text{ в } \mathbf{u} \text{ лежит в } \mathbf{a}_j\}.$$

Пусть  $X_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jq_j}\}$  и  $X = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_n$ ,  $\mathbf{a}'_j = (\mathbf{a}_j)_X$ . Как и в доказательстве достаточности предложения 3.28, мы можем проверить, что

$$X_j = \{x \in \text{con}(\mathbf{a}_j) \mid s_j = h_1^k(\mathbf{u}, x)\}.$$

Для любого  $j = 0, 1, \dots, n$  положим

$$Z_j = \{z \in \text{con}(\mathbf{a}'_j) \mid D(\mathbf{u}, z) \leq r\},$$

$Z = Z_0 \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ ,  $\mathbf{a}''_j = (\mathbf{a}'_j)_Z$  и  $\mathbf{u}^*_i = \mathbf{a}''_0\mathbf{a}''_1 \cdots \mathbf{a}''_n$ . Пусть  $Z_j = \{z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{jh_j}\}$ ,  $\text{con}(\mathbf{u}^*_i) = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  и

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_i &= (c_1c_2 \cdots c_p) \cdot (x_{01}^2 \cdots x_{0q_0}^2 z_{01} \cdots z_{0h_0}) \cdot (s_1x_{11}^2 \cdots x_{1q_1}^2 z_{11} \cdots z_{1h_1}) \cdots \\ &\quad \cdot (s_nx_{n1}^2 \cdots x_{nq_n}^2 z_{n1} \cdots z_{nh_n}).\end{aligned}$$

Как мы увидим ниже, слово  $\overline{\mathbf{u}}_i$  является ничем иным, как упомянутым выше «каноническим видом»  $(k-1)$ -блока  $\mathbf{u}_i$ .

Как и в доказательстве достаточности предложения 3.28, мы можем проверить, что  $\mathbf{J}_k^r$  удовлетворяет тождеству (3.59). Из определения слов вида  $\mathbf{a}'_j$  и множества  $X$  следует, что  $\text{con}(\mathbf{a}'_0 \mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_1)$ . Следовательно, если  $z \in Z_j$ , то мы можем считать, что  $\text{osc}_z(\mathbf{u}_i) = 1$ , поскольку, по лемме 3.16(ii),  $\mathbf{J}_k^r$  удовлетворяет тождеству (3.27). Тогда без ограничения общности можно считать, что  $\ell_1(\mathbf{u}, z_{j1}) < \ell_1(\mathbf{u}, z_{j2}) < \cdots < \ell_1(\mathbf{u}, z_{jh_j})$ . Поскольку  $z \in \text{con}(\mathbf{w}_1)$  и  $D(\mathbf{u}, z) > r$  для любого  $z \in \text{con}(\mathbf{a}''_j)$ , мы можем применить лемму 3.20(i) при  $m = r$  и заключить, что в  $\mathbf{J}_k^r$  выполняется тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_i^* \cdot (x_{01}^2 \cdots x_{0q_0}^2 z_{01} \cdots z_{0h_0}) \cdot (s_1 x_{11}^2 \cdots x_{1q_1}^2 z_{11} \cdots z_{1h_1}) \cdots \\ \cdot (s_n x_{n1}^2 \cdots x_{nq_n}^2 z_{n1} \cdots z_{nh_n}) \cdot \mathbf{w}_2. \end{aligned}$$

Как мы показали выше,  $\text{con}(\mathbf{u}_i^*) \subseteq \text{con}(\mathbf{w}_1)$ . Следовательно, применив тождество (3.27), мы можем сделать слово  $\mathbf{u}_i^*$  линейным. Тогда из леммы 3.16(i) вытекает, что  $\mathbf{J}_k^r$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 \cdot (c_1 c_2 \cdots c_p) \cdot (x_{01}^2 \cdots x_{0q_0}^2 z_{01} \cdots z_{0h_0}) \cdot (s_1 x_{11}^2 \cdots x_{1q_1}^2 z_{11} \cdots z_{1h_1}) \cdots \\ \cdot (s_n x_{n1}^2 \cdots x_{nq_n}^2 z_{n1} \cdots z_{nh_n}) \cdot \mathbf{w}_2 \\ = \mathbf{w}_1 \overline{\mathbf{u}}_i \mathbf{w}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, как и в доказательстве предложения 3.23(i), используя выполненные в многообразии  $\mathbf{J}_k^r$  тождества, мы можем последовательно заменить  $(k-1)$ -блоки  $\mathbf{u}_i$  слова  $\mathbf{u}$  на их «канонический вид»  $\overline{\mathbf{u}}_i$  для всех  $i = m, m-1, \dots, 0$ . Это означает, что  $\mathbf{J}_k^r$  удовлетворяет тождествам (3.53). Положим  $\mathbf{u}^\sharp = t_0 \overline{\mathbf{u}}_0 t_1 \overline{\mathbf{u}}_1 \cdots t_m \overline{\mathbf{u}}_m$ .

Перейдем к слову  $\mathbf{v}$ . По лемме 1.27,  $(k-1)$ -разложение этого слова имеет вид (1.8). Более того, из условия (3.58) при  $\ell = k$  и леммы 1.27 вытекает, что (3.57) является представлением  $t_i \mathbf{v}_i$  в виде произведения чередующихся  $k$ -разделителей  $s_0, s_1, \dots, s_n$  и  $k$ -блоков  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Из условия (3.58) следует, что

$$X_j = \{x \in \text{con}(\mathbf{b}_j) \mid s_j = h_1^k(\mathbf{v}, x)\}$$

для всех  $j = 0, 1, \dots, n$ . Положим  $\mathbf{b}'_j = (\mathbf{b}_j)_X$ . Поскольку условие (3.60) выполняется при  $\ell = k$  и  $m = r$ , мы имеем, что

$$Z_j = \{z \in \text{con}(\mathbf{b}'_j) \mid D(\mathbf{v}, z) \leq r\}$$

для всех  $j = 0, 1, \dots, n$ . Положим  $\mathbf{b}''_j = (\mathbf{b}'_j)_Z$ . Из условия (1.9) при  $\ell = k$  следует, что  $j$ -е вхождение некоторой буквы в слово  $\mathbf{u}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$  тогда и только тогда, когда  $j$ -е вхождение этой буквы в  $\mathbf{v}$  лежит в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{v}_i$  для любого  $j = 1, 2$ . Кроме того, лемма 3.16(ii) позволяет предположить, что если первое и второе вхождения некоторой буквы в слово  $\mathbf{u}$  не лежат в  $(k-1)$ -блоке  $\mathbf{u}_i$ , то эта буква не входит в данный  $(k-1)$ -блок. Тогда  $\text{con}(\mathbf{u}_i^*) = \text{con}(\mathbf{b}''_0 \mathbf{b}''_1 \cdots \mathbf{b}''_n)$ . Следовательно,  $(k-1)$ -блоки  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  имеют одинаковый «канонический вид». Повторяя дословно рассуждения, приведенные выше, получаем, что многообразие  $\mathbf{J}_k^r$  удовлетворяет тождествам  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\sharp \approx \mathbf{v}$ .  $\square$



*Доказательство леммы 3.29.* Предположим, что  $\mathbf{I}_k \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$ . Проверим, что  $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{J}_k^1$ . Рассуждая от противного, предположим, что  $\mathbf{J}_k^1 \not\subseteq \mathbf{X}$ . Тогда существует тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{X}$ , но не выполненное в  $\mathbf{J}_k^1$ . В этом случае из предложений 3.28 и 3.31, а также включения  $\mathbf{I}_k \subset \mathbf{X}$ , следует, что выполняются условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$  и (3.58) при  $\ell = k$ , а условие (3.60) при  $\ell = k$  и  $t = 1$  не выполняется. Тогда из леммы 3.30(i) вытекает неверное включение  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{I}_k$ . Лемма 3.29 доказана.  $\square$

Г) Четвертым этапом проверки утверждения 4) предложения 3.15 является

**Лемма 3.32.** *Если  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов из интервала  $[\mathbf{J}_k^m, \mathbf{F}_{k+1}]$  для некоторых  $1 \leq m < k$ , то либо  $\mathbf{X} = \mathbf{J}_k^m$ , либо  $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{J}_k^{m+1}$ .*

*Доказательство.* Предположим, что  $\mathbf{J}_k^{m+1} \not\subseteq \mathbf{X}$ . Тогда существует тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{X}$ , но не выполненное в  $\mathbf{J}_k^{m+1}$ . Из предложения 3.31 и включения  $\mathbf{J}_k^m \subset \mathbf{X}$  следует, что условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$ , (3.58) при  $\ell = k$  и (3.60) при  $\ell = k$  выполнены, в то время как условие

$$\text{если } x \in \text{con}(\mathbf{u}) \text{ и } D(\mathbf{u}, x) \leq m + 1, \text{ то } h_2^k(\mathbf{u}, x) = h_2^k(\mathbf{v}, x)$$

не выполняется. Тогда из леммы 3.30(ii) вытекает, что  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{J}_k^m$ , что невозможно. Мы видим, что либо  $\mathbf{X} = \mathbf{J}_k^m$ , либо  $\mathbf{J}_k^{m+1} \subseteq \mathbf{X}$ .  $\square$

Д) Пятым этапом проверки утверждения 4) предложения 3.15 является

**Лемма 3.33.** *Если  $\mathbf{X}$  — многообразие моноидов из интервала  $[\mathbf{J}_k^k, \mathbf{F}_{k+1}]$ , то либо  $\mathbf{X} = \mathbf{J}_k^k$ , либо  $\mathbf{X} = \mathbf{F}_{k+1}$ .*

*Доказательство.* Предположим, что  $\mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{F}_{k+1}$ . Поскольку  $\mathbf{F}_{k+1} \not\subseteq \mathbf{X}$ , найдется тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ , выполненное в  $\mathbf{X}$ , но не выполненное в  $\mathbf{F}_{k+1}$ . Условия (1.1), (1.9) при  $\ell = k$ , (3.58) при  $\ell = k$  и (3.60) при  $\ell = t = k$  вытекают из предложения 3.31 и включения  $\mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{X}$ . А из предложения 3.23(i) следует, что  $h_2^k(\mathbf{u}, x) \neq h_2^k(\mathbf{v}, x)$  для некоторой буквы  $x \in \text{con}(\mathbf{u})$  такой, что  $D(\mathbf{u}, x) > k$ . Применяя лемму 3.22, мы получим неверное включение  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{J}_k^k$ . Полученное противоречие завершает доказательство.  $\square$

Е) Здесь мы докажем включения (3.25). Для этого мы будем использовать лемму 3.19 и табл. 2. Напомним, что нестрогие включения (3.29) справедливы в силу леммы 3.18. Если тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с  $\alpha_k$ , то  $D(\mathbf{u}, x_k) = k$ , а  $h_1^k(\mathbf{u}, x_k) = \lambda$  и  $h_1^k(\mathbf{v}, x_k) = y_k$ . Тогда из предложения 3.26 следует, что  $\mathbf{F}_k \subset \mathbf{H}_k$ . Предположим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с тождеством  $\beta_k$ . Тогда  $h_1^k(\mathbf{u}, x) = \lambda$ , в то время как  $h_1^k(\mathbf{v}, x) = x_k$ . Применим предложение 3.28 и получим, что  $\mathbf{H}_k \subset \mathbf{I}_k$ . Пусть теперь  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с  $\gamma_k$ . В этом случае  $D(\mathbf{u}, y_1) = 1$ , но  $h_2^k(\mathbf{u}, y_1) = y_0$  и  $h_2^k(\mathbf{v}, y_1) = x_k$ . В силу предложения 3.31,  $\mathbf{I}_k \subset \mathbf{J}_k^1$ . Предположим теперь, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с  $\delta_k^m$  для некоторого  $1 \leq m < k$ . Тогда  $D(\mathbf{u}, y_{m+1}) = m + 1$ ,  $h_2^k(\mathbf{u}, y_{m+1}) = y_m$  и  $h_2^k(\mathbf{v}, y_{m+1}) = x_k$ . Снова применим предложение 3.31 и получим, что  $\mathbf{J}_k^m \subset \mathbf{J}_k^{m+1}$ . Наконец, предположим, что тождество  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$  совпадает с  $\delta_k^k$ .

Поскольку  $h_2^k(\mathbf{u}, y_{k+1}) = y_k$  и  $h_2^k(\mathbf{v}, y_{k+1}) = x_k$ , из предложения 3.23(i) следует, что  $\mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{F}_{k+1}$ .

Таким образом, мы доказали включения (3.25). Следовательно, многообразия  $\mathbf{F}_k, \mathbf{H}_k, \mathbf{I}_k, \mathbf{J}_k^1, \mathbf{J}_k^2, \dots, \mathbf{J}_k^k$  и  $\mathbf{F}_{k+1}$  попарно различны. Из этого факта и лемм 3.24, 3.27, 3.29, 3.32 (при  $m = 1, 2, \dots, k-1$ ) и 3.33 следует утверждение 4) предложения 3.15. С учетом леммы 1.14(ii) и результатов подразделов 3.4.1 и 3.4.3, доказательство предложения 3.15 завершено.  $\square$

Из лемм 1.12 и 1.13(ii), предложений 3.12–3.15 и утверждений, двойственных к предложениям 3.14 и 3.15, следует достаточность в теореме 3.1. Необходимость была доказана в разделе 3.2. Теорема 3.1 полностью доказана.  $\square$

### 3.5. Следствия

В этом разделе собран ряд следствий из теоремы 3.1. Прежде всего, укажем исчерпывающий список негрупповых цепных многообразий моноидов. Из теоремы 3.1, лемм 1.12 и 1.13(ii), предложений 3.12–3.15 и утверждений, двойственных к предложениям 3.14 и 3.15, вытекает

**Следствие 3.34.** *Многообразия  $\mathbf{C}_n, \mathbf{D}_k, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \overleftarrow{\mathbf{E}}, \mathbf{F}_k, \overleftarrow{\mathbf{F}}_k, \mathbf{H}_k, \overleftarrow{\mathbf{H}}_k, \mathbf{I}_k, \overleftarrow{\mathbf{I}}_k, \mathbf{J}_k^m, \overleftarrow{\mathbf{J}}_k^m, \mathbf{K}, \overleftarrow{\mathbf{K}}, \mathbf{L}, \mathbf{LRB}, \mathbf{M}, \overleftarrow{\mathbf{M}}, \mathbf{N}, \overleftarrow{\mathbf{N}}, \mathbf{RRB}, \mathbf{SL}$ , где  $n \geq 2, k \in \mathbb{N}$  и  $1 \leq m \leq k$ , и только они являются негрупповыми цепными многообразиями моноидов.*  $\square$

Множество всех негрупповых цепных многообразий моноидов, упорядоченных по включению, вместе с тривиальным многообразием, которое мы будем обозначать через  $\mathbf{T}$ , изображено на рис. 2. Интересно сравнить этот рисунок с диаграммой частично упорядоченного множества всех негрупповых цепных многообразий полугрупп (как мы уже упоминали во введении, такие многообразия были полностью описаны в [14]). Эта диаграмма изображена на рис. 3, где  $\mathbf{LZ} = \text{var}\{xy \approx x\}$ ,  $\mathbf{RZ} = \text{var}\{xy \approx y\}$ ,  $\mathbf{ZM} = \text{var}\{xy \approx 0\}$ ,  $\mathbf{N}_k = \text{var}\{x^2 \approx x_1x_2 \cdots x_k \approx 0, xy \approx yx\}$  для всех  $k \geq 3$ ,  $\mathbf{N}_\omega = \text{var}\{x^2 \approx 0, xy \approx yx\}$ ,  $\mathbf{N}_3^2 = \text{var}\{x^2 \approx xyz \approx 0\}$  и  $\mathbf{N}_3^c = \text{var}\{xyz \approx 0, xy \approx yx\}$  (здесь через  $\text{var } \Sigma$  мы обозначаем многообразие полугрупп, заданное системой тождеств  $\Sigma$ ; как это обычно делается при рассмотрении многообразий полугрупп, система тождеств  $\mathbf{w}x \approx x\mathbf{w} \approx \mathbf{w}$ , в которой  $x$  не входит в запись слова  $\mathbf{w}$ , для краткости записывается в виде символического тождества  $\mathbf{w} \approx 0$ ).

Мы видим, что за пределами группового случая существует 1 счетная серия и 6 «спорадических» цепных многообразий полугрупп, в то время как в случае моноидов имеется 10 счетных серий и 12 «спорадических» цепных многообразий. А именно, в полугрупповом случае мы имеем счетную серию  $\mathbf{N}_k$  (включая  $\mathbf{ZM}$  как  $\mathbf{N}_2$ ) и «спорадические» многообразия  $\mathbf{LZ}, \mathbf{RZ}, \mathbf{SL}, \mathbf{N}_3^2, \mathbf{N}_3^c, \mathbf{N}_\omega$ , а в случае моноидов — счетные серии  $\mathbf{C}_n$  (включая  $\mathbf{SL}$  как  $\mathbf{C}_1$ ),  $\mathbf{D}_k, \mathbf{F}_k, \overleftarrow{\mathbf{F}}_k, \mathbf{H}_k, \overleftarrow{\mathbf{H}}_k, \mathbf{I}_k, \overleftarrow{\mathbf{I}}_k, \mathbf{J}_k^m, \overleftarrow{\mathbf{J}}_k^m$  и «спорадические» многообразия  $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \overleftarrow{\mathbf{E}}, \mathbf{K}, \overleftarrow{\mathbf{K}}, \mathbf{L}, \mathbf{LRB}, \mathbf{M}, \overleftarrow{\mathbf{M}}, \mathbf{N}, \overleftarrow{\mathbf{N}}, \mathbf{RRB}$ . Можно сказать, что число негрупповых цепных многообразий в случае моноидов намного больше (в некотором неформальном смысле), чем в полугрупповом случае.

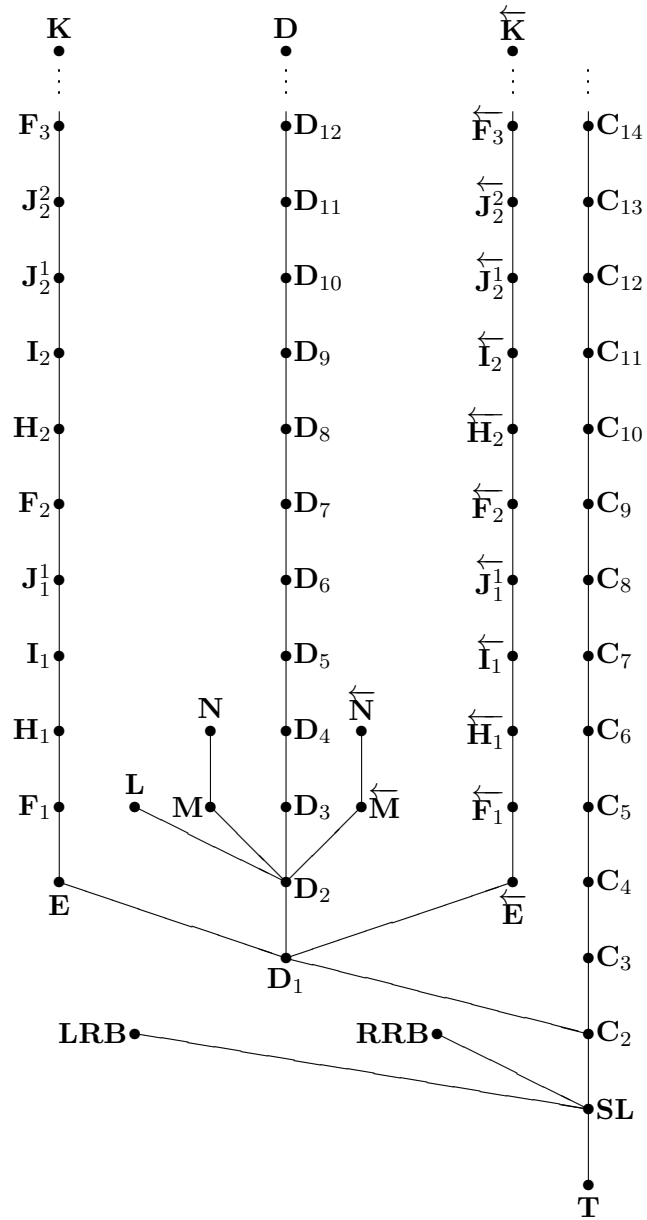


Рис. 2: все негрупповые цепные многообразия моноидов

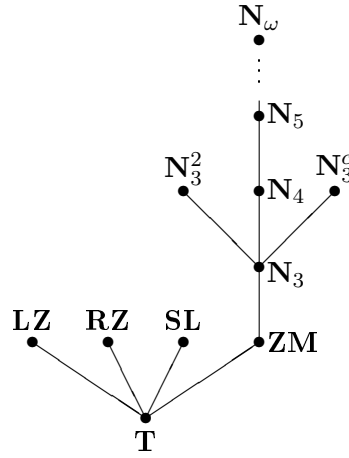


Рис. 3: все негрупповые цепные многообразия полугрупп

Как мы уже отмечали во введении, всякое негрупповое цепное многообразие полугрупп содержится в некотором максимальном цепном многообразии. Для многообразий моноидов аналог этого утверждения не имеет места: как видно из рис. 2, многообразие  $\mathbf{C}_n$  при  $n > 2$  не содержится ни в каком максимальном цепном многообразии. В следующих двух утверждениях указаны случаи, в которых справедлив аналог полугруппового результата. Рис. 2 показывает, что справедливо

**Следствие 3.35.** *Негрупповое цепное многообразие моноидов содержится в некотором максимальном цепном многообразии тогда и только тогда, когда оно не содержит многообразие  $\mathbf{C}_3$ .*  $\square$

Следствие 3.34 показывает, что коммутативные негрупповые цепные многообразия моноидов исчерпываются многообразиями  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{C}_n$  при  $n \geq 2$ . Из этого утверждения и рис. 2 вытекает

**Следствие 3.36.** *Всякое некоммутативное негрупповое цепное многообразие моноидов содержится в некотором максимальном цепном многообразии.*  $\square$

Как уже отмечалось во введении, всякое негрупповое нецепное многообразие полугрупп содержит некоторое почти цепное многообразие. В следующем следствии мы упоминаем многообразие  $\mathbf{O}$ , введенное в подразделе 3.2.3.

**Следствие 3.37.** *Если  $\mathbf{X}$  — такое многообразие моноидов, что  $\mathbf{L} \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{O}$ , то  $\mathbf{X}$  не является цепным многообразием и не содержит никакого почти цепного подмногообразия.*

*Доказательство.* Из теоремы 3.1 следует, что не существует цепных многообразий моноидов, строго содержащих  $\mathbf{L}$ . Отсюда вытекает, что  $\mathbf{X}$  не является цепным. Нам остается проверить, что  $\mathbf{X}$  не содержит никакого почти

цепного многообразия. Рассуждая от противного, предположим, что  $\mathbf{X}$  содержит почти цепное многообразие  $\mathbf{Y}$ . В силу теоремы 3.1, любое цепное подмногообразие многообразия  $\mathbf{O}$  содержится в  $\mathbf{L}$ . В частности,  $\mathbf{O}$  (а значит и  $\mathbf{Y}$ ) не содержит несравнимых цепных подмногообразий. С другой стороны, будучи нецепным многообразием,  $\mathbf{Y}$  содержит по крайней мере два несравнимых подмногообразия. Эти два многообразия являются собственными подмногообразиями многообразия  $\mathbf{Y}$ . Следовательно, они обязаны быть цепными, что невозможно.  $\square$

Напомним, что многообразие универсальных алгебр называется *локально конечным*, если все его конечно порожденные алгебры конечны. Многообразие называется *конечно порожденным*, если оно порождается конечной алгеброй. Ясно, что если многообразие содержится в некотором конечно порожденном многообразии, то оно локально конечно.

**Следствие 3.38.** *Произвольное негрупповое цепное многообразие моноидов содержится в некотором конечно порожденном многообразии и, в частности, является локально конечным.*

*Доказательство.* Нам достаточно проверить, что каждое из многообразий, перечисленных в теореме 3.1, содержится в некотором конечно порожденном многообразии. Хорошо известно, что любое собственное многообразие идемпотентных моноидов конечно порождено [27]. В частности, многообразия  $\mathbf{LRB}$  и  $\mathbf{RRB}$  обладают этим свойством. Очевидно, что моноид  $S(\mathbf{w})$  конечен для любого слова  $\mathbf{w}$ . Поэтому леммы 1.8 и 3.7 обеспечивают требуемое заключение для многообразий  $\mathbf{C}_n$  и  $\mathbf{L}$  соответственно. Многообразие  $\overleftarrow{\mathbf{N}}$  является конечно порожденным в силу примера 1 из исправления к работе [31]. В силу симметрии, остается рассмотреть многообразия  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{K}$ .

Многообразие  $\mathbf{D}$  не является конечно порожденным в силу [40, теорема 2], однако в [41, пример 5.3] показано, что  $\mathbf{D}$  является подмногообразием многообразия, порожденного хорошо известным 6-элементным моноидом Брандта  $B_2^1 = B_2 \cup \{1\}$ , где

$$B_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0, aba = a, bab = b \rangle = \{a, b, ab, ba, 0\}.$$

Наконец, нетрудно заметить, что если моноид  $M$  принадлежит  $\mathbf{K}$  и состоит из  $k$  элементов, то  $M$  удовлетворяет тождеству  $\alpha_k$ . Поэтому любое конечно порожденное подмногообразие в  $\mathbf{K}$  содержится в  $\mathbf{F}_k$  для некоторого  $k$ . В частности, многообразие  $\mathbf{K}$  не является конечно порожденным. Однако из леммы 3.16 следует, что  $\mathbf{K} \subseteq \text{var}\{xyxzx \approx xyxz, \sigma_2\}$ . Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что многообразие  $\text{var}\{xyxzx \approx xyxz, \sigma_2\}$  порождается 5-элементным моноидом

$$\langle a, b \mid a^2 = ab = a, b^2a = b^2 \rangle \cup \{1\} = \{a, b, ba, b^2, 1\}.$$

Последний факт доказан в [43, следствие 6.6].  $\square$

Отметим, что аналог следствия 3.38 для произвольных цепных многообразий моноидов не имеет места. Действительно, как мы уже отмечали во введении, в работе [37] доказано, что существует континуум не локально конечных цепных многообразий групп. Однако явные примеры таких многообразий до сих пор не известны.

## § 4. Специальные элементы

В этом параграфе мы сначала сформулируем все основные результаты, а потом перейдем к их доказательству. Многообразие всех моноидов будем обозначать через  $\mathbf{MON}$ . Первым результатом диссертации о специальных элементах решетки  $\mathbf{MON}$  является описание нейтральных элементов этой решетки.

**Теорема 4.1.** *Для многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  следующие условия эквивалентны:*

- (i)  $\mathbf{V}$  — модулярный, нижнемодулярный и верхнемодулярный элемент решетки  $\mathbf{MON}$ ;
- (ii)  $\mathbf{V}$  — нейтральный элемент решетки  $\mathbf{MON}$ ;
- (iii)  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{MON}$ .

Следующий результат посвящен описанию нестандартных элементов решетки  $\mathbf{MON}$ .

**Теорема 4.2.** *Для многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  следующие условия эквивалентны:*

- (i)  $\mathbf{V}$  — модулярный и верхнемодулярный элемент решетки  $\mathbf{MON}$ ;
- (ii)  $\mathbf{V}$  — нестандартный элемент решетки  $\mathbf{MON}$ ;
- (iii)  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$ ,  $\mathbf{C}_2$  и  $\mathbf{MON}$ .

Следующее утверждение дает существенную информацию о верхнемодулярных элементах решетки  $\mathbf{MON}$ .

**Предложение 4.3.** *Если собственное многообразие моноидов  $\mathbf{V}$  является верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ , то  $\mathbf{V}$  либо коммутативно, либо вполне регулярно.*

Поскольку кодистрибутивный элемент произвольной решетки является ее верхнемодулярным элементом, из предложения 4.3 следует, что любое собственное многообразие моноидов, являющееся кодистрибутивным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ , либо коммутативно, либо вполне регулярно. Оказывается, что справедливо

**Предложение 4.4.** *Всякое коммутативное многообразие моноидов является кодистрибутивным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ .*

Как мы увидим в конце параграфа, из сформулированных выше результатов легко вытекает

**Следствие 4.5.** *Для многообразия моноидов  $\mathbf{V}$ , не содержащего многообразия  $\mathbf{D}_1$ , следующие условия эквивалентны:*

- (i)  $\mathbf{V}$  — модулярный элемент решетки  $\mathbf{MON}$ ;

- (ii)  $\mathbf{V}$  — костандартный элемент решетки  $\mathbf{MON}$ ;
- (iii)  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{C}_2$ .

Отметим, что это следствие охватывает два важных класса многообразий моноидов: коммутативные и вполне регулярные многообразия.

Прежде чем переходить к доказательству сформулированных утверждений, докажем некоторые вспомогательные факты о специальных элементах решетки  $\mathbf{MON}$ .

Очевидно, что многообразия  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{MON}$  являются нейтральными элементами решетки  $\mathbf{MON}$ . В [65, предложение 2.4] было установлено, что  $\mathbf{SL}$  является нейтральным элементом решетки  $\mathbf{SEM}$ . Учитывая предложение 1.1, мы можем заключить, что справедлива

**Лемма 4.6.** *Многообразия  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{MON}$  являются нейтральными элементами решетки  $\mathbf{MON}$ .*  $\square$

**Лемма 4.7.** *Пусть  $\mathbf{V}$  — некоммутативное вполне регулярное многообразие моноидов. Тогда*

$$\mathbf{C}_2 \vee (\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1 \wedge (\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{V}).$$

*В частности,  $\mathbf{V}$  не является модулярным, а  $\mathbf{C}_2$  — нижнемодулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ .*

*Доказательство.* Из леммы 1.12 вытекает, что решетка подмногообразий многообразия  $\mathbf{D}_1$  является цепью  $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{SL}$  является максимальным вполне регулярным подмногообразием многообразия  $\mathbf{D}_1$ . Многообразие  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{D}_1$  вполне регулярно. Следовательно  $\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{V} \subseteq \mathbf{SL}$ . Поэтому  $\mathbf{C}_2 \vee (\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{C}_2$ . С другой стороны,  $\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{V}$  является некоммутативным и не вполне регулярным многообразием, поскольку  $\mathbf{V}$  некоммутативно, а  $\mathbf{C}_2$  не вполне регулярно. Тогда из леммы 1.18 следует, что  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{V}$ , откуда  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1 \wedge (\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{V})$ .  $\square$

Зафиксируем обозначения для следующих двух слов:

$$\mathbf{s} = yxuzxz \text{ и } \mathbf{t} = yxzxuz.$$

Положим  $\mathbf{B}_{2,3} = \text{var}\{x^2 \approx x^3\}$  и  $\mathbf{Q} = \text{var}\{\mathbf{s} \approx \mathbf{t}\}$ . Ясно, что  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{B}_{2,3}$ .

**Лемма 4.8.** *Если  $\mathbf{V}$  — коммутативное многообразие моноидов, содержащее нетривиальную группу, то*

$$\mathbf{Q} \vee (\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V}) \subset \mathbf{B}_{2,3} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}).$$

*В частности,  $\mathbf{V}$  не является модулярным, а  $\mathbf{Q}$  — нижнемодулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ .*

*Доказательство.* Из предложения 1.6 следует, что  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{Q}$ . Поскольку  $\mathbf{V}$  коммутативно, отсюда вытекает, что  $\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_2$ . Следовательно,

$$\mathbf{Q} \vee (\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}_{2,3} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}).$$

Требуется показать, что последнее включение — строгое. Для этого достаточно установить, что в  $\mathbf{B}_{2,3} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{V})$  не выполнено тождество  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ . В противном случае существует последовательность попарно различных слов  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  такая, что  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{s}$ ,  $\mathbf{w}_k = \mathbf{t}$  и для любого  $0 \leq i < k$  тождество  $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{B}_{2,3}$ , либо в  $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$ . Рассмотрим тождество  $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$ . Очевидно, что оно не выполнено в многообразии  $\mathbf{B}_{2,3}$ , так как  $\mathbf{s}$  является изотермом для  $\mathbf{B}_{2,3}$ . Следовательно, это тождество выполнено в  $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$ . Тогда из леммы 1.2 вытекает, что существует вывод тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$  из тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ , т.е. последовательность попарно различных слов (3.17) такая, что  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{s}$ ,  $\mathbf{v}_m = \mathbf{w}_1$  и для любого  $0 \leq i < m$  либо  $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{s}) \mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{t}) \mathbf{b}_i$ , либо  $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{t}) \mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{s}) \mathbf{b}_i$  для некоторых слов  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$  и некоторого эндоморфизма  $\xi_i \in \text{End}(F^1)$ . Без ограничения общности мы можем считать, что последовательность (3.17) является кратчайшим выводом  $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$  из  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ .

Пусть  $\eta$  — произвольный эндоморфизм моноида  $F^1$ . В табл. 3 приведены формы слов  $\eta(\mathbf{s})$  и  $\eta(\mathbf{t})$  в случае, когда  $\eta$  отображает хотя бы одну из букв  $x, y$  и  $z$  в пустое слово. Мы видим, что во всех случаях слова  $\eta(\mathbf{s})$  и  $\eta(\mathbf{t})$  содержат подслово вида  $\mathbf{w}^2$ . Заметим, что слова  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{t}$  не содержат квадратов. Из этого факта и табл. 3 вытекает, что если выполнено равенство  $\mathbf{a} = \mathbf{c} \eta(\mathbf{b}) \mathbf{d}$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ ,  $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in F^1$ , а  $\eta$  — эндоморфизм моноида  $F^1$ , отображающий хотя бы одну из букв  $x, y$  или  $z$  в пустое слово, то  $\eta(\mathbf{b}) = \lambda$ . Этот факт мы будем в дальнейшем неоднократно использовать для получения противоречия.

Таблица 3: вид слов  $\eta(\mathbf{s})$  и  $\eta(\mathbf{t})$  в зависимости от эндоморфизма  $\eta$

| Слово              | Вид слова, если             |   |   |
|--------------------|-----------------------------|---|---|
|                    | $\eta(x) = \lambda$         | $\eta(y) = \lambda$                             | $\eta(z) = \lambda$                             |
| $\eta(\mathbf{s})$ | $\mathbf{p}^2 \mathbf{q}^2$ | $(\mathbf{p} \mathbf{q})^2$                     | $(\mathbf{p} \mathbf{q})^2$                     |
| $\eta(\mathbf{t})$ | $(\mathbf{p} \mathbf{q})^2$ | $\mathbf{p} \mathbf{q} \mathbf{p}^2 \mathbf{q}$ | $\mathbf{p} \mathbf{q}^2 \mathbf{p} \mathbf{q}$ |

Рассмотрим тождество  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$ . Предположим сначала, что  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{s}) \mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{t}) \mathbf{b}_0$ . Если слова  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}_0$  являются пустыми, то эндоморфизм  $\xi_0$  действует тождественно на буквах  $x, y$  и  $z$ . В этом случае  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}$ . Пусть теперь хотя бы одно из слов  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}_0$  не является пустым. Тогда эндоморфизм  $\xi_0$  отображает одну из букв  $x, y$  и  $z$  в пустое слово. В предыдущем абзаце мы показали, что в этом случае  $\xi_0(\mathbf{s}) = \xi_0(\mathbf{t}) = \lambda$ , откуда  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_0$ . Получаем противоречие с тем, что слова  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  различны.

Предположим теперь, что  $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{t}) \mathbf{b}_0$  и  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{s}) \mathbf{b}_0$ . Поскольку длина слова  $\mathbf{s}$  меньше длины слова  $\mathbf{t}$ , эндоморфизм  $\xi_0$  должен отображать одну из букв  $x, y$  или  $z$  в пустое слово. Учитывая доказанное выше, мы снова получаем, что  $\xi_0(\mathbf{t}) = \lambda$ . В этом случае вновь возникает противоречие с тем, что  $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{v}_1$ . Таким образом,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}$ .

Рассмотрим теперь тождество  $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$ . Предположим, что  $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \xi_1(\mathbf{s}) \mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1 \xi_1(\mathbf{t}) \mathbf{b}_1$ . Заметим, что число вхождений буквы  $x$  в



слово  $\xi_1(\mathbf{s})$  не может быть равно  $\mathfrak{z}$ , и поэтому  $x \in \text{con}(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1)$ . Поскольку как первая, так и последняя буква слова  $\mathbf{t}$  не совпадает с  $x$ , мы получаем, что слово  $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$  имеет длину  $\geq 2$ . Тогда эндоморфизм  $\xi_1$  должен отображать одну из букв  $x$ ,  $y$  или  $z$  в пустое слово. В этом случае, как мы показали выше,  $\xi_1(\mathbf{s}) = \lambda$ , откуда  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ . Противоречие.

Пусть теперь  $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1\xi_1(\mathbf{t})\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1\xi_1(\mathbf{s})\mathbf{b}_1$ . Если слова  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{b}_1$  являются пустыми, то эндоморфизм  $\xi_1$  действует тождественно на буквах  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В этом случае  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{s}$ . Но этого не может быть, так как последовательность (3.17) является кратчайшим выводом тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$  из тождества  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ . Таким образом, хотя бы одно из слов  $\mathbf{a}_1$  или  $\mathbf{b}_1$  не является пустым. Тогда эндоморфизм  $\xi_1$  отображает одну из букв  $x$ ,  $y$  или  $z$  в пустое слово. В этом случае, как мы показали выше,  $\xi_1(\mathbf{t}) = \lambda$ , откуда  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ . Получаем противоречие с тем, что слова  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  различны. Таким образом, мы показали, что единственно возможной ситуацией является случай, когда  $m = 1$  и  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{t}$ . Следовательно, тождество  $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$  выполнено в многообразии  $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$ . Тогда это многообразие удовлетворяет и тождеству (3.5), что невозможно, так как  $\mathbf{V}$  содержит нетривиальную группу.  $\square$

Заметим, что  $\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{B}_{2,3}$ .

**Лемма 4.9.** *Если  $n > 2$ , то*

$$(\mathbf{C}_n \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{F}_1 \subset (\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}.$$

В частности,  $\mathbf{C}_n$  при  $n > 2$  не является модулярным, а  $\mathbf{F}_1$  — нижнемоулярным элементом решетки  $\text{MON}$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $(\mathbf{C}_n \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{F}_1 \subseteq (\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ . Покажем, что это включение строгое. Поскольку  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{F}_1$ , мы имеем, что  $(\mathbf{C}_n \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{F}_1 = \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1$ . Таким образом, нам нужно показать, что  $\mathbf{F}_1 \subset (\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ . Для этого достаточно установить, что в  $(\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$  не выполнено тождество (3.9). В противном случае существует последовательность различных слов (3.17) такая, что  $\mathbf{v}_0 = xyx$ ,  $\mathbf{v}_m = xyx^2$  и для любого  $0 \leq i < m$  тождество  $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$  выполнено либо в  $\mathbf{B}_{2,3}$ , либо в  $\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1$ . Рассмотрим тождество  $xyx \approx \mathbf{v}_1$ . Очевидно, что оно не выполнено в многообразии  $\mathbf{B}_{2,3}$ , так как  $xyx$  является изотермом для  $\mathbf{B}_{2,3}$ . С другой стороны, это тождество выполняется в  $\mathbf{C}_n$  тогда и только тогда, когда оно следует из коммутативности. Это означает, что  $\mathbf{v}_1 \in \{x^2y, yx^2\}$ . Если  $\mathbf{v}_1 = x^2y$ , то  $\mathbf{F}_1$  удовлетворяет тождеству  $x^2y \approx xyx$ , что противоречит тому, что многообразия  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}_1$  различны. Если же  $\mathbf{v}_1 = yx^2$ , то в  $\mathbf{F}_1$  выполнены тождества

$$xyx \approx \mathbf{v}_1 = yx^2 \approx yx^3 \approx xyx^2 \approx x^2yx \approx x^2y,$$

откуда снова выводим то же самое противоречие. Таким образом, многообразие  $(\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$  не удовлетворяет тождеству (3.9), откуда  $\mathbf{F}_1 \subset (\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ .  $\square$

**Лемма 4.10.** *Если многообразия моноидов  $\mathbf{V}$  не содержит многообразия  $\mathbf{D}_1$  и является модулярным элементом решетки  $\text{MON}$ , то оно совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{C}_2$ .*

*Доказательство.* В силу леммы 1.18, многообразие  $\mathbf{V}$  либо коммутативно, либо вполне регулярно. Из леммы 4.7 вытекает, что если  $\mathbf{V}$  вполне регулярно, то оно коммутативно. Таким образом,  $\mathbf{V}$  в любом случае коммутативно. Учитывая лемму 4.8, получаем, что  $\mathbf{V}$  комбинаторно, а значит, удовлетворяет тождеству вида  $x^n \approx x^{n+1}$  для некоторого  $n$ . Таким образом,  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_n$ . Из предложения 3.12 вытекает теперь, что  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{C}_m$  для некоторого  $2 \leq m \leq n$ . Учитывая лемму 4.9, получаем, что случай, когда  $m > 2$ , невозможен. Следовательно,  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{C}_2$ .  $\square$

Приступим к доказательству основных результатов параграфа.

*Доказательство предложения 4.3.* Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное некоммутативное и не вполне регулярное многообразие моноидов, являющееся верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ . Тогда, по лемме 1.18,  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$ . В [60, лемма 2.16] доказано, что многообразию всех полугрупп порождается всеми минимальными неабелевыми многообразиями групп. Учитывая это утверждение и предложение 1.1, мы получаем, что существует минимальное неабелево многообразие групп  $\mathbf{G}$  такое, что  $\mathbf{G} \not\subseteq \mathbf{V}$ . Тогда  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{G} = \mathbf{A}_n$  для некоторого натурального  $n$ , откуда  $\mathbf{C}_2 \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{G}) = \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{A}_n$ . С другой стороны, в силу леммы 4.7,  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{G}$ . Принимая во внимание тот факт, что  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$ , мы получаем, что  $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V} \wedge (\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{G})$ . Многообразие  $\mathbf{A}_n \vee \mathbf{C}_2$  коммутативно, в то время как  $\mathbf{D}_1$  не является коммутативным, откуда

$$\mathbf{C}_2 \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{G}) \neq \mathbf{V} \wedge (\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{G}).$$

Учитывая, что  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$ , мы получаем противоречие с тем, что многообразие  $\mathbf{V}$  является верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ .  $\square$

*Доказательство предложения 4.4.* Пусть  $\mathbf{V}$  — коммутативное многообразие моноидов, а  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  — произвольные многообразия. Положим  $\mathbf{X} = \mathbf{V} \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z})$  и  $\mathbf{W} = (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z})$ . Очевидно, что  $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{X}$ . Проверим, что  $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{W}$ . Если  $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Y}$ , то

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) = \mathbf{V} = \mathbf{V} \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}) = (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}) = \mathbf{W},$$

что и требовалось доказать. Следовательно, мы можем предположить, что  $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{Y}$ . В силу симметрии,  $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{Z}$ . Если  $\mathbf{V}$  является периодическим, то  $\mathbf{X}$  также будет периодическим. Если  $\mathbf{V}$  не является периодическим, то  $\mathbf{V}$  является многообразием всех коммутативных моноидов. Поскольку  $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{V} \not\subseteq \mathbf{Z}$ , многообразия  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  являются периодическими, откуда следует периодичность многообразия  $\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ . Следовательно,  $\mathbf{X}$  — коммутативное периодическое многообразие. Тогда из леммы 1.4 вытекает, что  $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \vee \mathbf{A}_s$  для некоторого  $s$ , где  $\mathbf{Q}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  или  $\mathbf{C}_n$  при  $n \geq 2$ . Очевидно, что  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$  и  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ . Теперь проверим, что либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y}$ , либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$ . Если  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}$ , то доказывать нечего. Если  $\mathbf{Q} = \mathbf{SL}$ , то требуемый факт следует из леммы 1.3. Пусть теперь, что  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_n$ , где  $n \geq 2$ . Предположим, что  $\mathbf{Q} \not\subseteq \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Q} \not\subseteq \mathbf{Z}$ . Тогда из леммы 1.9 следует, что найдутся  $i$  и  $j$  такие, что в  $\mathbf{Y}$  выполнено тождество  $x^{n-1} \approx x^{n-1+i}$ , в

$\mathbf{Z}$  — тождество  $x^{n-1} \approx x^{n-1+j}$ . Тогда многообразию  $\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$  удовлетворяет тождеству  $x^{n-1} \approx x^{n-1+ij}$ . Получаем противоречие с тем, что  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ . Таким образом, мы доказали, что либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y}$ , либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$ . Поскольку  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$ , мы получаем, что либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}$ , либо  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}$ . Следовательно,  $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{W}$ .

Теперь проверим, что  $\mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{W}$ . Заметим, что  $\mathbf{W}$  является коммутативным периодическим многообразием. Тогда, в силу леммы 1.4,  $\mathbf{W} = \mathbf{Q}' \vee \mathbf{A}_r$  для некоторого  $r$ , где  $\mathbf{Q}'$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  или  $\mathbf{C}_n$  при  $n \geq 2$ . Предположим, что  $s$  не делит  $r$ . Тогда найдутся такие простое число  $p$  и натуральное число  $k$ , что  $p^k$  делит  $s$ , но не делит  $r$ . Положим  $q = p^k$ . Тогда  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{X}$ , но  $\mathbf{A}_q \not\subseteq \mathbf{A}_r$ . Легко видеть, что любое подмногообразие многообразия  $\mathbf{W} = \mathbf{Q}' \vee \mathbf{A}_r$ , состоящее из групп, содержится в  $\mathbf{A}_r$  (это следует, например, из леммы 1.5). Следовательно,  $\mathbf{A}_q \not\subseteq \mathbf{W}$ . Поскольку  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{X}$ , мы получаем, что  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ . В [6, теорема 1.2] доказано, что любое многообразие периодических абелевых групп является кодистрибутивным элементом решетки  $\mathbf{SEM}$ . Из этого факта и предложения 1.1 следует, что

$$\mathbf{A}_q = \mathbf{A}_q \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) = (\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Z}).$$

Поскольку решетка подмногообразий многообразия  $\mathbf{A}_q$  является цепью,  $\mathbf{A}_q$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Y}$  и  $\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Z}$ , откуда следует, что либо  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Y}$ , либо  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Z}$ . Принимая во внимание, что  $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$ , мы получаем противоречие с тем, что  $\mathbf{A}_q \not\subseteq \mathbf{W}$ . Поэтому  $s$  делит  $r$ . Тогда  $\mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{A}_r \subseteq \mathbf{W}$ . Следовательно,  $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \vee \mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{W}$ . Предложение 4.4 доказано.  $\square$

*Доказательство теоремы 4.2.* Импликация (ii)  $\longrightarrow$  (i) очевидна. Нам остается доказать импликации (i)  $\longrightarrow$  (iii) и (iii)  $\longrightarrow$  (ii).

(i)  $\longrightarrow$  (iii) Пусть  $\mathbf{V}$  — собственное многообразие моноидов, являющееся модулярным и верхнемодулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ . Согласно предложению 4.3,  $\mathbf{V}$  либо вполне регулярно, либо коммутативно. Из леммы 1.18 вытекает теперь, что  $\mathbf{D}_1 \not\subseteq \mathbf{V}$ . Остается сослаться на лемму 4.10.

(iii)  $\longrightarrow$  (ii) Ввиду леммы 4.6, многообразия  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{MON}$  являются нейтральными, а значит и костандартными элементами решетки  $\mathbf{MON}$ . Нам остается показать, что костандартным элементом этой решетки является также многообразие  $\mathbf{C}_2$ .

Нетрудно проверить, что элемент решетки является костандартным тогда и только тогда, когда он является модулярным и кодистрибутивным. Это утверждение легко следует, например, из [28, теорема 253] или [53, предложение 1.7]. Ввиду указанного факта и предложения 4.4, достаточно доказать, что  $\mathbf{C}_2$  является модулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ . Предположим противное. Тогда из [34, предложение 2.1] вытекает, что существуют многообразия  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$  такие, что  $\mathbf{U} \subset \mathbf{W}$ ,  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2$  и  $\mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \vee \mathbf{C}_2$ . Если  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{U}$ , то  $\mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2$ , откуда  $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{W}$ . Но тогда  $\mathbf{U} = \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{U} = \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{W} = \mathbf{W}$ , что противоречит выбору  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$ . Таким образом,  $\mathbf{C}_2 \not\subseteq \mathbf{U}$ . Аналогично проверяется, что  $\mathbf{C}_2 \not\subseteq \mathbf{W}$ . Тогда из леммы 1.10 следует, что многообразия  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$  вполне регулярны.

Предположим сначала, что  $\mathbf{U}$  является многообразием групп. Тогда  $\mathbf{SL} \not\subseteq \mathbf{U}$ . Если  $\mathbf{W}$  не является групповым многообразием, то из леммы 1.3

следует, что  $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{W}$ . Тогда  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{T}$ , но  $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2$ . Получаем противоречие с равенством  $\mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2$ . Таким образом,  $\mathbf{W}$  является многообразием групп. Из леммы 1.5 следует, что наибольшим групповым подмногообразием многообразия  $\mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2$  является многообразие  $\mathbf{U}$ . Но это невозможно, так как  $\mathbf{W}$  является многообразием групп и  $\mathbf{U} \subset \mathbf{W} \subset \mathbf{W} \vee \mathbf{C}_2 = \mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2$ . Мы видим, что  $\mathbf{U}$  не является многообразием групп. Тогда, в силу леммы 1.3,  $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{U}$ . Но в этом случае  $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{W}$ , и потому  $\mathbf{W}$  также не является групповым многообразием. Поскольку  $\mathbf{U}$  вполне регулярно, оно удовлетворяет тождеству  $x \approx x^{n+1}$  для некоторого натурального  $n$ . Пусть  $n$  — наименьшее число с таким свойством, а  $\Sigma$  — базис тождеств многообразия  $\mathbf{U}$ . Обозначим через  $\zeta$  эндоморфизм моноида  $F^1$ , переводящий каждую букву  $x$  в слово  $x^{n+1}$ . Положим

$$\Sigma^* = \{\zeta(\mathbf{u}) \approx \zeta(\mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Sigma\}.$$

Очевидно, что  $\mathbf{U} = \text{var}\{x \approx x^{n+1}, \Sigma^*\}$ . Если  $\mathbf{p} \approx \mathbf{q} \in \Sigma^*$ , то из леммы 1.3 следует, что  $\text{con}(\mathbf{p}) = \text{con}(\mathbf{q})$ . Тогда, согласно предложению 1.6, все тождества из  $\Sigma^*$  выполнены в  $\mathbf{C}_2$ . Принимая во внимание, что  $\mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \vee \mathbf{C}_2$ , получаем, что многообразие  $\mathbf{W}$  также удовлетворяет системе тождеств  $\Sigma^*$ . Поскольку  $\mathbf{C}_2$  удовлетворяет тождеству  $x^2 \approx x^3$ , а  $\mathbf{U}$  — тождеству  $x \approx x^{n+1}$ , в многообразии  $\mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \vee \mathbf{C}_2$  выполнено тождество  $x^2 \approx x^{n+2}$ . Принимая во внимание, что  $\mathbf{W}$  вполне регулярно, получаем, что в  $\mathbf{W}$  выполнено тождество  $x \approx x^{n+1}$ . Из сказанного следует, что  $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$ , что противоречит выбору  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$ . Таким образом, мы доказали, что  $\mathbf{C}_2$  является модулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 4.1.* Импликация (iii)  $\longrightarrow$  (ii) является следствием леммы 4.6, а импликация (ii)  $\longrightarrow$  (i) очевидна. Нам остается доказать импликацию (i)  $\longrightarrow$  (iii). Пусть  $\mathbf{V}$  — модулярный, нижнемодулярный и верхнемодулярный элемент решетки  $\mathbf{MON}$ . Из теоремы 4.2 вытекает, что многообразие  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$ ,  $\mathbf{C}_2$  и  $\mathbf{MON}$ . Согласно лемме 4.7, многообразие  $\mathbf{C}_2$  не является нижнемодулярным элементом решетки  $\mathbf{MON}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{V}$  совпадает с одним из многообразий  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{SL}$  и  $\mathbf{MON}$ .  $\square$

*Доказательство следствия 4.5.* Условия (ii) и (iii) этого следствия эквивалентны в силу теоремы 4.2, импликация (ii)  $\longrightarrow$  (i) очевидна, а импликация (i)  $\longrightarrow$  (iii) справедлива в силу леммы 4.10.  $\square$

## Заключение

Диссертация посвящена изучению решетки многообразий моноидов, о которой ранее почти ничего известно не было. В ней рассмотрен ряд ограничений на решетки моноидных многообразий, формулируемых в терминах, так или иначе связанных с решеточными тождествами.

Итогом проведенного исследования являются следующие результаты:

- 1) утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке надкоммутативных многообразий моноидов (теорема 2.1), а значит, и в решетке всех моноидных многообразий (следствие 2.2);
- 2) полное описание всех негрупповых цепных многообразий моноидов (теорема 3.1 и следствие 3.34);
- 3) полное описание нейтральных элементов решетки всех многообразий моноидов (теорема 4.1);
- 4) полное описание нестандартных элементов той же решетки (теорема 4.2).

Кроме того, получена существенная информация о верхнемодулярных и кодистрибутивных элементах решетки всех многообразий моноидов (предложения 4.3 и 4.4 соответственно).

Разработанный в диссертации метод исследования решеток многообразий моноидов с помощью таких комбинаторных понятий как  $k$ -разложение слова,  $k$ -блоки,  $k$ -разделители, глубина буквы в слове, представляется весьма перспективным и может быть рекомендован для решения других задач о многообразиях моноидов, связанных как с различными свойствами решеток многообразий, так и с вопросами конечной и бесконечной базируемости моноидов.

В дальнейшем мы планируем рассмотреть новые типы специальных элементов в решетке многообразий моноидов (прежде всего, дистрибутивные элементы), расширить круг рассматриваемых ограничений на решетки многообразий за счет условий конечности (прежде всего — условий максимальной и минимальности) и попытаться применить разработанную в диссертации комбинаторную технику к вопросам о конечной и бесконечной базируемости многообразий моноидов.

## Список литературы

- [1] Айзенштат, А. Я. *О решетке многообразий полугрупп* / А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1979. – С. 3–46.
- [2] Артамонов, В. А. *Цепные многообразия групп* / В. А. Артамонов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1978. – Вып. 3. – С. 3–8.
- [3] Бахтурин, А. Ю. *Тождества в алгебрах Ли* / А. Ю. Бахтурин. – М: Наука, 1985. – 448 с.
- [4] Бирюков, А. П. *Многообразия идемпотентных полугрупп* / А. П. Бирюков // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9, №. 3. – С. 255–273.
- [5] Верников, Б. М. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп. II* / Б. М. Верников // Фундам. и прикл. математика. – 2008. – Т. 14, №. 7. – С. 43–51.
- [6] Верников, Б. М. *Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* / Б. М. Верников // Изв. вузов. Математика. – 2011. – №. 7. – С. 13–21.
- [7] Волков, М. В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* / М. В. Волков // Докл. Акад. наук. – 1992. – Т. 326, №. 3. – С. 409–413.
- [8] Гретцер, Г. *Общая теория решеток* / Г. Гретцер. – М.: Мир, 1982. – 456 с.
- [9] Гусев, С. В. *Два маленьких многообразия моноидов с большим объединением* / С. В. Гусев // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. – 2018. – С. 189.
- [10] Нейманн, Х. *Многообразия групп* / Х. Нейманн. – М: Мир, 1969. – 264 с.
- [11] Пинус, А. Г. *Конгруэнц-модулярные многообразия алгебр* / А. Г. Пинус. – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та., 1986. – 132 с.
- [12] Свердловская тетрадь. *Нерешенные задачи теории полугрупп.* – Под ред. Л. Н. Шеврина. 2-е изд. – Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979. – 41 с.
- [13] Судзуки М. *Строение группы и строение структуры ее подгрупп* / М. Судзуки. – М: ИЛ, 1960. – 158 с.
- [14] Суханов, Е. В. *Почти линейные многообразия полугрупп* / Е. В. Суханов // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32, №. 4. – С. 469–476.
- [15] Трахтман, А. Н. *О покрывающих элементах в структуре многообразий алгебр* / А. Н. Трахтман // Матем. заметки. – 1974. – Т. 15, №. 2. – С. 307–312.
- [16] Хобби, Д. *Строение конечных алгебр* / Д. Хобби, Р. Маккензи. – М: Мир, 1993. – 284 с.
- [17] Шапрынский, В. Ю. *Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп* / В. Ю. Шапрынский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, №. 3. – С. 282–286.
- [18] Шеврин, Л. Н. *Решетки многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 2009. – №. 3. – С. 3–36.
- [19] Шеврин, Л. Н. *Тождества полугрупп* / Л. Н. Шеврин, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 1985. – №. 11. – С. 3–47.
- [20] Шеврин, Л. Н. *Структурные аспекты теории многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Е. В. Суханов // Изв. вузов. Математика. – 1989. – №. 6. – С. 3–39.
- [21] Almeida, J. *Finite Semigroups and Universal Algebra* / J. Almeida. – Singapore: World Scientific, 1994. – xvii+511 pp.

- [22] Burris, S. *Embedding the dual of  $\Pi_m$  in the lattice of equational classes of commutative semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, No. 1. – P. 37–39.
- [23] Burris, S. *Embedding the dual of  $\Pi_\infty$  in the lattice of equational classes of semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Algebra Universalis. – 1971. – Vol. 1, No. 2. – P. 248–254.
- [24] Evans, T. *The lattice of semigroup varieties* / T. Evans // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2, No. 1. – P. 1–43.
- [25] Fennemore, C. F. *All varieties of bands. I, II* / C. F. Fennemore // Math. Nachr. – 1971. – Vol. 48, No. 1–6. – P. 237–262.
- [26] Gerhard, J. A. *The lattice of equational classes of idempotent semigroups* / J. A. Gerhard // J. Algebra. – 1970. – Vol. 15, No. 2. – P. 195–224.
- [27] Gerhard, J. A. *Some subdirectly irreducible idempotent semigroups* / J. A. Gerhard // Semigroup Forum. – 1972. – Vol. 5, No. 1. – P. 362–369.
- [28] Grätzer, G. *Lattice Theory: Foundation.* / G. Grätzer. – Basel: Springer Basel AG, 2011. – xxix+613 pp.
- [29] Gusev, S. V. *Cancellable elements of the lattice of semigroup varieties* / S. V. Gusev, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Algebra and Discrete Math. – 2018. – Vol. 26, No. 1. – P. 34–46.
- [30] Head, T. J. *The varieties of commutative monoids* / T. J. Head // Nieuw Arch. Wiskunde. III Ser. – 1968. – Vol. 16. – P. 203–206.
- [31] Jackson, M. *Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras* / M. Jackson // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70, No. 2. – P. 159–187; *Erratum to: Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras* / M. Jackson // Semigroup Forum. 2018. – Vol. 96, No. 1. – P. 197–198.
- [32] Jackson, M. *Monoid varieties with extreme properties* / M. Jackson, E. W. H. Lee // Trans. Amer. Math. Soc. – 2018. – Vol. 370, No. 7. – P. 4785–4812.
- [33] Jackson, M. *Finitely based, finite sets of words* / M. Jackson, O. Sapir // Int. J. Algebra and Comput. – 2000. – Vol. 10, No. 6. – P. 683–708.
- [34] Ježek, J. *The lattice of equational theories. Part I: modular elements* / J. Ježek // Czechosl. Math. J. – 1981. – Vol. 31, No. 1. – P. 127–152.
- [35] Jipsen, P. *Varieties of Lattices.* / P. Jipsen, H. Rose. – Lect. Notes Math. – Vol. 1533. Berlin: Springer-Verlag, 1992. – x+162pp.
- [36] Kharlampovich, O. G. *Algorithmic problems in varieties* / O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir // Int. J. Algebra and Comput. – 1995. – Vol. 5, No. 4–5. – P. 379–602.
- [37] Kozhevnikov, P. A. *On nonfinitely based varieties of groups of large prime exponent* / P. A. Kozhevnikov // Commun. Algebra. – 2012. – Vol. 40, No. 7. – P. 2628–2644.
- [38] Lee, E. W. H. *Varieties generated by 2-testable monoids* / E. W. H. Lee // Studia Sci. Math. Hungar. – 2012. – Vol. 49. – P. 366–389.
- [39] Lee, E. W. H. *Maximal Specht varieties of monoids* / E. W. H. Lee // Moscow Math. J. – 2012. – Vol. 12, No. 3. – P. 787–802.
- [40] Lee, E. W. H. *Almost Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Beiträge zur Algebra und Geometrie. – 2013. – Vol. 54, No. 1. – P. 121–129.
- [41] Lee, E. W. H. *Inherently non-finitely generated varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 423. – С. 166–182.
- [42] Lee, E. W. H. *On certain Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Results Math. – 2014. – Vol. 66, No. 2. – P. 491–510.

- [43] Lee, E. W. H. *Minimal non-finitely based monoids* / E. W. H. Lee, J. R. Li // Dissert. Math. – 2011. – Vol. 475. – P. 1–65.
- [44] Mitsch, H. *Semigroups and their lattice of congruences* / H. Mitsch // Semigroup Forum. – 1983. – Vol. 26, No. 1. – P. 1–63.
- [45] Pastijn, F. J. *The lattice of completely regular semigroup varieties* / F. J. Pastijn // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1990. – Vol. 49, No. 1. – P. 24–42.
- [46] Pastijn, F. J. *Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups* / F. J. Pastijn // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 323, No. 1. – P. 79–92.
- [47] Perkins, P. *Bases for equational theories of semigroups* / P. Perkins // J. Algebra. – 1969. – Vol. 11, No. 2. – P. 298–314.
- [48] Petrich, M. *The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations* / M. Petrich, N. R. Reilly // Glasgow Math. J. – 1990. – Vol. 32, No. 2. – P. 137–152.
- [49] Pollák, Gy. *Some lattices of varieties containing elements without cover* / Gy. Pollák // Quad. Ric. Sci. – 1981. – Vol. 109. – P. 91–96.
- [50] Sapir, M. V. *On Cross semigroup varieties and related questions* / M. V. Sapir // Semigroup Forum. – 1991. – Vol. 42, No. 1. – P. 345–364.
- [51] Sapir, O. *Non-finitely based monoids* / O. Sapir // Semigroup Forum. – 2015. – Vol. 90, No. 3. – P. 557–586.
- [52] Schmidt, R. *Subgroup Lattices of Groups* / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – xv+572 pp.
- [53] Šešelja, B. *Weak Congruences in Universal Algebra* / B. Šešelja, A. Tepavčević. – Novi Sad: Institute of Mathematics. Symbol, 2001. – 150 pp.
- [54] Ševrin, L. N. *Attainability and solvability for classes of algebras* / L. N. Ševrin, L. M. Martynov // Semigroups. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. – 1985. – Vol. 39. – P. 397–459.
- [55] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattices of varieties of semigroups and epigroups* / V. Yu. Shaprynskiĭ, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Электрон. ресурс. <https://arxiv.org/abs/1810.01610> [P. 1–15.]
- [56] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov // Электрон. ресурс. <https://arxiv.org/abs/1902.04576> [P. 1–9.]
- [57] Shevrin, L. N. *Semigroups and Their Subsemigroup Lattices* / L. N. Shevrin, A. J. Ovsyannikov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1996. – xii+380 pp.
- [58] Skokov, D. V. *On modular and cancellable elements of the lattice of semigroup varieties* / D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Сибирские электронные матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 175–186.
- [59] Vachuska, C. *On the lattice of completely regular monoid varieties* / C. Vachuska // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 46, No. 1. – P. 168–186.
- [60] Vernikov, B. M. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Algebra Universalis. – 2008. – Vol. 59, No. 3–4. – P. 405–428.
- [61] Vernikov, B. M. *Special elements in lattices of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2015. – Vol. 81, No. 1–2. – P. 79–109.
- [62] Vernikov, B. M. *Upper-modular and related elements of the lattice of commutative semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Semigroup Forum. – 2017. – Vol. 94, No. 3. – P. 696–711.



- [63] Volkov, M. V. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / M. V. Volkov // In: P. M. Higgins (ed.), Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex. Colchester: University of Essex. – 1994. – P. 99–110.
- [64] Volkov, M. V. *The finite basis problem for finite semigroups* / M. V. Volkov // Math. Jpn. – 2001. – Vol. 53, No. 1. – P. 171–199.
- [65] Volkov, M. V. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* / M. V. Volkov // Contrib. General Algebra. – 2005. – Vol. 16. – P. 275–288.
- [66] Wismath, S. L. *The lattice of varieties and pseudovarieties of band monoids* / S. L. Wismath // Semigroup Forum. – 1986. – Vol. 33, No. 1. – P. 187–198.
- [67] Wismath, S. L. *The lattice of varieties of  $*$ -regular band monoids* / S. L. Wismath // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 46, No. 1. – P. 130–133.
- [68] Zhang, W. T. *A new example of limit variety of aperiodic monoids* / W. T. Zhang, Y. F. Luo // Электрон. ресурс. <https://arxiv.org/abs/1901.02207> [P. 1–16.]

## Публикации автора по теме диссертации

### Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

- [69] Гусев, С. В. *О решетке надкоммутативных многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Изв. вузов. Математика. – 2018. – No. 5. – С. 28–32.
- [70] Gusev, S. V. *Special elements of the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev // Algebra Universalis. – 2018. – Vol. 97, No. 2. – Article 29. – P. 1–12.
- [71] Gusev, S. V. *Chain varieties of monoids* / S. V. Gusev, B. M. Vernikov // Dissert. Math. – 2018. – Vol. 534. – P. 1–73.

### Другие публикации

- [72] Гусев, С. В. *Нейтральные и костандартные элементы решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. – 2017. – С. 145.
- [73] Гусев, С. В. *О кодистрибутивных и верхнемодулярных элементах решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Современ. проблемы математики и ее приложений: тезисы Междунар. (49-й Всеросс.) молодежной школы-конф. Екатеринбург. – 2018. – С. 12.
- [74] Gusev, S. V. *Chain varieties of monoids* / S. V. Gusev // Groups and graphs, algorithms and automata: Abstracts of the Int. Conf. and PhD Summer School. Ekaterinburg. – 2015. – P. 52.
- [75] Gusev, S. V. *On the lattice of overcommutative varieties of monoids* / S. V. Gusev // Groups and graphs, metrics and manifolds: Abstracts of the Int. Conf. and PhD-Master Summer School. Ekaterinburg. – 2017. – P. 54.