Федеральное государственное автономномное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

На правах рукописи

Александрова Светлана Анатольевна

Σ-ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В НАСЛЕДСТВЕННО КОНЕЧНЫХ НАДСТРОЙКАХ НАД РАСШИРЕНИЯМИ ПОЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор,
академик РАН
Гончаров Сергей Савостьянович

Новосибирск — 2019

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования.

В диссертации исследуются некоторые вопросы теории $\Sigma-$определимости в наследственно конечных надстройках над различными структурами. Ранние исследования наследственно конечных надстроек восходят к работам по теории допустимых множеств, начало которым положили С. Крипке и Р. Платек.

Независимо друг от друга С. Крипке [58] и Р. Платек [70] предложили почти идентичные версии теории допустимых множеств, представляющие в некотором смысле ослабление классической теории множеств ZF, которую авторы находили слишком мощной для многих задач, связанных с конкретными математическими структурами. Набор аксиом теории допустимых множеств отличается от ZF только тем, что из него исключены аксиомы бесконечности, мощности и выбора, а в аксиомах разделения и объединения используются формулы с ограниченными кванторами.

Дж. Барвайс [53], в свою очередь, увидел возможность обогатить данную теорию, введя особый род элементов - праэлементы, служащие базой для построения множеств. Такое дополнение позволяет рассматривать допустимые множества, в основании которых лежат произвольные математические структуры. Под допустимым множеством в этой теории понимается непустое транзитивное в теоретико-множественном универсуме с праэлементами множество, удовлетворяющее схемам аксиом Δ_0-выделения и $\Sigma-$рефлексии.

С этого времени началось развитие теории допустимых множеств, центральное место в которой заняли множества и отношения, выделяемых в таких структурах формулами особого вида, такими как Δ_0-формулы и $\Sigma-$формулы (впервые введёнными Леви в [63]).

Большую роль получила теория допустимых множеств в развитии обобщённой вычислимости, объединив в исследованиях объекты и методы теории вычислимости и теории моделей. Теория допустимых множеств позволяет задать вычислимость на произвольной структуре, используя $\Sigma-$определимые множества в качестве аналога вычислимо перечислимых. Вычислимость на произвольной структуре $\mathfrak{M}$ при этом понимается как $\Sigma-$определимость в допустимом множестве над $\mathfrak{M}$. Данный поход к пониманию обобщенной вычислимости для произвольной структуры $\mathfrak{M}$ впервые был предложен Ю., Л. Ершовым [8].

При таком подходе одним из наиболее естественных и интересных для рассмотрения с точки зрения обобщённой вычислимости подклассов допустимых множеств являются наследственно конечные надстройки.

Наследственно конечная надстройка над произвольной структурой $\mathfrak{M}$ может быть определена индуктивно:

$$HF_0(M) = \{\varnothing\};$$
$$HF_{n+1}(M) = \mathcal{P}_\omega(HF_n(M) \cup M);$$
$$HF(M) = \bigcup_{n<\omega} HF_n(M),$$

где $\mathcal{P}_\omega(X)$ означает множество всех конечных подмножеств множества X.

Будучи наименьшим по включению допустимым множеством над заданной структурой, наследственно конечная надстройка, с одной стороны, представляет собой объект достаточно простой и удобный для изучения с помощью теории допустимых множеств, а с другой стороны, достаточно богатый для получения результатов, ценных для теории обобщённой вычислимости. Многочисленные работы, посвящённые изучению допустимых множеств и, в частности, наследственно конечных надстроек, могут быть найдены у Ершова, Калимуллина, Роминой, Коровиной, Морозова, Вайценавичюса, Руднева, Стукачёва, Пузаренко, Хисамиева и других авторов (см., например, [1, 8, 10–24, 26–51, 75, 76]).

Наименьшей из наследственно конечных надстроек является наследственно конечная надстройка над пустым множеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$. $\Sigma-$определимость в такой модели очень хорошо согласуется с классической вычислимостью на натуральных числах, например, класс $\Sigma-$определимых при таком подходе множеств совпадает с классом рекурсивно перечислимых, класс $\Delta-$определимых – с рекурсивными множествами. Таким образом, естественно возникает вопрос о переносе при помощи такого приёма понятия вычислимости на другие математические объекты, в частности, действительные числа. При определении вычислимости на действительных числах в таком подходе в качестве основной модели может быть выбрана та или иная формализация поля вещественных чисел, например, упорядоченное поле $\langle R, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$. Такой подход получил развитие в работах Морозова, Коровиной, например, в [26], где А., С. Морозовым и М., В. Коровиной исследуются свойства $\Sigma-$определимости счётных структур над вещественными и комплексными числами, а также кватернионами, и [19], где изучаются Σ-представления упорядоченного поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с основным множеством, содержащимся в $\mathbb{R}$.

Другой известной формализацией обобщенной вычислимости над структурой является предложенный С.С. Гончаровым, Ю.Л. Ершовым и Д.И. Свириденко [6] метод, использующий $\Sigma-$определимость в наследственно конечной списочной надстройке $\mathfrak{M}$.

Списочная надстройка задаётся следующим образом. Если $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры σ, к ней добавляется списочная надстройка, носитель которой определяется индуктивно:

$$
\begin{aligned}
&S^0(M) - \text{конечные линейные списки из элементов } M,\\
&S^n(M) - \text{конечные линейные списки из элементов } S^{n-1}(M) \cup M,\\
&S(M) = \bigcup_{n \in \omega} S^n(M).
\end{aligned}
$$

Для работы со списками сигнатура модели списочной надстройки дополняется операциями и отношениями $head, tail, cons, nil, \in, \sqsubseteq$. Здесь nil означает $0-$местную функцию, имеющую значение пустого списка, а операции $head, tail, cons$ и отношения $\in, \sqsubseteq$ интерпретируются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&head(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle) = \alpha_n; \ head(nil) = nil;\\
&tail(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_{n+1} \rangle) = (\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle); \ tail(\langle \beta \rangle) = tail(nil) = nil;\\
&cons(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle, \beta) = (\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n, \beta \rangle),\\
&\beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle \iff \beta = \alpha_i, \text{ для некоторого } 1 \leq i \leq n.\\
&\langle \beta_1, \beta_2, \ \ldots, \beta_m \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle \iff m \leq n \text{ и } \beta_i = \alpha_i, \text{ для всех}\\
&1 \leq i \leq m.
\end{aligned}
$$

Таким образом, структура списочной надстройки имеет вид:

$$\mathbb{HW}(\mathfrak{M}) = \langle M, S(\mathfrak{M}), \sigma \cup \{head, tail, cons, nil, \in, \sqsubseteq\} \rangle.$$

Термы строятся из констант сигнатуры σ и переменных при помощи функциональных сигнатурных символов. Формулы строятся стандартным образом с использованием равенства, сигнатурных отношений $\in, \sqsubseteq$, кванторов $\exists, \forall$ и ограниченных кванторов $\exists x \in t, \forall x \in$

$t, \exists x \sqsubseteq t, \forall x \sqsubseteq t$.

Благодаря переосмыслению $\Sigma-$формул как программ, вычислительным устройством для которых служит семантика, такой подход получил название *семантического программирования*, или *$\Sigma-$программирования.* Семантическое программирование основано на теории списочных расширений GES. При таком подходе математические структуры понимаются как структуры данных, на которых работают программы, задаваемые $\Sigma-$формулами. Теоретические результаты семантического программирования широко используют методы, разработанные в теории допустимых множеств (см. монографии [8, 53] и недавние статьи [5, 7]).

Одной из наиболее важных проблем классической рекурсивной теории является существование универсальной функции для определённого класса функций, например универсальной частично вычислимой функции. В рамках подхода к вычислимости как $\Sigma-$определимости в допустимом множестве этот вопрос также является фундаментальным. Ю., Л. Ершовым было показано, что в любом допустимом множестве существует универсальный $\Sigma-$предикат (см. [8]), но, к сожалению, мы не можем утверждать того же о $\Sigma-$определимых функциях даже для наследственно конечных надстроек. В. А. Руднев в своей работе [36] построил модель, в наследственно конечной надстройке над которой класс $\Sigma-$определимых функций не обладает функцией универсальной.

В этой связи в допустимых множествах зачастую ключевое значение имеет свойство униформизации, формулируемое следующим образом:

Пусть P — подмножество декартова произведения $X \times Y$. Будем говорить, что P' униформизует P, если $P' \subseteq P$ и P' является графиком функции с областью определения $\{x : \exists y P(x, y)\}$.

Класс G обладает свойством униформизации, если любое P из G может быть униформизовано некоторым P' из G.

Также говорят, что в алгебраической системе $\mathfrak{M}$ верна теорема об униформизации, если для любого $\Sigma-$определимого в ней двуместного предиката существует одноместная $\Sigma-$определимая частичная функция с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ такая, что её график $\Gamma_f \subseteq P$.

Понятие свойства униформизации для класса $\Sigma-$определимых предикатов также было введено в монографии Ю.Л. Ершова [8], где также показано, что из свойства униформизации следует существование универсальной $\Sigma-$функции для соответствующего класса функций. Известны результаты об униформизации в наследственно конечных надстройках для некоторых классов алгебраических систем. Так, А. И. Стукачёвым в [37,38,75] получен критерий выполнения свойства униформизации в наследственно конечных надстройках над алгебраическими системами регулярных теорий. В частности, в этих работах получен результат об униформизации для $\mathbb{R}$. В дальнейшем тем же автором критерий униформизации был обобщён на случай квазирегулярных теорий [44,45].

Проблемам существования универсальной $\Sigma-$функции в наследственно конечном допустимом множестве для определённых классов алгебраических систем также посвящены работы [33,49–51]. В [51] введено понятие $\Sigma-$однородной алгебраической системы и найдено необходимое и достаточное условие для существования универсальной $\Sigma-$функции в наследственно конечной надстройке над такой системой. В [33] исследованы соотношения между некоторыми дескриптивными свойствами на допустимых множествах, такими как перечислимость, униформизация, редукция, отделимость, продолжимость. Также в данной работе рассматривается связь данных свойств с существованием универсальной $\Sigma-$определимой функции и $\Sigma-$функции, универсальной для $\Sigma-$функций, принимающих значения 0 и 1.

Другим важным аспектом теории $\Sigma-$определимости является обобщение понятия вычислимой структуры. Напомним, что структура конечного языка называется вычислимой, если её носитель и предикаты являются вычислимыми множествами, а операции задаются частично вычислимыми функциями. Проблемы существования вычислимых представлений структур всегда занимали важное место в классической теории вычислимых моделей. Те же вопросы естественным образом возникают и при изучении различных её обобщений. Ю.Л. Ершовым [8] в качестве аналога понятия вычислимой модели было введено понятие $\Sigma-$определимой в допустимом множестве структуры.

Алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A; P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k} \rangle$ называется $\Sigma-$определимой в допустимом множестве $\mathbb{A}$, если существуют следующие $\Sigma-$формулы (с параметрами в $\mathbb{A}$): $S(x)$, $E^+(x,y)$, $E^-(x,y)$, $\Psi_i^+(x_1, \ldots, x_{n_i})$, $\Psi_i^-(x_1, \ldots, x_{n_i})$, $i = 0, \ldots, k$, такие, что

1. $S^* = \{x \in \mathbb{A} | \mathbb{A} \models S(x)\} \neq \varnothing$,

2. формула $E^+(x,y)$ определяет отношение конгруэнтности η на модели $\mathfrak{A}^* = \langle S^*; P_0^*, \ldots, P_k^* \rangle$, где $P_i^* = \{\langle x_1, \ldots, x_{n_i} \rangle | \mathbb{A} \models \Psi_i^+(x_1, \ldots, x_{n_i})\}$,

3. множества, определяемые формулами E^+ и E^-, не пересекаются и дают в объединении все $(S^*)^2$,

4. множества, определяемые формулами Ψ_i^+ и Ψ_i^+, не пересекаются и дают в объединении все $(S^*)^{n_i}$,

5. $\mathfrak{A}^*/\eta \cong \mathfrak{A}$.

Такая определимость аналогична понятию конструктивизируемой системы в следующем смысле: при $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\varnothing)$ получаем структуру, имеющую вычислимую изоморфную копию.

В дальнейшем данный подход разрабатывался многими авторами. Целый пласт работ, посвящённых этой тематике, можно найти у И., Ш., Калимуллина [10], А., С., Морозова [16], А., В., Роминой [35], А., И., Стукачёва [39–46], В., Г., Пузаренко [29–34], А., Н, Хисамиева [47]. В частности, большой интерес авторов вызывает уточнение понятия сводимости одних допустимых множеств к другим. Авторы [10, 11, 17, 27, 32, 39, 45] вводят различные понятия Σ-сводимости, допускающие сохранение тех или иных свойств допустимых множеств. Рассматриваются также вопросы непредставимости [23, 24], изучаются теоретико-решёточные свойства сводимости [40–42, 48].

Также исследовались вопросы существования $\Sigma-$представлений структур над наследственно конечными надстройками над упорядоченным полем вещественных чисел, полем комплексных чисел, проблемы характеризации всех $\Sigma-$представлений для заданной структуры в заданном допустимом множестве (см. работы [18–22, 26, 57]).

Особо стоит выделить вопросы, связанные с определимостью в надстройках над вещественными числами. Действительные числа являются одним из наиболее естественных и значимых объектов для изучения обобщенной вычислимости.

Исследование теоретико-модельных свойств алгебраических структур, и, в частности, полей, начались более восемьдесяти лет назад. Ещё А. Тарский [77] исследовал теорию поля действительных чисел, подняв вопрос разрешимости известных структур, таких, как поле действительных и поле комплексных чисел. Доказательство Тарского элиминации кванторов в поле действительных чисел положило начало исследованиям и других свойств этой структуры. Рассматривались способы формализации вычислений на действительных числах, а также вычислимость второго поядка над действительными числами [60–62]. С. В. Селиванова и В. Л. Селиванов изучали возможности применения методов численного анализа для доказательства вычислимости, в частности, некоторых систем уравнений в частных производных с вычислимыми действительными коэффициентами [72–74].

$\Sigma-$определимость вещественнозначных функций над такой формализацией действительных чисел изучалась М. В. Коровиной [12, 13]. В [12, 59] также дана характеризация функций, $\Sigma-$определимых в наследственно конечной списочной надстройке над полем вещественных чисел.

С другой стороны, из работ данного автора следует, что теория $\Sigma-$определимости над полем действительных чисел получается недостаточно выразительной (см. [12,14]), позволяя представить вычислимым образом только "кусочно-алгебраические"функции.

В силу такой ограниченности выразительных возможностей этой структуры перспективным с точки зрения развития теории обобщённой вычислимости представляется переход к рассмотрению моделей, расширенных дополнительными функциями, не $\Sigma-$определимыми в исходной структуре, например, функцией экспоненты. Теоретико-модельное поведение полей действительных и комплексных чисел с экспоненциальной функцией в настоящее время активно изучается, например, ему посвящены работы [64, 71, 78]. Использование таких моделей в рамках теории $\Sigma-$определимости позволяет существенно расширить получаемые классы $\Sigma-$определимых функций и множеств.

Наработки $\Sigma-$определимости в наследственно конечной надстройке и теория $\Sigma-$определимости для списочных надстроек над полем действительных чисел входят в целый ряд моделей вычислимости, представленных различными авторами для обобщения понятия вычислимости на действительные числа. В отличие от классической теории вычислимости на натуральных числах, существующие различные подходы к определению вычислимости на несчётных множествах не эквивалентны, и до сих пор не представляется возможным выделить единственный подход, который наиболее естественным образом обобщал бы понятия классической теории вычислимости. С этой точки зрения представляется важным исследовать ограничения, заложенные в ту или иную модель вычислимости, взаимосвязи этих моделей.

Широкую известность получил подход к заданию вычислимости над вещественными числами, предложенный К. Вайраухом, – вычислимый анализ [79]. Данный подход основан на аппроксимации действительных чисел сходящимися к ним вычислимыми рациональными последовательностями. Вычислимость функции задаётся возможностью выдать по заданной аппроксимации аргумента аппроксимацию её значения с произвольной точностью. Этот способ, однако, также не лишён недостатков: так, например, мы не можем аппроксимировать таким образом функции, имеющие разрыв в какой-либо точке. Более подробно модель вычислимости действительных функций по Вайрауху рассмотрена в параграфе 1.3 диссертации.

Другой подход использует Р. Миллер [66]. Он рассматривает так называемые локально вычислимые структуры, для определения которых вводит понятие вычислимого покрытия, которое представляет собой вычислимое семейство вычислимых конечнопорожденных структур, связанных между собой системой гомоморфизмов и изоморфных конечнопорожденным подструктурам исходной структуры.

Я. Московакис [67–69] , в свою очередь, строит модель вычислимости, основанную на списках элементов заданной модели. Московакис вводит аналог класса примитивно-рекурсивных функций над такими списками с помощью имитации натурального ряда, составленной из кортежей любой конечной длины. Функции этого класса задаются своими индексами, которые кодируются в списки индуктивным образом.

Также среди известных подходов к обобщенной вычислимости стоит выделить предложенный И.В. Ашаевым, В.Я. Беляевым и А.Г. Мясниковым [2, 25]. В данном подходе роль вычислительного устройства над некоторой структурой выполняют BSS-машины, работающие на списочной надстройке над этой структурой.

Другим интересным аспектом исследования формальной теории линейных списков является теоретико-вычислимая сложность её моделей. Аксиоматическая теория для линейных списков была введена в работе Мура и Рассела [81]. Пример модели такой теории можно задать следующим образом. Предположим, что A — непустое множество. Тогда *списочной надстройкой* $LS(A)$ над A называется двусортная структура, содержащая в качестве первого сорта элементы из A, которые здесь называются атомами, а в качестве второго — конечные линейные списки атомов A. Язык $LS(A)$ состоит из двух символов:

1. константы nil, интерпретируемой как пустой список, и

2. функционального символа $cons$ сорта $\texttt{список} \times \texttt{атом} \to \texttt{список}$, интерпретируемого как присоединение атома к списку.

Заметим, что такая структура может рассматриваться как ограничение наследственно конечной списочной надстройки $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$: основное множество $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ ограничивается на элементы первого ранга (списки, содержащие только атомы), а язык надстройки обедняется до двух символов. Таким образом, эта структура также может служить основой модели вычислимости семантического программирования, при таком подходе программы также представляются Σ-формулами в подходящем языке.

С. С. Гончаров [4] разработал обобщение теории из [81], введя аксиоматическую теорию списков над заданным абстрактным типом данных. При таком подходе тип данных определяется некоторой теорией первого порядка T. Тогда модель теории С. С. Гончарова может быть задана как списочная надстройка $LS(\mathcal{A})$, где в качестве $\mathcal{A}$ вместо множества берётся модель теории T.

В мотивации к изучению списочных надстроек можно выделить два аспекта. Во-первых, такие надстройки представляют собой естественный тип данных. Более того, они тесно связаны с понятием семантического программирования, (см. [6, 55, 56]).

Второй аспект связан с теорией структур, представимых конечными автоматами. Идея использования автоматов для исследования проблем разрешимости алгебраических структур восходит к Бюхи [82] и Рабину [83]. Систематическое изучение автоматных структур (т.е. структур, представимых с помощью автомата) было начато Хусаиновым и Нероудом [84]. Дальнейшие сведения по теории автоматных структур могут быть найдены, например, в обзорах [85–88]. Использование автоматных представлений позволяет получать более сильные результаты в вопросах разрешимости: в частности, для любой автоматной структуры её теория первого порядка, расширенная квантором $\exists^\infty$ («существует бесконечно много»), разрешима [89, следствие 3.12].

В [90] Н. А. Баженовым были начаты исследования автоматных представлений для списочных надстроек. В частности, было доказано, что для произвольного множества A обогащённая списочная надстройка $ELS(A)$ (определение надстройки приведено в параграфе 1.5) имеет автоматную копию тогда и только тогда, когда A конечно. Отметим, что данный результат можно интерпретировать следующим образом: для произвольного конечного множества A теория первого порядка $ELS(A)$, расширенная квантором $\exists^\infty$, разрешима.

Цели и задачи исследования. Целями настоящей работы являются:

I. Изучение взаимосвязи наследственно конечных и списочных надстроек в отношении Σ-определимости.

II. Исследование свойств Σ-определимости в наследственно конечных и списочных надстройках над расширениями поля действительных чисел.

III. Изучение теоретико-вычислимой сложности различных структур, основанных на списочном типе данных.

В качестве основных задач данного исследования можно выделить следующие:

1. Получение теоремы об униформизации для наследственно конечных списочных надстроек над расширениями поля вещественных чисел.

2. Изучение Σ-представимости наследственно конечной и списочной надстройки над произвольной моделью друг в друге.

3. Построение примера вычислимой по Вайрауху функции, не Σ-определимой в наследственно конечной надстройке над расширениями $\mathbb{R}$ с разрешимой элементарной теорией.

4. Исследование сохранения разрешимости элементарной теории при переходе от структуры к её обогащённой списочной надстройке.

5. Получение критерия автоматной представимости списочной надстройки $LS(\mathcal{M})$ над произвольной структурой.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Получена теорема об униформизации для наследственно конечной списочной надстройки над полем вещественных чисел с экспонентой, а также над расширениями поля вещественных чисел пфаффовыми функциями [102, 103].

2. Доказано, что наследственно конечная и списочная надстройки над произвольной моделью Σ-определимы друг в друге, а множества их Σ-отношений над этой моделью совпадают [104].

3. Построена вычислимая по Вайрауху функция, не Σ-определимая в наследственно конечной надстройке ни над каким расширением $\mathbb{R}$ с разрешимой теорией [105].

4. Показано, что переход от структуры $\mathcal{M}$ к $ELS(\mathcal{M})$ не всегда сохраняет разрешимость элементарной теории, а также, что для любого непустого не более чем счётного множества S теория структуры $ELS(ELS(S))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка [106].

5. Показано, что $LS(\mathcal{M})$ допускает представление конечным автоматом в том и только в том случае, когда $\mathcal{M}$ — конечная структура [106].

Основные результаты 4, 5 получены в неразделимом соавторстве с Н. А. Баженовым при равном участии обеих сторон, остальные основные результаты получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер, её результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях по теории Σ-определимости в допустимых множествах. Материалы диссертации также могут быть использованы при разработке спецкурсов по теории обобщённой вычислимости, написании учебных пособий и монографий.

Методология и методы исследований. В работе используются методы математической логики и теории вычислимости.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады на следующих международных конференциях: МНСК «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2012 г.), «Continuity, Computability, Constructivity – From Logic to Algorithms» (Любляна, Словения, 2014 г.), «Logic Colloquium» (Вена, Австрия, 2014 г.; Хельсинки, Финляндия, 2015 г.; Лидс, Англия, 2016 г.; Стокгольм, Швеция, 2017 г.; Удине, Италия, 2018 г.), Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на совместных семинарах ИМ СО РАН и НГУ «Теория вычислимости» и «Алгебра и логика».

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [102]–[117], из них [102]– [106] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Работы [106, 114, 115] написаны совместно с Н. А. Баженовым при равном участии обеих сторон.

Структура и объём диссертации. Диссертация состорит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 117 наименований. Объём диссертации - 81 страница.

Обзор содержания диссертации.

В **Главе 1** приведены необходимые предварительные сведения. В **параграфе 1.1** даны предварительные сведения по теории допустимых множеств. Вводятся понятия Δ_0- и $\Sigma-$формул. Приводятся аксиомы теории Крипке и Платека с праэлементами (KPU), даётся определение допустимого множества.

В **параграфе 1.2** даётся информация о Σ-определимости в наследственно конечных надстройках. Приводится определение наследственно конечной надстройки, наследственно конечной списочной надстройки. Вводятся понятия Σ-определимой функции и Σ-предиката. Для Σ-определимых функций приводится определение универсальной функции и общий вид теоремы об униформизации, являющиеся ключевыми для результатов параграфа 3.1.

Также в параграфе 1.2 приводится одна из версий известного [3, 8, 57] результата о разложении $\Sigma-$формул наследственно конечной надстройки в вычислимую дизъюнкцию $\exists-$формул.

Следуя монографии [8], вводится понятие Σ-определимости (Σ-представимости) структуры в допустимом множестве.

В **параграфе 1.3** даны необходимые определения и известные факты вычислимого анализа. Следуя работе [79], описывается модель вычислимости над вещественными числами вычислимого анализа. Вводится понятие представления действительного числа с помощью рациональной аппроксимации. Формулируется определение вычислимой (по Вайрауху) вещественной функции.

В **параграфе 1.4** приводятся предварительные сведения о списочных надстройках конечных рангов, в частности, списочной надстройке $LS(M)$ и обогащённой списочной надстройке $ELS(M)$. Следуя работе [91], вводятся понятия бесконечных формул и вычислимых бесконечных формул языка L для счётного ординала α. Приводится определение разрешимой структуры. Следуя [4, 90], вводятся необходимые понятия для работы со списками, приводится предложение [4] о разрешимости элементарной теории списочной надстройки $LS(\mathcal{M})$ структуры $\mathcal{M}$ с разрешимой теорией.

Вводится понятие Ψ-расширенно-списочной надстройки, также даны некоторые примеры такой надстройки. Описывается метод итерации структуры из [94], приводятся некоторые результаты о разрешимости элементарной теории базовой и полной итераций структур.

В **параграфе 1.5** содержатся необходимые предварительные сведения об автоматных структурах. Следуя [96], вводятся понятия конечного и древесного автомата, автоматной и древесно-автоматной структуры. Также здесь приводится результат [84, 89], из которого следует, что любая автоматная (древесно-автоматная) структура разрешима.

Глава 2 посвящена изучению Σ-определимости наследственно конечных и списочных надстроек. В рамках этой тематики в **параграфе 2.1** исследуется взаимная Σ-представимость наследственно конечной и списочной надстроек над заданной произвольной структурой.

Основным результатом этого раздела являются следующие теоремы, связывающие наследственно конечную надстройку над произвольной структурой с соответствующей наследственно конечной списочной надстройкой:

Теорема 2.1.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная структура. Наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$представима в наследственно конечной списочной надстройке $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ без параметров.*

Теорема 2.1.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная структура. Наследственно конечная списочная надстройка $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$представима в наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ без параметров и с тривиальной эквивалентностью η.*

Глава 3 посвящена исследованию свойств Σ-определимости в наследственно конечных и списочных надстройках над расширениями поля действительных чисел.

В **параграфе 3.1** изучаются дескриптивные свойства наследственно конечной списочной надстройки над полем действительных чисел с экспонентой. В параграфе получены теоремы об униформизации для наследственно конечных списочных надстроек над полем действительных чисел с экспонентой и решширениями поля действительных чисел функциями Пфаффа:

Теорема 3.1.1. *Для любого $\Sigma-$определимого в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ предиката $P \subseteq R^n \times R$ существует n-местная $\Sigma-$определимая функция с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ и графиком $\Gamma_f \subseteq P$.*

Другими словами, для класса $\Sigma-$определимых в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ предикатов выполняется свойство униформизации.

Теорема 3.1.2. *Для любого $\Sigma-$определимого в $\mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp})$ предиката $P \subseteq \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp}) \times \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp})$ существует n-местная $\Sigma-$определимая функция f с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ и графиком $\Gamma_f \subseteq P$.*

Следствие 3.1.2. *Пусть f – функция Пфаффа. Для любого $\Sigma-$определимого в $HW(\mathbb{R}_f)$ предиката $P \subseteq HW(\mathbb{R}_f) \times HW(\mathbb{R}_f)$ существует n-местная $\Sigma-$определимая функция g с областью определения $dom(g) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ и графиком $\Gamma_g \subseteq P$.*

Как следствие теоремы 3.1.1 получено существование универсальной функции для $\Sigma-$функций $HW(\mathbb{R}_{exp})$:

Следствие 3.1.1. *Существует $\Sigma-$определимая универсальная частичная функция для класса $\Sigma-$определимых в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.*

В **параграфе 3.2** проведено исследование выразительной силы $\Sigma-$определимости над расширениями поля вещественных чисел относительно вычислимого анализа.

В качестве основного результата этого параграфа можно выделить следующую теорему о существовании вещественнозначной функции, вычислимой по Вайрауху, но не $\Sigma-$определимой в наследственно конечных надстройках над расширениями поля действительных чисел, обладающими разрешимой элементарной теорией:

Теорема 3.2.1. *Для любого расширения упорядоченного поля вещественных чисел $\mathbb{R}^*$ с разрешимой теорией существует всюду определённая вычислимая функция $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не определимая в $\mathbb{HF}(\mathbb{R}^*)$ никакой $\Sigma-$формулой.*

В **Главе 4** исследуются свойства и алгоритмическая сложность списочной надстройки $LS(M)$ и расширенной списочной надстройки $ELS(M)$.

В **параграфе 4.1** построена разрешимая структура эквивалентности $\mathcal{E}$, такая что *стандартное представление* структуры $ELS(\mathcal{E})$ не является разрешимым.

Теорема 4.1.1. *Предположим, что* $\mathcal{A}$ *— структура эквивалентности с вычислимым неограниченным характером и бесконечным числом бесконечных классов. Тогда существует* $\mathcal{B}$ *— разрешимая копия структуры* $\mathcal{A}$*, такая, что стандартное представление расширенно-списочной надстройки* $\{\in\}$-$S(\mathcal{B})$ *неразрешимо.*

В качестве следствия этой теоремы получен тот факт, что стандартное представление обогащённой списочной надстройки $ELS(\mathcal{B})$ также неразрешимо.

Также в этом разделе получен результат, из которого следует существование разрешимой структуры, такой, что её обогащённая списочная надстройка не имеет разрешимых копий:

Теорема 4.1.2. *Пусть* $\mathcal{M} = (\omega; +)$ *— это коммутативный моноид натуральных чисел относительно сложения. Тогда элементарная теория* $ELS(\mathcal{M})$ *неразрешима.*

Следствие 4.1.1. *Расширенно-списочная структура* $\{head, tail, \sqsubseteq\}$-$S(\omega, +)$ *не имеет разрешимых копий. В частности, она не может быть представлена с помощью конечного или древесного автомата.*

Таким образом, переход от структуры $\mathcal{M}$ к $ELS(\mathcal{M})$ не всегда сохраняет разрешимость элементарной теории.

Более того, доказано, что для любого непустого не более чем счётного множества S теория структуры $ELS(ELS(S))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка:

Теорема 4.1.3. *Предположим, что* A *— непустое не более чем счётное множество. Тогда элементарная теория структуры* $ELS^2(A)$ *вычислимо изоморфна арифметике первого порядка.*

Следствие 4.1.3. *Пусть* $\mathcal{M}$ *—* L*-структура, имеющая арифметическую атомарную диаграмму* $D(\mathcal{M})$*, т.е.* $D(\mathcal{M}) \leq_T \emptyset^{(n)}$ *для некоторого* $n \in \omega$*. Тогда элементарная теория структуры* $ELS^2(\mathcal{M})$ *вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. В частности,* $ELS^2(\mathcal{M})$ *не представима с помощью конечного или древесного автомата.*

В **параграфе 4.2** исследуется алгоритмическая сложность списочной и обогащённой списочной надстроек относительно конечных и древесных автоматов. Получены необходимые и достаточные условия для автоматной представимости надстройки $LS(\mathcal{M})$:

Теорема 4.2.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — структура конечного языка. Тогда списочная надстройка $LS(\mathcal{M})$ имеет автоматное представление в том и только том случае, когда $\mathcal{M}$ конечна.*

Также в параграфе приведены примеры автоматных структур, таких, что их списочные надстройки не могут быть представлены с помощью древесных автоматов:

Предложение 4.2.1. *Пусть α — ординал, такой, что $\alpha \geq \omega^\omega$. Тогда структура $ELS(\alpha)$ не имеет древесно-автоматных представлений.*

Все доказанные в главе 4 результаты получены в неразделимом соавторстве с Н. А. Баженовым при равном участии обеих сторон. Результаты глав 2 и 3 получены автором самостоятельно.

В **заключении** изложены итоги проведённого исследования.

Изложение работы заканчивается списком литературы.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю академику РАН Сергею Савостьяновичу Гончарову за постановку задач, поддержку в работе и живой интерес к исследованиям автора.

1. Предварительные сведения

1.1. Теория допустимых множеств

Обширные сведения и подробное изложение основных результатов по теории допустимых множеств можно найти в работе [53], также интересные результаты по данной тематике содержатся в монографии [8] и обзоре [57]. Здесь приведём только некоторые определения и результаты в кратком виде.

Важную роль для теории допустимых множеств Крипке и Платека с праэлементами (KPU) играют понятия Δ_0-формул и $\Sigma-$формул Леви [63]. Понятие $\Sigma-$формулы и его свойства также являются основой идеи использования $\Sigma-$определимости как модели вычислимости.

Определение 1.1.1. Класс Δ_0-формул языка $L(\in, ...)$ (сигнатуры σ, содержащей символ $\in$) – это наименьший класс Y, содержащий атомарные формулы $L(\in, ...)$ и замкнутый следующим образом:

(i) если $\varphi \in Y$, тогда и $\neg\varphi$;

(ii) если $\varphi, \psi \in Y$, тогда и $(\varphi \vee \varphi)$ и $(\varphi \& \psi)$ лежат в Y;

(iii) если $\varphi \in Y$, тогда и $\forall u \in x\varphi$ и $\exists u \in x\varphi$ для всех переменных u и x принадлежат Y.

Определение 1.1.2. Класс $\Sigma-$формул языка $L(\in, ...)$ – это наименьший класс, содержащий Δ_0-формулы и замкнутый относительно логических операций из (ii) и (iii), а также навешивания квантора $\exists u$.

Для полноты изложения приведём аксиомы теории Крипке и Платека с праэлементами (KPU). Считаем зафиксированным язык $L(\in, U, ...)$, содержащий символ $\in$, который будет интерпретироваться как отношение принадлежности, и символ U, выделяющий праэлементы.

- Экстенсиональность: $\forall x \forall y((\neg U(x) \& \neg U(y)) \to (\forall z((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)) \to (x \approx y)))$
- Аксиома пары: $\forall x \forall y \exists z((x \in z) \& (y \in z))$
- Аксиома объединения: $\forall x \exists y(\neg U(y) \& \forall z \forall w(((z \in x) \& (w \in z)) \to (w \in y)))$

- Аксиома праэлементов: $\forall x(U(x) \to \forall y \neg(y \in x))$

- Аксиома пустого множества: $\exists x(\neg U(x) \& \forall y \neg(y \in x))$

- Схема аксиом фундированности: $\forall \overline{z}(\exists x \varphi(x, \overline{z}) \to \exists x(\varphi(x, \overline{z}) \& \forall y((y \in x) \to \neg \varphi(y, \overline{z}))))$, для всех формул φ, где y не входит свободно в φ, z состоит из всех свободных переменных φ, отличных от x.

- Схема аксиом Δ_0-выделения: $\forall \overline{z} \forall x(\neg U(x) \to \exists y(\neg U(y) \& \forall w((w \in y) \leftrightarrow ((w \in x) \& \varphi(w, \overline{z})))))$, для всех Δ_0-формул φ, где y не входит свободно в φ, z состоит из всех свободных переменных φ, отличных от w.

- Схема аксиом Δ_0-выборки: $\forall \overline{z} \forall x(\neg U(x) \to ((\forall w \in x) \exists y \varphi(w, y, \overline{z}) \to \exists u(\forall w \in x)(\exists y \in u) \varphi(w, y, \overline{z})))$, для всех Δ_0-формул φ, где y не входит свободно в φ, z состоит из всех свободных переменных φ, отличных от w и y.

Заметим, что приведённые выше аксиомы KPU отличаются от аксиом теории ZFC отсутствием аксиом бесконечности, аксиомы множества подмножеств и аксиомы выбора, а также тем, что аксиомы выборки и выделения ограничены Δ_0-формулами.

Элементы x любой KPU-модели A разбиваются на два непересекающихся класса: те, для которых истинно $U(x)$ и те, для которых $U(x)$ ложно. При этом элементы, для которых выполняется $U(x)$, принято называть праэлементами, другие – множествами.

Множество праэлементов может рассматриваться как алгебраическая система с заданными только на множестве праэлементов операциями и отношениями. Таким образом мы приходим к понятию допустимого множества над заданной структурой:

Определение 1.1.3. Пусть даны язык $L^* = L(\in, ...)$ и структура $\mathfrak{M}$ языка L. Допустимым множеством над $\mathfrak{M}$ называют модель $\mathfrak{A}_M$ теории KPU вида $\mathfrak{A}_M = \langle M, A, \in, ... \rangle$ где $M \cup A$ транзитивно в универсуме множеств с праэлементами $\mathbb{V}_M$ над M, и символ $\in$ интрепретируется как отношение принадлежности.

Для данной работны основной интерес представляет особый класс допустимых множеств, называемых наследственно конечными надстройками. Связанные с ним основные понятия приведём в следующем параграфе.

1.2. Наследственно конечные надстройки и Σ-определимость

Пусть $\mathfrak{M}$ - структура предикатной сигнатуры σ, $\mathcal{P}_\omega(M)$ множество всех конечных подмножеств M. Основное множество наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ также можно определить индуктивно:

$$HF_0(M) = \{\varnothing\};$$

$$HF_{n+1}(M) = \mathcal{P}_\omega(HF_n(M) \cup M);$$

$$HF(M) = \bigcup_{n<\omega} HF_n(M),$$

Тогда наследственно конечной надстройкой над M называют следующую структуру, естественным образом определяемую на $HF(M) \cup M$. $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) = \langle HF(M) \cup M, \sigma' \rangle$ где $\sigma' = \sigma \cup \{\varnothing, \in^2, U^1\}$, где символ $\varnothing$ интерпретируется как пустое множество, $\in^2$ – отношение принадлежности, U^1 – предикат, выделяющий элементы множества M:

$$\varnothing^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = \varnothing \in HF_0(M);$$

$$\in^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} \subseteq (HF(M) \cup M) \times HF(M);$$

$$U^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = M.$$

Такая надстройка будет наименьшим по включению допустимым множеством над $\mathfrak{M}$ ($H_\omega(\mathfrak{M})$).

Структуру списочной надстройки над произвольной алгебраической системой определим следующим образом.

Если $\mathfrak{M}$ — структура сигнатуры σ, к ней добавляется списочная надстройка, носитель которой определяется индуктивно:

$S^0(M)$ – конечные линейные списки из элементов M,

$S^n(M)$ – конечные линейные списки из элементов $S^{n-1}(M) \cup M$,

$$S(M) = \bigcup_{n\in\omega} S^n(M).$$

Для работы со списками сигнатура модели списочной надстройки дополняется операциями и отношениями $head, tail, cons, nil, \in, \sqsubseteq$. Здесь nil означает $0-$местную функцию, имеющую значение пустого списка, а операции $head, tail, cons$ и отношения $\in, \sqsubseteq$ интерпретируются следующим образом:

$$head(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle) = \alpha_n; \ head(nil) = nil;$$

$$tail(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_{n+1} \rangle) = (\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle); \ tail(\langle \beta \rangle) = tail(nil) = nil;$$

$$cons(\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle, \beta) = (\langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n, \beta \rangle),$$

$$\beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle \iff \beta = \alpha_i, \text{ для некоторого } 1 \leq i \leq n.$$

$$\langle \beta_1, \beta_2, \ \ldots, \beta_m \rangle \sqsubseteq \langle \alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_n \rangle \iff m \leq n \text{ и } \beta_i = \alpha_i, \text{ для всех } 1 \leq i \leq m.$$

Таким образом, структура списочной надстройки имеет вид:

$$\mathbb{HW}(\mathfrak{M}) = \langle M, S(\mathfrak{M}), \sigma \cup \{head, tail, cons, nil, \in, \sqsubseteq\} \rangle.$$

Термы строятся из констант сигнатуры σ и переменных при помощи функциональных сигнатурных символов. Формулы строятся стандартным образом с использованием равенства, сигнатурных отношений $\in, \sqsubseteq$, кванторов $\exists, \forall$ и ограниченных кванторов $\exists x \in t, \forall x \in t, \exists x \sqsubseteq t, \forall x \sqsubseteq t$.

В качестве формальной теории такой структуры может рассматриваться теория списочных надстроек, аксиомы которой приведены в [6].

Определение 1.2.1. $\Sigma-$предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть предикат, представимый с помощью $\Sigma-$формулы.

Функцию $f(x)$ будем называть Σ-определимой функцией или $\Sigma-$функцией, если ее график является Σ-предикатом.

Определение 1.2.2. Функция $f(x)$ $\Sigma-$определима в $HW(\mathfrak{M})$, если существует $\Sigma-$формула $\Phi(x, y)$, такая, что $f(x) = y$ тогда, и только тогда, когда $HW(\mathfrak{M}) \models \Phi(x, y)$.

При изучении свойств $\Sigma-$определимости как вычислимости над различными структурами часто оказывается полезным следующее утверждение, которое впервые было сформулировано Р. Ю. Вайценавичюсом [3] (Краткое доказательство его также может быть найдено в [8]):

Предложение 1. *каждая $\Sigma-$формула $\varphi(\overline{x})$ сигнатуры σ_{HF} может быть эффективно представлена вычислимой дизъюнкцией $\bigvee\limits_{i \in \omega} \varphi_i(\overline{x})$ $\exists-$формул сигнатуры σ, так, что для любых $\overline{a} \in \mathfrak{M}$ выполняется $\mathfrak{M} \models \bigvee\limits_{i \in \omega} \varphi_i(\overline{a}) \ \Leftrightarrow \ \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi(\overline{a})$.*

В более общей форме этот факт был представлен в виде предложения и следствия в [57]:

Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— модель конечной сигнатуры* σ*. Для любой* $\Sigma-$*формулы* $\Phi(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$ *и* $n \in \omega$ *можно эффективно найти* $\exists$*-формулу сигнатуры* σ $\phi_n(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$*, такую, что* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \upharpoonright B_n \models \Phi(m_0, m_1, \ldots, m_{k-1})$ *тогда, и только тогда, когда* $\mathfrak{M} \models \phi_n(m_0, m_1, \ldots, m_{k-1})$ *для любых* $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1} \in M$*.*

Следствие 1. *Для любой* $\Sigma-$*формулы* $\Phi(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$ *можно эффективно найти семейство* $\{\phi_n(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})\}_{n\in\omega}$ $\exists$*-формул сигнатуры* σ*, таких, что для любых* $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1} \in M$ $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(m_0, m_1, \ldots, m_{k-1})$ *тогда, и только тогда, когда* $\mathfrak{M} \models \bigvee\limits_{n\in\omega} \phi_n(m_0, m_1, \ldots, m_{k-1})$*.*

В классической теории вычислимости важную роль играет понятие вычислимой (конструктивизируемой) структуры. При переходе от понятия вычислимости к $\Sigma-$определимости в допустимых множествах естественным образом возникают и аналоги понятия вычислимой структуры. Следующее определение $\Sigma-$определимости структуры над допустимым множеством введено Ю. Л. Ершовым в [8] в качестве такого аналога.

Определение 1.2.3. Алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A; P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}\rangle$ называется $\Sigma-$определимой в допустимом множестве $\mathbb{A}$, если существуют следующие $\Sigma-$формулы (с параметрами в $\mathbb{A}$): $S(x)$, $E^+(x, y)$, $E^-(x, y)$, $\Psi_i^+(x_1, \ldots, x_{n_i})$, $\Psi_i^-(x_1, \ldots, x_{n_i})$, $i = 0, \ldots, k$, такие, что

1. $S^* = \{x \in \mathbb{A} | \mathbb{A} \models S(x)\} \neq \varnothing$,
2. формула $E^+(x, y)$ определяет отношение конгруэнтности η на модели $\mathfrak{A}^* = \langle S^*; P_0^*, \ldots, P_k^*\rangle$, где $P_i^* = \{\langle x_1, \ldots, x_{n_i}\rangle | \mathbb{A} \models \Psi_i^+(x_1, \ldots, x_{n_i})\}$,
3. множества, определяемые формулами E^+ и E^-, не пересекаются и дают в объединении все $(S^*)^2$,
4. множества, определяемые формулами Ψ_i^+ и Ψ_i^+, не пересекаются и дают в объединении все $(S^*)^{n_i}$,
5. $\mathfrak{A}^*/\eta \cong \mathfrak{A}$.

А. С. Морозов [22], в свою очередь, для различения моделей, непосредственно $\Sigma-$определимых в допустимом множестве и их изоморфных копий, ввёл понятие $\Sigma-$представимости. В отличие от оригинального определения, он называет $\Sigma-$определимыми только сами модели, определимые в допустимом множестве, а модели, которые изоморфны таким моделям – $\Sigma-$представимыми. Следуя этому уточнению, мы будем пользоваться понятиями $\Sigma-$определимости и $\Sigma-$представимости аналогично.

Более подробное изложение известных результатов о $\Sigma-$определимости в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ можно найти, например, в [8], об $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ – в [6].

Следующие определения потребуются нам для описания результатов, относящихся к проблеме униформизации.

Определение 1.2.4. $\Sigma-$определимая $n+1$-местная функция F называется универсальной функцией для некоторого класса n-местных функций, если для любого параметра y функция $F(y,\overline{x})$ принадлежит этому классу и для любой функции f из этого класса найдётся y, такое, что $F(y,\overline{x}) = f(\overline{x})$.

Определение 1.2.5. Говорят, что в алгебраической системе верна теорема об униформизации, если для любого $\Sigma-$определимого в ней двуместного предиката существует одноместная $\Sigma-$определимая частичная функция с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x,y)\}$ такая, что её график $\Gamma_f \subseteq P$.

Определение 1.2.6. Пусть P — подмножество декартова произведения $X \times Y$. Будем говорить, что P' униформизует P, если $P' \subseteq P$ и P' является графиком функции с областью определения $\{x : \exists y P(x,y)\}$

Определение 1.2.7. Будем говорить, что класс G обладает свойством униформизации, если любое P из G может быть униформизовано некоторым P' из G.

Символом $\mathbb{R}$ будем обозначать структуру упорядоченного поля действительных чисел $\mathbb{R} = \langle R, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$. Функция $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таким образом, будет Σ-определимой в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, если существует Σ-формула $\Phi(x,y)$, такая, что $\mathbb{HF}(\mathbb{R}) \models \Phi(x,y) \Leftrightarrow f(x) = y$.

Будем обозначать $\mathbb{R}_{exp}$ алгебраическую систему $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, exp(x), <, 0, 1 \rangle$, где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел; операции $+, \cdot$, отношение $<$ и константы $0, 1$ интерпретируются обычным образом, $exp(x)$ — экспоненциальная функция.

В главе 3 будут исследоваться, в частности, свойства $\Sigma-$определимости в модели $HW(\mathbb{R}_{exp})$ как вычислимости над действительными числами.

Замечание 1.2.1. Заметим также, что, аналогично $HF(\mathfrak{M})$, в списочной надстройке $HW(\mathfrak{M})$ существует универсальный $\Sigma-$предикат.

1.3. Вычислимый анализ

В данном разделе приведем некоторые определения и те известные факты вычислимого анализа, которые понадобятся нам в дальнейшем в параграфе 3.2.

Определение 1.3.1. Функция $f :\subseteq R^n \to R$ называется вычислимой, если существует машина тьюринга с оракулом, которая для заданного $k \in \mathbb{N}$ может запрашивать аппроксимацию произвольной точности для входа $x \in dom(f)$; т. е., может запрашивать конечное число кортежей вида $p \in \mathbb{Q}^n$ рациональных чисел с $d(x,p) < 2^{-i}$, где значение i может зависеть от ответов на предыдущие вопросы, и после конечного числа шагов машина выдает рациональное число q на выходной ленте с точностью $|f(x) - q| < 2^{-k}$.

Здесь предполагается, что точность входа i записана в двоичной форме на специальной ленте оракула, машина входит в специальное оракульное состояние запроса, а затем ответ записывается за один шаг на оракульной ленте. Таким образом, требуется, чтобы вход $x \in \mathbb{R}^n$ был задан машине с помощью последовательности рациональных аппроксимаций, которые машина затем может запрашивать на определенных шагах работы.

В качестве кодирования рациональной аппроксимации числа вводится понятие имени действительного числа в некотором алфавите.

Определение 1.3.2. Представлением множества X будем называть сюрьективную функцию $\delta :\subseteq \Sigma^\omega \to X$, где Σ – некоторый алфавит. Для произвольного $x \in X$ и любого $p \in \Sigma^\omega$ с $\delta(p) = x$, последовательность p называется δ-именем x.

Для работы с такой моделью вычислимости удобно зафиксировать некоторое конкретное представление действительных чисел и пользоваться им в дальнейшем.

Определение 1.3.3. Представлением Коши $\rho_C :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$ действительного числа называется представление, где действительное число x задано с помощью бесконечной последовательности символов, кодирующей быстро сходящуюся к x последовательность рациональных чисел:

$\rho_C(w_1\#w_2\#\dots) = x; \Leftrightarrow \ |x - \nu_{\mathbb{Q}}(w_i)| < 2^{-i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, где $\nu_{\mathbb{Q}}(w_i) \in \mathbb{Q}$ – число с кодом w_i.

Здесь считаем, что алфавит Σ содержит символы $0, 1, \#$. Заметим, однако, что представление Коши является не единственным допустимым представлением для действительных чисел, и в каждом конкретном случае выбор представления определяется соображениями удобства.

Автор [79] приводит так же слегка измененную модель вычислимости: предполагаем, что на вход машине через выделенную входную ленту подаётся быстро сходящаяся рациональная последовательность с пределом x, заданная в некотором алфавите, а на выходе вместо рациональной аппроксимации к $f(x)$ точности 2^{-k} для заданного $k \in \mathbb{N}$ машина выдает быстро сходящуюся рациональную последовательность с пределом $f(x)$.

Определение 1.3.4. Пусть Σ - алфавит. Функция $F :\subseteq \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega$ вычислима, если существует машина Тьюринга, которая, получая последовательность $p \in dom(F)$ на входной ленте, на выходной ленте выписывает последовательность $F(p)$ символ за символом, никогда не останавливаясь, а при входе $p \notin dom(F)$ записывает не более конечного числа символов на выходной ленте.

Определение 1.3.5. Функция $f :\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется вычислимой, если существует вычислимая функция $F :\subseteq \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega$ и представление $\rho_C :\subseteq \Sigma^\omega \to \mathbb{R}$, такие, что для любого ρ_C-имени p некоторого $x \in dom(f)$ значение $F(p)$ является ρ_C-именем значения функции $f(x)$.

Заметим, что при таком подходе понятие вычислимости не меняется, а вход и выход имеют один и тот же вид (быстро сходящиеся рациональные последовательности) [79].

Для более подробного изучения теории вычислимого анализа читатель может обратиться к [79].

1.4. Списочные надстройки

В данном параграфе приведём предварительные сведения о списочных надстройках $LS(\mathcal{M})$ и $ELS(\mathcal{M})$, рассматриваемых в глав 4. В качестве основного множества в этих структурах выступают элементы $\mathcal{M}$ (которые называются в данном случае атомами) и конечные линейные списки атомов.

Этот подход также предполагает использование теории списочных расширений GES. Типичной моделью GES является наследственно конечная списочная надстройка $\mathbb{HW}(\mathcal{M})$. $LS(\mathcal{M})$ и $ELS(\mathcal{M})$ таким образом, могут быть представлены как ограничение $\mathbb{HW}(\mathcal{M})$ на списки первого уровня; $LS(\mathcal{M})$ также имеет органичение по языку.

Языки и структуры, рассматриваемые в главе 4, предполагаются вычислимыми, с носителем, содержащимся в множестве натуральных чисел ω. Конечные формулы отождествляются с их гёделевскими номерами. Для множества A $card(A)$ обозначает мощность A. Если $\psi(x_1, \dots, x_n)$ — формула и $\mathcal{M}$ — некоторая структура, то $\psi[\mathcal{M}]$ обозначает множество всех кортежей $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$ из $\mathcal{M}$ таких, что $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

Для языка L *бесконечными формулами* языка L называются формулы логики $L_{\omega_1,\omega}$. Для счётного ординала α бесконечные Σ_α- и Π_α-формулы определяются стандартным образом (см. например, [91, гл. 6]). Приведём краткое неформальное описание класса *вычислимых бесконечных формул* языка L. Такие формулы допускают дизъюнкции и конъюнкции вычислимо перечислимых (в.п.) множеств формул. Пусть α — ненулевой вычислимый ординал.

1. Вычислимые Σ_0- и Π_0-формулы — это бескванторные формулы первого порядка языка L.

2. Вычислимая Σ_α-формула (Σ^c_α-формула) — это в.п. дизъюнкция $\bigvee\!\!\!\bigvee_i \exists \bar{u}_i \psi_i(\bar{x}, \bar{u}_i)$, где ψ_i — вычислимая Π_{β_i} формула для некоторого $\beta_i < \alpha$.

3. Вычислимая Π_α-формула (Π^c_α-формула) — это в.п. конъюнкция $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_i \forall \bar{u}_i \psi_i(\bar{x}, \bar{u}_i)$, где ψ_i — вычислимая Σ_{β_i} формула для некоторого $\beta_i < \alpha$.

Формальное определение вычислимых бесконечных формул, а также их свойства, можно найти в гл. 7 в [91].

Пусть $\mathcal{M}$ — L-структура. Через $Th(\mathcal{M})$ обозначается элементарная теория структуры $\mathcal{M}$. *Полная диаграмма* $\mathcal{M}$ — это множество

$$ED(\mathcal{M}) = \{\psi(\bar{a}) : \psi(\bar{x}) - L\text{-формула},\ \bar{a} \in \mathcal{M},\ \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})\}.$$

Структура $\mathcal{M}$ *разрешима*, если её полная диаграмма является вычислимым множеством. Отметим, что для разрешимой структуры её элементарная теория также является разрешимой.

Следуя [4, 90], напомним необходимые понятия для работы со списками.

Пусть $\mathcal{M}$ — структура языка L. Тогда *списочная надстройка* над $\mathcal{M}$ (обозначаемая через $LS(\mathcal{M})$) — это двусортная структура, первым сортом элементов которой является носитель структуры $\mathcal{M}$, вторым сортом — множество всех линейных списков атомов. Структура $LS(\mathcal{M})$ рассматривается в языке $L^{cons} := L \cup \{nil, cons\}$, где $nil, cons$ определяются аналогично соответствующим операциям в надстройке $HW(\mathfrak{M})$.

Рассмотрим это определение более подробно применительно к $LS(\mathcal{M})$:

- Предполагается, что $nil, cons \notin L$.
- Любой символ из L действует только на атомах: например, если f – бинарный функциональный символ из L, то предполагаем, что f принадлежит сорту $\texttt{атом} \times \texttt{атом} \to \texttt{атом}$. Более того, интерпретация f в $LS(\mathcal{M})$ совпадает с его интерпретацией в $\mathcal{M}$.
- Константа nil интерпретируется как пустой список. Символ $cons$ имеет сорт $\texttt{список} \times \texttt{атом} \to \texttt{список}$ и интерпретируется как присоединение атома к списку.

Будем использовать строчные буквы $x, y, z, \ldots$ для обозначения переменных сорта `атом`. Заглавными буквами $X, Y, Z, \ldots$ будем обозначать переменные сорта `список`. Далее будем предполагать, что пустой список nil одновременно принадлежит и тому, и другому сорту. Другими словами, в некоторых случаях удобно считать nil атомом.

Предположим, что T — теория первого порядка языка L. Следуя [4], определим двусортную теорию $LL(T)$. Аксиомами этой теории будут следующие предложения:

- все формулы из T (при этом считаем, что эти формулы содержат только переменные сорта `атом`);

- для каждой L^{cons}-формулы $\psi(X)$ предложение следующего вида

$$[\psi(nil)\,\&\,\forall X\forall y[\psi(X)\to\psi(cons(X,y))]]\to\forall X\psi(X);$$

- $\forall X\forall y[cons(X,y)\neq nil]$;

- $\forall X_1\forall X_2\forall y_1\forall y_2[cons(X_1,y_1)=cons(X_2,y_2)\to(X_1=X_2\,\&\,y_1=y_2)]$.

С. С. Гончаров [4, предложение 3] доказал следующее: если теория T полна, то $LL(T)$ также полна. Нетрудно показать, что условие $\mathcal{M}\models T$ влечёт за собой $LS(\mathcal{M})\models LL(T)$. Таким образом, надстройки $LS(\mathcal{M})$ можно рассматривать как стандартные модели $LL(T)$.

Предложение 3 ([4]). *Если элементарная теория структуры $\mathcal{M}$ разрешима, то теория $LS(\mathcal{M})$ также разрешима.*

Схема доказательства. Пусть T — это теория $\mathcal{M}$. Так как $LS(\mathcal{M})\models LL(T)$ и $LL(T)$ полна, то теория $LS(\mathcal{M})$ совпадает с $LL(T)$. Заметим, что $LL(T)$ рекурсивно аксиоматизируема и полна. Следовательно, $LL(T)$ разрешима. $\square$

Для L-структуры $\mathcal{M}$ определим *обогащённую списочную надстройку* $ELS(\mathcal{M})$ следующим образом. Языком надстройки будет $L^{enr}:=L^{cons}\cup\{head,tail,\in,\sqsubseteq\}$, где:

- Ограничение $ELS(\mathcal{M})$ на язык L^{cons} совпадает с $LS(\mathcal{M})$.

- Функциональный символ $head$ имеет сорт `список` $\to$ `атом`, и интерпретируется как взятие последнего элемента («головы») списка. Предполагаем, что $head(nil)=nil$. Отметим, что здесь полезно наше соглашение о том, что nil в некоторых случаях считается атомом.

- Символ $tail$ имеет сорт `список` $\to$ `список` и интерпретируется следующим образом: удаляется последний элемент списка и выдаётся оставшийся после удаления список («хвост»). Здесь опять считаем, что $tail(nil)=nil$. Заметим, что для непустого списка X всегда выполнено

$$cons(tail(X),head(X))=X.$$

- Символ $\in$ имеет сорт `атом` $\times$ `список`. Отношение $x\in Y$ выполнено в том и только том случае, если атом x принадлежит списку Y.

- Символ $\sqsubseteq$ имеет сорт `список` $\times$ `список`. Условие $X \sqsubseteq Y$ выполнено тогда и только тогда, когда список X является начальным сегментом списка Y.

Пример 1.1. Рассмотрим множество $S = \{0,1\}$. Можно рассматривать S как структуру пустого языка. Тогда $ELS(S)$ состоит из S и всех списков, содержащих только 0 и 1. В дальнейшем будем использовать *постфиксную запись* для представления $ELS(S)$: например, выполнены соотношения

$$cons(nil,0) = \langle 0\rangle, \quad cons(\langle 0\rangle,1) = \langle 0,1\rangle, \quad head(\langle 0,0,1\rangle) = 1,$$
$$tail(\langle 1,1,0\rangle) = \langle 1,1\rangle, \quad 0 \in \langle 0,0\rangle, \quad \langle 0,1\rangle \sqsubseteq \langle 0,1,1,0\rangle, \quad \langle 1,0\rangle \not\sqsubseteq \langle 0,1,1,0\rangle.$$

Обогащённая списочная надстройка была введена в [90]. Её определение также довольно естественным образом основано на идеях семантического программирования.

Отметим, что структура $ELS(\mathcal{M})$ есть *подструктура* $\mathbb{HW}(\mathcal{M})$. Заметим, что иногда язык наследственно конечной списочной надстройки включает в себя конкатенацию списков [55].

Понятия $LS(\mathcal{M})$ и $ELS(\mathcal{M})$ можно объединить, введя новый, более общий класс списочных надстроек:

Определение 1.4.1. Предположим, что $\mathcal{M}$ — L-структура и α — вычислимый ординал. Предположим также, что $\Psi = \{\psi_n(\bar{x}_n)\}_{n\in\omega}$ — это равномерно вычислимая последовательность Σ^c_α-формул языка L^{cons}. (Здесь равномерная вычислимость последовательности означает, что для заданного n можно вычислить некоторый Σ^c_α-индекс формулы ψ_n). Тогда Ψ-*расширенно-списочная надстройка* над $\mathcal{M}$ (обозначим её через Ψ-$S(\mathcal{M})$) — это двусортная структура в языке $L^\Psi := L \cup \{R_{\psi_n}\}_{n\in\omega}$, где R_{ψ_n} — новые символы, и выполняется:

- первый сорт элементов — атомы из $\mathcal{M}$, второй — списки, состоящие из атомов;
- каждый символ из L интерпретируется как действующий только на атомах;
- для каждого $n \in \omega$ отношение R_{ψ_n} интерпретируется как $\psi_n[LS(\mathcal{M})]$.

В случае, если $\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$, определение Ψ-расширенно-списочной надстройки повторяет приведённое выше, при этом не требуется равномерная вычислимость последовательности Ψ.

Отметим, что данное выше определение не зависит от выбора $\mathcal{M}$. Более того, для рассмотрения функциональных символов в языке Ψ-расширенно-списочных надстроек можно, как обычно, отождествлять функции с их графиками. В данной работе, однако, определение Ψ-$S(\mathcal{M})$ не будет использоваться в полном объёме, так как будут рассматриваться только конечные Ψ. В случаях, когда последовательность Ψ ясна из контекста, префикс Ψ- будет опускаться.

Пример 1.2. Списочная надстройка $LS(\mathcal{M})$ в контексте данного определения будет выглядеть как $\{nil, cons\}$-$S(\mathcal{M})$. Обогащённая списочная надстройка также будет расширенно-списочной надстройкой: например, отношения $\in$ и $\sqsubseteq$ могут быть заданы следующими Σ_2^c-формулами:

$$x \in Y \;\Leftrightarrow\; (Y \neq nil)\,\&\bigvee\!\!\!\bigvee_{k\geq 0} head(tail^k(Y)) = x;$$

$$X \sqsubseteq Y \;\Leftrightarrow\; \bigvee\!\!\!\bigvee_{k\geq 0}\ \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{m\geq 0} head(tail^m(X)) = head(tail^{k+m}(Y)).$$

Кроме того, можно определить операцию конкатенации двух списков:

$$conc(X,Y) = Z \;\Leftrightarrow\; [(X = Z)\&(Y = nil)] \vee \bigvee\!\!\!\bigvee_{k>0}\ \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{m\geq 0}\big[head(tail^m(X)) =$$
$$head(tail^{k+m}(Z))\,\&\,(tail^k(Y) = nil)\,\&\,(tail^{k-1}(Y) \neq nil)\,\&\,(tail^m(Y) \neq nil \to$$
$$head(tail^m(Y)) = head(tail^m(Z)))\big].$$

Отметим также, что известен подход [92–94], похожий на приведённый выше метод использования расширенно-списочных надстроек. Этот подход основан на понятии *итерации структуры*.

Рассмотрим (не обязательно конечный) алфавит Δ. Как обычно, Δ^* обозначает множество всех слов алфавита Δ. Если u и v — некоторые слова, то $u\widehat{\ }v$ обозначает конкатенацию u и v.

Пусть $\mathcal{A} = (A; R_0, R_1, \ldots, R_n)$ — это структура конечного предикатного языка. Множество A можно рассматривать как алфавит. Тогда *базовая итерация* структуры $\mathcal{A}$ определяется как

$$\mathcal{A}^*_{ba} = (A^*; \preccurlyeq, \widehat{R}_0, \widehat{R}_1, \ldots, \widehat{R}_n, \varepsilon),$$

где ε — пустое слово, $\preccurlyeq$ — префиксный порядок на множестве всех слов и

$$\widehat{R}_i = \{(u\widehat{\ }a_1, \ldots, u\widehat{\ }a_{n_i}) : u \in A^*,\ (a_1, \ldots, a_{n_i}) \in R_i[\mathcal{A}]\}.$$

Полная итерация структуры $\mathcal{A}$ — это структура

$$\mathcal{A}^*_{fu} = (A^*; \preccurlyeq, cl, \widehat{R}_0, \widehat{R}_1, \ldots, \widehat{R}_n, \varepsilon),$$

где $cl = \{u\widehat{\ }a\widehat{\ }a : u \in A^*,\ a \in A\}$ — это унарный *предикат клонирования.*

В [94, предложение 3.4] показано, что существует структура $\mathcal{A}$ с разрешимой элементарной теорией, такая что теория её полной итерации $\mathcal{A}^*_{fu}$ неразрешима. С другой стороны, [94, следствие 4.17], если элементарная теория $\mathcal{A}$ разрешима, то базовая итерация $\mathcal{A}^*_{ba}$ также имеет разрешимую теорию. Более подробно с теорией итераций структур можно ознакомиться в [92–95].

1.5. Автоматные структуры

Предположим, что Σ — конечный алфавит. Пусть $\Sigma_\diamond := \Sigma \cup \{\diamond\}$, где $\diamond \notin \Sigma$. Для обозначения длины слова w будем писать $|w|$. Основные понятия и обозначения из теории автоматов можно найти в [96].

Напомним, что (недетерминированным) *конечным автоматом* называется четвёрка $\mathbf{A} = (S, \Delta, i, F)$, где S — конечное множество состояний, $\Delta \subseteq S \times \Sigma \times S$ — отношение перехода, $i \in S$ — начальное состояние и $F \subseteq S$ — множество конечных состояний. Язык $L(\mathbf{A})$, *распознаваемый* автоматом $\mathbf{A}$, определяется стандартным образом (см. например, [96, § 2.3]).

Конечное бинарное дерево T будем представлять как поддерево полного бинарного дерева, имеющего носитель $\{0, 1\}^*$. Через $Leaf(T)$ обозначается множество листьев T. Для $x \in \{0, 1\}^*$ положим $Left(x) := x\widehat{\ }0$ и $Right(x) := x\widehat{\ }1$. *Конечное Σ-дерево* — это пара (T, v) где T — конечное бинарное дерево и $v\colon T \setminus Leaf(T) \to \Sigma$ — отображение, сопоставляющее вершинам T, не являющимся листьями, символы алфавита.

Древесный автомат (работающий сверху вниз) — это четвёрка $\mathbf{A} = (S, \Delta, i, F)$ где S, i, F — это объекты, такие же как в конечном автомате, а отношение перехода Δ есть подмножество $S \times \Sigma \times (S \times S)$. Прохождение автоматом $\mathbf{A}$ конечного Σ-дерева (T, v) — это отображение

$r\colon T \to S$, которое удовлетворяет условиям $r(\emptyset) = i$ и $(r(x), v(x), r(Left(x)), r(Right(x))) \in \Delta$ для любого $x \in T \setminus Leaf(T)$. Прохождение называют *распознающим*, если каждому $x \in Leaf(T)$ сопоставляется конечное состояние $r(x) \in F$. Языком древесного автомата $\mathbf{A}$ будем называть множество всех конечных Σ-деревьев, которые распознаёт $\mathbf{A}$.

Для слов $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^*$ их *конволюция* $\otimes(w_1, \ldots, w_n)$ — это слово в алфавите $(\Sigma_\diamond)^n$: конволюция имеет длину $\max\{|w_1|, \ldots, |w_n|\}$, k-м символом $\otimes(w_1, \ldots, w_n)$ будет $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где a_i – k-й символ w_i, если $k \leq |w_i|$, и $a_i = \diamond$ в противном случае.

Если $U_1 = (T_1, v_1)$, $\ldots$, $U_n = (T_n, v_n)$ — конечные Σ-деревья, то их *конволюция* — это конечное $(\Sigma_\diamond)^n$-дерево $\otimes(U_1, \ldots, U_n) = (T, v)$, такое что носитель T равно $\bigcup_{i \leq n} T_i$; и для любого $x \in T$, $v(x) := \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где $a_i = v_i(x)$ если $x \in T_i$, и $a_i = \diamond$ в противном случае.

Предположим, что R — это n-арный предикат, определённый либо на Σ^*, либо на множестве всех конечных Σ-деревьев. Тогда отождествляем отношение R и множество всех конволюций кортежей из R.

Пусть L — конечный предикатный язык. Структура $\mathcal{M}$ языка L называется *автоматной* (*древесно-автоматной*), если носитель $\mathcal{M}$ и все сигнатурные отношения $\mathcal{M}$ распознаются конечным автоматом (древесным автоматом). Также можно рассматривать автоматные структуры произвольного конечного языка (естественным образом отождествляя сигнатурные функции с их графиками).

Предложение 4 ([84, 89]). *Предположим, что $\mathcal{M}$ — структура конечного языка L. Если $\mathcal{M}$ – автоматная (древесно-автоматная), то существует алгоритм, по заданной L-формуле $\psi(\bar{x})$ выдающий конечный автомат (древесный автомат), распознающий множество $\psi[\mathcal{M}]$. В частности, любая автоматная (древесно-автоматная) структура разрешима.*

2. Определимость в наследственно конечных надстройках

2.1. Наследственно конечная и списочная надстройки

Изучение $\Sigma-$представимости одной структуры в наследственно конечной надстройке над другой неизменно остаётся популярным у исследователей направлением. В этой связи интерес представляет рассмотрение взаимосвязи $\Sigma-$определимости в наследственно конечной списочной надстройке $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ и наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

В текущем параграфе мы докажем данный аналог $\Sigma-$определимости для пары структур $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

В дальнейшем для доказательства нам понадобится теорема Ганди [8] о неподвижной точке, формулируемая следующим образом. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n, P)$ – формула в языке, расширенном $n-$местным предикатом P, все вхождения которого в эту формулу позитивны. Тогда оператор F, который переводит каждое подмножество $X \subseteq \mathbb{A}^n$ в множество $F(X) \rightleftharpoons \{\overline{x} \in \mathbb{A}^n | \mathbb{A} \models \varphi(\overline{x}, X)\}$, ввиду монотонности имеет наименьшую по включению неподвижную точку. Теперь для каждого ординала α определим подмножество $\Gamma_\alpha \subseteq \mathbb{A}$. Положим $\Gamma_0 = \varnothing$, $\Gamma_{\alpha+1} \rightleftharpoons F(\Gamma_\alpha)$ для непредельного ординала α и $\Gamma_\alpha \rightleftharpoons \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta$ для предельного ординала α.

Легко установить, что множества Γ_α образуют возрастающую цепочку:

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_\alpha \subseteq \ldots$$

Тогда ввиду мощностных соображений существует наименьший ординал α, такой, что $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$. Множество $\Gamma_* \rightleftharpoons \Gamma_\alpha$ при этом называется наименьшей неподвижной точкой оператора F.

Теорема 1 (Р. Ганди [8]). *Пусть – $\mathbb{A}$ допустимое множество, $\varphi(\overline{x}, P)$ – $\Sigma-$формула сигнатуры $\sigma \cup P^1$, в которую предикат P имеет только позитивные вхождения. Тогда наименьшая неподвижная точка оператора Γ^φ является $\Sigma-$подмножеством в $\mathbb{A}$, а ординал α, такой, что $\Gamma_* = \Gamma^\varphi_\alpha$ меньше или равен ординалу $o(\mathbb{A})$ (наименьшему ординалу, не лежащему в допустимом множестве $\mathbb{A}$).*

Отметим, что аналог теоремы Ганди верен и для $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ [6].

Перейдём теперь к формулировке и доказательству первой из двух теорем, составляющих основной результат данного параграфа:

Теорема 2.1.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная структура. Наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$представима в наследственно конечной списочной надстройке $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ без параметров.*

Доказательство. Построим F – множество всех элементов $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$, все координаты которых попарно различны. Покажем, что это $\Sigma-$подмножество $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$, которое также может быть определено как наименьшая неподвижная точка $\Sigma-$оператора.

$$\Gamma(X) = X \cup \{x|(\forall r \in x)(r \in M \cup X)\&(\forall y \sqsubseteq x)(\forall z \sqsubseteq x)((y = z) \vee (\neg(head(z) = head(y))))\}.$$

Тогда наименьшая неподвижная точка этого оператора – F и по теореме Ганди F будет $\Sigma-$определимо в $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$.

Над таким множеством сигнатурные символы $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ могут быть определены с помощью Δ_0-формул:

$$\varnothing_F := nil,$$

$$U(a)_F \Leftrightarrow a \in M,$$

$$a \in_F b \Leftrightarrow a \in b.$$

Введём теперь на этом множестве отношение конгруэнтности $\eta(a, b)$. Обозначим $ET(a, b, f)$ следующую $\Delta-$формулу: $(\forall x \in a)(\exists y \in b)(\langle x, y\rangle \in f)$.

Теперь запишем $\Sigma-$оператор, наименьшей неподвижной точкой которого и будет искомое отношение $\eta(a, b)$.

$$\Gamma(\eta) = \eta \cup \{\langle a, b\rangle|((a \in M)\&(b \in M)\&(a = b)) \vee (ET(a, b, \eta)\&ET(b, a, \eta)\&\neg(a \in M)\&\neg(b \in M))\}$$

По теореме Ганди $\eta(a, b)$ $\Sigma-$определимо в $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$.

Нетрудно видеть, что $\eta(a, b)$ – отношение эквивалентности на $F \cup M$. Так, индукцией по рангу элементов проверим транзитивность такого отношения: $\langle a, b\rangle \in \eta$ и $\langle b, c\rangle \in \eta$ влечет $\langle a, c\rangle \in \eta$.

Лемма 2.1.1. *Покажем сначала, что если $\langle a, b\rangle \in \eta$, то их ранги совпадают.*

Доказательство. Пусть $a \in M$. Тогда, необходимо, $a = b$ и следовательно, $b \in M$.

Пусть ранг a равен $k+1$, тогда ранг любого $x \in a$ не превосходит k и по предположению индукции для всех таких x имеем $\langle x, y\rangle \in \eta$ влечет совпадение рангов x и y. В то же время, выполняется $ET(a, b, \Gamma^s(\varnothing))\&ET(b, a, \Gamma^s(\varnothing))$ для некоторого шага s, то есть выполняется условие

$$(\forall x \in a)(\exists y \in b)(\langle x, y\rangle \in \Gamma^s(\varnothing))\&(\forall y \in b)(\exists x \in a)(\langle y, x\rangle \in \Gamma^s(\varnothing)). \tag{1}$$

Тогда для элемента $x \in a$ максимального ранга k найдется элемент $y \in b$ такого же ранга, следовательно, ранг $b \geq k + 1$. С другой стороны, по тому же условию (1) для произвольного $y \in b$ найдется $x \in a$, такой, что $\langle x, y\rangle \in \eta$. Так как ранг x не превосходит k, то по предположению индукции ранг y совпадает с рангом x, а следовательно, также не превосходит k. Таким образом, ранг b также равен $k + 1$. □

Пусть $a,\ b,\ c \in M$. Тогда $a = b = c$ и условие выполнено.

Пусть ранг элементов равен $k + 1$. Тогда имеем $\langle b, a\rangle \in \Gamma^{s+1}(\varnothing)$ для некоторого шага s, тогда $ET(a, b, \Gamma^s(\varnothing))\&ET(b, a, \Gamma^s(\varnothing))$, пара $\langle b, c\rangle \in \Gamma^{r+1}(\varnothing)$ для некоторого шага r и $ET(b, c, \Gamma^r(\varnothing))\&ET(c, b, \Gamma^r(\varnothing))$.

Без ограничения общности можем считать, что $r \geq s$. Тогда выполяется

$$(\forall x \in a)(\exists y \in b)(\langle x, y\rangle \in \Gamma^r(\varnothing))\&(\forall y \in b)(\exists x \in a)(\langle y, x\rangle \in \Gamma^r(\varnothing))$$
$$\text{и } (\forall y \in b)(\exists z \in c)(\langle y, z\rangle \in \Gamma^r(\varnothing))\&(\forall z \in c)(\exists y \in b)(\langle z, y\rangle \in \Gamma^r(\varnothing)).$$

Отсюда $(\forall x \in a)(\exists z \in c)(\langle x, z\rangle \in \Gamma^r(\varnothing))\&(\forall z \in c)(\exists x \in a)(\langle z, x\rangle \in \Gamma^r(\varnothing))$, и следовательно, $\langle a, c\rangle \in \Gamma^{r+1}(\varnothing) \subseteq \eta$.

Следующая формула, очевидно, также будет $\Delta-$формулой:

$$(\exists x \in a)(\forall y \in b)(\langle x, y\rangle \in f).$$

Обозначим её $NT(a, b, f)$ и определим с ее помощью $\Sigma-$оператор.

$$\Gamma(g) = g \cup \{\langle a, b\rangle | ((a \neq b)\&(a \in M)\&(b \in M)) \vee NT(a, b, g) \vee NT(b, a, g)\}.$$

Тогда по теореме Ганди отношение, дополняющее η, $g(a, b) = F^2 \setminus \eta$, также $\Sigma-$определимо в $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$.

По построению η состоит из всех пар элементов из $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$, отличающихся только порядком следования своих элементов на каком-либо уровне строения. Обозначим $[a]$ соответствующий класс эквивалентности F/η. Заметим, что на M отношение η совпадает с равенством, сохраняя операции $\mathfrak{M}$.

Из вышеизложенного следует, что η – искомое отношение конгруэнтности.

Основные предикаты надстройки в факторсистеме F/η определяются естественным образом:

$$\varnothing_F := [nil],$$

$$U([a])_F \Leftrightarrow a \in M,$$

$$[a] \in_F [b] \Leftrightarrow (\exists x \in [a])(\exists y \in [b])(x \in y),$$

Для завершения доказательства остаётся показать изоморфизм $F/\eta \cong \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Определим отображение $\mu : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \to F/\eta$ следующим образом:

$$\mu(a) = a, \text{ если } a \in M,$$

$$\mu(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}) = [\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle], \text{ если } a_0,\ \ldots\ ,\ a_{n-1} \in M, \text{ и}$$

$$\mu(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}) = [\langle a'_0, \ldots, a'_{n-1}\rangle], \text{ где } a'_i \in \mu(a_i),\ 0 \leq i \leq n-1, \text{ для элемента } \{a_0,\ \ldots\ ,\ a_{n-1}\} \text{ ранга } k+1,$$

причем определение μ не зависит от выбора представителей a'_i.

Доказательство взаимнооднозначности построенного таким образом отображения проведем индукцией по рангу элемента.

Пусть $\mu(a) = \mu(b)$, $a,\ b \in M$. Тогда $a = b$ по определению μ.

Аналогично лемме 2.1.1, индукцией по рангу элемента $a \in HF(M)$ легко показать, что ранг a равен рангу элементов из $\mu(a)$.

Пусть ранг элементов равен $k+1$, $a = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, $b = \{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$. Тогда для некоторых $a'_i \in \mu(a_i)$, $0 \leq i \leq n-1$, $b'_j \in \mu(b_j)$, $0 \leq j \leq m-1$ имеем

$$[\langle a'_0, \ldots, a'_{n-1}\rangle] = \mu(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}) = \mu(\{b_0, \ldots, b_{m-1}\}) = [\langle b'_0, \ldots, b'_{m-1}\rangle],$$

следовательно, пара $\langle\langle a'_0, \ldots, a'_{n-1}\rangle, \langle b'_0, \ldots, b'_{m-1}\rangle\rangle \in \eta$. Тогда из определения отношения η

получаем $(\forall a_i')(\exists b_j')\eta(a_i', b_j')$ и $(\forall b_j')(\exists a_i')\eta(b_j', a_i')$, при $0 \le i \le n-1$, $0 \le j \le m-1$, то есть $\mu(b_j) = [b_j'] = [a_i'] = \mu(a_i)$. По предположению индукции для соответствующих b_j, a_i имеем $b_j = a_i$. Тогда $m = n$ и $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\} = \{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$.

Сохранение операций следует из сохранения операций конгруэнцией η.

$$nil_{_F} := [nil] = \mu(nil),$$

$$U_{_F}(\mu(a)) \Leftrightarrow U([a]) \Leftrightarrow U(a), \text{ т.к. } \mu(a) = a,$$

$$\mu(a) \in_{_F} \mu(b) \Leftrightarrow (\exists x \in [a])(\exists y \in [b])(x \in y) \Leftrightarrow a \in b.$$

□

Следующая теорема показывает обратную сводимость – представимость наследственно конечной списочной надстройки в наследственно конечной:

Теорема 2.1.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная структура. Наследственно конечная списочная надстройка $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$представима в наследственно конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ без параметров и с тривиальной эквивалентностью η.*

Доказательство. Заметим, что множество M определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тривиальным образом. Напомним, что упорядоченная пара $\langle x, y\rangle$ и её правый и левый элементы $l(x)$, $r(x)$, являются $\Delta-$определимыми в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Также отношение $x \in \omega$, где ω понимается как множество ординалов из $HF(M)$, $\Sigma-$определимо.

Пусть теперь W – множество всех элементов $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ вида $\{\langle 0, x_0\rangle, \langle 1, x_1\rangle, \ldots, \langle n, x_n\rangle\}$, где $x_i \in M$, либо $x_i \in W$ для каждого $i \le n$. Покажем, что W может быть определено как наименьшая неподвижная точка X^* следующего $\Sigma-$оператора.

$$\Gamma(X) = X \cup \{x | (\forall y \in x)(\exists a, b)[(y = \langle a, b\rangle) \& (a \in \omega) \& (b \in X \cup M) \& (\forall a' \in a)(\exists b' \in X \cup M)$$
$$(\langle a', b'\rangle \in x) \& (\forall z \in x)((z = y) \vee (\exists c)(\exists d)(z = \langle c, d\rangle) \& (c \ne a))]\}.$$

Определим "ранг" элемента из W следующим образом:

$$rk^*(a) = 0, \text{ если } a = nil \text{ или } a \in M,$$

$$rk^*(a) = max\{rk^*(a_i) | 0 \le i \le n\} + 1, \text{ если } a = \{\langle 0, a_0\rangle, \ldots, \langle n, a_n\rangle\}.$$

По построению в X^* содержатся только праэлементы и элементы вида $\{\langle i, b_i\rangle, 0 \le i \le n\}$, для которых все b_i, в свою очередь, имеют такой же вид либо принадлежат множеству M, то есть элементы W. С другой стороны, индукцией по "рангу" элемента нетрудно установить, что X^* содержит все конечные множества такого вида. Действительно, так как X^* – неподвижная точка, любой элемент $\{\langle 0, b_0\rangle, \langle 1, b_1\rangle, \dots, \langle n, b_n\rangle\}$, где $x_n \in M$ либо $x_n \in X^*$, принадлежит $\Gamma(X^*) = X^*$.

$\Delta-$определения операций списочной надстройки в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ легко выписываются в явном виде:

$x \in M := U(x);$

$nil_W := \varnothing;$

$$head_W(a) = b \Leftrightarrow (a \neq nil)\&[(\exists c \in a)((b = r(c))\&(\forall c' \in a)((l(c') \in l(c)) \vee ((l(c') = l(c))))] \\ \vee [(a = nil)\&(b = nil)];$$

$$cons_W(a, b) = c \Leftrightarrow (a \neq nil)\&[(\forall x \in a)(x \in c)\&(\forall y \in c)((y \in a) \vee ((\exists t \in a)(\forall t' \in a)((l(t') \in l(t)) \\ \vee ((l(t') = l(t))))\&(y = \langle l(t) \cup \{l(t)\}, b\rangle))] \vee [(a = nil)\&(c = \{\langle 0, b\rangle\})];$$

$tail_W(a) = b \Leftrightarrow [(a \neq nil)\&(cons_W(b, head_W(a)) = a)] \vee [(a = nil)\&(b = nil)];$

$a \in_W b \Leftrightarrow (\exists c \in b)(r(c) = a);$

$a \sqsubseteq_W b \Leftrightarrow (\forall c \in a)(c \in b).$

Таким образом, по теореме Ганди X^* есть $\Sigma-$подмножество в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и все сигнатурные предикаты $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$, определённые на этом множестве, а также их дополнения относительно $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ являются $\Sigma-$определимыми в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Для завершения доказательства осталось показать изоморфизм $\nu : \mathbb{HW}(\mathfrak{M}) \to W$. Определим изоморфизм на праэлементах как $\nu(a) = a$, где $a \in M$, а затем естественным образом продолжим его на всё W:

$$\nu(\langle a_0, \dots a_n\rangle) = \{\langle 0, \nu(a_0)\rangle, \langle 1, \nu(a_1)\rangle, \dots, \langle n, \nu(a_n)\rangle\}$$

Сначала покажем, что область значений функции ν совпадает с W. Доказательство легко провести индукцией по рангу элемента:

Пусть $a \in W$, $a \in M$. Тогда $\nu^{-1}(a) = a$ по определению ν.

Пусть $a = \{\langle 0, a_0\rangle, \langle 1, a_1\rangle, \dots, \langle n, a_n\rangle\}$, тогда $\nu^{-1}(a) = \langle \nu^{-1}(a_0), \nu^{-1}(a_1), \dots, \nu^{-1}(a_n)\rangle$.

Теперь проверим условие $a \neq b \Rightarrow \nu(a) \neq \nu(b)$.

Пусть $a \neq b$, $a,\ b \in M$. Тогда $\nu(a) \neq \nu(b)$ по определению ν.

Пусть $a = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$, $b = \langle b_0, \dots, b_m \rangle$. Пусть для определенности $n \geq m$, тогда для некоторого $0 \leq i \leq n$, $a_i \neq b_i$, (где $b_i \in b$ либо не существует для $m+1 \leq i \leq n$) тогда $\langle i, a_i \rangle \in \nu(a)$ $\langle i, a_i \rangle \notin \nu(b)$, и $\nu(a) \neq \nu(b)$.

Сохранение операций и отношений $x \in M$, nil_W, $head_W$, $cons_W$, $tail_W$, $a \in_W b$, $a \sqsubseteq_W b$ легко устанавливается прямой проверкой их определений:

$\nu(x) \in M,$ при $x \in M$;

$\nu(nil) = \varnothing = nil_W$;

$head_W(\nu(a)) = head_W(\{\langle 0, \nu(a_0)\rangle, \langle 1, \nu(a_1)\rangle, \dots, \langle n, \nu(a_n)\rangle\}) = r(\langle n, \nu(a_n)\rangle) = \nu(head(a))$;

$$cons_W(\nu(a), \nu(b)) = cons_W(\{\langle 0, \nu(a_0)\rangle, \langle 1, \nu(a_1)\rangle, \dots, \langle n, \nu(a_n)\rangle\}, \nu(b)) =$$

$$= \{\langle 0, \nu(a_0)\rangle, \langle 1, \nu(a_1)\rangle, \dots, \langle n, \nu(a_n)\rangle, \langle n+1, \nu(b)\rangle\} = \nu(cons(a, b));$$

$\nu(a) \in_W \nu(b) \Leftrightarrow (\exists c \in \nu(b))(r(c) = \nu(a)) \Leftrightarrow a \in b$;

$\nu(a) \sqsubseteq_W \nu(b) \Leftrightarrow \nu(a) \subseteq \nu(b) \Leftrightarrow a \sqsubseteq b$.

□

Из данного результата, в частности, следует эквивалентность наследственно конечной и списочной надстроек как вычислительных систем над исходной моделью $\mathfrak{M}$:

Следствие 2.1.1. *Для любого $A \subseteq M^n$ A $\Sigma-$определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда, и только тогда, когда оно $\Sigma-$определимо в $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму. Воспользуемся представлением элементов $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ значениями термов сигнатуры $\{\varnothing, \cup, \{\}\}$ из [57].

Лемма 2.1.2. *Для любого терма $t(u_0, \dots, u_{n-1})$ сигнатуры σ_{HW} можно найти терм $t'_t(u_0, \dots, u_{n-1})$ сигнатуры σ_{HF}, такой, что $x = t(a_0, \dots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \nu(x) = t'_t(a_0, \dots, a_{n-1})$ для произвольных $x \in |HW(M)|$, $a_i \in M$, $0 \leq i \leq n-1$.*

Индукция по числу r вхождений списочных операций $cons$ в терм.

В случае $r = 0$ $t'_t(\overline{u}) = t(\overline{u})$, так как это терм сигнатуры $\mathfrak{M}$.

$r \to r+1$.

Случай 1. $t(\overline{u}) = nil$. Тогда $t'_t(\overline{u}) = \varnothing$.

Случай 2. Терм имеет вид $cons(t_1, t_2)$. Тогда $t'_t(\overline{u}) = t'_{t_1}(\overline{u}) \cup \{\{len(t_1) + 1, t'_{t_2}(\overline{u})\}\}$.

Случай 3. Терм имеет вид $t_1(head(cons(t_2, t_3)))$, где $cons$ в t_1 не входит. Тогда $t'_t = t'_{t_1(t'_{t_3})}$.

Случай 4. Терм имеет вид $t_1(tail(cons(t_2, t_3)))$, где $cons$ в t_1 не входит. Тогда $t'_t = t'_{t_1(t'_{t_2})}$.
По предположению индукции получаем требуемое.

Теперь перейдём к доказательству следствия. Покажем, что для любой формулы $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1})$ сигнатуры σ_{HW} можно найти формулу $\psi_\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1})$ сигнатуры σ_{HF}, такую что $HW(\mathfrak{M}) \models \varphi(\overline{u}) \leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \psi_\varphi(\overline{u})$.

- Пусть $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1})$ – атомарная формула.

1. $\varphi(\overline{u})$ имеет вид $P(\overline{u})$, где P – предикат сигнатуры σ.
2. $\varphi(\overline{u})$ имеет вид $t_1(\overline{u}) = t_2(\overline{u})$, тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u})$ равной $t'_{t_1}(\overline{u}) = t'_{t_2}(\overline{u})$
3. $\varphi(\overline{u})$ имеет вид $x \in t(\overline{u})$, тогда $\psi_\varphi(\overline{u}) = (\exists y \in t'_t(\overline{u}))(x = r(y))$.
4. $\varphi(\overline{u})$ имеет вид $x \sqsubseteq t(\overline{u})$, тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u})$ равной
$(\forall y \in x)[(y \in t'_t(\overline{u}))\&(\forall z \in t'_t(\overline{u}))((l(z) \in l(y)) \to (z \in x))]$.

Заметим, что полученные выше формулы являются Δ_0-формулами.

- Пусть теперь $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1})$ имеет вид $\varphi_1(\overline{u})\&\varphi_2(\overline{u})$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2,\ \neg(\varphi_1))$. Тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u}) = \psi_{\varphi_1}(\overline{u})\&\psi_{\varphi_2}(\overline{u})$ $(\psi_{\varphi_1} \vee \psi_{\varphi_2},\ \neg(\psi_{\varphi_1}))$.

- Пусть $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1})$ имеет вид $(\exists x \in t(\overline{u}))\varphi_1$, $(\forall x \in t(\overline{u}))\varphi_1$. Тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u}) = (\exists y \in t'_t(\overline{u}))(\exists z \in y)(\exists x \in z)(x = r(y))\psi_{\varphi_1})$, $\psi_\varphi(\overline{u}) = (\forall y \in t'_t(\overline{u}))(\exists z \in y)(\exists x \in z)(x = r(y))\psi_{\varphi_1}$ соответственно.

- Пусть $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1})$ имеет вид $\exists x\varphi_1$. Тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u}) = \exists x(x \in W)\&\psi_{\varphi_1}$

Обратно, по формуле $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1})$ сигнатуры σ_{HF} найдём формулу $\psi_\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1})$ сигнатуры σ_{HW}, такую что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi(\overline{u}) \leftrightarrow HW(\mathfrak{M}) \models \psi_\varphi(\overline{u})$.

Докажем утверждение для расширенной сигнатуры $\sigma_{HF} \cup \{\varnothing, \cup, \{\}\}$. Построим для любого терма $t(u_0, \dots, u_{n-1})$ сигнатуры $\{\varnothing, \cup, \{\}\}$ терм $t'_t(u_0, \dots, u_{n-1})$ сигнатуры σ_{HW}, такой, что если $x = t(a_0, \dots, a_{n-1})$, $a_i \in M$, $0 \leq i \leq n-1$, то $t'_t(a_0, \dots, a_{n-1})$ соответствует некоторому $y \in \mu(x)$.

Индукцию проведём по сложности терма. Если $t(\overline{u})$ — терм сигнатуры $\mathfrak{M}$, то $t'_t(\overline{u}) = t(\overline{u})$, так как это терм сигнатуры $\mathfrak{M}$.

Случай 1. $t(\overline{u}) = \varnothing$. Тогда $t'_t(\overline{u}) = nil$.

Случай 2. $t(\overline{u}) = u_i$ Тогда $t'_t(\overline{u}) = u_i$.

Случай 3. Терм имеет вид $\{t_{\varkappa_1}\} \cup \dots \cup \{t_{\varkappa_m}\}$, где $\varkappa_1 < \dots < \varkappa_m$. Тогда $t'_t = cons(cons(nil, t_{\varkappa_1}), \dots, t_{\varkappa_m})$.

По предположению индукции получаем требуемое.

Без ограничения общности можем полагать, что в формуле $\varphi(\overline{u})$ отрицание встречается только перед атомарными подформулами. Далее индукция по сложности формулы.

1. $\varphi(\overline{u})$ имеет вид $P(\overline{u})$, где P – предикат сигнатуры σ.

2. $\varphi(\overline{u})$ имеет вид $x = t_1(\overline{u})$, тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u})$ равной $\eta(x, t'_{t_1}(\overline{u}))$

3. $\varphi(\overline{u})$ имеет вид $x \in t(\overline{u})$, тогда $\psi_\varphi(\overline{u}) = (\exists y \in t'_t(\overline{u}))\eta(x, y)$.

4. $\varphi(\overline{u}) = U(x)$, тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u})$ равной $x \in M$.

Отрицания атомарных формул строятся аналогично с использованием того факта, что $\eta(x, y)$ — Δ–отношение.

- Пусть теперь $\varphi(u_0, \dots, u_{n-1})$ имеет вид $\varphi_1(\overline{u})\&\varphi_2(\overline{u})$ $(\varphi = (\overline{u}) = \varphi_1 \vee \varphi_2)$. Тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u}) = \psi_{\varphi_1}(\overline{u})\&\psi_{\varphi_2}(\overline{u})$ (соответственно $\psi_{\varphi_1} \vee \psi_{\varphi_2}$).

- Пусть $\varphi(u_0, \dots, u_{n-1})$ имеет вид $(\exists x \in t(\overline{u}))\varphi_1$, $(\forall x \in t(\overline{u}))\varphi_1$. Тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u}) = (\exists y \in t'_t(\overline{u}))(\exists x)(x \in F)\&\eta(x, y)\&\psi_{\varphi_1})$, $\psi_\varphi(\overline{u}) = (\forall y \in t'_t(\overline{u}))(\exists x)(x \in F)\&\eta(x, y)\&\psi_{\varphi_1}$ соответственно.

- Пусть $\varphi(u_0, \dots, u_{n-1})$ имеет вид $\exists x\varphi_1$. Тогда положим $\psi_\varphi(\overline{u}) = \exists x(x \in F)\&\psi_{\varphi_1}$

$\square$

Пользуясь приведёнными леммами, можно доказать более сильный вариант следствия.

Следствие 2.1.2. *$A \subseteq |\mathbb{HF}(\mathfrak{M})|$ $\Sigma-$определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда, и только тогда, когда множество $\{x|[x] \in \mu(A)\}$ $\Sigma-$определимо в $HW(\mathfrak{M})$.*

$A \subseteq |HW(\mathfrak{M})|$ $\Sigma-$определимо в $HW(\mathfrak{M})$ тогда, и только тогда, когда множество $\nu(A)$ $\Sigma-$определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Для доказательства прямой импликации в обоих случаях достаточно использовать разложение $\varphi(x) = \bigvee\limits_{i\in\omega}(x = t_{\varkappa_i})\&\varphi(t_{\varkappa_i}(\overline{u}))$, заменив соответственно $t_{\varkappa_i}$ на $t'_{t_{\varkappa_i}}$ и φ на ψ_φ.

Для обратного заметим, что любой $x \in \nu^{-1}(B)$, $B \subseteq W$ имеет вид $t_\varkappa(\overline{a}) = \{< i, t_{\varkappa_i}(\overline{a}) >\}, i = 0, \ldots, n-1$. Тогда в качестве $t'_{t_\varkappa}$ достаточно использовать $cons(cons(nil, t'_{t_{\varkappa_0}}), \ldots, t'_{t_{\varkappa_{n-1}}})$.

Для множества $\{x|[x] \in \mu(A)\}$ в качестве $t'_{t_\varkappa}$ для $t_\varkappa(\overline{a}) = \{< t_{\varkappa_i}(\overline{a}) >\}, i = 0, \ldots, n-1$ достаточно использовать $\{t_{\varkappa_{i_1}}\} \cup \cdots \cup \{t_{\varkappa_{i_m}}\}$, где $\varkappa_{i_1} < \cdots < \varkappa_{i_m}$.

Так как $\varphi(t_{\varkappa_i}(\overline{u}))$ эквивалентна некоторой $\varphi_{\varkappa_i}(\overline{u})$, здесь также можно воспользоваться преобразованием $\psi_{\varphi_{\varkappa_i}}$ из теоремы. $\square$

Отметим, что ряд авторов рассматривают различные усиления $\Sigma-$определимости из определения 1.2.3. В частности, А. С. Морозовым и В. Г. Пузаренко были предложены следующие формулировки таких усилений, названные ими $\Sigma-$сводимостью:

Определение 2.1.1 (А. С. Морозов)**.** Будем говорить, что допустимое множество A $\Sigma-$сводится к допустимому множеству B ($A \sqsubseteq_{HYP} B$), если существует отображение μ, осуществляющее $\Sigma-$определимость A в B, для которого найдётся бинарный $\Sigma-$предикат R на B такой, что $pr_1^2(R) = \mu(A)$ и $\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow \mu^{-1}([a]) = \{\mu^{-1}([z])|z \in b\}$ для любых $a, b \in B$

Определение 2.1.2 (В. Г. Пузаренко)**.** Будем говорить, что допустимое множество A $\Sigma-$сводится к допустимому множеству B ($A \sqsubseteq_\Sigma B$), если существует отображение $\nu : B \to A$ такое, что $\nu^{-1}(\Sigma(A^2)) \subseteq \Sigma(B^2)$.

Известно также [17, 32], что эти сводимости подчиняются следующему соотношению: $A \sqsubseteq_{HYP} B \Rightarrow A \sqsubseteq_\Sigma B \Rightarrow A \leq B$, если $\leq$ обозначает $\Sigma-$определимость из определения 1.2.3.

Заметим, что построенные в обеих теоремах этого параграфа сводимости удовлетворяют определению 2.1.1. Действительно, для доказательства этого факта достаточно предъявить указанный в определении $\Sigma-$предикат R. В случае теоремы 2.1.2 в качестве такого предиката можно взять $\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow a = \{\langle 1, a_1\rangle, \ldots, \langle n, a_n\rangle\}$ и $b = \{a_1, \ldots, a_n\}$, для теоремы 2.1.1 можно использовать $\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow \eta(a, b)$.

Таким образом, используя термин $\Sigma-$сводимость в смысле определения 2.1.1, получаем следующее:

Следствие 2.1.3. *Для произвольной структуры* $\mathfrak{M}$ *её наследственно конечная надстройка* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$*сводится к наследственно конечной списочной надстройке* $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$, *а наследственно конечной списочная надстройка* $\mathbb{HW}(\mathfrak{M})$ $\Sigma-$*сводится к наследственно конечной надстройке* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

3. Вычислимость над полем действительных чисел

3.1. Униформизация в наследственно конечной и списочной надстройке над полем действительных чисел

В данном разделе подход $\Sigma-$определимости используется для исследования вычислимости над расширениями поля действительных чисел с использованием модели списочной надстройки, в частности, для исследования вычислимости над полем действительных чисел с экспонентой. В текущем параграфе доказывается теорема об униформизации для $\Sigma-$предикатов, а также существование универсальной функции для $\Sigma-$определимых функций в наследственно конечной списочной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой и расширений поля действительных чисел пфаффовыми функциями.

Для исследования такого аналога вычислимости над расширениями поля действительных чисел нам понадобятся некоторые определения и известные результаты из теории моделей.

Приведём одну из эквивалентных формулировок определения модельно полной теории:

Определение 3.1.1. Теория T называется модельно полной, если для любой формулы существует эквивалентная ей относительно T $\exists-$формула.

Теория называется эффективно модельно полной, если такая формула может быть найдена эффективно.

Определение 3.1.2. Алгебраическая система называется $O-$минимальной, если её сигнатура содержит отношение плотного линейного порядка, и любое формульно определимое в ней множество является конечным объединением точек и интервалов.

В частности, подмножество $\mathbb{R}$, формульно определимое в 0-минимальной алгебраической системе, будет представимо в виде конечного объединения точек и интервалов.

Теорема 2 (А. Вилке [80])**.** *Теория структуры* $\mathbb{R}_{exp} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, exp(x), <, 0, 1 \rangle$*, где* $exp(x)$ *— экспоненциальная функция, модельно полна.*

В [52] А. Хованский показал, что любое экспоненциальное многообразие $\{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}$, (здесь $f_1, \ldots, f_m$ — экспоненциальные полиномы) имеет конечное число связных компонент. Из теоремы Хованского и модельной полноты теории полей действительных чисел с экспонентой следует 0-минимальность алгебраической системы $\mathbb{R}_{exp}$.

В совместной работе А. Макинтира и А. Вилки [65] авторы сумели показать эффективную модельную полноту для теории алгебраической системы $\mathbb{R}_e = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, e(x), <, 0, 1 \rangle$, где e — ограниченная функция экспоненты, определяемая следующим образом:

Определение 3.1.3. Функция

$$e(x) = \begin{cases} exp(x), & \text{если } x \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 3.1.1. Заметим, что подмножество $\mathbb{R}^n$, формульно определимое в алгебраической системе поля действительных чисел с ограниченной экспонентой, также определимо и в алгебраической системе поля действительных чисел с обычной экспонентой. Отсюда следует 0-минимальность $\mathbb{R}_e$.

Теперь сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений, которые понадобятся при доказательстве основного результата.

Под термином в данном параграфе "$\Sigma-$определимое действительное число" будем подразумевать число $a \in \mathbb{R}$, для которого существует $\Sigma-$формула $\phi(x)$, такая, что $x = a \longleftrightarrow HW(\mathbb{R}_e) \models \phi(x)$.

Следующие две леммы говорят о связи $\Sigma-$определимости в алгебраических системах с ограниченной и обычной экспонентами.

Лемма 3.1.1. *Функция $f(n) = a^n$, где a — $\Sigma-$определимое в $HW(\mathbb{R}_e)$ действительное число, $\Sigma-$определима в $HW(\mathbb{R}_e)$ следующей формулой:*

$$(\exists \alpha)(\forall \beta \sqsubseteq \alpha)(((head(head(\beta)) = head(head(tail(\beta))) \cdot a) \wedge$$
$$(head(tail(head(\beta))) = head(tail(head(tail(\beta)))) + 1)) \vee (\beta =<< 0,1 >>)) \wedge$$
$$(< 0,1 >\in \alpha) \wedge (head(head(\alpha)) = f(n)) \wedge (head(tail(head(\alpha))) = n))$$

Лемма 3.1.2. *Пусть $e(x)$ — ограниченная экспонента из определения 3.1.3. Для любой $\Sigma-$формулы языка $HW(\mathbb{R}_{exp})$ может быть эффективно найдена эквивалентная ей $\Sigma-$формула языка $HW(\mathbb{R}_e)$. И обратно, каждая $\Sigma-$формулы языка $HW(\mathbb{R}_e)$ может быть эффективно преобразована в $\Sigma-$формулу языка $HW(\mathbb{R}_{exp})$.*

Доказательство. Заметим сначала, что функция $f(n) = a^n$, где a — Σ−определимое действительное число, Σ−определима в $HW(\mathbb{R}_e)$ по лемме 3.1.1.

Далее, пусть $\Phi(x, y)$ — Σ−формула языка $HW(\mathbb{R}_{exp})$. Без ограничения общности предполагаем, что она находится в пренексной нормальной форме. Введя нужное количество новых переменных, легко преобразовать эту формулу так, что экспонента будет встречаться только в её атомарных подформулах вида $exp(x) = z$. Затем каждую такую подформулу заменим на

$$\exists n \exists y((0 \leq y) \wedge (y < 1) \wedge (((x = n + y) \wedge (z = (e(1)^n) \cdot e(y)) \wedge (0 \leq x)) \vee$$
$$((x + n + y = 0) \wedge (z \cdot (e(1)^n) \cdot e(y) = 1) \wedge (x < 0))))$$

Нетрудно видеть, что полученная Σ−формула эквивалентна исходной.

Обратно, если $\Psi(x, y)$ — Σ−формула языка $HW(\mathbb{R}_e)$, преобразуем её аналогичным образом, заменяя все вхождения $e(x) = z$ на
$((exp(x) = z) \wedge (x \leq 1) \wedge (0 \leq x)) \vee (z = 0)$. □

Для доказательства основного результата нам понадобится аналог предложения 2(6.14 из [57]) для наследственно конечной списочной надстройки.

Предложение 3.1.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель конечной сигнатуры σ. Для любой Σ−формулы сигнатуры $HW(\mathfrak{M})$ можно эффективно найти семейство $\exists$-формул сигнатуры σ, таких, что для любых $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1} \in M$ $HW(\mathfrak{M}) \models \Phi(m_0, m_1, \ldots, m_{k-1})$ тогда, и только тогда, когда*

$M \models \bigvee\limits_{n \in \omega} \phi_n(m_0, m_1, \ldots, m_{k-1})$

Доказательство предложения аналогично доказательству, приведённому в теореме 3.5.1 в [9], за исключением термов и формул, полученных с помощью операций $head, tail, cons, nil, \sqsubseteq$ сигнатуры списочной надстройки. Представимость таких формул через Σ−формулы показана в [14], стр. 27–28.

Сформулируем теперь основной результат данного подраздела.

Теорема 3.1.1. *Для любого Σ−определимого в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ предиката $P \subseteq R^n \times R$ существует n-местная Σ−определимая функция с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ такая, что её график $\Gamma_f \subseteq P$.*

Другими словами, для класса $\Sigma-$определимых в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ предикатов выполняется свойство униформизации.

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим случай $n = 1$.

Пусть предикат $P(x, y)$ определяется $\Sigma-$формулой $\Theta(x, y)$ языка $HW(\mathbb{R}_{exp})$. По лемме 3.1.2 можно эффективно найти $\Phi(x, y)$ — эквивалентную ей $\Sigma-$формула языка $HW(\mathbb{R}_e)$. Из предложения 3.1.1 следует, что для $\Phi(x, y)$ можно эффективно найти семейство $\exists$-формул $Th(\mathbb{R}_e)$ $\varphi_i(x, y)$, таких, что $\Phi(x, y)$ эквивалентна дизъюнкции $\bigvee\limits_{i\in\omega} \varphi_i(x, y)$

Пусть $\varphi_i(x, y)$ имеет вид $\exists z_1...\exists z_{n(i)}\psi_i(x, y, z_1, ..., z_{n(i)})$, где $\psi(x, y, z_1, ..., z_{n(i)})$ — бескванторная формула $Th(\mathbb{R}_e)$.

Для каждых i, x_0 формула $\exists z_1...\exists z_{n(i)}\psi_i(x_0, y, z_1, ...,_{n(i)})$ определяет некоторое множество Y. По замечанию 3.1.1 алгебраическая система $\mathbb{R}_e$ — 0-минимальна. Отсюда следует, что множество Y представимо конечным объединением отрезков и интервалов.

Покажем, аналогично [14], что, рассмотрев конечное число возможных вариантов строения Y, для каждого из вариантов строения Y можно привести в явном виде $\Sigma-$формулы, истинные только для одного y из Y.

Случай 1: пусть интервал $(-\infty, a] \subseteq Y$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, тогда положим $y = a$. Этот случай описывается формулой $\eta_i^1(x_0, y)$, имеющей вид:

$$\exists a(\forall b \leq a)(\exists z_1...\exists z_{n(i)}\psi_i(x_0, b, z_1, ..., z_{n(i)})\wedge$$
$$(\forall c > a)(\exists a < d < c)(\forall z_{n(i)+1}...\forall z_{2n(i)}\neg(\psi_i(x_0, d, z_{n(i)+1}, ..., z_{2n(i)})) \wedge (y = a)))$$

Случай 2: никакой интервал вида $(-\infty, a]$ не лежит в Y, а интервал $(-\infty, a) \subseteq Y$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, тогда также положим $y = a - 1$. Формула $\eta_i^2(x_0, y)$ имеет вид:

$$\exists a(\forall b < a)(\exists z_1...\exists z_{n(i)}\psi_i(x_0, b, z_1, ..., z_{n(i)})\wedge$$
$$(\forall c \geq a)(\exists a \leq d \leq c)(\forall z_{n(i)+1}...\forall z_{2n(i)}\neg(\psi_i(x_0, d, z_{n(i)+1}, ..., z_{2n(i)})) \wedge (y = a - 1)))$$

Случай 3: пусть никакой интервал вида $(-\infty, a), (-\infty, a]$ не лежит в Y, и найдутся $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $[a_1, a_2] \subseteq Y$. Тогда положим $y = \frac{a_1+a_2}{2}$). Этот случай описывается следующей формулой $\eta_i^3(x_0, y)$:

$$\exists a_1\exists a_2((a_1 \leq a_2) \wedge (\forall a_1 \leq r \leq a_2)(\exists z_{n(i)+1}...\exists z_{2n(i)}\psi_i(x_0, r, z_{n(i)+1}, ..., z_{2n(i)}))\wedge$$

$$(\forall b < a_1)(\forall z_1 ... \forall z_{n(i)})\neg(\psi_i(x_0, b, z_1, ..., z_{n(i)}))\wedge$$
$$(\forall c > a_2)(\exists a_2 < d < c)(\forall z_{2n(i)+1} ... \forall z_{3n(i)}\neg(\psi_i(x_0, d, z_{2n(i)+1}, ..., z_{3n(i)})) \wedge (y = \frac{a_1+a_2}{2}))$$

Случай 4: пусть никакой интервал вида $(-\infty, a), (-\infty, a]$ не лежит в Y, и найдутся $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $(a_1, a_2) \subseteq Y$. Тогда положим $y = \frac{a_1+a_2}{2}$). Этот случай описывается следующей формулой $\eta_i^4(x_0, y)$:

$$\exists a_1 \exists a_2((a_1 < a_2) \wedge (\forall a_1 < r < a_2)(\exists z_{n(i)+1} ... \exists z_{2n(i)} \psi_i(x_0, r, z_{n(i)+1}, ..., z_{2n(i)}))\wedge$$
$$(\forall b \leq a_1)(\forall z_1 ... \forall z_{n(i)})\neg(\psi_i(x_0, b, z_1, ..., z_{n(i)}))\wedge$$
$$(\forall c \geq a_2)\exists d(a_2 \leq d \leq c)(\forall z_{2n(i)+1} ... \forall z_{3n(i)}\neg(\psi_i(x_0, d, z_{2n(i)+1}, ..., z_{3n(i)})) \wedge (y = \frac{a_1+a_2}{2}))$$

Случай 5: пусть никакой интервал вида $(-\infty, a), (-\infty, a]$ не лежит в Y, и найдутся $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $[a_1, a_2) \subseteq Y$. Тогда положим $y = \frac{a_1+a_2}{2}$). Этот случай описывается следующей формулой $\eta_i^5(x_0, y)$:

$$\exists a_1 \exists a_2((a_1 < a_2) \wedge (\forall a_1 \leq r < a_2)(\exists z_{n(i)+1} ... \exists z_{2n(i)} \psi_i(x_0, r, z_{n(i)+1}, ..., z_{2n(i)}))\wedge$$
$$(\forall b < a_1)(\forall z_1 ... \forall z_n)\neg(\psi_i(x_0, b, z_1, ..., z_{n(i)}))\wedge$$
$$(\forall c \geq a_2)\exists d(a_2 \leq d \leq c)(\forall z_{2n(i)+1} ... \forall z_{3n(i)}\neg(\psi_i(x_0, d, z_{2n(i)+1}, ..., z_{3n(i)})) \wedge (y = \frac{a_1+a_2}{2}))$$

Случай 6: пусть никакой интервал вида $(-\infty, a), (-\infty, a]$ не лежит в Y, и найдутся $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $(a_1, a_2] \subseteq Y$. Тогда положим $y = \frac{a_1+a_2}{2}$). Этот случай описывается следующей формулой $\eta_i^6(x_0, y)$:

$$\exists a_1 \exists a_2((a_1 < a_2) \wedge (\forall a_1 < r \leq a_2)(\exists z_{n(i)+1} ... \exists z_{2n(i)} \psi_i(x_0, r, z_{n(i)+1}, ..., z_{2n(i)}))\wedge$$
$$(\forall b \leq a_1)(\forall z_1 ... \forall z_{n(i)})\neg(\psi_i(x_0, b, z_1, ..., z_{n(i)}))\wedge$$
$$(\forall c > a_2)\exists d(a_2 < d < c)(\forall z_{2n(i)+1} ... \forall z_{3n(i)}\neg(\psi_i(x_0, d, z_{2n(i)+1}, ..., z_{3n})) \wedge (y = \frac{a_1+a_2}{2}))$$

Случай 7: пусть Y состоит из одного интервала $[a, \infty)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Достаточно взять $y = a + 1$. Этот случай описывается следующей формулой $\eta_i^7(x_0, y)$:

$$\exists a(\forall b \geq a)(\exists z_1 ... \exists z_{n(i)} \psi_i(x_0, b, z_1, ..., z_{n(i)})\wedge$$
$$(\forall c < a)(\forall z_{n(i)+1} ... \forall z_{2n(i)}\neg(\psi_i(x_0, c, z_{n(i)+1}, ..., z_{2n(i)})) \wedge (y = a + 1)))$$

Случай 8: пусть Y состоит из одного интервала (a, ∞) для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Достаточно взять $y = a + 1$. Этот случай описывается следующей формулой $\eta_i^8(x_0, y)$:

$$\exists a(\forall b > a)(\exists z_1 ... \exists z_{n(i)} \psi_i(x_0, b, z_1, ..., z_{n(i)}) \wedge$$
$$(\forall c \leq a)(\forall z_{n(i)+1} ... \forall z_{2n(i)} \neg(\psi_i(x_0, c, z_{n(i)+1}, ..., z_{2n(i)})) \wedge (y = a + 1)))$$

Так как случаи 1-8 альтернативны, дизъюнкция

$$\Psi_i(x_0, y) = \bigvee_{k=1}^{8} \eta_i^k(x_0, y)$$

истинна только для одного y из Y. Теперь выберем наименьшее i, для которого формула $\exists z_1 ... \exists z_{n(i)} \psi_i(x_0, y, z_1, ..., z_{n(i)})$ определяет непустое множество для данного x_0. Положим $\nu_i(x_0, y) = (\bigwedge_{n<i} \forall t(\neg(\Psi_n(x_0, t)))) \wedge \Psi_i(x_0, y)$

В силу эффективной модельной полноты $\mathbb{R}_e$ для формул $\nu_i(x_0, y)$ можно эффективно найти эквивалентные им $\exists$-формулы $\nu_i^\sharp(x_0, y)$.

Так как i, для которого формула $\exists z_1 ... \exists z_{n(i)} \psi_i(x_0, y, z_1, ..., z_{n(i)})$ определяет непустое множество для данного x_0, единственно, то для каждого x_0 будет истинна только одна формула $\nu_i(x_0, y)$, а следовательно, и одна $\nu_i^\sharp(x_0, y)$ из дизъюнкции $\bigvee_{i\in\omega} \nu_i^\sharp(x, y)$. Единственность y, определяемого формулой $\nu_i(x_0, y)$ при фиксированном x_0, следует из построения формулы. Мы показали, таким образом, что формула $\bigvee_{i\in\omega} \nu_i^\sharp(x, y)$ определяет искомую функцию f.

Далее покажем, что эта дизъюнкция эквивалентна некоторой $\Sigma-$формуле в $HW(\mathbb{R}_e)$. Это можно сделать следующим образом: по замечанию (1.2.1) в $HW(\mathbb{R}_e)$ существует универсальный $\Sigma-$предикат. Пусть $\Phi_\Sigma(m, x, y)$ — определяющая его формула.

В силу эффективности построения формул $\nu_i^\sharp(x, y)$ существует рекурсивная функция, связывающая i и m — гёделев номер формулы $\nu_i^\sharp(x, y)$. Рекурсивная функция $\Sigma-$определима в $HW(\mathbb{R}_e)$, следовательно, найдётся $\Sigma-$формула $\lambda(i, m)$, определяющая эту функцию в $HW(\mathbb{R}_e)$.

Тогда формула $\exists i \exists m(\lambda(i, m) \wedge \Phi_\Sigma(m, x, y))$ эквивалентна дизъюнкции $\bigvee_{i\in\omega} \nu_i^\sharp(x, y)$.

Остаётся показать, что для полученной формулы найдётся эквивалентная ей $\Sigma-$формула языка $HW(\mathbb{R}_{exp})$. Это верно в силу леммы 3.1.2. $\square$

Следствие 3.1.1. *Существует $\Sigma-$определимая универсальная частичная функция для класса $\Sigma-$определимых в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Для доказательства следствия достаточно заметить, что для соответствующего класса предикатов существует универсальный предикат и, по теореме 3.1.1, класс обладает свойством униформизации.

Теорему 3.1.1 можно обобщить также и на случай произвольного $\Sigma-$предиката $P \subseteq HW(\mathbb{R}_{exp}) \times HW(\mathbb{R}_{exp})$.

Сформулируем утверждение теоремы 3.1.1 для произвольного $\Sigma-$предиката $P \subseteq \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp}) \times \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp})$.

Теорема 3.1.2. *Для любого $\Sigma-$определимого в $\mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp})$ предиката $P \subseteq \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp}) \times \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp})$ существует n-местная $\Sigma-$определимая функция f с областью определения $dom(f) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ и графиком $\Gamma_f \subseteq P$.*

Доказательство. Доказательство теоремы в основном повторяет доказательство теоремы 3.1.1, однако с важными дополнениями, касающимися построения дизъюнкции экзистенциальных формул и дальнейшей её трансформации.

Пусть предикат $P \subseteq \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp}) \times \mathbb{HW}(\mathbb{R}_{exp})$ определяется $\Sigma-$формулой $\exists\xi\Phi(\xi, x, y)$.(Предполагаем без ограничения общности, что это Σ_1-формула).

Как и в случае формулы над $\mathbb{R}$, построим эквивалентную ей дизъюнкцию $\exists-$формул сигнатуры σ, представляя общие переменные x, y как $\varkappa(\bar{u})$, $\varkappa'(\bar{v})$, где $\varkappa, \varkappa' \in \mathbb{HW}_n(n)\rceil$, а $\bar{u}$, $\bar{v}$ — кортежи прапеременных.

Формула $\exists\xi\Phi(\xi, x, y)$ в $\mathbb{HW}(\mathfrak{M}) \upharpoonright B_n$ эквивалентна

$$\bigvee_{\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{HW}_n(n)\rceil} \exists\bar{\xi}\exists\bar{u}\exists\bar{v}\Phi(\alpha(\bar{\xi}), \beta(\bar{u}), \gamma(\bar{v}))\&NE_{l(\beta)}(\bar{u})\&NE_{l(\gamma)}(\bar{v})\&(x = \beta(\bar{u}))\&(y = \gamma(\bar{v})).$$

Тогда $\exists\xi\Phi(\xi, x, y)$ эквивалентна дизъюнкции

$$\bigvee_{n\in\omega} \bigvee_{\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{HW}_n(n)\rceil} \exists\bar{u}\exists\bar{\xi}\exists\bar{v}\Phi(\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), \gamma(\bar{v}))\&NE_{l(\beta)}(\bar{u})\&NE_{l(\gamma)}(\bar{v})\&(x = \beta(\bar{u}))\&(y = \gamma(\bar{v}))$$

Хорошо известно ([8, 12]), что для каждой формулы $\exists\bar{\xi}NE_{l(\beta)}(\bar{u})\&NE_{l(\gamma)}(\bar{v})\&\Phi(\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), \gamma(\bar{v}))$ можно эффективно найти эквивалентную ей $\exists-$формулу сигнатуры σ $\varphi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}, \bar{v})$.

Тогда $\exists\xi\Phi(\xi, x, y)$ эквивалентна дизъюнкции

$$\bigvee_{n\in\omega} \bigvee_{\beta,\gamma \in \mathbb{HW}_n(n)\rceil} \exists\bar{u}\exists\bar{v}\varphi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}, \bar{v})\&(x = \beta(\bar{u}))\&(y = \gamma(\bar{v}))$$

Рассмотрим $\varphi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}, \bar{v})$. Покажем, что для каждой $\varphi_{<n,\beta,\gamma>}$ можно найти формулу $\psi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}, \bar{v})$, которая для каждого $\bar{u}_0$ верна для единственного набора $\bar{v}$ из множества Y, определяемого $\varphi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, \bar{v})$.

Из результата А. Хованского [52] и теоремы А. Вилки [80] следует, что любое определимое в $\mathbb{R}_{exp}$ множество $S \subseteq \mathbb{R}^{l(\gamma)}$ имеет конечное число связных компонент (как проекция некоторого экспоненциального многообразия $W \subseteq \mathbb{R}^{l(\gamma)+m}$ на $\mathbb{R}^{l(\gamma)}$). В частности, это верно для множества V, определяемого формулой $\varphi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, \bar{v})$. Будем рассматривать последовательно проекции множества V на координаты $v_0, v_1, \dots, v_{l(\gamma)-1}$. Так как проекция $pr(V, v_0)$ определима формулой $\exists v_1 \dots \exists v_{l(\gamma)-1} \varphi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, \bar{v})$, она представляет собой конечное объединение точек и интервалов. Построение формул $\eta_0^{j_0}(\bar{u}_0, v_0)$, $j_0 = 0, \dots, 8$, дизъюнкция которых выделят единственный элемент множества $pr(V, v_0)$, провидится, как в доказательстве теоремы 3.1.1.

На следующем шаге зафиксируем полученные v_0^0 для каждой формулы η_{j_0}. Каждое из получившихся множеств затем проектируем на v_1 и для $\exists v_0 \exists v_2 \dots \exists v_{m(n)-1} \eta_{j_0}(\bar{u}_0, v_0) \& \varphi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, v_0, v_1 \dots, v_{l(\gamma)-1})$ строим формулы $\eta_{j_0,j_1}(\bar{u}_0, v_1)$, $j_0, j_1 = 0, \dots, 8$.

Продолжая таким образом, после $l(\gamma)$ шагов имеем "дерево"формул $\eta_{j_0}, \dots ,$ $\eta_{j_0,\dots,j_{m(n)-1}}(\bar{u}_0, v_{l(\gamma)})$, $j_0, \dots, j_{l(\gamma)-1} = 0, \dots, 8$, каждая из которых определяет соответствующую координату $\bar{v}$ единственным образом.

Собирая эти формулы в соответствии с их нумерацией, получим искомую $\psi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}, \bar{v})$:

$$\psi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, \bar{v}) = \bigvee_{j_0,\dots,j_{l(\gamma)-1}=0}^{8} \bigwedge_{s=0}^{m(n)-1} \eta_{j_0,\dots,j_s}(\bar{u}_0, v_s)$$

Для однозначного определения y остаётся только выбрать из построенных формул одну для каждого $x \in \rho(P)$.

Положим

$$\nu_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, \bar{v}) = \bigvee_{\beta,\gamma \in \mathbb{HW}_n(n)\rceil} \psi_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, \bar{v}) \& (\bigwedge_{m<n} \forall t_0, \dots, t_{l(\gamma)-1} \bigwedge_{\delta \in \mathbb{HW}_m(m)\rceil} (\neg(\psi_{<m,\beta,\delta>}(\bar{u}_0, \bar{t}))))$$

Заметим, что здесь, как и в теореме 3.1.1 (лемма 3.1.2) необходимо воспользоваться переходом в систему $\mathbb{R}_e$. В силу эффективной модельной полноты в $\mathbb{R}_e$ для формул $\nu_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, \bar{v})$ можно эффективно найти эквивалентные им $\exists$-формулы $\nu^\sharp_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}_0, \bar{v})$.

Искомая функция определяется дизъюнкцией:

$$\bigvee_{n \in \omega} \nu^\sharp_{<n,\beta,\gamma>}(\bar{u}, \bar{v}) \& (x = \beta(\bar{u})) \& (y = \gamma(\bar{v}))$$

Полное доказательство теоремы получим, заменив в доказательстве теоремы 3.1.1 построение соответствующей дизъюнкции $\bigvee_{i \in \omega} \nu^\sharp_i(x, y)$ на вышеизложенное. $\square$

Замечание 3.1.2. Переход к системе с ограниченной функцией, использованный в доказательстве теоремы 3.1.2, может быть применён и к другим расширениям поля действительных чисел.

Так, например, аналогично можно доказать теорему об униформизации для $\Sigma-$предикатов списочной надстройки $\mathbb{HW}(\mathbb{R}_f)$, где f – функция Пфаффа.

Определим функция Пфаффа следующим образом. Цепью Пфаффа порядка $r \geq 0$ и степени $\alpha \geq 1$ в открытой области $G \subset \mathbb{R}^n$ назовём последовательность аналитических функций $f_1, \ldots, f_r$, удовлетворяющих уравнению Пфаффа $df_j(x) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} g_{ij}(x, f_1(x), \ldots, f_j(x))dx_i$, $1 \leq j \leq r$, где $g_{ij}(x, y)$ — полиномы от $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_j)$ степени не выше α. Функция $f(x) = P(x, f_1(x), \ldots, f_r(x))$, где $P(x, y_1, \ldots, y_r)$ — многочлен степени не выше $\beta \geq 1$, будем называть функцией Пфаффа порядка r и степени (α, β).

Эффективная модельная полнота $Th(\mathbb{R}_{f|_{[0,1]^m}})$ и $O-$минимальность систем $\mathbb{R}_{f|_{[0,1]^m}}$ с ограниченными функциями Пфаффа показана в работе [54]. По замечанию 3.1.1 имеем и $O-$минимальность систем $\mathbb{R}_f$.

Таким образом, получаем следующее:

Следствие 3.1.2. *Пусть f – функция Пфаффа. Для любого $\Sigma-$определимого в $HW(\mathbb{R}_f)$ предиката $P \subseteq HW(\mathbb{R}_f) \times HW(\mathbb{R}_f)$ существует n-местная $\Sigma-$определимая функция g с областью определения $dom(g) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ и графиком $\Gamma_g \subseteq P$.*

3.2. $\Sigma-$определимость и вычислимый анализ

Текущий параграф посвящён сравнению выразительных возможностей моделей вычислимости вычислимого анализа и $\Sigma-$определимости. Основной результат данного подраздела показывает, что классы функций, вычислимых при том и другом подходе, различны.

Перейдем к изложению основного результата данного параграфа:

Теорема 3.2.1. *Для любого расширения упорядоченного поля вещественных чисел $\mathbb{R}^*$ с разрешимой теорией существует всюду определённая вычислимая функция $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, не определимая в $\mathbb{HF}(\mathbb{R}^*)$ никакой $\Sigma-$формулой.*

Доказательство. Опишем алгоритм построения всюду определённой вычислимой функции $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, отличной от всех $\Sigma-$определимых в $\mathbb{HF}(\mathbb{R}^*)$.

Для начала зафиксируем некоторую вычислимую нумерацию пар рациональных чисел ν. Пусть также задано $\{\Phi_n(x,y)\}_{n\in\omega}$ – вычислимое перечисление всех $\Sigma-$форул сигнатуры σ_{HF} от двух переменных, а также разложения $\Phi_n(x,y) = \bigvee\limits_{i\in\omega} \varphi_i(\overline{x})$ из предложения 1 для каждой формулы. Перейдём к алгоритму построения функции.

На шаге 0 положим $F_0(x) \equiv 0$. Для каждого номера формулы n удобно задать маркер $r_n = 0$, показывающий, что для формулы $\Phi_n(x,y)$ еще не был найден свидетель.

На шаге $k+1$ рассматриваем все формулы $\Phi_n(x,y)$, для которых $n <= k+1$ и $r_n = 0$.

Находим для таких формул $\Phi_n(x,y)$ первые $k+1$ формул из разложения $\Phi_n(x,y) = \bigvee\limits_{i\in\omega} \varphi_i(\overline{x})$. Затем для каждой $\Phi_n(x,y)$ ищем среди найденных формул такие, что выполняется условие $\exists a_n \exists b_n (n < a_n < b_n < n+1) \& (\forall x((a_n \leq x \leq b_n)) \to \exists! y \varphi_i(x,y))$. Проверить выполненность данного условия возможно в силу разрешимости теории $\mathbb{R}^*$.

Если условие не выполняется для формулы $\Phi_n(x,y)$, то сразу же переходим к рассмотрению следующей формулы. Если же условие выполняется для некоторой формулы $\varphi_i(x,y)$ из разложения $\Phi_n(x,y)$, то говорим, что отрезок $[n, n+1]$ стабилизировался. В этом случае фиксируем такую $\varphi_i(x,y)$ с наименьшим номером i, и находим $a_n,\ b_n \in \mathbb{Q}$ с наименьшим номером ν, удовлетворяющие формуле.

Теперь проверяем условие $\varphi_i(\frac{b_n+a_n}{2}, 0)$. Если условие не выполняется, то помечаем номер n как рассмотренный ($r_n := 1$) и немедленно переходим к рассмотрению следующей формулы $\Phi_n(x,y)$. Если условие выполняется, тогда полагаем $F_{k+1}(x) = F_k(x)$, при $x \notin [n, n+1]$, при $x \in [n, \frac{b+a}{2}]$ $F_{k+1}(x) = 2^{-2k\frac{\frac{b+a}{2}-x}{\frac{b+a}{2}-n}}$, при $x \in [\frac{b+a}{2}, n+1]$ $F_{k+1}(x) = 2^{-2k\frac{x-\frac{b+a}{2}}{n+1-\frac{b+a}{2}}} + 2^{-2k}$,

после чего полагаем $r_n := 1$ и переходим к рассмотрению следующей формулы. Рассмотрев все формулы $n <= k$, переходим к шагу $k+2$.

Покажем, что построенная функция не можеть быть определена никакой $\Sigma-$формулой в $\mathbb{HF}(\mathbb{R}^*)$.

Пусть формула Φ_n определяет тотальную функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда в её разложении найдётся формула $\varphi_i(x,y)$, определяющая эту функцию на некотором отрезке $[a,b] \subseteq [n, n+1]$, то есть такая, что условие $\exists a \exists b (n < a < b < n+1) \& (\forall x((a \leq x \leq b)) \to \exists! y \varphi_i(x,y))$ будет выполняться.В силу разрешимости $Th(\mathbb{R}^*)$ можем эффективно проверить это условие.

По построению для каждой такой формулы мы определили точку $x_n = \frac{b_n+a_n}{2}$, в которой значение функции F отлично от задаваемого формулой $\varphi_i(x,y)$, а следовательно, и формулой

$\Phi_n(x, y)$.

Покажем теперь, что построенная функция будет вычислимой в смысле определения Вайрауха, то есть найдётся некоторая машина Тьюринга, которая по заданной точности k и имени входа ρ после конечного числа шагов выдает значение функции с такой точностью.

Пусть задано некоторе имя Коши числа $x \in \mathbb{R}$, то есть последовательность $\{q_s\}_{s \in \mathbb{N}}$, быстро сходящаяся к x, и точность 2^{-k}, с которой необходимо вычислить $F(x)$. Находим все Φ_n, для которых $[q_s - 2^{-s}, q_s + 2^{-s}] \cap [n, n+1] \neq \varnothing$ и $n > q_s + 2^{-s}$. Производим k шагов представленного выше алгоритма вычисления для каждой такой Φ_n.

В качестве выходного имени функции $F(x)$ берём значения, вычисленные на каждом шаге: $F_k(q_s)$.

$$F_k(q_s) = \begin{cases} 2^{-2m}, \text{ если } q_s = \frac{b_n + a_n}{2}, \\ \frac{2^{-2k}}{\frac{b_n+a_n}{2} - n}(q_s - n), \text{ если функция на отрезке } [n, n+1] \text{ стабилизировалась} \\ \ \text{на некотором шаге } m < k \text{ и } n < q_s < \frac{b_n+a_n}{2}, \\ \frac{2^{-2m}}{n+1-\frac{b_n+a_n}{2}}(n+1-q_s), \text{ если функция на отрезке } [n, n+1] \text{ стабилизировалась} \\ \ \text{на некотором шаге } m < k \text{ и } \frac{b_n+a_n}{2} < q_s < n+1, \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что в любом случае $F_k(q_s) \in \mathbb{Q}$. Оценим разницу $|F_k(q_s) - F(x)|$.

На каждом шаге k вычисления значение функции в любой точке меняется не более, чем на 2^{-2k}, при этом на каждом отрезке $[n, n+1]$ она изменяется не более одного раза. Пусть функция меняется на $[n, n+1]$ на некотором последующем шаге $k+s$, тогда $|F_k - F| \leq 2^{-2(k+s)} < 2^{-2k}$ в каждой точке $[n, n+1]$.

В случае, когда функция стабилизировалась на $[n, n+1]$ на некотором шаге $m \leq k$, разница

$$|F_k(q_s) - F(x)| \leq |\frac{2^{-2m}}{\frac{b_n+a_n}{2} - n}(q_s - n) - \frac{2^{-2k}}{\frac{b_n+a_n}{2} - n}(x - n)| \leq |\frac{2^{-2m}}{\frac{b_n+a_n}{2} - n}(q_s - x)| <$$

$$< |\frac{2^{-2m}}{\frac{b_n+a_n}{2} - n} 2^{-s}| = |\frac{2^{-2m-s}}{\frac{b_n+a_n}{2} - n}|.$$

Тогда достаточно выбрать точность входа s так, чтобы выполнялось $2^{-2m-s} < \frac{b_n+a_n}{2}2^{-2k}$. Это можно сделать в силу быстрой сходимости $\{q_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ к x. Таким образом, после k шагов вычисления мы знаем функцию с точностью 2^{-2k}. □

Замечание 3.2.1. Заметим, что обратный результат легко может быть получен в силу непрерывности всех вычислимых по Вайрауху функций. Так, даже такая простая функция, как сигнум

$$sign(x) = \begin{cases} 0, \ if \ x < 0, \\ 1, \ if \ x \geq 0. \end{cases}$$

не является вычислимой при таком подходе [79].

С другой стороны сигнум, очевидно, может быть определён Δ_0−формулой $((x < 0)\&(y = 0)) \vee ((x \geq 0)\&(y = 1))$ в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.

Будем обозначать $\mathbb{R}_{exp}$ алгебраическую систему $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, exp(x), <, 0, 1\rangle$, где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел; операции $+, \cdot$, отношение $<$ и константы $0, 1$ интерпретируются обычным образом, $exp(x)$ — экспоненциальная функция.

В совместной работе А. Макинтира и А. Вилки [65] показана разрешимость $\mathbb{R}_{exp}$ при условии выполнения следующего предположения, носящего имя предположения Шануэля.

Пусть n – натуральное число, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда степень трансцендентности расширения $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n, e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}) \geq n$.

Таким образом, теорема 3.2.1 дает нам следующее.

Следствие 3.2.1. *При условии выполнения предположения Шануэля существует вычислимая действительная функция, не Σ−определимая в наследственно конечной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой.*

Замечание 3.2.2. Заметим, что для данного расширения существует и более простой способ доказательства следствия 3.2.1. Макинтиром и Вилки показано [65], что при выполнении предположения Шануэля, число π не может быть определено Σ−формулой в $\mathbb{R}_{exp}$. С помощью разложения Σ−формулы в бесконечную дизъюнкцию $\exists$−формул легко показать, что в этом случае невозможно определить Σ−формулой и функцию синуса в $HW(\mathbb{R}_{exp})$.

Действительно, пусть $\Phi(x,y)$ — $\Sigma-$формула, определяющая синус в $HW(\mathbb{R}_{exp})$. Она эквивалентна дизъюнкции $\exists-$формул $\bigvee\limits_{n\in\omega}\varphi_n(x,y)$, где $\varphi_n(x,y)$ – $\exists-$формула $\mathbb{R}_{exp}$. Так как $sin(\pi)=0$, то формула $\Phi(\pi,0)$ истинна, и, соответственно, истинна дизъюнкция $\bigvee\limits_{n\in\omega}\varphi_n(x,y)$. Тогда существует по крайней мере одна формула $\varphi_n(x,y)$, такая что $\varphi_n(x,0)$ определяет π в $\mathbb{R}_{exp}$, что, как мы знаем, невозможно.

4. Списочные надстройки конечных рангов

Данная глава посвящена изучению автоматности списочных надстроек конечных рангов и разрешимости теорий таких структур. Основные задачи, рассматриваемые в этой главе, могут быть сформулированы следующим образом:

Проблема 1. Предположим, что $\mathcal{M}$ — счётная структура, и $S(\mathcal{M})$ — некоторая *расширенно-списочная надстройка* над $\mathcal{M}$ (например, $LS(\mathcal{M})$ или $ELS(\mathcal{M})$). Формальное определение расширенно-списочной надстройки будет приведено в § 1.4.

(i) Если элементарная теория структуры $\mathcal{M}$ разрешима, то будет ли теория $S(\mathcal{M})$ также разрешимой? Аналогичный вопрос может быть поставлен и для полных диаграмм структур.

(ii) Пусть $\mathcal{M}$ имеет копию, представимую определённым видом конечного автомата (например, конечным или древесным автоматом). Будет ли в таком случае $S(\mathcal{M})$ обладать тем же свойством?

Отметим, что С. С. Гончаров [4] доказал, что из разрешимости теории $\mathcal{M}$ следует разрешимость теории $LS(\mathcal{M})$ (см. предложение 3 в § 1.4).

4.1. Элементарные теории списочных надстроек

Перейдём к рассмотрению первой части проблемы 1: будем исследовать вопросы разрешимости элементарных теорий расширенно-списочных надстроек.

В этом разделе будем считать, что для любой рассматриваемой структуры её носитель является вычислимым бесконечным подмножеством ω. Поэтому перед тем, как приступить к изложению результатов, определим *стандартное представление* расширенно-списочной надстройки. Нашим главным требованием при формулировке этого определения будет выполнение нашего условия на носитель структуры.

Зафиксируем стандартную гёделевскую нумерацию γ, сопоставляющую конечным (возможно, пустым) кортежам натуральных чисел натуральные числа. Пусть $\mathcal{M}$ — L-структура с носителем M. Тогда носитель *стандартного представления* Ψ-$S(\mathcal{M})$ равен множеству

$$\{2x : x \in M\} \cup \{2\gamma(\bar{a}) + 1 : \bar{a} \text{ — это кортеж из } M\}.$$

Будем отождествлять атом $a \in M$ с элементом $2a$ из стандартного представления. Список $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle$ отождествляется с элементом $2\gamma(a_0, a_1, \ldots, a_n) + 1$. Используя приведённые соглашения, можно естественным образом определить все символы языка Ψ-$S(\mathcal{M})$.

Одним из естественных классов теории вычислимых моделей являются структуры эквивалентности. *Структура эквивалентности* $\mathcal{A}$ определяется при помощи задания её носителя A и отношения эквивалентности $E^{\mathcal{A}}$ на носителе. Если $\mathcal{A}$ — структура эквивалентности и $a \in \mathcal{A}$, то $[a]_{\mathcal{A}}$ обозначает класс эквивалентности a в $\mathcal{A}$.

Характер структуры эквивалентности $\mathcal{A}$ — это множество

$$\chi(\mathcal{A}) = \{(n, k) : 0 < n < \omega,\ 0 < k < \omega,\ \mathcal{A} \text{ содержит не менее } k \text{ различных классов эквивалентности размера } n\}.$$

Характер $\mathcal{A}$ называется *ограниченным*, если существует натуральное число N, такое, что размер любого конечного класса эквивалентности в $\mathcal{A}$ не превосходит N. Отметим, что две счётные структуры эквивалентности изоморфны в том и только том случае, когда они имеют одинаковый характер и одно и то же число бесконечных классов эквивалентности.

Наш первый результат показывает следующее: переход от структуры $\mathcal{M}$ к стандартному представлению её расширенно-списочной надстройки не всегда сохраняет разрешимость структуры (т.е. вычислимость полной диаграммы).

Теорема 4.1.1. *Предположим, что $\mathcal{A}$ — структура эквивалентности с вычислимым неограниченным характером и бесконечным числом бесконечных классов. Тогда существует $\mathcal{B}$ — разрешимая копия структуры $\mathcal{A}$, такая, что стандартное представление расширенно-списочной надстройки $\{\in\}$-$S(\mathcal{B})$ неразрешимо.*

Доказательство. В начале напомним критерий разрешимости для структур эквивалентности:

Лемма 4.1.1 (следует из Теорем 5.2 и 5.6 из [97])**.** *Вычислимая структура эквивалентности $\mathcal{A}$ является разрешимой тогда и только тогда, когда следующие множества вычислимы:*

её характер $\chi(\mathcal{A})$ *и множество*

$$K(\mathcal{A}) := \{(a,k) : a \in \mathcal{A},\ k \in \omega,\ card([a]_{\mathcal{A}}) \geq k\}.$$

Более того, структура эквивалентности имеет разрешимую копию в том и только том случае, когда её характер вычислим.

Для простоты изложения будем предполагать, что для любого конечного N, наша структура эквивалентности $\mathcal{A}$ имеет не более одного класса размера N. Доказательство общего случая проводится аналогично.

Найдём вычислимое бесконечное множество S, такое, что $\chi(\mathcal{A}) = \{(n,1) : n \in S\}$. Пусть W — вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество. Зафиксируем некоторое эффективное перечисление $\{W^s\}_{s\in\omega}$ для W, такое, что $W^s \subseteq \{0,1,\ldots,s-1\}$ для любого s.

Построение $\mathcal{B}$ будем проводить по шагам. На шаге s определяем вычислимую структуру эквивалентности $\mathcal{B}^s$ (с носителем B^s), такую что $\mathcal{B}^s \subseteq \mathcal{B}^{s+1}$. Также определяется конечное множество T^s.

Шаг 0. Полагаем $T^0 = \emptyset$ и $B^0 = \{\langle x,0\rangle : x \in \omega\}$. Отношение $E^{\mathcal{B}_0}$ определяется как тождественное отношение на B^0.

Шаг $s+1$. Для каждого $x \leq s$ поступаем следующим образом. Если $x \notin W^{s+1}$, то добавляем новый элемент в класс $[\langle x,0\rangle]_{\mathcal{B}^s}$. Если $x \in W^{s+1} \setminus W^s$, то выберем наименьшее число n, такое, что $n \in S$, $n \geq card([\langle x,0\rangle]_{\mathcal{B}^s})$ и n ещё не было перечислено в T^{s+1}. Такое n найдётся, так как множество S бесконечно. Используя новые элементы, (при необходимости) увеличиваем класс $[\langle x,0\rangle]_{\mathcal{B}^s}$ до размера n. Также перечисляем n в T^{s+1}.

Затем выбираем наименьшее $m \in S$, которое ещё не было перечислено в T^{s+1}, и создаём класс размера m в $\mathcal{B}^{s+1}$, используя новые элементы. Перечисляем m в T^{s+1}.

Описание конструкции завершено. Положим $\mathcal{B} := \bigcup_{s\in\omega} \mathcal{B}^s$. Нетрудно показать, что $\mathcal{B}$ — вычислимая структура эквивалентности с носителем ω.

Нетрудно показать, что $\mathcal{B}$ имеет бесконечно много бесконечных классов. Более того, из построения следует, что для любого конечного размера n следующие условия эквивалентны: $(n \in \bigcup_{s\in\omega} T^s = S) \Leftrightarrow$ ($\mathcal{B}$ содержит класс размера n) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{B}$ содержит единственный класс размера n). Следовательно, $\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A})$ и структура $\mathcal{B}$ изоморфна $\mathcal{A}$.

Предположим, что $b \in \mathcal{B}$ и $k \in \omega$. Найдём наименьший шаг s_0 такой, что $b \in \mathcal{B}^{s_0}$. Тогда соотношение $card([b]_{\mathcal{B}}) \geq k$ верно в том и только том случае, когда $card([b]_{\mathcal{B}^{s_0+k}}) \geq k$. Таким образом, множество $K(\mathcal{B})$ вычислимо и, по Лемме 4.1.1, $\mathcal{B}$ разрешима.

Заметим, что для любого $n \in \omega$ условие $n \in W$ выполнено тогда и только тогда, когда класс $[\langle n, 0\rangle]_{\mathcal{B}}$ конечен. В структуре $\{\in\}$-$S(\mathcal{B})$ элементы x из $\mathcal{B}$, имеющие конечные классы, определимы следующей формулой

$$Fin(x) := \exists Y \forall z [E^{\mathcal{B}}(z, x) \to z \in Y].$$

Из этих двух утверждений следует, что для натурального числа n условие $n \in W$ выполняется в том, и только в том случае, когда формула $Fin(2\langle n, 0\rangle)$ истинна в стандартном представлении $\{\in\}$-$S(\mathcal{B})$. В силу того, что W невычислимо, наше представление не может быть разрешимым. $\square$

В качестве следствия этой теоремы получаем тот факт, что стандартное представление обогащённой списочной надстройки $ELS(\mathcal{B})$ также неразрешимо. Заметим, что Теорема 4.1.1 ничего не говорит о том, может ли $ELS(\mathcal{B})$ *иметь разрешимые копии.* Поэтому в следующем подразделе будет получен результат, из которого будет следовать, что существует разрешимая структура $\mathcal{M}$, такая, что $ELS(\mathcal{M})$ *не имеет разрешимых копий.* Тем не менее, Теорема 4.1.1 интересна сама по себе: во-первых, она использует простой (но достаточно широкий) класс алгебраических структур; во-вторых, для получения этого примера нам потребовалось только отношение $\in$ из обогащённой списочной надстройки.

Приведённый ниже результат показывает следующее: переход от структуры $\mathcal{M}$ к расширенно-списочной надстройке над $\mathcal{M}$ не всегда сохраняет разрешимость элементарной теории.

Теорема 4.1.2. *Пусть $\mathcal{M} = (\omega; +)$ — это коммутативный моноид натуральных чисел относительно сложения. Тогда элементарная теория $ELS(\mathcal{M})$ неразрешима.*

Доказательство. Достаточно показать, что умножение атомов формульно определимо (без параметров) в $ELS(\mathcal{M})$. Напомним, что элементы $0, 1, 2$ и естественный порядок $\leq$ на атомах определимы в $(\omega, +)$: например, соотношение $(x \leq y)$ определимо с помощью формулы $\exists z(x + z = y)$. Следовательно, можем использовать $0, 1, 2$ и $\leq$ в наших формулах. Как обычно, формула $(\forall X \sqsubseteq Y)\psi(X, Y)$ будет означать, что $\forall X[(X \sqsubseteq Y) \to \psi(X, Y)]$.

Зададим вспомогательную формулу $\psi(X,y)$, означающую, что $y \neq 1$ и список X имеет вид $\langle 1, y, 2, 2\cdot y, \ldots, n, n\cdot y\rangle$ для некоторого ненулевого $n \in \omega$.

$$\psi(X,y) := (y \neq 1)\ \&\ (\forall Z \sqsubseteq X)\big\{[(tail^2(Z) = nil)\&(tail(Z) \neq nil) \to$$

$$(head(Z) = y)\&(head(tail(Z)) = 1)]\ \&\ [(tail^4(Z) = nil)\&(tail^3(Z) \neq nil) \to$$

$$(head(Z) = y + y)\&(head(tail(Z)) = 2)\big\}\ \&\ \forall U\forall V\forall W\big\{[(W \sqsubseteq X)\&$$

$$(V = tail^2(W))\&(U = tail^2(V))\&(U \neq nil)] \to [((head(W) = head(V) + 1)\&$$

$$(head(V) = head(U) + 1)) \vee ((head(W) = head(V) + y)\&$$

$$(head(V) = head(U) + y)]\big\}\ \&\ \big\{[(tail^2(X) = nil)\&(tail(X) \neq nil)]\vee$$

$$[(tail^3(X) \neq nil)\&(head(X) = head(tail^2(X)) + y)]\big\}.$$

Требование $y \neq 1$ в формуле $\psi(X,y)$ обусловлено необходимостью для списка X иметь *чётную* длину, т.е. из условия, что голова списка X должна совпадать с $n \cdot y$.

Таким образом, $x \cdot y = z$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

a) $x = 0$ и $z = 0$,

b) $y = 1$ и $x = z$,

c) $x \neq 0$, $y \neq 1$, и

$$\exists X[\psi(X,y)\&(head(tail(X)) = x)\&(head(X) = z)];$$

т.е. X — это список вида $\langle 1, y, 2, 2y, \ldots, x, x\cdot y\rangle$.

Теорема 4.1.2 доказана. □

Заметим также, что константа nil определима формулой $[tail(x) = x]$. Поэтому можно утверждать следующее:

Следствие 4.1.1. *Расширенно-списочная структура* $\{head, tail, \sqsubseteq\}$-$S(\omega,+)$ *не имеет разрешимых копий. В частности, она не может быть представлена с помощью конечного или древесного автомата.*

Предположим, что $A, B \subseteq \omega$. Напомним, что множества A и B *вычислимо изоморфны*, если существует вычислимая перестановка τ множества ω, такая, что $\tau(A) = B$. Известно (см.

например, Теорему X в [98, § 14.7]), что арифметика первого порядка, т.е. теория $Th(\omega, +, \cdot)$, вычислимо изоморфна $\emptyset^{(\omega)}$, ω-скачку пустого множества (подробности см. в [98]). Таким образом, нетрудный анализ доказательства Теоремы 4.1.2 показывает следующее:

Следствие 4.1.2. *Элементарная теория структуры* $\{head, tail, \sqsubseteq\}$-$S(\omega, +)$ *вычислимо изоморфна* $\emptyset^{(\omega)}$.

Предположим, что n — ненулевое натуральное число и $\mathcal{M}$ — некоторая структура. Тогда *n-я итерация* обогащённой списочной надстройки над $\mathcal{M}$ определяется следующим образом:

$$ELS^n(\mathcal{M}) := \underbrace{ELS(ELS(\ldots ELS}_{n \text{ раз}}(\mathcal{M})\ldots)).$$

Теорема 4.1.3. *Предположим, что A — непустое не более чем счётное множество. Тогда элементарная теория структуры $ELS^2(A)$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $a \in A$. Зададим формулы $\psi_{Dom}(X, a)$ и $\psi_+(X, Y, Z, a)$ со следующими свойствами:

1. множество $Dom := \{X : ELS^2(A) \models \psi_{Dom}(X, a)\}$ является подмножеством $ELS(A)$;

2. структура $\mathcal{S} = (Dom; \{(X, Y, Z) \in Dom^3 : ELS^2(A) \models \psi_+(X, Y, Z, a)\})$ изоморфна моноиду $(\omega; +)$ в предикатном языке.

Существования таких формул ψ_{Dom} и ψ_+ оказывается достаточно для доказательства теоремы. Действительно, рассмотрим следующее рассуждение:

(1) Используя формулы ψ_{Dom} и ψ_+, можно определить структуру $\mathcal{N} := \{head, tail, \sqsubseteq\}$-$S(\omega, +)$ в $ELS^2(A, a)$ следующим образом:

- атомы задаются формулой ψ_{Dom}, а множество списков определимо формулой $\psi_{List}(X, a) := (\forall Y \in X)\psi_{Dom}(Y, a)$;

- сложение (более точно, его график) задаётся формулой ψ_+;

- символы $head$, $tail$, и $\sqsubseteq$ определяются естественным образом: например,

$$u = head(Y) \;\Leftrightarrow\; ELS^2(A, a) \models \psi_{List}(Y, a) \,\&\, (u = head(Y)).$$

(2) Так как структура $\mathcal{N}$ формульно определима (без параметров) в $ELS^2(A,a)$, из следствия 4.1.2 вытекает, что теория $Th(ELS^2(A,a))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. Таким образом, множество $\emptyset^{(\omega)}$ 1-сводимо к теории $Th(ELS^2(A,a))$. Отсюда нетрудно получить, что существует вычислимая последовательность $\{\xi_n(x)\}_{n\in\omega}$ формул языка $ELS^2(A)$ со следующими свойствами:

- $\xi_i \neq \xi_j$ для $i \neq j$;
- для любого $n \in \omega$ условие $n \in \emptyset^{(\omega)}$ выполнено тогда и только тогда, когда $ELS^2(A) \models \xi_n(a)$.

Пусть c — произвольный элемент A. Нетрудно показать, что существует автоморфизм F структуры $ELS^2(A)$, такой, что $F(a) = c$. Следовательно, для любого $n \in \omega$ имеем $ELS^2(A) \models (\xi_n(a) \leftrightarrow \xi_n(c))$. Отсюда получаем следующее:

$$n \in \emptyset^{(\omega)} \;\Leftrightarrow\; ELS^2(A) \models \forall x[\mathtt{атом}(x) \to \xi_n(x)].$$

Следовательно, имеет место $\emptyset^{(\omega)} \leq_1 Th(ELS^2(A))$. Так как структура $ELS^2(A)$ вычислима, также имеем $Th(ELS^2(A)) \leq_1 \emptyset^{(\omega)}$. Следовательно, теория $Th(ELS^2(A))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка.

Теперь дадим формальные определения формул ψ_{Dom} и ψ_+. Положим

$$\psi_{Dom}(X,a) := (\forall y \in X)(y = a).$$

Другими словами, множество Dom состоит из списков, которые содержат только элемент a:

$$Dom = \{nil, \langle a\rangle, \langle a,a\rangle, \langle a,a,a\rangle, \dots\}.$$

Для определения формулы ψ_+ нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 4.1.2. *Предположим, что n — ненулевое натуральное число. Операция конкатенации списков*

$$conc_n\colon ELS^n(A) \times ELS^n(A) \to ELS^n(A)$$

формульно определима в $ELS^{n+1}(A)$.

Доказательство. Введём сначала *обращение* Y^R списка Y: если $Y = \langle a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\rangle$, то $Y^R = \langle a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0\rangle$.

Введём также вспомогательную формулу $\varphi(F,X,Y)$, означающую следующее: Если $X=\langle a_0,a_1,\ldots,a_k\rangle=\langle\bar a\rangle$ и $Y=\langle b_0,b_1,\ldots,b_{m-1},b_m\rangle$, то список F имеет вид

$$\langle X,Y,\langle\bar a,b_m\rangle,\langle b_0,b_1\ldots,b_{m-1}\rangle,\langle\bar a,b_m,b_{m-1}\rangle,\langle b_0,b_1,\ldots,b_{m-2}\rangle,\ldots,$$
$$\langle\bar a,b_m,b_{m-1},\ldots,b_1\rangle,\langle b_0\rangle,\langle\bar a,b_m,b_{m-1},\ldots,b_1,b_0\rangle,nil\rangle.$$

Формулу φ определим как:

$$\varphi(F,X,Y):=[cons(cons(cons(cons(nil,X),Y),cons(X,head(Y))),tail(Y))\sqsubseteq F]\,\&$$
$$[head(tail(F))=cons(head(tail^3(F)),head^2(tail^2(F)))]\,\&\,[head(F)=$$
$$=tail(head(tail^2(F)))]\,\&\,(\forall Z\sqsubseteq F)\{(tail^4(Z)\neq nil)\to$$
$$[(head(Z)=tail(head(tail^2(Z))))\,\&\,(head(tail^2(Z))=tail(head(tail^4(Z))))]\vee$$
$$[(head(Z)=cons(head(tail^2(Z)),head^2(tail(Z))))\,\&$$
$$(head(tail^2(Z))=cons(head(tail^4(Z)),head^2(tail^3(Z))))]\}\,\&$$
$$[(head(F)=nil)\&(head(tail^2(F))\neq nil)].$$

Тогда условие $Z=Y^R$ может быть записано формулой

$$[(Y\neq nil)\,\&\,\exists F(\varphi(F,nil,Y)\,\&\,head(tail(F))=Z)]\vee[Y=Z=nil].$$

Для определения конкатенации списков X и Y из $ELS^n(A)$ нам потребуется существование списка F следующего вида:

$$\langle X,Y^R,cons(X,head(Y^R)),tail(Y^R),$$
$$cons(cons(X,head(Y^R)),head(tail(Y^R))),tail^2(Y^R),\ldots,conc_n(X,Y),nil\rangle,$$

который и задаётся формулой $\varphi(F,X,Y^R)$. Более формально, формула $Z=conc_n(X,Y)$ может быть записана следующим образом:

$$[(Y\neq nil)\,\&\,\exists F(\varphi(F,X,Y^R)\,\&\,(head(tail(F))=Z))]\vee[(Y=nil)\,\&\,(Z=X)].$$

Лемма 4.1.2 доказана. $\square$

Лемма 4.1.2 позволяет нам определить формулу

$$\psi_+(X, Y, Z, a) := \psi_{Dom}(X, a) \& \psi_{Dom}(Y, a) \& (Z = conc_1(X, Y)).$$

Нетрудно показать, что $ELS^2(A) \models \psi_+(X, Y, Z, a)$ в том и только в том случае, если списки X, Y, Z содержат только элемент a, а длина Z совпадает с суммой длин X и Y. Таким образом, структура $\mathcal{S}$, которая была определена в начале доказательства, изоморфна моноиду $(\omega; +)$. Теперь, используя рассуждение, приведённое перед Леммой 4.1.2, заключаем, что $Th(ELS^2(A))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. Теорема 4.1.3 доказана. □

Следствие 4.1.3. *Пусть $\mathcal{M}$ — L-структура, имеющая арифметическую атомарную диаграмму $D(\mathcal{M})$, т.е. $D(\mathcal{M}) \leq_T \emptyset^{(n)}$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда элементарная теория структуры $ELS^2(\mathcal{M})$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. В частности, $ELS^2(\mathcal{M})$ не представима с помощью конечного или древесного автомата.*

4.2. Автоматные и древесно автоматные представления списочных надстроек

В этом разделе рассматривается вторая часть проблемы 1: расширенно-списочные надстройки, представимые конечными автоматами. Основное внимание сосредоточено на надстройках $LS(\mathcal{M})$ и $ELS(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ принадлежит некоторому естественному классу структур.

Предположим, что $\mathcal{M}$ — автоматная структура. В данном разделе будут получены необходимые и достаточные условия для автоматной представимости надстройки $LS(\mathcal{M})$. В частности, этот результат является ответом на вопрос, представленный в [90, с. 721]. В начале напомним известный вспомогательный результат:

Лемма 4.2.1 ([84], см. также лемму 1 в [86])**.** *Предположим, что Σ — конечный алфавит и $D \subseteq \Sigma^*$. Если $f \colon D^n \to D$ — функция, график которой распознаётся конечным автоматом, то существует константа C, такая, что для всех $x_1, \ldots, x_n \in D$ выполнено*

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + C.$$

Теорема 4.2.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — структура конечного языка. Тогда списочная надстройка $LS(\mathcal{M})$ имеет автоматное представление в том и только том случае, когда $\mathcal{M}$ конечна.*

Доказательство. ($\Leftarrow$): Если $\mathcal{M}$ – конечная структура, то несложно построить автоматное представление для $LS(\mathcal{M})$, следуя доказательству предложения 3 из [90].

($\Rightarrow$): Достаточно показать, что для бесконечного счётного множества A его надстройка $LS(A)$ не допускает автоматных представлений. Предположим противное: пусть $\mathcal{A}$ — некоторая автоматная копия структуры $LS(A)$, Σ — алфавит для $\mathcal{A}$ и D — основное множество $\mathcal{A}$.

Напомним, что строчные латинские буквы используются для обозначения атомов, а заглавные — для обозначения списков. Определим функцию $f\colon D^2 \to D$ следующим образом:

$$f(X,y) := cons(X,y); \quad f(x,y) = f(X,Y) = f(x,Y) := nil.$$

Заметим, что функция f формульно определима в $\mathcal{A}$. Следовательно, по предложению 4, график f есть регулярное отношение. Таким образом, по лемме 4.2.1 найдётся константа $C \in \omega$, такая, что для всех $x, y \in D$ выполняется $|f(x,y)| \leq \max\{|x|,|y|\} + C$. Отсюда для элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, являющихся атомами $\mathcal{A}$, легко выводится следующее ограничение:

$$|\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle| \leq \max\{|nil^{\mathcal{A}}|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\} + nC \leq \max_{1\leq i\leq n} |a_i| + C_1 + nC, \tag{2}$$

где C_1 — это некоторая константа.

Пусть $\leq_l$ — линейное упорядочение атомов, заданное по правилу: $x \leq_l y \Leftrightarrow |x| < |y|$ или ($|x| = |y|$ и x лексикографически меньше либо равен y). Предположим, что $b_1 <_l b_2 <_l b_3 <_l \dots$ — список всех атомов $\mathcal{A}$. Зафиксируем натуральное t_0, такое, что $card(\Sigma) \leq 2^{t_0}$. Для числа n определим множество S_n по правилу:

$$S_0 = \{nil^{\mathcal{A}}\}, \quad S_{n+1} = \{cons(X, b_i) : X \in S_n,\ i \leq 2^{2t_0 C}\}.$$

Пусть $l_0 := |b_{2^{2t_0C}}|$. По (2), для каждого $x \in S_n$ длина x не превышает $l_0 + C_1 + nC$. Следовательно, для всех n выполняется

$$card(S_n) = 2^{2t_0Cn} \leq (card(\Sigma))^{1+l_0+C_1+Cn} \leq 2^{t_0\cdot(1+l_0+C_1+Cn)}.$$

Таким образом, $2^{t_0 Cn} \le C'$, где C' — константа. Полученное противоречие доказывает отсутствие у $LS(A)$ автоматных представлений. $\square$

В данном разделе приводится несколько примеров, связанных с древесно-автоматными списочными надстройками. Известно, что структура $(\omega, +)$ имеет автоматное представление. Таким образом, теорема 4.1.2 даёт пример автоматной структуры $\mathcal{M}$, такой, что $ELS(\mathcal{M})$ не имеет древесно-автоматных представлений. Также докажем следующее:

Предложение 4.2.1. *Пусть α — ординал, такой, что $\alpha \ge \omega^\omega$. Тогда структура $ELS(\alpha)$ не имеет древесно-автоматных представлений.*

Для начала дадим описание необходимых вспомогательных объектов, которые будут использоваться в доказательстве предложения 4.2.1.

Предположим, что $k \ge 2$ и $0 \le t < k$. Квантор $\exists^{(t,k)}$ определяется следующим образом: для структуры $\mathcal{M}$ и формулы $\psi(x)$, условие $\mathcal{M} \models (\exists^{(t,k)} x)\psi(x)$ выполнено в том и только том случае, когда множество $\psi[\mathcal{M}]$ конечно и $t = card(\psi[\mathcal{M}]) \mod k$ (т.е. мощность $\psi[\mathcal{M}]$ равна $kz + t$ для некоторого целого z).

Если L — это язык, то через $FO_L(\exists^{(t,k)})$ обозначим множество всех L-формул логики первого порядка, расширенной кванторами $\exists^{(t,k)}$ для $t, k \in \omega$. Иногда будем опускать индекс L в обозначении $FO_L(\exists^{(t,k)})$. Следующая лемма является обобщением предложения 4.

Лемма 4.2.2 ([99, 100]). *Предположим, что $\mathcal{M}$ — структура конечного языка L. Если $\mathcal{M}$ автоматна (древесно-автоматна), то существует алгоритм, по заданной формуле $\psi(\bar{x})$ из $FO_L(\exists^{(t,k)})$ выдающий конечный автомат (древесный автомат), распознающий множество $\psi[\mathcal{M}]$.*

Следующий результат может быть полезен для доказательства несуществования древесно-автоматных представлений.

Лемма 4.2.3. *Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая структура, α — бесконечный ординал. Предположим также, что существует $FO(\exists^{(t,k)})$-определение α в $\mathcal{M}$, заданное формулами $D(x)$ и $R(x, y)$ (возможно, с параметрами $\bar{c}$ из $\mathcal{M}$), такое, что*

$$(D[\mathcal{M}], R[\mathcal{M}]) \cong \alpha.$$

Тогда ординал ω^α имеет $FO(\exists^{(t,k)})$-определение (с теми же параметрами $\bar{c}$) в надстройке $ELS(\mathcal{M})$.

Доказательство. Доказательство по существу следует идеям [90, теорема 1]. Здесь приведём его в схематичном виде.

В этой лемме будем понимать ω как ординал. Пусть $\mathcal{L} := (D[\mathcal{M}], R[\mathcal{M}])$. Формула $(x <_R y)$ означает, что $R(x,y) \& (x \neq y)$.

Предположим, что $\alpha > \omega$ и 0 — наименьший элемент $\mathcal{L}$. Пусть d — элемент из $\mathcal{L}$, такой, что интервал $[0, d[_{\mathcal{L}}$ изоморфен ω. Заметим, что элементы 0 и d формульно определимы в порядке $\mathcal{L}$. Как обычно, формула $(X \sqsubset Y)$ означает, что $(X \sqsubseteq Y) \& (X \neq Y)$.

Как и в доказательстве [90, теорема 1], определим $FO(\exists^{(t,k)})$-формулы $l_0(X)$ и $l_1(X)$ со следующими свойствами: $ELS(\mathcal{M}) \models l_0(X) \Leftrightarrow X$ — список чётной длины; и $ELS(\mathcal{M}) \models l_1(X) \Leftrightarrow X$ — список нечётной длины. Также зададим следующие две формулы:

$$\varphi(X) := l_0(X) \,\&\, (\forall Y \sqsubseteq X)\big[(Y \neq nil) \to D(head(Y))\big] \&$$
$$\forall Y \forall Z \big[((Y \sqsubset Z \sqsubseteq X) \& l_1(Y) \& l_1(Z)) \to (head(Z) <_R head(Y))\big] \&$$
$$\forall Y \big[((Y \sqsubseteq X) \& l_0(Y) \& (Y \neq nil)) \to (0 <_R head(Y) <_R d)\big];$$
$$\psi(X,Y) := \varphi(X) \,\&\, \varphi(Y) \,\&\, \big\{(X \sqsubseteq Y) \;\vee\; \exists Z \exists a \exists b \big[(a <_R b) \,\&$$
$$(cons(Z,a) \sqsubseteq X) \,\&\, (cons(Z,b) \sqsubseteq Y)\big]\big\}.$$

Напомним, что ненулевой ординал $\beta < \omega^\alpha$ имеет канторову нормальную форму

$$\beta = \omega^{\gamma_0} \cdot k_0 + \omega^{\gamma_1} \cdot k_1 + \ldots + \omega^{\gamma_t} \cdot k_t,$$

где $\alpha > \gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_t \geq 0$ и $0 < k_i < \omega$ для каждого $i \leq t$. Пользуясь этим наблюдением, нетрудно показать, что структура $(\varphi[ELS(\mathcal{M})], \psi[ELS(\mathcal{M})])$ является изоморфной копией ω^α. Таким образом, порядок ω^α $FO(\exists^{(t,k)})$-определим в $ELS(\mathcal{M})$. Доказательство для случая $\alpha = \omega$ по существу повторяет вышеизложенное со следующей модификацией формулы $\varphi(X)$: в ней мы заменяем подформулу $(0 <_R head(Y) <_R d)$ на $(head(Y) \neq 0)$. $\square$

Перейдём теперь к доказательству предложения 4.2.1.

Доказательство предложения 4.2.1. Предположим, что α — ординал, такой, что $\alpha \geq \omega^\omega$. Заметим, что полный порядок ω^ω формульно определим (с одним параметром c) в α. Более того, его определение удовлетворяет условиям леммы 4.2.3. Таким образом, ординал ω^{ω^ω} $FO(\exists^{(t,k)})$-определим в структуре $ELS(\alpha)$ с тем же параметром c.

Предположим, что $ELS(\alpha)$ допускает древесно-автоматное представление. Тогда по лемме 4.2.2, ω^{ω^ω} также имеет древесно-автоматную копию. Это противоречит известному описанию древесно-автоматных ординалов: ординал β имеет древесно-автоматное представление в том и только том случае, когда $\beta < \omega^{\omega^\omega}$ [101, следствие 2.2]. $\square$

Заметим, что предложение 4.2.1 даёт пример древесно-автоматной структуры $\mathcal{N}$, не имеющей автоматных копий и такой, что надстройка $ELS(\mathcal{N})$ не представима древесным автоматом (в качестве $\mathcal{N}$ можно выбрать любой ординал α, такой, что $\omega^\omega \leq \alpha < \omega^{\omega^\omega}$).

Следствие 4.1.3, в свою очередь, показывает, что для любой структуры $\mathcal{M}$ надстройка $ELS^2(\mathcal{M})$ не имеет древесно-автоматных копий. Остаётся открытым вопрос о том, существует ли бесконечная структура $\mathcal{S}$, такая, что $ELS(\mathcal{S})$ допускает древесно-автоматное представление.

Заключение

В диссертации исследовались свойства Σ-определимости наследственно конечных и списочных надстроек. В данной тематике получены следующие результаты.

1. Получена теорема об униформизации для наследственно конечной списочной надстройки над полем вещественных чисел с экспонентой, а также над расширениями поля вещественных чисел пфаффовыми функциями.

2. Доказано, что наследственно конечная и списочная надстройки над произвольной моделью Σ-определимы друг в друге, а множества их Σ-отношений совпадают.

3. Построена вычислимая по Вайрауху функция, не Σ-определимая в наследственно конечной надстройке ни над каким расширением $\mathbb{R}$ с разрешимой теорией.

Также в диссертации исследовалась теоретико-вычислимая сложность моделей формальной теории линейных списков. Получены следующие результаты:

1. Показано, что переход от структуры $\mathcal{M}$ к $ELS(\mathcal{M})$ не всегда сохраняет разрешимость элементарной теории, а также, что для любого непустого не более чем счётного множества S теория структуры $ELS(ELS(S))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка.

2. Показано, что $LS(\mathcal{M})$ допускает представление конечным автоматом в том и только в том случае, когда $\mathcal{M}$ — конечная структура.

Результаты диссертационного исследования могут использоваться в дальнейших исследованиях по теории Σ-определимости в допустимых множествах, а также в образовательном процессе при чтении спецкурсов по теории обобщённой вычислимости и теории допустимых множеств, предназначенных для студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений.

Список литературы

1. *Авдеев Р. Р., Пузаренко В. Г.* Вычислимая модель с нестандартной вычислимостью. // Алгебра и логика, 56:5 (2017), 636–638.
2. *Ашаев И. В., Беляев В. Я., Мясников А. Г.* Подходы к теории обобщенной вычислимости. // Алгебра и логика, 32, 4(1993), 349–386.
3. *Вайценавичюс Р. Ю.* О необходимых условиях существования универсальной функции на допустимом множестве. // Математическая логика и применения, 6(1989), Вильнюс, 21–37.
4. *Гончаров С. С.* Теория списков и её модели. // Новосибирск, 1986. Выч. Системы, Вып. 114. С. 84–95.
5. *Гончаров С. С.* // Условные термы в семантическом программировании. // Сиб. мат. журн., 58(5):1026–1034, 2017.
6. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* $\Sigma-$программирование. // Новосибирск, 1985. Выч. Системы, Вып. 10. С. 3–30.
7. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Рекурсивные термы в семантическом программировании. // Сиб. матем. журн., 59:6 (2018), 1279–1290.
8. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. // Новосибирск: Научная книга, 1996.
9. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость // Новосибирск: научная книга, 2-ое издание, М., Экономика, 2000.
10. *Калимуллин И. Ш.* Соотношения между алгоритмическими сводимостями алгебраических систем. // Изв. вузов. Матем., 2009, № 6, 71–72
11. *Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г.* О сводимости на семействах. // Алгебра и логика, 48:1 (2009), 31–53
12. *Коровина М. В.* Обобщённая вычислимость на вещественных функциях. // Новосибирск, 1990. Выч. Системы, вып.133. С.38–67.

13. *Коровина М. В.* Об универсальной рекурсивной функции и абстрактных машинах на вещественных числах со списочной надстройкой. // Новосибирск, 1996. Выч. Системы, вып.156. С.–.

14. *Коровина М. В.* Обобщенная вычислимость над действительными числами. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Институт математики СО РАН, 1996.

15. *Морозов А. С.* $\Sigma-$множество натуральных чисел, не перечислимое с помощью натуральных чисел. // Сиб. матем. журн., 41:6 (2000), 1404–1408.

16. *Морозов А. С.* О представимости групп $\Sigma-$определимых перестановок над допустимыми множествами. // Алгебра и логика, 41:4 (2002), 459–480.

17. *Морозов А. С.* Об отношении $\Sigma-$сводимости между допустимыми множествами. // Сиб. матем. журн., 45:3 (2004), 634–652

18. *Морозов А. С.* О некоторых представлениях поля вещественных чисел. // Алгебра и логика, 50:2 (2011), 270–271

19. *Морозов А. С.* О некоторых представлениях поля вещественных чисел. // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 1. С. 98–128.

20. *Морозов А. С.* Непредставимость полугруппы ω^ω над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$. // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 156–164.

21. *Морозов А. С.* О $\Sigma-$представлениях вещественного порядка. // Алгебра и логика. 53, № 3 (2014), 340-371.

22. *Морозов А. С.* $\Sigma-$жёсткие представления вещественного порядка. // Сиб. матем. журн., 55:3 (2014), 562–572; Siberian Math. J., 55:3 (2014), 457–464.

23. *Морозов А. С.* Об одном достаточном условии непредставимости структур в наследственно-конечных надстройках. // Алгебра и логика, 55:3 (2016), 366–379.

24. *Морозов А. С.* Непредставимость некоторых структур анализа в наследственно конечных надстройках. // Алгебра и логика, 56:6 (2017), 691–711.

25. *Морозов А. С., Кёпке П.* О вычислительных возможностях машин Блюм–Шуба–Смэйла, работающих в бесконечном времени. // Алгебра и логика, 56:1 (2017), 55–92

26. *Морозов А. С., Коровина М. В.* О Σ-определимости счётных структур над вещественными, комплексными числами и кватернионами. // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 335–363.

27. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О $\Sigma-$подмножествах натуральных чисел. // Алгебра и логика, 43:3 (2004), 291–320.

28. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Допустимые множества в теории групп. // Алгебра и логика, 31, 4(1992), 413–433.

29. *Пузаренко В. Г.* О теории моделей на наследственно конечных надстройках. // Алгебра и логика, 41:2 (2002), 199–222

30. *Пузаренко В. Г.* О теореме Левенгейма–Сколема–Мальцева для HF-структур. // Алгебра и логика, 43:6 (2004), 749–758

31. *Пузаренко В. Г.* О семействе вычислимых множеств на допустимых множествах. // Сиб. электрон. матем. изв., 5 (2008), 1–7

32. *Пузаренко В. Г.* Об одной сводимости на допустимых множествах. // Сиб. матем. журн., 50:2 (2009), 415–429

33. *Пузаренко В. Г.* Дескриптивные свойства на допустимых множествах. // Алгебра и логика, 49:2 (2010), 238–262

34. *Пузаренко В. Г.*, Неподвижные точки оператора скачка. // Алгебра и логика, 50:5 (2011), 615–646

35. *Ромина А. В.* Определимость булевых алгебр в HF-надстройках. // Алгебра и логика, 39, 6(2000), 711–719.

36. *Руднев В. А.* Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах. // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 425–436.

37. *Стукачёв А. И.* Теорема об униформизации в HF(R). // Материалы XXXIV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс: Математика НГУ, 1996, стр. 83.

38. *Стукачёв А. И.* Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках. // Новосибирск, 1998. Выч. Системы, Вып. 161. С. 3–14.

39. *Стукачёв А. И.* Σ-определимость в наследственно конечных надстройках и пары моделей. // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 4. С. 459–481.

40. *Стукачёв А. И.* О степенях представимости моделей. I. // Алгебра и логика, 46:6 (2007), 763–788

41. *Стукачёв А. И.* О степенях представимости моделей. II. // Алгебра и логика, 47:1 (2008), 108–126.

42. *Стукачёв А. И.* Теорема об обращении скачка для полурешёток $\Sigma-$степеней. // Сиб. электрон. матем. изв., 6 (2009), 182–190.

43. *Стукачёв А. И.* Σ-определимость несчётных моделей c-простых теорий. // Алгебра и логика. 2010. Т. 51, № 3. С. 649–661.

44. *Стукачёв А. И.* О квазирегулярных структурах вычислимых сигнатур. // Сиб. электрон. матем. изв., 11 (2014), 444–450.

45. *Стукачёв А. И.* О свойствах s$\Sigma-$сводимости. // Алгебра и логика, 53:5 (2014), 625–642.

46. *Стукачёв А. И.* Обобщённо гиперарифметическая вычислимость над структурами. // Алгебра и логика, 55:6 (2016), 769–799.

47. *Хисамиев А. Н.* О квазирезольвентных моделях и B-моделях. // Алгебра и логика, 40, 4 (2001), 484–499.

48. *Хисамиев А. Н.* О верхней полурешётке Ершова $\mathfrak{L}_E$. // Сиб. мат. журнал, 45, 1(2004), 211–228.

49. *Хисамиев А. Н.* $\Sigma-$Ограниченные алгебраические системы и универсальные функции, I. // Сиб. мат. журнал, 51, 1(2010), 217–235.

50. *Хисамиев А. Н.* $\Sigma-$Ограниченные алгебраические системы и универсальные функции, II. // Сиб. мат. журнал, 51, 3(2010), 676–693.

51. *Хисамиев А. Н.* Σ-однородные алгебраические системы и Σ-функции. // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 5. С. 659–684.

52. *А. Хованский* Об одном классе систем трансцендентных уравнений. // Докл. АН СССР 1980, вып. 255, 804–807.

53. *Barwise J.* Admissible Sets and Structures. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1975.

54. *Gabrielov A., Vorobjov N.* Complexity of Cylindrical Decompositions of Sub-Pfaffian Sets. // J. Pure and Appl. Algebra, 164 (2001), 179–197.

55. *Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Theoretical aspects of Σ-programming. // In W. Bibel and K. P. Jantke, editors, Mathematical Methods of Specification and Synthesis of Software Systems '85, volume 215 of Lect. Notes Comput. Sci., pages 169–179. Springer, Berlin, Heidelberg, 1986.

56. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Semantic foundations of programming. // In L. Budach, R.G. Bukharajev, and O. B. Lupanov, editors, Fundamentals of Computation Theory, volume 278 of Lect. Notes Comput. Sci., pages 116–122. Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.

57. *Ershov Yu. L., Puzarenko. V. G., Stukachev A. I.* HF-Computability. // S. Barry Cooper and Andrea Sorbi, editors, Computability in Context. Computation and Logic in the Real World. World Scientific, 2011.

58. *Kripke S.* Transfinite recursion on admissible ordinals, I, II (abstracts). // J. Symbolic Logic, 29(1964), 161–162.

59. *Korovina M. V.* Generalised computability of real functions. // Siberian Advances in Mathematics, 2(4):1–18, 1992.

60. *Korovina M. V., Kudinov O. V.* The Uniformity Principle for $\Sigma-$definability. // Journal of Logic and Computation, Volume 19, Issue 1, 1 February 2009, Pages 159–174.

61. *Korovina M. V., Kudinov O. V.* New approach to computability. // Sib. Adv. Math., 8, 3(1998), 59–73.

62. *Korovina M. V., Kudinov O. V.* Semantic characterisations of second-order computability over the real numbers. // In Proceedings of CSL'01, Lecture Notes in Computer Science 2142 (2001), 160–172.

63. *Levy A.* A hierarchy of formulas in set theory. // Memoir Amer. Math. Soc., 57(1965).

64. *Marker D.* Model Theory and Exponentiation. // Notices Of The Ams., V.43, №7(1996), 753–759.

65. *Macintyre A., Wilkie A.* On the decidability of the real exponential field. // Kreiseliana, A. K. Peters, Wellesley, MA, 1996, pp. 441-467.

66. *Miller R. G.*, Locally computable structures. // In: Cooper, S.B., Löwe, B., Sorbi, A. (eds.) CiE 2007. LNCS, vol. 4497, pp. 575–584.

67. *Moschovakis Y. N.* Abstract computability and invariant definability. // J. Symb. Log., 34(1969), 605–633.

68. *Moschovakis Y. N.* Abstract first order computability I. // Trans. Am. Math. Soc., 138(1969), 427–464.

69. *Moschovakis Y. N.* Abstract first order computability II. // Trans. Am. Math. Soc., 138(1969), 465–504.

70. *Platek R.* Foundations of recursion theory. // Doctoral Dissertation and Supplement, Stanford, CA: Stanford Univ., 1966.

71. *Servi T.* On the first order theory of real exponentiation. // PhD thesis, ENS Pisa, 2006.

72. *Selivanova S.V., Selivanov V.L.* Computing solution operators of symmetric hyperbolic systems of PDEs. // J. Univers. Comput. Sci. 15, 6 (2009), 1337–1364

73. *Selivanova S.V., Selivanov V.L.* Computing Solution Operators of Boundary-value Problems for Some Linear Hyperbolic Systems of PDEs. // Log. Methods Comput. Sci. 13, 4 (2017), 1–3.

74. *Selivanova S.V., Selivanov V.L.* On constructive number fields and computability of solutions of PDEs. // Dokl. Math. 477, 3 (2017), 282–285.

75. *Stukachev A. I.* Uniformization property in heredidary finite superstructures. // Siberian Advances in Mathematics, v.7, N1 (1997), pp. 123–132.

76. *Stukachev A.* Effective model theory: an approach via $\Sigma-$definability. // Lecture Notes in Logic. 2013. V. 41. P. 164–197.

77. *Tarski A.* A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry, 2nd edition, revised. // University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

78. *Zilber B.* Pseudo-exponentiation on algebraically closed Fields of characteristic zero. // Annals of Pure and Applied Logic 132 (1):67-95 (2005).

79. *Weihrauch K.*, Computable analysis // Texts in Theoretical Computer Science, An EATCS Series, Springer-Verlag, Berlin 2000.

80. *Wilkie A. J.* Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function. // J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), 1051-1094.

81. D. J. Moore and B. Russell. Axiomatic data type specifications: a first order theory of linear lists. *Acta Inf.*, 15(3):193–207, 1981.

82. J. R. Büchi. Weak second-order arithmetic and finite automata. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 6:66–92, 1960.

83. M. O. Rabin. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Trans. Am. Math. Soc.*, 141:1–35, 1969.

84. B. Khoussainov and A. Nerode. Automatic presentations of structures. In D. Leivant, editor, *Logic and Computational Complexity*, volume 960 of *Lect. Notes Comput. Sci.*, pages 367–392. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.

85. V. Bárány, E. Grädel, and S. Rubin. Automata-based presentations of infinite structures. In J. Esparza, C. Michaux, and C. Steinhorn, editors, *Finite and Algorithmic Model Theory*, volume 379 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–76. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

86. B. Khoussainov and M. Minnes. Three lectures on automatic structures. In F. Delon, U. Kohlenbach, P. Maddy, and F. Stephan, editors, *Logic Colloquium 2007*, volume 35 of *Lecture Notes in Logic*, pages 132–176. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

87. B. Khoussainov and A. Nerode. Open questions in the theory of automatic structures. *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS*, 94:181–204, 2008.

88. S. Rubin. Automata presenting structures: a survey of the finite string case. *Bull. Symb. Log.*, 14(2):169–209, 2008.

89. A. Blumensath. Automatic structures, 1999. Diploma Thesis. RWTH Aachen.

90. N. A. Bazhenov. Automatic structures and the theory of lists. *Сибирские электронные математические известия*, 12:714–722, 2015.

91. C. J. Ash and J. F. Knight. *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, volume 144 of *Stud. Logic Found. Math.* Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2000.

92. A. L. Semenov. Decidability of monadic theories. In M. P. Chytil and V. Koubek, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 1984*, volume 176 of *Lect. Notes Comput. Sci.*, pages 162–175. Springer, Berlin, 1984.

93. I. Walukiewicz. Monadic second order logic on tree-like structures. *Theor. Comput. Sci.*, 275(1–2):311в –346, 2002.

94. D. Kuske and M. Lohrey. Monadic chain logic over iterations and applications to push-down systems. In *21st Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'06)*, pages 91–100. IEEE Computer Society, Los Alamitos, 2006.

95. D. Kuske and M. Lohrey. Logical aspects of Cayley-graphs: The monoid case. *Int. J. Algebra Comput.*, 16(2):307–340, 2006.

96. J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J. D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages, and computation.* Addison-Wesley, Boston, 2000.

97. D. Cenzer, V. Harizanov, and J. B. Remmel. Σ^0_1 and Π^0_1 equivalence structures. *Ann. Pure Appl. Logic*, 162(7):490–503, 2011.

98. H. Rogers Jr. *Theory of recursive functions and effective computability.* McGraw-Hill, New York, 1967.

99. T. Colcombet. Equational presentations of tree-automatic structures. In *Workshop on Automata, Structures and Logic.* Auckland, 2004.

100. B. Khoussainov, S. Rubin, and F. Stephan. Definability and regularity in automatic structures. In V. Diekert and M. Habib, editors, *STACS 2004*, volume 2996 of *Lect. Notes Comput. Sci.*, pages 440–451. Springer, Berlin, 2004.

101. C. Delhommé. Automacité des ordinaux et des graphes homogènes. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 339(1):5–10, 2004.

Работы автора по теме диссертации

Оригинальные статьи

102. *Александрова С. А.*, Проблема униформизации для Σ-предикатов в наследственно конечной списочной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой // Алгебра и логика. – 2014. – Т. 53, № 1. – С. 3–14.

103. *Александрова С. А.*, Об униформизации в надстройках над некоторыми расширениями R // Алгебра и логика. – 2015. – Т. 54, № 4. – С. 431–438.

104. *Александрова С. А.*, О Σ-определимости наследственно конечной и списочной надстроек // Сибирский журнал чистой и прикладной матем. – 2018. – Т. 18, № 1. – С. 3–10.

105. *Александрова С. А.*, О Σ-определимости в наследственно конечных надстройках и вычислимом анализе // Сиб. мат. журн. – 2018. – Т. 59, № 5. – С. 970–975.

106. *Александрова С. А., Баженов Н. А.*, О разрешимости списочных структур // Сиб. мат. журн. – 2019. – Т. 60, № 3. – С. 489–505.

Переводы оригинальных статей на английский язык

107. *Aleksandrova S. A.* The Uniformization Problem for Σ-Predicates in a Hereditarily Finite List Superstructure over the Real Exponential Field // Algebra and Logic. – 2014. – V. 53, N. 1. – P. 1–8.

108. *Aleksandrova S. A.* Uniformization in Superstructures Over Some Extensions of $\mathbb{R}$ // Algebra and Logic. – 2015. – V. 54, N. 4. – P. 273–278.

109. *Aleksandrova S. A.* Σ−definability in hereditarily finite superstructures and computable analysis // Siberian Mathematical Journal. – 2018. – V. 59, N. 5. – P. 763–767.

110. *Aleksandrova S. A., Bazhenov N. A.* On decidability of list structures // Siberian Mathematical Journal. – 2019. – V. 60, N. 3. – P. 377–388.

Тезисы конференций

111. *Александрова С. А.* Проблема униформизации для Σ-определимых предикатов в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ // Материалы 50-й юбилейной международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. – Новосибирск: НГУ, 2012. – С. 5.

112. *Aleksandrova S.* On common properties of hereditarily finite and hereditarily finite list superstructures // Continuity, Computability, Constructivity – From Logic to Algorithms. Book of Abstracts. – Ljubljana: 2014. – P. 11.

113. *Aleksandrova S.* Uniformization property for Σ-predicates in the hereditarily finite list superstructure over the real exponential field // Bull. Symb. Logic. – 2015. – V. 21, N 1. – P. 55.

114. *Aleksandrova S., Bazhenov N.* Local computability and hereditarily finite superstructures // Bull. Symb. Logic. – 2016. – V. 22, N 3. – P. 382–383.

115. *Aleksandrova S., Bazhenov N.* 4. Automatic and tree-automatic list structures // Bull. Symb. Logic. – 2017. – V. 23, N 2. – P. 228–229.

116. *Aleksandrova S.* On computability in hereditarily finite superstructures and computable analysis // Logic Colloquium 2017. Programme and Abstracts. – Stockholm: 2017. – P. 76.

117. *Aleksandrova S.* $\Sigma-$definability of hereditarily finite and hereditarily finite list superstructures // Logic Colloquium 2018. Program and Abstracts. – Udine: 2018. – P. 60.