Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет»

На правах рукописи

УДК 519.21

Жечев Василий Александрович

Принцип инвариантности и вероятностные неравенства для последовательностей канонических U- и V-статистик от зависимых наблюдений

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
И. С. Борисов

Новосибирск — 2018

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В начале 50-х годов прошлого столетия была доказана функциональная предельная теорема – так называемый *принцип инвариантности* – для процессов частичных сумм независимых или слабо зависимых случайных величин (см., например, [1], [11], [12]). В 1980-е годы окончательно сформировалась предельная теория (в частности, включающая соответствующий принцип инвариантности) для более общих объектов – так называемых U-статистик и статистик Мизеса (V-статистик) произвольного порядка как с каноническими, так и неканоническими (которые чаще называются невырожденными) ядрами и независимыми наблюдениями (см., например, [18], [26], [28], [35]). Если изучение предельного поведения невырожденных U- и V-статистик по существу сводится к асимптотическому анализу сумм случайных величин, то в случае упомянутых канонических статистик ситуация кардинально меняется. Для независимых наблюдений предельное распределение указанных статистик может быть представлено в виде бесконечной полиномиальной формы от независимых гауссовских величин (см. [35]) или в виде кратных стохастических интегралов с интегрирующей стохастической винеровской продакт-мерой (см. [28]). Соответственно слабые пределы в функциональной предельной теореме представляют собой либо аналогичные полиномиальные формы от независимых винеровских процессов (см. [18]) или однопараметрические семейства кратных стохастических интегралов с интегрирующей стохастической продакт-мерой, порожденной так называемым случайным полем Кифера (см. [26]).

Для слабо зависимых наблюдений изучение предельного поведения канонических U- и V-статистик существенно усложняется по сравнению со случаем обычных сумм. Прежде всего, это относится к описанию предельного распределения в виде кратных стохастических интегралов (см. [36], [3]). В данном случае более продуктивным оказывается подход, связанный с использованием аппарата ортогональных рядов (см. [35], [5]), который впервые был использован в случае независимых наблюдений и канонических статистик второго порядка еще в 1947 году в классической работе Р. Мизеса [36], а позже был распространен и на канонические статистики произвольного порядка (см. [35]).

Пусть $X_1, X_2, ...$ — стационарная последовательность случайных величин со значениями в произвольном полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Обозначим через F распределение X_1, а через $L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ – сепарабельное гильбертово пространство вещественнозначных функций m переменных, интегрируемых в квадрате относительно продакт-меры F^m с маргинальными распределениями F. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{X}$ является носителем распределения F, т.е. $\mathbb{X}$ (или $\mathbb{X}^m$) – минимальное замкнутое множество полной F-меры (соответственно полной F^m-меры).

Определение 1. Функция $f(z_1, ..., z_m) \in L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ называется *канонической* (или *вырожденной*), если

$$\mathbf{E} f(z_1, ..., z_{i-1}, X_1, z_{i+1}, ..., z_m) = 0$$

для всех $z_j \in \mathbb{X}$ и $i \in \{1...m\}$, где два случая $i = 1$ и $i = m$ соответствуют крайним положениям координаты X_1 векторного аргумента функции f.

Определим U- и V-*статистики* от выборки $X_1, \ldots, X_n$ объема n стационарно связанных (возможно, независимых) наблюдений следующими соотношениями:

$$U_n := B_n^{-1} \sum_{1 \le i_1 \ne} \ldots \sum_{\ne i_m \le n} f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}),$$

$$V_n := \tilde{B}_n^{-1} \sum_{i_1 \le n} \ldots \sum_{i_m \le n} f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}),$$

где f – так называемое ядро соответствующей статистики, $\{B_n\}$ и $\{\tilde{B}_n\}$ – нормирующие последовательности. Впервые U-статистики были введены в 1948 году в работе В. Хефдинга [31], а V-статистики — в 1947 году в статье Р. Мизеса [36].

Отличие U- от V-статистик состоит в том, что в области суммирования кратных сумм в определении U-статистик, в отличие от V-статистик, отсутствуют кратные индексы, т.е. все индексы i_k в кратных суммах, определяющих U-статистики, попарно различны. Если ядро f каноническое, то и соответствующая U- или V-статистика называется *канонической* (*или вырожденной*). В противном случае указанные статистики называются *невырожденными.* Для невырожденных U-статистик обычно используют нормировку – число размещений $A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1)$, эквивалентное нормировке n^m, используемой в этом случае в качестве $\tilde{B}_n$ у V-статистики, которое в точности равно числу слагаемых в соответствующей кратной сумме. В этом случае U-статистика будет несмещенной сильно состоятельной оценкой для смешанного момента $\mathbf{E}f(X_1, \ldots, X_m)$. Заметим, что для канонического ядра f и независимых наблюдений $\{X_i\}$ этот момент равен нулю. Если же дополнительно предполагать симметричность ядра f, т.е. инвариантность функции $f(z_1, \cdots, z_m)$ относительно всех перестановок аргументов z_j, то естественно рассматривать статистики вида

$$\tilde{U}_n := (C_n^m)^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots} \ldots \sum_{\ldots < i_m \le n} f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}),$$

где биномиальный коэффициент $C_n^m = A_n^m/m!$ опять же равен числу слагаемых в вышеприведенной кратной сумме.

Для канонических ядер нормировка будет выглядеть существенно иной: соответственно $\sqrt{B_n}$ и $\sqrt{\tilde{B}_n}$, где B_n и $\tilde{B}_n$ вышеприведенные нормировки в случае невырожденных ядер.

Примеры канонических U- и V-статистик:

1) Квадрат евклидовой нормы нормированной суммы случайных величин $\{Y_i\}$, принимающих значения в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве, представляет собой каноническую V-статистику второго порядка:

$$||S_n/\sqrt{n}||^2 = \frac{1}{n} \sum_{1 \le i,j \le n} (Y_i, Y_j),$$

где $\mathbf{E}Y_i = 0$, $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$. Особый интерес для статистиков представляет частный случай, когда

$$(f, g) := \int f(y)g(y)dF(y),$$

где $F(y) := \mathbf{P}(X_1 < y)$ и $\{X_i\}$ – одинаково распределенные скалярные наблюдения, а случайные элементы $Y_i(\cdot)$ имеют вид

$$Y_i(y) := I(X_i < y) - F(y).$$

Таким образом, $Y_i(\cdot)$ можно рассматривать как элементы гильбертова пространства $L_2(\mathbb{R}, F)$, и в качестве упомянутого выше скалярного квадрата нормированной суммы мы получаем известную статистику ω^2 (“омега-квадрат”):

$$\omega^2 := ||S_n||^2/n = n \int (F_n^*(y) - F(y))^2 dF(y),$$

где $F_n^*(y)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$.

2) Статистики χ^2 (“хи-квадрат”) также представляет собой каноническую V-статистику второго порядка:

$$\chi^2 := \sum_{k=1}^{m} \frac{(\nu_n(\Delta_k) - nP(\Delta_k))^2}{nP(\Delta_k)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i,j \le n} f(X_i, X_j),$$

где каноническое ядро определяется как

$$f(t, s) := \sum_{k=1}^{m} (I(t \in \Delta_k) - P(\Delta_k))(I(s \in \Delta_k) - P(\Delta_k))/P(\Delta_k);$$

здесь наблюдения X_i принимают значения в произвольном измеримом пространстве, $\{\Delta_k;\ k = 1, \ldots, m\}$ – конечное измеримое разбиение выборочного пространства, $P(\Delta_k) := \mathbf{P}(X_1 \in \Delta_k)$.

3) Рассмотрим выборочную дисперсию (несмещенную)

$$S_0^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

где $\{X_i\}$ – независимые одинаково распределенные скалярные случайные величины, $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Нетрудно показать, что

$$S_0^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \ne j \le n} \frac{1}{2} (X_i - X_j)^2,$$

т.е. S_0^2 – невырожденная U-статистика и невырожденная V-статистика (с точностью до нормировки) одновременно. Положим

$$g(z) := \mathbf{E}(X_1 - z)^2 - 2\mathbf{D}X_1,$$

где z – неслучайная переменная, и $\overline{g(X)} := \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} g(X_i)$. Тогда квадратичная форма

$$\begin{aligned}\tilde{S}_0^2 := S_0^2 - \mathbf{D}X_1 - \overline{g(X)} = \\ = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i \ne j \le n} \big((X_i - X_j)^2 - g(X_i) - g(X_j) - 2\mathbf{D}X_1\big)\end{aligned}$$

будет уже канонической U-статистикой второго порядка при условии, что дисперсия наблюдений $\mathbf{D}X_1$ конечна. Отметим, что любые выборочные центральные моменты бо́льшего порядка также допускают подобное представление в виде U-статистик, но уже бо́льшего порядка. Вышеприведенное представление для $\tilde{S}_0^2$ иллюстрирует так называемое *разложение Хефдинга*, согласно которому любая невырожденная центрированная U-статистика может быть представлена в виде конечной линейной комбинации канонических U-статистик убывающих порядков. В данном примере

$$S_0^2 - \mathbf{D}X_1 = \tilde{S}_0^2 + \overline{g(X)}.$$

В диссертации мы будем изучать предельное поведение в целом всего конечного набора канонических U- и V-статистик при объемах наблюдения от 1 до n. Для этого мы введем в рассмотрение следующие случайные процессы, заданные на $[0,1]$:

$$U_n(t) := n^{-m/2} \sum_{1 \le i_1 \ne} \dots \sum_{\ne i_m \le [nt]} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}), \quad t \in [0,1],$$

и V-статистик

$$V_n(t) := n^{-m/2} \sum_{i_1 \le [nt]} \dots \sum_{i_m \le [nt]} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}), \quad t \in [0,1],$$

и будем их рассматривать как случайные процессы с траекториями из пространства $D[0,1]$ с классической метрикой Скорохода. При введенных ограничениях на природу $\mathbb{X}$ любая функция $f \in L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ на множестве полной F^m-меры допускает представление в виде кратного ряда ([15])

$$f(z_1, ..., z_m) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} f_{k_1 \dots k_m} e_{k_1}(z_1) \dots e_{k_m}(z_m), \tag{1}$$

сходящегося в норме $L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$, где $\{e_{k_j}\}$ – ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{X}, F)$, причем без ограничения общности можно считать, что $e_0 \equiv 1$. Тогда из условий ортонормированности следует, что

$$\mathbf{E}e_i(X_1)e_j(X_1) = \delta_{i,j}$$

для всех $i \neq j$. В частности, отсюда получаем, что $\mathbb{E}e_j(X_1) = 0$ для всех $j \geq 1$ из условия ортогональности с элементом $e_0(\cdot) \equiv 1$.

В случае независимых наблюдений асимптотическое поведение невырожденных и канонических U и V-статистик достаточно полно изучено (см., например, [2], [16], [17], [22], [31], [32], [35], [36]). Скажем, при условии независимости наблюдений в [35] доказано, что

$$U_n \xrightarrow{d} \sum_{k_1=0}^{\infty} ... \sum_{k_m=0}^{\infty} f_{k_1...k_m} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,...,k_m)}(\tau_j), \tag{2}$$

где $\{\tau_j\}$ – последовательность независимых стандартных нормальных величин, $v_j(k_1, ..., k_m)$ – количество индексов среди $k_1, ..., k_m$, равных j, а $H_k(x)$ – полиномы Эрмита, определяемые по формуле

$$H_k(x) = (-1)^k \exp(x^2/2) \frac{d^k}{dx^k} \exp(-x^2/2), \quad k \geq 0,$$

или с помощью рекуррентного соотношения

$$H_0(x) \equiv 1, \;\; H_1(x) = x,$$

$$H_{n+1} = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

Перенос отмеченной выше предельной теории на зависимые наблюдения в последней четверти прошлого века был связан, главным образом, с каноническими статистикам второго порядка, в частности, с квадратом евклидовой нормы суммы гильбертовозначных случайных величин (см., например, [20], [21], [30]).

В [5] был получен аналог результата (2) при любом m для наблюдений с условиями α- и φ-перемешивания. Эти результаты послужили толчком в исследовании функциональной сходимости рассматриваемых семейств статистик сразу для целых наборов $\{U_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ и $\{V_k,\ k = 1, \ldots, n\}$.

Цель работы:

1. Доказать функциональную предельную теорему для последовательности нормированных U- и V-статистик от стационарно связанных наблюдений с условием α- или φ-перемешивания.

2. Получить экспоненциальные оценки для хвоста распределения равномерной нормы U- и V-процессов с каноническими ядрами от выборочных наблюдений как независимых, так и слабо зависимых.

Научная новизна. В диссертации получены функциональные предельные теоремы – *принципы инвариантности* для последовательности нормированных U- и V-статистик, которые для краткости будем называть U- и V-*процессами*) произвольного порядка с каноническими ядрами, заданных на выборках растущего объема из последовательности стационарно связанных наблюдений с условием α- или φ-перемешивания. Соответствующие предельные процессы описываются в виде полиномиальных форм от последовательности зависимых винеровских процессов с известным совместным распределением.

Кроме того, в диссертации получены экспоненциальные оценки для хвоста распределения равномерной нормы V-процессов с каноническими ядрами, построенных как по независимым, так и слабо зависимым наблюдениям.

Методы исследований. В работе использованы разнообразные методы теории случайных процессов, например теорема Прохорова, моментные неравенства для максимума частичных сумм независимых и слабо зависимых случайных величин, метод диадических цепочек, элементы теории ортогональных рядов и др.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер.

На защиту выносятся результаты, сформулированные в основных теоремах 1 – 6.

Обзор основных результатов и предварительные сведения. В работе мы будем рассматривать, как правило, стационарные последовательности $\{X_i\}$, удовлетворяющие условию α-, φ- или ψ-перемешивания. Некоторые результаты будет получены для независимых или d-зависимых наблюдений. Напомним необходимые для нас определения.

Обозначим через $\mathfrak{M}_j^k$, где $j \le k$, σ-алгебру событий, порожденную случайными величинами $X_j, ..., X_k$.

Определение 2. Последовательность $X_1, X_2, ...$ удовлетворяет условию

1) α-перемешивания, если

$$\alpha(i) := \sup_{k\geq 1} \sup_{A\in\mathfrak{M}_1^k, B\in\mathfrak{M}_{k+1}^\infty} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \to 0 \text{ при } i \to \infty;$$

2) φ-перемешивания, если

$$\varphi(i) := \sup_{k\geq 1} \sup_{A\in\mathfrak{M}_1^k, B\in\mathfrak{M}_{k+1}^\infty, \mathbf{P}(A)>0} \left| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} - \mathbf{P}(B) \right| \to 0 \text{ при } i \to \infty;$$

3) ψ-перемешивания, если

$$\psi(i) := \sup_{k\geq 1} \sup_{A\in\mathfrak{M}_1^k, B\in\mathfrak{M}_{k+1}^\infty, \mathbf{P}(A)>0, \mathbf{P}(B)>0} \left| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1 \right| \to 0 \text{ при } i \to \infty.$$

Очевидные неравенства

$$\psi(i) \geq \varphi(i) \geq \alpha(i)$$

естественным образом упорядочивают эти три вида перемешивания.

Важно отметить следующее свойство преобразований последовательностей с перемешиванием. Если последовательность случайных величин $\{X_i\}$ удовлетворяет одному из вышеупомянутых условий перемешивания, то для любых борелевских преобразований $\{g_i(\cdot)\}$ из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{R}^k$ новая последовательность случайных величин $\{g_i(X_i)\}$ будет удовлетворять тому же виду перемешивания, что и исходная последовательность $\{X_i\}$. Легко понять, что тот или иной коэффициент перемешивания для преобразованной последовательности $\{g_i(X_i)\}$ не превосходит соответствующий коэффициент для последовательности $\{X_i\}$. Сказанное является следствием вложения σ-алгебр:

$$\sigma(g_i(X_i);\, i = j, \ldots, k) \subseteq \mathfrak{M}_j^k$$

для любых натуральных $j \leq k$. Иными словами, все супремумы в определении 2 для преобразованной последовательности будет вычисляться по более узкому классу событий, нежели для исходной последовательности случайных величин $\{X_i\}$.

Также отметим, что преобразованная с помощью одной функции $g(\cdot)$ последовательность $\{g(X_i)\}$ будет стационарной, если таковой была исходная последовательность.

При переходе от независимых наблюдений к зависимым возникает принципиальная сложность: после подстановки в тождество (1) вместо переменных $(z_1, \ldots, z_m)$ набора зависимых случайных величин $(X_1, \ldots, X_m)$ равенство в (1) может нарушаться с положительной вероятностью (см. контрпример в [5]).

Введем следующие два ограничения, каждое из которых обеспечивает указанную возможность замены в (1) неслучайных переменных на случайные (см. [5]).

(AC) *Для любого набора попарно-различных индексов* $(j_1, ..., j_m)$ *распределение вектора* $(X_{j_1}, ..., X_{j_m})$ *абсолютно непрерывно относительно распределения вектора* $(X_1^*, ..., X_m^*)$.

(BC) *Каноническое ядро* $f(z_1, ..., z_m)$ *непрерывно всюду на* $\mathbb{X}^m$, *при этом все базисные элементы* $e_k(z)$ *в* (1) *непрерывны и равномерно по* z *и* k *ограничены.*

При выполнении (AC) условие

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} |f_{k_1...k_m}| < \infty \tag{3}$$

влечет за собой п.н. сходимость ряда (1) относительно распределения вектора $(X_1^*, ..., X_m^*)$. Следовательно при выполнении условия (AC) отмеченная сходимость имеет место и почти наверное относительно распределения случайного вектора $(X_{j_1}, ..., X_{j_m})$. Другими словами, при выполнении (AC) в тождество (1) вместо переменных $z_1, ..., z_m$ можно подставить случайные величины $X_{j_1}, ..., X_{j_m}$ для всех попарно различных индексов $j_1, ..., j_m$.

При выполнении условия (3) в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, ограничения в (BC) влекут за собой непрерывность ряда в (1). Нетрудно видеть, что в этом случае равенство в (1) превращается в тождество по всем переменным $z_1, ..., z_m$, поскольку равенство двух непрерывных функций на всюду плотном множестве влечет за собой их равенство всюду. Стало быть, вместо переменных $z_1, ..., z_m$ в тождестве (1) можно подставить произвольно связанные наблюдения, в частности, тождественно совпадающие.

Стоит отметить, что в недавней работе М. Гордина и М. Денкера [27] были получены достаточно общие предельные теоремы для U-статистик от зависимых наблюдений без условий вида (AC) или (BC). При этом, однако, авторы рассматривают только ядра, имеющие структуру кратных рядов (элементов тензорного произведения пространств типа L_2). Иначе говоря, авторы рассматривают лишь функции, совпадающие *всюду* со своим кратным рядом Фурье в (1). С нашей точки зрения, подобная замена не совсем адекватна постановке задачи. На практике статистик всё же имеет дело, как правило, с композициями элементарных функций, а не рядов, их заменяющих. Именно при этой замене и возникают проблемы в случае зависимых наблюдений. Например, основной результат статьи [30], как оказалось, некорректен (контрпример см. в [5]) без дополнительных ограничений типа условий (AC), (BC), или постулирования равенства для *всех* (а не для почти всех относительно продакт-меры F^m) значений аргумента в соотношении (1), как это сделано в [27]. В случае независимых наблюдений при рассмотрении U-статистик таких проблем не возникает, и при подстановке в (1) вместо неслучайных переменных независимых наблюдений равенство будет иметь место с вероятностью 1 для любого представителя класса эквивалентности, которые, собственно, и образуют пространство $L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$.

В первой главе диссертации сформулированы и доказаны принципы инвариантности для последовательности U- и V-статистик, т.е. функциональные предельные теоремы для случайных процессов $U_n(t)$ и $V_n(t)$, для последовательностей наблюдений с условиями α- или φ-перемешивания. Для представления фигурирующих в этих теоремах предельных случайных процессов определим двупараметрический центрированный гауссовский процесс (поле) $\gamma(t,k)$, $t\in[0,1]$, $k\in\mathcal{N}$, с ковариацией

$$\mathbf{E}\gamma(t_1,k)\gamma(t_2,l)=$$
$$=\min(t_1,t_2)\left(\delta_{l,k}+\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{E}e_k(X_1)e_l(X_{j+1})+\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{E}e_l(X_1)e_k(X_{j+1})\right),\quad (4)$$

где $\delta_{l,k}$ – символ Кронекера. Отметим, что в условиях нижеследующих теорем ряды в (4) абсолютно сходятся. Очевидно, что при любом фиксированном k гауссовский процесс

$$w_k(t):=\gamma(t,k) \quad (5)$$

будет винеровским (стандартным для независимых X_i). Тем самым, случайное поле $\gamma(t,k)$ можно интерпретировать как последовательность **зависимых** винеровских процессов $\{w_k(t);\ k\in\mathcal{N}\}$ с известным совместным распределением, определяемым соотношением (4). Отметим, что в случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ оба ряда в (4) исчезают в силу уже отмеченных свойств выбранного ортонормированного базиса $\{e_k(\cdot)\}$, и случайные процессы $\{w_k(t);\ k\in\mathcal{N}\}$ в (5) будут независимыми стандартными винеровскими.

В дальнейшем мы не будем каждый раз оговаривать, что скобка в правой части (4) при $k=l$ должна быть строго положительной. Иначе дисперсия случайной величины $w_k(t)$ в (4) (при $k=l$ и $t_1=t_2=t$) обращается в ноль при всех $t\in[0,1]$, т.е. соответствующий случайный процесс в левой части (4) будет вырожденным. Мы допускаем в (4) и далее вырожденность в нуле тех или иных случайных процессов $w_i(\cdot)$ в (5), тем самым добавляя к классу гауссовских случайных процессов вырожденные – тождественные нули на отрезке $[0,1]$. Нулевая константа здесь интерпретируется как центрированная гауссовская случайная величина с нулевой дисперсией, т.е. с параметрами $(0,0)$, и эта константа является предельной точкой класса центрированных гауссовских распределений в топологии слабой сходимости. Отметим, что в теории суммирования зависимых случайных величин подобные эффекты не являются необычными.

Введем в рассмотрение случайные процессы

$$U(t) := \sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1...k_m} t^{m/2} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,...,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t)), \tag{6}$$

$$V(t) := \sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1...k_m} w_{k_1}(t) \cdots w_{k_m}(t), \tag{7}$$

где последовательность винеровских процессов определена в (5).

В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ функциональные предельные теоремы для последовательностей U- и V-статистик – *принципы инвариантности* – были доказаны в работах А.Ф. Ронжина [18] и М. Денкера, Х. Делинга и У. Филиппа [26], где соответственно установлено, что при $n \to \infty$

$$U_n(\cdot) \xrightarrow{d} U(\cdot), \tag{8}$$

$$V_n(\cdot) \xrightarrow{d} V(\cdot), \tag{9}$$

где слабая сходимость понимается в метрическом пространстве $D[0,1]$ с классической метрикой Скорохода. Основные результаты первой главы переносят предельные соотношения (8) и (9) на случай зависимых наблюдений с условиями α- и φ-перемешивания.

Во второй главе диссертации получены экспоненциальные оценки для хвоста распределения равномерной нормы V-процессов для независимых и слабо зависимых наблюдений. Отметим, что между U- и V-статистиками существует своеобразная двойственность: каждая U-статистика может быть представлена в виде конечной линейной комбинации V-

статистик убывающих порядков, и наоборот. Более того, изучение невырожденных U- и V-статистик может быть сведено к анализу канонических статистик. Так что получая оценки для хвоста распределения для одного класса статистик, мы тем самым получаем аналогичные оценки и для другого класса. Вопрос заключается лишь в вычислении соответствующих констант, если они представляют интерес для исследователя.

В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ одной из первых работ по экспоненциальным неравенствам интересующего нас типа является статья В. Хёфдинга [33], в которой для невырожденных U-статистик при всех $x \geq 0$ была доказана следующая оценка:

$$\mathbf{P}(U_n - \mathbf{E}U_n \geq x) \leq e^{-2kx^2/(b-a)^2}, \tag{10}$$

где $a \leq f(\cdot, ..., \cdot) \leq b, \quad k = [n/m]$,

$$U_n = \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{1 \leq i_1 \neq ... \neq i_m \leq n} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}).$$

Стоит отметить, что главный по порядку член в представлении любой центрированной U-статистики с невырожденным ограниченным ядром представляет собой сумму независимых центрированных и ограниченных случайных величин, для которой также справедлива оценка вида (10) (см. [33], а также п. 2.2 настоящей работы).

В работе И.С. Борисова [2] для независимых наблюдений $\{X_i\}$ были получено аналоги неравенств Бернштейна и, как следствие, – Хёфдинга для канонических V-статистик в случае, когда каноническое ядро имеет мажоранту с разделяющимися переменными:

$$|f(z_1, ..., z_m)| \leq \prod_{i \leq m} g(z_i), \tag{11}$$

где функция $g(t)$ удовлетворяет условию С.Н. Бернштейна:

$$\mathbf{E}(g(X_1))^k \leq \sigma^2 L^{k-2} k!/2 \ \text{ для всех } k \geq 2.$$

где σ и L – некоторые положительные постоянные. В этом случае имеет место следующий аналог неравенства Бернштейна:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq t\leq 1} |V_n(t)| \geq x\right) \leq c_1 \exp\left\{-\frac{c_2 x^{2/m}}{\sigma^2 + L x^{1/m} n^{-1/2}}\right\}, \tag{12}$$

где постоянные c_1 и c_2 зависят только от m. При этом, как отмечено в [2], неравенство (12) в известном смысле неулучшаемо.

Ясно, что если

$$\sup_{z_i} |f(z_1, \ldots, z_m)| = B < \infty,$$

то в (11) и (12) можно положить $g(\cdot) = \sigma = L = B^{1/m}$. Поскольку в этом случае нам достаточно рассмотреть в (12) только зону уклонения $|x| \leq Bn^{m/2}$ (в противном случае левая часть (12) обращается в ноль), то из (12) при всех $x \geq 0$ немедленно следует оценка

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq t\leq 1} |V_n(t)| \geq x\right) \leq c_1 \exp\left\{-\frac{c_2}{2}(x/B)^{2/m}\right\}, \tag{13}$$

которая является аналогом неравенства Хефдинга (10) (при соответствующей перенормировке) для m-й степени суммы независимых одинаково распределенных центрированных и ограниченных случайных величин – простейшему примеру канонической V-статистики порядка m. Этот частный случай вписывается в конструкцию V-процесса с так называемым расщепляющимся ядром

$$f(z_1, \ldots, z_m) = h_1(z_1) h_2(z_2) \ldots h_m(z_m),$$

поскольку в этом случае соответствующий V-процесс представим в виде произведения

$$V_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} h_1(X_i) ... \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} h_m(X_i), \tag{14}$$

при этом $\mathbf{E} h_k(X_1) = 0$. При дополнительных условиях, что

$$h_1(\cdot) = \ldots = h_m(\cdot), \quad \sup |h_1(\cdot)| \le 1$$

и $\{X_i\}$ – независимые, не обязательно одинаково распределенные, случайные величины, мы окончательно получаем из тождества (14)

$$\sup_{0 \le t \le 1} |V_n(t)| = \left(\sup_{0 \le t \le 1} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} h_1(X_i) \right| \right)^m,$$

откуда с помощью неравенства Хефдинга–Дуба (см. [33], [13]) можно извлечь экспоненциальную оценку

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \le t \le 1} |V_n(t)| \ge x \right) \le 2 \exp\left\{ -\frac{x^{2/m}}{2} \right\}.$$

Логарифмическая асимптотика правой части совпадает по порядку с поведением логарифма хвоста распределения модуля стандартной нормальной случайной величины в степени m. Иными словами, показатель степени $2/m$ в (13) уменьшить нельзя.

В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ отметим также работу М. Арконеса и Э. Жине [22], в которой рассматривались канонические U-статистики с ограниченными ядрами и был получен несколько более слабый аналог неравенства Бернштейна (12), но без условия (11). Позднее неравенство Арконеса–Жене было улучшено в тех же условиях П. Майором в [34]. Отметим также работу П.С. Рузанкина [19], где по сути было предложено несколько иное доказательство основного результата из [2].

Говоря о зависимых наблюдениях, упомянем работы И.С. Борисова и Н.В. Володько [4] и [23], в которых получены аналогичные (13) экспоненциальные оценки для распределений канонических U- и V-статистик (в наших обозначениях — для $V_n(1)$), построенных по стационарным последовательностям наблюдений с условием φ-перемешивания.

Цель второй главы диссертации состоит в доказательстве экспоненциальных неравенств вида (13) для равномерной нормы U- и V-процессов, построенных по последовательностям с перемешиванием. При этом самая сильная форма перемешивания – ψ-перемешивание – в полной мере задействована не будет. При выводе неравенств для равномерной нормы введенных процессов, построенных по последовательностям с равномерно сильным перемешиванием (т.е. φ-перемешиванием), мы рассмотрим два варианта показательных оценок, в одном из которых будет дополнительно предполагаться, что $\psi(m) < 1$ для некоторого натурального m. При этом мы не будем требовать, чтобы $\psi(k) \to 0$ при $k \to \infty$. Кроме того, будут получены равномерные неравенства для уклонений V-процессов в случае d-зависимых и независимых последовательностей наблюдений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на объединенном семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством академика А. А. Боровкова. Результаты работы также докладывались на следующих международных конференциях:

1) XLVII Международная научная студенческая конференции (Новосибирск, 2009);

2) V-th Conference "Limit Theorems in Probability Theory and Their

Applications (Новосибирск, 2011);

3) Third Northern Triangular Seminar (Санкт-Петербург, 2011).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [6], [7], [8], входящих в список ВАК для кандидатских и докторских диссертаций, а также анонсированы в [14], [24], [37].

Структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Нумерация теорем и формул сквозная, а следствий и замечаний – своя в каждой главе. Список литературы составлен последовательно по двум алфавитам — русскому и латинскому.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Игорю Семеновичу Борисову за предложенную интересную тему исследования, мотивацию, помощь и ценные советы.

ГЛАВА 1
Принцип инвариантности для канонических U- и V-статистик от зависимых наблюдений

§ 1. Необходимые сведения

Прежде всего отметим важное свойство канонических функций (см. [5]).

Предложение 1. *Если $f(z_1, ..., z_m)$ каноническая функция, то базисный элемент $e_0(\cdot) \equiv 1$ не принимает участия в разложении* (1), *т.е.*

$$f(z_1, ..., z_m) = \sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1...k_m} e_{k_1}(z_1)...e_{k_m}(z_m). \tag{15}$$

Будем предполагать, что в случае (AC) ортонормированный базис $\{e_j(t)\}$ в (1) удовлетворяет следующим дополнительным ограничениям, используемым при доказательстве предельных теорем для U- и V-статистик в случае φ-перемешивания:

(I) $\sup_i \mathbf{E}|e_i(X_1)|^m < \infty$.

Далее, нам понадобятся следующие утверждения, которые представляют собой аналоги классического моментного неравенства Розенталя для сумм независимых случайных величин (см. [29]).

Теорема A. *Пусть $\{\xi_i\}$ – стационарная последовательность центрированных случайных величин с конечными моментами порядка $t \geq 2$, удовлетворяющая условию α-перемешивания, и пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и четного $r \geq t$ выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^{r-2}\alpha^{\varepsilon/r+\varepsilon}(k) < \infty.$$

Тогда существует такая постоянная $C(t)$, зависящая только от t и коэффициента перемешивания $\alpha(k)$, что

$$\mathbf{E}|S_n|^t \le C(t)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{E}|\xi_i|^{t+\varepsilon}\right)^{t/t+\varepsilon} + \left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{E}|\xi_i|^{2+\varepsilon})^{2/(2+\varepsilon)}\right)^{t/2}\right).$$

Если же случайные величины ξ_i ограничены и при всех $k \ge 0$

$$\alpha(k) \le ce^{-bk}, \tag{16}$$

где $c \ge 1$ и $b > 0$ – некоторые постоянные, то при всех $t > 0$ справедлива оценка

$$\mathbf{E}\max_{1\le k\le n}|S_k|^t \le n^{t/2}C_o^t t^{2t}, \tag{17}$$

где положительная постоянная C_o не зависит от t.

Отметим, что оценка (17) доказана в Главе II (см. следствие 9). При этом доказательство опирается на известные оценки для хвоста распределения суммы S_n (см. [29]).

Теорема B. *Пусть $\{\xi_i\}$ – последовательность центрированных случайных величин с конечными моментами порядка $t \ge 2$, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, и, кроме того,*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(2^k) < \infty. \tag{18}$$

Тогда при $t \ge 2$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}\max_{1\le k\le n}|S_k|^t \le (tc(\varphi))^t\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}|\xi_i|^t + (\mathbf{E}|\xi_i|^2)^{t/2}\right).$$

З а м е ч а н и е 1. Во второй главе при выводе экспоненциальных неравенств для V-процессов будет существенно использоваться информация о порядке роста моментов суммы слабо зависимых случайных величин в зависимости от порядка момента. В связи с этим отметим, что зависимость от порядка момента вида $(ct)^t$ мультипликативной константы в теореме B в рассматриваемой общности по существу улучшить нельзя. Однако для ограниченных слагаемых эту зависимость всё-же можно улучшить до $(ct)^{t/2}$ (см. [25]). Что касается характера зависимости константы $C(t)$ от t в теореме A, то автору удалось обнаружить лишь оценку вида $(ct)^{2t}$ (см. [29] и (17)), что в итоге не позволило приблизить оценки для хвоста распределения равномерной нормы V-процессов в условиях сильного перемешивания к аналогичным оценкам для наблюдений с φ-перемешиванием.

Теорема C. (см. [1]) *Пусть $\{\xi_i\}$ – стационарная последовательность центрированных случайных величин с конечной дисперсией, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(k) < \infty.$$

Тогда при $n \to \infty$ имеет место следующая слабая сходимость в $D[0,1]$:

$$S_n(\cdot) \xrightarrow{d} \sqrt{\sigma} w(\cdot), \tag{19}$$

где $S_n(t) := n^{-1/2} \sum\limits_{i \le [nt]} \xi_i$ – процесс частичных сумм (случайная ломаная Донскера) на отрезке $[0,1]$, $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, $\sigma^2 := \mathbb{E}\xi_1^2 + 2\sum\limits_{i>1} \mathbb{E}\xi_1\xi_i$, при этом ряд $\sum\limits_{i>1} \mathbb{E}\xi_1\xi_i$ абсолютно сходится.

Теорема D. (см. [29]) *Пусть* $\{\xi_i\}$ *– стационарная последовательность центрированных случайных величин с конечным моментом порядка* $2+\delta$ *при* $\delta > 0$, *удовлетворяющая условию* α*-перемешивания, причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{\delta/(2+\delta)}(k) < \infty.$$

Тогда имеет место предельное соотношение (19).

З а м е ч а н и е 2. В теоремах C и D допускается, что $\sigma = 0$. Как уже было отмечено во Введении, вырожденные в нуле траектории на отрезке $[0, 1]$ нам будет удобно присоединять к классу центрированных гауссовских процессов.

§ 2. Основные результаты

Две нижеследующих теоремы составляют основное содержание первой главы диссертации. Первая теорема описывает предельное распределение для U-процессов, а вторая – для V-процессов.

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из двух условий:*

1) *стационарная последовательность* $\{X_i\}$ *удовлетворяет условию* α-*перемешивания с ограничением* (16);

2) *стационарная последовательность* $\{X_i\}$ *удовлетворяет условию* φ-*перемешивания с ограничением*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(k) < \infty.$$

Кроме того, пусть каноническое ядро $f \in L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ *удовлетворяет условию* (3), *и, кроме того, предполагается выполненным либо условие* (BC), *либо в случае* φ-*перемешивания условие* (BC) *может быть заменено на условие* (AC) *с ограничением* (I).

Тогда для любого измеримого в $D[0,1]$ *функционала* $g(\cdot)$, *непрерывного в точках пространства* $C[0,1]$, *последовательность* $g(U_n)$ *сходится по распределению к случайной величине* $g(U)$, *где случайный процесс* $U(t)$ *определен в* (4)–(6), *и соответствующий кратный функциональный ряд сходится почти наверное для каждого* $t \in [0,1]$ *и непрерывен по переменной* t *с вероятностью* 1.

З а м е ч а н и е 3. Как известно, если предельный процесс п.н. непрерывен, то сходимость допредельных процессов в $D[0,1]$ в метрике Скорохода эквивалентна сходимости в равномерной метрике. Отметим, что рассмотрение слабой сходимости в метрическом (нормированном) пространстве

$(D[0,1], \sup|\cdot|)$ наталкивается на некоторые неудобства, вызванные несепарабельностью этого нормированного линейного пространства (например, борелевская σ-алгебра в этом случае будет шире, чем цилиндрическая σ-алгебра). Вариант слабой сходимости, сформулированный в теореме 1, иногда называют C-сходимостью случайных процессов в $D[0,1]$ (см. [10]). Этот тип сходимости формулируется для значительно более широкого класса функционалов, нежели обычная слабая сходимость в $D[0,1]$ с метрикой Скорохода.

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из двух условий:*

1) *стационарная последовательность* $\{X_i\}$ *удовлетворяет условию* α-*перемешивания с ограничением* (16);

2) *стационарная последовательность* $\{X_i\}$ *удовлетворяет условию* φ-*перемешивания с ограничением*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(k) < \infty.$$

Кроме того, пусть для канонического ядра $f \in L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ *выполнены условия* (3) *и* (BC).

Тогда для любого измеримого в $D[0,1]$ *функционала* $g(\cdot)$, *непрерывного в точках пространства* $C[0,1]$, *последовательность* $g(V_n)$ *сходится по распределению к случайной величине* $g(V)$, *где случайный процесс* $V(t)$ *определен в* (4), (5), (7), *и соответствующий кратный функциональный ряд сходится почти наверное для каждого* $t \in [0,1]$ *и непрерывен по переменной* t *с вероятностью* 1.

2.1. Доказательство теоремы 1.

Итак, по теореме Прохорова [1] нам нужно проверить сходимость конечномерных распределений и свойство плотности семейства допредельных распределений.

1. *Сходимость конечномерных распределений.* Покажем, что для любого натурального q выполняется

$$(U_n(t_1), ..., U_n(t_q)) \xrightarrow{d} (U(t_1), ..., U(t_q)),$$

где $t_1, ..., t_q \in [0,1]$. Обозначим срезку $U_n(t)$ по индексам k_i как

$$U_n^N(t) := n^{-m/2} \sum_{k_1=1}^{N} ... \sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1 ... k_m} \left(\sum_{1 \le i_1 \neq} ... \sum_{\neq i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1}) ... e_{k_m}(X_{i_m}) \right),$$

а также соответствующую срезку процесса $U(t)$ как

$$U^N(t) := \sum_{k_1=1}^{N} ... \sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1 ... k_m} t^{m/2} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1, ..., k_m)}(t^{-1/2} w_j(t)).$$

Рассуждая так же как в [5], нетрудно показать, что при $N \to \infty$ имеют место следующие сходимости в среднем:

$$\sup_t |U_n(t) - U_n^N(t)| \to 0$$

равномерно по n, и кроме того,

$$\sup_t |U(t) - U^N(t)| \to 0.$$

Тогда для векторов-невязок при $N \to \infty$ тоже имеет место сходимость в среднем, равномерная по n и t:

$$(U_n(t_1) - U_n^N(t_1), ..., U_n(t_q) - U_n^N(t_q)) \to (0, ..., 0),$$

$$(U(t_1) - U^N(t_1), ..., U(t_q) - U^N(t_q)) \to (0, ..., 0).$$

Покажем сходимость по распределению векторов, состоящих из срезок исследуемых величин

$$\left(U_n^N(t_1), ..., U_n^N(t_q)\right) \xrightarrow{d} \left(U^N(t_1), ..., U^N(t_q)\right).$$

В определении $U_n^N(t)$ кратная сумма

$$n^{-m/2} \sum_{k_1=1}^{N} ... \sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1...k_m} \left(\sum_{1 \le i_1 \ne} ... \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1})...e_{k_m}(X_{i_m}) \right)$$

представляет собой линейную комбинацию конечного числа статистик следующего вида:

$$U_n^N(e_{k_1}, ..., e_{k_m})(t) := n^{-m/2} \sum_{1 \le i_1 \ne} ... \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1})...e_{k_m}(X_{i_m}).$$

Добавляя и вычитая диагональные элементы в таких суммах, представляем U-статистику в виде линейной комбинации статистик Мизеса, где суммирование уже ведется по всевозможным, не только попарно различным, наборам $j_1, ..., j_m$ (более подробно см. [5], [6]). Затем переходим к анализу полиномов степени не выше m от нескольких переменных, вместо которых подставлены случайные величины следующего вида:

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^{[nt]} e_k(X_i), \;\; n^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) e_{k_2}(X_i), \ldots, n^{-l/2} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i).$$

Для каждого $l > 2$ указанные суммы при $n \to \infty$ сходятся к 0 по вероятности, так как в силу условия (I) для φ-перемешивания или (16) для α-перемешивания конечна величина $\mathbf{E}|e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i)|$, и по закону больших чисел для слабо зависимых величин имеет место сходимость

$$n^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i) \xrightarrow{p} t\mathbf{E} e_{k_1}(X_i) \cdots e_{k_l}(X_i)$$

по вероятности, а значит, при $l > 2$ получаем

$$n^{-l/2}\sum_{i=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_i)\cdots e_{k_l}(X_i) \xrightarrow{p} 0.$$

Поэтому слагаемые, содержащие такие суммы в качестве сомножителя, тоже сходятся к нулю по вероятности. При $l = 2$ к указанным суммам также применяется закон больших чисел. Ввиду ортонормированности базиса в пределе эти величины совпадают с $t\delta_{k_1,k_2}$. Таким образом, в пределе результат для частичных сумм аналогичен случаю для независимых наблюдений:

$$U_n^N(t) \xrightarrow{d} U^N(t) = \sum_{k_1=1}^{N}\dots\sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1\dots k_m} t^{m/2}\prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(t^{-1/2}w_j(t)), \qquad (20)$$

где конечный набор зависимых винеровских процессов $\{w_j(t),\ i = 1,\dots,N\}$, конструктивно заданных как соответствующие сечения введенного двупараметрического гауссовского поля с ковариацией (4), является слабым пределом при $n \to \infty$ конечного семейства случайных процессов

$$\{n^{-1/2}\sum_{i=1}^{[nt]} e_j(X_i);\ t \in [0,1]\},\ \ j = 1,\dots,N.$$

Из доказанного выше с помощью стандартного метода Крамера–Уолда нетрудно также установить сходимости любых конечномерных распределений:

$$\big(U_n^N(t_1),\dots,U_n^N(t_q)\big) \xrightarrow{d} (U^N(t_1),\dots,U^N(t_q)).$$

Все вышеприведенные утверждения касательно сходимости конечномерных распределений являются непосредственным следствием многомерной центральной предельной теоремы для стационарных последовательностей векторных случайных величин с перемешиванием. Именно так доказывается сходимость конечномерных распределений в теоремах C и D.

При выводе (20) также было использовано следующее элементарное утверждение (см. [5]):

Предложение 3. *Пусть* $\Phi(x, y),\ x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^r$ *— непрерывная функция. Пусть* $\{\zeta_n\}$ *— произвольная последовательность случайных векторов в* $\mathbb{R}^k$*, слабо сходящаяся к некоторой случайному вектору* ζ*, а* $\{\eta_n\}$ *— заданная на одном вероятностном пространстве с* $\{\zeta_n\}$ *последовательность случайных векторов в* $\mathbb{R}^r$*, сходящаяся по вероятности к постоянному вектору* c_0*. Тогда имеет место слабая сходимость*

$$\Phi(\zeta_n, \eta_n) \xrightarrow{d} \Phi(\zeta, c_0).$$

Отметим, что в нашем случае $\Phi(x, y)$ — полином от координат векторов x и y, последовательность N-мерных случайных векторов ζ_n определена по формуле

$$\zeta_n = \{n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_1(X_j), ..., n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_N(X_j)\},$$

а случайный вектор η_n представляет собой конечный набор

$$\{n^{-k/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_{i_1}(X_j)...e_{i_k}(X_j);\ 2 \le k \le m,\ i_1, ..., i_k \le N\};$$

здесь N — произвольное натуральное число.

2. *Плотность семейства распределений допредельных процессов.* Нам требуется доказать следующее соотношение:

$$\lim_{\Delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \le 1,\, \delta \le \Delta} |U_n(t + \delta) - U_n(t)| > c \right) = 0.$$

Сначала докажем приведенное утверждение для срезки U_n^N:

$$\lim_{\Delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathbf{P} \left(\sup_{t \le 1,\, \delta \le \Delta} |U_n^N(t + \delta) - U_n^N(t)| > c \right) = 0.$$

Очевидно, что если для конечного числа случайных процессов выполнено свойство плотности их распределений, то и для суммы этих процессов оно тоже будет иметь место. Поэтому исследуем свойство плотности для составляющих U_n^N отдельно. Имеем

$$U_n^N(t) = n^{-m/2} \sum_{k_1=0}^{N} ... \sum_{k_m=0}^{N} \left(\sum_{1 \le i_1 \ne} ... \sum_{\ne i_m \le [nt]} f_{k_1...k_m} e_{k_1}(X_{i_1})...e_{k_m}(X_{i_m}) \right).$$

При этом для каждого фиксированного N правая часть в этой формуле состоит из конечного числа сумм вида

$$S_m(t) \equiv \tilde{S}_n(m, k_1, ..., k_m)(t) := n^{-m/2} \left(\sum_{1 \le i_1 \ne} ... \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1})...e_{k_m}(X_{i_m}) \right),$$

где индексы $1 \le k_1, ..., k_m \le N$ произвольные.

Докажем свойство плотности случайных процессов $\tilde{S}_n(m, ...)(t)$ индукцией по размерности m. Для $m = 1$ утверждение было доказано в [29].

Пусть утверждение верно для всех $m \le l$. Докажем его справедливость при $m = l + 1$. Воспользуемся тождеством

$$n^{-(l+1)/2} \left(\sum_{1 \le i_1 \ne} ... \sum_{\ne i_{l+1} \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1})...e_{k_l}(X_{i_l}) e_{k_{l+1}}(X_{i_{l+1}}) \right) =$$

$$= n^{-l/2} \left(\sum_{1 \le i_1 \ne} ... \sum_{\ne i_l \le [nt]} e_{k_1}(X_{i_1})...e_{k_l}(X_{i_l}) \right) n^{-1/2} \sum_{i_{l+1}=1}^{[nt]} e_{k_{l+1}}(X_{i_{l+1}}) -$$

$$-n^{-1} \sum_{i_{l+1}=i_1=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_{i_1}) e_{k_{l+1}}(X_{i_{l+1}}) n^{-(l-1)/2} \left(\sum_{1 \le i_2 \ne} ... \sum_{\ne i_m \le [nt]} e_{k_2}(X_{i_2})...e_{k_l}(X_{i_l}) \right) -$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-n^{-1}\sum_{i_{l+1}=i_l=1}^{[nt]} e_{k_l}(X_{i_l})e_{k_{l+1}}(X_{i_{l+1}})n^{-(l-1)/2}\times$$

$$\left(\sum_{1\le i_1\ne}\dots\sum_{\ne i_{l-1}\le[nt]} e_{k_1}(X_{i_1})\dots e_{k_{l-1}}(X_{i_{l-1}})\right),$$

которое удобно переписать в других обозначениях как

$$\tilde{S}_n(l+1,k_1,...,k_{l+1})(t)=\tilde{S}_n(l,k_1,...,k_l)(t)\tilde{S}_n(1,k_{l+1})(t)-$$

$$-(\tilde{S}_n(l-1,k_2,...,k_l)\theta_n^1(t)+...+\tilde{S}_n(l-1,k_1,...,k_{l-1})\theta_n^l(t)),$$

где

$$\theta_n^j(t)=n^{-1}\sum_{i_{l+1}=i_j=1}^{[nt]} e_{k_j}(X_{i_j})e_{k_{l+1}}(X_{i_{l+1}})\xrightarrow{p} t\delta_{k_jk_{l+1}}$$

при $n\to\infty$. Так как для $\tilde{S}_n(l-1,...)(t)$ по предположению индукции верно свойство плотности, то и для величины $\theta_n^j(t)\tilde{S}_n(l-1,...)(t)$ оно выполнено.

Осталось показать свойство плотности для $\tilde{S}_n(l,\cdot)(t)\tilde{S}_n(1,\cdot)(t)$. Имеем

$$S_l(t+\delta)S_1(t+\delta)-S_l(t)S_1(t)=$$

$$(S_l(t+\delta)-S_l(t))S_1(t+\delta)+S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t)).$$

Справедлива следующая оценка $\forall K>0$:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t))|>c\right)\le$$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le1,\,\delta\le\Delta}K|(S_1(t+\delta)-S_1(t)|>c\right)+P\left(\sup_t|S_l(t)|>K\right)$$

Тогда имеем

$$\lim_{\Delta\to0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t))|>c\right)\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta} K|(S_1(t+\delta)-S_1(t)|>c\right)+\varepsilon(l,K)=\varepsilon(l,K),$$

где $\varepsilon(l,K)\to 0$ при $K\to\infty$, поскольку случайная величина $\sup_{t\le 1}|S_1(t)|$ ограничена по вероятности равномерно по n (см. теоремы C и D). Так как K произвольное, то

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t))|>c\right)=0.$$

Используя аналогичные рассуждения

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|(S_l(t+\delta)-S_l(t))S_1(t+\delta)|>c\right)\le$$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}K|S_l(t+\delta)-S_l(t)|>c\right)+P\left(\sup_{t\le 1}|S_1(t)|>K\right).$$

Следовательно, применяя предположение индукции

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|(S_l(t+\delta)-S_l(t))S_1(t+\delta)|>c\right)\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}K|(S_l(t+\delta)-S_l(t)|>c\right)+\varepsilon(l,K)=\varepsilon(l,K).$$

В силу произвольного выбора K имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t))|>c\right)=0.$$

Объединив обе оценки, окончательно получаем

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t+\delta)S_1(t+\delta)-S_l(t)S_1(t)|>c\right)=0.$$

Шаг индукции доказан.

Далее, покажем, что $\mathbf{E}\sup_t|S_m(t)|<C(m)<\infty$. Действительно, добавляя и вычитая диагональные элементы в кратной сумме $S_m(t)$, мы получим конечную сумму произведений вида

$$S_1^{(1)}(t)\dots S_1^{(j)}(t),\quad 1\leqslant j\leqslant m,$$

где для краткости обозначено

$$S_1^{(l)}(t) := n^{-1/2}\left(\sum_{i\le[nt]} e_{k_l}(X_i)\right).$$

Применяя теоремы A или B, получаем с помощью неравенства Гёльдера

$$\mathbf{E}\sup_t\left|S_1^{(1)}(t)\dots S_1^{(j)}(t)\right| \leqslant \left(\mathbf{E}\sup_t\left|S_1^{(1)}(t)\right|^j\dots\mathbf{E}\sup_t\left|S_1^{(j)}(t)\right|^j\right)^{1/j} < \infty.$$

Теперь оценим математическое ожидание невязки:

$$\mathbf{E}\sup_t\left|U_n(t)-U_n^N(t)\right| = \mathbf{E}\sup_t\left|\sum_{max(k_j)=N+1}^{\infty} f_{k_1\dots k_m}\tilde{S}_n(m,...)(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{max(k_j)=N+1}^{\infty}|f_{k_1\dots k_m}|\mathbf{E}\sup_t|\tilde{S}_n(m,...)(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{max(k_j)=N+1}^{\infty}|f_{k_1\dots k_m}|C(m).$$

Таким образом, поскольку

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_m=1}^{\infty}|f_{k_1\dots k_m}| < \infty,$$

то для любых положительных ε и c существует такое N, что

$$\sum_{max(k_j)=N+1}^{\infty}|f_{k_1\dots k_m}| < c\varepsilon.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|U_n(t+\delta)-U_n(t)|>c\right)\leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\Big(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|U_n^N(t+\delta)-U_n^N(t)|+2\sup_t|U_n(t)-U_n^N(t)|>c\Big)$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|U_n^N(t+\delta)-U_n^N(t)|>c/2\right)+\mathbf{P}\left(\sup_t|U_n(t)-U_n^N(t)|>c/4\right)\leqslant$$
$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|U_n^N(t+\delta)-U_n^N(t)|>c/2\right)+4c^{-1}\mathbf{E}\sup_t\big|U_n(t)-U_n^N(t)\big|$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|U_n^N(t+\delta)-U_n^N(t)|>c/2\right)+4\varepsilon C(m).$$

Следовательно, поскольку первое слагаемое правой части этой цепочки неравенств с ростом n стремится к нулю, то

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|U_n(t+\delta)-U_n(t)|>c\right)\leqslant 4\varepsilon C(m).$$

В силу произвольности ε заключаем, что и

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|U_n(t+\delta)-U_n(t)|>c\right)=0$$

для любого положительного c.

Осталось показать п.н. непрерывность предельного случайного процесса $U(t)$. Для начала проверим критерий п.н. непрерывности для случайных процессов $w_j(t)$. Для этого оценим

$$\mathbf{E}|w_j(t+\delta)-w_j(t)|^4.$$

Так как $\{w_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ представляют собой винеровские процессы (в силу формулы ковариации (4)), то для всех j справедливо:

$$\mathbf{E}|w_j(t+\delta)-w_j(t)|^4=\mathbf{E}|w_j(\delta))|^4=C\delta^2.$$

Кроме того, для всех $l \le m$ имеем

$$\mathbf{E}|w_j^l(t+\delta) - w_j^l(t)|^4 = \mathbf{E}|w_j(t+\delta) - w_j(t)|^4 |w_j^{l-1}(t+\delta) + ... + w_j^{l-1}(t)|^4 \le$$

$$\le \left(\mathbf{E}|w_j(t+\delta) - w_j(t)|^8 E|w_j^{l-1}(t+\delta) + ... + w_j^{l-1}(t)|^8\right)^{1/2} \le$$

$$\le (C\delta^4)^{1/2} = \tilde{C}\delta^2.$$

Понятно, что умножение на $t^k,\ t \in [0,1]$, степени $w_j^l(t)$ рассматриваемых винеровских процессов существенно не изменит вышеприведенную оценку. Соответствующая конечная линейная комбинация выражений вида $t^k w_j^l(t)$ как раз и представляет случайный процесс

$$t^{v_j(k_1,...,k_m)/2} H_{v_j(k_1,...,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t)).$$

А так как для всех $j, k_1, ..., k_m$ показатель $v_j(k_1, ..., k_m)$ соответствующего полинома Эрмита не больше m, то отсюда окончательно заключаем, что

$$\mathbf{E}|(t+\delta)^{v_j(k_1,...,k_m)/2} H_{v_j(k_1,...,k_m)}((t+\delta)^{-1/2} w_j(t+\delta)) -$$

$$- t^{v_j(k_1,...,k_m)/2} H_{v_j(k_1,...,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t))|^4 \le C_1(m)\delta^2.$$

Тогда легко видеть, что и для произведения конечного числа таких процессов (отметим, что при $j > \max k_i$ все множители в нижеследующем произведении равны 1)

$$Y_{k_1,...,k_m}(t) = t^{m/2} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,...,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t))$$

в силу неравенства Гельдера справедлива аналогичная оценка

$$\mathbb{E}|Y_{k_1,...,k_m}(t+\delta) - Y_{k_1,...,k_m}(t)|^4 \le C_2(m)\delta^2.$$

Далее для удобства вместо мультииндекса $k_1, ..., k_m$ будем писать $\tilde{k}$ и обозначим

$$\triangle Y_{\tilde{k}} := Y_{\tilde{k}}(t+\delta) - Y_{\tilde{k}}(t).$$

Тогда, вновь применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\mathbf{E}|U(t+\delta) - U(t)|^4 \leq \sum_{\tilde{k_1}} \sum_{\tilde{k_2}} \sum_{\tilde{k_3}} \sum_{\tilde{k_4}} |f_{\tilde{k_1}} f_{\tilde{k_2}} f_{\tilde{k_3}} f_{\tilde{k_4}}| \mathbf{E}|\triangle Y_{\tilde{k_1}} \triangle Y_{\tilde{k_2}} \triangle Y_{\tilde{k_3}} \triangle Y_{\tilde{k_4}}|$$

$$\leq \sum_{\tilde{k_1}} \sum_{\tilde{k_2}} \sum_{\tilde{k_3}} \sum_{\tilde{k_4}} |f_{\tilde{k_1}} f_{\tilde{k_2}} f_{\tilde{k_3}} f_{\tilde{k_4}}| \left(\mathbf{E}|\triangle Y_{\tilde{k_1}}|^4 \mathbf{E}|\triangle Y_{\tilde{k_2}}|^4 \mathbf{E}|\triangle Y_{\tilde{k_3}}|^4 \mathbf{E}|\triangle Y_{\tilde{k_4}}|^4\right)^{1/4}$$

$$\leq \sum_{\tilde{k_1}} \sum_{\tilde{k_2}} \sum_{\tilde{k_3}} \sum_{\tilde{k_4}} |f_{\tilde{k_1}} f_{\tilde{k_2}} f_{\tilde{k_3}} f_{\tilde{k_4}}| C_2(m)\delta^2 = C_2(m)\delta^2 (\sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} |f_{k_1 ... k_m}|)^4.$$

Итак, в силу известного критерия Колмогорова–Ченцова (см. [12]) убеждаемся в п.н. непрерывности $U(t)$. Теорема 1 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2.

В силу условия (BC) для всех элементарных исходов имеет место представление

$$V_n(t) = \sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1 ... k_m} n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_j) \cdots n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_{k_m}(X_j).$$

Дальнейшее рассуждения в упрощенном виде повторяют рассуждения для U-статистик из предыдущего параграфа. Действительно, сначала мы перейдем к анализу “срезанных” процессов

$$V_n^N(t) = \sum_{k_1=1}^{N} ... \sum_{k_m=1}^{N} f_{k_1 ... k_m} n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_j) \cdots n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_{k_m}(X_j).$$

Сходимость конечномерных распределений случайных процессов $V_n^N(\cdot)$ следует из слабой сходимости векторнозначных процессов

$$\left(\sum_{j=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_j), \ldots, n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_{k_m}(X_j)\right)$$

к соответствующему многомерному гауссовскому процессу

$$\left(w_{k_1}(t), \ldots, w_{k_m}(t)\right),$$

компоненты которого определены в (5) при любых индексах $k_1, \ldots, k_m \leq N$, что и означает обоснованную ранее слабую сходимость конечного семейства случайных процессов

$$\left(\sum_{j=1}^{[nt]} e_1(X_j), \ldots, n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_N(X_j)\right).$$

Доказательство свойства плотности распределений процессов $V_n(\cdot)$ значительно упрощается за счет отсутствия комбинаторики. По аналогии с предыдущими рассуждениями нам достаточно получить равномерную по n и всем k_j оценку малости по вероятности модуля непрерывности следующего произведения сумм:

$$S_m(t) := n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_{k_1}(X_j) \cdots n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nt]} e_{k_m}(X_j).$$

Доказательство проведем индукцией по m. При $m = 1$ утверждение доказано в [1] и [29] в случаях 1) и 2) соответственно (см. теоремы C и D), поскольку элементы $e_j(\cdot)$ в силу условий (BC) равномерно ограничены. Поэтому правые части соответствующих моментных неравенств (см. теоремы A и B) будут зависеть только от этих верхних оценок и коэффициентов перемешивания.

Теперь допустим, что при $m=l$ утверждение верно, т.е. модуль непрерывности процесса $S_l(t)$ сходится к нулю по вероятности равномерно по n и всем k_j. В частности, случайная величина $\sup_t|S_l(t)|$ ограничена по вероятности равномерно по n. Докажем аналогичное утверждение для $m=l+1$. Имеем

$$S_{l+1}(t+\delta)-S_{l+1}(t)=$$
$$=(S_1(t+\delta)-S_1(t))S_l(t)+S_1(t+\delta)(S_l(t+\delta)-S_l(t)).$$

Справедлива следующая оценка $\forall K>0$:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t))|>c\right)\le$$

$$\le\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}K|(S_1(t+\delta)-S_1(t)|>c\right)+P(\sup_{t\le 1}|S_l(t)|>K).$$

Тогда имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t))|>c\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}K|(S_1(t+\delta)-S_1(t)|>c\right)+$$
$$+\varepsilon(l,K)=\varepsilon(l,K),$$

где $\lim_{K\to\infty}\varepsilon(l,K)=0$. Так как K произвольное, то

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t))|>c\right)=0.$$

Используя аналогичные рассуждения, получаем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|(S_l(t+\delta)-S_l(t))S_1(t+\delta)|>c\right)\le$$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}K|S_l(t+\delta)-S_l(t)|>c\right)+P(\sup_{t}|S_1(t)|>K).$$

Следовательно, ввиду предположения индукции

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|(S_l(t+\delta)-S_l(t))S_1(t+\delta)|>c\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}K|(S_l(t+\delta)-S_l(t)|>c\right)+$$
$$+\varepsilon(l,K)=\varepsilon(l,K).$$

В силу произвольного выбора K получаем

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t)(S_1(t+\delta)-S_1(t))|>c\right)=0.$$

Объединив обе оценки, окончательно получаем, что

$$\lim_{\Delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sup_{t\le 1,\,\delta\le\Delta}|S_l(t+\delta)S_1(t+\delta)-S_l(t)S_1(t)|>c\right)=0.$$

Шаг индукции доказан.

Почти непрерывность процесса $V(t)$ следует из уже приведенных рассуждений при доказательстве теоремы 1, а именно после переобозначения

$$Y_{k_1,\dots,k_m}(t):=w_{k_1}(t)\cdots w_{k_m}(t)$$

доказательство полностью переносится на наш случай.

Переход от случайных процессов $V_n^N(\cdot)$ к процессам $V^N(\cdot)$ происходит точно так же, как и в предыдущей теореме. Именно, используется доказанная в [5] равномерная по n сходимость в среднем при $N\to\infty$ допредельных процессов $V_n^N(\cdot)$ к $V_n(\cdot)$, а также предельных срезанных процессов $V^N(\cdot)$ к исходному $V(\cdot)$.

Теорема 2 доказана.

ГЛАВА 2

Экспоненциальные неравенства для распределений V-процессов

§ 1. Оценки для хвоста распределения и моментов максимальной частичной суммы

Прежде всего приведем несколько вспомогательных результатов, связывающих оценки хвостов распределения и моментов произвольных случайных величин. Эти результаты устанавливают своеобразную двойственность между скоростью роста степенных моментов и скоростью убывания хвоста распределения. В научной литературе, связанной с суммированием зависимых случайных величин, нередко именно оценки для моментов позволяли получать показательные оценки для хвостов распределения сумм. Так что новизна приводимых ниже результатов, скорее всего, заключается в систематизации вышеупомянутых соотношений с вычислением в них явных констант.

Лемма 1. *Пусть ζ – произвольная случайная величина с конечными моментами всех порядков $r \geq 0$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\mathbf{E}|\zeta|^r \leq AC_o^r r^{r/2} \quad \textit{при всех целых } r \geq r_0, \tag{21}$$

где r_0 – некоторое натуральное число, а постоянные $A \geq 1$ и $C_o > 0$ не зависят от r. Тогда неравенства (21) *будут справедливы при любом действительном $r > 0$, и для всех $t \geq 0$ имеют место оценки*

$$\mathbf{E}e^{t\zeta} \leq 3Ae^{bt^2}, \ \textit{если } \mathbf{E}\zeta = 0, \tag{22}$$

$$\mathbf{E}e^{t|\zeta|} \le 4Ae^{bt^2}, \tag{23}$$

где $b = C_o^2(e/2 + 1/4)$. *Кроме того, при всех* $x \ge 0$

$$\mathbf{P}(|\zeta| \ge x) \le Ae^{-\frac{1}{2e}(x/C_o)^2}. \tag{24}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в условиях леммы без ограничения общности можно считать, что $r_0 = 1$, поскольку для любого положительного $r \le r_0$ (не обязательно целого) в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\mathbf{E}|\zeta|^r \le (\mathbf{E}|\zeta|^{r_0})^{r/r_0} \le (AC_o^{r_0} r_0^{r_0/2})^{r/r_0} \le AC_o^r r^{r/2}.$$

Это соотношение заодно доказывает первое утверждение леммы, так как в приведенной выше выкладке в качестве r_0 теперь можно брать любое натуральное число.

Далее для простоты положим $A = 1$. Раскладывая экспоненту в ряд Тейлора и используя формулу Стирлинга, получаем

$$\mathbf{E}e^{t\zeta} \le 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{t^r \mathbf{E}|\zeta|^r}{r!} \le 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{C_o^r t^r r^{r/2}}{r!} \le 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{C_o^r t^r}{\sqrt{2\pi r} r^{r/2} e^{-r+\theta(r)}}$$
$$= 1 + \sum_{r=2m, m\ge 1} \ldots + \sum_{r=2m+1, m\ge 1} \ldots, \tag{25}$$

где $\frac{1}{12r+1} \le \theta(r) \le \frac{1}{12r}$ для всех натуральных r. Теперь оценим каждую из сумм в правой части (25). Имеем

$$\sum_{r=2m, m\ge 1} \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C_o t)^{2m}}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi m} 2^m m^m e^{-2m+\theta(2m)}} < \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C_o^2 t^2 e/2)^m}{m!}$$
$$< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C_o^2 t^2 e/2)^m}{m!} = \exp\{C_o^2 t^2 e/2\} - 1. \tag{26}$$

Вторая сумма оценивается аналогично:

$$\sum_{r=2m+1,m\geq 1}\ldots=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(C_ot)^{2m+1}}{\sqrt{2\pi(2m+1)}(2m+1)^{m+1/2}e^{-2m-1+\theta(2m+1)}}$$
$$<\frac{C_ote^{13/12}}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(C_o^2t^2e/2)^m}{m!}<\frac{C_ot\sqrt{e}e^{7/12}}{\sqrt{2}}\exp\{C_o^2t^2e/2\}$$
$$<2\exp\{C_o^2t^2(e/2+1/4)\}. \quad (27)$$

Последнее неравенство в (27) есть следствие элементарного неравенства

$$\sqrt{x}\leq e^{\frac{x}{2e}}\ \text{ при всех }\ x\geq 0,$$

которое применено при $x=C_o^2t^2e/2$ к первому множителю предпоследнего выражения в цепочке неравенств (27). Неравенство (22) непосредственно следует из оценок (25)–(27).

Для доказательства оценки (23) заметим, что разложение в ряд Тейлора производящей функции моментов $\mathbf{E}e^{t|\zeta|}$ в положительной полуокрестности нуля отличается от правой части неравенства (26) лишь слагаемым $t\mathbf{E}|\zeta|\leq tC_0$. Остается только применить элементарную оценку

$$tC_0\leq e^{t^2C_0^2}\leq e^{bt^2},$$

так как $e/2+1/4>1$.

Нам осталось доказать лишь неравенство (24). После применения степенного неравенства Маркова имеем с помощью (21)

$$\mathbf{P}(|\zeta|\geq x)\leq\inf_{r\geq 0}\mathbf{E}|\zeta|^rx^{-r}\leq\inf_{r\geq 0}e^{-g(r)}=e^{-\max_{r\geq 0}g(r)}, \quad (28)$$

где

$$g(r):=r\log(x/C_o)-\frac{r}{2}\log r.$$

Элементарно устанавливается, что функция $g(r)$ достигает своего максимума в точке $r_o = (x/C_o)^2 e^{-1}$. Подставляя это значение r_o в (28), получаем в точности оценку (24).

Отметим, что подобную экспоненциальную оценку можно было бы получить с помощью (23), используя показательное неравенство Маркова:

$$\mathbf{P}(|\zeta| \geq x) \leq \inf_{t\geq 0} \mathbf{E} e^{t|\zeta|} e^{-xt} \leq 4 \inf_{t\geq 0} e^{bt^2 - xt} = 4e^{-\frac{x^2}{4b}}, \tag{29}$$

элементарно вычислив при этом точку минимума $t = \frac{x}{2b}$ в предпоследнем члене цепочки соотношений в (29). Однако, как легко видеть,

$$4b = 4C_o^2(e/2 + 1/4) > 2C_o^2 e.$$

Значит, оценка (24) точнее, чем (29).

Таким образом, лемма 1 доказана.

Далее нам понадобится следующее утверждение, вытекающее непосредственно из леммы 1.

Следствие 1. *Пусть ζ – произвольная случайная величина, для моментов которой при некотором $m > 0$ справедливы неравенства*

$$\mathbf{E}|\zeta|^p \leq A C_o^{pm} (pm)^{pm/2} \quad \text{при всех натуральных } p,$$

где $A \geq 1$, $C_o > 0$ – некоторые постоянные. Тогда

$$\mathbf{P}(|\zeta| \geq x) \leq A \exp\{-(2eC_o^2)^{-1} x^{\frac{2}{m}}\}. \tag{30}$$

Доказательство сразу следует из леммы 1, где нужно положить $r = pm$ и рассмотреть вместо исходной новую случайную величину $|\zeta|^{1/m}$.

Нам также понадобится в известном смысле обратное по отношению к лемме 1 утверждение.

Лемма 2. *Пусть ζ – произвольная случайная величина, для которой*

$$\mathbf{P}(|\zeta| \geq x) \leq Ae^{-Bx^2}$$

при всех $x \geq 0$, где $A \geq 1$ и $B > 0$. Тогда

$$\mathbf{E}|\zeta|^r \leq AC_o^r r^{r/2} \quad \text{для всех четных } r, \tag{31}$$

$$\mathbf{E}|\zeta|^r \leq A\sqrt{e}C_o^r r^{r/2} \quad \text{для всех нечетных } r,$$

$$\mathbf{E}|\zeta|^r \leq A^*\sqrt{e}C_o^r r^{r/2} \quad \text{для всех неотрицательных нецелых } r,$$

где $C_o = (2B)^{-1/2}$, $A^* = A$, если $[r]$ нечетно, и $A^* = A\sqrt{e}$, если $[r]$ четно.

Доказательство. Для четного $r > 2$ получаем

$$\mathbf{E}|\zeta|^r = r\int_0^\infty x^{r-1}\mathbf{P}(|\zeta| \geq x)dx \leq Ar\int_0^\infty x^{r-1}e^{-Bx^2}dx =$$

$$= -A(2B)^{-1}r\int_0^\infty x^{r-2}d(e^{-Bx^2}) = A(2B)^{-1}r(r-2)\int_0^\infty x^{r-3}e^{-Bx^2}dx =$$

$$= -A(2B)^{-2}r(r-2)\int_0^\infty x^{r-4}d(e^{-Bx^2}) = ... = A(2B)^{-r/2}r!! \leq A(1/\sqrt{2B})^r r^{r/2}.$$

Для $r = 2$ приведенная цепочка соотношений обрывается через один шаг после знака неравенства. Для $r = 0$ оценка (31) очевидна.

Случай нечетного r легко сводится к предыдущему. В самом деле, с помощью неравенства Гельдера и (31) получаем

$$\mathbf{E}(|\zeta|)^r \leq (\mathbf{E}(|\zeta|)^{r+1})^{\frac{r}{r+1}} \leq (AC_o^{r+1}(r+1)^{(r+1)/2})^{\frac{r}{r+1}}$$

$$\leq AC_o^r r^{r/2}(1+1/r)^{r/2}. \tag{32}$$

Осталось только заметить, что

$$(1+1/r)^r < e.$$

Случай произвольного нецелого $r \geq 0$ легко сводится к разобранным двум случаям, если в выкладке (32) вместе $r+1$ подставить величину $\lceil r \rceil$ – минимальное целое, которое не меньше r, принимая во внимание на последнем шаге доказательства тот факт, что $\lceil r \rceil \leq r+1$, поскольку $\lceil r \rceil = [r]+1$ для любого нецелого $r \geq 0$, иначе $\lceil r \rceil = [r] = r$.

Таким образом, лемма доказана.

Приведенное утверждение допускает обобщение, которое вполне аналогично следствию 1.

Следствие 2. *Пусть ζ – произвольная случайная величина, для которой*

$$\mathbf{P}(|\zeta| \geq x) \leq A\exp\{-Bx^{\frac{2}{m}}\}$$

при всех $x \geq 0$, где $A \geq 1$, $m > 0$, $B > 0$. Тогда

$$\mathbf{E}|\zeta|^p \leq AeC_o^{pm}(pm)^{pm/2} \tag{33}$$

для всех $p \geq 0$, где $C_o = (2B)^{-1/2}$.

Это утверждение сразу следует из леммы 2, где вместо случайной величины ζ нужно рассмотреть величину $|\zeta|^{1/m}$, для которой выполнено условие леммы 2. Остается положить $r = pm$ и воспользоваться последним неравенством в (31).

1.1. Суммы независимых случайных величин

Приведем нужные нам варианты неравенства Хефдинга–Дуба для максимума сумм независимых случайных величин (см. [33]).

Лемма 3. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условиям $\mathbf{E}\xi_i = 0$ и $|\xi_i| \leq c_o$ почти наверное. Тогда для всех $x \geq 0$*

$$\mathbf{P}(\max_{k\leq n} S_k \geq x\sqrt{n}) \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2c_o^2}\right\},$$

$$\mathbf{P}(\max_{k\le n}|S_k|\ge x\sqrt{n})\le 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2c_o^2}\right\}, \tag{34}$$

где $S_k=\xi_1+\ldots+\xi_k$, $k=1,2,\ldots$.

В качестве следствия лемм 2 и 3 приведем следующее утверждение.

Следствие 3. *В условиях леммы* 3 *справедливы следующие неравенства*:

1) *для любого четного* $r\ge 0$

$$\mathbf{E}(\max_{k\le n}|S_k|)^r\le 2c_o^r(nr)^{r/2}, \tag{35}$$

где по определению полагаем $0^0=1$*;*

2) *для любого нечетного* $r\ge 1$ *выполнено*

$$\mathbf{E}(\max_{k\le n}|S_k|)^r\le 2\sqrt{e}c_o^r(nr)^{r/2}. \tag{36}$$

1.2. Суммы зависимых случайных величин

Нам понадобятся несколько вспомогательных результатов. Первый из них непосредственно следует из определения коэффициента перемешивания ψ. Отметим, что далее мы используем лишь тот факт, что $\psi(d)<1$ при некотором натуральном d. При этом не требуется, чтобы $\psi(d)\to 0$ при $d\to\infty$, т.е. имело место собственно ψ-перемешивание.

Лемма 4. *Пусть на одном вероятностном пространстве с последовательностью* $\{\xi_i\}$ *заданы неотрицательные случайные величины* ν *и* ζ*, измеримые соответственно относительно* σ*-алгебр* F_1^j *и* F_{j+d}^∞ *для некоторых натуральных* j *и* d*. Тогда если* $\psi(d)<1$*, то*

$$(1-\psi(d))\mathbf{E}\nu\mathbf{E}\zeta\le\mathbf{E}\nu\zeta\le(1+\psi(d))\mathbf{E}\nu\mathbf{E}\zeta.$$

Лемма 5. *Пусть в условиях леммы* 4 *выполнено* $|\xi_i| \le c_o$ *почти наверное. Тогда для любых* $x, t \ge 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\le n} S_k \ge x\right) \le \frac{1+\psi(d)}{1-\psi(d)} e^{-tx+2tc_o(d-1)} \max_{k\le n} \mathbf{E} e^{tS_k}. \qquad (37)$$

Доказательство. По сути мы будем следовать схеме доказательства основного утверждения в [9]. Введем в рассмотрение момент остановки

$$\eta = \min\{k : \ S_k \ge x\}.$$

Отметим, что при любом k событие $\{\eta = k\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}_1^k$. Тогда с помощью нижней оценки в лемме 4 получаем

$$\mathbf{E}e^{tS_n} \ge \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}e^{tS_n} I(\eta = k) \ge e^{tx} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}e^{t(S_n - S_k)} I(\eta = k)$$
$$\ge e^{tx - tc_o(d-1)} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}e^{t(S_n - S_{(k+d-1)\wedge n})} I(\eta = k)$$
$$\ge (1-\psi(d)) e^{tx - tc_o(d-1)} \min_{k\le n} \mathbf{E}e^{t(S_n - S_{(k+d-1)\wedge n})} \mathbf{P}(\max_{k\le n} S_k > x). \quad (38)$$

Определим натуральное k_o из соотношения

$$\min_{k\le n} \mathbf{E}e^{t(S_n - S_{(k+d-1)\wedge n})} = \mathbf{E}e^{t(S_n - S_{(k_o+d-1)\wedge n})}.$$

Тогда из верхней оценки в лемме 4 следует

$$\mathbf{E}e^{tS_n} \le (1+\psi(d)) e^{tc_o(d-1)} \mathbf{E}e^{t(S_n - S_{(k_o+d-1)\wedge n})} \mathbf{E}e^{tS_{k_o}}.$$

Подставляя эту оценку в (38), немедленно получаем неравенство (37). Лемма доказана.

Следствие 4. *Если в условиях леммы* 4 *случайные величины* $\{S_k\}$ *образуют субмартингал, то*

$$\max_{k\le n} \mathbf{E}e^{tS_k} = \mathbf{E}e^{tS_n}.$$

Доказательство. Для субмартингала выполнено соотношение

$$\mathbf{E}_{\mathfrak{M}_1^{k-1}} S_k \geq S_{k-1}$$

почти наверное. Тогда при любом фиксированном $t \geq 0$ в силу неравенства Йенсена для условного математического ожидания $\mathbf{E}_{\mathfrak{M}_1^{k-1}}$ имеем

$$g(k) := \mathbf{E}e^{tS_k} = \mathbf{E}\mathbf{E}_{\mathfrak{M}_1^{k-1}} e^{tS_k} \geq \mathbf{E}e^{tS_{k-1}} = g(k-1),$$

т.е. функция $g(k)$ монотонно неубывающая, что и требовалось доказать.

Отметим, что свойство монотонности математических ожиданий выпуклых функций от мартингалов было отмечено в [13] (см. также [33]).

Следствие 5. *Если случайные величины $\{\xi_i\}$ независимы и имеют неотрицательные средние, то в силу следствия* 3

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq x\right) \leq e^{-tx}\mathbf{E}e^{tS_n}. \tag{39}$$

Если, кроме того, случайные величины $\{\xi_i\}$ одинаково распределены, то

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \leq n} S_k \geq x\right) \leq \inf_{t \geq 0} e^{-tx} f^n(t) = e^{-n\Lambda(x/n)},$$

где $f(t) = \mathbf{E}e^{t\xi_1}$, а функция

$$\Lambda(z) = \sup_{t \geq 0}\{tz - \log f(t)\}, \ z \geq 0,$$

представляет собой так называемую функцию уклонений случайной величины ξ_1.

З а м е ч а н и е 1. Неравенство (39) уточняет соответствующий результат в [9], где утверждалось, что максимум в правой части неравенства (34) для независимых случайных величин ξ_i, вообще говоря, нельзя заменить на значение производящей функции моментов n-ой частичной суммы. Упомянутое утверждение из [9] справедливо лишь в случае, когда $\mathbf{E}\xi_i < 0$ для всех $i \leq n$. В самом деле, в этом случае

$$\mathbf{E}e^{t\xi_i} = 1 + t\mathbf{E}\xi_i + o(t) < 1$$

для всех достаточно малых $t > 0$. Так что производящая функция моментов $\mathbf{E}e^{tS_n}$ в окрестности нуля экспоненциально быстро стремится к нулю с ростом n, скажем, при условии, что случайные величины $\{\xi_i\}$ одинаково распределены. В то же самое время, в широких условиях максимальная сумма при отрицательном сносе имеет при $n \to \infty$ показательное предельное распределение на $[0, \infty)$ (см. [9]), что и доказывает невозможность замены максимума производящих функций в правой части (37) на n-ую без каких-либо ограничений на знак математического ожидания случайных величин ξ_i.

Рассмотрим теперь случай равномерно сильного перемешивания. Нам понадобится следующее утверждение из [25]:

Лемма 6. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – стационарная последовательность центрированных случайных величин, удовлетворяющая условию φ-перемешивания и $|\xi_1| \leq c_o$ почти наверное. Тогда для всех $p \geq 2$ выполняется неравенство*

$$\mathbf{E}|\sum_{i=1}^{n} \xi_i|^p \leq \left(8c_o^2 p \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\varphi(j)\right)^{p/2}. \tag{40}$$

Из лемм 1 и 6 сразу вытекает

Следствие 6. *В условиях леммы 6 для любого $t \geq 0$*

$$\max_{k \leq n} \mathbf{E}e^{tS_k} \leq 3e^{C_1^2(e/2+1/4)t^2}, \tag{41}$$

где

$$C_1^2 = 8c_o^2 \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\varphi(j). \tag{42}$$

Теперь с помощью леммы 5 в дополнение к следствию 6 получаем

Следствие 7. *Пусть в условиях леммы* 6 *стационарная последовательность* $\{\xi_i\}$ *удовлетворяет условию* φ*-перемешивания, причем*

$$\bar{\varphi} = \sum_{k \geq 1} \varphi(k) < \infty.$$

Предположим, что для некоторого натурального d *определен также и коэффициент* ψ*-перемешивания, причем* $\psi(d) < 1$. *Тогда для любого* $x \geq 0$

$$\mathbf{P}(\max_{k \leq n} |S_k| \geq x) \leq A_1 \exp\left\{-\frac{x^2}{8C_1^2(e/2+1/4)}\right\}, \tag{43}$$

где

$$A_1 = 6\frac{1+\psi(d)}{1-\psi(d)} \exp\left\{\frac{c_o^2(d-1)^2}{C_1^2(e/2+1/4)}\right\}. \tag{44}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}\left(\max_{k \leq n} |\widetilde{S}_k|\right)^r \leq A_1\sqrt{e}(2c_o\sqrt{\bar{\varphi}(e/2+1/4)})^r r^{r/2}, \tag{45}$$

где $\widetilde{S}_n = n^{-1/2}S_n$, *константа* C_1 *определена в* (42).

Доказательство следствия 7. Подставляя (41) в (37) и минимизируя по t правую часть полученного неравенства, получаем (см. (29))

$$\mathbf{P}(\max_{k \leq n} S_k \geq x) \leq 3\frac{1+\psi(d)}{1-\psi(d)} \exp\left\{-\frac{(x-2c_o(d-1))^2}{4C_1^2(e/2+1/4)}\right\}. \tag{46}$$

Теперь заметим, что при любом $C \geq 0$ справедливо неравенство

$$(x-C)^2 \geq x^2/2 - C^2$$

при всех x. Подставляя эту оценку в (46) при $C = 2c_o(d-1)$, немедленно получаем (43). Так как

$$C_1^2/n = n^{-1} 8c_o^2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\varphi(j) < 8\bar{\varphi}c_o^2, \tag{47}$$

то из (43) следует, что

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\le n} |\widetilde{S}_k| \ge x\right) = \mathbf{P}\left(\max_{k\le n} |S_k| \ge x\sqrt{n}\right) \le$$

$$\le A_1 \exp\left\{-\frac{x^2}{8^2\bar{\varphi}c_o^2(e/2+1/4)}\right\}.$$

Наконец, применяя лемму 2 при $A = A_1$ (см. (44)) и

$$B = (8^2\bar{\varphi}c_o^2(e/2+1/4))^{-1},$$

получаем (45). Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 2. В следствии 7 можно было бы предполагать суммируемость ψ-коэффициентов, поскольку в силу неравенства $\varphi(k) \le \psi(k)$ отсюда вытекало бы условие вышеприведенного следствия. Но нам достаточно, чтобы выполнялись лишь два условия: $\bar{\varphi} < \infty$ и $\psi(d) < 1$ для некоторого натурального d; при этом вовсе не предполагается, что $\psi(d) \to 0$ при $d \to \infty$. Последнее замечание в полной мере относится и к утверждениям лемм 4 и 5.

Конечно, следствие 7 всё-таки больше рассчитано на последовательности с ψ-перемешиванием, нежели с равномерно сильным. Требование наряду с φ-перемешиванием, чтобы существовал конечный коэффициент перемешивания $\psi(\cdot)$, да еще с условием $\psi(d) < 1$, накладывает серьезные ограничения на конечномерные распределения стационарной последовательности. Интерес к такой комбинации двух коэффициентов перемешивания скорее чисто теоретический и связан с возможностью выписать явные константы в соответствующих оценках. Теперь мы рассмотрим случай зависимых $\{\xi_i\}$, удовлетворяющих условию φ-перемешивания без дополнительных ограничений, связанных с привлечением других характеристик степени зависимости.

Теорема 3. *Пусть $\{\xi_i\}$ – стационарная последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, причем*

$$\bar{\varphi} := \sum_{k\geq 1} \varphi(k) < \infty, \quad \mathbf{E}\xi_1 = 0 \quad \textit{и} \quad |\xi_1| \leq c_o \quad \textit{почти наверное.}$$

Тогда при всех $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leq n} |S_k| \geq x\sqrt{n}\right) \leq A \exp\left\{-Bx^2\right\}, \tag{48}$$

где

$$A := e^2, \;\; B^{-1} := 32c_o^2 e\bar{\varphi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2}\sqrt{k+1}\right)^2.$$

Доказательство теоремы 3 вынесено в §3.

Теперь можно сравнить показательные оценки (43) и (48). Подставляя в (43) вместо x величину $x\sqrt{n}$ и принимая во внимание оценку (47), приходим к необходимости сравнения констант в показателе двух экспонент. Простые вычисления показывают, что

$$32c_o^2 e\bar{\varphi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2}\sqrt{k+1}\right)^2 > 8^2\bar{\varphi}c_o^2(e/2 + 1/4),$$

поскольку

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2}\sqrt{k+1}\right)^2 = (5,8619\ldots)^2 > 1 + (2e)^{-1}.$$

Это означает, что экспоненциальная часть оценки (43) существенно меньше, чем в (48), что объясняется наличием значительно более слабой формы зависимости наблюдений, которая выражается лишь в одном факте существования коэффициента ψ-перемешивания, меньшего единицы при некотором значении аргумента. В то же самое время множитель A_1 в (43) может быть существенно больше e^2, если величина $\psi(d)$ будет близка к 1. Так что любая из этих двух оценок может оказаться точнее другой при соответствующем подборе входящих параметров.

В качестве непосредственного следствия теоремы 3 и леммы 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 8. *В условиях теоремы* 3 *при всех* $r \geq 0$ *справедлива оценка*

$$\mathbf{E}\left(\max_{k \leq n} |S_k|\right)^r \leq n^{r/2} e^3 C_o^r r^{r/2},$$

где

$$C_o = 4c_o(e\bar{\varphi})^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2}\sqrt{k+1} < 24c_o(e\bar{\varphi})^{1/2}.$$

Менее точная, нежели (48), экспоненциальная оценка (по порядку показателя экспоненты и с неявными константами) имеет место при условии α-перемешивания. Доказательство нижеследующей теоремы 4 также вынесено в §3.

Теорема 4. *Пусть* $\{\xi_i\}$ *– стационарная последовательность случайных величин, причем* $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ *и* $|\xi_1| \leq 1$ *почти наверное, удовлетворяющая условию* α*-перемешивания с показательной оценкой на соответствующий коэффициент:*

$$\alpha(k) \leq ce^{-bk}$$

для некоторых положительных c и b. Тогда существуют такие положительные постоянные A и B, что при всех $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leq n}|S_k| \geq x\sqrt{n}\right) \leq A\exp\left\{-B\sqrt{x}\right\}. \tag{49}$$

Понятно, что в известном смысле неулучшаемый показатель экспоненты в (48) для последовательностей с φ-перемешиванием существенно превосходит показатель экспоненты в (49) для последовательностей с α-перемешиванием. Вопрос о точном порядке изменения по x показателя экспоненты в (49) остается открытым.

Теперь, используя неравенство (49) и оценку (33) при $m = 4$, получаем

Следствие 9. *В условиях теоремы 4 при всех $r \geq 0$ справедлива оценка*

$$\mathbf{E}\left(\max_{k\leq n}|S_k|\right)^r \leq n^{r/2}Ae(2C_o)^{4r}r^{2r},$$

где $C_o = (2B)^{-1/2}$.

В заключение этого параграфа приведем оценку абсолютных моментов максимальной суммы в случае последовательностей d-зависимых случайных величин.

Лемма 7. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность d-зависимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условиям $\mathbf{E}\xi_i = 0$ и $|\xi_i| \leq c_o$ почти наверное. Тогда для любого натурального r верно*

$$\mathbf{E}(\max_{k\leq n}|S_k|)^r \leq 2\sqrt{e}c_o^r(d+1)^{\mu(r)}(nr)^{r/2}, \tag{50}$$

где $\mu(r) = \min\{r-1, r/2+1\}$.

Доказательство. С помощью очевидного прореживания представим S_k в виде суммы $d+1$ подсумм, в каждой из которых слагаемые независимы.

Обозначим

$$S_{k,j} = \sum_{i:\, j+i(d+1)\le k} \xi_{j+i(d+1)}.$$

Тогда

$$S_k = S_{k,1} + \ldots + S_{k,d+1}.$$

Для натуральных $r \le 4$ мы воспользуемся классическим неравенством выпуклости

$$(a_1 + \ldots + a_{d+1})^r \le (d+1)^{r-1}(a_1^r + \ldots + a_{d+1}^r)$$

для любых $a_l \ge 0$, которое вместе с (35) и (36) сразу влечет (50). В случае $r > 4$ мы воспользуемся оценкой (34), где вместо n и x подставляем $\frac{n}{d+1}$ и $\frac{x}{\sqrt{d+1}}$ соответственно:

$$\mathbf{P}(\max_{k\le n} |S_k| \ge x\sqrt{n}) \le \sum_{j=1}^{d+1} \mathbf{P}\left(\max_{k\le n} |S_{k,j}| \ge \frac{x\sqrt{n}}{d+1}\right) \le$$

$$\le 2(d+1)\exp\left\{-\frac{x^2}{2c_o^2(d+1)}\right\}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что при оценке величины $\max_{k\le n}|S_{k,j}|$ на самом деле перебирается не более чем $n/(d+1)$ частичных прореженных сумм независимых случайных величин. Теперь оценку (50) мы можем извлечь из леммы 2, в которой полагаем

$$A = 2(d+1),\ B = (2c_o^2(d+1))^{-1},\ C_0 = c_o\sqrt{d+1}.$$

§ 2. Экспоненциальные неравенства для распределений V-процессов

Основные результаты второй главы диссертации содержатся в следующих двух теоремах. В первой из них приведены в известном смысле неулучшаемые аналоги неравенств Хефдинга–Дуба для максимальной суммы независимых ограниченных случайных величин применительно к V-процессам, построенным по выборкам независимых, d-зависимых, а также случайных величин с условиями φ- или ψ-перемешивания. Во второй теореме отдельно рассмотрен случай наблюдений с условием α-перемешивания, где получены менее точные оценки по сравнению с результатами для более сильной формы зависимости наблюдений.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (BC) *с константой c_o, ограничивающей по модулю все базисные элементы. Пусть, кроме того, выполнено одно из следующих условий*:

(i) $\{X_i;\, i \geq 1\}$ *— независимые случайные величины.*

(ii) $\{X_i;\, i \geq 1\}$ *— d-зависимые случайные величины.*

(iii) $\{X_i; i \in \mathbb{Z}\}$ *образуют стационарную последовательность случайных величин, удовлетворяющую условию φ-перемешивания, причем*

$$\bar{\varphi} := \sum_{k \geq 1} \varphi(k) < \infty.$$

(iv) В условиях (iii) дополнительно предполагается, что $\psi(d) < 1$ для некоторого натурального d.

Тогда для любого $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |V_n(t)| > x\right) \leq A \exp\left\{-\frac{x^{2/m}}{2eL^2 B^{2/m}(f)}\right\}, \tag{51}$$

где

$A = 2\sqrt{e},\ L = c_o$ *в случае* (i),

$A = 2\sqrt{e}(d+1),\ L = c_o\sqrt{d+1}$ *в случае* (ii),

$A = e^3,\ L = 4c_o(e\bar{\varphi})^{1/2}\sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^{-k/2}\sqrt{k+1}$ *в случае* (iii),

$A = A_1\sqrt{e},\ L = 2c_o\sqrt{\bar{\varphi}(e/2+1/4)}$ *в случае* (iv), *при этом константа* A_1 *определена в* (44).

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что оценка (51) в случае (i) по сути совпадает с оценкой (13), которая была доказана в [2]. Условия (BC) более сильные, нежели условие ограниченности ядра в (13). Однако постоянные c_1 и c_2 в (13), в отличие от констант в (51), неявные. Отметим также, что оценка вида (51) для двойного хвоста распределения случайной величины $V_n(1)$ при выполнении условий (AC), (BC) и (iii) была получена в [23].

Аналог предыдущей теоремы для стационарных последовательностей с α-перемешиванием существенно уступает в точности оценке (51). Это объясняется тем, что для сумм случайных величин с условием сильного перемешивания нет достаточно хороших оценок роста моментов порядка r при $r \to \infty$. Известные автору результаты в этом направлении значительно более грубые, нежели для последовательностей с равномерно сильным перемешиванием (детали см. в §3).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (BC), *а также все условия теоремы* 4. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |V_n(t)| > x\right) \le A_2 \exp\left\{-\frac{2x^{1/(2m)}}{eL^2 B(f)^{1/(2m)}}\right\}, \qquad (52)$$

где

$$A_2 := A_o e^3,\ \ L := 2^{5/8} B_o^{-1/2} a^{1/4},$$

а константы A_o, B_o *и* a *определены в* (60) *и* (61).

§ 3. Доказательство основных результатов.

3.1. Доказательство теоремы 3.

Пусть сначала $n = 2^N$, где N – произвольное натуральное число. Идея доказательства – так называемый *метод диадических цепочек* – восходит, по-видимому, к работам А.Н. Колмогорова 1930-х годов. В основе этого метода лежит следующее неравенство:

$$\max_{k\le n}|S_k| \le |S_n| + \max\{|S_n - S_{n/2}|, |S_{n/2}|\} + \\ + \max\{|S_n - S_{3n/4}|, |S_{3n/4} - S_{n/2}|, |S_{n/2} - S_{n/4}|, |S_{n/4}|\} + \dots \\ + \max\{|S_k - S_{k-1}|;\ k = 1, \dots, n\}, \quad (53)$$

где по определению полагаем $S_0 = 0$. Это соотношение является следствием того факта, что любое натуральное число $k \le 2^N$ может быть единственным образом представлено в виде суммы $\sum\limits_{j=0}^{N} \nu_j 2^j$, где набор бинарных величин

$$\{\nu_i \in \{0,1\};\ i = 0, 1, \dots, N\}$$

образуют двоичную запись числа k. Стало быть, при любом натуральном $k \le 2^N$ величина S_k может быть представлена как сумма приращений вида

$$S_{kn/2^l} - S_{(k-1)n/2^l}$$

при некоторых $k \le 2^l$ и $l = 0, 1, \dots, N$, причем так, что для каждого фиксированного $l \le N$ в этой сумме найдется не более одного приращения на интервале длиной $n/2^l = 2^{N-l}$. Таким образом, с учетом одинаковой распределенности приращений случайного процесса $\{S_k;\ k = 0, 1, \dots, n\}$ на интервалах одной и то же длины, т.е.

$$S_{kn/2^l} - S_{(k-1)n/2^l} \stackrel{d}{=} S_{n/2^l}$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, 2^l$, из (53) легко выводим оценку

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\le 2^N}|S_k|\ge x\right)\le\sum_{k=0}^{N}2^k\mathbf{P}\left(|S_{2^{N-k}}|\ge xa^{-1}2^{-k/2}\sqrt{k+1}\right), \qquad (54)$$

где $a := \sum\limits_{i=0}^{\infty} 2^{-k/2}\sqrt{k+1}$. При выводе (54) были использованы следующие элементарные соотношения:

$$\mathbf{P}\left(\sum_k \zeta_k \ge x\right) \le \sum_k \mathbf{P}(\zeta_k \ge a_k x),$$

где $x \ge 0$, $a_k > 0$, $\sum_k a_k \le 1$, а $\{\zeta_k\}$ – последовательность произвольно связанных случайных величин;

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\le L}\Delta_k \ge x\right) \le L\max_{k\le L}\mathbf{P}(\Delta_k\ge x),$$

где $\{\Delta_k;\ k = 1, \ldots, L\}$ – произвольный конечный набор случайных величин, без каких-либо предположений о характере их зависимости.

Далее, в условиях теоремы для любой частичной суммы S_k имеет место следующее неравенство, справедливое при всех $r \ge 2$ (см. (40)):

$$\mathbf{E}|S_k|^r \le \left(8c_o^2 r\sum_{j=0}^{k-1}(k-j)\varphi(j)\right)^{r/2} \le \left(8c_o^2 k\bar{\varphi}r\right)^{r/2}. \qquad (55)$$

Отсюда с помощью (24) немедленно получаем оценку

$$\mathbf{P}(|S_k|\ge x) \le \exp\left\{-\frac{x^2}{16ec_o^2k\bar{\varphi}}\right\}, \qquad (56)$$

которая имеет место при всех $k \ge 1$. Подставляя (56) в (54), получаем

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\le 2^N}|S_k|\ge x\right)\le\sum_{k=0}^{N}\exp\left\{-\frac{x^2(k+1)}{16ea^2c_o^2 2^N\bar{\varphi}}+k\right\}$$

$$\le \exp\left\{-\frac{x^2}{16ea^2c_o^2 2^N\bar{\varphi}}\right\}\sum_{k=0}^{N}\exp\left\{-\frac{x^2k}{16ea^2c_o^2 2^N\bar{\varphi}}+k\right\}. \qquad (57)$$

Отметим, что при всех $x \ge \sqrt{32ea^2c_o^2 2^N\bar\varphi}$ сумма в правой части (57) оценивается величиной

$$\sum_{k\ge 0} e^{-k} = (1-e^{-1})^{-1}.$$

Подставим эту оценку в правую часть (57), которая в зоне уклонений

$$0 \le x < \sqrt{32e4a^2c_o^2 2^N\bar\varphi}$$

становится не меньше $(e^2-e)^{-1}$. Таким образом, умножив правую часть (57) на величину e^2-e, мы получим оценку, справедливую уже при всех $x\ge 0$:

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\le 2^N}|S_k|\ge x\right) \le e^2\exp\left\{-\frac{x^2}{16ea^2c_o^2 2^N\bar\varphi}\right\}. \tag{58}$$

Перенос приведенного доказательства на произвольные натуральные n элементарен. В самом деле, положим

$$N := \min\{k:\ 2^k\ge n\}.$$

Ясно, что $n\le 2^N\le 2n$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\max_{k\le n}|S_k|\ge x\right) &\le \mathbf{P}\left(\max_{k\le 2^N}|S_k|\ge x\right)\\ &\le e^2\exp\left\{-\frac{x^2}{16ea^2c_o^2 2^N\bar\varphi}\right\} \le e^2\exp\left\{-\frac{x^2}{32ea^2c_o^2 n\bar\varphi}\right\}.\end{aligned} \tag{59}$$

Теорема доказана.

3.2. Доказательство теоремы 4.

Доказательство по существу такое же, как и в теореме 3. Нам понадобится следующее известное неравенство для двойного хвоста распределения частичной сумм S_m в условиях теоремы 4 (см. [29]):

$$\mathbf{P}(|S_m|\ge x\sqrt{m}) \le A_o\exp\left\{-B_o\sqrt{x}\right\}, \tag{60}$$

где неявные постоянные $A_o \geq 1$ и $B_o > 0$ зависят от коэффициента перемешивания $\alpha(\cdot)$ и распределения случайной величины ξ_1. Сначала полагаем $n = 2^N$. Аналог неравенства (54) с последующей оценкой в методе диадических цепочек выписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\max_{k\leq 2^N}|S_k| \geq x2^{N/2}\right) &\leq \sum_{k=0}^{N} 2^k \mathbf{P}\left(|S_{2^{N-k}}| \geq xa_k 2^{N/2}\right)\\ &\leq \sum_{k=0}^{N} 2^k \mathbf{P}\left(|S_{2^{N-k}}| \geq xa^{-1}2^{(N-k)/2}(k+1)^2\right), \quad (61)\end{aligned}$$

где

$$a_k := 2^{-k/2}(k+1)^2 a^{-1}, \qquad a := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2}(k+1)^2.$$

Подставляя оценку (60) в правую часть (61), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\max_{k\leq 2^N}|S_k| \geq x2^{N/2}\right) &\leq A_o \sum_{k=0}^{N} \exp\{-B_o\sqrt{x}a^{-1/2}(k+1)+k\}\\ &\leq A_o \exp\{-B_o a^{-1/2}\sqrt{x}\} \sum_{k=0}^{N} \exp\{-(B_o\sqrt{x}a^{-1/2}-1)k\}. \quad (62)\end{aligned}$$

Аналогично уже проведенной оценке правой части неравенства (57) отмечаем, что при всех $x \geq 4aB_o^{-2}$ сумма в правой части (62) не превосходит величину

$$\frac{1}{1-e^{-1}}.$$

Если же $x \leq 4aB_o^{-2}$, то

$$\exp\{-B_o\sqrt{x}a^{-1/2}\} \geq e^{-2}.$$

Повторяя дословно рассуждения при выводе оценки (58), получаем

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leq 2^N}|S_k| \geq x2^{N/2}\right) \leq A_o e^2 \exp\{-B_o a^{-1/2}\sqrt{x}\}. \quad (63)$$

Перенос на произвольные натуральные n совершенно аналогичен уже проделанному в теореме 3. Положим

$$N := \min\{k : \, 2^k \geq n\}.$$

Очевидно, что $n \leq 2^N \leq 2n$. Отсюда с помощью (63) получаем

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leq n}|S_k| \geq x\sqrt{n}\right) \leq \mathbf{P}\left(\max_{k\leq 2^N}|S_k| \geq 2^{-1/2}x2^{N/2}\right)$$
$$\leq A_o e^2 \exp\{-B_o 2^{-1/4}a^{-1/2}\sqrt{x}\}. \quad (64)$$

Осталось положить в (49) $A = A_o e^2$ и $B = B_o 2^{-1/4}a^{-1/2}$, где неявные константы A_o и B_o определены в (60). Теорема доказана.

3.3. Доказательство теоремы 5. В силу условия (BC) справедливо следующее представление:

$$V_n(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} f_{i_1,\ldots,i_m} S_n(i_1,t)\ldots S(i_m,t),$$

где

$$S(i_k,t) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{[nt]} e_{i_k}(X_j), \;\; k = 1,\ldots,m.$$

Начнём с оценки произвольного момента $\sup_{t\in[0,1]}|V_n(t)|$:

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|V_n(t)|\right)^N \leq$$
$$\leq \mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}\sum_{i_1,\ldots,i_m}|f_{i_1,\ldots,i_m}||S_n(i_1,t)\ldots S_n(i_m,t)|\right)^N \leq$$
$$\leq \sum_{i_1,\ldots,i_{mN}}|f_{i_1,\ldots,i_m}|\ldots|f_{i_{mN-m+1},\ldots,i_{mN}}|\mathbf{E}\sup_{t\in[0,1]}|S_n(i_1,t)\ldots S_n(i_{mN},t)|. \quad (65)$$

Обозначим

$$S_j(i_k) = n^{-1/2}\sum_{l=1}^{j} e_{i_k}(X_l).$$

Тогда для любых $r > 0$ и натурального l имеем

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|S_n(l,t)|\right)^r = \mathbf{E}\left(\max_{j\le n}|S_j(l)|\right)^r \le AL^r r^{r/2}. \qquad (66)$$

Неравенство (66) вытекает из следствия 3 в случае (i), из леммы 9 в случае (ii), из леммы 7 в случае (iii), из следствия 7 в случае (iv) (во всех случаях мы положили $\xi_j = e_l(X_j)$). Применяя лемму 10, мы учли, что $\mu(r) = r/2+1$ для $r \ge 4$.

Далее, используя неравенство Гёльдера, с помощью (66) получаем

$$\mathbf{E}\sup_{t\in[0,1]}|S_n(i_1,t)...S_n(i_{mN},t)| \le$$
$$\le \left(\mathbf{E}(\sup_{t\in[0,1]}|S_n(i_1,t)|)^{mN}...\mathbf{E}(\sup_{t\in[0,1]}|S_n(i_{mN},t)|)^{mN}\right)^{1/mN} \le$$
$$\le AL^{mN}(mN)^{mN/2}.$$

Отсюда и из (65) следуют оценки для произвольного момента случайной величины $\sup_{t\in[0,1]}|V_n(t)|$:

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|V_n(t)|\right)^N \le$$
$$\le AL^{mN}(mN)^{mN/2}\sum_{i_1,\dots,i_{mN}}|f_{i_1,\dots,i_m}|...|f_{i_{mN-m+1},\dots,i_{mN}}| =$$
$$= AL^{mN}(mN)^{mN/2}B(f)^N. \qquad (67)$$

Наконец, положив в следствии 1 $p = N$ и $C_0 = LB^{1/m}(f)$, получаем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}|V_n(t)| > x\right) \le A\exp\left\{-\frac{x^{2/m}}{2eL^2B^{2/m}(f)}\right\},$$

что и требовалось доказать.

3.4. Доказательство теоремы 6. Доказательство отличается от предыдущего лишь в некоторых деталях, начиная с оценки (66):

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|S_n(l,t)|\right)^r=\mathbf{E}\left(\max_{j\le n}|S_j(l)|\right)^r\le A_1L^{4r}r^{2r}. \qquad (68)$$

При этом оценка (67) несколько изменится:

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|V_n(t)|\right)^N\le$$
$$\le A_1L^{4mN}(mN)^{2mN}\sum_{i_1,\ldots,i_{mN}}|f_{i_1,\ldots,i_m}|\ldots|f_{i_{mN-m+1},\ldots,i_{mN}}|=$$
$$=A_1L^{4mN}(mN)^{2mN}B(f)^N. \qquad (69)$$

Далее воспользуемся следствием 1. Положим $\tilde m:=4m$. Тогда правая часть неравенства (69) может быть представлена как

$$A_1C_1^{\tilde mN}(\tilde mN)^{\tilde mN/2},$$

где $C_1:=LB(f)^{1/\tilde m}/2$. Так что соотношение (30) немедленно влечет за собой оценку

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}|V_n(t)|>x\right)\le A_1\exp\left\{-\frac{x^{1/(2m)}}{2eC_1^2}\right\},$$

что и требовалось доказать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделим основные результаты диссертации.

1) Доказаны функциональные предельные теоремы для последовательностей нормированных U- и V-статистик произвольного порядка с каноническими ядрами, заданных на выборках растущего объема из последовательности стационарно связанных наблюдений с условием α- или φ-перемешивания. Соответствующий предельный процесс описывается в виде полиномиальной формы от последовательности зависимых винеровских процессов, которые представляют собой сечения двупараметрического гауссовского поля с известной ковариацией.

2) Получены экспоненциальные оценки для хвоста распределения равномерной нормы V-процессов с каноническими ограниченными ядрами, построенных как по независимым, так и слабо зависимым наблюдениям. Все константы в этих неравенствах выписаны явно. Для независимых и d-зависимых наблюдений, а также удовлетворяющих условию φ-перемешивания, зависимость от уровня уклонений в показателе экспоненты оптимальна. В силу известной двойственности между классами U- и V-статистиками эти результаты переносятся и на U-процессы.

Список литературы

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. *Москва, Наука*, 1977.
2. *Борисов И.С.* Аппроксимация распределений статистик Мизеса с многомерными ядрами. *Сиб. Матем. Журн.*, 1991, **32**, 20-35.
3. *Борисов И.С., Быстров А.А.* Предельные теоремы для канонических статистик Мизеса, построенных по зависимым наблюдениям. *Сиб. матем. жур.*, 2006, т. 47, в. 6, с. 1205-1217.
4. *Борисов И.С., Володько Н.В.* Экспоненциальные неравенства для распределений U- и V-статистик от зависимых наблюдений. *Математ. Труды*, 2008, **11**, 3-19.
5. *Борисов И.С., Володько Н.В.* Ортогональные ряды и предельные теоремы для канонических U- и V-статистик от стационарно связанных наблюдений. *Математ. Труды*, 2008, **11**, 25-48.
6. *Борисов И.С., Жечев В.А.* Функциональная предельная теорема для канонических U-процессов от зависимых наблюдений. *Сиб. Матем. Жур.*, 2011, **52**, в. 4, с. 754–764.
7. *Борисов И.С., Жечев В.А.* Принцип инвариантности для канонических U- и V-статистик от зависимых наблюдений. *Математ. Труды*, 2013, **16**, 28-44.
8. *Борисов И.С., Жечев В.А.* Экспоненциальные неравенства для распределений V-процессов, построенных по зависимым наблюдениям. *Математ. Труды*, 2018, **21**, N 2, (Принята к печати).
9. *Боровков А.А.* Замечания о неравенствах для сумм независимых величин. *Теория вероятн. и ее примен.*, 1972, **17**, в. 3, 588-590.

10. *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1980.

11. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. *Москва, Наука*, 1986.

12. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. *Москва, Наука*, 1965.

13. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы, М: Иностранная лит-ра, 1956.

14. *Жечев В.А.* Функциональная предельная теорме для канонических U и V - статистик, *Тезисы XLVII Международной научной студенческая конференции.*, Новосибирск, 2009, С. 202–203.

15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

16. *Королюк В.С., Боровских Ю.В.* Теория U-статистик. Киев: Наукова Думка, 1989.

17. *Никитин Я.Ю., Поникаров Е.В.* Грубая асимптотика вероятностей больших уклонений черновского типа для функционалов Мизеса и U-статистик. *Труды С-Петербургского матем. общества*, 1999, т. 7, с. 124–167.

18. *Ронжин А.Ф.* Функциональные предельные теоремы для U-статистик. *Матем. заметки*, 1986, т. 40, No. 5, с. 886-893.

19. *Рузанкин П.С.* Об экспоненциальных неравенствах для канонических V-статистик. *Сиб. Электр. Матем. Извест.*, **11**, 70-75, (2014).

20. *Тихомиров А.Н.* О точности нормальной аппроксимации вероятности попадания в шар сумм слабо зависимых гильбертовозначных случайных величин. I. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1991, т. 36, в. 4, с.

699-710.

21. *Тихомиров А.Н.* О точности нормальной аппроксимации вероятности попадания в шар сумм слабо зависимых гильбертовозначных случайных величин. II. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, т. 38, в. 1, с. 110-127.

22. *Arcones M.A., Gine E.* Limit theorems for U-processes. *Ann. Probab.*, **21**, 1494-1542, (1993).

23. *Borisov I.S., Volodko N.V.* A note on exponential inequalities for the distribution tails of canonical Von Mises' statistics of dependent observations. *Statist. Probab. Lett.*, **96**, 287-291, (2015).

24. *Borisov I.S, Zhechev. V.A.* The functional limit theorem for canonical U-processes of dependent observations — *V-th Conference "Limit Theorems in Probability Theory and Their Applications"*, Novosibirsk, August 15–21, 2011; Abstracts of Communic., p. 11.

25. *Dedecker, J., Prieur, C.* New dependence coefficients. Examples and applications to statistic. *Probab. Theory Related Fields*, 2005, **132**, p. 203-236.

26. *Dehling H., Denker M., Philipp W.* The almost sure invariance principle for the empirical process of U-statistic structure. – *Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist.*, 1987, v.23, No. 2, p. 121-134.

27. *Denker M., Gordin M.* Limit theorems for von Mises statistics of a measure preserving transformation. *Probab. Th. Rel. Fields*, 2014, v. 160 , p. 1–45.

28. *Denker M., Grillenberger C., Keller G.* A note on invariance principles for von Mises' statistics. *Metrika*, 1985, v. 32, p. 197-214.

29. *Doukhan P.* Mixing. Properties and Examples. *Lecture Notes in Statistics*, No. 85, New York: Springer-Verlag, 1994.

30. *Eagleson G. K.* Orthogonal expansions and U-statistics. *Austral. J. Statist.*, 1979, v.21, N. 3, p.221-237.

31. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution. *Ann. Math. Statist.*, 1948, v.19, p.293-325.

32. *Hoeffding W.* The strong law of large numbers for U-statistics. *Inst. Statist. Mimeo Ser.*, **302**, 1-10, (1961).

33. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. American Statist. Assoc.*, **18**, 13-30, (1963).

34. *Major P.* On a multivariate version of Bernstein's inequality. *Electronic J. of Probab.*, **12**, 966-988, (2007).

35. *Rubin H., Vitale R.* Asimptotic distribution of symmetric statistics. – *Ann. Statist.*, v. 8, No. 1, p. 165-170, 1980.

36. *Von Mises R.* On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions. *Ann. Math. Statist.*, 1947, v. 18, p. 309-348.

37. *Zhechev V.A.* The functional limit theorem for canonical U-processes of dependent observations. *Third Northern Triangular Seminar.* St.Petersburg, April 11–13, 2011; Programme and Abstracts, p. 23.