Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»

На правах рукописи

ПТАХОВ Денис Олегович

Полигоны с примитивно-нормальными и P-стабильными теориями

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент
Степанова Алена Андреевна

Владивосток - 2018

Оглавление

Введение **3**

Глава 1. Свободные, проективные и сильно плоские полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями **16**

1.1. Предварительные сведения 16

1.2. Примитивная нормальность свободных, проективных и сильно плоских полигонов 21

1.3. Аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов 26

Глава 2. Полигоны с P-стабильными теориями **29**

2.1. Предварительные сведения 29

2.2. Полигоны с $(P,1)$-стабильными теориями 33

2.3. Полигоны с (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильными теориями 37

Глава 3. Полигоны с P-стабильными теориями над моноидами правых и левых нулей **40**

3.1. Полигоны с P-стабильными теориями над моноидами левых нулей 40

3.2. Полигоны с P-стабильными теориями над моноидами правых нулей 51

Заключение **54**

Литература **55**

Введение

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Тема диссертации относится к теоретико-модельной алгебре. Предметом исследования являются некоторые классы полигонов. Под *левым* S*-полигоном* $_SA$ над моноидом S или просто *полигоном* понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица действует на A тождественно. Понятие полигона относится к фундаментальным в таких областях, как теория представлений, алгебраическая теория динамических систем и др. Большое количество работ по теории полигонов посвящено гомологической классификации полигонов, а именно, характеризации моноидов с помощью категорных свойств полигонов, таких как проективность, инъективность, плоскость. Это работы Л.А.Скорнякова [10], М.Кильпа [4], [19], У.Кнауэра [19] , А.В.Михалева [19] и др. Вопросы, связанные со свойством регулярности полигонов, рассмотрены такими математиками, как М.Кильп [20], У.Кнауэр [20], [21], А.В.Михалев [21], Л.Х.Трэн [28] и др. На полигон над моноидом можно смотреть как на обобщение понятия модуля над кольцом. Именно поэтому многие задачи в теорию моделей полигонов пришли из теории моделей модулей. Одной из стандартных задач теории моделей модулей является задача описания колец, над которыми некоторый класс модулей обладал бы свойством P, где под P может пониматься аксиоматизируемость, или полнота, или стабильность и др.

В работах В. Гоулд [18], [17], С.Балмэн–Флеминг [17], А.А. Степановой [11] дается характеризация моноидов S таких, что классы слабо плоских, плоских, сильно плоских, проективных и свободных полигонов аксиоматизируемы. В работе А.А. Степановой [11] изучаются моноиды, над которыми аксиоматизируемые классы сильно плоских, проективных и свободных полигонов полны, модельно полны, категоричны. В работах Т.Г. Мустафина [6], А.А. Степановой [12] рассматриваются вопросы стабильности классов сильно плоских, проективных и свободных полигонов.

Аддитивные и примитивно связные теории являются обобщением теории модулей. Как и теория модулей над кольцом данные теории допускают элиминацию кванторов до примитивных формул (см. [7], [23]). Класс аддитивных теорий содержится в классе примитивно связных теорий. В отличии от примитивно связных теорий, в аддитивных теориях на факторах любых примитивных копий по некоторой примитивной эквивалентности можно определить с помощью примитивной формулы изоморфные абелевы группы. Это свойство аддитивных теорий обобщает известное свойство модулей: в любом модуле примитивные копии являются классами смежности некоторой абелевой группы. Аддитивные и примитивно связные теории являются по определению примитивно нормальными теориями.

Полигоны с примитивно нормальной и аддитивной теорией изучаются в работе А.А. Степановой [14]. В работе [13] того же автора исследуются моноиды, над которыми класс всех полигонов примитивно нормален, примитивно связен или аддитивен. В работе [15] изучаются моноиды, над которыми аксиоматизируемый класс регулярных полигонов примитивно связен. Таким образом, представляет интерес описание моноидов, классы сильно плоских, проективных и свободных полигонов над которыми примитивно нормальны, аддитивны, примитивно связны.

Одним из объектов изучения теоретико-модельной алгебры является классификация элементарных теорий. Одним из способов получения этой классификации является классификация по количеству типов в этих теориях (т.е. совместных с теорией множеств формул со свободными переменными и с фиксированным множеством параметров, являющихся элементами модели данной теории). Исследования в этом направлении начались с работ Р. Вота [29], К. Рыль-Нардзевского [24] и М. Морли [22]. М. Морли глубоко исследовал тотально трансцендентные теории, т.е. теории, в которых имеется лишь счетное число типов над любым счетным множеством параметров. В дальнейшем понятие тотально трансцендентной теории было обобщено С.Шелахом до понятия стабильной теории [25] – теории, в которой для некоторой бесконечной мощности $\varkappa$ мощность множества полных 1-типов над множеством параметров мощности $\varkappa$ не превосходит этой мощности $\varkappa$.

Далее эта область исследований, которую называют теорией стабильности, развивалась в нескольких направлениях. Одно из направлений — изучение подклассов стабильных теорий, обладающих теми или иными интересными свойствами. С другой стороны, развиваются направления, целью которых является обобщить понятие стабильности, сохраняя при этом те или иные полезные свойства и методы исследования.

Интересное обобщение понятия стабильности было предложено Т.Г. Мустафиным [5], которое было в последствии уточнено до понятия E^*-стабильности Е.А. Палютиным [8]. Так же Е.А. Палютин доказал для этого уточнения теорему об определимости типов, обобщающую как определимость типов для стабильных теорий, полученную С. Шелахом [26], так и результат Т.Нурмагамбетова и Б.Пуаза для теории пар. Понятие E^*-стабильности представляет собой новую шкалу стабильности, основным параметром которой является некоторое отображение типов полной теории в типы другой теории. Частным случаем E^*-стабильности является P-стабильность.

Основное содержание диссертации.

В данной работе исследуются моноиды S, над которыми аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов является примитивно нормальным, а также доказывается, что ни для какого моноида S указанные аксиоматизируемые классы не являются аддитивными.

Рассматриваются полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией. Доказывается критерий $(P,1)$-стабильности полигона. В качестве следствия, при условии, что S – группа доказывается, что полигон ${}_SS$, является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда S – конечная группа. Показывается, что класс всех полигонов над моноидом S является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда S – одноэлементный моноид. Приводятся критерии $(P,1)$-стабильности полигонов над моноидами правых и левых нулей.

Изучаются вопросы (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильности полигонов. Доказывается, что (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильность класса всех полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S – группа. Кроме того, дается описание строения (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильных полигонов ${}_SA$ над счетным моноидом S левых нулей и, при условии неразличимости множества $A \setminus SA$, над моноидом правых нулей.

Цели и задачи данной работы заключаются в изучении строения моноидов с точки зрения теоретико-модельных свойств классов полигонов над ними, в частности, классов свободных, проективных, сильно плоских полигонов; исследование таких свойств этих классов, как примитивная нормальность, аддитивность, P-стабильность.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Доказано, что аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов над моноидом S является примитивно нормальным тогда и только тогда, когда полигон ${}_SS$ примитивно нормален (опубликовано в [35]).

2. Доказано, что если аксиоматизируемый класс полигонов аддитивен, то все полигоны этого класса являются связными (опубликовано в [35]).

3. Найден критерий $(P,1)$-стабильности полигона. Доказано, что то полигон над группой $(P,1)$-стабилен тогда и только тогда, эта группа конечна (опубликовано в [30]).

4. Доказано, что (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильность класса всех полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S – группа (опубликовано в [31]).

5. Доказано, что полигон над моноидом левых нулей $(P,1)$-стабилен тогда и только тогда, когда число неодноэлементных компонент связности этого полигона конечно. Найден критерий $(P,1)$-стабильности полигона над моноидом правых нулей (опубликовано в [30]).

6. Для счетного моноида левых нулей найден критерий (P,s)-стабильности полигона, так же доказана эквивалентность (P,a)- и (P,e)-стабильности. Доказано, что для полигонов ${}_SA$ над моноидом

правых нулей, у которых неразличимо множество $A \setminus SA$, эквивалентны условия $(P,1)$- и (P,s)-стабильности. Найден критерий (P,a)-стабильности полигона над моноидом правых нулей(опубликовано в [31]).

Методы исследования. В работе используются классические методы теории моделей такие, как теорема компактности, теория категоричности, а также методы теории полигонов.

Новизна и научная значимость работы. Результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теоретико-модельной алгебре, в теории полигонов, при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Апробация работы. Результаты диссертации излагались автором на семинарах Института математики СО РАН (г. Новосибирск), Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток), Дальневосточного федерального университета (г. Владивосток), а также на следующих конференциях: международной конференции “Мальцевские чтения” (г. Новосибирск, 2012, 2015), региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (г. Владивосток, 2013, 2015).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [30-38], при этом работы [30, 31, 35] опубликованы в издании, которое входит в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук, а так же индексируемом в наукометрических системах (SCOPUS и т.д.). Работы [31, 32] написаны в неразрывном сотрудничестве со Степановой А.А.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Все утверждения занумерованы двойками индексов, из которых первый является номером главы, второй – номером утверждения в данной главе. Компьютерный набор выполнен с использованием пакета LaTeX. Общий объем диссертации 59 страниц. Библиография включает в себя 42 наименование.

Содержание работы

Первая глава работы посвящена исследованию свойств примитивной нормальности и аддитивности на классах свободных, проективных и сильно-плоских полигонов. В первом параграфе первой главы приведены некоторые определения, а так же известные факты, которые будут использоваться для формулировки и доказательства основных результатов.

Свободным полигоном над множеством X называется полигон ${}_SF$ такой, что для любого полигона ${}_SA$ и отображения $\theta : X \to A$ существует единственный S-морфизм $\bar{\theta} : F \to A$, для которого $i\bar{\theta} = \theta$, где $i : X \to F$ – вложение. Через $\mathcal{F}r$ обозначается класс всех свободных полигонов. Известно, что полигон ${}_SF$ является свободным тогда и только тогда, когда он изоморфен копроизведению полигонов вида ${}_SS$.

Проективным полигоном называется полигон ${}_SP$ такой, что для любых полигонов ${}_SN$ и ${}_SM$ и S-морфизмов $\varphi : N \to M, \psi : P \to M$, где φ – сюръекция, существует S-морфизм $\chi : P \to N$ такой, что $\psi = \varphi \circ \chi$. Через $\mathcal{P}$ обозначается класс всех проективных полигонов. Известно, что полигон ${}_SP$ является проективным тогда и только тогда, когда он изоморфен копроизведению полигонов вида ${}_SSe$, где e – идемпотент моноида S .

Сильно плоским полигоном называется полигон ${}_SB$ такой, что функтор $-\otimes {}_SB$ сохраняет универсальные квадраты. Через $\mathcal{SF}$ обозначается класс всех сильно плоских полигонов. Стенстрём сформулировал условия (P) и (E), которые вместе эквивалентны сильной плоскости полигона.

Предложение 1.1 *Полигон ${}_SB$ является сильно плоским тогда и только тогда, когда ${}_SB$ удовлетворяет условиям (P) и (E):*

(P): *если $x, y \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = ty$, то существуют элементы $z \in B$ и $s', t' \in S$ такие, что $x = s'z, y = t'z$ и $ss' = tt'$;*

(E): *если $x \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = tx$, то существуют $z \in B$ и $s' \in S$ такие, что $x = s'z$ и $ss' = ts'$.*

Пусть $\mathcal{C}$ – достаточно насыщенная модель полной теории T языка L, элементарно содержащая все рассматриваемые модели теории T. Формула вида

$$\exists \bar{x}(\Phi_0 \wedge \cdots \wedge \Phi_k),$$

где Φ_i – атомарные формулы $(0 \leq i \leq k)$, называется *примитивной формулой.* Множество $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ называется *примитивным*, где $\bar{a} \in \mathcal{C}$. Множества $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathcal{C}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*, где $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{C}$ и $|a| = |b|$. Теория T называется *примитивно нормальной*, если $X = Y$ или $X \cap Y = \varnothing$ для любых примитивных копий X, Y. Аксиоматизируемый класс K структур языка L называется *примитивно нормальным*, если теория этого класса примитивно нормальна.

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из $\mathcal{C}$, определенная в $\mathcal{C}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, называется *примитивной эквивалентностью.* Множество X называется Δ*–примитивным*, если оно является пересечением примитивных множеств. Эквивалентность α называется Δ*-примитивной*, если она является пересечением примитивных эквивалентностей. Классы X и Y одной Δ–примитивной эквивалентности α называются Δ*–примитивными копиями.* Множество вида $X = X^*/\alpha = \{a/\alpha \mid a \in X^*\}$, где X^* – Δ-примитивное множество, α – примитивная эквивалентность и выполнено $X^* \subseteq dom(\alpha)$, называется *обобщенно примитивным множеством,* при этом X^* называется *основой*, а α называется *образующей эквивалентностью.* Обобщенно примитивные множества X_1, X_2 называются *обобщенно примитивными копиями*, если у них есть общая образующая эквивалентность, а их основы X_1^*, X_2^* являются Δ–примитивными копиями.

Пусть обобщенно примитивные множества X_1 и X_2 являются обобщенно примитивными копиями и α – их образующая эквивалентность. Говорят, что X_1 *аддитивно связано* с X_2, если существуют примитивные формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$, $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$ (с параметрами $\bar{d}$), примитивная эквивалентность β и кортежи элементов $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ такие, что

(a) $(\alpha \cap (X_i^*)^2) \subseteq \beta, i \in \{1, 2\}$;

(b) для любого $i \in \{1, 2\}$ формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{b}_i)$ задает в $\mathcal{C}$ на X_i^*/β абелеву группу, причем эта группа нетривиальна, если множество X_1 или X_2 более, чем одноэлементно;

(c) формула $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$ задает изоморфизм групп, определенных в (b).

Теория T называется *аддитивной*, если она примитивно нормальна и любые обобщенно примитивные копии аддитивно связаны. Аксиоматизируемый класс структур K языка L называется *аддитивным*, если теория этого класса аддитивна.

Во втором параграфе первой главы исследуются моноиды S, над которыми аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов является примитивно нормальным.

Всюду в данном параграфе класс $\mathcal{K}$ – один из классов: $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$.

Теорема 1.2 *Пусть класс $\mathcal{K}$ – один из классов: $\mathcal{P}, \mathcal{F}\mathrm{r}, \mathcal{SF}$ и $\mathcal{K}$ аксиоматизируемый. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{K}$ примитивно нормален;

2) полигон ${}_SS$ примитивно нормален;

3) для любых попарно непересекающихся множеств индексов I, J, K, любых $s_i, t_j, r_k^1, r_k^2, a_1, a_2, a_3 \in S\,(i \in I, j \in J, k \in K)$, если

$${}_SS \models \bigwedge_{i \in I} s_i a_1 = s_i a_2 \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j a_2 = t_j a_3 \wedge \bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{m \in \{1,2,3\}} r_k^1 a_m = r_k^2 a_m,$$

то существует $b \in S$ такой, что

$${}_SS \models \bigwedge_{i \in I} s_i a_3 = s_i b \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j b_= t_j a_1 \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1 b = r_k^2 b;$$

4) любые примитивные эквивалентности α и β, определенные на S, перестановочны, т.е. $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

В третьем параграфе первой главы доказывается, что классы $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$ не являются аддитивными ни для какого моноида S.

Теорема 1.3 *Если аксиоматизируемый класс полигонов аддитивен,* *то все полигоны этого класса являются связными*

Следствие 1.4 *Если аксиоматизируемый примитивно нормальный класс полигонов замкнут относительно копроизведений, то не является аддитивным классом.*

Поскольку классы $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}r$, $\mathcal{SF}$ замкнуты относительно копроизведений, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 1.5 *Пусть $\mathcal{K}$ – один из классов $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$. Не существует моноида S такого, что класс $\mathcal{K}$ является аксиоматизируемым и аддитивным.*

Во второй главе изучаются свойства P-стабильности полигонов. Первый параграф второй главы содержит необходимые сведения для формулировки и доказательства дальнейших результатов.

Пусть T – теория языка L. Через $L(X)$ будем обозначать язык, который получается из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант. Через $T(X)$ будем обозначать следующее множество формул языка $L(X)$:

$$\{\varphi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X, C \models \varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{x}) - \text{формула языка } L\}.$$

Ясно, что $T(X)$ будет полной теорией языка $L(X)$.

Пусть язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P, Δ — некоторое множество предложений языка L_P. Теория T называется *P_Δ-стабильной в мощности λ*, если для любого множества X в теории T мощности $\leqslant \lambda$ множество

$$T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta \tag{1}$$

имеет не более λ пополнений в языке $(L(X))_P$. Теория T называется *P_Δ-стабильной*, если T является P_Δ-стабильной в некоторой бесконечной мощности λ. Структура A языка L называется *P_Δ-стабильной*, если теория $Th(A)$ является P_Δ-стабильной. Класс структур языка L называется *P_Δ-стабильным*, если каждая структура этого класса является P_Δ-стабильной. Ниже приведем важные случаи P_Δ-стабильности.

1) Теория T называется $(P,1)$ *-стабильной,* если она является P_Δ -стабильной для $\Delta = \varnothing$.

2) Теория T называется (P,s) *-стабильной,* если она является P_Δ -стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определимых функциональными символами языка L.

3) Теория T называется (P,a) *-стабильной,* если она является P_Δ -стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, т.е. содержит все конечные множества, определимые в структуре C формулами языка L с параметрами из предиката P.

4) Теория T называется (P,e) *-стабильной*, если она является P_Δ -стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является элементарной подсистемой.

Во втором параграфе второй главы доказывается критерий $(P,1)$ -стабильности полигонов.

Теорема 2.1 *Полигон ${}_SA$ является $(P,1)$ -стабильным тогда и только тогда, когда для любого $t \in S$ множество*

$$tA\backslash\{a \in A \mid ta = a\} \cup \{a \in A \mid ta = a \wedge \exists b(tb = a \wedge b \neq a)\}$$

конечно.

Следствие 2.2 *Пусть ${}_SA = \bigsqcup_{i\in I} {}_SA_i, |I| \geq 2$, где ${}_SA_i$ – компоненты связности полигона ${}_SA$. Полигон ${}_SA$ является $(P,1)$ -стабильным тогда и только тогда, когда для любого $i \in I$ полигоны ${}_SA_i$ являются $(P,1)$ -стабильными и для любого $t \in S$*

$$|\{i \in I \mid \exists a \in A_i(ta \neq a)\}| < \omega.$$

Следствие 2.3 *Пусть S – группа. Полигон ${}_SS$ является $(P,1)$ -стабильным тогда и только тогда, когда S – конечная группа.*

Следствие 2.4 *Класс $S - Act$ является $(P,1)$ -стабильным тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Во третьем параграфе второй главы исследуются полигоны с (P,s) -

, (P,a) - и (P,e) -стабильными теориями.

Теорема 2.5 *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс $S-\mathcal{A}ct$ всех полигонов (P,s) -стабилен;

2) класс $S-\mathcal{A}ct$ всех полигонов (P,a) -стабилен;

3) класс $S-\mathcal{A}ct$ всех полигонов (P,e) -стабилен;

4) S – группа.

В первом параграфе третьей главы исследуются свойства P-стабильности полигонов над моноидами левых нулей.

Моноид S называется *моноидом левых нулей*, если для любых $a,b\in S$ выполняется $a\cdot b=a$.

Следствие 3.1 *Пусть S – моноид левых нулей. Полигон ${}_SA$ является $(P,1)$ -стабильным тогда и только тогда, когда число неодноэлементных компонент связности полигона ${}_SA$ конечно.*

Через $\bar{S}$ обозначим полугруппу $S\setminus\{1\}$. Для полигона ${}_SA = \bigsqcup_{i\in I^A} {}_SA_i$, где ${}_SA_i$ – компонента связности полигона ${}_SA$ $(i\in I^A)$, введем обозначения:

$$I_1^A=\{i\in I^A \mid\ |A_i|\geq\omega\},\ I_2^A=\{i\in(I^A\setminus I_1^A)\mid 0<|A_i\setminus\bar{S}A_i|<\omega\},$$

$$I_3^A=I\setminus(I_1^A\cup I_2^A).$$

Теорема 3.2 *Пусть S – счетный моноид левых нулей. Полигон ${}_SA$ является (P,s) -стабильным тогда и только тогда, когда*

1) $|I_1^A\cup I_2^A|<\omega$;

2) существует $n\in\omega$ такой, что $|A_i|\leq n$ для любого $i\in I_3^A$;

3) для любого $a\in\prod_{i\in I_3^A}A_i$ существуют $m\in\omega$, $t_0,\ldots,t_m\in\bar{S}$, подмножества $J_0,\ldots,J_m$ множества I_3^A такие, что $I_3^A=J_0\cup\ldots\cup J_m$ и $t_ka(j)=a(j)$ для любых k, $0\leq k\leq m$ и $j\in J_k$.

Теорема 3.3 *Пусть S – счетный моноид левых нулей. Следующие условия эквивалентны:*

1) полигон ${}_SA$ является (P,e) -стабильным;

2) полигон ${}_SA$ является (P,a) -стабильным;

3) $|I_1^A|<\omega$ и существует $n\in\omega$ такой, что $|A_i|\leq n$ для любого

$i \in I_2^A \cup I_3^A$.

Так же в этом параграфе приводится пример (P, s)-стабильного полигона над моноидом левых нулей, который не является $(P, 1)$-стабильным.

Во втором параграфе третьей главы исследуются свойства P-стабильности полигонов над моноидами правых нулей.

Моноид S называется *моноидом правых нулей*, если для любых $a, b \in S$ выполняется $a \cdot b = b$.

Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей. Обозначим $Y_A = \{y \in A \mid sy = y$ для всех $s \in S\}, X_A = A \setminus Y_A$.

Утверждение 3.4. *Пусть S – моноид правых нулей. Полигон ${}_SA$ является $(P, 1)$-стабильным тогда и только тогда, когда для любого $t \in S$ выполняется $|t \cdot Y_A| < \omega$.*

Пусть $\mathcal{A}$ – структура языка L, X – подмножество множества A, строго линейно упорядоченное отношением $<$, которое может быть одним их принадлежащих языку L отношений, а может и не быть им. Множество элементов X называется *неразличимым* в $\mathcal{A}$ (по отношению к упорядочению $<$), если $\mathcal{A}(\{x_0, \ldots, x_n\}) \equiv \mathcal{A}(\{y_0, \ldots, y_n\})$ для всех n и для любых последовательностей $x_1 < \ldots < x_n$ и $y_1 < \ldots < y_n$ из множества X.

Теорема 3.5 *Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей и множество X_A неразличимо в ${}_SA$. Следующие условия эквивалентны:*

1) полигон ${}_SA$ является $(P, 1)$-стабильным;

2) полигон ${}_SA$ является (P, s)-стабильным;

3) $|tX_A| < \omega$ для любого $t \in \bar{S}$.

Теорема 3.6 *Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей, множество X_A неразличимо в ${}_SA$. Тогда полигон ${}_SA$ является (P, a)-стабильным.*

1 Свободные, проективные и сильно плоские полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями

В данной главе исследуются моноиды S, над которыми аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных и сильно плоских полигонов является примитивно нормальным. Доказывается, что ни для какого моноида S классы свободных, проективных и сильно плоских полигонов не являются аддитивными.

1.1 Предварительные сведения

Напомним необходимые в дальнейшем сведения из теории полигонов, которые можно найти в [19].

Пусть S – моноид, $A \neq \varnothing$ – множество. *Левым полигоном* $_SA$ над моноидом S или просто полигоном называется структура языка $L_S = \{t \mid t \in S\}$ с носителем A, причем для любых $s, t \in S, a \in A$ выполняется:

1) $s(ta) = (st)a$;

2) $ea = a$,

где e – единица моноида S. Два элемента a, b полигона $_SA$ называются *связанными*, если существуют $c_0, \ldots, c_n \in A, s_0, \ldots s_{n-1}, t_1, \ldots t_n \in S$ такие, что

$$a = c_0, s_ic_i = t_{i+1}c_{i+1}, c_n = b,$$

где $0 \leq i \leq n-1$. Максимальный по включению подполигон полигона, в котором любые два элемента являются связанными, называется *компонентой связности полигона. Копроизведением* $\bigsqcup_{i\in I} {}_SA_i$ полигонов $_SA_i$ называется их дизъюнктное объединение. Через $S - Act$ обозначается класс всех полигонов над моноидом S. Пусть $_SA$ – полигон, $B \subseteq A, b \in A, t \in S$. Введем обозначения: $t^{-1}B = \{a \in A \mid ta \in B\}, t^{-1}b = t^{-1}\{b\}$.

Конгруэнцией Риса подполигона ${}_SB$ полигона ${}_SA$ называется конгруэнция следующего вида: $\rho_B = \{(a,a) \mid a \in A\} \cup \{(b,c) \mid b,c \in B\}$

Пусть ${}_SA$, ${}_SB$ – полигоны. Отображение $\theta : A \to B$ называется S-морфизмом, если $\theta(sa) = s\theta(a)$ для любых $a \in A, s \in S$. Полигон ${}_SF$ называется *свободным над множеством* X, если для любого полигона ${}_SA$ и отображения $\theta : X \to A$ существует единственный S-морфизм $\bar{\theta} : F \to A$ такой, что $i\bar{\theta} = \theta$, где $i : X \to F$ есть вложение, т.е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\theta"'] & {}_SF \arrow[dl, dashed, "\bar{\theta}"] \\ {}_SA & \end{tikzcd}$$

Через $\mathcal{F}r$ обозначим класс всех свободных полигонов.

Предложение 1.1. *[1] Полигон ${}_SF$ является свободным над множеством X тогда и только тогда, когда ${}_SF \cong \coprod_{x \in X} {}_SS_x$, где ${}_SS_x$ – копия полигона ${}_SS$.*

Проективным полигоном называется полигон ${}_SP$ такой, что для любых полигонов ${}_SN$ и ${}_SM$ и S-морфизмов $\varphi : N \to M, \psi : P \to M$, где φ – сюръекция, существует S-морфизм $\chi : P \to N$ такой, что $\psi = \varphi \circ \chi$, т.е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & {}_SP \arrow[dl, dashed, "\chi"'] \arrow[d, "\psi"] \\ {}_SN \arrow[r, "\varphi"'] & {}_SM \end{tikzcd}$$

Через $\mathcal{P}$ обозначим класс всех проективных полигонов.

Предложение 1.2. *[1] Полигон ${}_SP$ является проективным тогда и только тогда, когда ${}_SP \cong \coprod_{i \in I} {}_SSe_i$, где $I \neq \varnothing, e_i$ – идемпотент моноида S для всех $i \in I$.*

Пусть ${}_SA$ и ${}_SB$ полигоны, θ – конгруэнция на полигоне ${}_SA \times {}_SB$, порожденная всевозможными парами вида $((sa,b),(a,sb))$, где $a \in A, b \in$

$B, s \in S$. *Тензорным произведением* полигонов ${}_SA$ и ${}_SB$ называется полигон ${}_SA \otimes {}_SB = ({}_SA \times {}_SB)/\theta$. Класс конгруэнции θ с представителем (a, b) обозначается через $a \otimes b$. *Сильно плоским* полигоном называется полигон ${}_SQ$ такой, что функтор $- \otimes {}_SQ$ сохраняет универсальные квадраты, т.е. если коммутативная диаграмма следующего вида:

$$\begin{tikzcd} {}_SN \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & {}_SA \arrow[d, "i_1"] \\ {}_SB \arrow[r, "i_2"'] & {}_SP \end{tikzcd}$$

является универсальным квадратом, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} {}_SN \otimes {}_SQ \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\psi'"'] & {}_SA \otimes {}_SQ \arrow[d, "i_1'"] \\ {}_SB \otimes {}_SQ \arrow[r, "i_2'"'] & {}_SP \otimes {}_SQ \end{tikzcd}$$

так же является универсальным квадратом, где $\varphi'(n \otimes q) = \varphi(n) \otimes q$, $\psi'(n \otimes q) = \psi(n) \otimes q, i_1'(a \otimes q) = i_1(a) \otimes q, i_2'(b \otimes q) = i_2(b) \otimes q$ для всех $q \in Q, n\ N, a \in A, b \in B$. Через $\mathcal{SF}$ обозначим класс всех сильно плоских полигонов. Существенный вклад в развитие теории плоских полигонов внес Стенстрём, сформулировавший условия, в настоящее время известные как условия (P) и (E), которые вместе эквивалентны сильной плоскости полигона.

Предложение 1.3. *[27] Полигон ${}_SB$ является сильно плоским тогда и только тогда, когда ${}_SB$ удовлетворяет условиям (P) и (E):*

(P): если $x, y \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = ty$, то существуют элементы $z \in B$ и $s', t' \in S$ такие, что $x = s'z, y = t'z$ и $ss' = tt'$;

(E): если $x \in B$ и $s, t \in S$ такие, что $sx = tx$, то существуют $z \in B$ и $s' \in S$ такие, что $x = s'z$ и $ss' = ts'$.

Напомним необходимые в дальнейшем сведения из теории моделей, которые можно найти в [14].

Пусть $\mathcal{C}$ – насыщенная модель полной теории T языка L, элементарно содержащая все рассматриваемые модели теории T. Все элементы, кортежи элементов и множества берутся из модели $\mathcal{C}$. Кортежи элементов $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ и кортежи переменных $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ обозначаются, соответственно, через $\bar{a}$ и $\bar{x}$. Вместо $\bar{a}\in A^n$ будем использовать запись $\bar{a}\in A$, где $A\subseteq\mathcal{C}$. Пусть $\bar{s}$ – кортеж элементов. Через $|\bar{s}|$ обозначим длину кортежа $\bar{s}$, через $\bar{s}(i)$ – i-й элемент кортежа $\bar{s}$. Если $\Phi(\bar{x},\bar{y})$ – формула языка L, $|\bar{x}|=n$, $A\subseteq\mathcal{C}$, $\bar{a}$ – кортеж элементов, причем $|\bar{a}|=|\bar{y}|$, то через $\Phi(A,\bar{a})$ обозначается множество $\{\bar{b}\in A\mid\mathcal{C}\models\Phi(\bar{b},\bar{a})\}$. Через $Q\bar{x}\Phi(\bar{x},\bar{y})$ обозначается формула $Q_1x_1\ldots Q_nx_n\Phi(\bar{x},\bar{y})$, где $Q_i\in\{\forall,\exists\}$ для всех $i\in\{1,\ldots,n\}$. Формула вида

$$\exists\bar{x}(\Phi_0\wedge\cdots\wedge\Phi_k),$$

где Φ_i – атомарные формулы $(0\le i\le k)$, называется *примитивной формулой.* Пусть $\Phi(\bar{x},\bar{y})$ – примитивная формула языка L, $\bar{a}$ – кортеж элементов, причем $|\bar{a}|=|\bar{y}|$. Множество $\Phi(\mathcal{C},\bar{a})$ называется *примитивным.* Если $\bar{b}$ – кортеж элементов и $|\bar{b}|=|\bar{y}|$, то множества $\Phi(\mathcal{C},\bar{a})$ и $\Phi(\mathcal{C},\bar{b})$ называются *примитивными копиями.*

Теория T называется *примитивно нормальной*, если $X=Y$ или $X\cap Y=\varnothing$ для любых примитивных копий X,Y. Аксиоматизируемый класс K структур языка L называется *примитивно нормальным*, если теория этого класса примитивно нормальна.

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из $\mathcal{C}$, определенная в $\mathcal{C}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, называется *примитивной эквивалентностью.* Область определения X такой эквивалентности α определяется в $\mathcal{C}$ примитивной формулой $\Phi(\bar{x},\bar{x})$, и обозначается через $dom\alpha$. Если $a\in X$, то через a/α будем обозначать класс эквивалентности α с представителем a.

Множество X называется Δ*–примитивным*, если существует такое семейство S примитивных множеств, что

$$X=\bigcap\{Y\mid Y\in S\}.$$

Эквивалентность α называется Δ-*примитивной*, если существует такое множество E примитивных эквивалентностей, что

$$\alpha = \bigcap\{\beta \mid \beta \in E\}.$$

Классы X и Y одной Δ–примитивной эквивалентности α называются Δ–*примитивными копиями*. Множество вида $X = X^*/\alpha = \{a/\alpha \mid a \in X^*\}$, где X^* – Δ-примитивное множество, α – примитивная эквивалентность и выполнено $X^* \subseteq dom(\alpha)$, называется *обобщенно примитивным множеством,* при этом X^* называется *основой*, а α называется *образующей эквивалентностью.* Обобщенно примитивные множества X_1, X_2 называются *обобщенном примитивными копиями*, если у них есть общая образующая эквивалентность, а их основы X_1^*, X_2^* являются Δ–примитивными копиями.

Пусть обобщенно примитивные множества X_1 и X_2 являются обобщенно примитивными копиями и α – их образующая эквивалентность. Говорят, что X_1 *аддитивно связано* с X_2, если существуют примитивные формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$, $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$ (с параметрами $\bar{d}$), примитивная эквивалентность β и кортежи элементов $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ такие, что

(a) $(\alpha \cap (X_i^*)^2) \subseteq \beta$, $i \in \{1, 2\}$;

(b) для любого $i \in \{1, 2\}$ формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{b}_i)$ задает в $\mathcal{C}$ на X_i^*/β абелеву группу, причем эта группа нетривиальна, если множество X_1 или X_2 более, чем одноэлементно;

(c) формула $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$ задает изоморфизм групп, определенных в (b).

Теория T называется *аддитивной*, если она примитивно нормальна и любые ообощенно примитивные копии аддитивно связаны. Аксиоматизируемый класс структур K языка L называется *аддитивным*, если теория этого класса аддитивна.

1.2 Примитивная нормальность свободных, проективных и сильно плоских полигонов

Всюду в данном параграфе класс $\mathcal{K}$ – один из классов: $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$.

Лемма 1.4. *Пусть класс $\mathcal{K}$ аксиоматизируем, ${}_SA \in \mathcal{K}$ и*

$${}_SA \models \bigwedge_{i=1}^{n} s_i a = t_i b;$$

для некоторых $a, b \in A$, $s_i, t_i \in S\,(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда
1) существуют $q_1, q_2 \in S, c \in A$ такие, что $q_1 c = a, q_2 c = b$ и

$${}_SS \models \bigwedge_{i=1}^{n} s_i q_1 = t_i q_2$$

2) если $a = b$, то существуют $d \in A, q \in S$ такие, что $qd = a$ и

$${}_SS \models \bigwedge_{i=1}^{n} s_i q = t_i q.$$

Доказательство. 1) Пусть ${}_SA \in \mathcal{K}$ и ${}_SA \models \bigwedge_{i=1}^{n} s_i a = t_i b$ для некоторых $a, b \in A$, $s_i, t_i \in S\,(1 \leqslant i \leqslant n)$. Так как полигон ${}_SA$ сильно плоский и $s_1 a = t_1 b$, то существуют $c_1 \in A$, $r_1, r_2 \in S$ такие, что $r_1 c_1 = a, r_2 c_1 = b$ и $s_1 r_1 = t_1 r_2$. Если $n = 1$, то полагаем $q_1 = r_1$, $q_2 = r_2$ и $c = c_1$. Предположим, что $n > 1$. Так как $(s_2 r_1) c_1 = s_2 a = t_2 b = (t_2 r_2) c_1$ и полигон ${}_SA$ сильно плоский, то существуют $c_2 \in A, p_2 \in S$ такие, что $p_2 c_2 = c_1$, причем $s_2 r_1 p_2 = t_2 r_2 p_2$. Отметим, что $s_1 r_1 p_2 = t_1 r_2 p_2$. Пусть построены $c_j \in A, p_j \in S\,(2 \leqslant j \leqslant i-1, i \leqslant n)$ такие, что $p_j c_j = c_{j-1}$ и $s_j r_1 \prod_{k=2}^{i-1} p_k = t_j r_2 \prod_{k=2}^{i-1} p_k$. Так как $(s_i r_1 \prod_{k=2}^{i-1} p_k) c_{i-1} = s_i a = t_i b = (t_i r_2 \prod_{k=2}^{i-1} p_k) c_{i-1}$, то существуют $c_i \in A, p_i \in S$ такие, что $p_i c_i = c_{i-1}$, причем $s_i r_1 \prod_{k=2}^{i} p_k = t_i r_2 \prod_{k=2}^{i} p_k$. Очевидно, что $s_j r_1 \prod_{k=2}^{i} p_k = t_j r_2 \prod_{k=2}^{i} p_k$ $(1 \leqslant j \leqslant i-1)$. Положим $c = c_n$, $q_1 = r_1 \prod_{k=2}^{n} p_k$, $q_2 = r_2 \prod_{k=2}^{n} p_k$. Тогда $q_1 c = a$, $q_2 c = b$ и ${}_SS \models \bigwedge_{i=1}^{n} s_i q_1 = t_i q_2$.

2) По (1) существуют $c \in A, q_1, q_2 \in S$ такие, что $q_1 c = q_2 c = a$ и ${}_SS \models \bigwedge_{i=1}^{n} s_i q_1 = t_i q_2$. Так как $q_1 c = q_2 c$ и полигон ${}_SA$ сильно плоский, то существуют $d \in A, q_3 \in S$ такие, что $q_3 d = c$ и $q_1 q_3 = q_2 q_3$. Полагаем $q = q_1 q_3 = q_2 q_3$. Очевидно, что $qd = a$ и ${}_SS \models \bigwedge_{i=1}^{n} s_i q = t_i q$.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобятся предложения.

Предложение 1.5. *[14] Полигон ${}_SA$ является примитивно нормальным тогда и только тогда, когда для любых попарно непересекающихся множеств индексов I, J, K, любых $s_i, t_j, r_k^1, r_k^2 \in S(i \in I, j \in J, k \in K)$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in A$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = |\bar{a}_3| = n$, выполняется ${}_SA \models \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3$, где*

$$\Phi_1 \rightleftharpoons \bigwedge_{i \in I} s_i\bar{a}_1(l_i) = s_i\bar{a}_2(l_i), \Phi_2 \rightleftharpoons \bigwedge_{j \in J} t_j\bar{a}_2(l_j) = t_j\bar{a}_3(l_j),$$

$$\Phi_3 \rightleftharpoons \bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{m \in \{1,2,3\}} r_k^1\bar{a}_m(l_k) = r_k^2\bar{a}_m(l_k),$$

$0 \leqslant l_i, l_j, l_k \leqslant n-1$, *то существует* $\bar{b} \in A$ *такой, что* $|\bar{b}| = n$ *и*

$${}_SA \models \bigwedge_{i \in I} s_i\bar{a}_3(l_i) = s_i\bar{b}(l_i) \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j\bar{b}(l_j) = t_j\bar{a}_1(l_j) \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1\bar{b}(l_k) = r_k^2\bar{b}(l_k).$$

Предложение 1.6. *[14] Полигон ${}_SA$ является примитивно нормальным тогда и только тогда, когда на любом примитивном множестве X любые примитивные эквивалентности α и β, определенные на X, перестановочны, т.е.*

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

Теорема 1.7. *Пусть класс $\mathcal{K}$ аксиоматизируемый. Следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{K}$ примитивно нормален;

2) полигон ${}_SS$ примитивно нормален;

3) для любых попарно непересекающихся множеств индексов I, J, K, любых $s_i, t_j, r_k^1, r_k^2, a_1, a_2, a_3 \in S\,(i \in I, j \in J, k \in K)$, если

$${}_SS \models \bigwedge_{i \in I} s_ia_1 = s_ia_2 \wedge \bigwedge_{j \in J} t_ja_2 = t_ja_3 \wedge \bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{m \in \{1,2,3\}} r_k^1a_m = r_k^2a_m,$$

то существует $b \in S$ такой, что

$${}_SS \models \bigwedge_{i \in I} s_ia_3 = s_ib \wedge \bigwedge_{j \in J} t_jb = t_ja_1 \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1b = r_k^2b;$$

4) любые примитивные эквивалентности α и β, определенные на S, перестановочны, т.е. $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как ${}_SS \in \mathcal{K}$, то утверждение очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3). Утверждение следует из предложения 1.5.

2) $\Rightarrow$ 4). Утверждение следует из предложения 1.6.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть ${}_SA \in \mathcal{K}$ и для некоторых попарно непересекающихся множеств индексов I, J, K, любых $s_i, t_j, r_k^1, r_k^2 \in S \, (i \in I, j \in J, k \in K)$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in A$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = |\bar{a}_3| = n$, выполняется ${}_SA \models \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3$, где

$$\Phi_1 \rightleftharpoons \bigwedge_{i \in I} s_i\bar{a}_1(l_i) = s_i\bar{a}_2(l_i), \Phi_2 \rightleftharpoons \bigwedge_{j \in J} t_j\bar{a}_2(l_j) = t_j\bar{a}_3(l_j),$$

$$\Phi_3 \rightleftharpoons \bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{m \in \{1,2,3\}} r_k^1\bar{a}_m(l_k) = r_k^2\bar{a}_m(l_k),$$

$0 \leqslant l_i, l_j, l_k \leqslant n-1$. По предложению 1.5 для доказательства примитивной нормальности ${}_SA$ достаточно построить $\bar{b} \in A$ такой, что $|\bar{b}| = n$ и

$${}_SA \models \bigwedge_{i \in I} s_i\bar{a}_3(l_i) = s_i\bar{b}(l_i) \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j\bar{b}(l_j) = t_j\bar{a}_1(l_j) \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1\bar{b}(l_k) = r_k^2\bar{b}(l_k).$$

Пусть $0 \leqslant p \leqslant n-1$ и $\{s_p^i\bar{a}_1(p) = s_p^i\bar{a}_2(p) \mid i \in I_p\}$ – множество всех атомарных подформул формулы Φ_1, содержащих $\bar{a}_1(p)$. Если $I_p = \varnothing$, то положим $\bar{b}(p) = \bar{a}_1(p)$. Предположим, что $I_p \neq \varnothing$. По лемме 2.1 существуют $x_p^1 \in A, q_p^1, q_p^2 \in S$ такие, что $q_p^1x_p^1 = \bar{a}_1(p), q_p^2x_p^1 = \bar{a}_2(p)$ и ${}_SS \models \bigwedge_{i \in I_p} s_p^iq_p^1 = s_p^iq_p^2$. Пусть $\{r_k^{1p}\bar{a}_1(p) = r_k^{2p}\bar{a}_1(p) \mid k \in K_p\}$ – множество всех атомарных подформул формулы Φ_3, содержащих $\bar{a}_1(p)$. Если $K_p = \varnothing$, положим $x_p = x_p^1, q_p^{(1)} = q_p^1, q_p^{(2)} = q_p^2$. Предположим, что $K_p \neq \varnothing$. Так как $q_p^1x_p^1 = \bar{a}_1(p)$, то ${}_SA \models \bigwedge_{k \in K_p} r_k^{1p}q_p^1x_p^1 = r_k^{2p}q_p^1x_p^1$. Тогда по лемме 1.4 существуют $x_p^2 \in A, q_p^3 \in S$ такие, что $q_p^3x_p^2 = x_p^1$ и ${}_SS \models \bigwedge_{k \in K_p} r_k^{1p}q_p^1q_p^3 = r_k^{2p}q_p^1q_p^3$. Пусть $\{r_k^{1p}\bar{a}_2(p) = r_k^{2p}\bar{a}_2(p) \mid k \in K_p\}$ – множество всех атомарных подформул формулы Φ_3, содержащих $\bar{a}_2(p)$. Так как $q_p^2q_p^3x_p^2 = \bar{a}_2(p)$, то ${}_SA \models \bigwedge_{k \in K_p} r_k^{1p}q_p^2q_p^3x_p^2 = r_k^{2p}q_p^2q_p^3x_p^2$. Тогда по лемме 1.4 существуют $x_p^3 \in A, q_p^4 \in S$ такие, что $q_p^4x_p^3 = x_p^2$ и

${}_SS \models \bigwedge_{k\in K_p} r_k^{1p} q_p^2 q_p^3 q_p^4 = r_k^{2p} q_p^2 q_p^3 q_p^4$. $x_p = x_p^3, q_p^{(1)} = q_p^1 q_p^3 q_p^4, q_p^{(2)} = q_p^2 q_p^3 q_p^4$. Тогда $q^{(1)} x_p = \bar{a}_1(p), q^{(2)} x_p = \bar{a}_2(p)$, ${}_SS \models \bigwedge_{i\in I_p} s_p^i q^{(1)} = s_p^i q^{(2)} \wedge \bigwedge_{k\in K_p} \bigwedge_{m\in\{1,2\}} r_k^{1p} q^{(m)} = r_k^{2p} q^{(m)}$.

Пусть $\{t_p^j \bar{a}_2(p) = t_p^j \bar{a}_3(p) \mid j \in J_p\}$ – множество всех атомарных подформул формулы Φ_2, содержащих $\bar{a}_2(p)$. Если $J_p = \varnothing$, то положим $\bar{b}(p) = \bar{a}_3(p)$. Предположим, что $J_p \neq \varnothing$. Тогда аналогичным образом строим $y_p \in A$ и $q_p^{(3)}, q_p^{(4)} \in S$ такие, что $q_p^{(3)} y_p = \bar{a}_2(p)$, $q_p^{(4)} y_p = \bar{a}_3(p)$, ${}_SS \models \bigwedge_{j\in J_p} t_j q_p^{(3)} = t_j q_p^{(4)} \bigwedge_{m\in\{3,4\}} r_k^{1p} q^{(m)} = r_k^{2p} q^{(m)}$. Так как $q_p^{(2)} x_p = q_p^{(3)} y_p = \bar{a}_2(p)$, то существуют $z_p \in A$ и $q_p^{(5)}, q_p^{(6)} \in S$, что $q_p^{(5)} z_p = x_p$, $q_p^{(6)} z_p = y_p$, причем $q_p^{(2)} q_p^{(5)} = q_p^{(3)} q_p^{(6)}$. Пусть $q_p^{(7)} = q_p^{(1)} q_p^{(5)}, q_p^{(8)} = q_p^{(2)} q_p^{(5)}, q_p^{(9)} = q_p^{(4)} q_p^{(6)}$. Тогда

$$ {}_SS \models \bigwedge_{i\in I_p} s_p^i q_p^{(7)} = s_p^i q_p^{(8)} \wedge \bigwedge_{j\in J_p} t_p^j q_p^{(8)} = t_p^j q_p^{(9)} \wedge \bigwedge_{k\in K_p} \bigwedge_{m\in\{7,8,9\}} r_k^{1p} q_p^{(m)} = r_k^{2p} q_p^{(m)}. $$

По условию теоремы существует $q_p \in S$ такой, что

$$ {}_SS \models \bigwedge_{i\in I_p} s_p^i q_p = s_p^i q_p^{(9)} \wedge \bigwedge_{j\in J_p} t_p^j q_p = t_p^j q_p^{(7)} \wedge \bigwedge_{k\in K_p} r_k^{1p} q_p = r_k^{2p} q_p. $$

Тогда $s_p^i(q_p z_p) = s_i(q_p^{(9)} z_p) = s_i(q_p^{(4)} q_p^{(6)} z_p) = s_i \bar{a}_3(p)$, $t_p^j(q_p z_p) = t_p^j(q_p^{(7)} z_p) = t_p^j(q_p^{(1)} q_p^{(5)} z_p) = t_p^j \bar{a}_1(p)$, $r_k^{1p}(q_p z_p) = r_k^{2p}(q_p z_p)$ $(i \in I_p, j \in J_p, k \in K_p)$. Положим $\bar{b}(p) = q_p z_p$. Тогда

$$ {}_SA \models \bigwedge_{i\in I} s_i \bar{a}_3(l_i) = s_i \bar{b}(l_i) \wedge \bigwedge_{j\in J} t_j \bar{a}_1(l_j) = t_j \bar{b}(l_j) \wedge \bigwedge_{k\in K} r_k^1 \bar{b}(l_k) = r_k^2 \bar{b}(l_k). $$

Следовательно, полигон ${}_SA$ примитивно нормальный.

4) $\Rightarrow$ 3). Пусть для некоторых попарно непересекающихся множеств индексов I, J, K, любых $s_i, t_j, r_k^1, r_k^2, a_1, a_2, a_3 \in S$ $(i \in I, j \in J, k \in K)$, выполняется

$$ {}_SS \models \bigwedge_{i\in I} s_i a_1 = s_i a_2 \wedge \bigwedge_{j\in J} t_j a_2 = t_j a_3 \wedge \bigwedge_{k\in K} \bigwedge_{m\in\{1,2,3\}} r_k^1 a_m = r_k^2 a_m. $$

На множестве S определим эквивалентности α, β следующим образом:

$$ x\,\alpha\,y \Leftrightarrow {}_SS \models \bigwedge_{i\in I} s_i x = s_i y \wedge \bigwedge_{k\in K} r_k^1 x = r_k^2 x \wedge \bigwedge_{k\in K} r_k^1 y = r_k^2 y, $$

$$y\,\beta\,z \Leftrightarrow {}_S S \models \bigwedge_{j\in J} t_j y = t_j z \wedge \bigwedge_{k\in K} r_k^1 y = r_k^2 y \wedge \bigwedge_{k\in K} r_k^1 z = r_k^2 z.$$

Тогда $a_1\,\alpha\,a_2\,\beta\,a_3$. По условию теоремы любые две примитивные эквивалентности перестановочны. Тогда существует $b \in S$ такой, что $a_1\,\beta\,b\,\alpha\,a_3$. Следовательно,

$${}_S S \models \bigwedge_{i\in I} s_i a_3 = s_i b \wedge \bigwedge_{j\in J} t_j b_2 = t_j a_1 \wedge \bigwedge_{k\in K} r_k^1 b = r_k^2 b.$$

1.3 Аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов

Формулу вида

$$\Phi(x,y,\bar{v}) \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} s_i v_{i-1} = t_i v_i \wedge x = v_0 \wedge y = v_n$$

назовем *цепью, связывающую* x *с* y, где $\bar{v} = \langle v_0, \dots v_n\rangle, s_i, t_i \in S$ для $i, j, 1 \leqslant i \leqslant n, 0 < j < n.$

Замечание 1.8. *Пусть* ${}_SA$ *– полигон и формула* $\Phi(x,y,\bar{v})$ *является цепью, связывающей* x *с* y. *Если для некоторых* $a, b, \bar{c} \in A$ *выполняется* ${}_SA \models \Phi(a,b,\bar{c})$, *то элементы* a *и* b *находятся в одной компоненте связности полигона* ${}_SA$.

Лемма 1.9. *Пусть* ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2$ *– полигон,* $\Phi(x,y,\bar{v})$ *– примитивная формула такая, что для некоторого* $\bar{c} \in A$

$${}_SA \models \forall x \exists y \Phi(x,y,\bar{c}) \wedge \forall y \exists x \Phi(x,y,\bar{c}).$$

Если для некоторых $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ *выполняется* ${}_SA \models \Phi(a_1,a_2,\bar{c})$, *то*

$${}_SA \models \forall x \forall y \Phi(x,y,\bar{c}).$$

Доказательство. Пусть ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2$, $\Phi(x,y,\bar{v})$ – примитивная формула, кортеж $\bar{c} \in A$ такой, что ${}_SA \models \forall x \exists y \Phi(x,y,\bar{c}) \wedge \forall y \exists x \Phi(x,y,\bar{c})$ и для некоторых $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ выполняется ${}_SA \models \Phi(a_1,a_2,\bar{c})$. Так как $\Phi(x,y,\bar{v})$ – примитивная формула, то $\Phi(x,y,\bar{v}) \rightleftharpoons \exists \bar{u} \Psi(x,y,\bar{u},\bar{v})$, где $\Psi(x,y,\bar{u},\bar{v})$ – конъюнкция атомарных формул. Покажем, что существуют формулы $\Psi_1(x,\bar{u}_1,\bar{v}), \Psi_2(y,\bar{u}_2,\bar{v})$, являющиеся конъюнкциями атомарных формул, такие что в $Th({}_SA)$

$$\exists \bar{u} \Psi(x,y,\bar{u},\bar{c}) \equiv \exists \bar{u}_1 \Psi_1(x,\bar{u}_1,\bar{c}) \wedge \exists \bar{u}_2 \Psi_2(y,\bar{u}_2,\bar{c}). \tag{2}$$

Действительно, если таких формул нет, то в $\Psi(x,y,\bar{u},\bar{v})$ есть подформула $\theta(x,y,\bar{u},\bar{v})$, эквивалентная цепи, связывающей x с y. Тогда для некоторого $\bar{u}_0 \in A$ выполняется ${}_SA \models \Psi(a_1, a_2, \bar{u}_0, \bar{c})$. По замечаниюřefn1 a_1 и a_2 находятся в одной компоненте связности. Противоречие. Таким образом, (2) доказано.

Пусть $b_1, b_2 \in A$. По условию существуют $b_1', b_2' \in A$ такие, что ${}_SA \models \Phi(b_1, b_1', \bar{c})$ и ${}_SA \models \Phi(b_2', b_2, \bar{c})$. Тогда по (2) существуют $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4 \in A$ такие, что ${}_SA \models \Psi_1(b_1, \bar{w}_1, \bar{c}) \wedge \Psi_2(b_1', \bar{w}_2, \bar{c})$ и ${}_SA \models \Psi_1(b_2', \bar{w}_3, \bar{c}) \wedge \Psi_2(b_2, \bar{w}_4, \bar{c})$. Тогда ${}_SA \models \Psi_1(b_1, \bar{w}_1, \bar{c}) \wedge \Psi_2(b_2, \bar{w}_4, \bar{c})$. Таким образом, по (2) ${}_SA \models \Phi(b_1, b_2, \bar{c})$.

Лемма 1.10. *Пусть ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2$, β – примитивная эквивалентность на A. Тогда либо $\beta = A^2$, либо $A/\beta = A_1/\beta \sqcup A_2/\beta$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x, y, \bar{u})$ – примитивная формула и $\Phi(x, y, \bar{c})$ задает примитивную эквивалентность β на A, где $\bar{c} \in A$. Предположим, что $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ такие, что $a_1 \beta a_2$. Тогда ${}_SA \models \Phi(a_1, a_2, \bar{c})$. По лемме 1.9 ${}_SA \models \forall x \forall y \Phi(x, y, \bar{c})$. Следовательно, $\beta = A^2$.

Теорема 1.11. *Пусть аксиоматизируемый класс $\mathcal{K}$ полигонов аддитивен. Тогда все полигоны класса $\mathcal{K}$ являются связными.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ – аксиоматизируемый, аддитивный класс полигонов, ${}_SA \in \mathcal{K}$, ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2$. A – класс примитивной эквивалентности $\theta \rightleftharpoons x = x$. Так как $Th({}_SA)$ аддитивна, то по определению существуют примитивная эквивалентность β и примитивная формула $\Phi(x, y, z, \bar{c})$ $(\bar{c} \in A)$ задающая на A/β структуру абелевой группы, причем эта группа нетривиальна. По лемме 1.10 $A/\beta = A_1/\beta \sqcup A_2/\beta$. Пусть $a_1/\beta \in A_1/\beta, a_2/\beta \in A_2/\beta$. Так как формула $\Phi(x, y, z, \bar{c})$ задает структуру абелевой группы на A/β, то существует $b/\beta \in A/\beta$ такой, что ${}_SA \models \Phi(a_1, a_2, b, \bar{c})$. Кроме того для любого $a/\beta \in A/\beta$ существует $d/\beta \in A/\beta$ такой, что ${}_SA \models \Phi(a, d, b, \bar{c})$. Тогда по лемме 1.9 ${}_SA \models \forall x \forall y \Phi(x, y, b, \bar{c})$. Противоречие. Следовательно, на ${}_SA$ невозможно задать структуру абелевой группы с помощью примитивной формулы. Таким образом, класс $\mathcal{K}$ не является аддитивным.

Следствие 1.12. *Если аксиоматизируемый примитивно нормальный класс* $\mathcal{K}$ *полигонов замкнут относительно копроизведений, то* $\mathcal{K}$ *не является аддитивным классом.*

Поскольку классы $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$ замкнуты относительно копроизведений, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 1.13. *Пусть* $\mathcal{K}$ *– один из классов* $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$. *Не существует моноида* S *такого, что класс* $\mathcal{K}$ *является аксиоматизируемым и аддитивным.*

2 Полигоны с P-стабильными теориями

В данной главе рассматриваются моноиды, теории всех полигонов над которыми являются $(P,1)$-, (P,s)-, (P,a)- и (P,e)– стабильными. Доказывается критерий $(P,1)$-стабильности полигона. Доказывается, что класс всех полигонов над моноидом S является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда моноид S одноэлементный. Показывается, что (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильность класса всех полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S – группа.

2.1 Предварительные сведения

Напомним необходимые в дальнейшем сведения из теории моделей, которые можно найти в [2], [3], [8].

Подструктура $\mathcal{A}$ структуры $\mathcal{B}$ языка L называется *элементарной* (обозначается $\mathcal{A} \preccurlyeq B$), если для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ языка L и любых $\bar{b} \in A$, $|\bar{b}| = |\bar{x}|$,

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(\bar{b}).$$

Предложение 2.1. *[2]* Пусть $\mathcal{A}$ – структура языка L и $\mathcal{B}$ – подструктура структуры $\mathcal{A}$. Для того, чтобы имело место $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ необходимо и достаточно, чтобы для любой формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$ языка L и любых $b_1, \ldots, b_n \in B$

$$\mathcal{A} \models \exists x_0 \Phi(x_0, b_1 \ldots, b_n) \Longrightarrow \textit{существует}\, b_0 \in B : \mathcal{A} \models \Phi(b_0, b_1 \ldots, b_n).$$

Структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка L называются *элементарно эквивалентными* (обозначается $\mathcal{A} \equiv B$), если для любого предложения φ языка L

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi.$$

Предложение 2.2. *[2] Структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ языка L элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют изоморфные ультрастепени.*

Совокупность E подмножеств множества I называется *центриро-*

ванной, если пересечение любого конечного числа элементов из E непусто.

Предложение 2.3. *[3] Каждое центрированная система подмножеств множества I содержится в некотором ультрафильтре над множеством I.*

Пусть $\mathcal{A}$ – структура языка L, X – подмножество множества A, строго линейно упорядоченное отношением $<$, которое может быть одним их принадлежащих языку L отношений, а может и не быть им. Множество элементов X называется *неразличимым* в $\mathcal{A}$ (по отношению к упорядочению $<$), если $\mathcal{A}(\{x_0, \ldots, x_n\}) \equiv \mathcal{A}(\{y_0, \ldots, y_n\})$ для всех n и для любых последовательностей $x_1 < \ldots < x_n$ и $y_1 < \ldots < y_n$ из множества X.

Предложение 2.4. *[3] Пусть $\langle X, < \rangle$ – некоторое линейно упорядоченное подмножество структуры $\mathcal{A}$. Предположим, что для любых двух упорядоченных по возрастанию n-к $x_1 < \ldots < x_n$ и $y_1 < \ldots < y_n$ из X существует такой автоморфизм f структуры $\mathcal{A}$, что $f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n$. Тогда X – множество неразличимых в $\mathcal{A}$ элементов.*

Через $L(X)$ будем обозначать язык, который получается из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант. Через $T(X)$ будем обозначать следующее множество формула языка $L(X)$:

$$\{\varphi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X, C \models \varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{x}) - \text{формула языка } L\}.$$

Ясно, что $T(X)$ будет полной теорией языка $L(X)$.

Пусть язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P. Пусть Δ — некоторое множество предложений языка L_P. Теория T называется *P_Δ-стабильной в мощности λ*, если для любого множества X в теории T мощности $\leqslant \lambda$ множество

$$T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$$

имеет не более λ пополнений в языке $(L(X))_P$.

Рассмотрим следующие важные случаи P_Δ-стабильности.

1) Теория T называется $(P,1)$*-стабильной,* если она является P_Δ-стабильной для $\Delta = \varnothing$.

2) Теория T называется (P,s)*-стабильной,* если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определимых функциональными символами языка L.

3) Теория T называется (P,a)*-стабильной,* если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, т.е. содержит все конечные множества, определимые структуре C формулами языка L с параметрами из предиката P.

4) Теория T называется (P,e)*-стабильной*, если она является P_Δ-стабильной для множества Δ, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является элементарной подсистемой.

Замечание 2.5. *Имеют место следующие импликации:*

$$(P,1) - \textit{стабильность} \Rightarrow (P,s) - \textit{стабильность} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P,a) - \textit{стабильность} \Rightarrow (P,e) - \textit{стабильность}.$$

Пусть U – некоторое множество в теории T, X, Y – некоторые множества кортежей элементов из U длины n. Пара $\langle X,Y\rangle$ называется *отделимой в теории* $T(U)$, если существует $\Phi(\bar z)$ языка $L(U), |\bar z| = n$, такая, что

$$\{\Phi(\bar a) \mid \bar a \in X\} \cup \{\neg\Phi(\bar a) \mid \bar a \in Y\} \subseteq T(U).$$

При этом говорят, что формула $\Phi(\bar z)$ отделяет X от Y (или отделяет пару $\langle X,Y\rangle$) в T.

Предложение 2.6. *[8] Пусть T – полная теория языка L и Δ – некоторое множество предложений языка L_P. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) теория T является P_Δ-стабильной;

(b) для любого множества U в теории T каждая пара $\langle X,Y\rangle$ множеств кортежей из U одинаковой длины, отделимая в $T_\Delta(U)$, является отделимой в теории $T(U)$.

2.2 Полигоны с $(P,1)$-стабильными теориями

Предложение 2.7. *[9] Для полной теории T языка L следующие условия эквивалентны:*

(1) T является $(P,1)$-стабильной;

(2) T определимо интерпретируется в некоторой теории T_1 языка L_1, состоящего только из одноместных предикатов;

(3) для любой формулы $\varphi(z,\bar{x})$, $l(\bar{x})=n$, теории T существует такое конечное k, что среди любых различных $k+1$ кортежей длины n найдутся два различных кортежа $\bar{a^1}$ и $\bar{a^2}$, что

$$\forall z((z \notin \bar{a^1} \wedge z \notin \bar{a^2}) \to (\varphi(z,\bar{a^1}) \leftrightarrow \varphi(z,\bar{a^2}))).$$

Лемма 2.8. *Если существуют $t \in S$ и $\{a_i \mid i \in \omega\} \subseteq\in A$ такие, что $a_i \neq a_j, ta_i \neq ta_j, a_i \neq ta_j$ для любых $i,j \in \omega, i \neq j$, то полигон ${}_SA$ не является $(P,1)$ - стабильным.*

Доказательство. Пусть $\varphi(z,x) \rightleftharpoons z = tx, t \in S$ и $\{a_i \mid i \in \omega\} \subseteq\in A$ такие, что $ta_i \neq ta_j$ и $a_i \neq ta_j$ для любых $i,j \in \omega$. Тогда для любых $i,j \in \omega, i \neq j$,

$$A \models (ta_i \neq a_i) \wedge (ta_i \neq ta_j) \wedge (ta_i = ta_i) \wedge (ta_i \neq ta_j), \text{т.е.}$$

$$A \models \exists z((z \neq a_i \wedge z \neq a_j) \wedge (\varphi(z,a_i) \wedge \varphi(z,a_j)).$$

Следовательно, по предложению 2.7 полигон ${}_SA$ не является $(P,1)$-стабильным.

Теорема 2.9. *Полигон ${}_SA$ является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда для любого $t \in S$ множество*

$$tA \backslash \{a \in A \mid ta = a\} \cup \{a \in A \mid ta = a \wedge \exists b(tb = a \wedge b \neq a)\}$$

конечно.

Доказательство. Необходимость. Пусть ${}_SA$ – $(P,1)$-стабильный полигон, $r \in S$, обозначим

$$A_1^r = rA \backslash \{a \mid ra = a\},$$

$$A_2^r = \{a \in A \mid ra = a \wedge \exists b(rb = a, b \neq a)\}.$$

Предположим, что $|A_2^r| \geq \omega$.

Тогда существует множество $\{a_i \mid i \in \omega\} \subseteq\in A$ такое, что $ra_i \neq ra_j$ и $ra_i \neq a_j$ для любых $i, j \in \omega, i \neq j$. По лемме 2.8 полигон ${}_SA$ не является $(P,1)$–стабильным. Противоречие. Следовательно, $|A_2^r| < \omega$.

Предположим, что $|A_1^r| \geq \omega$. Пусть множество $\{a_i \mid i \in \omega\} \subseteq\in A$ такое, что

$$a_i \neq a_j (i \neq j) \wedge \forall i \in \omega(, ra_i = a_{i+1} \vee ra_{i+1}0 = a_i). \tag{3}$$

Тогда $rb_i \neq rb_j, rb_i \neq b_i$ для $i, j \in \omega, i \neq j$, где $b_i = a_{3i} (i \in \omega)$. Тогда по лемме 2.8 полигон ${}_SA$ не является $(P,1)$-стабильным.

Пусть (3) не выполняется и

$$\exists b \in rA : |r^{-1}b \cap rA| \geq \omega. \tag{4}$$

Тогда существуют различные $a_0, \ldots a_n, \ldots \in r^{-1}(r^{-1}b \cap rA)$, т.е. $ra_i \neq a_j$ и $ra_i \neq ra_j$ для любых $i, j \in \omega, i \neq j$. По лемме 2.8 полигон ${}_SA$ – не является $(P,1)$-стабильным.

Пусть не выполняются (3), (4), $B = \{b_i \mid i \in \omega\} \subseteq A_1^r, |B| = \omega$. Введем отношение эквивалентности на множестве B:

$$b_i \sim b_j \Leftrightarrow \exists k \in \omega \exists c_0, \ldots c_k \in B :$$

$$c_0 = b_i \wedge c_k = b_j \wedge \forall l((0 \leq l \leq k-1) \Rightarrow rc_l = c_{l+1} \vee rc_{l+1} = c_l).$$

Так как (3) и (4) не выполняются, то $|b_i/\sim| < \omega$ для любого $i \in \omega$. Тогда $|B/\sim| \geq \omega$. Пусть $\{d_i \mid i \in \omega\}$ – множество представителей различных классов эквивалентности $\sim$ и $a_i \in r^{-1}d_i$ $(i \in \omega)$. Тогда $ra_i \neq ra_j, a_i \neq ra_i$ для любых $i, j \in \omega, i \neq j$. Следовательно, по лемме 2.8 полигон ${}_SA$ не является $(P,1)$–стабильным.

Достаточность. Пусть $t \in S$. По условию

$$|t \cdot A \backslash \{a \in A \mid ta = a\}| < \omega$$

и

$$|\{a \in A \mid ta = a \wedge \exists b(tb = a, b \neq a)\}| < \omega.$$

Определим одноместный предикат Q^t на множестве A следующим образом:

$$Q^t = \{a \in A \mid ta = a \wedge |t^{-1}a| = 1\}.$$

Тогда существуют $c_0^t, \ldots, c_{k_t}^t \in A$ такие, что

$$tA \backslash Q^t = \{c_0^t, \ldots, c_{k_t}^t\}.$$

Для любого i, где $0 \leq i \leq k_t$, определим одноместный предикат P_i^t на множестве A следующим образом:

$$P_i^t = \{x \in A \mid tx = c_i^t\}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_\infty \models \forall xy(x = ty \Leftrightarrow \varphi_t(x, y)),$$

где $\mathcal{A}_\infty = \langle A; L_S \cup \{Q_t \mid t \in S\} \cup \{P_i^t \mid t \in S, 0 \leq i \leq k_t\}\rangle$ и

$$\varphi_t(x, y) \rightleftharpoons Q^t(x) \wedge x = y \vee \bigvee_{i=0}^{k_t}(x = c_i^t \wedge P_i^t(y)).$$

Определим для каждых $t, r \in S$ одноместные предикаты R^{tr} на A следующим образом: $A \models R^{tr}(x) \Leftrightarrow A \models Q^t(rx)$. Тогда

$$\mathcal{A}_\in \models \forall xy(rx = ty \Leftrightarrow (R^{tr}(x) \wedge \varphi_r(y, x)) \vee \bigvee_{i=1}^{k_r}(\varphi_r(c_i^t, x) \wedge P_i^t(y)))),$$

где $\mathcal{A}_\in = \langle A; L_S \cup \{Q_t \mid t \in S\} \cup \{P_i^t \mid t \in S, 0 \leq i \leq k_t\} \cup \{R^{tr} \mid t, r \in S\}\rangle$ Таким образом $Th({}_SA)$ определимо интерпретируется в некоторой теории одноместных предикатов, и по предложению 2.7 полигон ${}_SA$ является $(P, 1)$-стабильным.

Следствие 2.10. *Пусть* ${}_SA = \bigsqcup_{i \in I} {}_SA_i, |I| \geq 2$, *где* ${}_SA_i$ *– компоненты связности полигона* ${}_SA$. *Полигон* ${}_SA$ *является* $(P, 1)$*-стабильным тогда и только тогда, когда для любого* $i \in I$ *полигоны* ${}_SA_i$ *являются* $(P, 1)$*-стабильными и для любого* $t \in S$

$$|\{i \in I \mid \exists a \in A_i(ta \neq a)\}| < \omega. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ${}_SA = \bigsqcup_{i \in I} {}_SA_i, |I| \geq 2$ и полигон ${}_SA$ является $(P,1)$-стабильным полигон. По теореме 2.9 полигоны ${}_SA_i$ являются $(P,1)$-стабильными для любого $i \in I$ и существует $t \in S$ такой, что (3) не выполняется, т.е. $|J| \geq \omega$, где $J = \{i \in I \mid \exists a \in A_i(ta \neq a)\}$. Рассмотрим множество $\{a_j \in A_j \mid j \in J, ta_j \neq a_j\}$. Так как ${}_SA_j (j \in J)$ – компоненты связности полигона ${}_SA$, то по лемме 2.8 полигон ${}_SA$ не является $(P,1)$-стабильным. Противоречие.

Достаточность очевидна.

Следствие 2.11. *Пусть S – группа. Полигон ${}_SS$ является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда S – конечная группа.*

Доказательство. Если S – группа, то $s \cdot S = S$ для любого $s \in S$ и из равенства $ta = a$ следует, что t – единица группы. Следовательно, по теореме 2.9 полигон ${}_SS$ является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда S - конечная группа.

Следствие 2.12. *Класс $S - Act$ является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда $|S| = 1$.*

Доказательство. Следует из следствия 2.10

2.3 Полигоны с $(P,s)-,(P,a)-$ и (P,e)-стабильными теориями

Теорема 2.13. *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс $S-\mathcal{A}ct$ всех полигонов (P,s)-стабилен;

2) класс $S-\mathcal{A}ct$ всех полигонов (P,a)-стабилен;

3) класс $S-\mathcal{A}ct$ всех полигонов (P,e)-стабилен;

4) S – группа.

Доказательство. Из замечания 2.5 следует $1)\Longrightarrow 2)$ и $2)\Longrightarrow 3)$.

Докажем $3)\Longrightarrow 4)$. Предположим, что класс $S-\mathcal{A}ct$ всех полигонов (P,e)-стабилен и существует $t\in S$ такой, что $St\subset S$. Пусть $T=\{s\in S\mid Ss=S\}$. Заметим, что $T\cap St=\varnothing$ и ${}_SS^1={}_S(S\backslash T)$ – собственный подполигон полигона ${}_SS$. Через ${}_S\bar{S}$ и ${}_S\bar{S}^1$ обозначим фактор-полигоны полигонов ${}_SS$ и ${}_SS^1$ соответственно по конгруэнции Риса $\rho(St)$, для любого $s\in S$ через $\bar{s}$ обозначим элемент $s/\rho(St)$ полигона ${}_S\bar{S}$, через $\overline{T}$ – множество $\{\bar{s}\in\bar{S}\mid s\in T\}$ полигона ${}_S\bar{S}$. Ясно, что ${}_S\bar{S}^1$ – подполигон полигона ${}_S\bar{S}$. Пусть ${}_S\bar{S}_{ij}$ $(i,j\in\omega)$ – попарно непересекающиеся копии полигона ${}_S\bar{S}$, $i,j\in\omega$, ${}_S\bar{S}^1_{ij}$ – копия подполигона ${}_S\bar{S}^1$ полигона ${}_S\bar{S}$ в полигоне ${}_S\bar{S}_{ij}$, $\overline{T}_{ij}$ – копия подмножества $\overline{T}$ множества $\bar{S}$ в $\bar{S}_{ij}$, $\bar{s}_{ij}$ – копия элемента $\bar{s}\in\bar{S}$ в полигоне ${}_S\bar{S}_{ij}$, где $s\in S$. Через ${}_SB_i$ обозначим склейку полигонов ${}_S\bar{S}_{ij}$ по подполигонам ${}_S\bar{S}^1_{ij}$ $(j\in\omega)$. Можно считать, что полигоны ${}_S\bar{S}_{ij}$ $(j\in\omega)$ являются подполигонами полигона ${}_SB_i$. Через $\bar{t}_i$ обозначим элемент $\bar{t}_{ij}$ полигона ${}_SB_i$. Пусть

$$ {}_SA=\bigsqcup_{i\in\omega}{}_SB_i,\ B^1_i=B_i\backslash\bigcup_{j\in\omega}\overline{T}_{i,2j},\ {}_SP=\bigsqcup_{i\in\omega}{}_SB^1_{2i}\sqcup\bigsqcup_{i\in\omega}{}_SB_{2i+1}. $$

Покажем, что ${}_SP\preceq{}_SA$. Пусть $\Phi(x,\bar{x})$ – формула языка L_S, $\bar{x}=\langle x_0,\dots x_n\rangle$, $\bar{b}=\langle b_0,\dots b_n\rangle\in P$, ${}_SA\models\Phi(s_{2i,2j},\bar{b})$ для некоторого $s_{2i,2j}\in T_{2i,2j}$ и $b_r\notin T_{2l,2k+1}$ для любых $l,k\in\omega$, r, $0\le r\le n$. Существует автоморфизм φ полигона ${}_SA$ такой, что $\varphi(rs_{2i,2j})=rs_{2i,2j+1}$, $\varphi(rs_{2i,2j+1})=rs_{2i,2j}$ для любого $r\in S$ и $\varphi(A\setminus(T_{2i,2j}\cup T_{2i,2j+1}))=id_A$. Тогда ${}_SA\models\Phi(s_{2i,2j+1},\bar{b})$, где $s_{2i,2j+1}\in P$. Следовательно, по предложению 2.1, ${}_SP\preceq{}_SA$.

Пусть

$$U = \{\bar{t}_i \in B_i \mid i \in \omega\},\ X = \{\bar{t}_{2i} \in B_{2i} \mid i \in \omega\},$$

$$Y = \{\bar{t}_{2i+1} \in B_{2i+1} \mid i \in \omega\},\ \Phi(x) \leftrightharpoons \exists y(ty = x \wedge \neg P(y)),$$

где $\Phi(x)$ – формула языка $L_S \cup \{P\}$. Так как $t\bar{1}_{2i,2j} = \bar{t}_{2i}$ и $\bar{1}_{2i,2j} \notin P$ $(i, j \in \omega)$, то $X \subseteq \Phi(A)$. Так как ${}_SB_{2i+1}$ – компонента связности полигона ${}_SA$ и $B_{2i+1} \subseteq P$ $(i \in \omega)$, то $Y \cap \Phi(A) = \varnothing$.

Предположим, что существует формула $\Psi(x, \bar{u})$ языка $L_S \cup U$, отделяющая X и Y, т.е. $X \subseteq \Psi(A, \bar{u})$ и $Y \cap \Psi(A, \bar{u}) = \varnothing$, где $\bar{u} = \langle u_0, \ldots, u_n\rangle \in U$. Пусть $u_0, \ldots, u_n \in \bigcup_{i=0}^{k} B_i$ для некоторого $k \in \omega$. Для $t_{i1}, \ldots, t_{im}, t_{j1}, \ldots, t_{jm} \in \bigcup_{i>k} B_i$ существует автоморфизм φ структуры $\langle A; L_S(\bar{u})\rangle$ такой, что $\varphi(t_{i1}) = t_{j1}, \ldots, \varphi(t_{im}) = t_{jm}$. Тогда по предложению 2.4 множество $\{t_i \mid i > k\}$ является множеством неразличимых элементов в структуре $\langle A; L_S(\bar{u})\rangle$. Поскольку $\bar{t}_{2k+2} \in X$, то $\bar{t}_{2k+2} \in \Psi(A, \bar{u})$ и из неразличимости множества $\{t_i \mid i > k\}$ следует $\bar{t}_{2k+1} \in \Psi(A, \bar{u})$. Противоречие. Следовательно, по предложению 2.6 класс $S-\mathcal{A}ct$ не является (P, e)-стабильным. Таким образом, $St = S$ для любого $t \in S$, т.е. S – группа.

Докажем 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть S – группа, $\{S_i \mid i \in I\}$ – множество всех подгрупп группы S и $i \in I$. Множество всех левых классов смежности группы S по подгруппе S_i с естественно определенным действием группы S слева является полигоном, который будем обозначать через ${}_SS^i$. Заметим, что полигон ${}_SS^i$ не имеет собственных подполигонов. Ясно, что любой полигон представим в виде копроизведения полигонов вида ${}_SS^i$.

Для любого множества $J \subseteq I$ и любого множества ординалов $N_J = \{n_j \in \omega \cup \{\omega\} \mid j \in J\}$ определим полигон

$${}_SA_{J,N_J} = \bigsqcup_{j\in J} \bigsqcup_{l\in n_j} {}_SS^j_l,$$

где ${}_SS^j_l$ $(l \in n_j)$ – копии полигонов ${}_SS^j$.

Пусть ${}_SA$ – полигон, P – одноместный предикат, $\lambda = max\{2^{2^{|S|}}, \omega\}$,

$T = Th({}_S A)$, X – множество в T, $|X| \le \lambda$, $T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$, где Δ – множество предложений языка $L_S \cup \{P\}$, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определяемых функциональными символами языка L_S. Пусть T_1 – пополнение теории $T_\Delta(X)$, $\mathcal{B} = \langle B; L_S \cup \{P\}\rangle$ – модель теории T_1. Заметим, что интерпретации элементов множества X в полигоне ${}_S B$ однозначно определяют компоненты связности этого полигона, которым они принадлежат. Существуют J, K, N_J, M_K такие, что ${}_S(B \setminus B_1) \equiv {}_S A_{J,N_J} \sqcup {}_S A_{K,M_K J}$, причем для интерпретации предиката P в полигоне ${}_S B$ выполняется ${}_S P \equiv {}_S B_1 \sqcup {}_S A_{J,N_J}$. Поскольку $|I| \le 2^{|S|}$ и $|N_I| \le \omega^{|I|} \le \max\{\omega, 2^{2^{|S|}}\}$, то число пополнений теории $T_\Delta(X)$ не больше, чем λ. Следовательно, теория T является (P, s)-стабильной.

3 Полигоны с P-стабильными теориями над моноидами правых и левых нулей

Данная глава посвящена вопросам P-стабильности полигонов над моноидами левых и правых нулей. Описаны полигоны над моноидами правых и левух нулей с $(P,1)$-стабильными теориями. Описаны полигоны над счетными моноидами левых нулей с (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильными теориями и, при условии неразличимости множества $A \setminus SA$, над моноидами правых нулей.

3.1 Полигоны с P-стабильными теориями над моноидами левых нулей

Моноид S называется *моноидом левых нулей*, если для любых $a,b \in S$ выполняется $a \cdot b = a$.

Предложение 3.1. *[16] Пусть X и S – непустые множества, θ – отношение эквивалентности на X. Пусть для каждого $s \in S$ задано подмножество ${}^sY \subseteq X$, причем $|{}^sY \cap \theta(x)| = 1$ для всех $x \in X, s \in S$ (здесь $\theta(x)$ обозначает класс эквивалентности θ, содержащий x). Положим $ts = t$ для всех $s,t \in S$ и $sx = y$, где y – единственный элемент множества ${}^sY \cap \theta(x)$, для $x \in X, s \in S$. Тогда S будет полугруппой левых нулей, а ${}_SX$ – полигоном. Кроме того, всякий полигон над полугруппой левых нулей изоморфен полигону, построенному таким образом.*

Утверждение 3.2. *Пусть S – моноид левых нулей. Полигон ${}_SA$ является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда число неодноэлементных компонент связности полигона ${}_SA$ конечно.*

Доказательство. Докажем, что всякий связный полигон над моноидом левых нулей S является $(P,1)$-стабильным.

Пусть ${}_SA$ – связный полигон, $t \in S, t \neq 1, a,b \in A$. Покажем, что $ta = tb$. По определению связного полигона существуют $c_0,\ldots,c_n \in$

$A, s_0, \dots s_{n-1}, t_1, \dots t_n \in S$ такие, что $a = c_0, s_i c_i = t_{i+1} c_{i+1}, c_n = b$, для $0 \le i \le n-1$. Тогда $tc_i = ts_i c_i = tt_{i+1} c_{i+1} = tc_{i+1}$ для любого $i, 0 \le i \le n-1$, т.е. $ta = tb$. Следовательно $tA \backslash \{a \in A \mid ta = a\} = \varnothing$ и множество $\{a \in A \mid ta = a \wedge \exists b(tb = a \wedge b \neq a)\}$ либо одноэлементно, либо пусто. По теореме 2.9 полигон ${}_SA$ является $(P,1)$-стабильным.

Пусть ${}_SA = \coprod\limits_{i \in I} {}_SA_i$, где ${}_SA_i$ – компоненты связности полигона ${}_SA, i \in I$. По доказанному выше $|tA_i| = 1$ для любого $t \in S, t \neq 1$. Следовательно условие (5) из следствия 2.10 выполняется тогда и только тогда, когда число неодноэлементных компонент связности полигона ${}_SA$ конечно.

Через $\bar{S}$ обозначим полугруппу $S \setminus \{1\}$.

Лемма 3.3. *Пусть ${}_SA$ – связный полигон над моноидом левых нулей. Тогда*

1) $|rA| = 1$ для любого $r \in \bar{S}$;

2) существует конгруэнция Θ полигона ${}_SS$ такая, что ${}_S(\bar{S}A) \cong {}_S(S/\Theta)$.

Доказательство. 1). Пусть a, b – различные элементы A, $r \in \bar{S}$. В силу связности полигона ${}_SA$ существуют $k \in \omega$, $c_0, \dots, c_k \in A$, $s_0, \dots, s_{k-1}, t_1, \dots, t_k \in S$ такие, что

$$a = c_0,\ s_0 c_0 = t_1 c_1, \dots, s_{k-1} c_{k-1} = t_k c_k,\ c_k = b.$$

Тогда

$$rc_i = rs_i c_i = rt_{i+1} c_{i+1} = rc_{i+1}$$

для любых i, $0 \le i < k$. Следовательно, $ra = rb$.

2) Пусть $\Theta = \{(s,t) \in S^2 \mid \forall a \in A(sa = ta)\}$. Ясно, что Θ – конгруэнция полигона ${}_SS$. Изоморфизм $\varphi : {}_S(\bar{S}A) \to {}_S(S/\Theta)$ задается следующим образом: $\varphi(sa) = s/\Theta$.

Для полигона ${}_SA = \coprod_{i \in I^A} {}_SA_i$, где ${}_SA_i$ – компонента связности полигона ${}_SA$ $(i \in I^A)$, введем обозначения:

$$I_1^A = \{i \in I^A \mid\ |A_i| \ge \omega\},\ I_2^A = \{i \in (I^A \setminus I_1^A) \mid 0 < |A_i \setminus \bar{S}A_i| < \omega\},$$

$$I_3^A = I \setminus (I_1^A \cup I_2^A).$$

Лемма 3.4. *Пусть* S *– моноид левых нулей,* ${}_SA$ *– копроизведение компонент связности* ${}_SA_i$ $(i \in I^A)$.

1) Если полигон ${}_SA$ *является* (P,e)*-стабильным, то*

a) $|\{i \in I^A \mid |A_i \setminus \bar{S}A_i| \geq \omega\}| < \omega$ *;*

b) $|I_1^A| < \omega$ *;*

c) существует $n \in \omega$ *такой, что* $|A_i \setminus \bar{S}A_i| \leq n$ *для всех* $i \in I_2^A$.

2) Если полигон ${}_SA$ *является* (P,s)*-стабильным, то*

d) $|I_1^A \cup I_2^A| < \omega$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются и полигон ${}_SA$ является (P,e)-стабильным.

a) Предположим, что $|\{i \in I^A \mid |A_i \setminus \bar{S}A_i| \geq \omega\}| \geq \omega$. Выберем ординал α и ультрафильтр D над ним так, что для полигона ${}_SC = {}_S(A^\alpha/D)$, ${}_SC = \coprod_{j\in J} {}_SC_j$, где ${}_SC_j$ $(j \in J)$ – компоненты связности полигона ${}_SC$, и для множества $J_1 = \{j \in J \mid |C_j \setminus \bar{S}C_j| \geq \omega\}$ выполняется соотношение $|J_1| > \max\{\omega_1, (2^{|S|+1})\}$. По лемме 3.3 (2) существуют конгруэнция Θ полигона ${}_SS$ и $J_2 \subseteq J_1$ такие, что $|J_2| > \max\{\omega, 2^{|S|}\}$ и для любого $j \in J_2$

$${}_S(\bar{S}C_j) \cong {}_S(S/\Theta).$$

Пусть $t \in \bar{S}$, $J_2 = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $|K_1| = |K_2|$. Для $k \in K_2$ определим подмножества C_k' и C_k'' множества C_k следующим образом: $C_k \setminus \bar{S}C_k = C_k' \cup C_k''$, $C_k' \cap C_k'' = \varnothing$, $|C_k'| = |C_k''|$. Через ${}_SP$ обозначим подполигон

$$\coprod_{k\in K_1} {}_SC_k \sqcup \coprod_{k\in K_2} {}_S(C_k \setminus C_k')$$

полигона ${}_SC$, через $\Phi(x)$ обозначим формулу

$$\exists y(\neg P(y) \wedge ty = x)$$

языка $(L_S)_P$, через X – множество $\bigcup_{k\in K_1} tC_k$, через Y – множество $\bigcup_{k\in K_2} tC_k$. Ясно, что ${}_SP \prec {}_SC$, формула $\Phi(x)$ отделяет X от Y и множество элементов $X \cup Y$ является неразличимым в теории

$Th({}_SA) = Th({}_SC)$. По предложению 2.6 полигон ${}_SA$ не является (P,e)-стабильным. Противоречие.

b) Предположим, что $|I_1^A| \geq \omega$. Пусть D – неглавный ультрафильтр над ω, $i \in I_1^A$, $|\{i \in I^A \mid |A_i \setminus \bar{S}A_i| \geq \omega\}| \geq \omega$ и $b_i \in A_i$. Тогда найдутся элементы $t_j \in \bar{S}$ $(j \in \omega)$ такие, что $t_j b_i \neq t_k b_i$ $(j \neq k)$. Через c_i/D обозначим элемент множества $A^\omega/D = C$, для которого $c_i(j) = t_j(b_i)$. Если $tc_i/D = c_i/D$ для некоторого $t \in \bar{S}$, то найдется бесконечное число $j \in \omega$, для которых $tt_jb_i = t_jb_i$, т.е. $tb_i = t_jb_i$, противоречие. Следовательно, $c_i/D \in C \setminus \bar{S}C$. Через c_{ik}/D обозначим элемент множества C такой, что $c_{ik}(j) = c_i(k+j)$. Ясно, что $c_{ik}/D \neq c_{il}/D$ $(i \neq l)$, $tc_{ik}/D = tc_i/D$ $(t \in S)$ и $c_{ik}/D \in C \setminus \bar{S}C$, т.е. $|C_l \setminus \bar{S}C_l| \geq \omega$ для компонент связности ${}_SC_l$ полигона ${}_SC$, содержащих элемент c/D. Так как $|I_1^A| \geq \omega$ и $|\{i \in I^A \mid |A_i \setminus \bar{S}A_i| \geq \omega\}| \geq \omega$, то множество компонент связности ${}_SC_k$ полигона ${}_SC$ таких, что $|C_k \setminus \bar{S}C_k| \geq \omega$ бесконечно, что противоречит (a).

c) Пусть $U_i = A_i \setminus \bar{S}A_i$ $(i \in I_2^A)$. Предположим, что существуют множества ${}_SV^j \subseteq \{U_i \mid i \in I_2^A\}$ $(j \in \omega)$ такие, что $|V^j| < |V^{j+1}|$ для всех $j \in \omega$. Пусть D – неглавный ультрафильтр над ω, $s \in \bar{S}$, ${}_SC = {}_S(A^\omega/D)$, $b/D \in C$, $a(j) \in V^j$ и $sa(j) = b(j)$ для любого $j \in \omega$. Для всех $k \in \omega$ определим элементы $b_k/D \in C$ следующим образом: $b_k(j) = b(j+k)$ для любых $j \in \omega$. Ясно, что $sb_k/D = b_k/D$ и $b_k/D \neq b_m/D$ для различных k и m из ω. Поскольку $|V^{j+k}| < |V^{j+1+k}|$ для всех $j, k \in \omega$, то

$$|\{c/D \in C \mid sc/D = b_k/D,\ c/D \notin Sb_k/D\}| \geq \omega,$$

что противоречит (a).

Пусть полигон ${}_SA$ является (P,s)-стабильным.

d) Предположим, что $|\{i \in I^A \mid A_i \setminus \bar{S}A_i \neq \varnothing\}| \geq \omega$. Полигон ${}_SC$, множества J_1 и J_2 строим как в доказательстве (a). Существует $K \subseteq J_2$, $|K| \geq \omega$ такое, что для любых $k_1, k_2, k \in K$

$$|C_{k_1} \setminus \bar{S}C_{k_1}| = |C_{k_2} \setminus \bar{S}C_{k_2}| \text{ или } |C_k \setminus \bar{S}C_k| \geq \omega.$$

Пусть $t \in \bar{S}$, $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $|K_1| = |K_2|$. Через ${}_SP$ обозначим подполигон

$$\bigsqcup_{k \in K_1} {}_SC_k \sqcup \bigsqcup_{k \in K_2} {}_S\bar{S}C_k$$

полигона ${}_SC$. Формула $\Phi(x)$, множества X и Y определяются как в доказательстве (a). Рассуждения, аналогичные приведенным в (a), приводят к противоречию с условием леммы.

Лемма 3.5. *Пусть S – счетный моноид левых нулей, ${}_SA = \bigsqcup_{i \in I^A} {}_SA_i$, где ${}_SA_i$ – компонента связности полигона ${}_SA$ $(i \in I^A)$, $J \subseteq I^A$, $|J| \geq \omega$, D – неглавный ультрафильтр над J, ${}_SC = {}_S(A^J/D)$, $c/D \in C$, $c(j) \in A_j$ $(j \in J)$.*

1) Если полигон ${}_SA$ является (P,e)-стабильным, то

a) $|Sc/D| < \omega$;

b) $|\{a/D \in C \setminus \bar{S}C \mid ta/D = tc/D\}| < \omega$ для любого $t \in \bar{S}$.

2) Если полигон ${}_SA$ является (P,s)-стабильным, то

c) $tc/D = c/D$ для некоторого $t \in \bar{S}$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются и полигон ${}_SA$ является (P,e) или (P,s)-стабильным. Поскольку $Th({}_SA) = Th({}_SC)$, то полигон ${}_SC$ также (P,e)- или (P,s)-стабилен соответственно.

Пусть $S^2 = \{\langle t_n, s_n \rangle \mid n \in \omega\}$ и $n \in \omega$. Через X_n обозначим множество $\{j \in J \mid t_n c(j) = s_n c(j)\}$, если ${}_SC \models t_n c/D = s_n c/D$, и множество $\{j \in J \mid t_n c(j) \neq s_n c(j)\}$ в противном случае; через Y_n – множество $\bigcap_{i \leq n} X_i$. Ясно, что $X_n \in D$. Тогда $Y_n \in D$. Кроме того, $Y_{n+1} \subseteq Y_n$. Пусть φ – перестановка множества J, не оставляющая на месте ни один элемент J, причем $\varphi(Y_n) = Y_n$. Через c_φ обозначим элемент множества A^J такой, что $c_\varphi(j) = c(\varphi(j))$ для любого $j \in J$. По построению перестановки φ, если ${}_SC \models t_n c/D = s_n c/D$, то множество $\{j \in J \mid t_n c_\varphi(j) = s_n c_\varphi(j)\}$ совпадает с множеством X_n, следовательно, является элементом ультрафильтра D и ${}_SC \models t_n c_\varphi/D = s_n c_\varphi/D$; если ${}_SC \models t_n c/D \neq s_n c/D$, то, аналогично, ${}_SC \models t_n c_\varphi/D \neq s_n c_\varphi/D$. Таким образом, ${}_SSc/D \cong {}_SSC_\varphi/D$.

Если полигон ${}_SA$ (P,e)-стабилен и $|Sc/D| \geq \omega$ или $|\{a/D \in C \setminus \bar{S}C \mid ta/D = tc/D\}| \geq \omega$ для некоторого $t \in \bar{S}$, то поскольку перестановок множества J указанного вида бесконечное число, по лемме 3.4 (a), (b) получаем противоречие с (P,e)-стабильностью полигона ${}_SC$. Если полигон ${}_SA$ (P,s)-стабилен и $tc/D \neq c/D$ для любых $t \in \bar{S}$, то аналогично по лемме 3.4 (d) получаем противоречие с (P,s)-стабильностью полигона ${}_SC$.

Лемма 3.6. *Пусть S – счетный моноид левых нулей, ${}_SA = \bigsqcup_{i \in I^A} {}_SA_i$, где ${}_SA_i$ – компонента связности полигона ${}_SA$ $(i \in I^A)$,*

и полигон ${}_SA$ является (P,e)-стабильным. Тогда существует $n \in \omega$ такой, что $|A_i| \leq n$ для любого $i \in I_2^A \cup I_3^A$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются. Предположим, что существуют полигоны ${}_SA^j \in \{{}_SA_i \mid i \in I_2^A \cup I_3^A\}$ $(j \in \omega)$ такие, что $|A^j| < |A^{j+1}|$ для всех $j \in \omega$. Пусть D – неглавный ультрафильтр над ω, $s \in \bar{S}$, ${}_SC = {}_S(A^\omega/D)$, $b/D \in C$, $b(j) \in A^j$ и $sb(j) = b(j)$ для любого $j \in \omega$. Тогда по лемме 3.5 (a) $|Sb/D| < \omega$.

Предположим, что $|Sb/D| = m$, $Sb/D = \{b_1/D, \ldots, b_m/D\}$ и $s_1, \ldots, s_m \in S$ такие, что $s_i b/D = b_i/D$ для всех i, $1 \leq i \leq m$. Пусть $1 \leq i < j \leq m$. Тогда $J_{ij} = \{k \in \omega \mid s_i b(k) = s_j b(k)\} \notin D$. Следовательно, $K_{ij} = \omega \setminus J_{ij} \in D$ и

$$K = \bigcap_{1 \leq i < j \leq m} K_{ij} = \{k \in \omega \mid \bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} s_i b(k) \neq s_j b(k)\} \in D.$$

Поскольку D – неглавный ультрафильтр, то $|K| = \omega$. Пусть $B^l \in \{A^k \mid k \in K\}$ $(l \in \omega)$ такие, что $|B^l| < |B^{l+1}|$ для всех $l \in \omega$. Для $l > m$ выберем различные элементы $c_{l,1}, \ldots, c_{l,l-m} \in B^l$ и $k \in K$ так, что $B^l = A^k$ и $c_{l,i} \notin \{s_1 b(k), \ldots, s_m b(k)\}$ для всех i, $1 \leq i \leq l-m$. Так как $c_{l,i} \in A^k$, то $sc_{l,i} = sb(k)$ для любого $s \in \bar{S}$. Через c^k/D обозначим элемент полигона ${}_SC$, для которого $c^k(i) = c_{l,k}$, если $A^i = B^l$, $l > m+k$, и $c^k(i) = b(i)$, в противном случае. Тогда $sc^k/D = sb/D$ для любого $s \in \bar{S}$ и $c^k/D \neq s_i b/D$ для любого i, $1 \leq i \leq m$. Следовательно, $c^k/D \notin Sb/D$ и существует $t \in \bar{S}$ такой, что $tc^k/D = b/D$. Кроме того, $c^k/D \neq c^m/D$ для различных $k, m \in \omega$, что по лемме 3.5 (b) противоречит (P, s)-стабильности полигона ${}_SA$.

Теорема 3.7. *Пусть* S *– счетный моноид левых нулей. Полигон* ${}_SA$ *является* (P, s)*-стабильным тогда и только тогда, когда*

1) $|I_1^A \cup I_2^A| < \omega$ *;*

2) существует $n \in \omega$ *такой, что* $|A_i| \leq n$ *для любого* $i \in I_3^A$ *;*

3) для любого $a \in \prod_{i \in I_3^A} A_i$ *существуют* $m \in \omega$, $t_0, \ldots, t_m \in \bar{S}$, *подмножества* $J_0, \ldots, J_m$ *множества* I_3^A *такие, что* $I_3^A = J_0 \cup \ldots \cup J_m$ *и* $t_k a(j) = a(j)$ *для любых* k, $0 \leq k \leq m$ *и* $j \in J_k$.

Доказательство. Пусть S – моноид левых нулей и ${}_SA = \bigsqcup_{i \in I} {}_SA_i$, где ${}_SA_i$ компоненты связности $(i \in I)$.

Необходимость. Пусть полигон ${}_SA$ является (P, s)-стабильным.

(1) Требуемое следует из леммы 3.4 (d).

(2) Требуемое следует из замечания 2.5 и леммы 3.6.

(3) Пусть элемент $a \in \prod_{i \in I_3^A} A_i$ выбран так, что для любых $m \in \omega$, $t_0, \ldots, t_m \in \bar{S}$, подмножеств $J_0, \ldots, J_m$ множества I_3^A таких, что $I_3^A = J_0 \cup \ldots \cup J_m$ существуют k, $0 \leq k \leq m$, и $j \in J_k$, для которого равенство $t_k a(j) = a(j)$ не выполняется. Пусть $S = \{t_\alpha \mid \alpha \in \beta\}$. Для $\alpha \in \beta$ через K_α обозначим множество $\{i \in I_3^A \mid t_\alpha a(i) \neq a(i)\}$. Покажем, что множество $\{K_\alpha \mid \alpha \in \beta\}$ является центрированной системой на I_3^A. Предположим, что $K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_m} = \varnothing$. Тогда

$$I_3^A = I_3^A \setminus (K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_m}) = (I_3^A \setminus K_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup (I_3^A \setminus K_{\alpha_m}),$$

т.е. $t_{\alpha_k} a(j) = a(j)$ для любых $j \in I_3^A \setminus K_{\alpha_k}$, что противоречит выбору элемента a. По предложению 2.3 существует ультрафильтр D на множестве I_3^A, содержащий элементы K_α $(\alpha \in \beta)$. Пусть ${}_SB = {}_SA^{I_3^A}/D$. Предположим, что $t_\alpha a/D = a/D$ для некоторого $\alpha \in \beta$. Тогда $I_3^A \setminus K_\alpha = \{i \in I_3^A \mid t_\alpha a(i) = a(i)\} \in D$, что противоречит соотношению $K_\alpha \in D$. Следовательно, $ta/D \neq a/D$ для любого $t \in \bar{S}$, что по лемме 3.5 (c) противоречит (P, s)-стабильности полигона ${}_SA$.

Достаточность. Пусть выполняются условия (1)–(3) теоремы, κ –

произвольный кардинал, D – ультрафильтр над κ, $b/D \in A^\kappa/D = B$, ${}_SB$ – копроизведение компонент связности ${}_SB_j$, где $j \in J$, $\bar{S}b/D = \bar{S}B_k$ $(k \in J)$, $X_b^i = \{\alpha \in \kappa \mid \exists j \in I_i^A \ (b(\alpha) \in A_j)\}$ $(1 \leq i \leq 3)$.

Предположим, что $X_b^1 \cup X_b^2 \in D$ и $t \in \bar{S}$. Поскольку множество $I_1^A \cup I_2^A$ конечно, то существует $j \in I_1^A \cup I_2^A$ такой, что $\{\alpha \in \kappa \mid b(\alpha) \in A_j)\} \in D$. Тогда $tb/D = c_j/D$, где $c_j(\alpha) = tc_j(\alpha) \in A_j$ $(\alpha \in \kappa)$. Следовательно, ${}_S\bar{S}b/D = {}_S\bar{S}c_j/D \cong {}_S\bar{S}A_j$. Кроме того, если $|A_j| \geq \omega$, то $k \in I_1^B$; если $|A_j| < \omega$, то $|B_k \setminus \bar{S}B_k| = |A_j \setminus \bar{S}A_j|$ и $k \in I_2^B$.

Предположим, что $X_b^1 \cup X_b^2 \notin D$, т.е. $X_b^3 \in D$. Покажем, что $tb/D = b/D$ для некоторого $t \in \bar{S}$. По условию существует $m \in \omega$ такой, что $|A_i| \leq m$ для любого $i \in I_3^A$. Пусть $A_i = \{c_i^1, \ldots, c_i^m\}$, $a_j \in \prod_{i \in I_3^A} A_i$, $a_j(i) = c_i^j$, где $i \in I_3^A$ и $1 \leq j \leq m$. Так как $X_b^3 = \bigcup_{1 \leq j \leq m} Y_j$, где $Y_j = \{\alpha \in \kappa \mid \exists i \in I_3^A : \ b(\alpha) = c_i^j\}$, то существует j_0, $1 \leq j_0 \leq m$, такой, что $Y_{j_0} \in D$. Пусть $1 \leq j \leq m$. По условию существуют $n \in \omega$, $t_0, \ldots, t_n \in S$, подмножества $K_0, \ldots, K_n$ множества I_3^A такие, что $I_3^A = K_0 \cup \ldots \cup K_n$ и $t_r a_j(i) = a_j(i)$ для любого $i \in K_r$, $1 \leq r \leq n$. Для любого r, $1 \leq r \leq n$, через Z_r обозначим множество $\{\alpha \in Y_{j_0} \mid t_r b(\alpha) = b(\alpha)\}$. Тогда $Y_{j_0} = \bigcup_{1 \leq r \leq n} Z_r$ и $Z_{r_0} \in D$ для некоторого r_0, $1 \leq r_0 \leq n$, т.е. $t_r b/D = b/D$. Следовательно, $k \in I_3^B$ и из доказанного выше получаем $|I_1^B| = |I_1^A|$, $|I_2^B| = |I_2^A|$ и $\bigsqcup_{j \in I_1^B \cup I_2^B} {}_S\bar{S}B_j \cong \bigsqcup_{i \in I_1^A \cup I_2^A} {}_S\bar{S}A_i$.

Пусть $T = Th({}_SA)$, P – одноместный предикат, $\lambda > \omega^{|2^S|}$, X – множество в T, $|X| \leq \lambda$, $T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$, где Δ – множество предложений языка $L_S \cup \{P\}$, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определяемых функциональными символами языка L_S, $\mathcal{B} = \langle B; L_S \cup \{P\}\rangle$ – модель теории $T_\Delta(X)$, ${}_SB$ – копроизведение компонент связности ${}_SB_j$ $(j \in J)$. Тогда ${}_SB \equiv {}_SA$. Заметим, что, если существует $j \in I_1^B \cup I_2^B$ такой, что $|B_j \setminus \bar{S}B_j| \geq \omega$, то ${}_SB \equiv {}_SB'$ для любого полигона ${}_SB'$, для которого $B' = B \cup C$, $\bar{S}C = \bar{S}B_j$. По предложению 2.2 существуют кардиналы κ_1, κ_2 и ультрафильтры D_1, D_2 над κ_1, κ_2 соответственно такие, что ${}_SB^{\kappa_1}/D_1 \cong {}_SA^{\kappa_2}/D_2$. Тогда $|I_1^B| = |I_1^A|$, $|I_2^B| = |I_2^A|$ и $\bigsqcup_{j \in I_1^B \cup I_2^B} {}_S\bar{S}B_j \cong \bigsqcup_{i \in I_1^A \cup I_2^A} {}_S\bar{S}A_i$. По лемме 3.3 (2) для любой компоненты ${}_SB_j$, $j \in I_3^B$, существует конгруэнция Θ полигона ${}_SS$ такая, что ${}_SB_j \cong {}_SS/\Theta$. Следовательно, различных неизоморфных компонент связности ${}_SB_j$, $j \in I_3^B$, полигона ${}_SB$ не более, чем $|2^S|$. Пусть ${}_SP$ – подполигон полигона ${}_SB$. Тогда ${}_SP$ определяется подмножеством множества $I_1^B \cup I_2^B$, мощностями множеств $P \cap (B_j \setminus \bar{S}B_j)$ для каждого $j \in I_1^B \cup I_2^B$, подмножеством множества всех конгруэнций полигона ${}_SS$, мощностями множеств $\{j \in I_3^B \mid {}_SB_j \cong {}_SS/\Theta\}$ для каждой конгруэнции Θ полигона ${}_SS$. Следовательно, число пополнений теории $T_\Delta(X)$ не больше, чем λ. Таким образом, полигон ${}_SA$ является (P,s)-стабильным.

Замечание 3.8. *При доказательстве достаточности теоремы условие счетности моноида S не использовалось.*

Теорема 3.9. *Пусть S – счетный моноид левых нулей. Следующие условия эквивалентны:*

1) полигон ${}_SA$ является (P,e)-стабильным;

2) полигон ${}_SA$ является (P,a)-стабильным;

3) $|I_1^A| < \omega$ и существует $n \in \omega$ такой, что $|A_i| \le n$ для любого $i \in I_2^A \cup I_3^A$.

Доказательство. Пусть S – моноид левых нулей и ${}_SA$ – копроизведение компонент связности ${}_SA_i$ $(i \in I)$.

Если полигон ${}_SA$ является (P,a)-стабильным, то замечанию 2.5 ${}_SA$ (P,e)-стабилен.

Предположим, что полигон ${}_SA$ является (P,e)-стабильным. Тогда (3) следует из леммы 3.4 (b) и леммы 3.6.

Предположим, (3) теоремы выполняется. Пусть κ – произвольный кардинал, D – ультрафильтр над κ, $b/D \in A^\kappa/D = B$, ${}_SB$ – копроизведение компонент связности ${}_SB_j$, где $j \in J$, $\bar{S}b/D = \bar{S}B_k$ $(k \in J)$, $X_b^i = \{\alpha \in \kappa \mid \exists j \in I_i^A \ (b(\alpha) \in A_j)\}$ $(1 \le i \le 3)$.

Предположим, что $X_b^1 \in D$ и $t \in \bar{S}$. Поскольку множество I_1^A конечно, то существует $j \in I_1^A$ такой, что $\{\alpha \in \kappa \mid b(\alpha) \in A_j)\} \in D$. Тогда $tb/D = c_j/D$, где $c_j(\alpha) = tc_j(\alpha) \in A_j$ $(\alpha \in \kappa)$. Следовательно, ${}_S\bar{S}b/D = {}_S\bar{S}c_j/D \cong {}_S\bar{S}A_j$ и полигон ${}_SB_k$ бесконечен.

Предположим, что $X_b^1 \notin D$, т.е. $X_b^2 \cup X_b^3 \in D$. Так как для любых $t \in \bar{S}$, $m > n$ и $a \in A$, если существуют $b_1, \ldots, b_k \in A$ такие, что $tb_= \ldots = tb_k = ta$, где $k < m$, то $|\{b \in A \mid tb = ta\}| \leq n$ и ${}_SA \equiv {}_SB$, то $|B_j| \leq n$ для любого $j \in I_2^B \cup I_3^B$. Отсюда следует, что число бесконечных компонент связности полигона ${}_SB$ конечно, а именно, $|I_1^B| = |I_1^A|$. Кроме того, $\bigsqcup_{j \in I_1^B} {}_S\bar{S}B_j \cong \bigsqcup_{i \in I_1^A} {}_S\bar{S}A_i$.

Пусть $T = Th({}_SA)$, P – одноместный предикат, $\lambda > \omega^{|2^S|}$, X – множество в T, $|X| \leq \lambda$, $T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta$, где Δ – множество предложений языка $L_S \cup \{P\}$, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, $\mathcal{B} = \langle B; L_S \cup \{P\}\rangle$ – модель теории $T_\Delta(X)$, ${}_SB$ – копроизведение компонент связности ${}_SB_j$ $(j \in J)$. Тогда ${}_SB \equiv {}_SA$. Заметим, что, если существует $j \in I_1^B \cup I_2^B$ такой, что $|B_j \setminus \bar{S}B_j| \geq \omega$, то ${}_SB \equiv {}_SB'$ для любого полигона ${}_SB'$, для которого $B' = B \cup C$, $\bar{S}C = \bar{S}B_j$. По предложению 2.2 существуют кардиналы κ_1, κ_2 и ультрафильтры D_1, D_2 над κ_1, κ_2 соответственно такие, что ${}_SB^{\kappa_1}/D_1 \cong {}_SA^{\kappa_2}/D_2$. Тогда по доказанному выше $|I_1^B| = |I_1^A|$, $\bigsqcup_{j \in I_1^B} {}_S\bar{S}B_j \cong \bigsqcup_{i \in I_1^A} {}_S\bar{S}A_i$ и $|B_j| \leq n$ для любого $j \in I_2^B \cup I_3^D$. По лемме 3.3 (2) для любой компоненты ${}_SB_j$, $j \in \cup I_2^B \cup I_3^B$, существует конгруэнция Θ полигона ${}_SS$ такая, что ${}_S\bar{S}B_j \cong {}_S(S/\Theta)$. Следовательно, различных неизоморфных компонент связности ${}_SB_j$, $j \in I_2^B \cup I_3^B$, полигона ${}_SB$ не более, чем $\omega \cdot |2^S|$. Пусть ${}_SP$ – подполигон полигона ${}_SB$, являющийся алгебраически замкнутым множеством. Если $P \cap B_j \neq \varnothing$ для некоторого $j \in I_2^B \cup I_3^B$, то $B_j \subseteq P$ в силу алгебраической замкнутости множества P. Тогда ${}_SP$ определяется подмножеством множества I_1^B, мощностями множеств $P \cap (B_j \setminus \bar{S}B_j)$ для каждого $j \in I_1^B$, подмножеством множества всех конгруэнций полигона ${}_SS$, мощностями множеств $\{j \in I_2^B \cup I_3^B \mid {}_SB_j \cong {}_SS/\Theta\}$ для каждой конгруэнции Θ полигона ${}_SS$. Следовательно, число пополнений теории $T_\Delta(X)$ не больше, чем λ. Таким образом, полигон ${}_SA$ является (P, a)-стабильным.

Пример не $(P, 1)$-стабильного (P, s)-стабильного полигона над моноидом левых нулей. Пусть $\bar{S} = \{s_\alpha \mid \alpha \in 2^\omega\}$, $S = \bar{S} \cup \{1\}$,

${}_S A = \bigsqcup_{i\in\omega} {}_S A_i$, $A_i = \{b_i, c_i\}$ $(i \in \omega)$. Действие моноида на множестве A задается следующим образом: для любого $\alpha \in 2^\omega$, если $i \in \alpha$, то $s_\alpha b_i = b_i$, в противном случае $s_\alpha b_i = c_i$; на множестве $\{c_i \mid i \in \omega\}$ все элементы моноида действуют тождественно. По теореме 2.9 полигон ${}_S A$ не является $(P,1)$-стабильным. Поскольку условия (1)–(3) теоремы 3.7 выполняются, то по замечанию 3.8 ${}_S A$ является (P,s)-стабильным полигоном.

3.2 Полигоны с P-стабильными теориями над моноидами правых нулей

Моноид S называется *моноидом правых нулей*, если для любых $a, b \in S$ выполняется $a \cdot b = b$.

Предложение 3.10. *[16] Пусть S – моноид правых нулей, $A = X_A \cup Y_A$, где Y_A – непустое множество, $\{\varphi_s \mid s \in S\}$ – семейство отображений $\varphi_s : X_A \to Y_A$. Для $s \in S$ положим $sa = \varphi_s a$ для $a \in X_A$, $sy = y$ для $y \in Y_A$ и $1c = c$ для $c \in A$. Тогда ${}_SA$ – полигон над моноидом S. И наоборот, всякий полигон над моноидом правых нулей устроен таким образом.*

Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей. Обозначим $Y_A = \{y \in A \mid sy = y$ для всех $s \in S\}, X_A = A \setminus Y_A$.

Утверждение 3.11. *Пусть S – моноид правых нулей. Полигон ${}_SA$ является $(P, 1)$-стабильным тогда и только тогда, когда для любого $t \in S$ выполняется $|t \cdot Y_A| < \omega$.*

Доказательство. Из строения полигона над моноидом правых нулей следует, что $\{a \in A \mid ta = a \wedge \exists b(tb = a \wedge b \neq a)\} = t \cdot Y_A$ и $tA \setminus \{a \in A \mid ta = a\} = \varnothing$, что по теореме 2.9 доказывает данное утверждение.

Лемма 3.12. *Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей, множество X_A неразличимо в ${}_SA$, $t, s \in \bar{S}$. Тогда*

1) $|tX_A| = 1$ или отображение φ_t является инъекцией;

2) если $|X_A| > 2$ и $tX_A \cap sX_A \neq \varnothing$, то $tb = sb$ для любого $b \in X_A$;

3) если $|X_A| > 2$ и $a, b \in X_A$, то отображение $\alpha : X_A \to X_A$ такое, что $\alpha(a) = b$, $\alpha(b) = a$, $\alpha|(X_A \setminus \{a, b\})6 = id_{X_A}$, продолжается до автоморфизма полигона ${}_SA$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены и $tb_1 = tb_2$ для некоторых различных $b_1, b_2 \in X_A$. Если $|X_A| = 2$, отображение φ_t является инъекцией. Предположим, что $|X_A| > 2$ и b – элемент X_A, отличный от b_1 и b_2. Тогда по определению неразличимого множества $tb = tb_1$, т.е. $|tX_A| = 1$ и (1) доказано.

Пусть $|X_A| > 2$, где $<$ – порядок на множестве X_A и $tb_1 = sb_2$ для некоторых $b_1, b_2 \in X_A$. Если $b_1 = b_2$, то $tb_1 = sb_1$ и по определению неразличимого множества $tb = sb$ для любого $b \in X_A$. Предположим, что b_1 и b_2 различны, $b \in X_A$ и, например, $b < b_1 < b_2$. Тогда в силу неразличимости множества X_A имеют место равенства $tb = sb_1 = sb_2 = tb_1$, т.е. $sb_1 = tb_1$, следовательно, $sb = tb$. В этом случае $tX_A = sX_A$ – одноэлементное множество, т.е. (2) доказано.

(3) следует из (2).

Теорема 3.13. *Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей, множество X_A неразличимо в ${}_SA$. Следующие условия эквивалентны:*

1) полигон ${}_SA$ является $(P,1)$-стабильным;

2) полигон ${}_SA$ является (P,s)-стабильным;

3) $|tX_A| < \omega$ для любого $t \in \bar{S}$.

Доказательство. Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей, множество X_A неразличимо в A_S.

(1) $\Rightarrow$ (2) Следует по замечанию 2.5.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Следует из теоремы 2.9.

(2) $\Rightarrow$ (3) Докажем от противного. Предположим, что полигон ${}_SA$ является (P,s)-стабильным и $|tX_A| \geq \omega$ для некоторого $t \in \bar{S}$. Тогда по лемме 3.12 отображение φ_t является инъекцией. Пусть ${}_SP$ – подполигон полигона ${}_SA$ такой, что $|X_P| = \omega$, $|X_A \setminus X_P| \geq \omega$, $Y_P = Y_A$. Через $\Phi(x)$ обозначим формулу

$$\exists y(\neg P(y) \wedge ty = x)$$

языка $(L_S)_P$, через U – множество $\Phi(A)$, через V – множество $Y_A \setminus U$. Ясно, что формула $\Phi(x)$ отделяет U от V. Так как полигон ${}_SA$ является (P,s)-стабильным, то по предложению 2.6 существует формула $\Psi(x,\bar{y})$ языка L_S и $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A$ такие, что формула $\Psi(x,\bar{a})$ отделяет U от V. Пусть

$$\Psi_1(x,\bar{y}) \rightleftharpoons \Psi(tx,\bar{y}) \wedge tx \neq x,$$

$\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, $tb_i = ta_i$, $tb_i \neq b_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Тогда $X_A \setminus X_P =$

$\Psi_1(A,\bar{b})$, что противоречит лемме 3.12 (3).

Теорема 3.14. *Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей, множество X_A неразличимо в ${}_SA$. Тогда полигон ${}_SA$ является (P,a)-стабильным.*

Доказательство. Пусть $T = Th({}_SA)$, P – одноместный предикат, $\lambda \le \omega$, U – множество в T, $|U| \le \lambda$, $T_\Delta(U) = T(U) \cup \{P(a) \mid a \in U\} \cup \Delta$, где Δ – множество предложений языка $L_S \cup \{P\}$, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, $\mathcal{B} = \langle B; L_S \cup \{P\}\rangle$ – модель теории $T_\Delta(U)$. Тогда ${}_SB \equiv {}_SA$. Из леммы 3.12 следует, что ${}_SA \models \Phi$ для любого $t \in \bar{S}$, где

$$\Phi \rightleftharpoons \forall xy(tx \ne x \wedge ty \ne y \to tx \ne ty) \vee \forall xy(tx \ne x \wedge ty \ne y \to tx = ty).$$

По определению замкнутого множества $ta \notin Y_P$, если φ_t – инъекция, то для любых $a \in X_B \setminus X_P$ и $t \in \bar{S}$. Тогда ${}_SP$ определяется мощностями множеств X_P и $\{a \in X_P \mid a \notin \bar{S}X_B\}$. Заметим, что алгебраические системы $\mathcal{B}_\infty = \langle B_1; L_S \cup \{P\}\rangle$ и $\mathcal{B}_\in = \langle B_2; L_S \cup \{P\}\rangle$, в которых интерпретации P_1 и P_2 предиката P бесконечны и отличаются только мощностями множеств X_{P_i} и $\{a \in X_{P_i} \mid a \notin \bar{S}X_B\}$ $(i \in \{1,2\})$, элементарно эквивалентны. Следовательно, число пополнений теории $T_\Delta(U)$ не больше, чем λ. Таким образом, полигон ${}_SA$ является (P,a)-стабильным.

4 Заключение

В работе доказано, что примитивная нормальность классов всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов над моноидом S эквивалентна примитивной нормальности полигона ${}_SS$. Доказано, что в аксиоматизируемом, аддитивном классе полигонов все полигоны являются связными. Отсюда непосредственно следует, что аксиоматизируемые классы всех свободных, проективных и сильно плоских полигонов не являются аддитивными ни для какого моноида S.

В работе дано алгебраическое описание полигонов с $(P,1)$-стабильной теорией. В качестве следствия для группы S доказано, что полигон ${}_SS$ является $(P,1)$-стабильным только, если S – конечная группа. Показано, что класс всех полигонов над моноидом S не является $(P,1)$-стабильным для нетривиального моноида S. Доказывано, что (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильность класса всех полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S – группа. Полученные результаты применены для описания строения полигонов с $(P,1)$-, (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильными теориями над моноидами правых и левых нулей.

В дальнейшем представляют интерес исследования строения моноидов, над которыми классы свободных, проективных и сильно плоских полигонов обладают свойствами примитивной связности и P-стабильности.

Список литературы

[1] *Гоулд В., Михалев А.В., Палютин Е.А., Степанова А.А.* Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фунд. прикл. матем. 2008. Т.14. №7. С.63-110.

[2] *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.* Математческаая логика // Физматлит. М. 2011. 6-е изд.

[3] *Кейслер Г., Чен Ч* Теория моделей // Мир. М. 1977.

[4] *Кильп М.* К гомологической классификации моноидов // Сиб. мат. журн. 1972. Т.13. №3. С.578-586.

[5] *Мустафин Т.Г.* Новые понятия стабильности теорий // Труды советско-французского коллоквиума по теории моделей. Караганда. 1990. С.112—125.

[6] *Мустафин Т.Г.* О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и ее применение.– Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, – (Тр.АН СССР. Сиб.отд-е. Ин-т математики; Т.8) 1988. Т.8. С. 92-108.

[7] *Палютин Е.А.* Примитивно связные теории // Алгебра и логика. 2000. Т.39. №2. С.145-169.

[8] *Палютин Е. А.* E^*-стабильные теори // Алгебра и логика. 2003. Т.42. №2. С.194-210.

[9] *Русалеев М.А.* Характеризация $(P,1)$-стабильных теорий // Алгебра и логика. 2007. Т.52. №5. С.606-631.

[10] *Скорняков Л.А.* О гомологической классификации моноидов // Сиб. мат. журн. 1969. Т.10. №5. С.1139-1143.

[11] *Степанова А.А.* Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S–полигонов // Алгебра и логика. 1991. Т.3. №5. С.583-594.

[12] *Степанова А.А.* Моноиды со стабильными плоскими полигонами // Вестник НГУ, серия: математика, информатика, механика. 2002. Т.2. вып. 2. С. 64-77.

[13] *Степанова А.А.* Примитивно связные и аддитивные теории полигонов // Алгебра и логика. 2006. Т.45. №3. С.300–313.

[14] *Степанова А.А.* Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. 2008. Т.47. №4. С.491-508.

[15] *Степанова А.А.* Регулярные полигоны с примитивно связными теориями // Сибирский математический журнал. 2014. Т.55, № 3. С. 666-671.

[16] *Халиуллина А.Р.* Условия модулярности решетки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей // Дальневосточный математический журнал. 2015. Т.15, № 1. С. 102-120.

[17] *Bulman-Fleming S., Gould V.* Axiomatisability of weakly flat, flat and projective S-acts // Preprint.

[18] *Gould V.* Axiomatisability problems for S–systems // J. London Math. Soc. 1987. V.35. №2. P.193-201.

[19] *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V.* Monoids, acts and categories.// Walter de Gruyter. Berlin. 2000.

[20] *Kilp M., Knauer U.* Characterization of monoids by properties of regular acts // J. of Pure and Applied Alg. 1987. V.2. №35. P.193-201.

[21] *Knauer U., Mihalev A.V.* Wreath products of acts over monoids: I. Regular and inverse acts // J. of Pure and Applied Algebra. 1988. V.51. P.251-260.

[22] *Morley M.D.* Categoricity in power // Trans. A.M.S. 1965. V.114 P.514-538.

[23] *Palyutin E.A.* Additive theory // Proceedings of Logic Colloquium'98 (Lecture Notes in Logic, 13), ASL, Massachusetts. 2000. P.352-356.

[24] *Ryll-Nardzewski C.* On the Categoricity in Power $\leqslant \aleph_0$ // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astr. Phys. 1959. V.7 P.545-548.

[25] *Shelah S.* Stable theories // Israel J. Math. 1969. V.7 P.187-202.

[26] *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models // Amsterdam: North-Holland. 1978.

[27] *Stenström B.* Flatness and localization over monoids // Math. Nachr. 1971. V. 48 P.315-334

[28] *Tran L.H.* Characterization of monoid by regular acts // Period. Math. Hungar. 1985. V.16. P.273-279.

[29] *Vaught R. L.* Models of complete theories // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V.69 P.299-313.

Список работ автора по теме исследования

[30] *Птахов Д.О.* Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией // Алгебра и логика. 2017. Т.56. №6. С.712-720.

[31] *Птахов Д.О., Степанова А.А.* P-стабильные полигоны // Алгебра и логика. 2017. Т.56. №4. С.486-505.

[32] *Птахов Д.О., Степанова А.А.* (P,s)- и (P,e)-стабильные полигоны // Международная конференция “Мальцевские чтения”. Новосибирск. 2015. С.198.

[33] *Птахов Д.О.* Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией // Международная конференция “Мальцевские чтения”. Новосибирск. 2015. С.196.

[34] *Птахов Д.О.* Полигоны над моноидами правых нулей с $(P,1)$-стабильной теорией // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. Владивосток. 2015. С.160.

[35] *Птахов Д.О.* Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов // Алгебра и логика. 2014. Т.53. №5. С.614-624.

[36] *Птахов Д.О.* Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. Владивосток. 2013. С.147.

[37] *Птахов Д.О.* Об аддитивности некоторых классов полигонов // Международная конференция “Мальцевские чтения”. Новосибирск. 2012. С.145.

[38] *Птахов Д.О.* Примитивная нормальность сильно плоских полигонов // Синтаксис и семантика логических систем. Иркутск. 2012. С.102–103.

Другие публикации работ автора

[39] *Птахов Д.О., Степанова А.А.* Решетки конгруэнций полигонов // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т.13. №1. С.107-115.

[40] *Птахов Д.О.* Решетки конгруэнций полигонов // Международная конференция “Мальцевские чтения”. Новосибирск. 2011. С.88.

[41] *Птахов Д.О.* Решетки конгруэнций несвязных полигонов // Вторая Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по теоретической и прикладной математике: материалы конференции. Владивосток. 2010. С.19.

[42] *Птахов Д.О.* Решетки слабых конгруэнций унарных алгебр // Материалы III российской школы-семинара Синтаксис и семантика логических систем. Иркутск. 2010. С.83-85.