ФГАОУ ВПО Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

На правах рукописи

ПОПОВИЧ Александр Леонидович

УДК 512.531

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕТОК РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ ПОЛУГРУПП

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Репницкий Владимир Брониславович

Екатеринбург 2018 г.

Оглавление

Введение

Каждой универсальной алгебре A можно сопоставить решетку $\operatorname{Con} A$ всех ее конгруэнций. Решетки конгруэнций являются важными представителями *производных решеток*, к числу которых относят решетки подмножеств, разбиений, подалгебр, многообразий, и т.д. Изучение решеток конгруэнций алгебр является одним из центральных направлений в универсальной алгебре.

В целом, исследования в этой области ведутся в следующих направлениях:

1) изучение теоретико-решеточных свойств решеток конгруэнций алгебр из заданного класса;

2) описание строения алгебр, решетки конгруэнций которых удовлетворяют заданным свойствам;

3) описание класса решеток, изоморфных решеткам конгруэнций алгебр из заданного класса.

В последнем случае говорят о *представлении* решеток решетками конгруэнций алгебр из заданного класса. Однако, термин "представление"в литературе имеет несколько смыслов, а потому нуждается в уточнении.

Под *представлением* решетки L решеткой конгруэнций алгебры из класса $\mathcal{A}$ мы будем понимать изоморфизм L на решетку всех конгруэнций некоторой алгебры A, принадлежащей классу $\mathcal{A}$. В самом общем смысле задача состоит в том, чтобы по заданным решетке L и классу алгебр $\mathcal{A}$ определить, существует ли представление L решеткой конгруэнций алгебры из класса $\mathcal{A}$. Если ответ положительный, мы будем говорить, что L *представима* решеткой конгруэнций алгебры из класса $\mathcal{A}$.

Диссертация посвящена исследованию представлений решеток решетками конгруэнций полугрупп. К настоящему времени в литературе известны достаточно серьезные результаты о представлении решеток решетками конгруэнций групп. В связи с этим возникает потребность в исследовании решеток конгруэнций полугрупп, далеких по своему строению от групп. В диссертации исследованы представления решеток решетками конгруэнций для класса полугрупп без идемпотентов и для класса полугрупп, в которых все конгруэнции рисовские. Также описаны все конечные дистрибутивные и модулярные решетки, которые могут быть представлены решетками конгруэнций нильполугрупп.

1° Краткий обзор предшествующих результатов

$1^\circ.1$ Представление решеток решетками конгруэнций различных алгебр

В 1948 году Биркгоф и Фринк в работе [8] показали, что решетка конгруэнций любой алгебры обязана быть алгебраической. В 1963 году Гретцер и Шмидт в статье [19] утвердительно ответили на стоявший долгое время вопрос об обратном утверждении: всякая алгебраическая решетка представима решеткой конгруэнций некоторой алгебры. С тех пор было получено несколько более коротких версий соответствующего доказательства (см, например, [31] или [40]). Однако у всех доказательств есть особенность: получаемые алгебры оказываются бесконечными и имеют бесконечное количество операций, даже если решетка, которую нужно представить, конечна.

При попытке сузить класс рассматриваемых алгебр до естественных и хорошо изученных классов или хотя бы ограничить число операций рассматриваемых алгебр, в подавляющем большинстве случаев возникают значительные осложнения. Так в работе [11] Фриз, Лэмп и Тейлор, рассматривая решетки конгруэнций алгебр с фиксированным числом операций, показали, что решетка подпространств линейного пространства счетной размерности над полем мощности $\Lambda \geqslant \aleph_1$ не представима решеткой конгруэнций никакой алгебры, у которой число операций меньше чем Λ. Позднее, основываясь на той же технике, Тейлор в [51] построил пример счетной алгебраической (немодулярной) решетки, которая не является решеткой конгруэнций никакой полугруппы.

Одним из наиболее естественных классов решеток, не содержащим контрпримеры из отмеченной выше работы [11], является класс дистрибутивных решеток. Гретцер и Шмидт поставили естественный вопрос (см [30]): *всякая ли дистрибутивная алгебраическая решетка представима решеткой конгруэнций алгебры с конечным числом операций?* До сих пор этот вопрос остается открытым.

Обзорам результатов о представлении решеток решетками конгруэнций универсальных алгебр посвящены работы [29] и [32].

При построении представления какого-либо класса решеток решетками конгруэнций алгебр из заданного класса существенно используются структурные особенности и закономерности строения алгебр этого класса. Обычно у алгебр фиксируется тип, часто рассматриваются алгебры, принадлежащие заданному многообразию. Наибольшее внимание уделяется естественным и хорошо изученным классам алгебр, так как помимо наличия развитой теории, присутствует внутренняя мотивация к решению таких проблем.

Большое внимание в литературе уделяется случаю решеток. Классическая теорема Фунаяма и Накаяма [14] утверждает, что решетка конгруэнций любой решетки дистрибутивна. Известен результат Дилуорса о том, что всякая конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке конгруэнций конечной решетки (см. [18]). Дилуорс выдвинул гипотезу о том, что всякая дистрибутивная алгебраическая решетка изоморфна решетке конгруэнций подходящей решетки. В работах Хуна [23] и [24] гипотеза была доказана для решеток мощности не превосходящей $\aleph_1$. В 2007 году Верунгом в [53] был получен отрицательный ответ на вопрос Дилуорса и построен контрпример мощности $\aleph_{\omega+1}$. Позднее Ружичкой [43] мощность контрпримера была сокращена до $\aleph_2$. Обзор современного состояния дел в этом направлении можно найти в книге [15].

Исследования в данном направлении проводились и в случае групп. В частности, Силкоком [47] было установлено, что всякая конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке конгруэнций конечной группы. Ружичкой, Тумой и Верунгом в [44] было получено представление решетками конгруэнций групп всех дистрибутивных алгебраических решеток с мощностью множества компактных элементов не более $\aleph_1$. Однако в общем случае вопрос о представлении дистрибутивных алгебраических решеток решетками конгруэнций групп был решен отрицательно в той же работе. Было доказано более сильное утверждение: существует дистрибутивная алгебраическая решетка мощности $\aleph_2$, которая не представима решеткой конгруэнций никакой алгебры, порождающей конгруэнц-перестановочное многообразие.

В литературе известно несколько сильных результатов для группоидов. Лэмпом в [28] было показано, что всякая алгебраическая решетка, в которой единица является компактным элементом, изоморфна решетке конгруэнций подходящего группоида. Также Шмидтом было установлено в [46], что всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой компактные элементы образуют подрешетку, изоморфна решетке конгруэнций некоторой решетки с нулем. Как было замечено Маккензи (см. [29]), из этого следует, что такая решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторого группоида.

Полугруппы же занимают промежуточное место между группами и группоидами. Они обладают хорошо развитой структурной теорией, а класс решеток, изоморфных решеткам конгруэнций полугрупп, значительно шире по сравнению с группами, например, в нем не выполняются никакие решеточные тождества. В целом, несомненный интерес представляет следующий вопрос, ответ на который до сих пор не известен (см. [28]): *всякая ли дистрибутивная алгебраическая решетка представима решеткой конгруэнций группоида или, более того, полугруппы?*

$1^\circ.2$ Решетки конгруэнций полугрупп

По тематике решеток конгруэнций полугрупп написано несколько десятков работ. Обзор основных результатов приведен в статьях [34], [35]. Одним из направлений исследований здесь является характеризация как дистрибутивных, так и модулярных решеток, которые являются решетками конгруэнций полугрупп из какого-либо известного класса. При этом не меньшее внимание уделяется и описанию таких полугрупп в рамках данного класса.

Заметим, что решетка конгруэнций произвольной группы G совпадает с решеткой конгруэнций G, рассматриваемой как полугруппа. Еще Дедекиндом было установлено, что решетки конгруэнций групп всегда модулярны. Не менее хорошо известен результат Оре, характеризующий абелевы группы с дистрибутивными решетками конгруэнций как локально циклические. Неабелевы группы с дистрибутивными решетками конгруэнций изучались Паздерски [38] и Маем [33]. В работе Ауингера [6] изучается случай строго инверсных полугрупп с дистрибутивными и модулярными решетками конгруэнций. Клиффордовы полугруппы, у которых все конгруэнции рисовские (что влечет дистрибутивность решетки конгруэнций), были описаны Жу [54]. Бонзини и Керубини [9] изучали случай инверсной ω-полугруппы. Регулярные полугруппы с условием минимальности для идемпотентов, обладающие дистрибутивной или модулярной решеткой конгруэнций, были описаны Джонсом [25]. Гамильтон в работе [21] изучал коммутативные полугруппы с сокращением.

Учитывая результаты работы Ружички, Тумы и Верунга [44], о которой шла речь выше, мы рассматриваем в данной диссертации *комбинаторные полугруппы*, то есть такие, у которых все подгруппы тривиальны или отсутствуют вовсе.

Среди таких полугрупп наиболее полно решетки конгруэнций полугрупп изучены у полурешеток. В работе [10] Дэна и Омка исследованы дистрибутивные решетки, которые могут быть решетками конгруэнций полурешеток. Это направление продолжено Гамильтоном в [20], который охарактеризовал все дистрибутивные решетки, являющиеся решетками конгруэнций полурешеток. Среди конечных дистрибутивных (и даже модулярных) решеток лишь булевы решетки могут быть изоморфны решеткам конгруэнций полурешеток. Отметим, что в работе Адаричевой [4] дана полная характеризация решеток, являющихся решетками конгруэнций конечных полурешеток.

Информации о решетках конгруэнций комбинаторных полугрупп отличных от полурешеток очень мало, несмотря на то, что среди таких полугрупп есть очень известные классы, например, класс нильпотентных полугрупп или класс нильполугрупп. Отметим в связи с этим результат [26] Джонса о том, что решетки конгруэнций нильполугрупп являются полумодулярными. К сожалению, дальнейших исследований в этом направлении не проводилось. В диссертации центральное внимание уделено классам полугрупп, имеющим тривиальное пересечение с классами групп или полурешеток.

2° Обзор диссертации

$2^\circ.1$ Цели работы и обзор полученных результатов

Напомним, что элемент c полной решетки L называется *компактным*, если из того, что $c \leqslant \bigvee X$ для $X \subseteq L$ следует, что $c \leqslant \bigvee X'$ для некоторого конечного $X' \subseteq X$. Полная решетка называется *алгебраической*, если всякий ее элемент является объединением компактных элементов. В частности, всякая конечная решетка является алгебраической, а любой ее элемент – компактным. Как уже было отмечено в предыдущем параграфе, решетка конгруэнций любой алгебры является алгебраической, поэтому в диссертации рассматриваются представления алгебраических решеток.

Одним из естественных классов комбинаторных полугрупп является класс полугрупп без идемпотентов. При этом решетки конгруэнций полугрупп без идемпотентов никем специально не исследовались. Поэтому возникает следующая проблема:

Проблема 1. *Какие дистрибутивные решетки представимы решетками конгруэнций полугрупп без идемпотентов?*

Для достаточно широкого класса решеток в диссертации было найдено соответствующее представление. Мы сформулируем результат в виде двух теорем.

Теорема I. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой компактные элементы образуют подрешетку с единицей, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

Теорема II. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой мощность множества компактных элементов не более чем счетна, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

Далее мы рассматриваем класс полугрупп, все конгруэнции которых являются рисовскими. Напомним, что если I – полугрупповой идеал в полугруппе S, то *рисовской конгруэнцией, соответствующей идеалу* I, называется конгруэнция $\Delta \cup (I \times I)$. Объединение и пересечение рисовских конгруэнций снова являются рисовскими конгруэнциями. Класс полугрупп, все конгруэнции в которых оказываются рисовскими, известен в литературе. Так, в работе [54] классифицированы циклические полугруппы, полурешетки и клиффордовы полугруппы с таким свойством. В этом классе полугрупп содержатся нетривиальные группы и полурешетки, а именно: простые группы и полугруппы с нулевым умножением. Их решетки конгруэнций не выходят за рамки класса булевых решеток. Мы получим представление для более широкого класса решеток.

Напомним, что ненулевой элемент a решетки L называется *вполне неразложимым*, если для любого $X \subseteq L$ равенство $a = \bigvee X$ влечет $a \in X$. Полная решетка L называется *пространственной* (*spatial*), если всякий ее элемент является объединением вполне неразложимых элементов.

Если в полугруппе все конгруэнции являются рисовскими, то решетка конгруэнций этой полугруппы оказывается изоморфной ее решетке идеалов. Решетки идеалов полугрупп, как известно (см. [5]), являются дистрибутивными, алгебраическими и пространственными. Таким образом, решетки конгруэнций таких полугрупп также не выходят за рамки этого класса. Поэтому мы вправе поставить следующий вопрос:

Проблема 2. *Какие дистрибутивные алгебраические пространственные решетки представимы решетками конгруэнций полугрупп, в которых все конгруэнции рисовские?*

В работе [5] Эш показал, что всякая дистрибутивная пространственная решетка представима решеткой идеалов некоторой полугруппы. В доказательстве Эша искомая полугруппа всегда получается инверсной и в ней не все конгруэнции являются рисовскими. В диссертации был получен следующий результат, который существенно дополняет теорему Эша:

Теорема III. *Всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы, в которой все конгруэнции рисовские.*

В доказательстве этой теоремы полугруппа строится в результате бесконечной серии особых расширений. Получаемая полугруппа всегда некоммутативна. Более того, теорема

Тамуры-Нордала [50] утверждает, что если решетка конгруэнций коммутативной полугруппы конечна, то и сама полугруппа конечна. Поэтому на основе любой техники, использующей построение бесконечной серии расширений, невозможно построить представление даже конечных дистрибутивных решеток решетками конгруэнций коммутативных полугрупп.

В диссертации позже будет также показано, что класс дистрибутивных решеток, представимых решетками конгруэнций нильполугрупп, сильно ограничен. Однако если рассматривать представления решеток решетками конгруэнций не полугрупп, а произвольных группоидов, то требования коммутативности и ниль никакого влияния не оказывают, как показывает следующий результат.

Напомним, что *2-нильгруппоидом* называется группоид с нулем, в котором выполнено тождество $x^2 = 0$.

Теорема IV. *Всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторого коммутативного 2-нильгруппоида, в котором все конгруэнции рисовские.*

Класс нильполугрупп также является естественным классом комбинаторных полугрупп, не имеющим пересечения с классом решеток. Исследований о представлении решеток решетками конгруэнций нильполугрупп не проводилось. Поэтому и здесь мы вправе задать следующий вопрос:

Проблема 3. *Какие решетки представимы решетками конгруэнций нильполугрупп?*

В случае дистрибутивных решеток получена следующая теорема.

Теорема V. *Если решетка конгруэнций нильполугруппы дистрибутивна, то она является цепью.*

Полугруппы, решетки конгруэнций которых образуют цепи, изучались Тамурой [49] и Шайном [45]. В частности известно, что решетка конгруэнций конечной нильполугруппы является цепью тогда и только тогда, когда полугруппа циклическая.

Определим *отношение делимости* $\leqslant$ в полугруппе S следующим образом: для любых $x, y \in S$ положим $x \leqslant y$ если существуют $s, t \in S^1$ такие, что $x = syt$. В дальнейшем это отношение сыграет важнейшую роль, поэтому мы закрепим его за символом $\leqslant$ в отношении элементов полугрупп и не будем использовать этот символ по отношению к элементам полугрупп в другом смысле. Хорошо известно, что в любой нильполугруппе отношение делимости является частичным порядком. Следующая теорема дает классификацию всех конечных нильполугрупп с модулярными решетками конгруэнций.

Теорема VI. *Пусть S – конечная нильполугруппа. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{Con}\, S$ *модулярна, но не дистрибутивна;*

2) $(S, \leqslant)$ *имеет ширину 2;*

3) $(S, \leqslant)$ *порождается двумя элементами* $a, b \in S$ *и ч.у.м.* $\{a^2, ab, ba, b^2\}$ *имеет ширину 2.*

4) S *изоморфна или антиизоморфна одной из полугрупп в таблице 1 (см стр. 73–75).*

Отметим, что в работе [58] автором совместно с П. Джонсом доказано, что эквивалентность пунктов 1) и 2) выполняется и в случае бесконечных нильполугрупп.

Важным частным случаем нильполугрупп является класс нильпотентных полугрупп. Напомним, что полугруппа с нулем называется нильпотентной, если существует такое n, что произведение любых n элементов полугруппы равно нулю. Общеизвестно, что всякая конечная нильполугруппа нильпотентна, в частности таковы все полугруппы в таблице 1. Отмеченное выше обобщение теоремы VI в работе [58] позволяет сделать важное следствие для класса нильпотентных полугрупп.

Предложение I. *Всякая нильпотентная полугруппа с модулярной решеткой конгруэнций конечна.*

Также была получена следующая теорема, которая накладывает ограничения на решетки конгруэнций нильполугрупп в общем случае и в частности показывает, что не все цепи представимы решетками конгруэнций нильполугрупп.

Теорема VII. *Пусть S – нильполугруппа.*

1) $\operatorname{Con} S$ *не может иметь ширину 2.*

2) $\operatorname{Con} S$ *не может содержать в качестве фильтра цепи, двойственной цепи натуральных чисел.*

2°.2 Структура работы

Диссертация состоит, помимо введения, из трех глав, заключения и списка литературы. Все утверждения во введении нумеруются римскими цифрами и имеют единую нумерацию. Главы делятся на параграфы, параграфы имеют двухиндексную нумерацию (первый индекс обозначает номер главы). Предложения, леммы, следствия, замечания в главах 1–3 имеют трехиндексную нумерацию, где первый индекс означает номер главы, а второй — номер параграфа. Наконец, основные результаты диссертации оформлены в виде теорем, имеющих нумерацию римскими цифрами.

В первой главе диссертации рассмотрены полугруппы без идемпотентов и доказаны теоремы I, II. Вторая глава посвящена полугруппам, все конгруэнции которых рисовские, доказаны теоремы III и IV. В третьей главе рассматриваются нильполугруппы и доказаны теоремы V–VII.

2°.3 Апробация и публикации

Результаты диссертации были представлены на 3-й международной конференции Novi Sad Algebraic Conference (Нови Сад, Сербия, 2009), на международной конференции "Мальцевские чтения"(Новосибирск, 2009), на всероссийской молодежной школе-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений"(Екатеринбург, 2011), на международной конференции "Universal Algebra and Lattice Theory"(Сегед, Венгрия, 2012), а также на международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения"(Казань, 2014). Также был сделан ряд докладов на екатеринбургском семинаре "Алгебраические системы".

По теме диссертации опубликовано 4 статьи [55]– [59], из них 4 из списка ВАК. Работы [55] и [58] написаны в соавторстве. В работе [55] соавтору В.Б. Репницкому принадлежит постановка задачи и идея использования функции расстояния, диссертант выполнил все технические построения и расчеты. В работе [58] диссертанту принадлежит постановка задачи и ее решение, соавтор П. Джонс существенно упростил и обобщил доказательство. При этом были сокращены важные вспомогательные конструкции, имеющие самостоятельное значение для диссертации, поэтому в диссертации приводится первоначальное доказательство.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Владимиру Брониславовичу Репницкому за неоценимую помощь и руководство при подготовке статей к публикации и написании диссертации, а также Льву Наумовичу Шеврину и кафедре алгебры и дискретной математики УрФУ за теплую и дружескую атмосферу.

Глава 1

Решетки конгруэнций полугрупп без идемпотентов

Основным результатом данной главы является доказательство теорем I и II. Напомним их формулировку:

Теорема I. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой компактные элементы образуют подрешетку с единицей, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

Теорема II. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой мощность множества компактных элементов не более чем счетна, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

Центральную роль при доказательстве играет понятие функции расстояния – специального отображения, которое каждой паре элементов полугруппы S ставит в соответствие элемент верхней полурешетки с нулем $\mathcal{P}$. В параграфе 1 вводится это понятие, а также устанавливается связь между функциями расстояния особого вида и решеткой конгруэнций полугруппы S. Это дает ключевую идею доказательства. Параграфы 2 и 3 посвящены техническим деталям. Наконец, в параграфе 4, опираясь на результаты трех первых параграфов, мы докажем требуемые теоремы.

Для всякой алгебраической решетки L множество ее компактных элементов мы обозначим через $\operatorname{Comp} L$. Известно, что множество $\operatorname{Comp} L$ замкнуто относительно конечных объединений, а также содержит ноль решетки L. Частично упорядоченные множества, в которых существуют верхние грани для любых двух элементов, а также есть наименьший элемент, мы будем называть $(\vee, 0)$-полурешетками.

Пусть $\mathcal{P}$ – $(\vee, 0)$-полурешетка. *Идеалом* в $\mathcal{P}$ будем называть непустое подмножество I со свойствами:

1) если $x, y \in \mathcal{P}$, $x \in I$ и $y \leqslant x$, то $y \in I$;

2) если $x, y \in I$, то $x \vee y \in I$.

Множество всех идеалов $(\vee, 0)$-полурешетки $\mathcal{P}$ образует алгебраическую решетку, которую мы будем обозначать $\mathrm{J}(\mathcal{P})$. Хорошо известна следующая теорема (см., например, [16]): *полная решетка L является алгебраической тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке* $\mathrm{J}(\operatorname{Comp} L)$.

Верхняя полурешетка $\mathcal{P}$ называется *дистрибутивной*, если неравенство $a \leqslant b_1 \vee b_2$ $(a, b_1, b_2 \in \mathcal{P})$ влечет за собой существование элементов $a_1, a_2 \in \mathcal{P}$ таких, что $a_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant b_2$ и $a = a_1 \vee a_2$. Другой общеизвестный результат (см. [16], лемма II.5.1) утверждает, что *верхняя полурешетка $\mathcal{P}$ является дистрибутивной тогда и только тогда, когда решетка $\mathrm{J}(\mathcal{P})$ является дистрибутивной.*

Мы используем общепринятые обозначения $\Theta(x, y)$ для наименьшей конгруэнции, содержащей элементы x и y в одном классе, и S^1 для полугруппы S с присоединенной единицей.

1° Функция расстояния

В работе [27] Йонссоном была впервые применена конструкция функции расстояния, с помощью которой он передоказал известную теорему Уитмена о вложении решеток в решетки разбиений множеств. Позднее это понятие также использовалась Пудлаком в [40] для упрощения доказательства теоремы Гретцера-Шмидта. В работе [3] Репницкий развил идею Йонссона для построения представлений решеток решетками подгрупп свободных бернсайдовых групп. Наконец, в работе Репницкого и Тумы [41] и обзоре Тумы [52] было предложено рассмотреть более сложную конструкцию для построения представлений решетками конгруэнций алгебр, которая также была названа функцией расстояния. Это отображение может быть определено в любой универсальной алгебре, однако мы сконцентрируемся на случае полугруппы.

Пусть S – полугруппа и P – $(\vee,0)$-полурешетка. Функцию $\delta : S\times S \to \mathcal{P}$ будем называть *функцией расстояния*, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\delta(x,x) = 0$ для всех $x \in S$;

2) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ для всех $x, y \in S$;

3) $\delta(x,y) \leqslant \delta(x,z) \vee \delta(z,y)$ для всех $x, y, z \in S$;

4) $\delta(xs,yt) \leqslant \delta(x,y) \vee \delta(s,t)$ для любых $x, y, s, t \in S$.

Определим отображение $\delta^* : \mathrm{J}(P) \to \mathrm{Con}\, S$, положив

$$\delta^*(I) = \{(x,y) \in S^2 \mid \delta(x,y) \in I\} \text{ для каждого } I \in \mathrm{J}(\mathcal{P}).$$

Если идеал I порождается одним элементом $a \in \mathcal{P}$, то мы будем вместо $\delta^*(I)$ писать $\delta^*(a)$. Следующее предложение есть частный случай Теоремы 3.7 статьи [41] (см. также [52], Предложение 2.3). Мы приведем независимое доказательство.

Теорема 1.1. *Пусть S – полугруппа и P – $(\vee,0)$-полурешетка. Изоморфизм решетки $\mathrm{J}(P)$ на $\mathrm{Con}\, S$ существует тогда и только тогда, когда существует функция расстояния $\delta : S \times S \to P$ такая, что*

0) если $\delta(x,y) = 0$, то $x = y$;

1) для любых $a, b \in P$ и $x, y \in S$, если $\delta(x,y) \leqslant a \vee b$, то $(x,y) \in \delta^*(a) \vee \delta^*(b)$;

2) Im_δ порождает P;

3) для любых $(x,y),(z,t) \in S \times S$, если $\delta(x,y) \leqslant \delta(z,t)$, то $(x,y) \in \Theta(z,t)$.

Доказательство. Если $\phi : \mathrm{Con}\, S \to \mathrm{J}(P)$ есть изоморфизм, то функция $\delta(x,y) = \phi(\Theta(x,y))$ будет, как несложно видеть, функцией расстояния, удовлетворяющей всем условиям теоремы. Далее мы покажем, что если функция расстояния δ удовлетворяет условиям 0)–3), то отображение δ^* дает искомый изоморфизм.

Покажем, что δ^* является вложением. Пусть I, J – два различных идеала P. Предположим, без ограничения общности, что $I \nsubseteq J$. Выберем $a \in I \backslash J$. В силу условия 2) существуют пары $(x_k, y_k) \in S \times S$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ такие, что $\bigvee_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k) = a$. Тогда существует j такое, что $(x_j, y_j) \in \delta^*(I) \backslash \delta^*(J)$, что означает $\delta^*(I) \neq \delta^*(J)$.

Теперь покажем, что δ^* сюръективно. Пусть $\Theta \in \operatorname{Con} S$. Рассмотрим множество идеалов $\{J \in \mathrm{J}(P) \mid \delta^*(J) \subseteq \Theta\}$, оно непусто в силу условия 2). В силу леммы Цорна в нем существует максимальный по включению идеал I. Предположим, что $\delta^*(I) \neq \Theta$. Тогда существует такая пара $(x, y) \in S \times S$, что $(x, y) \in \Theta$ и $\delta(x, y) \notin I$. Рассмотрим идеал I', порожденный элементами из I и элементом $\delta(x, y)$. Так как $I \subset I'$, из максимальности I следует, что $\delta^*(I') \nsubseteq \Theta$. Поэтому существует такая пара $(z, t) \in S \times S$, что $(z, t) \in \delta^*(I')$ и $(z, t) \notin \Theta$. Тогда $\delta(z, t) \in I'$ и, следовательно, $\delta(z, t) \leqslant c \vee \delta(x, y)$ для некоторого $c \in I$. В силу условия 1) $(z, t) \in \delta^*(c) \vee \delta^*(\delta(x, y))$. Это означает, что существуют $z = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = t$ в S такие, что $\delta(z_i, z_{i+1}) \leqslant c$, либо $\delta(z_i, z_{i+1}) \leqslant \delta(x, y)$ при всяком $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Поскольку $(z, t) \notin \Theta$, имеем $(z_j, z_{j+1}) \notin \Theta$ при некотором $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Однако, если $\delta(z_j, z_{j+1}) \leqslant c$, то $(z_j, z_{j+1}) \in \delta^*(c) \subseteq \delta^*(I) \subseteq \Theta$. Но и при $\delta(z_j, z_{j+1}) \leqslant \delta(x, y)$ в силу 3) выполняется $(z_j, z_{j+1}) \in \Theta(x, y) \subseteq \Theta$, поэтому в любом случае $(z_j, z_{j+1}) \in \Theta$, что противоречит выбору j.

Таким образом, δ^* – биекция. При этом из определения $\delta^*(I)$ следует изотонность отображения δ^*. Поэтому δ^* является решеточным изоморфизмом. □

Функцию расстояния, удовлетворяющую условию 0) предложения 1.1, назовем *невырожденной.*

Из доказанного утверждения следует, что для доказательства теорем I и II нам достаточно построить полугруппу без идемпотентов S и невырожденную функцию расстояния $\delta : S^2 \to \operatorname{Comp} L$, для которых выполнены условия 1)-3) теоремы 1.1. При этом условие не содержать идемпотентов мы заменим на другое условие:

$$\text{для любого } x \in S \text{ и } y \in S^1 \text{ должно выполняться } \delta(xyx, x) > 0. \qquad (*)$$

Очевидно, что если $y = 1$, то из условия $(*)$ следует, что x и x^2 – разные элементы. Поэтому это более сильное условие, чем отсутствие идемпотентов.

Следующие три параграфа посвящены этому построению.

2° Основное предложение

Следующее предложение является ключевым в данной главе. Его доказательству полностью посвящены этот и следующий параграфы.

Предложение 1.2.1. *Пусть S – полугруппа, $\delta : S\times S \to \mathcal{P}$ – невырожденная функция расстояния, удовлетворяющая условию $(*)$, и $(a,b),(c,d) \in S\times S$ такие, что $\delta(a,b) \leqslant \delta(c,d)$. Тогда существуют полугруппа без идемпотентов $\bar{S}$ и невырожденная функция расстояния $\bar{\delta} : \bar{S}\times\bar{S} \to \mathcal{P}$, удовлетворяющая $(*)$, такие, что существует вложение $\alpha : S \to \bar{S}$, $\alpha(\delta) = \bar{\delta}|_{\alpha(S)}$ и $(\alpha(a),\alpha(b)) \in \Theta(\alpha(c),\alpha(d))$ в $\bar{S}$.*

Рассмотрим свободную полугруппу $F(u,\bar{u},v,\bar{v},w,\bar{w})$ со свободными порождающими $u,\bar{u},v,\bar{v},w,\bar{w}$ и свободное произведение $\tilde{S} = S * F(u,\bar{u},v,\bar{v},w,\bar{w})$.

По заданным парам $(a,b),(c,d) \in S\times S$, где $\delta(a,b) \leqslant \delta(c,d)$, построим граф $G = (\tilde{S}, E)$ с помеченными ребрами следующим образом. Полугруппа $\tilde{S}$ будет множеством вершин графа. Ребра из E удобно представлять в виде троек вида (p,e,q), где $e \in P$ – метка ребра, соединяющего вершины p и q из $\tilde{S}$. При этом две вершины могут соединяться несколькими ребрами с различными метками. Положим $(p,e,q) \in E$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

0) $p = q$ и $e = 0$;

1) $p = sxt$, $q = syt$ и $e = \delta(x,y)$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,y \in S$;

2) $p = sux\bar{u}t$, $q = sat$ и $e = \delta(x,c)$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x \in S$ (или симметрично);

3) $p = swx\bar{w}t$, $q = sbt$ и $e = \delta(x,d)$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x \in S$ (или симметрично);

4) Либо $p = sux\bar{u}t$, $q = svy\bar{v}t$, либо $p = svx\bar{v}t$, $q = swy\bar{w}t$, и $e = \delta(x,d) \vee \delta(y,c)$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $(x,y) \in S\times S$ (или симметрично).

Если для тройки $(p,e,q) \in E$ выполнено условие j $(0 \leqslant j \leqslant 4)$, то мы будем говорить о *типе* j соответствующего ребра графа.

Мы также будем записывать ребро $(p,e,q) \in E$ типа j в виде $p \xleftrightarrow[j]{e} q$. Впрочем, мы будем опускать символы над или под стрелкой в тех случаях, когда они для нас не важны. Два ребра одного типа будем называть *подобными*. Число всех вхождений букв

$u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w}$ в записи слова $r \in \tilde{S}$ будем называть *весом* r и обозначать $w(p)$; в частности, $w(p) = 0$ тогда и только тогда, когда $p \in S$.

Лемма 1.2.1. *Пусть* $p \xleftrightarrow{e_1} q \xleftrightarrow{e_2} r$ *и* $p = sg't$, $q = sh't = s'g''t'$, $r = s'h''t'$, *где* $(g', h'), (g'', h'') \in \{(x, y),\ (ux\bar{u}, a),\ (a, ux\bar{u}),\ (wx\bar{w}, b),\ (b, wx\bar{w}),\ (ux\bar{u}, vy\bar{v}),\ (vy\bar{v}, ux\bar{u}),\ (vx\bar{v}, wy\bar{w}),\ (wy\bar{w}, vx\bar{v})\}$ *для некоторых* $x, y \in S$, $s, t, s', t' \in \tilde{S}^1$ *и метки* e_1, e_2 *определены в соответствии с правилами 1)–4). Пусть подслова* h' *и* g'' *в записи слова* q *не пересекаются. Тогда существует слово* $q' \in \tilde{S}$ *такое, что* $p \xleftrightarrow{e_2} q' \xleftrightarrow{e_1} r$ *, причем* $p \xleftrightarrow{e_2} q'$ *подобно* $q \xleftrightarrow{e_2} r$ *, и* $q' \xleftrightarrow{e_1} r$ *подобно* $p \xleftrightarrow{e_1} q$ *. Кроме того,* $w(q') \leqslant w(q)$ *тогда и только тогда, когда* $w(g') + w(h'') \leqslant w(h') + w(g'')$.

Доказательство. Поскольку слова h' и g'' в записи слова q не пересекаются, g'' является либо подсловом s, либо подсловом t. Предположим без ограничения общности, что g'' является подсловом t. Тогда для некоторого $m \in \tilde{S}^1$ должно выполняться $p = sg'mg''t'$, $q = sh'mg''t'$ и $r = sh'mh''t'$. Легко видеть, что слово $q' = sg'mh''t'$ удовлетворяет всем требованиям леммы. $\square$

Через $W(p, q)$ обозначим множество всех путей от вершины p до вершины q в графе $G = (\tilde{S}, E)$. Если Q – путь из p в q вида $p = p_0 \xleftrightarrow{e_1} p_1 \xleftrightarrow{e_2} p_2 \xleftrightarrow{e_3} \cdots \xleftrightarrow{e_n} p_n = q$, то положим $e(Q) = e_1 \vee \cdots \vee e_n$.

Лемма 1.2.2. *Для любых вершин* p *и* q *в графе* G*, существет конечное множество* $SW(p, q) \subseteq W(p, q)$ *такое, что для любого* $Q \in W(p, q)$ *существует* $R \in SW(p, q)$ *с условием* $e(R) \leqslant e(Q)$.

Разобьем ее доказательство на леммы 1.2.3 и 1.2.4. Для этого нам потребуются дополнительные конструкции.

Два пути из $W(p, q)$ назовем *k-смежными*, если один получен из другого заменой участка $p_{i-1} \xleftrightarrow{e_1} p_i \xleftrightarrow{e_2} p_{i+1}$ на участок $p_{i-1} \xleftrightarrow{e_2} p'_i \xleftrightarrow{e_1} p_{i+1}$, где $p_{i-1} = sg't$, $p_i = sh't = s'g''t'$, $p_{i+1} = s'h''t'$, причем $(g', h'), (g'', h'') \in \{(x, y),\ (ux\bar{u}, a),\ (a, ux\bar{u}),\ (wx\bar{w}, b),\ (b, wx\bar{w}),\ (ux\bar{u}, vy\bar{v}),\ (vy\bar{v}, ux\bar{u}),\ (vx\bar{v}, wy\bar{w}),\ (wy\bar{w}, vx\bar{v})\}$ для некоторых $x, y \in S$, $s, t, s', t' \in \tilde{S}^1$, подслова h' и g'' в записи слова q не пересекаются и $i \neq k$. Два пути R и R' назовем k-

эквивалентными, если существует последовательность путей $R = Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n = R'$ такая, что пути Q_i и Q_{i+1} k-смежны для всякого $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Пусть в пути R есть подпуть $p_{i-1} \underset{j_1}{\longleftrightarrow} p_i \underset{j}{\longleftrightarrow} p_{i+1} \underset{j_2}{\longleftrightarrow} p_{i+2}$. Будем говорить, что ребро $p_i \longleftrightarrow p_{i+1}$ типа j *можно сократить*, если существует путь R', отличающийся от R лишь тем, что в нем подпуть $p_{i-1} \underset{j_1}{\longleftrightarrow} p_i \underset{j}{\longleftrightarrow} p_{i+1} \underset{j_2}{\longleftrightarrow} p_{i+2}$ заменен либо на $p_{i-1} \underset{j_1}{\longleftrightarrow} p_{i+1} \underset{j_2}{\longleftrightarrow} p_{i+2}$, либо на $p_{i-1} \underset{j_1}{\longleftrightarrow} p_i \underset{j_2}{\longleftrightarrow} p_{i+2}$.

Через $w_v(p)$ будем обозначать в дальнейшем число вхождений символа v в слово p.

Рассмотрим множество $N(p,q)$ всех путей R из $W(p,q)$, удовлетворяющих следующим условиям:

SW1. Существует индекс $k(R) \in \{0, ..., n\}$ такой, что $w(p_i) \geqslant w(p_{i+1})$, $w_v(p_i) \geqslant w_v(p_{i+1})$ при $i < k(P)$ и $w(p_i) \leqslant w(p_{i+1})$, $w_v(p_i) \leqslant w_v(p_{i+1})$ при $i \geqslant k(P)$.

SW2. Если для некоторого i выполняется $p_i = svy\bar{v}t$, $p_{i+1} = sux\bar{u}t$ и $p_{i+2} = sat$ $(s,t \in \tilde{S}^1, x, y \in S)$, то $x = c$.

Если для некоторого i выполняется $p_i = svy\bar{v}t$, $p_{i+1} = swx\bar{w}t$ и $p_{i+2} = sat$ $(s,t \in \tilde{S}^1, x, y \in S)$, то $x = d$.

Если для некоторого i выполняется $p_i = sat$, $p_{i+1} = sux\bar{u}t$ и $p_{i+2} = svy\bar{v}t$ $(s,t \in \tilde{S}^1, x, y \in S)$, то $x = c$.

Если для некоторого i выполняется $p_i = sat$, $p_{i+1} = swx\bar{w}t$ и $p_{i+2} = svy\bar{v}t$ $(s,t \in \tilde{S}^1, x, y \in S)$, то $x = d$.

SW3. Нельзя сократить ни одного ребра типа 1.

SW4. Нет подпутей вида $svx\bar{v}t \longleftrightarrow suy\bar{u}t \longleftrightarrow svx\bar{v}t$ и $svx\bar{v}t \longleftrightarrow swy\bar{w}t \longleftrightarrow svx\bar{v}t$ для любых $s,t \in \tilde{S}^1, x, y, z \in S$.

Теперь определим $SW(p,q)$ как множество путей R из $N(p,q)$ таких, что всякий путь, $k(R)$-эквивалентный R, лежит в $SW(p,q)$. Покажем, что $SW(p,q)$ – искомое множество, о котором говорится в лемме 1.2.2.

Лемма 1.2.3. *Множество $SW(p,q)$ конечно.*

Доказательство. Из условия SW1 следует, что в любом пути из $SW(p,q)$ не более $w(p) + w(q)$ ребер типа 2 и 3, а ребер типа 4 – не более $w_v(p) + w_v(q)$. Поскольку подпуть вида $sxt \longleftrightarrow syt \longleftrightarrow szt$ в силу условия SW3 встречаться не может, ребер типа 1 в пути не более $w_S(p)(w(p)+w(q)+w_v(p)+w_v(q)+1)$, где $w_S(p)$ – минимальное число вхождений элементов из S в запись слова p. Таким образом, любой путь из $SW(p,q)$ состоит не более чем из $(w_S(p)+1)(w(p)+w(q)+w_v(p)+w_v(q))+w_S(p)$ вершин.

В $SW(p,q)$ для фиксированного набора $\{j_1,\ldots,j_{n-1}\}$ рассмотрим множество путей, удовлетворяющих следующей диаграмме:

$$p = s_1g_1t_1 \underset{j_1}{\longleftrightarrow} s_1h_1t_1 = s_2g_2t_2 \underset{j_2}{\longleftrightarrow} s_2h_2t_2 \underset{j_3}{\longleftrightarrow} \ldots \underset{j_{n-1}}{\longleftrightarrow} s_nh_nt_n = q\ ,$$

где $s_i, t_i \in \tilde{S}^1$ и $(g_i,h_i) \in \{(x,y),\ (ux\bar{u},a),\ (a,ux\bar{u}),\ (wx\bar{w},b),\ (b,wx\bar{w}),\ (ux\bar{u},vy\bar{v}),\ (vy\bar{v},ux\bar{u}),$ $(vx\bar{v},wy\bar{w}),\ (wy\bar{w},vx\bar{v})\}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажем, что это множество состоит из одного пути, т.е. существует только одно ребро каждого типа. Это будет доказывать лемму, так как число вершин в каждом пути ограничено, а число подслов вида x, $ux\bar{u}$, $wx\bar{w}$ и $vx\bar{v}$ $(x \in S)$ в каждом p_i конечно.

Пусть $p_i = sgt$ и $p_{i+1} = sht$, где $(g,h) \in \{(x,y),\ (ux\bar{u},a),\ (a,ux\bar{u}),\ (wx\bar{w},b),\ (b,wx\bar{w}),$ $(ux\bar{u},vy\bar{v}),\ (vy\bar{v},ux\bar{u}),\ (vx\bar{v},wy\bar{w}),\ (wy\bar{w},vx\bar{v})\}$ для некоторых $x,y \in S$ и $s,t \in \tilde{S}^1$. Поскольку мы всегда можем перейти к k-эквивалентному пути, который тоже принадлежит $SW(p,q)$, достаточно рассмотреть случаи, когда либо $p_{i+2} = sft$ для $f \in \{x,\ ux\bar{u},\ wx\bar{w},$ $vx\bar{v},\ uux\bar{u}\bar{u},\ wwx\bar{w}\bar{w},\ uwx\bar{w}\bar{u},\ wux\bar{u}\bar{w},\ vux\bar{u}\bar{v},\ vwx\bar{w}\bar{v}\}$, либо $p_{i+1} = q$. При этом мы вновь учитываем, что возможность того, что $p_i = sux\bar{u}t$ и $p_{i+1} = sat$, двойственна возможности $p_i = swx\bar{w}t$ и $p_{i+1} = sbt$ (или симметрично). Поэтому будем рассматривать только первую возможность в каждой паре.

Случай 1.1: $p_i = sxt$, $p_{i+1} = syt$, $p_{i+2} = szt$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,y,z \in S$.

Случай 1.2: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,y \in S$.

Случай 1.3: $p_i = sxt$, $p_{i+1} = sat$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,z \in S$.

Случай 1.4: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,y,z \in S$.

Случай 1.5: $p_i = svx\bar{v}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,y,z \in S$.

Случай 2: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = sat$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x \in S$.

Случай 3.1: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $y,z \in S$.

Случай 3.2: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $y \in S$.

Случай 3.3: $p_i = sat$, $p_{i+1} = sua\bar{u}t$, $p_{i+2} = suuz\bar{u}\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $z \in S$.

Случай 3.4: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y, z \in S$.

Случай 4.1: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 4.2: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = sva\bar{v}t$, $p_{i+2} = svuz\bar{u}\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, z \in S$.

Случай 4.3: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 4.4: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = swz\bar{w}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 5.1: $p_i = svx\bar{v}t$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 5.2: $p_i = svx\bar{v}t$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$.

Случай 5.3: $p_i = svx\bar{v}t$, $p_{i+1} = sua\bar{u}t$, $p_{i+2} = suuz\bar{u}\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, z \in S$.

Случай 5.4: $p_i = svx\bar{v}t$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 6: $p_{i+1} = q$.

В случаях 1.3, 2, 3.3, 4.2, 5.3 и 6 переход от p_i к p_{i+1} возможно осуществить только одним способом. В случаях 3.4 и 5.2 должно выполняться условие SW2, что также приводит к единственному способу перехода. Остальные случаи приводят к противоречию: случаи 3.2, 4.3, 4.4 противоречат условию SW1, случаи 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 3.1, 4.1, 5.1 – условию SW3, а случай 5.4 – условию SW4. Лемма доказана. □

Лемма 1.2.4. *Для любого пути $Q \in W(p, q)$ существует путь $R \in SW(p, q)$ такой, что $e(R) \leqslant e(Q)$.*

Доказательство. Пусть путь $Q = \{p = p_1, p_2, \ldots, p_n = q\}$ принадлежит $W(p, q)$. Построим путь $R \in SW(p, q)$ такой, что $e(Q) \geqslant e(R)$.

Для произвольного пути $V \in W(p, q)$ через $k(V)$ будем обозначать минимальный индекс k, для которого выполняются условия $w(p_j) \leqslant w(p_{j+1})$ и $w_v(p_j) \leqslant w_v(p_{j+1})$ при $j \geqslant k$ (здесь $k(V) = n$ в случае, если эти условия не выполняются одновременно ни для какого $j \leqslant n - 1$). Через $i(V)$ будем обозначать максимальный индекс i с тем свойством, что $i < k(V)$, $w(p_i) \leqslant w(p_{i+1})$ и $w_v(p_i) \leqslant w_v(p_{i+1})$ (здесь $i(V) = 0$ в случае, если эти условия не выполняются одновременно ни для какого $i < k(V)$). Нетрудно видеть, что в случае $i(V) = 0$ путь V удовлетворяет условию SW1.

В пути Q рассмотрим $k = k(Q)$, $i = i(Q)$ и ребро $p_i \longleftrightarrow p_{i+1}$. Для ясности, пусть $p_i = sgt$ и $p_{i+1} = sht$, где $(g, h) \in \{(x, y), (ux\bar{u}, a), (a, ux\bar{u}), (wx\bar{w}, b), (b, wx\bar{w}), (ux\bar{u}, vy\bar{v}), (vy\bar{v}, ux\bar{u}), (vx\bar{v}, wy\bar{w}), (wy\bar{w}, vx\bar{v})\}$. Благодаря лемме 1.2.1 можно считать, что либо $i + 1 = k$, либо $p_{i+2} = sft$, где $f \in \{x, ux\bar{u}, wx\bar{w}, vx\bar{v}, uux\bar{u}\bar{u}, wwx\bar{w}\bar{w}, uwx\bar{w}\bar{u}, wux\bar{u}\bar{w}, vux\bar{u}\bar{v}, vwx\bar{w}\bar{v}\}$. Первый вариант невозможен в силу минимальности k. Поэтому, пользуясь максимальностью i, можно считать, что $w(p_{i+1}) \geqslant w(p_{i+2})$ и $w_v(p_{i+1}) \geqslant w_v(p_{i+2})$. Далее, вновь учитывая двойственность, достаточно рассмотреть следующие случаи.

Случай 1: $p_i = sxt$, $p_{i+1} = syt$, $p_{i+2} = szt$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 2: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$.

Случай 3: $p_i = svx\bar{v}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 4: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y, z \in S$.

Случай 5: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y \in S$.

Случай 6: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 7: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Случай 8: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = swz\bar{w}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Разберем каждый из них подробнее.

Случай 1: $p_i = sxt$, $p_{i+1} = syt$, $p_{i+2} = szt$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$. Построим новый путь Q', который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2}. Поскольку $\delta(x, y) \vee \delta(y, z) \geqslant \delta(x, z)$, имеем $e(Q) \geqslant e(Q')$. При этом $i(Q') < i(Q)$.

Случай 2: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$. Построим новый путь Q', который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2}. Поскольку $\delta(x, y) \vee \delta(y, c) \geqslant \delta(x, c)$, имеем $e(Q) \geqslant e(Q')$. При этом $i(Q') < i(Q)$.

Случай 3: $p_i = svx\bar{v}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$. Построим новый путь Q', который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2}. Поскольку $\delta(x, y) \vee \delta(y,) \vee \delta(z, d) \geqslant \delta(x, c) \vee \delta(z, d)$, имеем $e(Q) \geqslant e(Q')$. При этом $i(Q') < i(Q)$.

Случай 4: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y, z \in S$.

Построим новый путь Q', который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2}. Поскольку $\delta(y,c) \vee \delta(y,z) \geqslant \delta(z,c)$, имеем $e(Q) \geqslant e(Q')$. При этом длина пути Q' меньше длины пути Q.

Случай 5: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $y \in S$. Построим новый путь Q', который повторяет Q с той лишь разницей, что в нем нет вершин p_{i+1} и p_{i+2}. Очевидно, что $e(Q) \geqslant e(Q')$. При этом $i(Q') < i(Q)$.

Случай 6: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,y,z \in S$. Построим новый путь Q', который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2}. Поскольку $\delta(x,d) \vee \delta(y,) \vee \delta(y,z) \geqslant \delta(x,d) \vee \delta(z,c)$, имеем $e(Q) \geqslant e(Q')$. При этом длина пути Q' меньше длины пути Q.

Случай 7: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,y,z \in S$. Построим новый путь Q', который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2} при помощи правила 1. Поскольку $\delta(x,d) \vee \delta(y,) \vee \delta(y,) \vee \delta(z,d) \geqslant \delta(x,z)$, имеем $e(Q) \geqslant e(Q')$. При этом длина пути Q' меньше длины пути Q.

Случай 8: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = swz\bar{w}t$ для некоторых $s,t \in \tilde{S}^1$ и $x,y,z \in S$. Вес этих двух ребер равен $\delta(x,d) \vee \delta(y,c) \vee \delta(y,d) \vee \delta(z,c)$. Построим новый путь Q', который повторяет Q с той лишь разницей, что последовательность ребер $p_i \xleftrightarrow[4]{} p_{i+1} \xleftrightarrow[4]{} p_{i+2}$ заменена на следующую последовательность:

$$sux\bar{u}t \xleftrightarrow[1]{} suz\bar{u}t \xleftrightarrow[2]{} sat \xleftrightarrow[1]{} sbt \xleftrightarrow[3]{} swx\bar{w}t \xleftrightarrow[1]{} swz\bar{w}t\ .$$

Вес новой последовательности равен $\delta(x,z) \vee \delta(z,c) \vee \delta(a,b) \vee \delta(x,d)$. Так как $\delta(x,d) \vee \delta(d,y) \vee \delta(y,c) \vee \delta(c,z) \geqslant \delta(x,z)$, $\delta(x,d) \vee \delta(c,y) \vee \delta(y,d) \vee \delta(z,c) \geqslant \delta(x,d) \vee \delta(c,d) \vee \delta(z,c)$ и $\delta(c,d) \geqslant \delta(a,b)$, имеем $\delta(x,d) \vee \delta(d,y) \vee \delta(y,c) \vee \delta(c,z) \geqslant \delta(z,x) \vee \delta(z,c) \vee \delta(a,b) \vee \delta(x,d)$. Следовательно, $e(Q) \geqslant e(Q')$. При этом $\sum_{p_i \in Q'} w_v(p_i) < \sum_{p_i \in Q} w_v(p_i)$.

Будем последовательно, раз за разом, проделывать эти преобразования. Поскольку число $\sum_{p_i \in Q} w_v(p_i)$ всегда неотрицательно, начиная с некоторого момента, случай 8 станет невозможен. После этого в каждом случае мы будем либо уменьшать $i(Q)$, либо уменьшать длину пути. Поэтому в итоге мы построим путь $\bar{Q}$ такой, что $e(Q) \geqslant e(\bar{Q})$ и $i(\bar{Q}) = 0$. Как уже было отмечено выше, из этого следует, что $\bar{Q}$ удовлетворяет условию SW1.

В дальнейшем будем считать, что Q уже удовлетворяет условию SW1. Нетрудно видеть, что всякий $k(Q)$-эквивалентный путь Q' также удовлетворяет условию SW1, причем $k(Q') = k(Q)$. Рассмотрим далее четыре следующих преобразования:

1. Всюду, где это возможно, сокращаем ребра типа 1.

2. Всюду, где это возможно, заменяем подпуть вида $svx\bar{v}t \longleftrightarrow suy\bar{u}t \longleftrightarrow svz\bar{v}t$ (здесь $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$) на подпуть вида $svx\bar{v}t \longleftrightarrow svz\bar{v}t$.

3. Ищем подпуть вида $svx\bar{v}t \longleftrightarrow suy\bar{u}t \longleftrightarrow sat$ и заменяем его отрезком пути вида $svx\bar{v}t \longleftrightarrow suc\bar{u}t \longleftrightarrow sat$.

Ищем подпуть вида $svx\bar{v}t \longleftrightarrow swy\bar{w}t \longleftrightarrow sbt$ и заменяем его отрезком пути вида $svx\bar{v}t \longleftrightarrow swd\bar{w}t \longleftrightarrow sbt$.

Делаем аналогичные преобразования для подпутей вида $sat \longleftrightarrow suy\bar{u}t \longleftrightarrow svx\bar{v}t$ и $sbt \longleftrightarrow swy\bar{w}t \longleftrightarrow svx\bar{v}t$.

4. Заменяем путь на ему $k(Q)$-эквивалентный.

Будем последовательно применять эти преобразования. Поскольку при преобразованиях 1 и 2 уменьшается длина пути, а преобразование 3 в каждом пути может быть выполнено лишь конечное число раз, рано или поздно получится такой путь R, у которого все его $k(R)$-эквивалентные пути обладают свойствами SW1-SW4. Тогда $R \in SW(p, q)$. Нетрудно видеть, что при этом $e(R) \leqslant e(Q)$. Лемма доказана. □

Лемма 1.2.2 вытекает теперь из лемм 1.2.3 и 1.2.4.

Лемма 1.2.5. *Если $p, q \in S$, то для любого $P \in W(p, q)$ выполняется $e(P) \geqslant \delta(p, q)$.*

Доказательство. В силу леммы 1.2.2, достаточно заметить, что если $p, q \in S$, то $SW(p, q)$ содержит всего один путь, состоящий из двух вершин p и q с ребром между ними веса $\delta(p, q)$. Действительно, из условия SW1 следует, что в любом пути из $SW(p, q)$ нет ребер типа 2, 3, 4. Если же в некотором пути из p в q есть несколько ребер типа 1, то все они очевидным образом сокращаются до одного. □

Определим функцию $\tilde{\delta} : \tilde{S} \times \tilde{S} \to P$ следующим образом:

$$\tilde{\delta}(p, q) = \bigwedge \{e(Q) \mid Q \in H(p, q)\}.$$

В частности, имеем $\tilde{\delta}(p,q)=1$, если $H(p,q)=\emptyset$. В силу леммы 1.2.2, данное определение корректно.

Лемма 1.2.6. *Отображение* $\tilde{\delta}:\tilde{S}\times\tilde{S}\longrightarrow P$ *является полугрупповой функцией расстояния, причем* $\tilde{\delta}\mid S\times S=\delta$ *и* $\tilde{\delta}(a,uc\bar{u})=\tilde{\delta}(ud\bar{u},vc\bar{v})=\tilde{\delta}(vd\bar{v},wc\bar{w})=\tilde{\delta}(wd\bar{w},b)=0$.

Доказательство. Из определения графа $G=(\tilde{S},E)$ вытекает, что $(a,0,uc\bar{u}),(ud\bar{u},0,vc\bar{v})$, $(vd\bar{v},0,wc\bar{w})$, $(wd\bar{w},0,b)\in E$, поэтому $\tilde{\delta}(a,uc\bar{u})=\tilde{\delta}(ud\bar{u},vc\bar{v})=\tilde{\delta}(vd\bar{v},wc\bar{w})=\tilde{\delta}(wd\bar{w},b)=0$.

Далее, пусть $p,q\in S$. Тогда $\tilde{\delta}(p,q)=\bigwedge\{e(Q)\mid Q\in H(p,q)\}=\bigwedge\{e(Q)\mid Q\in M(p,q)\}$. Из Леммы 1.2.5 следует, что $SW(p,q)$ содержит один путь $p\xleftrightarrow{\delta(p,q)}q$, поэтому $\tilde{\delta}(p,q)=\delta(p,q)$.

По определению, для любого $p\in\tilde{S}$ имеем тривиальный путь $p\xleftrightarrow{0}p$ и значит $\tilde{\delta}(p,p)=0$. Симметричность $\tilde{\delta}$ очевидна. Проверим неравенство треугольника $\tilde{\delta}(p,q)\leqslant\tilde{\delta}(p,r)\vee\tilde{\delta}(r,q)$ для любых $p,q,r\in\tilde{S}$. Действительно, достатольно рассмотреть случай, когда $\tilde{\delta}(p,r)\neq 1$ и $\tilde{\delta}(r,q)\neq 1$, т.е. множества $H(p,r)$ и $H(r,q)$ непусты. Из двух путей $Q_1\in H(p,r)$ и $Q_2\in H(r,q)$ легко составить путь $Q\in H(p,q)$, причем $e(Q)=e(Q_1)\vee e(Q_2)$. Поэтому, используя дистрибутивность P, мы получаем $\tilde{\delta}(p,r)\vee\tilde{\delta}(r,q)=\bigwedge\{e(Q')\mid Q'\in H(p,r)\}\vee\bigwedge\{e(Q'')\mid Q''\in H(r,q)\}=\bigwedge\{e(Q')\vee e(Q'')\mid Q'\in H(p,r),Q''\in H(r,q)\}\geqslant\bigwedge\{e(Q)\mid Q\in H(p,q)\}=\tilde{\delta}(p,q)$. Таким образом, мы проверили, что $\tilde{\delta}$ есть функция расстояния на $\tilde{S}$.

Осталось проверить, что для любых $p,q,r\in\tilde{S}$ выполнено $\tilde{\delta}(pr,qr)\leqslant\tilde{\delta}(p,q)$ и $\tilde{\delta}(rp,rq)\leqslant\tilde{\delta}(p,q)$. Действительно, из определения графа $G=(\tilde{S},E)$ следует, что для произвольного ребра (p,e,q) и $r\in\tilde{S}$ тройка (pr,e,qr) снова является ребром, поэтому для любого $Q\in H(p,q)$ существует $R\in H(pr,qr)$, причем $e(Q)=e(R)$. Следовательно, либо $\tilde{\delta}(p,q)=1\geqslant\tilde{\delta}(pr,qr)$, либо $\tilde{\delta}(p,q)=\bigwedge\{e(Q)\mid Q\in H(p,q)\}\geqslant\bigwedge\{e(Q)\mid Q\in H(pr,qr)\}=\tilde{\delta}(pr,qr)$. Неравенство $\tilde{\delta}(rp,rq)\leqslant\tilde{\delta}(p,q)$ проверяется аналогично. Доказательство завершено. □

Положим $\bar{S}=\tilde{S}/\delta^*(0)$. Определим отображение $\bar{\delta}=\bar{S}^2\to P$ по формуле $\bar{\delta}(\bar{x},\bar{y})=\tilde{\delta}(\tilde{x},\tilde{y})$, где $\bar{x},\bar{y}$ – элементы $\bar{S}$ и $\tilde{x},\tilde{y}$ – их соответствующие представители в $\tilde{S}$. Нетрудно видеть, что $\bar{\delta}$ также является функцией расстояния. Мы убедимся далее, что таким образом построенные полугруппа $\bar{S}$ и функция $\bar{\delta}$ являются искомыми.

Из леммы 1.2.5 вытекает, что S – подполугруппа $\bar{S}$ и $\bar{\delta}|_S = \delta$.

Равенства

$$\tilde{\delta}(a, uc\bar{u}) = \tilde{\delta}(ud\bar{u}, vc\bar{v}) = \tilde{\delta}(vd\bar{v}, wc\bar{w}) = \tilde{\delta}(wd\bar{w}, b) = 0$$

влекут соотношения $a = uc\bar{u}$, $ud\bar{u} = vc\bar{v}$, $vd\bar{v} = wc\bar{w}$, $wd\bar{w} = b$ в $\bar{S}$. Вместе с тем, очевидны включения $(uc\bar{u}, ud\bar{u}), (vc\bar{v}, vd\bar{v}), (wc\bar{w}, wd\bar{w}) \in \Theta(c, d)$ в $\bar{S}$. Это означает, что $(a, b) \in \Theta(c, d)$ в $\bar{S}$.

3° Доказательство отсутствия идемпотентов

На этом этапе мы покажем, что в полугруппе $\bar{S}$ не возникает идемпотентов. Для этого мы проверим более сильный факт, а именно, что для любого $p \in \tilde{S}$ и $q \in \tilde{S}^1$ выполнено $\tilde{\delta}(p, pqp) > 0$.

Все элементы полугруппы S лежат, очевидно, в одной компоненте связности графа $G = (\tilde{S}, E)$, которую мы обозначим через G_0. Нетрудно заметить, что если слова q, r принадлежат компоненте G_0, то их произведение qr лежит в этой же компоненте. Более того, если произведение qr принадлежит G_0 и один из сомножителей принадлежит G_0, то и другой сомножитель также принадлежит G_0. Слово $p \in \tilde{S} \backslash S$ назовем *простым*, если $p \in G_0$ и p не раскладывается в произведение слов, каждое из которых принадлежит G_0.

Введем вспомогательное множество $Z = \{(x, y) \mid x, y \in S\} \cup \{(uc\bar{u}, a), (a, uc\bar{u}), (wd\bar{w}, b), (b, wd\bar{w}), (ud\bar{u}, vc\bar{v}), (vc\bar{v}, ud\bar{u}), (vd\bar{v}, wc\bar{w}), (wc\bar{w}, vd\bar{v})\}$.

Лемма 1.3.1. *Пусть $p \in \tilde{S}^1$.*

1. Если p простое, то $p \in z\tilde{p}\bar{z}$, где $z \in \{u, w, v\}$ и $\tilde{p} \in G_0$.

2. Всякое слово $p \in G_0$ представимо в виде $p = x_1 p_1 x_2 p_2 \dots x_n p_n x_{n+1}$, где $p_1, p_2, \dots, p_n$ – простые, а $x_1, \dots, x_{n+1} \in S^1$. Это разложение определяется единственным образом.

3. Пусть слова $p, q \in G_0$ имеют разложения на простые подслова $p = x_1 p_1 x_2 p_2 \dots x_n p_n x_{n+1}$ и $q = y_1 q_1 y_2 q_2 \dots y_n q_n y_{n+1}$ и существует ребро $p = sft \longleftrightarrow sgt = q$

типа 2,3 или 4, где $(f,g) \in Z$, $s,t \in \tilde{S}^1$. *Тогда для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant n$ *слово* f *является подсловом* p_i, *а* g *является подсловом* q_i.

Доказательство. 1. Ясно, что если $p = xr$, где $x \in S$, $r \in \tilde{S}$, то $r \in G_0$ и p не является простым. Значит $p = zr$, где $z \in \{u, w, v\}$, а $r \in \tilde{S}$. Поскольку $p \in G_0$, существует путь от p до a. В этом пути существует ребро $ft \longleftrightarrow gt$, где $(f,g) \in Z$, $t \in \tilde{S}^1$. Рассмотрим самое первое такое ребро на нашем пути, тогда $z \in f$. Но из определения Z следует, что $f = zx\bar{z}$ для некоторого $x \in S$. Следовательно, $p = z\tilde{p}\bar{z}r'$, где $\tilde{p} \in G_0$, а $r' \in \tilde{S}^1$. Ясно, что r' тоже должно принадлежать G_0, тогда из простоты p следует, что $r' = 1$.

2. Теми же рассуждениями, что и в пункте 1, устанавливаем, что либо $p = xr$, либо $p = z\tilde{p}\bar{z}r$, где $x \in S$, $\tilde{p}$ – простое, а $r \in G_0$. Применив эти же рассуждения к подслову r, получим требуемое.

3. Из пункта 1 следует, что для любого i выполняется $p_i = z_i\tilde{p}_i\bar{z}_i$, где $z_i \in \{u, v, w\}$ и $\tilde{p}_i \in G_0$. Без ограничения общности считаем, что f имеет ненулевой вес. Если f не является подсловом слова p_i ни для какого i, то, поскольку f имеет ненулевой вес, f пересекается с подсловами p_j и p_{j+1} для некоторого j. Но тогда f должно содержать подслово $\bar{z}x_{i+1}z_{i+1}$, что противоречит определению множества R. Следовательно, f является подсловом некоторого слова p_i, но тогда и g тоже, очевидно, является подсловом слова q_i.

□

Лемма 1.3.2. *Пусть путь* $R \in W(p,q)$ *имеет вид* $p = p_0 \longleftrightarrow p_1 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow p_n = q$. *Тогда выполнены следующие условия:*

1. *Для любого* $0 \leqslant i \leqslant n$ *имеют место разложения* $p_i = s_1p_1^i s_2 p_2^i \dots p_m^i s_{m+1}$, *где* $p_j^i \in G_0$ *при всех* $0 \leqslant i \leqslant n$,$1 \leqslant j \leqslant m$, *а* $s_j \in \tilde{S}^1$ *при* $1 \leqslant j \leqslant m+1$.

2. *Для любого ребра* $p_i = sft \longleftrightarrow sgt = p_{i+1}$, *где* $(f,g) \in Z$ *и* $s,t \in \tilde{S}^1$, *существует индекс* j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *такой, что* f *является подсловом* p_j^i *и* g *является подсловом* p_j^{i+1}.

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по числу n ребер в указанном пути. Пусть $n = 1$. Тогда $p_0 = sft$ и $p_1 = sgt$, где $s,t \in \tilde{S}^1$ и $(f,g) \in Z$. В этом случае $f,g \in G_0$ и эти разложения являются искомыми.

Пусть теперь утверждение доказано для путей с числом ребер менее k и пусть дан путь $p_0 \longleftrightarrow p_1 \longleftrightarrow p_2 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow p_k$ с k ребрами. Тогда согласно гипотезе индукции имеем следующие разложения: $p_i = s_1 p_1^i s_2 p_2^i \dots p_m^i s_{m+1}$, где $p_j^i \in G_0$ при $0 \leqslant i \leqslant k-1$, а $s_j \in \tilde{S}^1$. Кроме того, $p_{k-1} = sft$, а $p_k = sgt$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $(f, g) \in Z$. Без ограничения общности будем считать, что $s_j \notin S$, потому что в противном случае можно при всех i рассматривать слово $p_{j-1}^i s_j p_j^i$ в качестве одного слова из G_0.

Рассмотрим случаи:

Случай 1. f – подслово p_j^{k-1}. Следовательно, $p_j^{k-1} = r_1 f r_2$ для подходящих $r_1, r_2 \in \tilde{S}^1$. Положим $p_j^k = r_1 g r_2$. Ясно, что если $p_j^{k-1} \in G_0$, то $p_j^k \in G_0$. Тогда $p_k = s_1 p_1^k s_2 p_2^k \dots p_m^k s_{m+1}$, где $p_i^k = p_i^{k-1}$ для всех $i \neq j$. В итоге мы получили требуемые разложения для всех $k+1$ вершин.

Случай 2. f – подслово s_j для некоторого j. Тогда $s_j = s_j' f s_j''$, где s_j' делит s справа, а s_j'' делит t слева. Записав $p_i = s_1 p_1^i s_2 \dots p_j^i s_j' f s_j'' p_{j+1}^i \dots p_m^i s_{m+1}$ при $0 \leqslant i \leqslant k-1$ и $p_k = s_1 p_1^{k-1} s_2 \dots p_j^{k-1} s_j' g s_j'' p_{j+1}^{k-1} \dots p_m^{k-1} s_{m+1}$, получим требуемые разложения.

Случай 3. $f = x_1 x_2$, где $x_1, x_2 \in S$, и для некоторого j элемент x_1 делит p_j^{k-1} справа, а x_2 делит s_{j+1} слева. Тогда $p_j^{k-1} = \tilde{p}_j^{k-1} x_1$ и $s_{j+1} = x_2 \tilde{s}_{j+1}$. Переопределив во всех разложениях $p_j^i = \tilde{p}^{k-1} f$ и $s_{j+1} = \tilde{s}_{j+1}$, вернемся к случаю 1.

Случай 4. $f = x_1 x_2$, где $x_1, x_2 \in S$, и для некоторого j элемент x_1 делит s_j справа, а x_2 делит p_j^{k-1} слева. Этот случай аналогичен случаю 3.

Случай 5. Пусть $f \notin S$, следовательно $f = z x \bar{z}$ для некоторого $z \in \{u, w, v\}$ и $x \in S$. Поскольку мы считаем, что $s_j \notin S$ при всех j, для слова f найдется не более двух слов вида s_j, имеющих общие подслова с f. Если таких подслов нет, то наша ситуация подпадает под случай 1. Если такое слово только одно, например s_j, то с учетом леммы 1.3.1 слово f должно быть подсловом s_j, что рассмотрено в случае 2. Наконец, пусть таких слов ровно два: s_j и s_{j+1}. Тогда $f = g_1 x g_2$, где g_1 делит s_j справа, g_2 делит s_{j+1} слева, $x = p_{j+1}^{k-1} \in S$. Тогда $s_j = \tilde{s}_j g_1$, $s_{j+1} = g_2 \tilde{s}_{j+1}$, для некоторых $s_j, s_{j+1} \in \tilde{S}$. Тогда имеем $p_i = s_1 p_1^i s_2 \dots \tilde{s}_j z p_j^i \bar{z} \tilde{s}_{j+1} \dots p_m^i s_{m+1}$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$ и $p_k = s_1 p_1^{k-1} s_2 \dots \tilde{s}_j g \tilde{s}_{j+1} \dots p_m^{k-1} s_{m+1}$, что дает требуемое разложение. $\square$

Лемма 1.3.3. *Пусть $p, q \in \tilde{S}$ и существует путь от p до pqp.*

1. *Слово pqp не содержит подслов вида $z_1 x \bar{z}_2$ ни для каких $z_1, z_2 \in \{u, v, w\}$, $z_1 \neq z_2$, и $x \in S^1$.*

2. *Имеют место разложения $p = sx_1p_1x_2p_2 \dots x_np_nx_{n+1}t$ и $q = t'y_1q_1y_2q_2 \dots y_mq_my_{m+1}s'$, где $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots q_m$ – простые подслова, $x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{m+1} \in S^1$ и $s, s', t, t' \in \tilde{S}^1$ такие, что tt' и $s's$ простые слова.*

Доказательство. Сначала покажем, что слово $r \in G_0$ не содержит подслов вида $z_1 x \bar{z}_2$, ни для каких $z_1, z_2 \in \{u, v, w\}$, $z_1 \neq z_2$ и $x \in S^1$. Предположим, от противного, что $r = sz_1x\bar{z}_2t$, для некоторых $s, t \in \tilde{S}$. Из того, что $r \in G_0$, следует, что существует путь от r до элемента a. Заметим, что z_1 ни в одно ребро этого пути войти не может. Следовательно, z_1 должно быть подсловом в a, противоречие.

Поскольку между словами p и pqp существует путь, по лемме 1.3.2 существуют разложения $pqp = s_0r_1s_1 \dots r_ns_n$ и $p = s_0p_1s_1 \dots p_ns_n$, где $r_i, p_i \in G_0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, а $s_i \in \tilde{S}^1$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Так как слова вида $z_1x\bar{z}_2$ не могут пересекаться со словами r_i и p_i, все они являются подсловами слов s_i. Пусть число таких подслов в разложении p равно n. Но тогда в аналогичном разложении слова pqp их должно быть не менее $2n$, причем все эти подслова являются подсловами слов $s_0, s_1, \dots, s_n$, а значит и подсловами слова p. Отсюда заключаем, что $n = 0$.

Аналогичными рассуждениями выводим, что $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ должны принадлежать G_0, что дает нам утверждение 2. □

Лемма 1.3.4. *Для любых $p \in \tilde{S}$ и $q \in \tilde{S}^1$ выполняется $\tilde{\delta}(pqp, p) > 0$.*

Доказательство. Пусть существует путь от p до pqp. В силу леммы 1.2.2 можно считать, что этот путь взят из множества $SW(p, pqp)$. По лемме 1.3.3 существуют разложения

$$p = sx_1p_1x_2p_2 \dots x_np_nx_{n+1}t \text{ и } q = t'y_1q_1y_2q_2 \dots y_mq_my_{m+1}s',$$

где $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots q_m$ – простые, $x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{m+1} \in S^1$ и $s, s', t, t' \in \tilde{S}^1$ такие, что tt' и $s's$ – простые слова. Получаем, что

$$pqp = sx_1p_1x_2p_2 \dots x_np_nx_{n+1}tt'y_1q_1y_2q_2 \dots y_mq_my_{m+1}s'sx_1p_1x_2p_2 \dots x_np_nx_{n+1}t =$$

$$= sx_1p_1x_2p_2\dots x_np_nx_{n+1}r_1y_1r_2y_2\dots r_{m+1}y_{m+1}r_{m+2}x_1p_1x_2p_2\dots x_np_nx_{n+1}t.$$

Выделим некоторые подмножества ребер в нашем пути. Мы будем считать, что в $L_1(P)$ содержатся все ребра типов 2, 3 вида $p_i = \tilde{s}f\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}g\tilde{t} = p_{i+1}$, где $\tilde{s}, \tilde{t} \in \tilde{S}^1$ и число простых подслов в разложении p_{i+1} меньше, чем в разложении p_i, а также содержатся все отрезки путей вида $p_i = \tilde{s}vx_1\bar{v}\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}zx_2\bar{z}\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}zx_3\bar{z}\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}x_4\tilde{t} = p_{i+3}$, где $\tilde{s}, \tilde{t} \in \tilde{S}^1$ и число простых подслов в разложении p_{i+3} меньше, чем в разложении p_i. В подмножество $L_2(P)$ включим все ребра типа 1 вида $p_i = \tilde{s}f\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}g\tilde{t} = p_{i+1}$, где $\tilde{s}, \tilde{t} \in \tilde{S}^1$ и $f, g \in S$ такие, что f и g не входят ни в какое простое подслово соответствующих разложений p_i и p_{i+1}. В подмножество L_3 включим все ребра типов 2 и 3 вида $p_i \longleftrightarrow p_{i+1}$, где число простых подслов в разложении p_{i+1} больше, чем в разложении p_i, а также включим все отрезки путей вида $p_i = \tilde{s}x_1\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}zx_2\bar{z}\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}zx_3\bar{z}\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}vx_4\bar{v}\tilde{t} = p_{i+3}$, где $\tilde{s}, \tilde{t} \in \tilde{S}^1$ и число простых подслов в разложении p_{i+3} меньше, чем в разложении p_i. В силу леммы 1.2.1 и того факта, что наш путь принадлежит множеству $SW(p, pqp)$, можно считать, что все ребра из L_1 предшествуют всем ребрам из L_2, а те в свою очередь предшествуют всем ребрам из L_3. Также, благодаря лемме 1.2.1, мы можем подобрать путь P среди всех ему эквивалентных путей так, чтобы множества $L_1(P)$ и $L_3(P)$ содержали максимальное число элементов.

Множество ребер L_2 разобьем на два подмножества: в L_2' соберем все ребра вида $p_i = \tilde{s}x\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}y\tilde{t} = p_{i+1}$, где $\tilde{s}, \tilde{t} \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$, такие, что в некотором эквивалентном пути существует ребро $p_{i+1} = \tilde{s}y\tilde{t} \longleftrightarrow \tilde{s}\tilde{p}\tilde{t} = p_{i+2}$ из множества L_3, где $\tilde{p} \in R$. В L_2'' соберем остальные ребра.

Мы будем рассматривать лишь тот участок Q, который проходит по ребрам из множеств L_1, L_2 и L_3. В силу леммы 1.2.1 можно считать, что это связный участок.

Рассмотрим вершину пути, идущую после последнего ребра из множества L_1. Она имеет вид

$$sx_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\dots x_n\tilde{p}_nx_{n+1}\tilde{r}_1y_1\tilde{r}_2\dots y_m\tilde{r}_{m+1}x_1\tilde{p}_1'x_2\tilde{p}_2'\dots x_n\tilde{p}_n'x_{n+1}t.$$

Пусть какое-то из подслов вида $\tilde{p}_i$ или $\tilde{p}_i'$ не принадлежит S. Тогда оно не пересекается ни с одним подсловом f или g, где $p_i = sft \longleftrightarrow sgt = p_{i+1}$ – ребро в Q. Рассмотрим путь, который состоит из тех же вершин, что и Q, но p_i всюду заменено на элемент $\beta_i \in S$. Очевидно, этот путь имеет ту же метку, что и Q. Подобными рассуждениями заменим все $\tilde{p}_i \notin S$ на $\beta_i \in S$, $r_i \notin S$ на $\gamma_i \in S$ и $\tilde{p}'_i \notin S$ на $\beta'_i \in S$. При этом мы оставляем пока свободной возможность подобрать β_i, γ_i и β'_i. Полученный путь обозначим через Q'.

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. $e(Q') \geqslant \delta(a,b)$.

В этом случае сразу положим $\beta_i = \gamma_i = \beta'_i = a$.

Вершина, идущая после последнего ребра из множества L_1, имеет следующий вид: $sx_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{p}_nx_{n+1}\tilde{r}_1y_1\tilde{r}_2\ldots y_m\tilde{r}_{m+1}x_1\tilde{p}'_1x_2\tilde{p}'_2\ldots x_n\tilde{p}'_nx_{n+1}t$, где все p_i являются элементами из S. Перепишем эту вершину в виде $s\omega_1k_1\omega_2k_2\ldots\omega_nk_n\omega_{n+1}t$ так, что всякое ребро из множества L'_2 имеет вид $s_jk_jt \longleftrightarrow s_j\bar{p}_jt_j$, где $p_j = a$ или $p_j = b$, а всякое ребро из множества L''_2 имеет вид $s_i\omega_it_i \longleftrightarrow s_i\bar{x}_it_i$. Следовательно, после преобразований из множества L'_2 получим вершину вида $s\omega_1\bar{p}_1\omega_2\bar{p}_2\ldots\omega_n\bar{p}_n\omega_{n+1}t$.

Пройдя все ребра из множества L''_2, получим вершину $sx_1\bar{p}_1x_2\bar{p}_2\ldots x_n\bar{p}_nx_{n+1}t$.

В итоге получаем:

$$\delta(pqp,p) = e(P) \geqslant e(Q) = e(Q') = \bigvee_{i=1}^{n}\delta(t_i,\bar{p}_i) \vee \bigvee_{i=1}^{n+1}\delta(\omega_i,x_i) \geqslant$$

$$\delta(\omega_1k_1\omega_2k_2\ldots\omega_nk_n\omega_{n+1}, x_1\bar{p}_1x_2\bar{p}_2\ldots x_n\bar{p}_nx_{n+1}) =$$

$$\delta(x_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{x}_{n+1}\tilde{r}_1y_1\tilde{r}_2\ldots y_m\tilde{r}_{m+1}x_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{p}_nx_{n+1}, x_1\bar{p}_1x_2\bar{p}_2\ldots x_n\bar{p}_nx_{n+1}) =$$

Так как $e(Q') \leqslant \delta(a,b)$ и $\tilde{p}_i, \bar{p}_i, \tilde{r}_i \in \{a,b\}$, имеем

$$\delta(x_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{x}_{n+1}\tilde{r}_1y_1\tilde{r}_2\ldots y_m\tilde{r}_{m+1}x_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{p}_nx_{n+1}, x_1\bar{p}_1x_2\bar{p}_2\ldots x_n\bar{p}_nx_{n+1}) \vee \delta(a,b) \geqslant$$

$$\delta(x_1ax_2a\ldots x_naay_1a\ldots y_max_1ax_2a\ldots x_nax_{n+1}, x_1ax_2a\ldots x_nax_{n+1})$$

Последний член больше нуля по условию предложения 2, так как $x_1ax_2a\ldots x_na, ay_1a\ldots y_ma \in S$. Заметим, что он не зависит от того, какой путь мы выбрали в начале доказательства.

Случай 2. $e(P) \not\geqslant \delta(a,b)$.

В этом случае мы можем утверждать, что $w_v(x_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{p}_nx_{n+1}\tilde{r}_1y_1\tilde{r}_2\ldots y_m\tilde{r}_{m+1}x_1\tilde{p}'_1x_2\tilde{p}'_2 \ldots x_n\tilde{p}'_nx_{n+1}) = 0$. Действительно, в противном случае, среди меток ребер из множества L_1 встретилась бы $\delta(c,d)$. Следовательно, среди ребер из множеств L_1 и L_3 есть лишь ребра типов 2 и 3, откуда получаем $\tilde{p}_i = \tilde{p}'_i = \bar{p}_i$ (если некоторые из этих элементов заменены на β_i, γ_i, β'_i, то подберем значения переменных так, чтобы равенство выполнялось).

Мы проделаем то же, что и в случае 1, и получим

$$\delta(pqp,p) \geqslant \delta(x_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{x}_{n+1}\tilde{r}_1y_1\tilde{r}_2\ldots y_m\tilde{r}_{m+1}x_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{p}_nx_{n+1}, x_1\tilde{p}_1x_2\tilde{p}_2\ldots x_n\tilde{p}_nx_{n+1})$$

Этот член больше нуля по условию предложения 2, причем он не зависит от того, какой путь мы выбрали в самом начале. $\square$

Доказательство предложения 1.2.1 завершено.

4° Заключительный этап

Мы приступаем к доказательству теоремы I тем путем, который был намечен в параграфе 1. Зафиксируем дистрибутивную алгебраическую решетку L такую, что множество $\mathcal{P} = \operatorname{Comp} L$ образует подрешетку с единицей в L.

Лемма 1.4.1. *Пусть элементы $a, b, c \in \mathcal{P}$ таковы, что $c \leqslant a \vee b$. Тогда существуют полугруппа без идемпотентов U и функция расстояния $\delta\colon U \times U \to \mathcal{P}$ такие, что $\delta(xyx, x) > 0$ для любых $x \in U$, $y \in U^1$, и элементы $x, y, u, v, w \in U$ такие, что $\delta(x,u) = \delta(v,w) = a, \delta(u,v) = \delta(w,y) = b$ и $\delta(x,y) = c$.*

Доказательство. Рассмотрим свободную полугруппу $U = F(X)$, порожденную алфавитом $X = \{x, y, u, v, w\}$.

Определим функцию δ вначале на множестве X^2 следующим образом:

$$\delta^{-1}(a) = \{(x,u),(v,w),(u,x),(w,v)\}, \delta^{-1}(b) = \{(u,v),(w,y),(v,u),(y,w)\},$$

$$\delta^{-1}(c) = \{(x,y),(y,x)\}, \delta^{-1}(a\vee c) = \{(u,y),(y,u)\}, \delta^{-1}(b\vee c) = \{(x,w),(w,x)\},$$

$$\delta^{-1}(0) = \Delta, \delta^{-1}(a\vee b) \text{ – множество всех остальных пар.}$$

Пусть теперь $p, q \in U$ и $p = s_1 s_2 \dots s_n$, $q = t_1 t_2 \dots t_m$, где $s_i, t_j \in X$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$. Положим $\delta(p, q) = 1$, если $n \neq m$ и $\delta(p, q) = \bigvee_{i=1}^{n} \delta(s_i, t_i)$, если $n = m$.

Легко проверить, что δ есть функция расстояния с требуемым свойством, а для элементов x, y, u, v, w выполняются все требуемые равенства. □

Лемма 1.4.2. *Существуют полугруппа без идемпотентов T и функция расстояния $\delta\colon T \times T \to \mathcal{P}$ такие, что*

1) *δ – сюръективно;*

2) *$\delta(xyx, x) > 0$ для любых $x, y \in T$;*

3) *Для любой тройки $(a, b, c) \in \mathcal{P}$ с условием $c \leqslant a \vee b$ существуют $x, y, u, v, w \in T$ такие, что $\delta(x, u) = \delta(v, w) = a$, $\delta(u, v) = \delta(w, y) = b$ и $\delta(x, y) = c$.*

Доказательство. Рассмотрим множество X всех троек $(a, b, c) \in \mathcal{P}^3$ со свойством $c \leqslant a \vee b$. По каждой тройке $(a, b, c) \in X$ построим полугруппу и полугрупповую функцию расстояния, удовлетворяющие условию леммы 1.4.1; мы обозначим их $U_{(a,b,c)}$ и $\delta_{(a,b,c)}$ соответственно.

Рассмотрим свободное произведение F всех полугрупп $U_{(a,b,c)}$ по всем тройкам $(a, b, c) \in \mathcal{P}^3$, где $c \leqslant a \vee b$. Зададим на $F \times F$ отображение δ в $\mathcal{P}$ следующим образом. Пусть даны два слова $x = x_1 x_2 \dots x_n$ и $y = y_1 y_2 \dots y_m$, где x_i, y_j взяты из полугрупп вида $U_{(a,b,c)}$, причем для любого i в каждой из пар (x_i, x_{i+1}), (y_i, y_{i+1}) элементы принадлежат различным полугруппам $U_{(a,b,c)}$. Если $n = m$ и для каждого i элементы x_i, y_i принадлежат одной полугруппе $U_{(a_i,b_i,c_i)}$, то положим

$$\delta(x_1 x_2 \dots x_n, y_1 y_2 \dots y_n) = \bigvee \delta_{(a_i,b_i,c_i)}(x_i, y_i).$$

Во всех остальных случаях положим $\delta(x, y) = 1$. Очевидно, δ сюръективно и является требуемой функцией расстояния. □

Далее мы построим последовательность $(S_i, \delta_i, X_i, \gamma_i)$, где $(0 \leqslant i < \infty)$, такую, что

S_i – полугруппа без идемпотентов;

δ_i – функция расстояния $S_i \times S_i \to P$ такая, что $\delta(xyx, x) > 0$ для любых $x, y \in S_i$;

X_i – некоторое вполне упорядоченное множество четверок элементов из S_i, имеющее порядковый тип γ_i.

При этом для любого $0 \leqslant i < \infty$ будут выполнены следующие свойства:

1) существует изоморфное вложение $\alpha_i : S_i \to S_{i+1}$;

2) ограничение δ_{i+1} на $\alpha_i(S_i)$ совпадает с $\alpha_i(\delta_i)$;

3) $X_i = \{(a_\beta, b_\beta, c_\beta, d_\beta) \mid \delta_i(a_\beta, b_\beta) \leqslant \delta_i(c_\beta, d_\beta)$ для всех $\beta < \gamma_i\}$;

4) для любых $a, b, c, d \in S_i$ с условием $\delta_i(a, b) \leqslant \delta_i(c, d)$ имеем $(\alpha_i(a), \alpha_i(b)) \in \Theta(\alpha_i(c), \alpha_i(d))$.

В качестве S_0 и δ_0 выберем полугруппу T и функцию δ из леммы 1.4.2. Определим и вполне упорядочим следующее множество:

$$X_0 = \{(x, y, z, t) \in S_0^4 \mid \delta_0(x, y) \leqslant \delta_0(z, t)\} = \{(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, t_\gamma) \mid 0 \leqslant \gamma < \chi\}.$$

В качестве γ_0 выберем χ.

Предположим теперь, что для некоторого i уже построены требуемые S_i, δ_i, X_i и γ_i. Для построения полугруппы S_{i+1} и отображения δ_{i+1} построим вспомогательные трансфинитные последовательности S_i^α и δ_i^α для всех ординалов $\alpha \leqslant \gamma_i$.

В качестве S_i^0 и δ_i^α выберем S_i и δ_i. Далее, если α – ненулевой непредельный ординал, в качестве S_i^α и δ_i^α выберем полугруппу и отображение, которые построены по $S_i^{\alpha-1}$, $\delta_i^{\alpha-1}$ и парам $(x_{\alpha-1}, y_{\alpha-1})$, $(z_{\alpha-1}, t_{\alpha-1})$, составленным из четверок множества X_i, с помощью предложения 1.2.1. Если α – предельный ординал, в качестве S_i^α и δ_i^α выберем предел соответствующих последовательностей $\{S_i^\beta\}_{\beta<\alpha}$ и $\{\delta_i^\alpha\}_{\beta<\alpha}$.

Теперь положим $S_{i+1} = S_i^{\gamma_i}$ и $\delta_{i+1} = \delta_i^{\gamma_i}$. Определим и вполне упорядочим следующее множество:

$$X_{i+1} = \{(x, y, z, t) \in S_{i+1}^4 \mid \delta_{i+1}(x, y) \leqslant \delta_{i+1}(z, t)\} = \{(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, t_\gamma) \mid 0 \leqslant \gamma < \chi\}.$$

В качестве γ_{i+1} выберем χ.

Требуемая последовательность построена. Нетрудно видеть, что выполнение условий 1)-4) обеспечена предложением 1.2.1.

Обозначим через S' и δ' соответствующие пределы последовательностей $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Далее мы покажем, что полугруппа S' и функция расстояния δ' удовлетворяют условию теоремы 1.1.

По построению, для любых пар $(x, y), (z, t) \in S' \times S'$ с неравенством $\delta'(x, y) \leqslant \delta'(z, t)$ имеем $(x, y) \in \Theta_{S'}(z, t)$, т.е. выполнено условие 4 предложения 1. Также из построения следует выполнение условия 1. Сюръективность δ' следует из леммы 1.4.2. Пусть $a, b \in \mathcal{P}, x, y \in S'$ такие, что $\delta'(x, y) \leqslant a \vee b$. Тогда по лемме 1.4.2 существуют элементы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in S \subset S'$, для которых $\delta'(\bar{x}, \bar{u}) = \delta'(\bar{v}, \bar{w}) = a$, $\delta'(\bar{u}, \bar{v}) = \delta'(\bar{w}, \bar{y}) = b$ и $\delta'(\bar{x}, \bar{y}) = \delta'(x, y)$. Из первой группы равенств следует, что $\Theta_{S'}(\bar{x}, \bar{y}) \subseteq O_{\delta'}(a) \vee O_{\delta'}(b)$. Это вместе с неравенством $\delta'(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant \delta'(x, y)$ влечет $(x, y) \in \Theta_{S'}(\bar{x}, \bar{y}) \subseteq O_{\delta'}(a) \vee O_{\delta'}(b)$. Следовательно, условие 2 также выполняется.

Таким образом для (S', δ') выполнены все условия предложения 1.1. Отсюда заключаем, что $L \cong J(\mathcal{P}) \cong Con\ S'$, т.е. S' – искомая полугруппа.

Теперь мы покажем, как из теоремы I вытекает теорема II.

Пусть L – дистрибутивная алгебраическая решетка и $\mathcal{P}$ – счетная подполурешетка ее компактных элементов. Воспользуемся результатом, полученным независимо Ю.Л. Ершовым [1] и П. Пудлаком [39], согласно которому, $\mathcal{P}$ преставима как объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i$ счетной возрастающей по включению цепи дистрибутивных конечных решеток. Используя предыдущую теорему, мы можем для каждой решетки P_i построить полугруппу без идемпотентов $\tilde{S}_i$ и функцию расстояния $\delta_i \colon \tilde{S}_i \times \tilde{S}_i \to P_i$, для которых выполнены условия предложения 1.1.

Полугруппы $\tilde{S}_i$, вообще говоря, никак между собой не связаны. Построим теперь новую серию полугрупп S_i и соответствующих функций расстояния μ_i так, чтобы для S_i и μ_i выполнялись бы условия предложения 1.1, и чтобы полугруппы S_i образовывали возрастающую по включению цепь. Положим $S_0 = \tilde{S}_0$ и $\mu_0 = \delta_0$. Допустим, что мы уже построили полугруппу S_i и функцию расстояния $\mu_i \colon S_i \times S_i \to \mathcal{P}_i$. Положим $T_{i+1} = S_i * \tilde{S}_{i+1}$ и определим функцию $\nu_{i+1} \colon S_{i+1} \times S_{i+1} \to \mathcal{P}_i$ по правилу:

если слова p и q имеют канонические разложения $p = x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_n y_n$ и $q =$

$u_1v_1u_2v_2\dots u_mv_m$ (либо $p = y_1x_1y_2x_2\dots y_nx_n$ и $q = v_1u_1v_2u_2\dots v_mu_m$), где $x_i, u_j \in S_i$ и $y_i, v_j \in \tilde{S}_{i+1}$ то при $n = m$ положим $\nu_{i+1}(p,q) = \bigvee_{k=1}^n \mu_i(x_k,u_k) \vee \bigvee_{k=1}^n \delta_{i+1}(y_k,v_k)$. Во всех остальных случаях положим $\nu_i(p,q) = 1$.

То, что ν_{i+1} является фунцией расстояния, напрямую следует из того, что μ_i и δ_{i+1} сами являются функциями расстояния. Теперь к полугруппе T_{i+1} и функции ν_{i+1} применим конструкцию расширения из доказательства теоремы I и получим полугруппу без идемпотентов S_{i+1} и функцию расстояния μ_{i+1} такие, что для S_{i+1} и μ_{i+1} выполнено условие 4 предложения 1.1.

Положим $S = \bigcup_{i=0}^\infty \mathcal{S}_i$ и $\mu = \bigcup_{i=0}^\infty \mu_i$. Очевидно, что μ является функцией расстояния в $\mathcal{P}$ на S. Покажем, что для этой функции выполняются условия предложения 1.1. Пусть $a, b \in \mathcal{P}$ и $x, y \in S$ такие, что $\mu(x,y) \leqslant a \vee b$. Пусть n такое, что $x, y \in S_n$ и $a, b \in P_n$, тогда $(x,y) \in O_{\mu_n}(a) \vee O_{\mu_n}(b)$. Нетрудно видеть, что $O_{\mu_n}(c) \subseteq O_\mu(c)$ для любого $c \in \mathcal{P}_n$. Поэтому $(x,y) \in O_\mu(a) \vee O_\mu(b)$, то есть выполнено условие 2 предложения 1.1.

Сюръективность μ очевидна и значит выполнено условие 3. Покажем теперь, что выполняется условие 4. Действительно, если $\mu(x,y) \subseteq \mu(z,t)$, то $\mu_n(x,y) \subseteq \mu_n(z,t)$, где n такое, что $x, y, z, t \in S_n$. Для S_n и μ_n выполнено условие 4, поэтому $(x,y) \in O_{\mu_n} \vee \Theta_{S_n}(z,t)$, к тому же $O_{\mu_n} \subseteq O_\mu$, $\Theta_{S_n}(z,t) \subseteq \Theta_S(z,t)$. Поэтому условие 4 выполнено.

Отсюда и из предложения 1.1 следует, что $L \cong J(\mathcal{P}) \cong \operatorname{Con} S$. По построению S есть полугруппа без идемпотентов. Теорема II доказана.

Глава 2

Решетки конгруэнций полугрупп, в которых все конгруэнции рисовские

1° Введение

Данная глава посвящена доказательству теорем III и IV. Напомним их формулировку:

Теорема III. *Всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы, в которой все конгруэнции рисовские.*

Теорема IV. *Всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторого коммутативного 2-нильгруппоида, в котором все конгруэнции рисовские.*

В основе обоих доказательств лежит понятие идеальной функции – специального отображения от одного аргумента группоида (полугруппы) в частично упорядоченное множество. Идея рассматривать такие функции происходит от наблюдения, что если в группоиде G (в частном случае – в полугруппе G) с нулем все конгруэнции рисовские, то в нем выполняется свойство $\Theta(x,y) = \Theta(x,0) \vee \Theta(y,0)$ для любых $x, y \in G$. Таким образом, отображение $\Theta : G^2 \to \operatorname{Con} G$ полностью определяется своими значениями на парах вида $(x, 0)$, где $x \in G$, и может быть описано отображением от одного аргумента. На протяжении главы мы строим группоид (полугруппу) G и специальное отображение $\rho : G \to \operatorname{Con} S$, удовлетворяющее свойству $\rho(x) \vee \rho(y) = \Theta(x, y)$ для всех $x, y \in G$.

Понятие идеальной функции вводится и обсуждается в параграфе 2. Там же доказывается основное предложение, дающее ключ к теореме IV. Аналог этого предложения для случая полугрупп технически более сложен, ему посвящен параграф 3. В параграфе 4 приводятся заключительные рассуждения для обеих теорем.

2° Идеальная функция

Мы будем следовать книге [16] и обозначать частично упорядоченное множество всех вполне неразложимых элементов решетки L через $\operatorname{Ji} L$. В дистрибутивной алгебраической пространственной решетке выполняются тождества бесконечной дистрибутивности

$$x \vee (\bigwedge\{y_i : i \in I\}) = \bigwedge\{(x \vee y_i) : i \in I\},$$

$$x \wedge (\bigvee\{y_i : i \in I\}) = \bigvee\{(x \wedge y_i) : i \in I\},$$

поэтому в ней всякий вполне неразложимый элемент компактен, то есть $\operatorname{Ji} L \subseteq \operatorname{Comp} L$ для всякой решетки L указанного типа.

Пусть P – некоторое частично упорядоченное множество. Напомним, что подмножество $I \subseteq P$ называется *наследственным*, если из $a \in I$ и $b \leqslant a$ следует, что $b \in I$. Через $\operatorname{Down} P$ обозначим частично упорядоченное множество всех наследственных подмножеств P, упорядоченных относительно теоретико-множественного включения. Известно, что $\operatorname{Down} P$ – дистрибутивная решетка. Через $\operatorname{Down}_{\mathrm{fin}} P$ будем обозначать множество всех наследственных подмножеств A, в которых существует конечное подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ элементов из A таких, что для любого $y \in A$ выполняется $y \leqslant x_i$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. Нетрудно видеть, что $\operatorname{Down}_{\mathrm{fin}}(P)$ является $\cup$-полурешеткой с нулем, где в качестве нуля выступает пустое подмножество.

Лемма 2.2.1. *Пусть L – дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка.*

1. $\operatorname{Comp} L \cong \operatorname{Down}_{\mathrm{fin}} \operatorname{Ji} L$.

2. $L \cong \operatorname{Down} \operatorname{Ji} L$.

3. $\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *и* $\bigvee_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *для любого семейства* X_α, $\alpha \in \Lambda$.

Доказательство леммы с небольшими изменениями повторяет доказательство теоремы 107 из книги [16].

Пусть G – группоид с нулем и P – ч.у.м. *Идеальной* на G назовем функцию $\rho : G \to P$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\rho(0) = 0$,

2. $\rho(xy) \leqslant \rho(x)$, $\rho(xy) \leqslant \rho(y)$.

Пусть I – наследственное множество в P. Положим $\rho^*(I) = \{x \in G \mid \rho(x) \in I\}$, нетрудно заметить, что полученное множество будет идеалом в G. В итоге получаем отображение $\rho^* : \operatorname{Down} P \to \operatorname{Id} G$.

Далее мы докажем предложение, являющееся ключевым для доказательства теоремы IV.

Предложение 2.2.1. *Пусть G – группоид с нулем, P – ч.у.м. и $\rho : G \to P$ – идеальная функция. Пусть $a, b \in G$ такие, что $\rho(a) \geqslant \rho(b)$. Тогда существуют группоид $\tilde{G}$ с нулем и идеальная функция $\tilde{\rho} : \tilde{G} \to P$ такие, что*

1) G является подгруппоидом $\tilde{G}$;

2) $\tilde{\rho}|_G = \rho$;

3) существует такой элемент $u \in \tilde{G}$, что $au = b$ и $xu = 0$ для любого $x \in G$, $x \neq a$.

Более того, если G удовлетворяет тождествам $x^2 = 0$ и $xy = yx$, то и $\tilde{G}$ можно выбрать таким.

Доказательство. Пусть u – некоторый элемент, не входящий в G. Положим $\tilde{G} = G \cup \{u\}$. Доопределим в $\tilde{G}$ операцию умножения, полагая $ua = au = b$, $u^2 = 0$ и $xu = ux = 0$ для $x \in G \backslash \{a\}$. Элемент 0, как видно, будет нулем и в $\tilde{G}$.

Положим $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)$, если $x \in G$ и $\tilde{\rho}(u) = \rho(a)$. Таким образом, $\tilde{\rho}$ есть функция из $\tilde{G}$ в P. Проверим, что $\tilde{\rho}$ является идеальной функцией. Если $x, y \in G$, то $\tilde{\rho}(xy) = \rho(xy) \leqslant \rho(x) = \tilde{\rho}(x)$. Аналогично, $\tilde{\rho}(xy) \leqslant \tilde{\rho}(y)$. Далее, $\tilde{\rho}(ua) = \tilde{\rho}(au) = \tilde{\rho}(b) = \rho(b) \leqslant \rho(a) = \tilde{\rho}(a) = \tilde{\rho}(u)$. Неравенства $\tilde{\rho}(ux) = \tilde{\rho}(xu) = 0 \leqslant \tilde{\rho}(x)$ и $\tilde{\rho}(ux) = \tilde{\rho}(xu) = 0 \leqslant \tilde{\rho}(u)$ выполнены, очевидно, для всех $x \in G \backslash \{a\}$. Наконец, $\tilde{\rho}(uu) = 0 \leqslant \tilde{\rho}(u)$. Следовательно, $\tilde{\rho}$ является идеальной функцией.

В итоге $\tilde{G}$ и $\tilde{\rho}$ – искомые группоид и идеальная функция. Из построения видно, что если G удовлетворяет тождествам $x^2 = 0$ и $xy = yx$, то и $\tilde{G}$ им удовлетворяет. □

Предложение 2.2.2. *Пусть G – группоид с нулем, удовлетворяющий тождествам $x^2 = 0$ и $xy = yx$, P – ч.у.м. и $\rho : G \to P$ – идеальная функция, отделяющая ноль. Тогда существуют группоид с нулем $\tilde{G}$, удовлетворяющий тождествам $x^2 = 0$ и $xy = yx$, и идеальная функция $\tilde{\rho} : \tilde{G} \to P$, отделяющая ноль, такие, что $G \subseteq \tilde{G}$, $\tilde{\rho}|_G = \rho$ и*

1. Для любого $x \in \tilde{G}$ существует $u \in \tilde{G}$ такой, что $xu = x$ и $yu = 0$ для всех $y \in \tilde{G} \backslash \{x\}$.

2. Для любых $x, y \in \tilde{G}$ таких, что $\tilde{\rho}(x) \geqslant \tilde{\rho}(y)$, существует $v \in \tilde{G}$ такой, что $xv = y$.

Доказательство. Мы построим последовательность $(G_i, \rho_i, X_i, \gamma_i)$, где $(0 \leqslant i < \infty)$, такую, что

G_i – группоид с нулем, удовлетворяющий тождествам $x^2 = 0$ и $xy = yx$,;

ρ_i – идеальная функция расстояния $G_i \to P$;

X_i – некоторое вполне упорядоченное множество пар элементов из G_i, имеющее порядковый тип γ_i.

При этом для любого $0 \leqslant i \leqslant \infty$ будут выполнены следующие свойства:

1) G_i является подгруппоидом с нулем в G_{i+1};

2) ограничение ρ_{i+1} на G_i совпадает с ρ_i;

3) $X_i = \{(a_\alpha, b_\alpha) \mid \rho_i(a_\alpha) \geqslant \rho_i(b_\alpha)$ для всех $\alpha < \gamma_i\}$;

4) для любого $a \in G_i$ существует $u \in G_{i+1}$ такой, что $au = a$ и $bu = 0$ для всех $b \in G_i \backslash \{x\}$;

5) для любых $a, b \in G_i$ таких, что $\rho_i(a) \geqslant \rho_i(b)$, существует $v \in G_{i+1}$ такой, что $xv = y$.

Положим $G_0 = G$, $\rho_0 = \rho$. Определим $X_0 = \{(x, y) \in G_0^2 \mid \rho_0(x) \geqslant \rho_0(y)\}$. Зададим на X_0 произвольный полный порядок, а его порядковый тип обозначим через γ_0. Предположим теперь, что для некоторого неотрицательного i уже построены группоид G_i, функция $\rho_i : G_i \to P$ и множество $X_i \subseteq G_i^2$.

Для каждого ординала $\alpha < \gamma_i$ построим по индукции группоиды G_i^α и идеальные отображения ρ_i^α следующим образом:

1. $G_i^0 = G_i$, $\rho_i^0 = \rho_i$.

2. Для каждого ненулевого непредельного ординала $\alpha < \gamma_i$ в качестве G_i^α и ρ_i^α возьмем расширения, полученные по предложению 2.2.1 из группоида $G_i^{\alpha-1}$, идеальной функции $\rho_i^{\alpha-1}$ и пары $(a_{\alpha-1}, b_{\alpha-1})$ из множества X_i.

3. Для каждого предельного ординала $\alpha < \gamma_i$ положим $G_i^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} G_i^\beta$ и $\rho_i^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \rho_i^\beta$.

Положим теперь $G_{i+1} = \bigcup_{\alpha<\gamma_i} G_\alpha$ и $\rho_{i+1} = \bigcup_{\alpha<\gamma_i} \rho_\alpha$. Также определим $X_{i+1} = \{(a, b) \in G^{i+1} \backslash G^i \mid \rho_{i+1}(a) \geqslant \rho_{i+1}(b)\}$. Зададим произвольный полный порядок на X_{i+1}, а его порядковый тип обозначим через γ_{i+1}.

Искомая последовательность построена.

Положим $\tilde{G} = \bigcup_{i=1}^\infty G_i$ и $\tilde{\rho} = \bigcup_{i=1}^\infty \rho_i$. В общем случае $\tilde{\rho}$ необязательно отделяет ноль. Рассмотрим множество I_0 в $\tilde{G}$, составленное из элементов $x \in \tilde{G}$ таких, что $\rho(x) = 0$. Нетрудно заметить, что I_0 – идеал в $\tilde{G}$. Пусть ρ_{I_0} – рисовская конгруэнция, соответствующая I_0. Рассмотрим фактор $\bar{G} = \tilde{G}/\rho_{I_0}$ и естественный гомоморфизм $f : \tilde{G} \to \bar{G}$. Отображение f инъективно на множестве $\tilde{G} \setminus I_0$. Определим идеальную функцию $\bar{\rho} : \bar{G} \to P$ по правилу $\bar{\rho}(x) = \tilde{\rho}(f^{-1}(x))$ для $x \in \bar{G} \setminus \{0\}$ и $\bar{\rho}(0) = 0$. Ясно, что $\bar{\rho}$ сохраняет ноль. Заметим также, что поскольку ρ сохраняет ноль, G является подгруппоидом $\bar{G}$.

Нетрудно проверить, что выполнение условий предложения для $\bar{G}$ и $\bar{\rho}$ обеспечено условиями 1)-5) построенной последовательности. □

3° Основное предложение для случая полугрупп

В этом разделе мы докажем аналог предложения 2.2.1 для случая полугрупп. Это даст ключ к доказательству теоремы III.

Пусть $S, \tilde{S}$ – некоторые полугруппы, $h : S \to \tilde{S}$ – вложение и $\rho : S \to P$ – идеальная функция. Определим функцию $h(\rho) : h(S) \to P$ по правилу $h(\rho)(x) = \rho(h^{-1}(x))$. Нетрудно убедиться, что $h(\rho)$ будет идеальной функцией.

Предложение 2.3.1. *Пусть S – полугруппа с нулем 0_S и $\rho : S \to P$ – идеальная функция. Пусть $a, b \in S$ такие, что $\rho(a) \geqslant \rho(b)$ и $a \neq 0$. Тогда существуют полугруппа с нулем $\tilde{S}$ и идеальная функция $\tilde{\rho} : \tilde{S} \to P$ такие, что*

1) существует вложение $h : S \to \tilde{S}$, сохраняющее ноль;

2) $\tilde{\rho}|_{h(S)} = h(\rho)$;

3) существуют элементы $u, v \in \tilde{S}$ такие, что $uav = b$ и $uxv = 0$ для всех $x \in S \backslash \{a\}$.

Пусть F – полугруппа с нулем 0_F, порожденная двумя элементами u и v и заданная соотношением $uv = 0$. Рассмотрим свободное произведение полугрупп S и F. Профакторизуем его по конгруэнции $\Theta(0_F, 0_S)$, которая, как нетрудно заметить, является рисовской. Полученную полугруппу обозначим через T. Класс, содержащий нули S и F, будет нулем в T. Обозначим его через 0. Прочие одноэлементные классы мы будем отождествлять с теми элементами, которые в них содержатся. Договоримся также считать, что элемент 0 является элементом полугруппы S. Элементы T будем называть *словами*. Количество различных вхождений подслов u и v в слово t будем называть *весом* слова t, считая при этом по определению вес элемента 0 равным 0. Таким образом, слова веса 0 суть элементы полугруппы S. Мы также будем рассматривать пустое слово 1, полагая $1t = t1 = t$ для всех элементов из T. Полугруппу T с присоединенным пустым словом будем обозначать T^1, то же касается и рассматриваемых ниже подполугрупп полугруппы T.

Рассмотрим конгруэнцию Θ на полугруппе T, порожденную парами (uav, b), $(uxv, 0)$ для всех $x \in S \backslash \{a\}$. Положим $\tilde{S} = T/\Theta$.

Следующая лемма есть следствие известного результата А.И. Мальцева (см. например, [17], гл. 1, §10, теорема 3).

Лемма 2.3.1. *Если $c, d \in T$ и $(c, d) \in \Theta$, то существуют натуральное n и элементы $c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots c_n, d_n \in T$ такие, что выполняются следующие условия:*

1) $c = c_1$ и $d_n = d$;

2) $d_i = c_{i+1}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n - 1$;

3) для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $(c_i, d_i) = (e_i y_i f_i, e_i z_i f_i)$, где e_i, f_i – подходящие слова из T^1, и $z_i, y_i \in T$ такие, что либо $\{z_i, y_i\} = \{uav, b\}$, либо $\{z_i, y_i\} = \{uxv, 0\}$ для некоторого $x \in S \setminus \{a\}$.

Число n из леммы 2.3.1 мы будем называть *длиной* последовательности $c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots c_n, d_n$.

Заметим, что в последовательности, описанной в лемме 2.3.1, для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ если $c_i \neq 0$ и $(y_i, z_i) = (b, uav)$, то $d_i \neq 0$. Грубо говоря, при замене подслова b на подслово uav не появляется подслов вида uv, которые по определению F равны 0.

Лемма 2.3.2. *Любые два различных элемента c и d полугруппы S попадают в разные Θ-классы.*

Доказательство. Предположим, что c, d – различные элементы полугруппы S и $(c, d) \in \Theta$. По лемме 2.3.1 существуют натуральное n и последовательность элементов $c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots c_n, d_n \in T$, для которых выполняются условия 1)-3) леммы 2.3.1. Мы докажем наше утверждение индукцией по длине этой последовательности.

При $n = 1$ мы получаем, что одно из слов, например c, представимо в виде $euxvf$ для подходящих $e, f \in T$ и $x \in S$. Так как $c \in S$, это возможно только при $c = 0$, из чего следует, что либо $e = 0$, либо $x = 0$, либо $f = 0$. Но из условия 3) леммы 2.3.1 следует, что $d = eyf$, где $y = b$ при $x = a$ или $y = 0$ при $x \in S \setminus \{a\}$. Так как $a \neq 0$, получаем $d = 0$.

Предположим теперь, что $n > 1$ и утверждение выполнено при длине последовательности меньшей n. Мы будем считать, что все элементы $c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, d_2, \ldots, d_n$ различны.

Элементы c и d различные, поэтому хотя бы один из них, например c, не равен 0. Следовательно, в слове $c_1 = c$ нет подслов u и v. Тогда $c_1 = e_1 y_1 f_1$ и $d_1 = e_1 u z'_1 v f_1$, где $e_1, f_1 \in S$ и либо $y_1 = b$ и $z'_1 = a$, либо $y_1 = 0$ и $z'_1 \in S \setminus \{a\}$. Предположим теперь, что при всех $1 < i < k$ слова d_i имеют вид $e'_i u z'_i v f'_i$, где $(e'_i, e_1), (f'_i, f_1), (z'_i, z'_1) \in \Theta$, а слово d_k в таком виде уже не представимо (поскольку $d_n = d \in S$, такое k найдется). Имеем $c_k = d_{k-1} = e'_{k-1} u z'_{k-1} v f'_{k-1}$, с другой стороны, из 3) следует, что $c_k = e_k y_k f_k$. Нетрудно видеть, что требуемое ограничение на d_k выполняется только при $e_k = e'_{k-1}$, $f_k = f'_{k-1}$ и $y_k = u z'_{k-1} v$. Следовательно, d_k имеет вид $e_k z_k f_k$, где $z_k = b$ или $z_k = 0$. Из предположения индукции следует, что $z'_{k-1} = z'_1$, откуда $y_1 = z_k$. Вычеркнем теперь из слова c_1 подслово y_1, из всех слов c_i при $1 < i \leqslant k$ и d_i при $1 \leqslant i < k$ соответствующие подслова $u z'_i v$. Мы снова получим цепочку слов, удовлетворяющих условиям 1)-3), но при этом в новой цепочке $c'_1, d'_1, c'_2, d'_2, \ldots c'_n, d'_n \in T$ мы имеем $c'_1 = d'_1 = c'_2$. Это позволяет сократить последовательность слов и воспользоваться шагом индукции, т.е. получить $c'_1 =$

d'_n, а значит и в старой цепочке $c_1 = d_n$, что влечет $c = d$. □

Из леммы 2.3.2 вытекает, что S изоморфно вкладывается в $\tilde{S}$, причем при вложении ноль полугруппы S переходит в ноль $\tilde{S}$.

Слово $r \in T$ назовем *редуцированным*, если $r = 0$ либо r не содержит подслов вида uxv, где $x \in S$. Отметим, что любое подслово ненулевого редуцированного слова вновь является редуцированным.

Всякое ненулевое слово p полугруппы T имеет вид $x_1 f_1 x_2 f_2 x_3 \dots x_n f_n x_{n+1}$, где $x_i \in S$ при $2 \leqslant i \leqslant n$, $x_1, x_{n+1} \in S^1$, $f_i \in F$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом каждое слово f_i ненулевое, следовательно, имеет вид $v^{s_i} u^{t_i}$ для некоторых неотрицательных s_i, t_i. Если p редуцированное, то оно имеет вид

$$p = y_1 v^{k_1} y_2 v^{k_2} \dots y_m v^{k_m} x u^{l_1} z_1 u^{l_2} z_2 \dots u^{l_n} z_n,$$

где k_i, l_i – неотрицательные натуральные числа, $y_i, z_j \in S$ при $2 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $y_1, x, z_n \in S^1$.

В полугруппе T рассмотрим подполугруппу V, порожденную словами вида v и xv для ненулевых $x \in S$, и подполугруппу U порожденную словами u и ux для ненулевых $x \in S$. Отметим, что каждая из полугрупп V и U порождается свободно. Из предыдущих рассуждений следует, что всякое ненулевое редуцированное слово $p \in T$ имеет вид $p = p_v x p_u$, где $p_v \in V^1$, $p_u \in U^1$ и $x \in S^1$.

Лемма 2.3.3. *В каждом классе разбиения Θ существует единственное редуцированное слово.*

Доказательство. Существование хотя бы одного редуцированного слова в произвольном Θ-классе очевидно: последовательной заменой подслов uxv на 0 или на b, в зависимости от значения $x \in S$, мы можем получить слово, не содержащее таких подслов, или 0, при этом не выходя за рамки Θ-класса. Далее мы покажем единственность редуцированного слова в Θ-классе θ.

Случай 1. Пусть θ содержит 0. Тогда 0 является редуцированным словом в классе θ. Покажем, что все ненулевые слова из класса θ редуцированными не являются. Пусть p –

ненулевое редуцированное слово и $(p, 0) \in \Theta$. По лемме 2.3.1 это означает, что существуют натуральное n и последовательность элементов $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_n, d_n \in T$, для которых выполняются условия $p = c_1$, $d_n = 0$ и условия 2)-3) леммы 2.3.1. Мы будем доказывать утверждение индукцией по длине этой последовательности.

Пусть $n = 1$. В силу замечания после леммы 2.3.1 имеем $p = euxvf$, где $e, f \in T$, $x \in S$ и либо $x \neq a$, либо $e, f \in S$ и $ebf = 0$. Оба варианта противоречат тому, что p редуцированное. Далее мы будем считать, что утверждение доказано для всех слов с длиной соответствующей последовательности меньшей n. Без ограничения общности можно считать, что все элементы этой последовательности различны.

Так как c_1 редуцировано, оно не содержит подслов вида uxv для $x \in S$. Следовательно, $(c_1, d_1) = (e_1bf_1, e_1uavf_1)$. Найдется такой номер k, что при всех $1 < i \leqslant k-1$ слова d_i имеют вид $e'_iuz'_ivf'_i$, где $(e'_i, e_1), (f'_i, f_1), (z'_i, a) \in \Theta$ и либо $k = n$, либо $k < n$ и d_k в таком виде уже не представимо.

Пусть $k = n$. Тогда $c_n = d_{n-1} = e'_{n-1}uz'_{n-1}vf'_{n-1}$ – ненулевое слово, а $d_n = 0$. С учетом замечания после леммы 2.3.1, имеем один из следующих случаев:

1) $d_n = e'_nuz'_{n-1}vf'_{n-1}$, где $(e'_{n-1}, e'_n) \in \Theta$ и $e'_n = 0$;

2) $d_n = e'_{n-1}uz'_{n-1}vf'_n$, где $(f'_{n-1}, f'_n) \in \Theta$ и $f'_n = 0$;

3) $d_n = e'_{n-1}0f'_{n-1}$.

В случае 1) вычеркнем из c_1 подслово b, а из слов $d_1, c_2, d_2, \dots, c_{n-1}, d_n$ соответствующее подслово $uz'_{n-1}v$. Поскольку c_1 было редуцированным, в нем не было подслов вида uxv для $x \in S$, следовательно, после вычеркивания нулевым оно не станет, а значит останется ненулевым редуцированным словом. При этом длина соответствующей последовательности слов стала короче. Из предположения индукции следует, что слово c_1 с вычеркнутым b не является редуцированным, а значит и c_1 таковым не является. Случай 2) разбирается аналогично.

В случае 3) мы получаем, что $z'_{n-1} \in S$, но $z'_{n-1} \neq a$ и $(z'_{n-1}, a) \in \Theta$, что противоречит лемме 2.3.2.

Пусть теперь $k < n$ и d_k не представимо в указанном выше виде. Имеем $c_k = d_{k-1} = e'_{k-1}uz'_{k-1}vf'_{k-1}$, с другой стороны, из условия 3) леммы 2.3.1 следует, что $c_k = e_ky_kf_k$.

Нетрудно видеть, что требуемое ограничение на d_k выполняется только при $e_k = e'_{k-1}$, $f_k = f'_{k-1}$ и $y_k = uz'_{k-1}v$. Следовательно, d_k имеет вид $e_kz_kf_k$, где $z_k = b$. По лемме 2.3.2 имеем $z'_{k-1} = z'_1$, откуда $y_1 = z_k$. Далее мы повторим описанную выше процедуру вычеркивания и вновь получим противоречие с предположением индукции.

Случай 2. Пусть θ не содержит 0. Пусть r_1 и r_2 – два различных редуцированных слова из класса θ. Поскольку $(r_1, r_2) \in \Theta$, по лемме 2.3.1 существуют натуральное n и последовательность $c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n$ такая, что выполняются условия $r_1 = c_1$, $d_n = r_2$ и условия 2)-3) из леммы 2.3.1. При этом можно считать, что все элементы этой последовательности различны.

Мы будем доказывать утверждение индукцией по n. При $n = 1$ мы получаем, что либо $c_1 = r_1$, либо слово $d_1 = r_2$ содержит подслово uav, что противоречит тому, что r_1 и r_2 редуцированы. Далее мы будем считать, что утверждение доказано для всех слов с длиной соответствующей последовательности меньшей n.

Так как c_1 редуцировано, оно не содержит подслов вида uxv для $x \in S$. Следовательно, $(c_1, d_1) = (e_1bf_1, e_1uavf_1)$. Предположим теперь, что при всех $1 < i \leqslant k-1$ слова d_i имеют вид $e'_iuz'_ivf'_i$, где $(e'_i, e_1), (f'_i, f_1), (z'_i, a) \in \Theta$ и d_k в таком виде уже не представимо.

Имеем $c_k = d_{k-1} = e'_{k-1}uz'_{k-1}vf'_{k-1}$, с другой стороны, $c_k = e_ky_kf_k$. Нетрудно видеть, что требуемое ограничение на d_k выполняется только при $e_k = e'_{k-1}$, $f_k = f'_{k-1}$ и $y_k = uz'_{k-1}v$. Следовательно, d_k имеет вид e_kbf_k. Вычеркнем из $c_1 = e_1bf_1$ подслово b, а из $d_1, c_2, d_2, \ldots, c_{n-1}, d_n$ соответствующее подслово $uz'_{n-1}v$. Поскольку c_1 было редуцированным, в нем не было подслов вида uxv для $x \in S$, следовательно, после вычеркивания нулевым оно не станет, а значит e_1f_1 – ненулевое редуцированное слово. При этом длина соответствующей последовательности слов стала короче. Из предположения индукции следует, что одно из слов e_1f_1 и r_2 не является редуцированным, а значит одно из слов r_1 и r_2 не является редуцированным. □

Пусть $\theta \in \tilde{S}$. Обозначим через $red(\theta)$ редуцированное слово класса θ. Из леммы 2.3.3 следует корректность такого определения. Если $r \in T$, то через $red(r)$ будем обозначать редуцированное слово того класса, которому принадлежит r.

Зададим отображения $f : V \to S$ и $g : U \to S$ индуктивно по весу слова следующим образом:

1) $f(v) = b$ и $g(u) = b$;

2) для любого $x \in S$ определим $f(xv) = b$, если x делит a справа и $f(xv) = xb$, если x не делит a справа;

для любого $x \in S$ определим $g(ux) = b$, если x делит a слева и $g(ux) = bx$, если x не делит a слева;

3) Если $p \in V$ и $p = p_1p_2$ для некоторых $p_1, p_2 \in V$, то определим $f(p) = f(f(p_1)p_2)$;

если $q \in U$ и $q = q_1q_2$ для некоторых $q_1, q_2 \in U$, то определим $g(q) = g(q_1g(q_2))$.

Так как полугруппа U свободна, всякий элемент раскладывается в произведение элементов базиса U единственным образом. Пусть для элемента q это разложение имеет вид $q_1q_2 \dots q_n$. Нетрудно заметить, что тогда

$$g(q) = g(q_1g(q_2g(\dots q_{n-1}g(q_n))\dots)),$$

из чего следует корректность определения функции g. Корректность f проверяется аналогично.

Пусть p – ненулевое редуцированное слово. Как было отмечено выше, p представимо в виде p_vxp_u, где $p_v \in V^1$, $p_u \in U^1$ и $x \in S^1$. Определим $\overline{p} = f(p_v)xg(p_u)$. Также положим $\overline{0} = 0$. Ясно, что $\overline{p} \in S$.

Заметим, что если $p \in V$, то $\overline{p} = f(p)$, если $p \in U$, то $\overline{p} = g(p)$, а если $p \in S$, то $\overline{p} = p$.

Положим $\tilde{\rho}(\theta) = \rho(\overline{red(\theta)})$. Таким образом, $\tilde{\rho}$ есть отображение $\tilde{S}$ в P. Далее мы покажем, что $\tilde{S}$ и $\tilde{\rho}$ являются искомыми полугруппой и идеальной функцией. Как уже было замечено выше, отображение $h : x \mapsto \theta[x]$ есть вложение S в $\tilde{S}$ с сохранением нуля, следовательно условие 1) предложения 2.3.1 выполнено. Далее, для $x \in S$ редуцированным словом в классе $\theta[x]$ будет x. Из этого следует, что $\tilde{\rho}(\theta[x]) = \rho(\overline{x}) = \rho(x)$, откуда $\tilde{\rho}|_{h(S)} = h(\rho)$, а значит условие 2) выполнено. Теперь заметим, что $\theta[u]\theta[a]\theta[v] = \theta[uav] = \theta[b]$ и $\theta[u]\theta[x]\theta[v] = \theta[uxv] = \theta[0]$ для всех $x \in S \setminus \{a\}$. С учетом того, как устроено вложение S в $\tilde{S}$, это означает выполнение условия 3) предложения 2.3.1.

Осталось показать, что $\tilde{\rho}$ является идеальной функцией, этому посвящены следующие три леммы.

Заметим, что если p – некоторое редуцированное слово, $q \in S^1U^1$ и $r \in V^1S^1$, то слова pq и rp также редуцированные.

Лемма 2.3.4. *Пусть p – редуцированное слово, $q \in S^1U^1$ и $r \in V^1S^1$. Тогда $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ и $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{rp})$.*

Доказательство. Мы проверим первое неравенство, второе проверяется аналогично.

Поскольку q представимо в виде $x_1u^{k_1}x_2u^{k_2}\dots x_nu^{k_n}x_{n+1}$, где $k_1,\dots,k_n$ – положительные натуральные числа и $x_i \in S^1$ при $1 \leqslant i \leqslant n+1$, достаточно доказать предложение для случая, когда $q = u$ или $q = x$ для некоторого $x \in S$. Действительно, в этом случае мы получим

$$\rho(\overline{px_1u^{k_1}\dots u^{k_n}x_{n+1}}) \leqslant \rho(\overline{px_1u^{k_1}\dots u^{k_n}}) \leqslant \rho(\overline{px_1u^{k_1}\dots u^{k_n-1}}) \leqslant \dots \leqslant \rho(\overline{p}).$$

Более того, если $p = p_vxp_u$, где $p_v \in V^1$, $p_u \in U^1$ и $x \in S^1$, то

$$\rho(\overline{pu}) = \rho(\overline{p_vxp_uu}) = \rho(f(p_v)xg(p_uu) = \rho(f(p_v)xg(p_ug(u)) =$$

$$= \rho(f(p_v)xg(p_ub)) = \rho(\overline{p_vxp_ub}) = \rho(\overline{pb}).$$

Получаем, что случай $q = u$ эквивалентен случаю $q = b$, поэтому достаточно разобрать только случай, когда $q \in S$.

Мы будем доказывать утверждение индукцией по весу p. Если вес p равен нулю, то $p \in S$ и утверждение вытекает из того факта, что ρ – идеальная функция на S. Предположим теперь, что утверждение верно для всех слов с весом меньшим, чем k, и вес p равен k.

Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. $p = p_vx$ и $q = y$ для некоторых $p_v \in V^1$, $x \in S^1$ и $y \in S$. Тогда

$$\rho(\overline{pq}) = \rho(\overline{p_vxy}) = \rho(f(p_v)xy) \leqslant \rho(f(p_v)x) = \rho(\overline{p_vx}) = \rho(\overline{p}).$$

Случай 2. $p = p_vxp_u$ и $q = y$ для некоторых $p_v \in V$, $p_u \in U$, $x \in S^1$ и $y \in S$, причем $p_u = p'_uuz$ для некоторого $z \in S^1$. Если z и zy оба являются левыми делителями a, то

$$\rho(\overline{pq}) = \rho(\overline{p_vxp'_uuzy}) = \rho(f(p_v)xg(p'_uuzy)) =$$

$$= \rho(f(p_v)xg(p'_u g(uzy))) = \rho(f(p_v)xg(p'_u b)) = \rho(f(p_v)xg(p'_u g(uz))) =$$

$$= \rho(f(p_v)xg(p'_u uz)) = \rho(\overline{p_v x p'_u uz}) = \rho(\overline{p}).$$

Если z является левым делителем a, а zy не является, то имеем

$$\rho(\overline{pq}) = \rho(\overline{p_v x p'_u uzy}) = \rho(f(p_v)xg(p'_u uzy)) =$$

$$= \rho(f(p_v)xg(p'_u g(uzy))) = \rho(f(p_v)xg(p'_u bzy)) = \rho(\overline{p_v x p'_u bzy})$$

Слово $p_v x g p'_u b$ имеет вес меньше k, следовательно, мы можем воспользоваться предположением индукции. Если z является левым делителем a, то

$$\rho(\overline{p_v x p'_u bzy}) \leqslant \rho(\overline{p_v x p'_u b}) = \rho(f(p_v)xg(p'_u b)) = \rho(f(p_v)xg(p'_u g(uz))) =$$

$$= \rho(f(p_v)xg(p'_u uz)) = \rho(\overline{p_v x p'_u uz}) = \rho(\overline{p}).$$

Если z не является левым делителем a, то

$$\rho(\overline{p_v x p'_u bzy}) \leqslant \rho(\overline{p_v x p'_u bz}) = \rho(f(p_v)xg(p'_u bz)) = \rho(f(p_v)xg(p'_u g(uz))) =$$

$$= \rho(f(p_v)xg(p'_u uz)) = \rho(\overline{p_v x p'_u uz}) = \rho(\overline{p}).$$

□

Лемма 2.3.5. *1) Если $p, q \in V^1S^1$, то $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ и $\rho(\overline{q}) \geqslant \rho(\overline{pq})$.*
2) Если $p, q \in S^1U^1$, то $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ и $\rho(\overline{q}) \geqslant \rho(\overline{pq})$.

Доказательство. Мы покажем первое утверждение, второе получается двойственно. Так как слово q редуцировано, формула $\rho(\overline{q}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ является следствием леммы 2.3.4. Мы докажем неравенство $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{pq})$ индукцией по весу слова p. Если вес p равен 0, то $p \in S^1$ и утверждение следует из леммы 2.3.4. Пусть теперь формула верна для всех слов с весом меньшим $k > 0$, и вес p равен k. Пусть $q = q_v y$ и $p = vzp'_v x$ для некоторых $q_v, p'_v \in V^1$ и $x, z, y \in S^1$. Тогда

$$\rho(\overline{pq}) = \rho(\overline{vzp'_v x q_v y}) = \rho(f(vzp'_v x q_v)y) = \rho(f(f(vz)p'_v x q_v)y).$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Если z является левым делителем a, то

$$\rho(f(f(vz)p'_v x q_v)y) = \rho(f(bp'_v x q_v)y) = \rho(\overline{bp'_v x q_v y}).$$

Вес слова $bp'_v x$ меньше k, поэтому из предположения индукции следует, что

$$\rho(\overline{bp'_v x q_v y}) \leqslant \rho(\overline{bp'_v x}) = \rho(f(bp'_v)x) = \rho(f(f(vz)p'_v)x) = \rho(f(vzp'_v)x) =$$

$$= \rho(\overline{vzp'_v x}) = \rho(\overline{p}).$$

Случай 2. Если z не является левым делителем a, то

$$\rho(f(f(vz)p'_v x q_v)y) = \rho(f(bzp'_v x q_v)y) = \rho(\overline{bzp'_v x q_v y}).$$

Вес слова $bzp'_v x$ меньше k, поэтому из предположения индукции следует, что

$$\rho(\overline{bzp'_v x q_v y}) \leqslant \rho(\overline{bzp'_v x}) = \rho(f(bzp'_v)x) = \rho(f(f(vz)p'_v)x) = \rho(f(vzp'_v)x) =$$

$$= \rho(\overline{vzp'_v x}) = \rho(\overline{p}).$$

□

Лемма 2.3.6. *Пусть p и q два редуцированных слова. Тогда $\rho(\overline{p}) \geqslant \rho(\overline{red(pq)})$ и $\rho(\overline{q}) \geqslant \rho(\overline{red(pq)})$.*

Доказательство. Очевидны случаи, когда $p = 0$ или $q = 0$, а также случай, когда $red(pq) = 0$.

Имеем $p = p_v x p_u$ и $q = q_v x q_u$ для некоторых $p_v, q_v \in V^1$, $p_u, q_u \in U^1$, $x, y \in S^1$. Если слово pq редуцированное и ненулевое, то одно из слов p_u или q_v пусто, и утверждение вытекает из леммы 2.3.4.

Пусть pq не находится в Θ-классе элемента 0 и нередуцировано. Из леммы 2.3.3 следует, что $p = p''p'$ и $q = q'q''$, где $p', q', p'', q'' \in T^1$ и p' – подслово p_u, а q' – подслово q_v, $red(p'q') = b$ и $p''bq''$ – редуцированное. Таким образом, $red(p''p'q'q'') = p''bq''$.

Так как p' – подслово p_u, а q' – подслово q_v, то $p' = ux_1ux_2 \ldots ux_n$, $q' = y_nv \ldots y_2vy_1v$, где $x_i, y_i \in S^1$. Из $(pq, 0) \notin \Theta$ следует, что $x_ny_n = a$ и $x_iby_i = a$ для $1 \leqslant i \leqslant n{-}1$. Следовательно, все элементы x_i при $1 \leqslant i \leqslant n$ являются левыми делителями a, а элементы y_i при $1 \leqslant i \leqslant n$ являются правыми делителями a. Из этого следует, что $g(p') = b$ и $f(q') = b$.

Слова p'', q'', $p''bq''$ все являются редуцированными. Из этого следует, что либо $p'' \in V^1S^1$, либо $q'' \in S^1U^1$. Рассмотрим случай, когда $p'' \in V^1S^1$, другой случай получается двойственно.

Пусть $p'' = p''_v x$ и $q'' = q''_v y q''_u$, где $p''_v, q''_v \in V^1$, $q''_u \in U^1$ и $x, y \in S^1$. Имеем

$$\rho(\overline{red(pq)}) = \rho(\overline{red(p''p'q'q'')}) = \rho(\overline{p''bq''}) = \rho(\overline{p''_v x b q''_v y q''_u}).$$

Используя леммы 2.3.4 и 2.3.5, получаем

$$\rho(\overline{p''_v x b q''_v y q''_u}) \leqslant \rho(\overline{p''_v x b q''_v}) \leqslant \rho(\overline{p''_v x b}) = \rho(f(p''_v)xb) = \rho(f(p''_v)xg(p')) =$$

$$= \rho(\overline{p''_v x p'}) = \rho(\overline{p''p'}) = \rho(\overline{p}).$$

С другой стороны, используя лемму 2.3.4, имеем

$$\rho(\overline{p''_v x b q''_v y q''_u}) \leqslant \rho(\overline{b q''_v y q''_u}) = \rho(f(bq''_v)yg(q''_u)) = \rho(f(f(q')q''_v)yg(q''_u)) =$$

$$= \rho(f(q'q''_v)yg(q''_u)) = \rho(\overline{q'q''_v y q''_u}) = \rho(\overline{q'q''}) = \rho(\overline{q}).$$

□

Из леммы 2.3.6 следует, что $\tilde{\rho}$ является идеальной функций. Доказательство предложения 2.3.1 завершено.

Предложение 2.3.2. *Пусть S – полугруппа с нулем, P – полурешетка с нулем и $\rho : S \to P$ – идеальная функция, сохраняющая ноль. Тогда существует полугруппа с нулем $\tilde{S}$ и идеальная функция $\tilde{\rho} : \tilde{S} \to P$, сохраняющая ноль, такие, что S – подполугруппа в $\tilde{S}$, $\tilde{\rho}|_S = \rho$ и*

1. Для любого $x \in \tilde{S}$ существуют $u, v \in \tilde{S}$ такие, что $uxv = x$ и $uyv = 0$ для всех $y \in \tilde{S} \backslash \{x\}$.

2. Для любых $x, y \in \tilde{S}$ таких, что $\tilde{\rho}(x) \geqslant \tilde{\rho}(y)$, существуют $u, v \in \tilde{S}$ такие, что $uxv = y$.

Доказательство предложения полностью повторяет доказательство предложения 2.2.2 с использованием предложения 2.3.1 вместо предложения 2.2.1.

4° Доказательство основных результатов

Приступим к доказательству теоремы III. Пусть L – дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка.

Для каждого $x \in \mathrm{Ji}\, L$ положим

$$C(x) = \bigcap \{U \in \mathrm{Down\,Ji}\, L \mid x \in U\}.$$

Из пункта 3) леммы 1 следует, что $x \in C(x)$.

Отметим, что для каждого $x \in \mathrm{Ji}\, L$ элемент $C(x)$ вполне неразложим. Обратно, всякий вполне неразложимый элемент $C \in \mathrm{Down\,Ji}\, L$ представим в виде $C(x)$ для подходящего $x \in \mathrm{Ji}\, L$. Действительно, в силу вполне неразложимости C существует единственный элемент $Y \in \mathrm{Down\,Ji}\, L$ такой, что C покрывает Y. Рассмотрим произвольный элемент $p \in C \backslash Y$. Очевидно, что $C = C(p)$. Итак, мы установили, что вполне неразложимыми элементами являются элементы вида $C(x)$ при подходящем $x \in \mathrm{Ji}\, L$ и только они.

Положим $S = \mathrm{Ji}\, L \cup \{0\}$. Зададим на S умножение по правилу $xy = 0$ для всех $x, y \in S$. Заметим, что S является полугруппой, удовлетворяющей тождествам $xy = yx$ и $x^2 = 0$. Зададим идеальную функцию $\rho : S \to P$ по правилу $\rho(x) = C(x)$ для $x \in \mathrm{Ji}\, L$ и $\rho(0) = 0$. Очевидно, что ρ отделяет ноль. Тогда, по предложению 2.3.2, существует полугруппа $\tilde{S}$ с нулем 0 и идеальное отображение $\tilde{\rho} : \tilde{S} \to P$, сохраняющее ноль, такие, что $S \subseteq \tilde{S}$, $\tilde{\rho}|_S = \rho$ и выполнены условия:

1. Для любого $x \in \tilde{S}$ существуют $u, v \in \tilde{S}$ такие, что $uxv = x$ и $uyv = 0$ для всех $y \in \tilde{S} \backslash \{x\}$.

2. Для любых $x, y \in \tilde{S}$ таких, что $\tilde{\rho}(x) \geqslant \tilde{\rho}(y)$, существуют $u, v \in \tilde{S}$ такие, что $uxv = y$.

Пусть теперь $\Theta \in \mathrm{Con}\, \tilde{S}$ и пусть $(a, b) \in \Theta$ для некоторых различных $a, b \in \tilde{S}$. Тогда $(a, 0) = (u_a a v_a, u_a b v_b) \in \Theta$ и, аналогично, $(b, 0) \in \Theta$. Таким образом, единственным неодноэлементным классом Θ является класс, содержащий 0. Значит Θ является рисовской конгруэнцией, порожденной некоторым идеалом. Из этого следует, что $\mathrm{Con}\, \tilde{S} \cong \mathrm{Id}\, S$.

Осталось лишь показать, что решетка $\mathrm{Id}\, \tilde{S}$ изоморфна решетке L. Для этого покажем, что $\mathrm{Ji}(\mathrm{Id}\, \tilde{S})$ и $\mathrm{Ji}\, L$ изоморфны как ч.у.м.

Рассмотрим отображение ϕ из множества $\operatorname{Ji} L$ неразложимых элементов L в множество $\operatorname{Id}^1 \tilde{S}$ главных идеалов $\tilde{S}$, построенное по следующему правилу:

$$\phi(p) = \{x \in \tilde{S} \mid \rho(x) \leqslant p\}.$$

Из определения идеального отображения следует, что для любого вполне неразложимого элемента $p \in L$ множество $\phi(p)$ является идеалом. По построению ρ существует элемент $x \in \tilde{S}$ такой, что $\rho(x) = p$. Покажем, что x порождает весь идеал. Пусть $y \in \phi(p)$, следовательно, $\rho(y) \leqslant \rho(x)$. Тогда существуют такие элементы $u_{xy}, v_{xy} \in \tilde{S}$, что $u_{xy} x v_{xy} = y$. Это показывает, что x порождает весь идеал $\phi(p)$, следовательно, $\phi(p) \in \operatorname{Id}^1 \tilde{S}$.

Покажем, что ϕ является изоморфизмом частично упорядоченных множеств. Очевидно, что ϕ изотонно.

Проверим инъективность ϕ. Действительно, пусть $p_1 \neq p_2$ – два неразложимых элемента и, без ограничения общности, $p_1 \nleqslant p_2$. Функция ρ сюръективна, следовательно, существует $z \in \tilde{S}$ такой, что $\rho(z) = p_1$. Но тогда $z \in \phi(p_1) \backslash \phi(p_2)$, следовательно, $\phi(p_1) \neq \phi(p_2)$.

Покажем, что ϕ сюръективно. Пусть I – главный идеал, порожденный элементом a. Тогда $\rho(a)$ есть неразложимый элемент, это следует из построения ρ. Покажем, что $\phi(\rho(a)) = I$. Действительно, если $x \in I$, то, очевидно, $\rho(x) \leqslant \rho(a)$, из чего следует, что $I \subseteq \phi(\rho(a))$. Далее, если $x \in \phi(\rho(a))$, то $\rho(x) \leqslant \rho(a)$. Тогда существуют элементы $u_{ax}, v_{ax} \in S$ такие, что $u_{ax} a v_{ax} = x$. Следовательно, x принадлежит I. В итоге имеем $\phi(\rho(a)) = I$.

Итак, ϕ это изоморфизм частично упорядоченных множеств $\operatorname{Ji} L$ и $\operatorname{Id}^1 \tilde{S} \cong \operatorname{Ji}(\operatorname{Id} \tilde{S})$. Следовательно, $\operatorname{Down} \operatorname{Ji} L \cong \operatorname{Down} \operatorname{Ji}(\operatorname{Id} \tilde{S})$, что означает $L \cong \operatorname{Id} \tilde{S}$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы IV проводится аналогично с использованием предложения 2.2.2 вместо 2.3.2.

Глава 3

Решетки конгруэнций нильполугрупп

1° Введение

Напомним формулировки теорем, которые мы планируем доказать в этой главе.

Теорема V. *Если решетка конгруэнций нильполугруппы дистрибутивна, то она является цепью.*

Теорема VI. *Пусть S – конечная нильполугруппа. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\operatorname{Con} S$ *модулярна, но не дистрибутивна;*

2) $(S, \leqslant)$ *имеет ширину 2;*

3) $(S, \leqslant)$ *порождается двумя элементами* $a, b \in S$ *и ч.у.м.* $\{a^2, ab, ba, b^2\}$ *имеет ширину 2.*

4) S *изоморфна одной из полугрупп в таблице 1 (см стр. 73–75).*

Следствие I.

Всякая нильпотентная полугруппа с модулярной решеткой конгруэнций конечна.

Теорема VII. *Пусть S – нильполугруппа.*

1) $\operatorname{Con} S$ *не может иметь ширину 2.*

2) $\operatorname{Con} S$ *не может содержать в качестве фильтра цепи, двойственной цепи натуральных чисел.*

Мощность решетки конгруэнций нильполугруппы зависит от мощности самой нильполугруппы, поэтому техника построения расширений, разработанная в главах 1 и 2, в данном случае неприменима. Однако свойства дистрибутивности или модулярности решетки конгруэнций нильполугруппы ограничивают сравнительно небольшой класс нильполугрупп, что дает возможность их прямого описания.

В главе используются теоретико-решеточные понятия S-склеенных сумм, мультивставок и решеток максимальных антицепей, введенные соответственно в работах [22], [13] и [7]. С их помощью проводится анализ внутреннего строения решеток конгруэнций нильполугрупп, который представляет самостоятельный интерес. Отметим, что П.Джонсом и автором в работе [58] удалось получить прямое доказательство теоремы V и эквивалентности пунктов 1)-3) теоремы VI, не использующие дополнительных теоретико-решеточных конструкций. Однако в этом доказательстве структура решеток конгруэнций глубоко не исследуется, поэтому в диссертации приведено более подробное доказательство, свободное от этого недостатка.

В параграфе 2 описываются вспомогательные теоретико-решеточные конструкции. В параграфе 3 с их помощью получены важные свойства решеток конгруэнций, из которых следуют теоремы V и VII. Доказательство теоремы VI содержится в параграфах 4 и 5.

2° Вспомогательные конструкции

Напомним, что в частично упорядоченном множестве P элемент $a \in P$ *покрывает* элемент $b \in P$, если для любого $c \in P$ из $a \geqslant c \geqslant b$ следует $c = a$ или $c = b$. Отношение покрытия обозначается символом $\prec$, запись $b \prec a$ означает, что a покрывает b.

Пусть S и L_s, $s \in S$, суть решетки конечной длины. Система L_s, $s \in S$, называется *S-склеенной системой*, если выполняются следующие условия:

(1) Для любых $s, t \in S$, если $s \leqslant t$, то либо $L_s \cap L_t = \emptyset$, либо $L_s \cap L_t$ – фильтр в L_s и идеал в L_t.

(2) Для любых $s, t \in S$ таких, что $s \leqslant t$, и для любых $a, b \in L_s \cap L_t$, отношение $a \leqslant b$ выполнено в L_s тогда и только тогда, когда $a \leqslant b$ в L_t.

(3) Для любых $s, t \in S$, если $s \prec t$, то $L_s \cap L_t \neq \emptyset$.

(4) Если $s, t \in S$, то $L_s \cap L_t \subseteq L_{s\wedge t} \cap L_{s\vee t}$.

Пусть $L = \bigcup(L_s | s \in S)$, где L_s, $s \in S$ – некоторая S-склеенная система. Определим частичный порядок $\leqslant$ в L следующим образом: для любых $a, b \in L$ положим $a \leqslant b$, если существуют последовательность $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ элементов L и последовательность $s_1, \ldots, s_n$ элементов S такие, что $s_i \leqslant s_{i+1}$ в S, $i = 1, \ldots, n-1$, и $x_{i-1} \leqslant x_i$ в L_{s_i}, $i = 1, \ldots, n$. Тогда L является решеткой, которая называется *S-склеенной суммой* решеток L_s, $s \in S$.

В работе [22] было показано, что S-склеенная сумма модулярных решеток конечной длины является модулярной решеткой.

Пусть L – решетка, а L_λ, $\lambda \in \Lambda$, – набор ее подрешеток.

1) L_λ, $\lambda \in \Lambda$, называется *покрытием (атласом)* L, если $L = \bigcup(L_\lambda | \lambda \in \Lambda)$.

2) Для $a, b \in \bigcup(L_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ положим $a \leqslant_\Lambda b$, если существует последовательность $a = s_0, s_1, \ldots, s_n = b$ элементов L такая, что для любого $0 \leqslant i \leqslant n$ существует $\lambda_i \in \Lambda$ такой, что $s_i, s_{i+l} \in L_{\lambda_i}$ и $s_i \leqslant s_{i+1}$ в L_{λ_i}.

3) Покрытие L_λ, $\lambda \in \Lambda$, решетки L называется *полным*, если $a \leqslant b$ в L равносильно $a \leqslant_\Lambda b$.

4) Покрытие L_λ, $\lambda \in \Lambda$, решетки L называется *совместимым*, если для любых $a, b, c \in L$, из того, что $a \leqslant_\Lambda c$, $b \leqslant_\Lambda c$ и $a, b \in L_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$, следует $a \vee b \leqslant_\Lambda c$, где $a \vee b$ есть объединение a и b в L_λ; а также выполняется двойственное условие.

Пусть L – решетка и L_λ, $\lambda \in \Lambda$, – совместимое покрытие L. Тогда L называется *мультивставкой (a multipasting)* решеток L_λ, $\lambda \in \Lambda$, если для любой решетки K и любого отображения ψ решетки L на K, из того, что все ограничения $\psi_\lambda : L_\lambda \to K$ для любого $\lambda \in \Lambda$ являются гомоморфизмами, следует, что ψ также является гомоморфизмом L на K.

Мультивставка в общем случае не сохраняет каких-либо тождеств. Так, любая решетка является мультивставкой всех своих булевых подрешеток. Однако при некоторых ограничениях можно утверждать, что если все слагаемые удовлетворяют некоторому тождеству, то это же тождество выполнено в мультивставке. В работе [13] приведен пример такого ограничения в случае тождества модулярности. Воспроизведем его формулировку.

Пусть L – решетка конечной длины и L_λ, $\lambda \in \Lambda$, – покрытие решетки L. Назовем L *сильной мультивставкой* своих подрешеток L_λ, $\lambda \in \Lambda$, если выполнены следующие два условия:

(Ord) Для любых $a, b \in L$, если $a \leqslant b$, то существует последовательность $a = s_0, s_1, \ldots, s_n = b$ элементов L такая, что для любого $0 \leqslant i \leqslant n$, существует $\lambda_i \in \Lambda$ такой, что $s_i, s_{i+1} \in L_{\lambda_i}$ и $s_i \leqslant s_{i+1}$ в L_{λ_i}.

(Cov2) Если два элемента покрывают один и тот же элемент, то они принадлежат одному слагаемому L_λ, для некоторого $\lambda \in \Lambda$; а также выполнено двойственное условие.

Пусть L – решетка конечной длины, которая является мультивставкой подрешеток L_λ, $\lambda \in \Lambda$. Назовем ее мультивставкой со свойством *интерполяции сверху*, если она является сильной мультивставкой и выполнено следующее свойство:

(UIP) Пусть $a, b, c \in L$ и $\mu, \nu \in \Lambda$ такие, что $a \leqslant b \leqslant c$ в L, $a \in L_\mu$, $b \in L_\nu$, $c \in L_\mu \cap L_\nu$, $\mu \neq \nu$. Тогда существует $d \in L_\mu \cap L_\nu$ со свойством $a \leqslant d \leqslant b$.

Двойственно определяется мультивставка со свойством *интерполяции снизу*. Будем говорить, что мультивставка обладает свойством *интерполяции*, если в ней выполнены свойства интерполяции сверху и снизу.

В работе [13] был показан следующий результат:

Теорема 3.1. *Класс конечных модулярных решеток замкнут относительно мультивставок со свойством интерполяции.*

Пусть P – частично упорядоченное множество. Назовем антицепь $A \subseteq P$ *максимальной* в P, если для любого $x \in P$ существует $a \in A$ такой, что a и x сравнимы. Обозначим через $\operatorname{Ant} P$ множество всех максимальных антицепей в P. Определим на $\operatorname{Ant} P$ следующее отношение: для $A, B \in \operatorname{Ant} P$ положим $A \leqslant B$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \leqslant b$.

Следующее предложение хорошо известно, но мы докажем его для удобства в дальнейшем.

Предложение 3.2.1. *Для любого конечного ч.у.м. P множество $\operatorname{Ant} P$ образует решетку относительно $\leqslant$.*

Доказательство. Пусть A и B – максимальные антицепи в P. Мы построим $\inf\{A, B\}$, а $\sup\{A, B\}$ получается двойственным образом.

Положим $C = \{x \in A \cup B \mid x \in A \cap B$ или $x < y$ для некоторого $y \in A \cup B\}$. Легко видеть, что C является антицепью. Рассмотрим множество $D = \{x \in P \mid x$ не сравним с каждым элементом из $C\}$. Обозначим через F множество максимальных элементов D. Так как D конечно, F является максимальной антицепью в D. Тогда $G = C \cup F$ является максимальной антицепью в P. Мы проверим, что $G = \inf\{A, B\}$.

Сначала мы покажем, что $G \leqslant A$. Пусть $g \in G$ и $a \in A$ такие, что $a < g$. Если $g \in C$, то $g < b$ для некоторого $b \in B$. Тогда $a < g < b$, откуда $a \in C$. Следовательно, $g \notin A$ и $g \notin B$, что влечет $g \notin C$, противоречие. Если $g \in F$, то $a \in D$. Тогда существует $a' \in A$ такой, что $a' > a$, противоречие. В итоге $G \leqslant A$ и, аналогично, $G \leqslant B$.

Пусть H – некоторая максимальная антицепь в P такая, что $H \leqslant A$ и $H \leqslant B$. Рассмотрим $h \in H$. Если $h \leqslant c$ для некоторого $c \in C$, то, поскольку $c \in G$, имеем $h \leqslant c$ для некоторого $c \in G$. Предположим, что h не сравним с каждым элементом C, т.е. $h \in D$. Тогда $h \leqslant m$ для некоторого максимального в D элемента m. Поскольку $m \in G$, получаем $h \leqslant m$ для подходящего $m \in G$. Отсюда следует $H \leqslant G$, следовательно, $G = \inf\{A, B\}$. $\square$

3° Решетки конгруэнций конечных нильполугрупп

Напомним, что мы рассматриваем нильполугруппу S еще и как частично упорядоченное множество относительно порядка *делимости* $\geqslant$, определяемого следующим образом: $a \geqslant b$, если существуют $s, t \in S^1$ такие, что $sat = b$. Мы также будем использовать запись $a > b$, подразумевая под этим $a \geqslant b$ и $a \neq b$.

Индексом элемента a нильполугруппы называется наименьшее положительное n такое, что $a^n = 0$.

Следующий факт общеизвестен.

Лемма 3.3.1. *Пусть S – нильполугруппа, $a, b \in S$ и $a \neq 0$. Тогда $a > ab$ и $a > ba$.*

Лемма 3.3.2. *Пусть S – нильполугруппа, $\theta \in \operatorname{Con} S$, $(a, b) \in \theta$ и $a > b$. Тогда $(a, 0) \in \theta$.*

Доказательство. По определению, $a > b$ означает, что $b = sat$ для подходящих $s, t \in S^1$ и $s \neq 1$ или $t \neq 1$. Пусть n – индекс элемента s, если $s \neq 1$, или индекс элемента t в противном случае. Тогда $(b, sbt) = (sat, sbt) \in \theta$, $(sbt, s^2bt^2) \in \theta$, $\ldots$, $(s^{n-1}bt^{n-1}, 0) \in \theta$. По транзитивности получаем $(a, 0) \in \theta$. $\square$

Пусть θ – конгруэнция на нильполугруппе S. Для $a \in S$ обозначим через $\theta[a]$ класс θ, содержащий a. Определим

$$I_\theta = \{x \in S \mid (x, 0) \in \theta\},$$

$$N_\theta = \{x \in S \backslash I_\theta \mid \theta[x] \text{ не одноэлементен}\}.$$

Легко видеть, что $I_{\theta_1 \wedge \theta_2} = I_{\theta_1} \cap I_{\theta_2}$, $I_{\theta_1} \cup I_{\theta_2} \subseteq I_{\theta_1 \vee \theta_2}$ и $N_{\theta_1 \vee \theta_2} \subseteq N_{\theta_1} \cup N_{\theta_2}$ для любых $\theta_1, \theta_2 \in \operatorname{Con} S$.

Конгруэнцию θ на S назовем *вынужденной*, если всякий элемент из N_θ является минимальным элементом в множестве $S \backslash I_\theta$. Через $\operatorname{For}(S)$ обозначим множество всех вынужденных конгруэнций на S.

Предложение 3.3.1. *В любой конечной полугруппе S множество $\operatorname{For}(S)$ образует подрешетку в $\operatorname{Con}(S)$.*

Доказательство. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \operatorname{For}(S)$. Убедимся, что $\theta_1 \vee \theta_2 \in \operatorname{For}(S)$ и $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \operatorname{For}(S)$.

Пусть $a \in N_{\theta_1 \vee \theta_2}$, $b \in S$ и $a > b$. Тогда $a \in N_{\theta_1} \cup N_{\theta_2}$. Предположим, без ограничения общности, что $a \in N_{\theta_1}$. По определению вынужденной конгруэнции, $b \in I_{\theta_1}$. Тогда $b \in I_{\theta_1 \vee \theta_2}$, следовательно, элемент a минимален в $S \backslash I_{\theta_1 \vee \theta_2}$.

Пусть $a \in N_{\theta_1 \wedge \theta_2}$, $b \in S$ и $a > b$. Так как $\theta_1 \wedge \theta_2[a]$ нетривиальна, $\theta_1[a]$ и $\theta_2[a]$ также нетривиальны. Предположим, что $b \notin I_{\theta_1 \wedge \theta_2} = I_{\theta_1} \cap I_{\theta_2}$. Без ограничения общности можем считать, что $b \notin I_{\theta_1}$. Из этого следует, что $a \notin N_{\theta_1}$, но $\theta_1[a]$ нетривиален. Поэтому $a \in I_{\theta_1}$. Так как $b < a$, имеем $b \in I_{\theta_1}$, противоречие. Значит, a минимален в $S \backslash I_{\theta_1 \wedge \theta_2}$. $\square$

Обозначим через Part_n решетку разбиений n-элементного множества.

Предложение 3.3.2. *Пусть S – конечная нильполугруппа. Обозначим через S^+ множество всех ненулевых элементов в S. Тогда $\operatorname{For}(S)$ есть $\operatorname{Ant}(S^+)$-скленная сумма решеток $\operatorname{Part}_{n+1}$, где n есть число элементов в антицепи, соответствующей данному слагаемому.*

Доказательство. Для антицепи $A \subseteq S^+$ положим

$$\downarrow A = \{x \in S \mid x \leqslant a \text{ для некоторого } a \in A\},$$

$$\downarrow\downarrow A = \{x \in S \mid x < a \text{ для некоторого } a \in A\},$$

$$A_{con} = \{\theta \in \operatorname{Con} S \mid \downarrow\downarrow A \subseteq I_\theta \subseteq \downarrow A \text{ и } N_\theta \subseteq A\}.$$

Пусть $A \in \operatorname{Ant}(S^+)$. По предложению 3.3.1 имеем $A_{con} \subseteq \operatorname{For}(S)$. Легко видеть, что A_{con} является выпуклым интервалом в решетке $\operatorname{For}(S)$.

Рассмотрим множество $\bar{A} = A \cup \{\downarrow\}$. Для конгруэнции $\theta \in A_{con}$ определим

$$\phi(\theta) = \{(x, y) \in \bar{A} \mid (x, y \in A \text{ и } (x, y) \in \theta)$$

$$\text{или } (x \in A, y = \downarrow \text{ и } x \in I_\theta \text{ (или симметрично)) или } (x = y = \downarrow)\}.$$

Тогда ϕ – изоморфизм $A_{con} \to \operatorname{Part} \bar{A}$.

Теперь мы проверим, что система подрешеток $\{A_{con}\}_{A \in \operatorname{Ant}(S)}$ образует склеенную систему в решетке $\operatorname{For}(S)$.

1) Пусть $A, B \in \operatorname{Ant} S^+$, $A \leqslant B$. Пусть $\theta \in A_{con} \cap B_{con}$, $\sigma \in A_{con}$ и $\theta \leqslant \sigma$. Тогда $\downarrow\downarrow B \subseteq I_\theta \subseteq I_\sigma \subseteq \downarrow A \subseteq \downarrow B$. Рассмотрим $a \in N_\sigma$. Тогда $a \in A$. Если $a \notin B$, то существует $b \in B$ такой, что $a < b$. Из этого вытекает, что $a \in \downarrow\downarrow B \subseteq I_\theta \subseteq I_\sigma$, противоречие. Итак, $a \in B$, что влечет $N_\sigma \subseteq B$. В результате получаем, что $\sigma \in B_{con}$. Следовательно, $A_{con} \cap B_{con}$ является фильтром в A_{con}. Двойственными рассуждениями легко устанавливается, что $A_{con} \cap B_{con}$ является идеалом в B_{con}.

Хорошо известно, что всякий фильтр в решетке разбиений изоморфен некоторой решетке разбиений (см, например, [16], V.4.1). Следовательно, все пересечения слагаемых также являются решетками разбиений.

2) Для любой $A \in \operatorname{Ant} S^+$, решетка A_{con} является подрешеткой в $\operatorname{Con} S$. Таким образом, проверка условия 2) определения склеенной системы тривиальна.

3) Пусть $A, B \in \operatorname{Ant} S^+$ и $A \prec B$. Из условия $A \prec B$ вытекает, что для каждого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \prec b$ или $a = b$. Тогда $\downarrow\downarrow B \subseteq \downarrow A$. Рассмотрим рисовскую конгруэнцию θ_A порожденную идеалом $\downarrow A$. Тогда $\downarrow\downarrow B \subseteq I_{\theta_A} = \downarrow A \subseteq \downarrow B$ и $N_{\theta_A} = \emptyset$, откуда $\theta_A \in B_{con}$ и $\theta_A \in A_{con}$.

4) Пусть $A, B \in \operatorname{Ant} S^+$ и $\theta \in A_{con} \cap B_{con}$. Заметим, что

$$
\begin{gathered}
\downarrow A \cup \downarrow B \subseteq \downarrow (A \vee B), \\
\downarrow A \cap \downarrow B \supseteq \downarrow (A \wedge B), \\
\downarrow\downarrow A \cup \downarrow\downarrow B \subseteq \downarrow\downarrow (A \vee B), \\
\downarrow\downarrow A \cap \downarrow\downarrow B \supseteq \downarrow\downarrow (A \wedge B).
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Тогда

$$\downarrow\downarrow (A \wedge B) \subseteq \downarrow\downarrow A \cap \downarrow\downarrow B \subseteq I_\theta \subseteq \downarrow A \cap \downarrow B.$$

Далее мы покажем, что если $A_{con} \cap B_{con} \neq \emptyset$, то $\downarrow A \cap \downarrow B = \downarrow (A \wedge B)$. Так как $\theta \in A_{con} \cap B_{con}$, имеем $\downarrow\downarrow A \subseteq I_\theta \subseteq \downarrow A$ и $\downarrow\downarrow B \subseteq I_\theta \subseteq \downarrow B$. Тогда $\downarrow\downarrow A \cup \downarrow\downarrow B \subseteq I_\theta \subseteq \downarrow A \cap \downarrow B$. Пусть $a \in A$, $b \in B$ и $a \leqslant b$. Если $a < c < b$ для некоторого $c \in S^+$, то $c \in \downarrow\downarrow B$ и $c \notin \downarrow A$, противоречие. Поэтому либо $b \succ a$, либо $b = a$. Аналогичными рассуждениями показывается, что если $a \in A, b \in B$ и $a \geqslant b$, то $a \succ b$ или $a = b$. Обозначим

$$A_{\succ} = \{a \in A \mid a \succ b \text{ для некоторого } b \in B\},$$

$$A_{\prec} = \{a \in A \mid a \prec b \text{ для некоторого } b \in B\},$$

$$B_{\succ} = \{b \in B \mid b \succ a \text{ для некоторого } a \in A\},$$

$$B_{\prec} = \{b \in B \mid b \prec a \text{ для некоторого } a \in A\},$$

$$F = (A \wedge B) \setminus (A \cup B).$$

Тогда, по предложению 3.2.1, $A \wedge B = A_{\prec} \cup B_{\prec} \cup (A \cap B) \cup F$.

Пусть $x \in \downarrow A \cap \downarrow B$. Тогда $x \in \downarrow A$ и $x \in \downarrow B$. Это означает, что $x \leqslant a$ для некоторого $a \in A$ и $x \leqslant b$ для подходящего $b \in B$. Если $a \in A_{\prec} \cup (A \cap B)$, то $x \in \downarrow (A \wedge B)$. Предположим, что для всех $a \in A$, $a \geqslant x$ влечет $a \in A_{\succ}$ и $a > x$, а также, что для всех $b \in B$, $b \geqslant x$ влечет $b \in B_{\succ}$ и $b > x$. Тогда x несравним со всеми элементами $A_{\prec} \cup B_{\prec} \cup (A \cap B)$. Согласно предложению 3.2.1, $x \in \downarrow F$, откуда $x \in \downarrow (A \wedge B)$. Итак, $\downarrow A \cap \downarrow B \subseteq \downarrow (A \wedge B)$. Согласно замечанию (3.1), сделанному ранее, обратное вложение также выполняется, поэтому $\downarrow A \cap \downarrow B = \downarrow (A \wedge B)$.

Мы показали, что $\downarrow\downarrow (A \wedge B) \subseteq I_\theta \subseteq \downarrow (A \wedge B)$. Так как $N_\theta \subseteq A$ и $N_\theta \subseteq B$, имеем $N_\theta \subseteq A \cap B$. Тогда $\theta \in (A \wedge B)_{con}$. Аналогично, $\theta \in (A \vee B)_{con}$, так что $A_{con} \cap B_{con} \subseteq (A \wedge B)_{con} \cap (A \vee B)_{con}$. □

Теперь мы готовы доказать теорему V. Пусть S – нильполугруппа. Если $\mathrm{Con}(S)$ дистрибутивна, то ее подрешетка $\mathrm{For}(S)$ также дистрибутивна. По предложению 3.3.2, решетка $\mathrm{For}(S)$ содержит решетку разбиений Part_{n+1} в качестве подрешетки, если $(S, \geqslant)$ содержит максимальную антицепь из n элементов. При $n > 1$ решетка Part_{n+1} недистрибутивна. Следовательно, все максимальные антицепи в $(S, \geqslant)$ содержат ровно один элемент, что означает, что $(S, \geqslant)$ – цепь.

Если $(S, \geqslant)$ является цепью, то по лемме 3.3.2 решетка $\mathrm{Con}\, S$ также является цепью. Всякая цепь дистрибутивна, и это завершает доказательство теоремы V.

Теперь мы докажем теорему VII. Пусть S – нильполугруппа. Из рассуждений выше следует, что либо $\mathrm{Con}\, S$ является цепью, либо $\mathrm{Con}\, S$ содержит подрешетку, изоморфную Part_3, ширина которой 3. Следовательно, $\mathrm{Con}\, S$ не может иметь ширину 2.

Предположим, что $\mathrm{Con}\, S$ содержит $\mathbb{Z}^-$ в качестве фильтра. Обозначим через $\mathbb{Z}^0$ решетку $\mathbb{Z}^-$ с добавленным наименьшим элементом. Тогда $\mathbb{Z}^0$ является решеткой конгруэнций некоторого фактора T полугруппы S. Но $\mathbb{Z}^0$ есть цепь, следовательно, $(T, \geqslant) \cong \mathbb{Z}^0$, противоречие. Доказательство теоремы VII закончено.

4° Конечные нильполугруппы с модулярными решетками конгруэнций

Всюду далее в этой главе мы предполагаем, что S – конечная нильполугруппа и $(S, \geqslant)$ имеет ширину 2.

Пусть I_1 и I_2 – идеалы в S. Будем говорить, что I_1 *равномерно покрывает* I_2, если

a) $I_2 \subseteq I_1$;

b) $(S \setminus I_2, \geqslant)$ не является цепью;

c) $(I_1 \backslash I_2, \geqslant)$ есть максимальная антицепь в $(S \setminus I_2, \geqslant)$;

d) если $I_1 \backslash I_2 = \{a, b\}$, то существует $c \in S$ такой, что $a \succ c$ и $b \succ c$ в $(S, \geqslant)$.

Для каждого идеала I существует не более одного идеала в S, который равномерно покрывает I. Будем говорить, что идеалы I, J в S *параллельны*, если существует цепочка идеалов $H_1, H_2, \ldots, H_k$ полугруппы S такая, что $I = H_1$, $J = H_k$ или $I = H_k$, $J = H_1$, причем H_i равномерно покрывает H_{i+1} для каждого $i = 1..k-1$. Будем говорить, что подмножества X и Y полугруппы S *параллельны*, если параллельны соответствующие идеалы $\downarrow X$ и $\downarrow Y$.

Назовем две конгруэнции θ_1 и θ_2 *параллельными*, если I_{θ_1} и I_{θ_2} параллельны как идеалы. Мы также будем говорить, что конгруэнция θ параллельна идеалу I, если I_θ параллелен I.

Нетрудно видеть, что отношение параллельности является отношением эквивалентности на множестве $\operatorname{Con} S$. Обозначим через $\Sigma(S)$ разбиение, соответствующее этому отношению эквивалентности. Для класса $\sigma \in \Sigma(S)$, положим

$$P_\sigma = \{\{a, b\} \subseteq S \mid a, b \text{ несравнимы и } \Theta(a, b) \in \sigma\} \text{ и}$$

$$O_\sigma = \{\{a\} \subseteq S \mid \text{ существуют } I_1, I_2 \in \sigma : I_1 \subseteq I_2 \text{ и } I_2 \setminus I_1 = \{a\}\}.$$

Для $P \in P_\sigma \cup O_\sigma$, определим $\downarrow_\sigma P = \bigcap\{I \in \sigma \mid P \subseteq I\}$. Далее, для любых $P, Q \in P_\sigma$ положим $P \leqslant Q$, если $\downarrow_\sigma P \subseteq \downarrow_\sigma Q$. Нетрудно видеть, что соотношение $P \leqslant Q$ выполняется в одном из следующих случаев:

1) $P = \{a\}, Q = \{c\}$ и $a \leqslant c$;

2) $P = \{a\}, Q = \{c, d\}$, $a \leqslant c$ и $a \leqslant d$;

3) $P = \{a, b\}, Q = \{c\}$, $a \leqslant c$ или $b \leqslant c$;

4) $P = \{a, b\}, Q = \{c, d\}$, $P \leqslant Q$ в $\operatorname{Ant} S$.

Заметим, что $P_\sigma \cup O_\sigma$ является цепью относительно порядка $\leqslant$. Пусть I_σ обозначает наименьший идеал такой, что соответствующая ему рисовская конгруэнция ρ_I принадлежит σ, а J_σ обозначает наибольший идеал с таким свойством. Положим $C_\sigma = S \setminus J_\sigma$. Нетрудно видеть, что I_σ и C_σ являются цепями.

Лемма 3.4.1. *Для любого $\sigma \in \Sigma(S)$, $S = C_\sigma \cup \bigcup P_\sigma \cup \bigcup O_\sigma \cup I_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $I_1 = I_\sigma$. Рассмотрим множество $S \setminus I_\sigma$. Предположим, что оно не является цепью. Пусть P есть множество всех минимальных элементов этого множества. Так как S имеет ширину 2, имеем $|P| = 1$ или $|P| = 2$. Тогда $P \in O_\sigma$, если $|P| = 1$, и $P \in P_\sigma$, если $|P| = 2$, и, по определению, $I_2 = I_1 \cup P$ параллелен I_1. Повторяя этот процесс, мы получим цепь идеалов $I_\sigma = I_1, I_2, \ldots, I_n$, где I_{i+1} параллелен I_i и $S \setminus I_n$ является цепью. Легко видеть, что тогда $I_n = J_\sigma$, откуда $S \setminus I_n = C_\sigma$. $\square$

Лемма 3.4.2. *Пусть $u \in S$ – одноэлементная максимальная антицепь в S. Тогда $[0, u]$ – цепь.*

Лемма 3.4.3. *Для любого $\sigma \in \Sigma$ и $\{a, b\}, \{c, d\} \in P_\sigma$, из того, что $\{a, b\} \geqslant \{c, d\}$ в P_σ, вытекает $(c, d) \in \Theta(a, b)$.*

Доказательства лемм 3.4.2 и 3.4.3 основаны на классификации всех конечных нильполугрупп ширины 2 и будут даны в конце раздела 3.5.

Лемма 3.4.4. *Пусть θ – конгруэнция на S и пусть $\theta \in \sigma$ для некоторого $\sigma \in \Sigma$. Пусть B – некоторый нетривиальный класс в θ. Тогда либо $B = I_\theta$, либо $B \in P_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $B \neq I_\theta$ и $a, b \in B$, $a \neq b$. Если a, b сравнимы, то по лемме 3.3.2 получаем $0 \in B$, следовательно, $B = I_\theta$, противоречие. Предположим теперь, что a и b несравнимы. Так как $(S, \geqslant)$ имеет ширину 2, антицепь $\{a, b\}$ является максимальной. Тогда каждый элемент в S сравним с a или с b, что означает, что B состоит только из этих двух элементов.

По определению, идеал $\downarrow B$ параллелен $C = \downarrow\downarrow B$. Идеал C имеет один или два максимальных элемента.

Пусть C имеет один максимальный элемент. Тогда по лемме 3.4.2, C – цепь, следовательно, I_θ тоже цепь. Так как каждый элемент цепи является максимальной антицепью, C параллелен I_θ. Тогда B параллелен I_θ.

Пусть C имеет два максимальных элемента, которые мы обозначим через c и d. Без ограничения общности предположим, что $\{c\} \in O_\sigma$. Тогда C параллелен $C_1 = C \setminus \{a\}$. Повторяя этот процесс, мы получим цепь $C = C_1, C_2, \ldots, C_m$ параллельных идеалов такую, что $|C_{i+1} \setminus C_i| = 1$ и C_m имеет два максимальных элемента, например, e и f, ни один из которых не принадлежит O_σ. Тогда по лемме 3.4.1, $\{e, f\} \in I_\theta$ или $\{e, f\} \in P_\sigma$. В первом случае I_θ параллелен C_m и, по транзитивности, также параллелен $\downarrow B$, откуда вытекает, что $B \in P_\sigma$.

Пусть $\{e, f\} \in P_\sigma$. По лемме 3.4.3, $(e, f) \in \theta$. Пусть D_1 – класс элементов e и f. Повторяя весь процесс уже для класса D_1, мы получим класс D_2, который параллелен D_1, и так далее. В итоге мы получим цепь $\downarrow B, C = \downarrow D_1, \downarrow D_2, \downarrow D_3, \ldots, \downarrow D_{n-1}, I_\theta$ параллельных идеалов. Тогда $\downarrow B$ параллелен I_θ, следовательно, B принадлежит P_σ. $\square$

Лемма 3.4.5. *Каждый класс $\sigma \in \Sigma(S)$ есть дистрибутивная подрешетка в* $\operatorname{Con} S$.

Доказательство. Пусть $\theta \in \sigma$. Поскольку θ параллельна I_σ, идеал I_θ содержит I_σ, а кроме этого он содержит некоторые элементы из O_σ и из P_σ. Всякий нетривиальный класс в θ есть или I_θ, или элемент P_σ.

Положим

$$X_\theta = \{\alpha \in P_\sigma \cup O_\sigma \mid \alpha \in I_\theta\},$$

$$Y_\theta = \{\alpha \in P_\sigma \mid \alpha \not\subseteq I_\theta \text{ и } \alpha \text{ – нетривиальный } \theta\text{-класс}\}.$$

Если $u, v \in P_\sigma \cup O_\sigma$, $u \leqslant v$ и $v \in X_\theta$, то $u \in X_\theta$. Это означает, что X_θ – идеал в цепи $P_\sigma \cup O_\sigma$. Легко видеть, что отображение $\theta \mapsto X_\theta$ сохраняет объединения и пересечения в $\operatorname{Id}(P_\sigma \cup O_\sigma)$.

По лемме 3.4.3, Y_θ – выпуклая подрешетка в цепи P_σ. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \sigma$ и $Y_\theta = [u_1, v_1]$, $Y_\theta = [u_2, v_2]$ для некоторых $u_1, u_2, v_1, v_2 \in P_\sigma$. Тогда

$$Y_{\theta_1 \vee \theta_2} = [u_1 \vee u_2, v_1 \vee v_2],$$

$$Y_{\theta_1 \wedge \theta_2} = [u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2].$$

В итоге получаем, что отображение $\theta \mapsto (X_\theta, Y_\theta)$ является вложением $\sigma \to \operatorname{Id}(P_\sigma \cup O_\sigma) \times P_\sigma^2$, что означает дистрибутивность подрешетки σ. $\square$

Предложение 3.4.1. *Решетка* $\operatorname{Con} S$ *есть сильная мультивставка с интерполяционным свойством решеток* $\operatorname{For}(S)$ *и всех* σ *из* $\Sigma(S)$.

Доказательство. Очевидно, что каждая конгруэнция принадлежит какому-нибудь классу $\sigma \in \Sigma(S)$, так что множество $\{\operatorname{For}(S), \sigma \in \Sigma(S)\}$ образует покрытие $\operatorname{Con} S$.

Вначале мы проверим выполнение условия (Ord) определения сильной мультивставки. Рассмотрим две конгруэнции θ_1 и θ_2 такие, что $\theta_1 \leqslant \theta_2$ в $\operatorname{Con} S$.

1) Пусть $\theta_1 \in \operatorname{For}(S)$ и $\theta_2 \in \sigma$ для некоторого $\sigma \in \Sigma$, причем $\theta_1 \notin \sigma$. Имеем $I_{\theta_1} \subsetneq I_{\theta_2}$. Тогда I_{θ_2} содержит все нетривиальные классы θ_1. Пусть τ это рисовская конгруэнция, порожденная I_{θ_2}. Тогда $\tau \in \operatorname{For}(S) \cap \sigma$ и $\theta_1 \leqslant \tau \leqslant \theta_2$.

2) Пусть $\theta_1 \in \sigma_1$ и $\theta_2 \in \sigma_2$ для некоторых $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ и $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Имеем $I_{\sigma_1} \subsetneq I_{\sigma_2}$. Если $I_{\sigma_2} \setminus I_{\sigma_1} \subseteq (P_{\sigma_1} \cup O_{\sigma_1})$, то I_{σ_1} и I_{σ_2} параллельны, противоречие. Итак, существует элемент $a \in I_{\sigma_2} \setminus I_{\sigma_1}$ такой, что $a \notin \bigcup(P_{\sigma_1} \cup O_{\sigma_1})$. Из леммы 3.4.1 следует, что $a \in C_\sigma$, откуда $\bigcup(P_{\sigma_1} \cup O_{\sigma_1}) \subset I_{\sigma_2}$. Рассмотрим рисовскую конгруэнцию τ, соответствующую идеалу, порожденному всеми нетривиальными классами θ_1, а также рисовскую конгруэнцию π, порожденную I_{θ_2}. Тогда $\theta_1 \leqslant \tau \leqslant \pi \leqslant \theta_2$ и $\theta_1, \tau \in \sigma_1$, $\tau, \pi \in \operatorname{For}(S)$, $\pi, \theta_2 \in \sigma_2$.

3) Пусть $\theta_2 \in \operatorname{For}(S)$ и $\theta_1 \in \sigma$ для некоторого $\sigma \in \Sigma$, причем $\theta_2 \notin \sigma$. Как и в предыдущем случае, существует элемент $a \in I_{\sigma_2} \setminus I_{\sigma_1}$ такой, что $a \notin \bigcup(P_{\sigma_1} \cup O_{\sigma_1})$. Из леммы 3.4.1 вытекает, что $a \in C_\sigma$, откуда $\bigcup(P_{\sigma_1} \cup O_{\sigma_1}) \subset I_{\sigma_2}$. Рассмотрим рисовскую конгруэнцию τ, соответствующую идеалу, порожденному всеми нетривиальными классами θ_1. Тогда $\theta_1 \leqslant \tau \leqslant \theta_2$ и $\theta_1, \tau \in \sigma$, $\tau, \theta_2 \in \operatorname{For}(S^+)$.

Во всех трех случаях условие (Ord) выполнено. Теперь проверим условие (Cov). Пусть $\theta \in \operatorname{Con} S$.

1) Пусть θ – рисовская конгруэнция. Если $S \setminus I_\theta$ имеет два минимальных элемента, то все верхние покрывающие θ принадлежат $\operatorname{For}(S)$.

Предположим теперь, что $S \setminus I_\theta$ имеет единственный минимальный элемент a. Пусть $\theta \in \sigma$ для некоторого $\sigma \in \Sigma$. Тогда, по лемме 3.4.1, имеем $a \in O_\sigma$ или $a \in C_\sigma$.

Если $a \in O_\sigma$, то существует $P \in P_\sigma$ такой, что $P \geqslant \{a\}$ в $P_\sigma \cup O_\sigma$. По лемме 3.4.3, конгруэнцию θ покрывают два элемента: рисовская конгруэнция, порожденная идеалом

$I_\theta \cup \{a\}$, и конгруэнция, нетривиальными классами которой являются I_θ и P. Обе конгруэнции попадают в σ.

Если $a \in C_\sigma$, то θ покрывается всего одним элементом: рисовской конгруэнцией, порожденной $I_\theta \cup \{a\}$.

2) Пусть θ имеет более чем один нетривиальный класс. По лемме 3.4.4, нетривиальными классами θ помимо I_θ являются некоторые классы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ из P_σ. Пусть τ покрывает θ. Тогда существуют два различных класса в θ, которые в τ находятся уже в одном классе. Рассмотрим несколько случаев:

2.1) Пусть оба этих класса содержат по одному элементу, т.е. имеют вид $\{a\}$ и $\{b\}$.

Пусть $\{a, b\} \in P_\sigma$. Предположим, что $\{a, b\} \succ \{c, d\}$ в P_σ. По лемме 3.4.3, $(c, d) \in \tau$. Так как τ покрывает θ, либо $\{c, d\}$ является θ-классом, либо $c, d \in I_\theta$. В обоих случаях получается, что τ и θ параллельны.

Пусть $\{a, b\} \notin P_\sigma$ и a, b несравнимы. По лемме 3.4.4, $a, b \in I_\tau$. Тогда τ не покрывает θ. Действительно, определим $\psi = \theta \vee \Theta(a, 0)$. Тогда $\tau > \psi > \theta$.

Пусть a и b сравнимы, например, пусть $b > a$. По лемме 3.3.2, $a, b \in I_\tau$. Тогда τ не покрывает θ. Действительно, рассматривая $\psi = \theta \vee \Theta(a, 0)$, имеем $\tau > \psi > \theta$.

2.2) Пусть τ получена объединением одноэлементного класса $\{a\}$ и класса $P_i = \{c, d\}$ для некоторого i. Так как $(S, \geqslant)$ имеет ширину 2, элемент a сравним с элементом c или с элементом d. Тогда, по лемме 3.3.2, $a \in I_\tau$ и $P_i \subseteq I_\tau$. Определим $\psi = \theta \vee \Theta(a, 0)$ и $\xi = \theta \vee \Theta(c, 0) \vee \Theta(d, 0)$. Тогда либо $\tau > \psi > \theta$, либо $\tau > \xi > \theta$, противоречие.

2.3) Пусть τ получена объединением одноэлементного класса $\{a\}$ и I_θ. Так как $\tau \succ \theta$, элемент a покрывает некоторый элемент в I_σ и $a \notin P$ ни для какого $P \in P_\sigma$. Из леммы 3.4.1 следует, что в этом случае $\{a\} \in O_\sigma$ или $\{a\} \in C_\sigma$. Если $\{a\} \in O_\sigma$, то τ и θ параллельны. Пусть $\{a\} \in C_\sigma$. Тогда $\bigcup P_\sigma \cup \bigcup O_\sigma \subseteq I_\theta$, так что θ является рисовской конгруэнцией, противоречие.

2.4) Пусть τ получена объединением некоторого класса P_i и I_θ. Так как $\tau \succ \theta$, не существует $Q \in O_\sigma \cup P_\sigma$ такого, что $P_i \geqslant Q$ в $O_\sigma \cup P_\sigma$ и $Q \nsubseteq I_\sigma$. Тогда $\downarrow P_i$ равномерно покрывает I_θ, следовательно, τ параллельна θ.

2.5) Пусть τ получена объединением некоторых классов P_i и P_j. Тогда как и в случае

2.2), имеем $P_i, P_j \subseteq I_\tau$, противоречие.

Получается, что для любой конгруэнции $\theta \in \operatorname{Con} S$, либо все ее покрывающие принадлежат $\operatorname{For} S$, либо они все параллельны, либо покрывающий элемент всего один. Значит, условие (Cov) выполнено. Двойственный случай аналогичен.

Это заканчивает доказательство того, что $\operatorname{Con}(S)$ это сильная мультивставка решеток $\operatorname{For}(S)$ и всех σ из Σ.

Свойства интерполируемости сверху и снизу вытекают из условия (Ord) и из того факта, что $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ для различных $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. $\square$

Следствие 3.4.1. *Пусть S – конечная нильполугруппа. Тогда* $\operatorname{Con} S$ *модулярна тогда и только тогда, когда $(S, \leqslant)$ имеет ширину 2.*

Теперь мы готовы доказать Следствие I. Пусть нильпотентная полугруппа S имеет модулярную решетку конгруэнций. Тогда из Следствия 3.4.1 следует, что $(S, \leqslant)$ имеет ширину 2. Заметим, что в любой нильпотентной полугруппе выполняется условия обрыва возрастающих цепей относительно порядка $\leqslant$. Следовательно, S имеет базис, определяемый единственным образом, а именно множество максимальных относительно $\leqslant$ элементов. Так как максимальные элементы образуют антицепь, S порождается двумя элементами. Однако всякая конечно порожденная нильпотентная полугруппа конечна.

5° Список всех нильполугрупп ширины 2

В этом разделе мы дадим полный список всех конечных нильполугрупп, имеющих ширину 2. Далее, на основе этой классификации мы покажем, что для всех таких полугрупп выполняются леммы 3.4.2 и 3.4.3. С учетом рассуждений предыдущего раздела, это завершит доказательство следствия 3.4.1, что в свою очередь завершит доказательство теоремы VI.

Всюду в этом разделе, мы считаем, что S – конечная нильполугруппа ширины 2. Так как любой базис в конечной нильполугруппе является антицепью, S порождена двумя элементами, которые мы обозначим через a и b.

Элемент $x \in S$ назовем *атомом*, если x покрывает 0, т.е. $x > 0$ и для любого $z \in S$ условие $0 < z \leqslant x$ влечет $z = x$. Положим

$$x \gtrdot y \text{ если существует } s, t \in S^1 \text{ такие, что } y = sxt \text{ и } st \neq 1.$$

Отношение $\gtrdot$ на S антисимметрично и транзитивно. Легко видеть, что для любых $x, y \in S$, соотношение $x > y$ влечет $x \gtrdot y$, а $x \gtrdot y$ влечет $x \geqslant y$. Обратное неверно, так как $0 \gtrdot 0$, но $0 \not> 0$).

Лемма 3.5.1. *1) Элемент $x \in S$ равен нулю, тогда и только тогда, когда $x \gtrdot x$.*

2) Для любого $s \in S$ либо $s = s'a$, либо $s = s'b$ для некоторого $s' \in S^1$.

3) Для любого $t \in S$ либо $t = at'$, либо $t = bt'$ для некоторого $t' \in S^1$.

4) Если $x \in S$ и $xa = ax = xb = bx = 0$, то x либо атом, либо ноль.

Доказательство очевидно.

Пусть u – слово из n букв. Определим $u^{\frac{p}{n}}$ для $0 \leqslant p \leqslant n-1$ как p-элементный префикс слова u. Для произвольного положительного целого p, положим $u^{\frac{p}{n}} = u^{[p/n]} u^{\frac{p \mod n}{n}}$.

Лемма 3.5.2. *Пусть c, d – буквы и p – положительно целое число. Тогда:*

1) $(cd)^{\frac{p}{2}} = c(dc)^{\frac{p-1}{2}}$.

2) $(cd)^{\frac{p}{2}} = (cd)^{\frac{p-1}{2}} c$, если p нечетно.

3) $(cd)^{\frac{p}{2}} = (cd)^{\frac{p-1}{2}} d$, если p четно.

4) $(cd)^{\frac{p}{2}} (dc)^{\frac{q}{2}} = (cd)^{\frac{p+q}{2}}$, если p нечетно.

5) $(cd)^{\frac{p}{2}} (cd)^{\frac{q}{2}} = (cd)^{\frac{p+q}{2}}$, если p четно.

Доказательство очевидно.

Лемма 3.5.3. *1) Если $a^2 \lessdot ab$, то $a^2 \lessdot b^2$ или $a^2 \lessdot ba$.*

2) Если $ba \lessdot ab$, то $ba \lessdot a^2$ или $ba \lessdot b^2$.

3) Если $a^2 > b^2 > ab$, $ba \not> b^2$ и $ab \neq 0$, то $ab < ba$.

4) Если $a^2 > ab > b^2$, $ba \not> ab$ и $b^2 \neq 0$, то $b^2 < ba$.

5) Если $a^2 > ab > ba$ и $ba \neq 0$, то $b^2 > ba$.

Доказательство. 1) Пусть $a^2 \lessdot ab$. Тогда $a^2 = sabt$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'a$ для какого-то $s' \in S^1$, то $a^2 \lessdot a^2$, что означает, что $a^2 = 0 \lessdot b^2$. Если $s = s'b$ для некоторого $s' \in S^1$, то $a^2 = s'babt$ и $a^2 \lessdot ba$. Пусть $s = 1$ и $a^2 = abt$. Если $t = at'$ для какого-то $t' \in S^1$, то $a^2 \lessdot ba$. Если $t = bt'$ для некоторого $t' \in S^1$, то $a^2 \lessdot b^2$.

2) Доказательство такое же как и в 1).

3) Есди $a^2 > b^2$, то $b^2 = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ для подходящего $s' \in S^1$, то $b^2 < ba$, противоречие. Если $t = bt'$ для некоторого $t' \in S^1$, то $b^2 < ab$, противоречие. Значит, $b^2 = a^k$ для подходящего $k \geqslant 3$. Тогда, $ab < b^2 = a^k$, следовательно, $ab = ua^kv$ для некоторых $u, v \in S^1$. Если $u = u'a$ или $v = av'$ для некоторых $u', v' \in S^1$, то $ab < a^{k+1} = ab^2$, т.е. $ab = 0$, противоречие. Если $v = bv'$ для какого-то $v' \in S^1$, то $ab < ab$ и $ab = 0$. Если $u = u'b$ для некоторого $u' \in S^1$, то $ba > ab$.

4) Если $a^2 > ab$, то $ab = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ для какого-то $s' \in S^1$, то $ab < ba$, противоречие. Если $t = bt'$ для некоторого $t' \in S^1$, то $ab = 0$, что противоречит тому, что $ab > b^2$. Значит, $ab = a^k$ для некоторого $k \geqslant 3$. Тогда $b^2 < ab = a^k$, следовательно, $b^2 = ua^kv$ для каких-то $u, v \in S^1$. Если $u = u'a$ или $v = av'$ для некоторых $u', v' \in S^1$, то $ab < a^{k+1} = aba$, т.е. $ab < b^2$, противоречие. Если $v = bv'$ для подходящего $v' \in S^1$, то $b^2 < a^kb = ab^2$ и $b^2 = 0$, противоречие. Если $u = u'b$ для некоторого $u' \in S^1$, то $ba > b^2$.

5) Если $a^2 > ab$, то $ab = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ для какого-то $s' \in S^1$, то $ab < ba$, противоречие. Если $t = bt'$ для некоторого $t' \in S^1$, то $ab = 0$, что противоречит тому, что $ab > ba$. Значит, $ab = a^k$ для некоторого $k \geqslant 3$. Тогда $ba < ab = a^k$, следовательно, $ba = ua^kv$ для подходящих $u, v \in S^1$. Если $u = u'a$ или $v = av'$ для некоторых $u', v' \in S^1$, то $ba \leqslant a^{k+1} = aba \lessdot ba$, т.е. $ba = 0$, противоречие. Если $v = bv'$ для некоторого $v' \in S^1$, то $ba \leqslant a^kb = ab^2 < b^2$. Если $u = u'b$ для подходящего $u' \in S^1$, то $ba \lessdot ba$, что означает $ba = 0$, противоречие. □

Следующее предложение даст нам классификацию всех нильполугрупп, которые как ч.у.м. имеют ширину 2. Обратим внимание, что оно не связано с результатами предыдущего параграфа, поэтому мы используем его в конце для доказательств лемм 3.4.2 и

3.4.3.

Предложение 3.5.1. *Пусть S – нильполугруппа, порожденная двумя различными элементами a и b. Следующие условия эквивалентны:*

a) $(S, \geqslant)$ имеет ширину 2;

b) подмножество $\{a^2, ab, ba, b^2\}$ в $(S, \geqslant)$ имеет ширину 2;

c) S изоморфна или двойственно изоморфна некоторой полугруппе из следующей таблицы:

N	Название	Представление	Ограничения
1	$A(n)$	$a^2 = ab = ba = b^2$, $a^n = 0$	$n \geqslant 2$
2	$B_1(n)$	$a^2 = ab = b^2$, $a^n = 0$	$n \geqslant 3$
3	$B_{2.1}(m,n)$	$a^2 = b^2$, $ab = ba$, $a^k = ba^l = 0$	$k \geqslant 3$, $l \geqslant 2$, $\lvert k-l\rvert = 1$
4	$B_{2.2}(m,n)$	$a^2 = b^2$, $ab = ba$, $a^m = ba^{m-1}$, $a^n = 0$	$n \geqslant m \geqslant 3$
5	$B_{3.1}(m,n)$	$a^2 = ab = ba$, $a^m = b^n$	$n > m \geqslant 3$
6	$B_{3.2}(m,n)$	$a^2 = ab = ba$, $a^m = b^n = 0$	$n, m \geqslant 3$, $n \geqslant m-1$, $n \neq m$
7	$B_{3.3}(m,k)$	$a^2 = ab = ba$, $a^m = b^m$, $a^k = 0$	$k \geqslant m \geqslant 3$
8	$B_{4.1}(m,n)$	$a^2 = ab$, $b^2 = ba$, $a^m = b^n = 0$	$\lvert m-n\rvert = 1$; $m, n \geqslant 3$
9	$B_{4.2}(m,n)$	$a^2 = ab$, $b^2 = ba$, $a^m = b^m$, $a^k = 0$	$k \geqslant m \geqslant 3$
10	C_1	$a^2 = ab$, $b^2 = ba = 0$	
11	C_2	$a^2 = b^2 = ab$, $ba = 0$	
12	C_3	$a^2 = b^2 = ab = 0$	
13	C_4	$a^2 = b^2$, $ab = ba = 0$	
14	C_5	$a^2 = ab = ba$, $b^2 = 0$	
15	C_6	$ab = ba$, $a^2 = b^2 = 0$	
16	$C_{7.1}(n)$	$a^2 = ab = ba = b^n$	$n \geqslant 3$
17	$C_{7.2}(n)$	$a^2 = ab = ba = b^n = 0$	$n \geqslant 3$
18	$D_{1.1}(m,n)$	$b^2 = ba = a^m = a^n b$	$m \geqslant 3$, $m-1 \geqslant n \geqslant 2$
19	$D_{1.2}(m,n)$	$b^2 = ba = a^m$, $a^n b = 0$	$m \geqslant n \geqslant 2$, $m \geqslant 3$
20	$D_{2.1}(m,n,k)$	$ab = ba = a^m$, $a^n = b^k = 0$	$n > m \geqslant 3$, $k \geqslant 3$, $n \leqslant k(m-1)+1$
21	$D_{2.2}(m,n,k)$	$ab = ba = a^m$, $a^n = b^k = 0$, $a^{n-1} = b^{k-1}$	$m, k \geqslant 3, m \leqslant n-2 \leqslant (k-1)(m-1)$, $n \neq (m-1)(k-1)+1$
22	$D_{2.3}(m,n,q)$	$ab = ba = a^m$, $a^{(m-1)q} = b^q$, $a^n = 0$	$m \geqslant 3$,$q \geqslant 2$, $n \geqslant (m-1)q+1$
23	$D_{3.1}(m,n,k)$	$ab = ba$, $b^2 = a^m$, $a^n = a^k b = 0$	$m \geqslant 3$, $k \geqslant 2$, $k+m \geqslant n \geqslant k$, $n \geqslant m+1$
24	$D_{3.2}(n,k,q)$	$ab = ba$, $b^2 = a^{2(n-k)}$, $a^n = a^k b = 0$, $a^{q+n-k} = a^q b$	$n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$, $n \geqslant k$, $n \geqslant 2n-2k+1$, $k > q \geqslant 2$
25	$D_{3.3}(m,n,k,q)$	$ab = ba$, $b^2 = a^m$, $a^{n-k+q} = a^q b$, $a^n = a^k b = 0$	$m \geqslant 3$, $k \geqslant 2$, $k+m \geqslant n \geqslant k$, $k \leqslant \min(n-k+q, q+m)$, $k > q \geqslant 2$
26	$D_4(n)$	$ba = b^n$, $a^2 = ab$	$n \geqslant 3$
27	$E_{1.1}(m,n,k)$	$b^2 = ba = a^m b$, $a^n = a^k b = 0$	$m \geqslant 2$, $2m \geqslant k \geqslant m$, $n \geqslant k$, $n \geqslant 3$
28	$E_{1.2}(m,n,k)$	$b^2 = ba = a^m b$, $a^n = a^k b$	$m \geqslant 2$, $2m \geqslant k \geqslant m$, $n > k$, $n \geqslant 3$
29	$E_{2.1}(m)$	$a^2 = b^2 = (ab)^{\frac{m}{2}} = (ba)^{\frac{m}{2}} = 0$	$m \geqslant 3$
30	$E_{2.2}(m)$	$a^2 = b^2 = (ab)^{\frac{m}{2}} = 0$	$m \geqslant 3$
31	$E_{2.3}(m)$	$a^2 = b^2 = (ab)^{\frac{m}{2}}$, $(ba)^{\frac{m}{2}} = 0$	$m \geqslant 3$
32	$E_{2.4}(m)$	$a^2 = b^2 = (ab)^{\frac{m}{2}} = (ba)^{\frac{m}{2}}$, $(ba)^{\frac{m+1}{2}} = 0$	$m \geqslant 3$
33	$E_{2.5}(m)$	$a^2 = b^2 = (ab)^{\frac{m}{2}}$, $(ba)^{\frac{m}{2}} = 0$	$m \geqslant 3$, m is odd
34	$E_{2.6}(m)$	$a^2 = b^2 = (ab)^{\frac{m}{2}}$, $(ab)^{\frac{m+1}{2}} = (ba)^{\frac{m+1}{2}} = 0$	$m \geqslant 3$

N	Название	Представление	Ограничения
35	$E_{3.1}(n,m)$	$ab = ba = a^n = b^m$	$n, m \geqslant 3$
36	$E_{3.2}(n,m)$	$ab = ba = a^n = b^m = 0$	$n, m \geqslant 3$
37	E_4	$a^2 = b^2$, $ba = 0$	
38	$E_{5.1}(m,n,k)$	$ab = ba$, $b^2 = a^m b$, $a^n = a^k b = 0$	$n \geqslant k \geqslant m \geqslant 2$
39	$E_{5.2}(m,n,k,q)$	$ab = ba$, $b^2 = a^m b$, $a^{n-k+q} = a^q b$, $a^k = a^n = 0$	$n \geqslant k \geqslant m \geqslant 2, n \geqslant 3, n-k \neq m$, $k \leqslant \min(n-k+q, q+m)$, $q \geqslant 2$
40	$E_{5.3}(m,n,q)$	$ab = ba$, $b^2 = a^m b$, $a^n = 0$, $a^{m+q} = a^q b$	$n \geqslant m \geqslant 2$, $n \geqslant 3$, $q \geqslant 2$
41	$E_{6.1}$	$a^2 = ab$, $b^2 = ba^2$	
42	$E_{6.2}$	$a^2 = ab$, $b^2 = 0$	
43	$E_7(n)$	$a^2 = ab$, $ba = 0$, $b^n = 0$	$n \geqslant 3$
44	$G(m,n)$	$ab = a^m$, $ba = b^n$	$m, n \geqslant 3$
45	$H_{1.1}(m,n,k)$	$ba = a^m b$, $b^2 = a^n$, $a^{n+1} = a^k b = 0$	$n \geqslant k > m \geqslant 2$
46	$H_{1.2}(m,n,k)$	$ba = a^m b$, $b^2 = a^n = a^{k-1} b$, $a^{n+1} = a^k b = 0$	$n \geqslant k > m \geqslant 2$
47	$H_{2.1}(m,n,k,l)$	$b^2 = ba^m$, $ab = a^n$, $a^k = ba^l = 0$	$m \geqslant 2$, $k > n > m+1$, $m+n \geqslant k \geqslant l > m$
48	$H_{2.2}(m,n,k,l)$	$b^2 = ba^m$, $ab = a^n$, $a^{k-1} = ba^{l-1}$, $a^k = ba^l = 0$	$m \geqslant 2$, $k > n > m+1$, $m+n \geqslant k \geqslant l > m$, $k \neq l+n-1$
49	$H_{2.3}(m,n,k,q)$	$b^2 = ba^m$, $ab = a^n$, $a^{q+n-1} = ba^q$, $a^k = ba^l = 0$	$m \geqslant 2$, $n > m+1$, $m+n \geqslant k \geqslant q+n-1$
50	$H_{2.4}(m,k,l)$	$b^2 = ba^m$, $ab = a^{m+1}$, $a^k = ba^l = 0$	$m \geqslant 2$, $k \geqslant l \geqslant m+1$
51	$H_{2.5}(m,k,l)$	$b^2 = ba^m$, $ab = a^{m+1}$, $a^{k-1} = ba^{l-1}$, $a^k = ba^l = 0$	$m \geqslant 2$, $k > m+1$, $k \geqslant l > m$, $k \neq l+m$
52	$H_{2.6}(m,k,q)$	$b^2 = ba^m$, $ab = a^{m+1}$, $a^{q+m} = ba^q$, $a^k = 0$	$m \geqslant 2$, $n > m$, $k \geqslant q+n-1$, $q \geqslant 2$
53	$I_{1.1}(n)$	$a^2 = (ab)^{\frac{2n}{2}}$, $b^2 = (ba)^{\frac{2n}{2}}$	$n \geqslant 2$
54	$I_{1.2}(n)$	$a^2 = (ba)^{\frac{2n+1}{2}}$, $b^2 = (ab)^{\frac{2n+1}{2}}$	$n \geqslant 1$
55	$I_{1.3}(n)$	$a^2 = (ba)^{\frac{2n+1}{2}}$, $b^2 = (ab)^{\frac{2n+1}{2}}$, $(ab)^{\frac{2n+2}{2}} = (ba)^{\frac{2n+2}{2}} = 0$	$n \geqslant 1$
56	$I_{1.4}(n,m,k)$	$a^2 = (ab)^{\frac{2n+1}{2}}$, $b^2 = (ba)^{\frac{2n+1}{2}}$, $(ab)^{\frac{m}{2}} = (ba)^{\frac{k}{2}} = 0$	$n \geqslant 1$, $k, m > 2n+1$, $\lvert k-m \rvert \leqslant 1$
57	$J_{1.1}(n,m)$	$ab = ba = a^m$, $b^2 = a^n$	$m \geqslant 3$, $2m-2 > n > m$
58	$J_{1.2}(n,m)$	$ab = ba = a^m$, $b^2 = a^n = 0$	$m \geqslant 3$, $2m-2 > n > m$
59	$J_{1.3}(m,k)$	$ab = ba = a^m$, $b^2 = a^{2m-2}$, $a^k = 0$	$m \geqslant 3$, $k > 2m-2$
60	$J_2(n)$	$b^2 = a^n$, $ab = ba = a^{n+1} = 0$	$n \geqslant 3$
61	$J_3(n)$	$b^2 = ab = a^n$, $ba = a^{n+1} = 0$	$n \geqslant 3$
62	$J_4(n)$	$ab = a^n$, $b^2 = ba = a^{n+1} = 0$	$n \geqslant 3$
63	$L_1(n,m)$	$b^2 = a^m$, $ba^n = 0$, $ab = 0$	$m \geqslant 3$, $m+1 \geqslant n \geqslant 2$
64	$L_{2.1}(n,m)$	$ba = a^m$, $b^n = ab = 0$	$m \geqslant 3$, $n \geqslant 3$
65	$L_{2.2}(n,m)$	$ba = a^m = b^{n-1}$, $a^{m+1} = b^n = 0$	$m \geqslant 3$, $n \geqslant 4$
66	$L_{3.1}(m,k,n)$	$ab = a^m$, $b^2 = a^k$, $ba^{n+1} = 0$	$k > m \geqslant 3$, $k \neq 2m-2$, $k \geqslant n \geqslant k-m$
67	$L_{3.2}(m,k,q)$	$ab = a^m$, $b^2 = a^k = ba^q$	$k > m \geqslant 3$, $k \neq 2m-2$, $k > q \geqslant k-m+1$

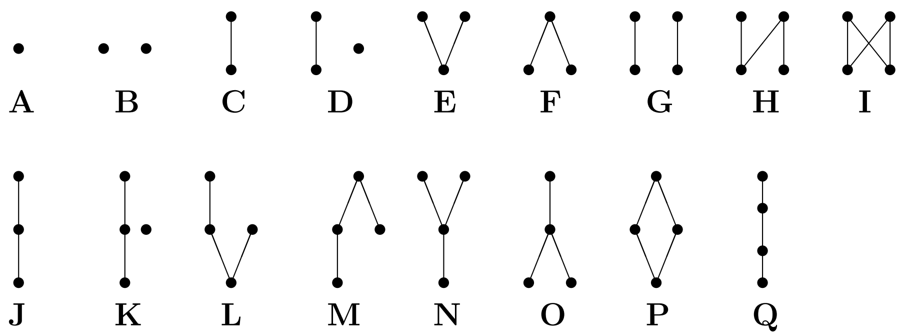
N	Название	Представление	Ограничения
68	$L_{3.3}(m,k,q)$	$ab=a^m$, $b^2=a^k$, $a^{q+m-1}=ba^q$	$k>m\geqslant 3$, $k\neq 2m-2$, $k-m+1>q\geqslant k-2m+2$
69	$L_{3.4}(m,n,l)$	$ab=a^m$, $b^2=a^{2m-2}$, $ba^l=a^n=0$	$m\geqslant 3$, $l\geqslant m-1$, $l+m\geqslant n\geqslant 2m-1$
70	$L_{3.5}(m,n,l)$	$ab=a^m$, $b^2=a^{2m-2}$, $ba^l=a^n=0$, $a^{n-1}=ba^{l-1}$	$m\geqslant 3$, $l\geqslant m-1$, $l+m\geqslant n\geqslant 2m-1$
71	$L_{3.6}(m,n,q)$	$ab=a^m$, $b^2=ba^{2m-2}$, $a^{q+m-1}=ba^q$, $a^n=0$	$m\geqslant 2$, $q\geqslant 2$, $n\geqslant q+m$
72	$L_{3.7}(m,l,k,n)$	$ab=a^m$, $b^2=ba^l$, $a^n=ba^k=0$	$2m-1\geqslant n\geqslant k>l\geqslant m\geqslant 3$
73	$L_{3.8}(m,l,k,n)$	$ab=a^m$, $b^2=ba^l$, $a^n=ba^k=0$, $a^{n-1}=ba^{l-1}$	$2m-1\geqslant n\geqslant k>l\geqslant m\geqslant 3$
74	$L_{3.9}(m,l,q,n)$	$ab=a^m$, $b^2=ba^l$, $a^n=0$, $ba^{q+m-1}=ba^q$	$2m-1\geqslant n>l\geqslant m\geqslant 3$, $q\geqslant 2$
75	$L_{3.10}(m,n,k)$	$ab=a^m$, $b^2=0$, $a^n=ba^k=0$	$n>m\geqslant 3$, $m+k\geqslant n\geqslant k\geqslant 2$
76	$L_{3.11}(m,n,k)$	$ab=a^m$, $b^2=0$, $a^n=ba^k=0$, $a^{n-1}=ba^{k-1}$	$n>m\geqslant 3$, $m+k\geqslant n\geqslant k\geqslant 2$
77	$L_{3.12}(m,n,q)$	$ab=a^m$, $b^2=0$, $a^n=0$, $a^{q+m-1}=ba^q$	$n>m\geqslant 3$, $q\geqslant 2$
78	$N_{1.1}(m,l,n,k)$	$b^2=a^mb$, $ba=a^lb$, $a^n=a^kb=0$	$n\geqslant k\geqslant l>m\geqslant 2$, $m+l\geqslant k$, $2m>l$
79	$N_{1.2}(m,l,n,k)$	$b^2=a^mb$, $ba=a^lb$, $a^n=a^kb=0$, $a^{n-1}=a^{k-1}b$	$n\geqslant k\geqslant l>m\geqslant 2$, $m+l\geqslant k$, $2m>l$
80	$N_{2.1}(m,l,n,k)$	$ba=a^mb$, $b^2=a^lb$, $a^n=a^kb=0$	$n\geqslant k\geqslant l>m\geqslant 2$, $m+l\geqslant k$
81	$N_{2.2}(m,l,n,k)$	$ba=a^mb$, $b^2=a^kb$, $a^n=a^lb=0$, $a^{n-1}=a^{k-1}b$	$n\geqslant k\geqslant l>m\geqslant 2$, $m+l\geqslant k$
82	$N_{3.1}(m,k)$	$a^2=(ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2=(ab)^{\frac{k}{2}}$	$k>2m+1$, $m>1$
83	$N_{3.2}(m,k)$	$a^2=(ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2=(ab)^{\frac{k}{2}}$, $b^2a=ab^2=b^3=0$	$k>2m$, $m>1$
84	$N_{3.3}(m,k)$	$a^2=(ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2=(ab)^{\frac{k}{2}}=(ba)^{\frac{k}{2}}$	$k>2m$, $m>1$
85	$N_{3.4}(m,k)$	$a^2=(ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2=(ab)^{\frac{k}{2}}$, $(ba)^{\frac{k}{2}}=0$	$k>2m$, $m>1$
86	$N_{3.5}(m,k,n,l)$	$a^2=(ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2=(ba)^{\frac{2k+1}{2}}$ $(ab)^{\frac{n}{2}}=(ba)^{\frac{l}{2}}=0$	$k>m, m>1, n,l\geqslant k, \lvert n-l\rvert\leqslant 1$
87	$N_{3.6}(m,n,l)$	$a^2=(ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2=(ab)^{\frac{n}{2}}=(ba)^{\frac{l}{2}}=0$	$m>1$, $n,l\geqslant m$, $\lvert n-l\rvert\leqslant 1$
88	$N_{3.7}(m)$	$a^2=(ba)^{\frac{m}{2}}$, $b^2=(ba)^{\frac{m+1}{2}}$	$m\geqslant 3$
89	$N_{3.8}(m)$	$a^2=(ab)^{\frac{m}{2}}$, $b^2=0$	$m\geqslant 3$
90	$N_{3.9}(m)$	$a^2=(ab)^{\frac{m}{2}}=(ba)^{\frac{m}{2}}$, $b^2=0$	$n\geqslant 3$
91	$N_4(m,n)$	$ab=a^n=b^m$, $ba=0$	$m,n\geqslant 3$

Далее мы покажем, что каждая строка таблицы при фиксированном наборе параметров дает одну полугруппу с точностью до изоморфизма и двойственного изоморфизма. Некоторые строки параметров не имеют, это означает, что строка определяет только одну полугруппу.

Заметим, что никакие две полугруппы в таблице не изоморфны и не двойственно изоморфны. Действительно, всякая конечная нильполугруппа имеет в точности один базис, т.е. минимальное множество порождающих. Всякий элемент базиса, по лемме 3.3.1, является максимальным элементом относительно порядка $\geqslant$. Обратно, всякий максимальный элемент в $(S, \geqslant)$ обязан входить в базис. То есть базис конечной нильполугруппы есть в точности множество ее максимальных элементов. Тогда любой автоморфизм S отображает базис в себя и, следовательно, сохраняет представление S. Нетрудно проверить, что все полугруппы в таблице имеют различные представления.

Ниже будет показано, что все полугруппы в таблице имеют ширину 2. Это дает импликацию из c) в a). Импликация из a) в b) тривиальна. Далее мы покажем, что b) влечет c).

Элементы a^2, ab, ba, b^2 образуют ч.у.м. в S. Он состоит из не более чем четырех элементов и не имеет антицепей из трех элементов. Мы перечислим все такие ч.у.м. в следующем списке.



Для каждого ч.у.м. **A-Q** мы проверим все возможности отображения множества $\{a^2, b^2, ab, ba\}$ в это ч.у.м. Будем считать два случая одинаковыми, если один можно получить из другого заменой a на b и наоборот, либо заменой ab на ba и наоборот. Действительно, с этих случаях мы получим изоморфные или двойственно изоморфные полугруппы.

Случаи, противоречащие лемме 3.5.3, не рассматриваются.

Заметим, что в случаях **B**, **D**, **F**, **G**, **H**, **I**, **K**, **M**, **O** элементы a^2, b^2, ab, ba предполагаются не равными нулю, так как ноль делится на любой элемент нильполугруппы.

Серия A. $a^2 = b^2 = ab = ba$. Тогда каждый элемент полугруппы S, кроме b, можно записать в виде a^p для некоторого положительного p. Пусть n – наименьший номер, при котором $a^n = 0$. Тогда $S \cong A(n)$.

Серия B. Возможны следующие случаи:

$a^2 = b^2 = ab \quad ba$

B1

$a^2 = b^2 \quad ab = ba$

B2

$a^2 = ab = ba \quad b^2$

B3

$a^2 = ab \quad b^2 = ba$

B4

Случай B1. Пусть x – элемент S. Если a или b^2 делят x слева, то $x = a^p$ для некоторого p. Если ba^2 делит x слева, то $x = a^p$ для некоторого p, поскольку $ba^2 = b^3$. Следовательно, всякий элемент S, кроме b и ba, может быть представлен как a^p для некоторого p. Пусть n – наименьшее целое такое, что $a^n = 0$. Мы получили полугруппу $B_1(n)$.

Случай B2. Легко показать, что каждый элемент полугруппы может быть записан как a^p или ba^p для подходящего $p \geqslant 0$. Пусть n и l – наименьшие целые такие, что $a^n = ba^l = 0$. Тогда $|n - l| \leqslant 1$ и $n \geqslant 3$, $l \geqslant 2$. Если $|n - l| = 1$, то $S \cong B_{2.1}(n, l)$.

Пусть теперь $a^m = ba^{m-1}$ для некоторого $m \geqslant 3$. Тогда $a^p = ba^{p-1}$ для любого $p \geqslant m$. Пусть n – наименьшее целое такое, что $a^n = 0$. Тогда полугруппа S изоморфна $B_{2.2}(m, n)$.

Случай B3. В этом случае каждый элемент может быть представлен в виде ab^{p-1} или b^p для подходящего $p \geqslant 1$. Пусть m – наименьшее целое такое, что $ab^{m-1} = b^n$ для некоторого $n \geqslant 3$, $m \geqslant 3$ и $n \geqslant m - 1$. Возможны следующие случаи:

Случай B3.1 $m \neq n$. Тогда $ab^m = a(ab^{m-1}) = ab^n$, откуда $ab^m = 0$. Элемент $ab^{m-1} = b^n$ – либо единственный атом, либо ноль. Тогда S соответственно изоморфна либо $B_{3.1}(m, n)$, либо $B_{3.2}(m, n)$.

Случай B3.2. $m = n$. Тогда $ab^{p-1} = b^p$ для любого $p \geqslant m$. Пусть k – наименьшее целое такое, что $b^k = 0$. Тогда $S \cong B_{3.3}(m, k)$.

Случай B4. В этом случае каждый элемент может быть записан в виде $ab^{p-1} = a^p$ или b^p для некоторого $p \geqslant 0$. Пусть m и n – наименьшие целые такие, что $a^m = b^n$. Если $m < n$, то $a^m \lessdot ba^m = b^{m+1} \leqslant b^n$, следовательно, $a^m = b^n = 0$ и $n = m + 1$. Если $m > n$, то $b^n \lessdot ab^n = a^{n+1} \leqslant a^m$, откуда $a^m = b^n = 0$ и $m = n + 1$. Получается, что $|m - n| = 1$ и $S \cong B_{4.1}$. Если же $m = n$, то $a^p = b^p$ для всех $p \geqslant n$. Пусть k – наименьшее целое такое, что $a^k = 0$. Мы вывели, что $S \cong B_{4.2}(m, k)$.

Серия C. Возможны следующие случаи:

$a^2 = ab$
$b^2 = ba$
C1

$a^2 = b^2 = ab$
ba
C2

ba
$a^2 = b^2 = ab$
C3

$a^2 = b^2$
$ab = ba$
C4

$a^2 = ab = ba$
b^2
C5

$ab = ba$
$a^2 = b^2$
C6

b^2
$a^2 = ab = ba$
C7

Случай C1. Так как $b^2 < a^2$, имеем $b^2 = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'a$ для какого-то $s' \in S^1$, то $ba = b^2 = s'a^3t = s'abat$, что означает $ba \gtrdot ba$, значит, $b^2 = 0$. Случаи $s = s'b$ и $t = at'$ для подходящих $s', t' \in S^1$ аналогичны. Если $t = bt'$ для некоторого $t' \in S^1$, то $ba = sa^2bt' = sa^3t' = sabat'$, откуда $ba \gtrdot ba$. Следовательно, $b^2 = ba = 0$.

Элемент a^2 является единственным атомом. Действительно, $a^2b = a^3 = aba = 0$ и $ba^2 = 0$. В итоге $S \cong C_1$.

Случай C2. Так как $ba < a^2$, имеем $ba = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'a$ для какого-то $s' \in S^1$, то $ba = s'a^3t = s'abat$, откуда $ba = 0$. Случаи $s = s'b$, $t = bt'$ и $t = at'$ для подходящих $s', t' \in S^1$ аналогичны. Следовательно, $ba = 0$.

Элемент a^2 является единственным атомом. Действительно, $a^2b = a^3 = aba = 0$ и $ba^2 = 0$. В итоге $S \cong C_2$.

Случай C3. Аналогично предыдущим рассуждениям, получаем $a^2 = b^2 = ab = 0$. Элемент ba является единственным атомом. В итоге $S \cong C_3$.

Случай C4. Используя аргументы случая C1, выводим $ab = ba = 0$. Элемент $a^2 = b^2$ является единственным атомом. В итоге $S \cong C_4$.

Случай C5. Используя рассуждения из случая C1, получаем $b^2 = 0$. Тогда $a^2 = ab = ba$ – единственный атом. Значит $S \cong C_5$.

Случай C6. Рассуждая так же как в случае C2, получаем $a^2 = b^2 = 0$. Элемент $ab = ba$ – единственный атом. В итоге $S \cong C_6$.

Случай C7. Имеем $a^2 = ab = ba = b^n$ для некоторого $n \geqslant 3$. Элемент a^2 является либо атомом, либо нулем, так как $ab^2 = ba^2 = a^2b = a^3 = ab^k \lessdot ab^2$. Если a^2 атом, то $S \cong C_{7.1}(n)$. Если же a^2 ноль, то $S \cong C_{7.2}(n)$.

Серия D. Возможны следующие случаи:

a^2 ab	a^2 b^2	a^2	b^2
$b^2 = ba$	$ab = ba$	b^2 $ab = ba$	ba $a^2 = ab$
D1	**D2**	**D3**	**D4**
$ab = ba$	$b^2 = ba$	$b^2 = ba$	$a^2 = b^2$
a^2 b^2	ab a^2	a^2 ab	ab ba
D5	**D6**	**D7**	**D8**

Случай D1. Имеем $b^2 < a^2$, так что $b^2 = ba = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ba < ab$ или $ba < ba$, противоречие. Следовательно, $b^2 = ba = a^m$ для подходящего $m \geqslant 3$. Элемент $a^{m+1} = ba^2 = b^2a = ba^m = a^{2m-1}$ при $m \neq 2$ делит себя, а значит, он является нулем. Элементы $bab = b^3 = b^2a$ и $aba = a^{m+1}$ также равны нулю, следовательно, ba атом. Элемент $a^{m-1}b$ является либо атомом, либо нулем.

Всякий элемент полугруппы S можно записать как a^p или $a^{p-1}b$ для некоторого $p \leqslant m$. Пусть $q \geqslant 1$ и $1 < n < m$ есть наименьшие целые числа такие, что $a^q = a^n b$. Если $q < m$, то $a^m = a^q a^{m-q} = a^n b a^{m-q} = a^n a^m a^{m-q-1} < a^m$, поэтому $a^m = ba = 0$, противоречие. Если $q = m$, то $a^{n+1}b = a^{m+1} = 0$, значит, a^m – единственный атом и $S \cong D_{1.1}(m,n)$. Если $q > m$, то $a^n b = 0$ и $S \cong D_{1.2}(m,n)$.

Случай D2. Так как $ab < a^2$, получаем $ab = ba = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ba < ab$, противоречие. Следовательно, $ab = ba = a^m$ для подходящего $m \geqslant 3$. Тогда каждый элемент полугруппы S записывается как a^p или b^p для некоторого p. Пусть n и k – наименьшие целые такие, что $a^n = 0$ и $b^k = 0$. Тогда $n \leqslant k(m-1)+1$ и $k \geqslant 3$.

Если $a^p = b^q$ возможно только при $a^p = 0$, то $S \cong D_{2.1}(m,n,k)$. Пусть теперь p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = b^q \neq 0$. Тогда $a^{p+1} = b^q a = a^{(m-1)q+1}$. Если $p \neq (m-1)q$, то $a^{p+1} = 0$ и $p + 1 = n$, $q + 1 = k$. В этом случае $S \cong D_{2.2}(m, n, k)$. Если же $p = (m-1)q$, то $a^{r(m-1)} = b^r$ для всех $r \geqslant p$, откуда $k = [n/(m-1)]$ и $S \cong D_{2.3}(m, n, q)$.

Случай D3. Имеем $b^2 = a^m$ для некоторого $m \geqslant 3$. Всякий элемент S можно записать в виде a^p или $a^p b$ для подходящего p. Пусть n – наименьшее целое такое, что $a^n = 0$ и пусть k – наименьшее целое число такое, что $a^k b = 0$. Поскольку $a^k b^2 = a^{k+m}$, получаем $k + m \geqslant n \geqslant k$.

Если $a^p = a^q b$ при каких-либо p, q возможно только при $a^p = 0$, то $S \cong D_{3.1}(m, n, k)$. Пусть p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = a^q b \neq 0$. Тогда $a^{p+r} = a^{q+r} b$ для любых $r \geqslant 0$, откуда следует $n - p = k - q$, значит, $p = n - k + q$. Поскольку $a^p b = a^q b^2 = a^{q+m}$, получаем, что $q + m - p = p - q$ или $a^p b = 0$. В первом случае $p = q + m/2$ и $m = 2(n-k)$, откуда $S \cong D_{3.2}(n, k, q)$. Во втором случае $k \leqslant \min(p, q+m)$ и $S \cong D_{3.3}(m, n, k, q)$.

Случай D4. Имеем $ba = b^n$ для некоторого $n \geqslant 3$. Тогда $bba = b^{n+1} = bab = baa = b^n a = b^{2n-1} \lessdot b^{n+1}$, следовательно, $bba = bab = baa = 0$. Далее, $a^3 = aba = ab^n = a^{n+1} \lessdot a^3$, поэтому $aba = 0$. Получаем, что ba – атом. Элемент a^2 также атом, так как $ba^2 = 0$, $a^3 = a^2 b = 0$. Все элементы полугруппы S суть a, a^2 и b^i при $i = 1 \dots n$. Мы получили полугруппу $D_4(n)$.

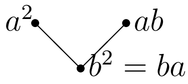
Случай D5. Имеем $a^2 < ab = ba$, так что $a^2 = sabt$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'a$ или $t = at'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $a^2 \lessdot a^2$ и $a^2 = 0 < b^2$, противоречие. Если $s = s'b$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $a^2 < b^2$, противоречие.

Случай D6. Имеем $ab < a^2 = b^2$, так что $ab = sa^2 t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'a$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ab \lessdot ab$ и $ab = 0 < ba$, противоречие. Если $s = s'b$ или $t = at'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ab < ba$, противоречие.

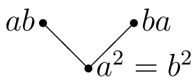
Случай D7. Имеем $a^2 < b^2$, так что $a^2 = sb^2 t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'a$ для каких-то $s' \in S^1$, то $a^2 < ab$, противоречие. Если $s = s'b$ для каких-то $s' \in S^1$, то $a^2 = s'b^3 t = s'babt < ab$, противоречие. Пусть $s = 1$. Если $t = at'$ или $t = bt'$ для некоторого $t' \in S^1$, то $a^2 = b^2 at' = b^3 t' = babt' < ab$, противоречие.

Случай D8. Поскольку $ab < a^2$, получаем $ab = sa^2 t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'a$ или $t = at'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ab \leqslant a^3 = ab^2 < ab$, противоречие. Если $s = s'b$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ab \leqslant b^3 = a^2 b < ab$, противоречие.

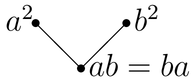
Серия E. Возможны следующие случаи:



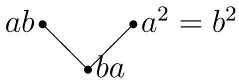
E1



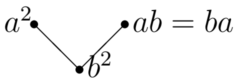
E2



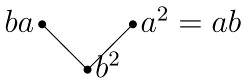
E3



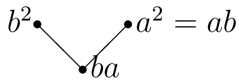
E4



E5



E6



E7

Случай E1. Имеем $b^2 < ab$, так что $b^2 = sabt$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$, $t = at'$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $b^2 \lessdot ba = b^2$, откуда вытекает $b^2 = 0$. В любом случае существует такое $m \geqslant 2$, что $b^2 = ba = a^m b$. Тогда всякий элемент полугруппы S можно записать в виде a^p или $a^p b$ для подходящего p.

Пусть k и n – наименьшие целые такие, что $a^k b = a^n = 0$. Очевидно, что $n \geqslant k$ и $k \geqslant m$. Тогда $a^{2m} b = a^m b^2 = b^3 = b^2 a = ba^m b = b^2 a^{m-1} b$. Поскольку $m \neq 1$, элемент $b^2 a$ делит себя, откуда вытекает, что $a^{2m} b = 0$ и $k \leqslant 2m$.

Если $a^q = a^r b$ возможно только при $a^q = 0$, то $S \cong E_{1.1}(m, n, k)$. Пусть $a^q = a^r b \neq 0$ для некоторых $q > r > 0$. Тогда $a^{r+1} b = a^{q+1} = a^r ba = a^{r+m} b \lessdot a^{r+1} b$, следовательно, $a^{q+1} = a^{r+1} b = 0$, откуда вытекает $q = n - 1$ и $r = k - 1$. Тогда $S \cong E_{1.2}(m, n, k)$.

Случай E2. Имеем $a^2 < ab$ и $a^2 < ba$, поэтому $a^2 = b^2 = (ab)^{m/2}$ или $a^2 = b^2 = (ba)^{m/2}$ для некоторого $m \geqslant 3$. Без ограничения общности предположим, что $a^2 = b^2 = (ab)^{m/2}$. Тогда всякий элемент S можно представить в виде $(ab)^{p/2}$ или в виде $(ba)^{p/2}$ для подходящего p. Возможны следующие случаи:

Случай E2.1. $m = 2n + 1$ для некоторого $n \geqslant 1$. Следовательно, $a^2 = b^2 = (ab)^{\frac{2n+1}{2}}$. Тогда $a^3 = (ab)^{\frac{2n+1}{2}} a = (ab)^{\frac{2n}{2}} a^2 = (ab)^{\frac{2n}{2}} b^2 = (ab)^{\frac{2n-1}{2}} b^3 = (ab)^{\frac{2n-2}{2}} a^3 b$, значит $a^3 = 0$. Далее, $a^2 b = b^3 = ba^2$, откуда вытекает, что $(ab)^{\frac{2n+2}{2}} = (ba)^{\frac{2n+2}{2}}$. Тогда $(ab)^{\frac{2n+3}{2}} = (ab)^{\frac{2n+2}{2}} a = (ba)^{\frac{2n+2}{2}} a = b(ab)^{\frac{2n}{2}} a^2 = 0$ и, аналогично, $(ba)^{\frac{2n+3}{2}} = 0$. Следовательно, элемент $a^2 b$ либо атом, либо ноль. Если $a^2 = a^2 b = (ba)^{\frac{m}{2}} = 0$, то $S \cong E_{2.1}(2n+1)$. Если $a^2 = 0$ и $(ba)^{\frac{m}{2}} \neq 0$, то $S \cong E_{2.2}(2n+1)$. Если $a^2 \neq 0$ и $(ba)^{\frac{m}{2}} = 0$, то $S \cong E_{2.3}(2n+1)$. Если $a^2 = (ba)^{\frac{m}{2}} \neq 0$ и $a^2 b = 0$, то $S \cong E_{2.4}(2n+1)$. Если $a^2 \neq (ba)^{\frac{m}{2}}$ и $a^2 b \neq 0$, то $S \cong E_{2.5}(2n+1)$. Если $a^2 \neq 0$, $(ba)^{\frac{m}{2}} \neq 0$, $a^2 \neq (ba)^{\frac{m}{2}}$ и $a^2 b = 0$, то $S \cong E_{2.6}(2n+1)$.

Случай E2.2. $m = 2n$ для некоторого $n \geqslant 2$, следовательно, $a^2 = b^2 = (ab)^{\frac{2n}{2}}$. Тогда $a^3 = a(ab)^{\frac{2n}{2}} = a^2(ba)^{\frac{2n-1}{2}} = b^3(ab)^{\frac{2n-2}{2}} = ba^3(ba)^{\frac{2n-3}{2}}$, значит $a^3 = 0$. Отсюда мы получаем $ba^2 = b^3 = a^2b = (ab)^{\frac{2n}{2}}b = (ab)^{\frac{2n-2}{2}}ab^2 = (ab)^{\frac{2n-2}{2}}a^3 = 0$, что означает, что a^2 – либо атом, либо ноль. Если $a^2 = (ba)^{\frac{m}{2}} = 0$, то $S \cong E_{2.1}(2n)$. Если $a^2 = 0$ и $(ba)^{\frac{m}{2}} \neq 0$, то $S \cong E_{2.2}(2n)$. Если $a^2 \neq 0$ и $(ba)^{\frac{m}{2}} = 0$, то $S \cong E_{2.3}(2n)$. Если $a^2 = (ba)^{\frac{m}{2}} \neq 0$, то $S \cong E_{2.4}(2n)$. Если $a^2 \neq 0$, $(ba)^{\frac{m}{2}} \neq 0$ и $a^2 \neq (ba)^{\frac{m}{2}}$, то $S \cong E_{2.6}(2n)$.

Случай E3. Имеем $ab < a^2$, откуда $ab = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ab \lessdot ab$ или $ba \lessdot ba$, что означает $ab = ba = 0$. В любом случае $ab = a^m$ для подходящего $m \geqslant 3$. Аналогично, $ab = b^n$ для некоторого $n \geqslant 3$. Каждый элемент полугруппы S можно представить в виде a^p или b^p для подходящего p. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $ab = ba = a^n$ и m – наименьшее целое число такое, что $ab = ba = b^m$. Тогда $aba = a^{n+1} = ab^m = a^nb^{m-1} = a^{2n-1}b^{m-2} \lessdot a^{n+1}$, следовательно, $aba = 0$. Аналогично, $abb = 0$, откуда вытекает, что ab – либо атом, либо ноль. Если ab – атом, то $S \cong E_{3.1}(n, m)$. Если ab – ноль, то $S \cong E_{3.2}(n, m)$.

Случай E4. Имеем $ba < a^2 = b^2$, следовательно, $ba = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'a$ или $t = at'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ba \leqslant a^3 = b^2a \lessdot ba$. Если $s = s'b$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ba \leqslant b^3 = ba^2 \lessdot ba$, откуда вытекает $ba = 0$. Теперь получаем $ab^2 = a^3 = b^2a = 0$, $a^2b = b^3 = ba^2 = 0$, $aba = bab = 0$, поэтому полугруппа S состоит только из пяти элементов и $S \cong E_4$.

Случай E5. Имеем $b^2 < ab = ba$, следовательно, $b^2 = sabt$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ или $t = bt'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $b^2 \lessdot b^2$, откуда вытекает $b^2 = 0$. В любом случае существует m такой, что $b^2 = a^mb$. Пусть m – наименьшее целое число с таким свойством.

Любой элемент S можно представить как a^p или a^pb для подходящего p. Пусть n и k – наименьшие положительные целые такие, что $a^n = 0$ и $a^kb = 0$.

Если $a^p = a^qb$ при каких-то p, q возможно только если $a^p = 0$, то $S \cong E_{5.1}(m, n, k)$.

Пусть p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = a^qb \neq 0$. Тогда $p < n$, $q < k$ и $a^{p+r} = a^{q+r}b$ для любых $r \geqslant 0$, откуда $n - p = k - q$, что означает $p = n - k + q$. Имеем $a^{n-k+q} = a^qb$, следовательно, $a^{n-k+q}b = a^{q+m}b$. Если $n - k \neq m$, то $a^{n-k+q}b = a^{q+m}b = 0$, значит $k \leqslant$

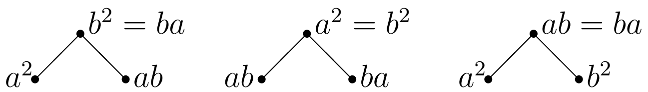
$\min\{n-k+q, q+m\}$. В этом случае $S \cong E_{5.2}(m,n,k,q)$. Если $n-k=m$, то $S \cong E_{5.3}(m,n,q)$.

Случай E6. Поскольку $a^2 = ab$, любой элемент S можно записать в виде a^p или $b^q a^p$ для некоторого p. Тогда $b^2 = 0$ или $b^2 = ba^n$ для подходящего n. Если $n \geqslant 3$, то $b^2 \lessdot a^3 = ab^2 \lessdot b^2$, откуда вытекает $b^2 = 0$. Следовательно, $b^2 = ba^2 \neq 0$ или $b^2 = 0$.

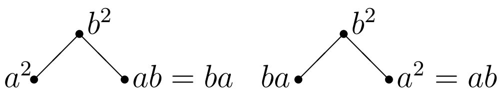
Пусть $b^2 = ba^2 \neq 0$. Тогда $a^3 = ab^2 = aba^2 = a^4$, следовательно, $a^3 = 0$. Тогда $b^2a = ba^3 = 0$, $b^3 = ba^2b = ba^3 = 0$ и $ab^2 = a^3 = 0$, значит b^2 – атом. Тогда $S \cong E_{6.1}$. Если $b^2 = 0$, то $a^3 = 0$. Отсюда выводим, что a^2 и ba – оба атомы и $S \cong E_{6.2}$.

Случай E7. Используя рассуждения из случая **E6**, мы получаем, что для некоторого $m \geqslant 2$ выполнено $ba = a^m b \lessdot a^3 = aba \lessdot ba$, следовательно, $ba = 0$. Пусть n – индекс b. Тогда S изоморфна $E_7(n)$, элементами которой являются $a, a^2, b, b^2, \ldots, b^{n-1}, 0$.

Серия F. Возможны следующие случаи:



F1 **F2** **F3**



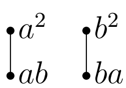
F4 **F5**

Случай F1. Имеем $a^2 < b^2 = ba$, но $a^2 \not< ab$. Следовательно, $a^2 \neq 0$ и $a^2 = b^k a$ для некоторого $k \geqslant 2$. Эти же рассуждения верны и для элемента ab, поэтому $ab = b^l a$ для некоторого $l \geqslant 2$. Тогда $a^2 \geqslant ab$ или $a^2 \leqslant ab$, противоречие.

Случай F2. $ab < a^2$, следовательно, $ab = sa^2t$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ для какого-то $s' \in S^1$, то $ab < ba$. Если $t = bt'$ для какого-то $t' \in S^1$, то $ab < ab$. Если $s = s'a$ или $t = at'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ab \leqslant a^3 = ab^2 < ab^2$. Все указанные предположения ведут к противоречию.

Случаи **F3-F5** аналогичны случаю **F1** или случаю **F2**.

Серия G. Возможен только один случай:

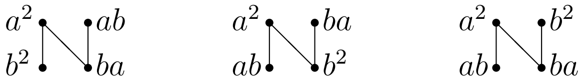


G1

Случай G1. Имеем $ab < a^2$, следовательно, $ab = a^m$ для некоторого $m \geqslant 3$. Аналогично, $ba = b^n$ для подходящего $n \geqslant 3$. Тогда $a^{m+1} = a^2b = aba = ab^n = a^mb^{n-1} = a^{2m-1}b^{n-2} \lessdot a^{m+1}$, поэтому $a^{m+1} = a^mb = ba^m = 0$. Аналогично, $b^{n+1} = bab = b^2a = 0$. Получается, что ab и ba – атомы в S.

Всякий элемент полугруппы S можно записать в виде a^p или b^p при подходящем p. Пусть $a^q = b^r$ для некоторых $q < m$ и $r \leqslant n$. Тогда $a^{q+1} = b^ra = 0$ и $a^m = 0$, противоречие. Если $q = m$ и $r = n$, мы получаем $ab = ba$, противоречие. В итоге $S \cong G_1(m, n)$.

Серия H. Возможны следующие случаи:



H1 **H2** **H3**

Случай H1. Имеем $b^2 < a^2$, следовательно, $b^2 = a^n$ для некоторого $n \geqslant 3$. Поскольку $ba < ab$ и $ba \nless b^2$, получаем $ba = a^mb$ для подходящего m такого, что $n > m \geqslant 2$. Любой элемент полугруппы S можно представить в виде a^p или a^pb для подходящего p. Далее, $a^{n+1} = b^2a = ba^mb = a^{m^2}b^2 = a^{m^2+n} \lessdot a^{n+1}$, так что $b^2 = a^{n+1} = 0$, противоречие. Следовательно, $b^2 = ba^n = a^{mn} = 0$ и b^2 это атом. Пусть k – наименьшее целое число такое, что $a^kb = 0$. Так как $a^nb = b^3 = 0$, получаем $m < k \leqslant n$.

Если неравенство $a^p = a^qb$ при каких-то $p \leqslant n$ и $q \leqslant k$ обязательно влечет $a^p = 0$, то $S \cong H_{1.1}(m, n, k)$. Пусть $a^p = a^qb \neq 0$ для некоторых $p \leqslant n$ и $q \leqslant k$. Тогда $a^{q+1}b = a^{p+1} = a^qba = a^{q+m}b$, значит $a^{p+1} = 0$. Если $p < n$, то $b^2 = 0$, противоречие. Пусть $p = n$ и $q > m$. Так как $a^{q+1}b = 0$, получаем $q = k - 1$. В итоге $S \cong H_{1.2}(m, n, k)$.

Случай H2. Имеем $ab = a^n$ для некоторого $n \geqslant 3$ и $b^2 = ba^m$ при каком-то $m \geqslant 2$. Так как $b^2 \ngtr ab$, получаем $n \geqslant m + 1$. Всякий элемент полугруппы S можно представить как a^p или ba^p для подходящего p.

Пусть $n > m + 1$. Тогда $a^{n+m} = aba^m = ab^2 = a^nb = a^{2n-1} \lessdot a^{n+m}$, что влечет $a^{n+m} = 0$. Пусть k и l – наименьшие целые числа такие, что $a^k = 0$ и $ba^l = 0$. Следовательно, $n < k$ и $m < l \leqslant k \leqslant m + n$.

Если $a^p = ba^q$ обязательно влечет $a^p = 0$, то $S \cong H_{2.1}(m, n, k, l)$. Пусть $a^p = ba^q \neq 0$. Так как $ab \nless ba$, получаем $p > n$. Следовательно, $ba^{q+1} = a^{p+1} = aba^q = a^{q+n}$. Если $p+1 \neq q+n$, то $a^{p+1} = 0$. Из этого следует, что $p + 1 = k$ и $q + 1 = l$, так что $S \cong H_{2.2}(m, n, k, l)$. Пусть

$p+1=q+n$. Тогда $a^{q+n-1+r}=ba^{q+r}$ для любого $r\geqslant 0$, так что $l=k-n+1$ и $k>q+n-1$. В итоге мы получили, что $S\cong H_{2.3}(m,n,k,q)$.

Пусть $n=m+1$ и пусть k и l – наименьшие целые такие, что $a^k=0$ и $ba^l=0$. Очевидно, что $m<k-1$, $m<l$ и $k\geqslant l$.

Если $a^p=ba^q$ обязательно влечет $a^p=0$, то $S\cong H_{2.4}(m,k,l)$. Пусть $a^p=ba^q\neq 0$. Так как $ab\not< ba$, получаем $p>m+1$. Следовательно, $ba^{q+1}=a^{p+1}=aba^q=a^{q+m+1}$. Если $p+1\neq q+m+1$, то $a^{p+1}=0$. Это влечет $p+1=k$ и $q+1=l$, так что $S\cong H_{2.5}(m,k,l)$. Пусть $p+1=q+n$. Тогда $a^{q+m+r}=ba^{q+r}$ для всех $r\geqslant 0$, откуда $l=k-m$ и $k>q+m$, и в итоге $S\cong H_{2.6}(m,k,q)$.

Случай H3. Имеем $ab=a^m$ для некоторого $m\geqslant 3$ и $ba=a^n$ для некоторого $n\geqslant 3$. Тогда $ab>ba$ или $ba>ab$, противоречие.

Серия I. Возможны следующие случаи:

I1 **I2** **I3** **I4**

Случай I1. Имеем $a^2<ab$, $a^2<ab$, но $a^2\not< b^2$, откуда вытекает, что $a^2=(ab)^{l/2}$ или $a^2=(ba)^{l/2}$ для некоторого $l\geqslant 3$. Предположим, без ограничения общности, что $a^2=(ab)^{l/2}$. Тогда $b^2=(ba)^{l/2}$. Всякий элемент полугруппы можно представить в виде $(ab)^p$ или $(ba)^p$ для подходящего p. Возможны два случая:

Случай I1.1: $a^2=(ab)^{\frac{2n}{2}}$ и $b^2=(ba)^{\frac{2n}{2}}$ для некоторого $n\geqslant 2$. Тогда $(ab)^{\frac{2n+1}{2}}=a^2a=a^3=aa^2=a(ab)^{\frac{2n}{2}}=a^2(ba)^{\frac{2n-1}{2}}=(ab)^{\frac{2n}{2}}(ba)^{\frac{2n-1}{2}}=(ab)^{\frac{2n-1}{2}}b^2(ab)^{\frac{2n-2}{2}}=(ab)^{\frac{2n-1}{2}}(ba)^{\frac{2n}{2}}(ab)^{\frac{2n-2}{2}}=(ab)^{\frac{4n-1}{2}}(ab)^{\frac{2n-2}{2}}\lessdot(ab)^{\frac{2n+1}{2}}$, следовательно, $a^3=0$. Аналогично, $b^3=0$. Тогда $a^2b=(ab)^{\frac{2n}{2}}b=(ab)^{\frac{2n-1}{2}}b^2=(ab)^{\frac{2n-1}{2}}(ba)^{\frac{2n}{2}}=(ab)^{\frac{4n-1}{2}}\lessdot a^3$, поэтому $a^2b=0$. Аналогично, $ba^2=ab^2=b^2a=0$, что означает, что a^2 и b^2 суть атомы. В итоге $S\cong I_{1.1}(n)$.

Случай I1.2: $a^2=(ba)^{\frac{2n+1}{2}}$ и $b^2=(ab)^{\frac{2n+1}{2}}$ для некоторого $n\geqslant 1$. Тогда $(ba)^{\frac{2n+2}{2}}=a^2a=aa^2=(ab)^{\frac{2n+2}{2}}$. Легко видеть, что элемент $(ba)^{\frac{2n+2}{2}}=(ab)^{\frac{2n+2}{2}}$ является либо атомом, либо нулем. Если он атом, то $S \cong I_{1.2}(n)$. Если он ноль, то $S \cong I_{1.3}$.

Случай I1.3: $a^2 = (ab)^{\frac{2n+1}{2}}$ и $b^2 = (ba)^{\frac{2n+1}{2}}$ для некоторого $n \geqslant 1$. Пусть m – наименьшее целое число такое, что $(ab)^{\frac{m}{2}} = 0$ и k – наименьшее целое число такое, что $(ba)^{\frac{k}{2}} = 0$. Тогда $|m-k| \leqslant 1$ и $m > 2n+1$, $k > 2n+1$. В итоге $S \cong I_{1.4}(n,m,k)$.

Случай I2. Имеем $b^2 < ab$ и $b^2 < a^2$, следовательно, $b^2 = a^k b$ для некоторого $k \geqslant 3$. Тем же путем получаем $ba = a^l b$ для подходящего $l \geqslant 3$. Тогда b^2 и ba сравнимы, противоречие.

Случаи **I3** и **I4** сводятся к противоречию подобным образом.

Серия J. Возможны следующие случаи:

a^2	a^2	a^2
$ab = ba$	b^2	$b^2 = ab$
b^2	$ab = ba$	ba
J1	**J2**	**J3**
a^2	$a^2 = ab$	$a^2 = ab$
ab	b^2	ba
$b^2 = ba$	ba	b^2
J4	**J5**	**J6**

Случай J1. Имеем $ab = ba = a^m$ для некоторого $m \geqslant 3$. Тогда $b^2 = a^n$ для $m < n \leqslant 2m-2$. Поэтому $a^{n+1} = ab^2 = a^m b = a^{2m-1}$. Если $n < 2m-2$, то $ab^2 = 0$ и $b^3 = 0$. Следовательно, b^2 – атом или ноль, откуда $S \cong J_{1.1}(n,m)$ или $S \cong J_{1.2}(n,m)$ соответственно.

Пусть $n = 2m-2$ и пусть k – индекс элемента a. Тогда $S \cong J_3(m,k)$.

Случай J2. Имеем $b^2 = a^n$ для некоторого $n \geqslant 3$. Также $ab < b^2$, поэтому $ab = sb^2t$ для подходящих $s,t \in S^1$. Если $s = s'a$ или $t = at'$ для каких-то $s',t' \in S^1$, то $ab \leqslant a^{n+1} = ab^2 \lessdot ab$. Случаи $s = s'b$ или $t = at'$ для подходящих $s',t' \in S^1$ аналогичны. Итак, $ab = ba = a^{n+1} = 0$ и $S \cong J_2(n)$.

Случай J3. В этом случае $0 < b^2 = ab < a^2$ влечет, что $b^2 = ab = a^n$ для некоторого $n \geqslant 3$. Тогда $a^{n+1} = b^2 a < ba$ и $a^n b = b^3 = ba^n \lessdot ba$. Итак, $ba = a^{n+1} = 0$ и $S \cong J_3(n)$.

Случай J4. Имеем $ab = a^n$ для некоторого $n \geqslant 3$. Тогда $a^{n+1} = aba \lessdot ba$ и $a^n b = ab^2 \lessdot b^2 = ba$. Но $ba < ab$, поэтому $ba = 0$ и $S \cong J_4(n)$.

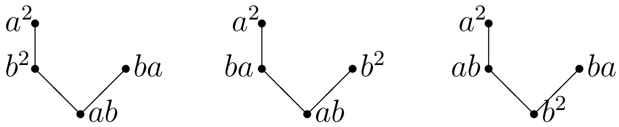
Случай J5. Из неравенства $b^2 < a^2$ вытекает, что $b^2 = sa^2t$ для некоторых $s,t \in S^1$. Если $s = s'b$ для $s' \in S^1$, то $b^2 < ba$, противоречие. Во всех остальных случаях имеем

$b^2 < a^3 = ab^2$, откуда следует $b^2 = 0$ и $b^2 < ba$, противоречие.

Случай J6. Так же как и в предыдущем случае, $ba \leqslant a^3 = aba$, откуда $ba = 0$ и $ba < b^2$, противоречие.

Серия K. Все случаи этой серии невозможны в силу леммы 3.5.3.

Серия L.



L1 **L2** **L3**

Случай L1. Имеем $b^2 = a^m$ для некоторого $m \geqslant 3$. Если $ab = a^p$ для $p > m$, то $ab = a^p = a^{p-m}b^2 \lessdot ab$. Если $ab = ba^q$ для $q \geqslant m$, то $ab = ba^q = b^3a^{q-m} = a^m ba^{q-m} \lessdot ab$. В любом случае $ab = 0$. Всякий элемент полугруппы S можно представить в виде a^p или ba^p для некоторого p.

Так как $a^{m+1} = ab^2 = 0$ и $ba^m = b^3 = a^m b = 0$, элемент b^2 является атомом. Пусть n – наименьшее натуральное целое такое, что $ba^n = 0$. Тогда ba^{n-1} также является атомом и $n \leqslant m + 1$.

Пусть $a^p = ba^q$ для некоторых $p, q \leqslant n$. Тогда $b^2 = a^n = a^{n-p}a^p = a^{n-p}ba^q = 0$, противоречие. В итоге $S \cong L_1(m, n)$.

Случай L2. Имеем $ba = a^m$ для некоторого $m \geqslant 3$. Тогда $a^{m+1} = aba \lessdot ab$, $a^m b \lessdot ab$, $ba^m = a^{2m-1} \lessdot ab$, но $ab < ba$, следовательно, $ab = 0$ и $ba = a^m$ – атом. Любой элемент полугруппы S можно представить в виде a^p или b^p для подходящего p. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $b^n = 0$.

Если $a^p = b^q$ при каких-то p, q обязательно влечет $a^p = 0$, то $S \cong L_{2.1}(m, n)$. Пусть $a^p = b^q$ для некоторых $p \leqslant m$ и $q < k$. Тогда $a^{p+1} = ab^q = 0 = a^{m+1}$, следовательно, $p = m$ и $q = n - 1$. Тогда $S \cong L_{2.2}(m, n)$.

Случай L3. $ab = a^m$ для некоторого $m \geqslant 3$. Так как $b^2 < ba$ и $b^2 < ab = a^m$, имеем либо $b^2 = a^n \neq 0$ при некотором $n \geqslant m + 1$, либо $b^2 = ba^l$ для подходящего $l \geqslant m$, либо $b^2 = 0$.

Случай L3.1. $b^2 = a^k \neq 0$ и $k \neq 2m - 2$. Тогда $b^2 a = a^{k+1} = ab^2 = a^m b = a^{2m-1}$. Поскольку $k + 1 \neq 2m - 1$, получаем $a^{k+1}=0$. $b^2 \neq 0$, значит b^2 – атом. Тогда любой элемент полугруппы S можно записать в виде a^p или ba^p при подходящем p. Заметим, что $ba^k = b^3 = a^k b = a^{m+k-1} = 0$. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $ba^{n+1} = 0$. Тогда $k - m \leqslant n \leqslant k$, так как $aba^l = a^{l+m}$ для любых l.

Если $a^p = ba^q$ обязательно влечет $a^p = 0$ для любых p, q, то $S \cong L_{3.1}(m, k, n)$. Предположим, что $a^p = ba^q \neq 0$ для некоторых p, q и пусть p, q – наименьшие целые числа с таким свойством. Тогда $k \geqslant p > q$. Имеем $a^{p+1} = aba^q = a^{q+m}$, следовательно, либо $p = k$, либо $p = q+m-1$. Если $p = k$, то $a^k = ba^q$ и $a^{k+1} = a^{q+m}$, откуда $q \geqslant k-m+1$ и $S \cong L_{3.2}(m, k, q)$. Если $p = q + m - 1$, то $a^{r+m-1} = ba^r$ для любых $r \geqslant q$. Но $ba^{q+m-1} = b^2a^q = 0$, так что $a^{q+2m-1} = 0$, откуда вытекает $q \geqslant k - 2m + 2$. Мы получаем, что $S \cong L_{3.3}(m, k, q)$.

Случай L3.2. $b^2 = a^{2m-2} \neq 0$. Всякий элемент полугруппы можно представить в виде a^p или ba^p при подходящем p. Тогда $ba^{2m-2} = b^3 = a^{2m-2}b = a^{3m-3}$ и $ba^{2m-2+r} = a^{3m-3+r}$ для любых $r \geqslant 1$. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $a^n = 0$. Тогда $n \geqslant 2m - 1$, поскольку $b^2 \neq 0$. Пусть l – наименьшее целое число такое, что $ba^l = 0$. Тогда $l \geqslant m - 1$ и $n \leqslant l + m$.

Если $a^p = ba^q$ обязательно влечет $a^p = 0$ для любых p, q, то $S \cong L_{3.4}(m, n, l)$. Пусть $a^p = ba^q \neq 0$ для некоторых p, q и пусть p, q – наименьшие целые числа с таким свойством. Тогда $a^{p+1} = aba^q = a^{q+m}$, поэтому либо $a^{p+1} = a^{q+m} = 0$, либо $p = q + m - 1$. Пусть $a^{p+1} = a^{q+m} = 0$. Тогда $p + 1 = n$, $q + 1 = l$ и $q + m \geqslant n$. Следовательно, $S \cong L_{3.5}(m, n, l)$.

Пусть $p = q + m - 1$. Тогда $q \geqslant 2$, $n \geqslant q + m$ и мы получаем $S \cong L_{3.6}(m, n, q)$.

Случай L3.3. $b^2 = ba^l \neq 0$ для некоторого l. Так как $ab > b^2$, получаем $l \geqslant m$. Всякий элемент полугруппы можно записать в виде a^p или в виде ba^p для некоторого p. Тогда $a^{2m-1} = a^m b = ab^2 = aba^l = a^{l+m}$. Поскольку $l \geqslant m$, имеем $a^{2m-1} = a^{m+l} = 0$. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $a^n = 0$ и k – наименьшее целое число такое, что $ba^k = 0$. Тогда $l < k \leqslant n \leqslant 2m - 1$.

Если $a^p = ba^q$ обязательно влечет $a^p = ba^q = 0$, то $S \cong L_{3.7}(m, l, k, n)$. Пусть p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = ba^q \neq 0$. Очевидно, $q \geqslant 2$. Тогда $a^{p+1} = aba^q = a^{q+m}$, так что либо $a^{p+1} = a^{q+m} = 0$, либо $p = q + m - 1$. В первом случае мы получаем $p = n - 1$ и $q = l - 1$, откуда $S \cong L_{3.8}(m, l, k, n)$. Во втором случае $a^{r+m-1} = ba^r$ для любых $r \geqslant q$, следовательно, $k = n - m + 1$ и $S \cong L_{3.9}(m, l, q, n)$.

Случай L3.4. $b^2 = 0$. Каждый элемент в полугруппе может быть записан как a^p или ba^p при подходящем p. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $a^n = 0$ и k – наименьшее целое число такое, что $ba^k = 0$. Тогда $k \leqslant n \leqslant k + m$.

Пусть p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = ba^q$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

1) $a^p = b^q = 0$;

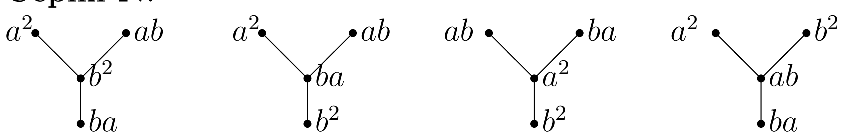
2) $a^{p+1} = a^{q+m} = 0$;

3) $p = q + m - 1$ и $n > p + 1$.

В первом случае мы получаем $p = n$ и $q = k$, так что $S \cong L_{3.10}(m, n, k)$. Во втором случае $p + 1 = n$ и $q + 1 = k$, откуда $S \cong L_{3.11}(m, n, k)$. В третьем случае $a^{r+m-1} = ba^r$ для любых $r \geqslant q$, поэтому $k = n - m + 1$ и $S \cong L_{3.12}(m, n, q)$.

Серия M. Из леммы 3.5.3 следует, что все случаи противоречивы.

Серия N.



N1 **N2** **N3** **N4**

Случай N1. Имеем $b^2 < ab$, следовательно, $b^2 = sabt$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ или $t = at'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $b^2 < ba$, противоречие. Если $t = bt'$ для какого-то $t' \in S^1$, то $b^2 < b^2$, откуда $b^2 = 0 < ba$, противоречие. Следовательно, $b^2 = a^m b$ для некоторого $m \geqslant 2$. Аналогично получаем, что либо $ba = 0$, либо $ba = a^l b \neq 0$ при некотором $l > m$.

Случай N1.1. $ba = a^l b \neq 0$ при некотором $l > m$. Всякий элемент в полугруппе может быть записан как a^p или $a^p b$ для подходящего p. Заметим, что $a^{2m} b = a^m b^2 = b^3 = ba^m b \lessdot ba$, так что $l < 2m$. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $a^n = 0$ и пусть k – наименьшее целое число такое, что $ba^k = 0$. Очевидно, что $l < k \leqslant n$. Так как $a^{m+l} b = a^m ba = b^2 a = ba^l b = a^{l^2} b^2 = a^{l^2+m} b$, получаем, что $k \leqslant m + l$.

Пусть p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = a^q b$. Тогда $a^{q+1} b = a^{p+1} = a^q ba = a^{q+l} b = 0$, поэтому либо $p = n$, $q = k$ и $S \cong N_{1.1}(m, l, n, k)$, либо $p = n - 1$ и $q = k - 1$. Из этого вытекает, что $S \cong N_{1.2}(m, l, n, k)$.

Случай N1.2. $ba = 0$. Любой элемент полугруппы S может быть представлен как a^p или $a^p b$ для подходящего p. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $a^n = 0$ и пусть k – наименьшее целое число такое, что $ba^k = 0$. Ясно, что $k \leqslant n$.

Пусть p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = a^q b$. Тогда $a^{p+1} = a^q ba = 0$, откуда либо $p = n$, $q = k$ и $S \cong N_{1.1}(m, l, n, l)$, либо $p = n - 1$ и $q = k - 1$, т.е. $S \cong N_{1.2}(m, l, n, l)$.

Случай N2. Имеем $ba < ab$, следовательно, $ba = sabt$ для некоторых $s, t \in S^1$. Если $s = s'b$ или $t = at'$ для каких-то $s', t' \in S^1$, то $ba = 0 < b^2$, противоречие. Если $t = bt'$ для какого-то $t' \in S^1$, то $ba < b^2$, противоречие. Следовательно, $ba = a^m b$ для подходящего $m \geqslant 2$. Аналогично получаем, что либо $b^2 = 0$, либо $b^2 = a^l b \neq 0$ для некоторого $l > m$.

Случай N2.1. $b^2 = a^l b \neq 0$ для некоторого $l > m$. Всякий элемент полугруппы может быть записан как a^p или $a^p b$ при подходящем p. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $a^n = 0$ и k – наименьшее целое число такое, что $a^k b = 0$. Ясно, что $l < k \leqslant n$. Так как $a^{m+l} b = a^l ba = b^2 a = ba^m b = a^{m^2+l} b \lessdot a^{m+l} b$, получаем $k \leqslant m + l$.

Пусть p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = a^q b$. Тогда $a^{q+1} b = a^{p+1} = a^q ba = a^{q+m} b$, так что либо $p = n$, $q = k$ и $S \cong N_{2.1}(m, l, n, k)$, либо $p = n - 1$ и $q = k - 1$, т.е. $S \cong N_{2.2}(m, l, n, k)$.

Случай N2.2. $b^2 = 0$. Всякий элемент полугруппы может быть представлен в виде a^p или $a^p b$ при подходящем p. Пусть n – наименьшее целое число такое, что $a^n = 0$ и пусть k – наименьшее целое число такое, что $a^k b = 0$. Тогда $k \leqslant n$.

Пусть p, q – наименьшие целые такие, что $a^p = a^q b$. Тогда $a^{q+1} b = a^{p+1} = a^q ba = a^{q+m} b = 0$, так что либо $p = n$, $q = k$ и $S \cong N_{2.1}(m, l, n, l)$ или $p = n - 1$ и $q = k - 1$, т.е. $S \cong N_{2.2}(m, l, n, l)$.

Случай N3. Имеем $a^2 < ab$ и $a^2 < ba$, но $a^2 \not< b^2$. Следовательно, $a^2 = (ab)^{\frac{p}{2}}$, либо $a^2 = (ba)^{\frac{p}{2}}$ для некоторого p. Очевидно, что любой элемент полугруппы может быть записан в таком виде.

Случай N3.1. $a^2 = (ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2 = (ab)^{\frac{2k+1}{2}} \neq 0$ для некоторых $k > m > 1$. Тогда $(ab)^{\frac{2k+2}{2}} = (ab)^{\frac{2k+1}{2}} b = b^3 = b(ab)^{\frac{2k+1}{2}} = (ba)^{\frac{2k+2}{2}}$. Следовательно, $(ab)^{\frac{2k+3}{2}} = (ab)^{\frac{2k+2}{2}} a = (ba)^{\frac{2k+2}{2}} a = (ba)^{\frac{2k+1}{2}} a^2 = (ba)^{\frac{2k+1}{2}} (ab)^{\frac{2k+1}{2}} \lessdot (ab)^{\frac{2k+3}{2}}$, откуда $(ab)^{\frac{2k+3}{2}} = 0$. Аналогично, $(ba)^{\frac{2k+3}{2}} = 0$.

Если $(ab)^{\frac{2k+1}{2}} \neq (ba)^{\frac{2k+1}{2}}$ и $(ab)^{\frac{2k+1}{2}} \neq 0$, то $S \cong N_{3.1}(m, 2k+1)$. Если $(ab)^{\frac{2k+1}{2}} \neq (ba)^{\frac{2k+1}{2}} \neq 0$ и $(ab)^{\frac{2k+1}{2}} = 0$, то $S \cong N_{3.2}(m, 2k+1)$. Если $(ab)^{\frac{2k+1}{2}} = (ba)^{\frac{2k+1}{2}}$, то $S \cong N_{3.3}(m, 2k+1)$. Если $(ab)^{\frac{2k+1}{2}} \neq 0$ и $(ba)^{\frac{2k+1}{2}} = 0$, то $S \cong N_{3.4}(m, 2k+1)$.

Случай N3.2. $a^2 = (ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2 = (ab)^{\frac{2k+2}{2}} \neq 0$ для некоторых $k \geqslant m > 1$. Тогда $(ba)^{\frac{2k+3}{2}} = b(ab)^{\frac{2k+2}{2}} = b^3 = (ab)^{\frac{2k+2}{2}}b = (ab)^{\frac{2k+1}{2}}b^2 = (ab)^{\frac{2k+1}{2}}(ab)^{\frac{2k+2}{2}} = (ab)^{\frac{2k}{2}}a^2(ba)^{\frac{2k+1}{2}} = (ab)^{\frac{2k}{2}}(ab)^{\frac{2m+1}{2}}(ba)^{\frac{2k+1}{2}} = (ab)^{\frac{4k+2m+2}{2}} \lessdot (ba)^{\frac{2k+2}{2}}$, так что $(ba)^{\frac{2k+3}{2}} = b^3 = 0$. Следовательно, $b^2ab \lessdot b^3$ и $b^2ab = 0$.

Если $b^2a \neq 0$, то $S \cong N_{3.1}(m, 2k+2)$. Если $b^2a = 0$ и $(ba)^{\frac{2k+2}{2}} \neq 0$, то $S \cong N_{3.2}(m, 2k+2)$. Если $(ab)^{\frac{2k+2}{2}} = (ba)^{\frac{2k+2}{2}} \neq 0$, то $S \cong N_{3.3}(m, 2k+2)$. Если $(ab)^{\frac{2k+2}{2}} \neq 0$ и $(ba)^{\frac{2k+2}{2}} = 0$, то $S \cong N_{3.4}(m, 2k+2)$.

Случай N3.3. $a^2 = (ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2 = (ba)^{\frac{2k+1}{2}}$ для некоторых $m, k \geqslant 2$ и $k > m$. Пусть n и l – наименьшие целые такие, что $(ab)^{\frac{n}{2}} = (ba)^{\frac{l}{2}} = 0$. Ясно, что $n, l \geqslant 2k+1$ и $|n - l| \leqslant 1$. Тогда $S \cong N_{3.5}(m, k, n, l)$.

Случай N3.4. $a^2 = (ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, $b^2 = 0$. Пусть n и l – наименьшие целые такие, что $(ab)^{\frac{n}{2}} = 0$ и $(ab)^{\frac{l}{2}} = 0$. Очевидно, что $|n - l| \leqslant 1$. Тогда $S \cong N_{3.6}(m, n, l)$.

Случай N3.5. $a^2 = (ab)^{\frac{2m}{2}}$ для некоторого $m > 1$. Тогда $(ab)^{\frac{2m+1}{2}} = a^3 = a(ab)^{\frac{2m}{2}} = a^2(ba)^{\frac{2m-1}{2}} = (ab)^{\frac{2m}{2}}(ba)^{\frac{2m-1}{2}} = (ab)^{\frac{2m-1}{2}}b^2(ab)^{\frac{2m-2}{2}}$. Легко видеть, что $(ab)^{\frac{2m-1}{2}}b^2(ab)^{\frac{2m-2}{2}} \lessdot (ab)^{\frac{2m+1}{2}}$, поэтому $(ab)^{\frac{2m+1}{2}} = 0$. Следовательно, $(ba)^{\frac{2m+2}{2}} = 0$. Тогда $b^2 = (ba)^{\frac{2m+1}{2}}$ или $b^2 = 0$.

Если $b^2 = (ba)^{\frac{2m+1}{2}} \neq 0$, то $S \cong N_{3.7}(2m)$. Если $(ba)^{\frac{2m+1}{2}} \neq 0$ и $b^2 = 0$, то $S \cong N_{3.8}(2m)$. Если $b^2 = (ba)^{\frac{2m+1}{2}} = 0$, то $S \cong N_{3.9}(2m)$.

Случай N3.6. $a^2 = (ba)^{\frac{2m+1}{2}}$. Тогда $(ab)^{\frac{2m+2}{2}} = a^3 = (ba)^{\frac{2m+2}{2}}$, откуда $(ab)^{\frac{2m+3}{2}} = (ba)^{\frac{2m+3}{2}} = 0$. Следовательно, $b^2 = (ab)^{\frac{2m+2}{2}}$ или $b^2 = 0$.

Если $b^2 = (ab)^{\frac{2m+2}{2}} \neq 0$, то $S \cong N_{3.7}(2m+1)$. Если $(ab)^{\frac{2m+2}{2}} \neq 0$ и $b^2 = 0$, то $S \cong N_{3.8}(2m+1)$. Если $b^2 = (ab)^{\frac{2m+2}{2}} = 0$, то $S \cong N_{3.9}(2m+1)$.

Случай N4. Имеем $ab = a^n = b^m$ для некоторых $n, m \geqslant 3$. Тогда $bab \lessdot ba$, $a^2b = a^{n+1} = aba \lessdot ba$, $ab^2 = b^{m+1} = bab \lessdot ba$, но $ba < ab$. Поэтому $ba = 0$ и ab – атом. Если $a^p = b^q$ при каких-то $1 < p < n$ и $1 < q < m$, то $a^{p+1} = 0$, а это влечет $ab = a^n = 0 = ba$, противоречие. В итоге $S \cong N_4(n, m)$.

Серии O, P, Q приводят к противоречию, что легко установить с помощью леммы

3.5.3 или рассуждений из серии **F**.

Теорема 3.5.1 доказана.

Доказательство леммы 3.4.2 и леммы 3.4.3.

Легко видеть, что серии A, B_1, C_1–C_7, D_4, E_4, E_6, E_7, J_1–J_4 тривиально удовлетворяют леммам 3.4.2 и 3.4.3, так как практически все элементы в таких полугруппах образуют цепь, либо же эти серии содержат всего одну полугруппу.

Пусть S выбрана из серий E_2, I_1 или N_3. Тогда любой элемент S может быть записан в виде $(ab)^{p/2}$ или $(ba)^{p/2}$ при некотором p. Единственный элемент, который несравним с $(ab)^{p/2}$ – это $(ba)^{p/2}$. Если θ – конгруэнция на S и $((ab)^{p/2}, (ba)^{p/2}) \in \theta$, то $(a(ab)^{p/2}, a(ba)^{p/2}) = (a^2(ba)^{(p-1)/2}, (ab)^{(p+1)/2}) \in \theta$. Так как $a^2(ba)^{(p-1)/2} < (ba)^{p+1}$ в каждом из случаев E_2, I_1 и N_3, получаем, что $(0, (ab)^{(p+1)/2}) \in \theta$. Аналогично, $(0, (ba)^{(p+1)/2}) \in \theta$, следовательно, леммы 3.4.3 и 3.4.2 в этом случае доказаны.

В случае G любой элемент имеет вид a^p или b^p для некоторого p. Пусть $(a^p, b^q) \in \theta$ для каких-то p, q. Тогда $(a^{p+1}, b^q a) = (a^{p+1}, 0) \in \theta$ и $(a^p b, b^{q+1}) = (0, b^{q+1}) \in \theta$, откуда следует $(a^{p+1}, b^{q+1}) \in \theta$, так что лемма 3.4.3 выполняется. Те же рассуждения применимы к случаю L_2.

В случаях B_2, B_3, B_4, D_1, D_3, E_1, E_5, H_1, H_2, L_1, L_3, N_1, N_2, N_4 в каждой из полугрупп всякий элемент может быть записан в виде a^p или ba^p (или аналогичном виде) для некоторого p. Это сразу же влечет справедливость леммы 3.4.3.

В каждом из случаев B_2, B_3, B_4, D_1, D_2, D_3, E_1, E_5, G, H_1, H_2, L_1, L_2, L_3, N_1, N_2, N_4 равенство $a^p = ba^q$ при любых p, q влечет $a^{p+r} = ba^{q+r}$ для всех $r \geqslant 1$. Поэтому для этих случаев справедлива лемма 3.4.2.

В случае полугруппы S типа D_2 мы имеем единственный нетривиальный элемент σ в $\Sigma(S)$. Множество P_σ это множество всех пар $\{a^{q(m-1)}, b^q\}$ при $q \geqslant 1$. Разумеется, $\{a^{q(m-1)}, b^q\} \geqslant \{a^{q'(m-1)}, b^{q'}\}$ относительно порядка в P_σ, если $q \geqslant q'$. Предположим, что $(a^{q(m-1)}, b^q) \in \theta$ для некоторого $\theta \in \operatorname{Con} S$. Тогда $(a^{q(m-1)}b, b^{q+1}) \in \theta$. Но в случае D_2 мы имеем соотношение $ab = a^m$, поэтому $(a^{(q+1)(m-1)}, b^{q+1}) \in \theta$. Легко показать по индукции, что $(a^{q'(m-1)}, b^{q'}) \in \theta$ при каждом $q' \geqslant q$, поэтому лемма 3.4.3 справедлива и в этом случае.

Доказательство леммы 3.4.2 и леммы 3.4.3 закончено.

Теперь все утверждения параграфа 3.4 полностью разобраны, а значит следствие 3.4.1 справедливо. Вместе с предложением 3.5.1 это заканчивает доказательство теоремы **VI**.

Заключение

В диссертации изучены вопросы о представлении решеток решетками конгруэнций полугрупп.

В рамках данной тематики получены следующие результаты:

1. Получено представление достаточно широких подклассов дистрибутивных алгебраических решеток (включающих, в частности, класс всех конечных дистрибутивных решеток) решетками конгруэнций полугрупп без идемпотентов.

2. Получено представление дистрибутивных алгебраических пространственных решеток решетками конгруэнций полугрупп, все конгруэнции которых являются рисовскими.

3. Исследованы решетки конгруэнций нильполугрупп. Показано, что дистрибутивными решетками конгруэнций нильполугрупп являются только цепи. Описаны конечные нильполугруппы с дистрибутивными и модулярными решетками конгруэнций. Найдены «запрещенные» решетки, которые не могут быть изоморфны фильтру решетки конгруэнций какой-либо нильполугруппы.

Литература

[1] Ершов, Ю.Л. Теория нумераций / Ю.Л. Ершов. // М.: Наука. – 1977. – 416 с.

[2] Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп Т.1./ А. Клиффорд, Г. Престон.// М.: Мир. – 1972. – 285 с.

[3] Репницкий, В.Б. Решеточная универсальность свободных бернсайдовых групп / В.Б. Репницкий. – Алгебра и логика. – 1996. – N5 – С. 587-611.

[4] Adaricheva, K.V. The structure of congruence lattices of finite semilattices / K.V. Adaricheva.// Algebra and Logic. – 1996. – N35. – No. 1. – C. 1–15.

[5] Ash, C.J. The lattice of ideals of a semigroup / C.J. Ash // Algebra Universalis. – 1980. – N10. – C. 395-398.

[6] Auinger, K. The congruence lattice of a strict regular semigroup / K. Auinger. // J. Pure Appl. Algebra. – 1992. – N81. C. 219–245.

[7] Behrendt, G. Maximal antichains in partially ordered sets / G. Behrendt. // Ars Combin. – 1988. – N25. – C. 149–157.

[8] Birkhoff, G. Representations of lattices by sets / G. Birkhoff, O. Frink // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – N64 – C. 229–316.

[9] Bonzini, C. Modularity of the lattice of congruences of a regular ω-semigroup / C. Bonzini, A. Cherubini. // Proc. Edinburg Math. Soc. – 1990. – N33. – C. 405–407.

[10] Dean, R.A. Idempotent semigroup with distributive right congruence lattices / R.A. Dean, R.H. Oehmke. // Pacific J. Math. – 1964. – N4 – C. 1187-1209.

[11] Freese, R. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type. I / R. Freese, W. A. Lampe and W. Taylor. // Pacific J. Math. – 1979. – N82. – C. 59–68.

[12] Freese, R. Congruence lattices of semilattices / R. Freese, J.B. Nation.// Pacific J. Math. – 1973. – N49. – No. 1. – C. 51–58.

[13] Fried, E. Multipasting of lattices / E. Fried, G. Gratzer, T. Schmidt.// Algebra Universalis. – 1993. – N30. – C. 241-261.

[14] Funayama, N. On the distributivity of a lattice of lattice-congruences / N. Funayama, T. Nakayama. // Proc. Imp. Acad. – 1942. – N18. – Number 9 – C. 553-554.

[15] Gillibert, P. From Objects to Diagrams for Ranges of Functors / P. Gillibert, F. Wehrung.// Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2011.

[16] Gratzer, G. Lattice Theory: Foundation / G. Grätzer. – Birkhäuser Verlag, Basel. – 2011. – 644c.

[17] Gratzer, G. Universal Algebra, Second edition with updates / G. Grätzer. // Springer Science+Business Media, LLC. – 2008. – 568 c.

[18] Gratzer, G. On the Congruence Lattice of a Lattice / G. Grätzer.// The Dilworth theorems : selected papers of Robert P. Dilworth edited by K.P. Bogart, R. Freese, J.P.S. Kung, Springer Science+Business Media New York – 1990. – 465c.

[19] Gratzer, G. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras / G. Grätzer and E. T. Schmidt. // Acta Sci. Math. (Szeged) – 1963. – N24. – C. 34–59.

[20] Hamilton, H.B. Semilattices whose structure lattice is distributive / H.B. Hamilton. // Semigroup Forum – 1974 – N8 – C.245–253.

[21] Hamilton, H.B. Modularity and distributivity of the congruence lattice of a commutative separative semigroup / H.B. Hamilton. // Math. Japan. – 1982. – N27. – C.581–589.

[22] Herrmann, C. S-verklebte Summen von Verbänden / Ch. Herrmann. // Math. Z. – 1973. – N130. – C. 255–274.

[23] Hunn. A. On the representation of distributive algebraioc lattices II / A. Hunn. // Acta Sci. Math. (Szeged) – 1989. – N53. – C. 3–10.

[24] Hunn, A. On the representation of distributive algebraioc lattices III / A. Hunn.// Acta Sci. Math. (Szeged). – 1989. – N53. – C. 11–18.

[25] Jones, P. On the congruence lattices of regular semigroups / P. Jones. // J. Algebra – 1983. – N82. – C. 18–39.

[26] Jones, P. Congruence seimodular varieties of semigroups / P. Jones. // Lecture Notes Math., Proceedings Oberwolfach – 1988. – N1320.

[27] Jonsson, B. On the representation of lattices / B. Jónsson // Math. Scand. – 1953. – N1. – C. 193–206.

[28] Lampe, W.A. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, II / W. A. Lampe. // Pacific J. Math. – 1982. – N103. – C. 475–508.

[29] Lampe, W.A. Simultaneous congruence representations: a specia case / W.A. Lampe. // Algebra univers. – 2005. – N54. – C. 249-255.

[30] Lampe, W.A. Results and problems on congruence lattice representations / W. A. Lampe. // Algebra univers. – 2006. – N55. – C. 127–135.

[31] Lampe, W.A. On the congruence lattice characterization theorem / W.A. Lampe. // Trans. of the Am. Math. Soc. – 1973. – N182. – C. 43–60.

[32] Lampe, W.A. A perspective on algebraic representations of lattices / W.A. Lampe.// Algebra univers. – 1994. – N31. – C. 337–364.

[33] Maj, M. Gruppi infiniti supersolubili con il reticulo dei sottogrouppi normali distributive / M. Maj. // Rend. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli – 1984. – N51 – C. 15–20.

[34] Mitsch, H. Semigroups and their lattice of congruences / H. Mitsch. // Semigroup Forum – 1983. – N26. – C. 1–63.

[35] Mitsch, H. Semigroups and Their Lattice of Congruences / H. Mitsch.// Semigroup Forum – 1997. – N54. – C. 1–42.

[36] Nagy, A. Permutative Semigroups Whose Congruence Form a Chain / A. Nagy, P. Jones. // Semigroup Forum. – 2004. – N69. – C. 446–456.

[37] Ore, O. Structures and group theory / O. Ore. // Duke Math. J. – 1938. – N21. – C. 247–269.

[38] Pazderski, G. On groups for which the lattice of normal subgroups is distributive / G. Pazderski. // Beiträge Algebra Geom. – 1987. – N24. – C. 185–200.

[39] Pudlak, P. On congruence lattices of lattices / P. Pudlak. // Algebra Univers. – 1985. – N20. – C. 96-–114.

[40] Pudlak, P. A new proof of the congruence lattice representation theorem / P. Pudlak. // Algebra Univers. – 1976. – N6. – C. 269-275.

[41] Repnirskiĭ, V. Intervals in subgroup lattices of countable locally finite groups / V. Repnitskiĭ and J. Tůma. // Algebra univers. – 2008. – N59. – C. 49–71.

[42] Reuter, K. The jump number and the lattice of maximal antichains / K. Reuter. // Discrete Mathematics. – 1991. – N88. – C. 289–307.

[43] Ružička, P. Free trees and the optimal bound in Wehrung's theorem / P. Ružička. // Fund. Math. 198. – 2008. – C. 217–228.

[44] Ružička, P. Distributive congruence lattices of congruence-permutable algebras / P. Ružička, J. Tůma and F. Wehrung. // Journal of Algebra – 2007. – N311. – C. 96–116.

[45] Schein, B.M. Commutative semigroups where congruences form a chain / B.M. Schein.// Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1969. – N17. – C. 523–527.

[46] Schmidt, E.T. The ideal lattice of a distributive lattice with 0 is the congruence lattice of a lattice / E. T. Schmidt. // Acta Sci. Math. (Szeged) – 1981. – N43. – C. 153–168.

[47] Silcock, H.L. Generalized wreth products and the lattice of normal subgroups of a group / H.L. Silcock. // Algebra Universalis. – 1977. – N7. – C. 361-372.

[48] Slavik, V. A note on the amalgamation properties in lattice varieties / V. Slavik. // Comm. Math. Univ. Carolinae. – 1980. – N21. – C. 473–478.

[49] Tamura, T. Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain / T. Tamura. // Bull. Soc. Math. France. – 1969. – N97. – C. 369–380.

[50] Tamura, T. Finitness of congruence lattices of commutative semigroups / T. Tamura, T. Nordahl.// Semigroup Forum – 1972. – N4. – C. 73–77.

[51] Taylor, W. Some applications of the term condition / W. Taylor.// Algebra univers. – 1982. – N14. – C. 11–24.

[52] Tůma, J. Semilattice-valued measures / J. Tůma.// Contr.Gen.Alg. – 2007. – N18.

[53] Wehrung, F. A solution to Dilworth's congruence lattice problem / F. Wehrung.// Advances in Mathematics. – 2007. – N216. – C. 610-625.

[54] Zhu, P. On Rees congruence semigroups / P. Zhu. // Northeast. Math. J. – 1992. – N8. – C. 185-191.

Работы автора по теме диссертации

[55] Попович, А.Л. О представлении решеток решетками конгруэнций полугрупп / А. Л. Попович, В. Б. Репницкий. // Тр. ИММ УрО РАН – 2010. – N16. – No. 2. – С. 199–208.

[56] Попович, А.Л. Представление решеток решетками конгруэнций полугрупп без идемпотентов / А. Л. Попович. // Тр. ИММ УрО РАН. – 2012. – N18. – No. 3. – С. 208–217.

[57] Попович, А.Л. Представление дистрибутивных алгебраических пространственных решеток решетками конгруэнций полугрупп и группоидов / А.Л. Попович. // Сиб. электр. мат. изв. – 2015. – N12. – С. 144-157.

[58] Popovich, A.L. On the congruence lattices of nilsemigroups / A.L. Popovich, P.R. Jones. // Semigroup Forum. – 2017. – N95. – Issue 2. – С. 314-320.

[59] Popovich, A.L. Finite nilsemigroups with modular congruence lattices / A.L. Popovich. // Ural Mathematical Journal – 2017. – Vol. 3. – No. 1. – С. 52-67.

Тезисы конференций

[60] Popovich, A.L. On the representation of lattices by congruence lattices of semigroups / A.L. Popovich // The 3rd Novi Sad Algebraic Conference: тезисы международной конференции, Нови Сад, Сербия, 17-21 августа, 2009. Futura, Petrovaradin.– 2009. – С. 65.

[61] Popovich, A.L. On the representation of lattices by congruence lattices of semigroups / A.L. Popovich // Мальцевские чтения: тезисы международной конференции, Новосибирск, 24-28 августа, 2009. Издательство НГУ. – 2009. – С. 180.

[62] Попович, А.Л. О представлении решеток решетками конгруэнций комбинаторных полугрупп / А.Л. Попович // Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции 30 января-6 февраля 2011 г. Екатеринбург, ИММ УрО РАН. – 2011. – С. 238

[63] Popovich, A.L. Representation of distributive spatial lattices by congruence lattices of groupoids / A.L. Popovich // Universal Algebra and Lattice Theory: тезисы международной конференции, 21-25 июня 2012, Сегед, Венгрия. Bolyai Institute, University of Szeged. – 2012. – С. 17.

[64] Popovich, A.L. On congruence lattice of nilsemigroups / A.L. Popovich // Алгебра и математическая логика: теория и приложения: тезисы международной конференции, 2-6 июня 2014, Казань. – 2014. – С. 119.

[65] Попович, А.Л. Конечные полугруппы с модулярными решетками конгруэнций / А.Л. Попович. // Математика в современном мире : тезисы докладов международной конференции, посвященной 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева, 14-19 августа, Новосибирск. – 2017. – С. 93.