Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт математики им. С. Л. Соболева

Сибирского отделения Российской академии наук

Паненко Роман Анатольевич

Пространства Орлича на группах, многообразиях и графах

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Я. А. Копылов

Новосибирск — 2018

Оглавление

Введение

Данная работа состоит из четырех глав, также включает введение, заключение и список литературы.

Ниже мы даем краткий обзор данной работы. Результаты работ [32, 33], включенные в диссертацию (главы 2 и 3), получены автором единолично. Результаты статьи [34], касающиеся свойств операторов регуляризации де Рама (глава 4), получены в неделимом соавторстве с научным руководителем Копыловым Я.А.

В главе 1 приводятся необходимые сведения из теории N-функций и пространств Орлича. Основными источниками по данной тематике нам служат классические книги Рао [29], [30], а также монография Красноселького и Рутицкого [18], где теория пространств Орлича впервые была изложена последовательно и подробно.

В главах 2 и 3 мы сосредотачиваем свое внимание на вопросах, связанных с дискретными пространствами Орлича, а именно на пространствах, образованных дискретными группами и графами.

В последние десятилетия достаточное распространение получили аналитические методы изучения дискретных структур, в значительной степени в связи с прорывными работами Михаила Громова и других авторов по геометрической теории групп. В частности, одним из примеров может служить применение гармонического анализа для изучения аменабельности и свойства (T) Каждана (см., например, [20]). Также вопросы роста дискретных групп «на бесконечности» и наличие неподвижных точек при непрерывном изометрическом аффинном действии группы на банаховом пространстве тесно связаны в контексте гармонического анализа с одномерными когомологиями группы с коэффициентами в соответствующем банаховом модуле (см., например [20, 13]).

Таким образом, гармонический анализ на дискретных структурах, помимо своей собственной проблематики, представляет интерес в силу близкого родства между данными структурами и традиционно геометрическими объектами и методами, в особенности это касается метрической геометрии. Важную роль здесь играет понятие квазиизометрии; для ознакомления с базовыми фактами и определениями отсылаем читателя к [16]. Так все графы Кэли конечно порожденной группы, рассматриваемые в качестве 1-мерных симплициальных комплексов, являются квазиизометричными пространствами. Это позволяет, например, корректно определять гиперболические группы через метрические свойства их графов Кэли. Также квазиизометрия сохраняет инвариантными такие свойства групп, как порядок роста и аменабельность. Для групп, квазиизометричных некоторой нильпотентной, можно утверждать их виртуальную нильпотентность. В общем случае речь идет о тех алгебраических свойствах группы, которые либо можно считать инвариантными относительно квазиизометрий, либо о том, каким образом они могут быть интерпретированы в соответствующих геометрических реализациях группы: графах Кэли, при рассмотрении действия группы на множестве, в частности, все пространства со внутренней метрикой, допускающие свободное действие группы G, если это действие удовлетворяет некоторым дополнительными условиям, квазиизометричны друг другу и группе G с любой словарной метрикой, см. [16]. Помимо этого, инвариантом являются и L^p-когомологии групп, что может служить одной из важных мотивировок для их изучения.

В качестве примера можно обратиться также к предложенному Б. Кляйнером варианту доказательства известной теоремы Громова о группах полиномиального роста [10], где гармонические функции на графе Кэли играют немаловажную роль.

С другой стороны, каждое метрическое пространство, в частности всякое риманово многообразие, квазиизометрично некоторому графу, а именно $\varepsilon-$сети на этом пространстве, см. [16]. Более того, многие аналитические и геометрические проблемы для многообразия могут быть сведены к аналогичным для $\varepsilon-$сети на нем. Например, такие, как вопрос о существование положительной функции Грина на многообразии, то есть проверки параболичности соответствующей $\varepsilon-$сети, см. [9].

В работах Дж. Доджика также обсуждается связь между гармоническим анализом на многообразиях и их дискретных аналогах. В частности, в работах [5] и [6] изучаются свойства дискретного лапласиана на неориентированных бесконечных графах, главным образом, вопросы, связанные с его спектром. Среди прочего, оценки на собственные значения могут быть полезны, поскольку дают некоторые критерии аменабельности и порядка роста группы, действующей на графе Кэли. Отметим еще, что не только тематика, связанная со спектром дискретного лапласиана и соответствующие геометрические приложения, но и задачи математической физики в более широком смысле, адаптированные для дискретного случая, не остаются без внимания исследователей и применяются, например, для изучения распространения волн и тепла на структурах, моделируемых графами [12]. Также можно обратиться к [2] , где содержатся результаты подобного рода для ориентированных графов, в частности, исследуются волновое уравнение, уравнение теплопроводности, краевые задачи на графах и некоторые приложения в квантовой механике, и, кроме того, содержится полезный список литературы по данному вопросу. Еще одной областью приложения гармонического анализа на графах является теория бесконечных электрических сетей, весьма подробно рассматриваемая в книге [31], где, помимо прочего, затрагивается теория модулярных пространств

В главе 2 мы обращаемся к гармоническому анализу на группах в его связи с первыми групповыми когомологиями. Подобного рода идеи хорошо известны из анализа на многообразиях, в теории Ходжа. При определении комплекса де Рама на римановом многообразии возникают пары сопряженных операторов: дифференциал d^k и кодифференциал δ_{k+1}. Таким образом, определена пара операторов $\delta_{k+1}d^k$, $d^{k-1}\delta_k \in \mathrm{End}(\Omega^k(M))$. Далее, можем ввести оператор Лапласа:

$$\Delta^k = \delta_{k+1}d^k + d^{k-1}\delta_k$$

Элементы ядра данного оператора, как обычно, называют гармоническими формами. Теорема Ходжа показывает, что гармонические формы однозначно представляют классы когомологий де Рама.

Нам важен тот факт, что оператор Лапласа детерминирован лишь структурой цепного комплекса и может быть определен не только в случае комплекса де Рама. Рассматривая некоторый граф как 1-мерный конечный симплициальный комплекс и построив соответствующий ему коцепной комплекс, мы естественным образом можем определить оператор Лапласа, как это делается выше. В частности для пространства функций, заданных на вершинах графа, он примет вид:

$$\Delta f(v) = \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w)).$$

Гармонические элементы, как уже было сказано, однозначно представляют классы когомологий, при этом они могут быть выделены в когомологическом классе в соответствии с некоторым критерием минимальности. Например, как минимизирующие функционал энергии Дирихле, определяемый в непрерывном случае соотношением

$$J(f) = \int \Phi(|\nabla f|)dx,$$

или же, следуя геометрической интуиции, как элемент ортогонального дополнения $\operatorname{Im} d$, иначе, как точка минимизирующая расстояние от $\operatorname{Im} d$ до соответствующего класса когомологий, что, опять же, согласуется с теоремой о разложении Ходжа.

Переходя к дискретным группам, мы можем естественным образом распространить на них приведенное выше определение оператора Лапласа:

$$\Delta f(g) = \sum_{s \in S} (f(s^{-1}g) - f(g)),$$

где S — порождающее множество группы.

Построенный оператор по-прежнему тесно связан с комбинаторной структурой симплициального комплекса, соответствующего графу Кэли группы. Особенность данной ситуации состоит в том, что обычно рассматриваемые когомологии групп имеют несколько иную природу, нежели симплициальные когомологии, упомянутые выше. Исследуемые в данной работе когомологии группы G с коэффициентами в топологическом G-модуле возникают в связи с тем, каким образом группа действует на этом модуле. В частности, в качестве 0-когомологий мы берем множество G-инвариантных элементов.

В нашей работе мы рассматриваем когомологии с коэффициентами в пространстве Орлича вещественнозначных функций, определенных на элементах группы. Нам требуется некоторым образом модифицировать определение лапласиана так, чтобы согласовать его с вводимой топологией пространств Орлича:

$$(\Delta_\Phi f)(x) := \sum_{s \in S} \Phi'(f(s^{-1}x) - f(x)).$$

Следуя идеям, предложенным в [11] и [13] для лебеговых функциональных пространств, мы показываем, что в нашем случае первые когомологии в действительности могут рассматриваться как элементы из пространства сопряженного симплициальному комплексу графа Кэли, что следует из следующей теоремы:

Теорема 2.3 *Предположим, что конечно порожденная группа G действует свободно на счетном множестве X. Тогда*

1. $H^1(G, \ell^\Phi(X)) \cong \mathscr{D}^\Phi(X)/\ell^\Phi_G(X)$;
2. $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(X)) \cong \mathscr{D}^\Phi(X)/\overline{\ell^\Phi_G(X)}$.

Это дает нам возможность действовать по аналогии со случаем симплициальных когомологий. В частности, может быть установлен некоторый аналог разложения Ходжа:

Теорема 2.7 *Предположим, что Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N-функция, лежащая в $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Пусть G — конечно порожденная группа, действующая на счетном множестве X. Тогда для любой функции $f \in D^\Phi(X)$ существует разложение $f = u+h$, где $u \in (\overline{\ell^\Phi(X)})_{D^\Phi(X)}$ и $h \in HD^\Phi(X)$. Такое разложение единственно с точностью до элемента из $D^\Phi(X)^G$.*

И как следствие получаем, что гармонические функции также уникальным образом представляют когомологические классы:

Следствие 2.8 *Если действие группы G на X свободно, то пространство $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(X))$ может быть естественным образом отождествлено с пространством $HD^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$.*

Также в работе доказано следующее утверждение

Теорема 2.10 *Пусть Φ — N-функция из $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$, и пусть Γ, G — бесконечные конечно порожденные группы, причем G неаменабельна. Если G нормальная подгруппа Γ с бесконечным централизатором $Z_\Gamma(G)$, то $\overline{H}^1(\Gamma, \ell^\Phi(\Gamma)) = 0$.*

В главе 3 вводятся основные определения гармонического анализа на графах и устанавливаются их базовые свойства. Также доказываются дискретные аналоги теоремы единственности

Следствие 3.12 *Пусть f и g — Φ-гармонические функции на конечном множестве S такие, что $f|_{\partial S} = g|_{\partial S}$. Тогда $f = g$ на S;*

неравенство Гарнака

Теорема 3.13 *Пусть* Φ *и* Ψ *— пара двойственных* $N-$*функций, и* $h\colon U \cup \partial U \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ *—* Φ*-супергармоническая на* U *функция. Тогда для каждого* $x \in U$ *имеет место оценка*

$$\max_{y\sim x} h(y) \leq [\Psi'(\Phi'(1)\deg(x)) + 1]h(x);$$

и теоремы Гарнака о пределе монотонной последовательности гармонических функций

Теорема 3.15 *Пусть* $\{S_i\}$ *— возрастающая последовательность конечных связных подмножеств* V*, и пусть* $U = \bigcup_i S_i$*. Пусть* $\{h_i\}$ *— возрастающая последовательность функций на* $U \cup \partial U$*. Тогда, если* h_i *—* Φ*-гармоническая (или* Φ*-супергармоническая) на каждом* S_i*, то или* $h_i(x) \to \infty$ *для всех* $x \in U$*, или* $h_i(x) \to h(x)$ *для всех* $x \in U$ *и* $h-$ Φ*-гармоническая (соответственно* Φ*-супергармоническая) на* U*.*

Полученные результаты в значительной степени опираются на идеи, используемые в статье Холопайнена и Соарди для p-гармонических функций, где $1 < p < \infty$, и распространяют их результаты на более общий случай Φ-гармонических функций.

В некотором смысле, здесь мы продолжаем тематику главы 2, где мы сфокусировали свое внимание на гармоническом анализе в контексте пространств Орлича. И действительно, в том случае, когда рассматриваемый граф является графом Кэли некоторой группы, введенные здесь определения очевидным образом согласуются с конструкциями гармонического анализа на группах. Здесь же мы обращаемся к несколько более общему случаю, работая с произвольными бесконечными графами ограниченной степени. Как уже было сказано выше, одним из подходов к определению гармонических функций является использования свойства минимальности таких объектов в некотором классе. Таким образом, под гармоническими функциями мы понимаем функции, минимизирующие следующее обобщение функционала энергии Дирихле:

$$\rho(f) = \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}\Phi(f(y) - f(x)).$$

Связь данного определения с введенным выше комбинаторным определением лапласиана

$$\Delta_\Phi f(x) = \sum_{x\sim y} \Phi'(f(y) - f(x))$$

выявляется в теореме

Теорема 3.8 *Пусть $S \subset V$ — конечное множество. Равенство $\Delta_\Phi f = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда f минимизирует $\rho(g)$ на множестве $M_f = \{g\colon S \cup \partial S \to \mathbb{R} \mid g|_{\partial S} = f|_{\partial S}\}$.*

Подобные конструкции восходят к анализу на пространствах Орлича, в свою очередь обобщающих опыт работы и специфику лебеговых пространств.

В главе 4 мы изучаем регуляризацию потоков на многообразии.

Понятие потока было введено де Рамом в его классической монографии [22], где он также определяет пару операторов R_ε и A_ε, зависящих от последовательности положительных параметров $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ и обладающих следующими свойствами:

Теорема *(1) Если T — k-поток на M, то $R_\varepsilon T$ — k-поток, а $A_\varepsilon T$ — $(k-1)$-поток и выполняется соотношение*

$$R_\varepsilon T - T = dA_\varepsilon T + A_\varepsilon dT.$$

(2) Носители потоков $R_\varepsilon T$ и $A_\varepsilon T$ лежат в сколь угодно малой окрестности носителя $\operatorname{supp} T$ при достаточно малом значении параметров ε_i.

(3)$R_\varepsilon T \in C^\infty$, и если $T \in C^\infty$, то $A_\varepsilon T \in C^\infty$.

(4) Если все ε_i стремятся к нулю, то $R_\varepsilon T \to T$, а $A_\varepsilon T \to 0$ в $D'(M)$.

(5) Если T обладает компактным носителем, лежащим в M, то $R_\varepsilon T \to T$ в пространстве форм с компактным носителем на M.

В данной работе мы вводим базовые определения теории потоков для контекста, но в действительности нас интересуют лишь те потоки, которые соответствуют дифференциальным формам.

Кратко изложим основные идеи, на которых базируется операция регуляризации по де Раму. В анализе хорошо известна процедура сглаживания функций. Подбирая правильно определенную весовую функцию и усредняя с этими весами значения заданной функции в окрестности некоторой точки, мы можем добиться гладкости C^∞ в данной точке. В частности, таким образом можно сгладить любую локально суммируемую функцию f, выполнив ее свертку с некоторой функцией $\varphi \in C^\infty$, обладающей компактным носителем:

$$\hat{f}(x) = \int \varphi(x-y)f(y)dy.$$

Де Рам использует данную идею для сглаживания дифференциальных форм и элементов сопряженного формам пространства — потоков. Вводимый им оператор

$$R^*\colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n)$$

сглаживает форму $\omega = \sum_{i_1<\dots<i_p} a_{i_1\dots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}$, выполняя свертку коэффициентов данной формы с некоторой четной функцией $f \in C^\infty$, обладающей компактным носителем:

$$\hat{a}_{i_1\dots i_p}(x) = \int a_{i_1\dots i_p}(x+y)f(y)dy^1\wedge\dots\wedge dy^n$$

Естественным образом данный оператор индуцирует оператор регуляризации R на потоках T:

$$RT(\omega) = T(R^*\omega).$$

Данную операцию можно перенести на многообразия, локально определяя операторы регуляризации.

Вслед за де Рамом в работе [1] В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов и И. А. Шведов рассматривали операторы де Рама R и A на пространствах дифференциальных форм $L^p(M,\Lambda^k)$, интегрируемых по модулю в степени p на римановом многообразии M. Было показано, что, выбрав подходящим образом семейство параметров $\varepsilon_{i,j}$, можно добиться, чтобы семейство операторов де Рама $R_{(i)}$ and $A_{(i)}$, соответствующих последовательности $\{\varepsilon_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ переводило L^p-формы в L^p-формы, и если $\omega \in L^p(M,\Lambda^k)$ (соответственно, $\omega \in \Omega^k_{p,q}(M) := \{\theta \in L^p(M,\Lambda^k) \mid d\theta \in L^q(M,\Lambda^{k+1})\})$), то $R_{(i)}\omega \to \omega$ при $i\to\infty$ in L^p (соответственно,в $\Omega^k_{p,q}(M)$).

В нашей работе мы распространяем данные идеи на пространства Орлича:

Теорема 4.9 *Пусть M — риманово многообразие. Существует последовательность операторов $R_{(i)}$, $A_{(i)}$ на пространстве потоков $\mathcal{D}'(M)$ таких, что*

(1) Оператор $R_{(i)}$ *отображает* $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ *в* $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ *таким образом, что*
$$\|R_{(i)}\|_\Phi \leq 1 + \frac{1}{i};$$

(2) Оператор $A_{(i)}$ *отображает* $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ *в* $L^\Phi(M, \Lambda^{k-1})$ *таким образом, что*
$$\|A_{(i)}\|_\Phi \leq \frac{1}{i};$$

(3) $R_{(i)}\omega$ *— гладкая форма; если* ω *— гладкая форма, то* $A_{(i)}\omega$ *— гладкая;*

(4) Если Φ *—* Δ_2*-регулярная функция, то* $R_{(i)}\omega \to \omega$ *при* $i \to \infty$ *для всех* $\omega \in L^\Phi(M, \Lambda^k)$*;*

Оператор A, о котором мы пока ничего не говорили, задает цепную гомотопию комплекса $\{\Omega^*_\Phi(M), d\}$ и его подкомплекса, состоящего из гладких форм $\{\Omega^*_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M), d\}$,

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_\Phi(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] & \Omega^{k}_\Phi(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "A_{(i)}"'] & \Omega^{k+1}_\Phi(M) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "A_{(i)}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_\Phi(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k}_\Phi(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}_\Phi(M) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

таким образом, что выполняется соотношение гомотопии:

$$R_{(i)} - \mathrm{id} = A_{(i)}d + dA_{(i)}.$$

Как следствие, построенные операторы имеют вполне прозрачный категорный смысл, что суммируется в данной теореме:

Теорема 4.13 *Если* Φ *—* Δ_2*-регулярная* N*-функция, то операторы* R *определяют морфизм комплексов из* $\{\Omega^*_\Phi(M), d\}$ *в* $\{\Omega^*_{\Phi,\,smooth}(M), d\}$*, а также имеет место изоморфизм* $H^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \cong H^k_\Phi(M)$*.*

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Я. А. Копылову, который познакомил его с тем кругом проблем, что составляют содержание данной работы, и благодарен за все усилия и время, вложенные в нашу совместную работу, а также всегда теплое и внимательное отношение.

Также автору хотелось бы поблагодарить профессора А. Д. Медных за внимание к данной работе и ценные замечания, способствовавшие улучшению текста.

Глава 1

N-функции и пространства Орлича

1.1 Общие сведения.

В данном параграфе мы напомним некоторые понятия теории пространств Орлича, необходимые нам для дальнейшей работы.

Определение 1.1 *Функция $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется N-функцией, если она положительна вне нуля и $\Phi(0) = 0$, четна, выпукла, и обладает двумя предельными свойствами:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \ \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$$

Любая N-функция допускает представление вида:

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{|x|} \varphi(t)\,dt,$$

где функция $\varphi(t)$ определена для $t \geqslant 0$, не убывает, непрерывна справа, а также удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(t) > 0$, если $t > 0$; $\varphi(0) = 0$; $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. В дальнейшем будем писать Φ' вместо φ.

Определение 1.2 *Если Φ — N-функция, то функция, заданная следующим образом*

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x (\Phi')^{-1}(t)\,dt, \quad \text{где } (\Phi')^{-1}(x) = \sup_{\Phi'(t)\leq x} t,$$

называется дополнительной к Φ.

Если Ψ — N-функция, дополнительная к N-функции Φ, то Φ — дополнительная к Ψ.

Замечание. Пара дополнительных N-функций Φ, Ψ удовлетворяет *неравенству Юнга*

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$$

для всех неотрицательных a и b; равенство достигается тогда и только тогда, когда $b = \Phi'(a)$.

Определение 1.3 *Говорят, что N-функция Φ удовлетворяет* Δ_2-условию *для малых x (для больших x, для всех x), и пишут $\Phi \in \Delta_2(0)$ ($\Phi \in \Delta_2(\infty)$, $\Phi \in \Delta_2$), если существуют константы $x_0 > 0$, $K > 2$ такие, что $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ для $0 \leq x \leq x_0$ (для $x \geq x_0$, для всех $x \geq 0$).*

Определение 1.4 *Функция Φ удовлетворяет* ∇_2-условию для малых x *(для больших x, для всех x), и пишут $\Phi \in \nabla_2(0)$ ($\Phi \in \nabla_2(\infty)$, $\Phi \in \nabla_2$), если существуют константы $x_0 > 0$ и $c > 1$ такие, что $\Phi(x) \leq \frac{1}{2c}\Phi(cx)$ для $0 \leq x \leq x_0$ (для $x \geq x_0$, для всех $x \geq 0$).*

Далее мы будем называть N-функции, удовлетворяющие, в зависимости от контекста, тому или иному виду Δ_2 -условия (∇_2-условия) Δ_2-*регулярными* (∇_2-*регулярными*).

Замечание. Δ_2-условие равносильно ограниченности следующего соотношения (локально, или для всех значений переменной, в зависимости от того, что нам требуется):

$$\frac{x\Phi'(x)}{\Phi(x)} < C < \infty$$

Также известно, что N-функция ∇_2-регулярна тогда и только тогда, когда дополнительная N-функция Δ_2-регулярна.

Далее, положим Φ — N-функция, а (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой.

Определение 1.5 *Будем обозначать $\tilde{L}^\Phi = \tilde{L}^\Phi(\Omega) = \tilde{L}^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$ такое пространство измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, что*

$$\rho_\Phi(f) := \int_\Omega \Phi(f) d\mu < \infty.$$

Предложение 1.6 *Как показано в [30], множество* $\tilde{L}^\Phi$ *является линейным пространством в следующих случаях:*

(i) $\mu(\Omega) < \infty, \quad \Phi \in \Delta_2(\infty)$*;*

(ii) $\mu(\Omega) = \infty, \quad \Phi \in \Delta_2$.

(iii) Ω *— счетное множество,* μ *— считающая мера на* Ω*,* $\Phi \in \Delta_2(0)$.

Определение 1.7 *Линейное пространство*

$$\begin{aligned} &L^\Phi = L^\Phi(\Omega) = L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu) \\ &= \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ — измеримая функция } : \rho_\Phi(af) < \infty \text{ для некоторого } a > 0\} \end{aligned}$$

называют пространством Орлича на (Ω, Σ, μ).

Для пространства $L^\Phi = L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$, N-функция Φ называется Δ_2-*регулярной*, если $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ при $\mu(\Omega) < \infty$ или $\Phi \in \Delta_2$ при $\mu(\Omega) = \infty$, или $\Phi \in \Delta_2(0)$ для считающей меры μ.

Пусть Ψ — дополнительная N-функция к Φ.

Далее, как обычно, мы отождествляем пару функций, совпадающих всюду за пределами множества меры нуль.

Для функции $f \in L^\Phi$ определим функционал $\|\cdot\|_\Phi$ (называемый *нормой Орлича*):

$$\|f\|_\Phi = \|f\|_{L^\Phi(\Omega)} = \sup\left\{\left|\int_\Omega fg\,d\mu\right| : \rho_\Psi(g) \le 1\right\}.$$

Отметим, что в общем случае данный функционал является полунормой и обращается в норму лишь, если μ удовлетворяет условию (см. [29, p. 59]): Если $A \in \Sigma$ и $\mu(A) > 0$, тогда существует $B \in \Sigma$, $B \subset A$ такое, что $0 < \mu(B) < \infty$.

Эквивалентная норма функции $f \in L^\Phi$ — *калибровочная* (иначе *норма Люксембурга*) определяется функционалом Минковского

$$\|f\|_{(\Phi)} = \|f\|_{L^{(\Phi)}(\Omega)} = \inf\left\{k > 0 \,:\, \rho_\Phi\left(\frac{f}{k}\right) \le 1\right\}.$$

Этот функционал является нормой вне всяких ограничений на μ (см. [29, с. 54, Theorem 3]).

1.2 Дискретные пространства Орлича

Далее, X — счетное множество, наделенное считающей мерой.

Определение 1.8 *Определим в явном виде класс Орлича* $\tilde{\ell}^\Phi(X)$ *как множество таких вещественнозначных функций на* X*, что*

$$\rho_\Phi(f) := \sum_{x\in X} \Phi(f(x)) < \infty.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением

$$\tilde{\ell}_1^\Phi(X) = \left\{ f \in \tilde{\ell}^\Phi(X) \;\Big|\; \sum_{x\in X} \Phi(f(x)) \le 1 \right\}.$$

Определение 1.9 *Будем обозначать*

$$\ell^\Phi(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \,:\, \rho_\Phi(af) < \infty \text{ для некоторого } a > 0\}$$

дискретное пространство Орлича на X.

Таким образом, мы можем снабдить наше пространство парой эквивалентных норм. Если $f \in \ell^\Phi(X)$, то *норма Орлича* функции f определяется как

$$\|f\|_\Phi := \|f\|_{\ell^\Phi(X)} := \sup_{u\in\tilde{\ell}_1^\Psi} \left| \sum_{x\in X} f(x)u(x) \right|,$$

а *калибровочная норма* (или *норма Люксембурга*), соответственно:

$$\|f\|_{(\Phi)} := \|f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} := \inf\left\{ k > 0 \,:\, \rho_\Phi\left(\frac{f}{k}\right) \le 1 \right\}.$$

Доказательство эквивалентности для данного случая можно, например, найти в [29, § 3.3, предложение 4], таким образом имеем:

$$\|f\|_{(\Phi)} \le \|f\|_\Phi \le 2\|f\|_{(\Phi)}.$$

Не теряя общности рассуждений, мы будем подразумевать, что пространство $\ell^\Phi(X)$ снабжено калибровочной нормой $\|\cdot\|_{(\Phi)}$.

Следующее утверждение хорошо известно для общего случая пространств с мерой (см. [29, § 3.4, предложение 8]). Здесь мы приводим его «счетную» версию (которая нам, собственно говоря, и потребуется в дальнейшем).

Предложение 1.10 *Пусть* $\Phi \in \Delta_2(0)$*, и пусть* Ψ *— дополнительная к* Φ N*-функция. Если* $f \in \tilde{\ell}^\Phi(X)$*, то* $\Phi'(|f|) \in \tilde{\ell}^\Psi(X)$.

1.3 Пространство Орлича дифференциальных форм

Пусть M — риманово многообразие. Скалярное произведение в точке $x \in M$ k-форм $\omega(x)$ и $\theta(x)$ на T_xM будем обозначать $(\omega(x), \theta(x))$. Это дает нам функцию $x \mapsto (\omega(x), \theta(x))$ на M.

Пусть $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ и $\Psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ — пара двойственных N-функций. Обозначим символом $\tilde{L}^\Phi(M, \Lambda^k)$ класс всех таких измеримых k-форм ω , что

$$\rho_\Phi(\omega) := \int_M \Phi(|\omega(x)|) d\mu_M < \infty.$$

Здесь $d\mu_M$ — стандартный элемент объема риманова многообразия M. Как обычно, мы отождествляем k-формы различающиеся не более, чем на множестве меры ноль.

Определим для риманова многообразия M (не обязательно ориентируемого) пространство $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ как класс всех измеримых k-форм ω таких, что они удовлетворяют условию:

$$\rho_\Phi(\alpha\omega) < \infty \text{ для некоторого } \alpha > 0.$$

Очевидно, $\tilde{L}^\Phi(M, \Lambda^k) \subset L^\Phi(M, \Lambda^k)$.

Как и в случае функциональных пространств Орлича, пространство $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ снабжено парой эквивалентных норм: *калибровочная норма*

$$\|\omega\|_{(\Phi)} = \|\omega\|_{L^{(\Phi)}(M)} = \inf\left\{k > 0 \,:\, \rho_\Phi\left(\frac{\omega}{k}\right) \leq 1\right\}.$$

и *норма Орлича*

$$\|\omega\|_\Phi = \|\omega\|_{L^\Phi(M)} \\ = \sup\left\{\left|\int_M (\omega(x), \theta(x))\, d\mu_M\right| : \theta \in \tilde{L}^\Psi(M, \Lambda^k),\ \rho_\Psi(\theta) \leq 1\right\}$$

Также аналогично функциональному случаю, можно показать, что пространство $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ с любой из этих норм является банаховым.

Очевидно, что калибровочная норма k-формы ω совпадает с нормой функции ее модуля $|\omega|$. Аналогичное утверждение для нормы Орлича устанавливается в следующем утверждении.

Лемма 1.11 *Норма Орлича k-формы $\omega \in L^{\Phi}(M, \Lambda^k)$ совпадает с нормой Орлича функции ее модуля $|\omega|$.*

Доказательство. Рассмотрим такую форму $\theta \in L^{\Psi}(M, \Lambda^k)$, что $\rho_{\Psi}(\theta) \leq 1$, тогда

$$\left| \int_M (\omega(x), \theta(x)) d\mu_M \right| \leq \int_M |\omega(x)||\theta(x)| d\mu_M$$
$$\leq \sup_{\substack{g \in L^{\Psi}(M), \\ \rho_{\Psi}(g) \leq 1}} \left| \int_M |\omega(x)| g(x) d\mu_M \right| = \| \, |\omega| \, \|_{\Phi}.$$

Таким образом,

$$\|\omega\|_{\Phi} = \sup_{\substack{\theta \in L^{\Psi}(M, \Lambda^k), \\ \rho_{\Psi}(\theta) \leq 1}} \left| \int_M (\omega(x), \theta(x)) \, d\mu_M \right| \leq \| \, |\omega| \, \|_{\Phi}.$$

Теперь пусть $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций в $L^{\Psi}(M)$, удовлетворяющих $\rho_{\Psi}(g_m) \leq 1$ и таких, что

$$\left| \int_M |\omega(x)| g_m(x) d\mu_M \right| \to \| \, |\omega| \, \|_{\Phi} \text{ при } m \to \infty.$$

Поскольку

$$\left| \int_M |\omega(x)| g_m(x) d\mu_M \right| \leq \int_M |\omega(x)||g_m(x)| d\mu_M \leq \| \, |\omega| \, \|_{\Phi},$$

мы имеем

$$\int_M |\omega(x)||g_m(x)| d\mu_M \to \| \, |\omega| \, \|_{\Phi} \text{ при } m \to \infty.$$

Рассмотрим последовательность $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ из k-форм θ_m, определяемую условием

$$\theta_m(x) = \begin{cases} |g_m(x)| \frac{\omega(x)}{|\omega(x)|}, & \text{если } \omega(x) \neq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образзрм, $\rho_{\Psi}(\theta_m) = \rho_{\Psi}(g_m) \leq 1$ и

$$\left| \int_M (\omega(x), \theta_m(x)) d\mu_M \right| = \left| \int_M |\omega(x)||g_m(x)| d\mu_M \right| \to \| \, |\omega| \, \|_{\Phi}$$

при $m \to \infty$. И, следовательно,

$$\| \, |\omega| \, \|_\Phi \le \sup_{\substack{\theta \in L^\Psi(M,\Lambda^k), \\ \rho_\Psi(\theta) \le 1}} \left| \int_M (\omega(x), \theta(x)) d\mu_M \right| = \|\omega\|_\Phi.$$

□

Лемма 1.12 *Предположим, что на римановом многообразии M задано семейство дифференциальных форм $x \mapsto \omega(x,y)$ одинаковой степени k, зависящих от параметра y из σ-конечного пространства с мерой — Y. Пусть функция $(x,y) \mapsto |\omega(x,y)|$ измерима на $M \times Y$. Предположим, что форма $\{x \mapsto \omega(x,y)\}$ лежит в L^Φ для каждого y и что интеграл $I(x) = \int_Y \omega(x,y) dy$ существует для почти всех $x \in M$. Тогда*

$$\|I\|_\Phi \le \int_Y \|\omega(\cdot, y)\|_\Phi \, dy. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть Ψ — N-функция, двойственная к Φ. По лемме 1.11 можем перейти от формы ω и I к функциям $|\omega|$ и $|I|$.

Рассмотрим функцию g на M с $\rho_\Psi(g) \le 1$. Воспользовавшись теоремой Тонелли, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_M |I(x)| g(x) d\mu_M \right| &\le \int_M |I(x)||g(x)| \, d\mu_M \\ &\le \int_M \left(\int_Y |\omega(x,y)||g(x)| \, dy \right) \, d\mu_M \\ &= \int_Y \left(\int_M |\omega(x,y)||g(x)| \, d\mu_M \right) dy \le \int_Y \|\omega(\cdot,y)\|_\Phi \, dy. \end{aligned}$$

Поскольку это справедливо для любой k-формы θ с $\rho_\Psi(\theta) \le 1$, можем взять супремум от левой части равенства и получить (1.1). □

Определение 1.13 *Дифференциальная $(k+1)$-форма $\theta \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \Lambda^{k+1})$ называется обобщенным дифференциалом k-формы $\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(M, \Lambda^k)$ (будем писать $d\omega = \theta$), если для всех ориентируемых областей $V \subset \mathrm{Int} M$ выполняется*

$$\int_V \theta \wedge u = (-1)^{k+1} \int_V \omega \wedge du$$

для любой формы $u \in \mathcal{D}^{n-k}(V)$, *где* $\mathcal{D}^l(V)$ *множество гладких* l*-форм на* M *с компактным носителем, лежащим в* $\operatorname{Int} V$.

Пусть Φ_1 *и* Φ_2 — *пара* N*-функций. Для* $1 \leq k \leq n$ *положим*

$$\Omega^{k-1}_{\Phi_1,\Phi_2}(M) = \left\{ \omega \in L^{\Phi_1}(M, \Lambda^{k-1}) \, : \, d\omega \in L^{\Phi_2}(M, \Lambda^k) \right\}.$$

Полученное пространство является банаховым с нормой графика, т. е. с нормой вида

$$\|\omega\|_{\Phi_1,\Phi_2} = (\|\omega\|^2_{\Phi_1} + \|d\omega\|^2_{\Phi_2})^{\frac{1}{2}}.$$

Глава 2

Ф-гармонические функции и первые когомологии дискретных групп

2.1 Определение 1-когомологий дискретных групп

Пусть G — дискретная группа, а V — топологический G-модуль, т.е. вещественное или комплексное топологическое векторное пространство, снабженное линейным представлением

$$\pi : G \times V \to V,\ (g, v) \mapsto \pi(g)v,$$

где все операторы $\pi(g)$ имеют конечную норму. Такое пространство V называется *банаховым G-модулем*, если V — банахово пространство, а π — представление G изометриями V. Введем следующие обозначения:

$$Z^1(G, V) := \{b \in V^G \mid (\forall g,\, b \in G)\ b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h)\} \text{ — \textit{1-коциклы};}$$

$$B^1(G, V) = \{b \in Z^1(G, V) \mid (\exists v \in V)\,(\forall g \in G)\ b(g) = \pi(g)v - v\} \text{ — \textit{1-кограницы};}$$

$$H^1(G, V) = Z^1(G, V)/B^1(G, V) \text{ — \textit{1-когомологии с коэффициентами в} } V.$$

Снабдим $Z^1(G,V)$ топологией поточечной сходимости в G. Будем обозначать символом $\overline{B}^1(G,V)$ замыкание $B^1(G,V)$ в данной топологии. Факторпространство $\overline{H}^1(G,V) = Z^1(G,V)/\overline{B}^1(G,V)$ называется *редуцированными 1-когомологиями* G с коэффициентами в G-модуле V.

Предположим, что заданы замкнутая нормальная подгруппа N группы G и G-модуль V, тогда группа G действует на $H^1(N,V|_N)$ следующим образом (см. [21, 24]): на $Z^1(N,V|_N)$ действие определяется формулой

$$(g \cdot b)(n) = \pi(g)(b(g^{-1}ng))$$

($b \in Z^1(N,V|_N)$, $g \in G$, $n \in N$). Поскольку это действие оставляет пространство $B^1(N,V|_N)$ инвариантным, мы получаем определенное таким образом действие G на $H^1(N,V|_N)$. В силу того, что для $m \in N$

$$(m \cdot b)(n) = b(n) + (\pi(n)b(m) - b(m)),$$

действие N на $H^1(N,V|_N)$ тривиально, и действие G на $H^1(N,V|_N)$ пропускается через G/N.

Далее нам потребуется следующее утверждение, доказательство которого получено Я. А. Копыловым в [32].

Лемма 2.1 *Пусть Φ — N-функция класса $\Delta_2(0)$, и пусть H — подгруппа счетной дискретной группы G. Рассмотрим ряд свойств:*
(i) $\overline{H}^1(H,\ell^\Phi(H)) = 0$;
(ii) $\overline{H}^1(H,\ell^\Phi(G)|_H) = 0$;
(i$'$) $H^1(H,\ell^\Phi(H)) = 0$;
(ii$'$) $H^1(H,\ell^\Phi(G)|_H) = 0$.
Имеют место следующие эквивалентности: (i)$\Longleftrightarrow$(ii) *и* (i$'$)$\Longleftrightarrow$(ii$'$).

2.2 Общие соображения относительно оператора Лапласа

Напомним некоторые определения теории Ходжа. Пусть мы имеем комплекс де Рама

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, bend left] & \Omega^{k-1}(M) \arrow[r, bend left, "d^{k-1}"] \arrow[l, bend left] & \Omega^k(M) \arrow[r, bend left, "d^k"] \arrow[l, bend left, "\delta_k"] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, bend left] \arrow[l, bend left, "\delta_{k+1}"] & \dots, \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

где $d,\ \delta$ — дифференциал и кодифференциал, соответственно.

Определим оператор Лапласа-Де Рама соотношением

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

Множеством гармонических k-форм $\mathcal{H}^k_\Delta(M)$ будем называть ядро оператора Лапласа $\Omega^k(M) \cap \operatorname{Ker}\Delta$. Тогда для компактного многообразия каждый когомологический класс из $H^k(M)$ единственным образом представляется элементом $\mathcal{H}^k_\Delta(M)$ и справедливо следующее разложение

$$\Omega^k(M) \cong \operatorname{Im} d^{k-1} \oplus \operatorname{Im} \delta_{k+1} \oplus \mathcal{H}^k_\Delta(M).$$

Проиллюстрируем на примере вещественных линейных пространств геометрический смысл сказанного выше. Пусть задана такая пара линейных отображений $f,\ g$, что следующий треугольник коммутативен

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "0"'] & & W. \end{tikzcd}$$

Очевидно, что $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ и можно определить когомологии $\frac{\operatorname{Ker} g}{\operatorname{Im} f}$. Каждый когомологический класс представляется в виде

$$v + \operatorname{Im} f$$

где $v \in \operatorname{Ker} g$. Несложно понять, что в качестве представителя класса $v + \operatorname{Im} f$ можно выбрать элемент v_H из ортогонального дополнения $\operatorname{Im} f$, определяющий кратчайшее расстояние между элементами множеств $\operatorname{Im} f$ и $v+\operatorname{Im} f$. Очевидно, что $\operatorname{Ker} f^*$ ортогонально $\operatorname{Im} f$, следовательно, можем положить $v_H \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f^*$. Таким образом, существует изоморфизм

$$\frac{\operatorname{Ker} g}{\operatorname{Im} f} \cong \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f^*.$$

Несложно показать, что

$$\operatorname{Ker} \Delta = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f^*,$$

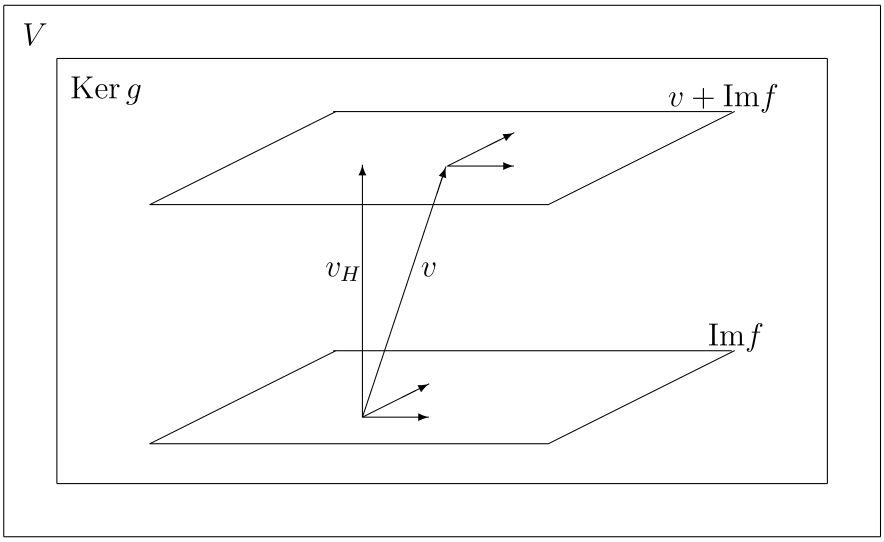
где $\Delta = ff^* + g^*g$. Таким образом, имеем

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend left, "f"] & V \arrow[l, bend left, "f^*"] \arrow[r, bend left, "g"] & W \arrow[l, bend left, "g^*"] \end{tikzcd}$$

и

$$\frac{\operatorname{Ker} g}{\operatorname{Im} f} \cong \operatorname{Ker} \Delta.$$

Элементы, принадлежащие $\operatorname{Ker} \Delta$, будем называть гармоническими. Суммируя изложенное выше, можно сказать, что гармонические элементы однозначным образом представляют классы когомологий и являются минимальными в данном классе, т. е. задают кратчайшее расстояние между точками данного класса и $\operatorname{Im} f$.



Также несложно показать, что в данном случае имеет место аналог разложения Ходжа

$$V \cong \operatorname{Im} g^* \oplus \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} \Delta.$$

Теперь адаптируем данные конструкции на случай произвольного симплициального комплекса.

Пусть K — некоторый конечный симплициальный комплекс, тогда, будем обозначать $C_k(K; \mathbb{R})$ свободный $\mathbb{R}$-модуль, порожденный множеством ориентированных k-симплексов из K. На множестве морфизмов $\operatorname{Hom}(C_k(K; \mathbb{R}), \mathbb{R})$ естественным образом индуцируется структура модуля, будем использовать стандартное обозначение $C^k(K; \mathbb{R})$ для данного множества.

Для заданного симплициального комплекса можем определить цепной комплекс

$$0 \longrightarrow C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(K) \xrightarrow{\partial_k} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0\ ,$$

где граничный оператор задается соотношением

$$\partial_k([v_0,\dots,v_k]) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i[v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_k].$$

Определим оператор d^k по правилу

$$d^k f = f\circ\partial_{k+1},\ \text{где } f\in C^k(K;\mathbb{R}).$$

Таким образом, у нас определен коцепной комплекс

$$0 \longleftarrow C_n(K) \xleftarrow{d^{n-1}} \dots \xleftarrow{d^n} C_k(K) \xleftarrow{d^{k-1}} \dots \xleftarrow{d^0} C_0(K) \longleftarrow 0\ .$$

Поскольку симплициальный комплекс конечен, существует изоморфизм $C_k(K;\mathbb{R})\cong C^k(K;\mathbb{R})$, то есть взяв пару канонических изоморфизмов $\varphi_k,\ \psi_{k+1}$, однозначно определим кодифференциал δ_{k+1} из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
C_k(K;\mathbb{R}) \arrow[d, "\varphi_k"'] & C_{k+1}(K;\mathbb{R}) \arrow[l, "\partial_{k+1}"'] \\
C^k(K;\mathbb{R}) & C^{k+1}(K;\mathbb{R}). \arrow[u, "\psi_{k+1}"'] \arrow[l, dotted, "\delta_{k+1}"]
\end{tikzcd}$$

Таким образом, можем, как и в предыдущих случаях, определить оператор Лапласа-де Рама на $C^k(K;\mathbb{R})$:

$$\Delta^k = d^{k-1}\delta_k + \delta_{k+1}d^k.$$

Ограничимся 1-мерным симплициальным подкомплексом:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left] & C^0(K;\mathbb{R}) \arrow[l, shift left] \arrow[r, "d"] & C^1(K;\mathbb{R}) \arrow[d, "\delta"] \\
 & & C^0(K;\mathbb{R}). \arrow[ul, "\Delta"]
\end{tikzcd}$$

Тогда оператор Лапласа примет вид

$$\Delta = \delta d.$$

Для данного случая несложно выписать его в явном виде. Пусть коциклы это образы циклов при каноническом изоморфизме

$$C_k(K;\mathbb{R})\cong C^k(K;\mathbb{R}).$$

Другими словами, каждая функция f, определенная на вершинах $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 1-мерного симплициального комплекса, может рассматриваться как коцепь вида

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\varepsilon_i,$$

где ε_i – функция вида

$$\varepsilon_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Соответственно, функция F, определенная на множестве ребер $\{[v_i v_j]\}$, представляется формальной линейной комбинацией

$$F = \sum_{v_i \sim v_j} F([v_i v_j])\sigma_{ij},$$

где σ_l – функция вида

$$\sigma_{ij}([v_k v_l]) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k,\ j = l; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Несложно проверить, что

$$df = \sum_{v_i \sim v_j} (f(v_i) - f(v_j))\sigma_{ij}.$$

Зная, что кодифференциал действует как

$$\delta\sigma_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j,$$

несложно получить выражение для Δf:

$$\Delta f(v) = \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w)).$$

Как обычно, гармоническими будем называть функции, принадлежащие $\operatorname{Ker} \Delta$. Легко видеть, что условие $\Delta f(v) = 0$ эквивалентно выполнению дискретного аналога теоремы о среднем

$$f(v) = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{v \sim w} f(w).$$

Теперь можем формально перенести данное определение на граф Кэли конечно порожденной группы G с порождающим множеством S:

$$\Delta f(g) = \sum_{s\in S}(f(s^{-1}g) - f(g)).$$

Выше мы изучили строение оператора Лапласа-де Рама на 0-формах в дискретном случае. Нас прежде всего интересовала алгебраически-комбинаторная природа лапласиана. В классическом случае оператор Лапласа-де Рама на многообразии определяется свойствами коплекса де Рама.

Другим обобщением лапласиана на многообразии M является оператор Лапласа-Бельтрами:

$$\Delta f = \mathrm{div}\nabla f$$

Известно, что функции из соболевского пространства $W^{1,2}_{loc}(M)$, локально минимизирующие функционал энергии

$$E(f) = \int_M |\nabla f|^2 dV$$

в классе функций совпадающих на границах локальных областей, автоматически удовлетворяют равенству

$$\Delta f = 0$$

на M. Для скалярных функций операторы Лапласа-Бельтрами и Лапласа-Де Рама совпрадают.

Свойство гармонических функций минизировать энергию также имеет место в дискретном случае, что мы и будем обсуждать в последующих главах. В частности, нас будут интересовать гармонические функции на графе Кэли с множеством образующих S, где

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}(f(s^{-1}g) - f(g)).$$

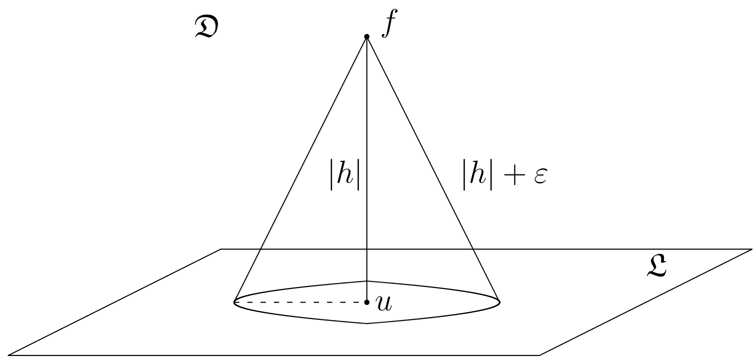
В данной работе мы рассматриваем нелинейное обобщения оператора Лапласа, построенное на базе N-функций, — Ф-лапласиан. Понятие Ф-лапласиана естественным образом обобщает идеи, предложенные для p-лапласиана, определяемого в непрерывном случае следующим образом:

$$\Delta_p f = \mathrm{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f).$$

В свою очередь, Ф-лапласиан задан соотношением

$$\Delta_\Phi f = \operatorname{div}(\Phi'(|\nabla f|)\nabla f).$$

Выше были определены когомологии группы с коэффициентами в топологическом модуле. Суммируя уже изложенное, нам требуется подправить определение оператора Δ таким образом, чтобы согласовать его комбинаторную структуру со свойствами вводимой топологии. Сделаем концептуальный набросок того, что мы хотим получить.



Пусть V — топологический G-модуль, порожденный вещественнозначными функциями на группе, и определены первые когомологии $H^1(G,\, V)$. Нам необходимо определить пару нормированных G-модулей $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{D}$ таких, что $H^1(G,\, V) \cong \mathfrak{D}/\mathfrak{L}$, здесь также все модули порождены функциями на группе. Фактически, устанавливая данный изоморфизм, мы сможем взглянуть на первые когомологии, будто бы это были элементы из пространства сопряженного 1-мерному симплициальному комплексу, соответствующему графу Кэли нашей группы. Пусть элемент $f \in \mathfrak{D}$ представляет некоторый класс в когомологиях, тогда гармоническим будем называть такой элемент $h \in \mathfrak{D}$, что в точке $f - h \in \mathfrak{L}$ достигается минимум расстояние от точки f до $\mathfrak{L}$. Далее требуется показать, что в силу свойств топологии такой элемент h определяется однозначно и принадлежит $\operatorname{Ker}\Delta$, а, следовательно, имеется однозначное представление класса когомологий гармоническим элементом и разложение вида

$$\mathfrak{D} = \operatorname{Ker}\Delta \oplus \mathfrak{L}.$$

Как можно заметить, в некотором смысле устройство оператора Лапласа проливает свет на связь между комбинаторно-геометрической структурой графа Кэли, и абстрактным понятием когомологий группы.

2.3 Пространство Φ-гармонических функций.

Теперь можем перейти к формальным определениям.

Пусть G — конечно порожденная группа с конечным порождающим множеством S, действующая на счетном множестве X. Если A — абелева группа, то, как и в предыдущих случаях, мы будем обозначать символом A^X абелеву группу всех функций $f : X \to A$. Пусть $\lambda_X : G \to A^X$ — *подстановочное представление* G *на* A^X:

$$\lambda_X(g)f(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in A^X,\ g \in G.$$

Таким образом, A^X есть G-модуль. В случае, когда $X = G$, указанное представление называют *левым регулярным представлением* группы G в A^G.

Хорошо известно следующее утверждение (см., например, [11, лемма 2.1]):

Предложение 2.2 *Предположим, что (дискретная) группа G действует свободно на множестве X. Тогда $H^1(G, A^X) = 0$.*

Далее мы будем писать $\mathcal{F}(X)$ вместо $\mathbb{R}^X$.

Введем понятие пространства *функций с конечной* Φ*-энергией Дирихле*

$$\begin{aligned} D^\Phi(X) &= \{f \in \mathcal{F}(X) \mid \|\lambda_X(g)f - f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} < \infty \text{ для всех } g \in G\} \\ &= \{f \in \mathcal{F}(X) \mid \|\lambda_X(s)f - f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} < \infty \text{ для всех } s \in S\}. \end{aligned}$$

Пусть $D^\Phi(X)^G$ — пространство функций из $D^\Phi(X)$, постоянных на G-орбитах множества X. Очевидно, что полученные пространства являются линейными. Соответственно, $\ell^\Phi(X)^G$ — ℓ^Φ-функции, постоянные на G-орбитах. Легко видеть, что введенные пространства являются линейными. Определим на пространстве $\mathscr{D}^\Phi(X) = D^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$ норму вида

$$\|f\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} = \sum_{s \in S} \|\lambda_X(s)f - f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)}.$$

Очевидно, что $D^\Phi(X)^G$ — ядро отображения

$$\|\cdot\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} : D^\Phi(X) \to \mathbb{R}.$$

Определим линейное отображение $\alpha : D^\Phi(X) \to Z^1(G,\ \ell^\Phi(X))$, полагая

$$\alpha(f)(g) = \lambda_X(g)f - f.$$

Отображение, индуцируемое α на $\mathscr{D}^\Phi(X)$, является инъективным, поскольку $D^\Phi(X)^G$ — ядро α.

Положим $\ell^\Phi_G(X) = \ell^\Phi(X)/\ell^\Phi(X)^G$.

Теорема 2.3 *Предположим, что конечно порожденная группа G действует свободно на счетном множестве X. Тогда $\alpha : \mathscr{D}^\Phi(X) \to Z^1(G, \ell^\Phi(X))$ — топологический изоморфизм и выполняются следующие соотношения:*

1. $H^1(G, \ell^\Phi(X)) \cong \mathscr{D}^\Phi(X)/\ell^\Phi_G(X)$;
2. $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(X)) \cong \mathscr{D}^\Phi(X)/\overline{\ell^\Phi_G(X)}$.

Доказательство. В силу сказанного выше, отображение α непрерывно и инъективно. Докажем его сюръективность. По предложению 2.2 $H^1(G, \mathcal{F}(X)) = 0$. Следовательно, для каждого $b \in Z^1(G, \ell^\Phi(X))$ существует функция $f \in \mathcal{F}(X)$ такая, что $b(g) = \lambda_X(g)f - f$ для всех $g \in G$. Очевидно, что $f \in D^\Phi(X)$. Поэтому $\alpha(f) = b$. Легко видеть, что α^{-1} непрерывно. Обратившись к определению α, нетрудно заметить, что $\alpha(\ell^\Phi_G(X)) = B^1(G, \ell^\Phi(X))$. Теорема доказана. □

Мы показали, что для каждого элемента когомологий b существует функция $f \in D^\Phi(X)$ такая, что $b(g) = \lambda_X(g)f - f$. Фактически каждому элементу 1-коциклов соответствует функция, определенная на 1-мерных элементах симплициального комплекса графа Кэли. Или, говоря иначе, дифференциал, в смысле коцепного комплекса, некоторой функции, определенной на вершинах графа.

Замечание. Далее везде мы будем считать, что Φ — *непрерывно дифференцируемая функция.*

Определение 2.4 *Пусть G — конечно порожденная группа, S — (конечное) множество ее порождающих элементов, и пусть G действует* *на счетном множестве X. Определим Φ-лапласиан $\Delta_\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ следующим образом:*

$$(\Delta_\Phi f)(x) := \sum_{s\in S} \Phi'(f(s^{-1}x) - f(x)) \text{ для } f \in \mathcal{F}(X) \text{ и } x \in X.$$

Функция $f \in D^\Phi(X)$ называется Φ-гармонической, если $(\Delta_\Phi f)(x) = 0$ для всех $x \in X$. Будем обозначать множество Φ-гармонических функций на X символом $HD^\Phi(X)$.

Теперь нам необходимо ввести еще один оператор: $\langle \Delta_\Phi *, *\rangle : D^\Phi(X) \times D^\Phi(X) \to \mathbb{R}$, действие которого определяется следующей формулой:

$$\langle \Delta_\Phi f,\, g\rangle := \sum_{x\in X}\sum_{s\in S} \Phi'(f(s^{-1}x) - f(x))(g(s^{-1}x) - g(x)).$$

Данная сумма конечна в силу предложения 1.10.

Заметим, что Φ-лапласиан и форма $\langle \Delta_\Phi \cdot, \cdot\rangle$ корректно определены на элементах $\mathscr{D}^\Phi(X)$. Сохраним их обозначения для этого пространства.

Напомним (см. [28]) , что, если V — вещественное векторное пространство, то функционал $\rho : V \to [0, \infty]$ называется *модуляром* на V в том случае, когда для всех $x, y \in V$ выполняются следующие свойства:

1. $\rho(0) = 0$;
2. $\rho(-x) = \rho(x)$;
3. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ для $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$;
4. $\rho(x) = 0$ влечет $x = 0$.

Снабдим пространство $\mathscr{D}^\Phi(X)$ модуляром $\rho : \mathscr{D}^\Phi(X) \to \mathbb{R}^+$ следующего вида

$$\rho(f) = \sum_{s\in S}\sum_{x\in X} \Phi\big(f(s^{-1}x) - f(x)\big).$$

Напомним, что *дифференциал Гато* отображения ρ в точке $f \in \mathscr{D}^\Phi(X)$ определяется как

$$\rho'_f(g) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\rho(f + tg) - \rho(f)}{t}.$$

Несложно проверить, что $\rho'_f(g) = \langle \Delta_\Phi f,\, g\rangle$.

Предложение 2.5 *Пусть Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N-функция. Допустим, что $f_1,\, f_2 \in D^\Phi(X)$. В этом случае $f_1 - f_2 \in D^\Phi(X)^G$ тогда и только тогда, когда*

$$\langle \Delta_\Phi f_1,\, f_1 - f_2\rangle = \langle \Delta_\Phi f_2,\, f_1 - f_2\rangle$$

Доказательство. Предположим, что $f_1 - f_2 \in D^\Phi(X)^G$. Несложно заметить, что $\langle \Delta_\Phi f,\, *\rangle$ отображает $D^\Phi(X)^G$ в $\{0\}$ для всех $f \in D^\Phi(X)$ и, следовательно, $\langle \Delta_\Phi f_1,\, f_1 - f_2\rangle = 0 = \langle \Delta_\Phi f_2,\, f_1 - f_2\rangle$. Обратно, предположим, что $f_1 - f_2 \notin D^\Phi(X)^G$. Тогда f_1 и f_2 задают различные элементы в $D^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$. Воспользовавшись предложением 5.4 на стр. 24 книги [23], можем заключить, что

$$\rho(f_1) > \rho(f_2) + \rho'_{f_2}(f_1 - f_2) = \rho(f_2) + \langle \Delta_\Phi f_2,\, f_1 - f_2\rangle.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\rho(f_2) > \rho(f_1) + \rho'_{f_1}(f_2 - f_1) = \rho(f_1) - \langle \Delta_\Phi f_1,\, f_1 - f_2\rangle$$

Таким образом, $\langle \Delta_\Phi f_1,\, f_1 - f_2\rangle > \langle \Delta_\Phi f_2,\, f_1 - f_2\rangle$. □

Для каждого $x \in X$ определим функцию $\delta_x : X \to \mathbb{R}$:

$$\delta_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = x \\ 0, & \text{если } t \neq x \end{cases}$$

Лемма 2.6 *Для $h \in D^\Phi(X)$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$h \in HD^\Phi(X)$;*
2. *$\langle \Delta_\Phi h,\, \delta_x\rangle = 0$ для всех $x \in X$;*
3. *$\langle \Delta_\Phi h,\, f\rangle = 0$ для всех $f \in (\overline{\ell^\Phi_G(X)})_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$.*

Доказательство. (1)⇔(2): Имеем

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_\Phi h,\, \delta_x\rangle &= \sum_{t\in X}\sum_{s\in S}\Phi'\big(h(s^{-1}t) - h(t)\big)\big(\delta_x(s^{-1}t) - \delta_x(t)\big) \\
&= \sum_{s\in S}\big(\Phi'(h(x) - h(sx)) - \Phi'(h(s^{-1}x) - h(x))\big) \\
&= -\sum_{s\in S}\Phi'(h(sx) - h(x)) - \sum_{s\in S}\Phi'(h(s^{-1}x) - h(x)) \\
&= -2\sum_{s\in S}\Phi'(h(s^{-1}x) - h(x)) = -2\Delta_\Phi h(x).
\end{aligned}$$

Это влечет наличие равенства $\Delta_\Phi h(x) = 0$ для всех $x \in X$ тогда и только тогда, когда $\langle \Delta_\Phi h,\, \delta_x \rangle = 0$ для всех $x \in X$.

Импликация (3)⇒(2) тривиальна.

(1)⇒(3): Поскольку $(\overline{\ell_G^\Phi(X)})_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$ совпадает с замыканием линейной оболочки Δ множества $\{\, \delta_x \mid x \in X \,\}$ в $\mathscr{D}^\Phi(X)$, для каждого элемента $f \in \ell_G^\Phi(X)$ существует последовательность $\{f_n\} \subset \Delta$ такая, что $\|f - f_n\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \to 0$ при $n \to \infty$. Предположим теперь, что $h \in HD^\Phi(X)$ и $m = \max\limits_{s\in S} \sum_{x\in X} \Psi\Big(\Phi'\big(h(s^{-1}x) - h(x)\big)\Big)$. Тогда $m < \infty$ по предложению 1.10; следовательно, $\Phi'(\lambda_X(s)h - h)/m \in \tilde{\ell}_1^\Psi(X)$ для всех s. Отсюда мы заключаем, что

$$
\begin{aligned}
0 \le |\langle \Delta_\Phi h,\, f \rangle| &= |\langle \Delta_\Phi h,\, f - f_n \rangle| \\
&= \left| m \sum_{s\in S} \sum_{x\in X} \frac{\Phi'((\lambda_X(s)h - h)(x))}{m} (\lambda_X(s)(f - f_n) - (f - f_n))(x) \right| \\
&\qquad \le |m| \sum_{s\in S} \|(\lambda_X(s)(f - f_n) - (f - f_n))\|_{\ell^\Phi(X)}
\end{aligned}
$$

$$
\le 2|m| \sum_{s\in S} \|(\lambda_X(s)(f - f_n) - (f - f_n))\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} = 2|m| \|f - f_n\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \to 0,\ n \to \infty.
$$

□

Теорема 2.7 *Предположим, что Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N-функция, лежащая в $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Пусть G — конечно порожденная группа, действующая на счетном множестве X. Тогда для любой функции $f \in D^\Phi(X)$ существует разложение $f = u + h$, где $u \in (\overline{\ell^\Phi(X)})_{D^\Phi(X)}$ и $h \in HD^\Phi(X)$. Такое разложение единственно с точностью до элемента из $D^\Phi(X)^G$.*

Доказательство. Так как $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$, то пространство $\ell^\Phi(X)$ рефлексивно (см. [30]). То же верно для $\mathscr{D}^\Phi(X)$.

Зафиксируем некоторое конечное множество S порождающих для G.

Пусть функция f лежит в $D^\Phi(X)$; соответствующий элемент из $\mathscr{D}^\Phi(X) = D^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$ будем обозначать тем же символом f.

Пусть

$$
d = \inf_{g \in (\overline{\ell_G^\Phi(X)})_{\mathscr{D}^\Phi(X)}} \rho(f - g),
$$

$$B = \{g \in (\overline{\ell^\Phi_G(X)})_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \mid \rho(f-g) \leq d+1\}.$$

Очевидно, что множество B ограничено, так как в силу свойств пространств Орлича для всех $f \in \mathscr{D}^\Phi(X)$ имеем $\|f\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \leq \rho(f) + k$, где k — число порождающих в системе S. Докажем теперь, что B замкнуто. Пусть $\|f - f_n\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)} \to 0$ при $n \to \infty$, где $f, f_n \in (\overline{\ell^\Phi_G(X)})_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$. Поскольку функция Φ Δ_2-регулярна, сходимость в $\ell^\Phi(X)$ по норме эквивалентна сходимости по модуляру ρ_Φ (см. [18, теорема 9.4]). Следовательно, в пространстве $\mathscr{D}^\Phi(X)$ сходимость по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$ эквивалентна сходимости по ρ. Воспользуемся следствием 15 из § 3.4 книги [30], в силу которого $\rho(g_n) \to 0$ при $n \to \infty$ влечет $\rho(g+g_n) \to \rho(g)$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\rho(f_n) = \rho((f_n - f) + f) \to \rho(f),$$

и, таким образом, условие $f_n \in B$ для всех n влечет, что $f \in B$. Следовательно, B — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество рефлексивного банахова пространства $\mathscr{D}^\Phi(X)$. Поэтому, как следует из теоремы Какутани (см., например, [19, следствие 10.6.2]), B компактно в слабой топологии. Следовательно, слабо полунепрерывный снизу функционал

$$F(g) = \rho(f-g),\ g \in (\overline{\ell^\Phi_G(X)})_{\mathscr{D}^\Phi(X)}$$

достигает своего минимума d на B. Пусть $F(u) = d$ и $h = f - u$. Для $v \in \ell^\Phi_G(X)$ рассмотрим гладкую функцию

$$F_v(t) = \rho(f - (u - tv)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что минимум F достигается при $t = 0$, что означает

$$\left.\frac{dF_v(t)}{dt}\right|_{t=0} = \rho'_h(v) = \langle \Delta_\Phi h,\, v\rangle = 0 \ \text{ для всех } v \in \ell^\Phi_G(X).$$

Таким образом, $\langle \Delta_\Phi h,\, \delta_x\rangle = 0$ для всех $x \in X$, и, следовательно, $h \in HD^\Phi(X)$ по лемме 2.6.

Докажем единственность. Предположим, что

$$f = u_1 + h_1 = u_2 + h_2.$$

Воспользовавшись леммой 2.6, заключаем, что

$$\langle \Delta_\Phi h_1,\, h_1 - h_2\rangle = \langle \Delta_\Phi h_1,\, u_1 - u_2\rangle = 0,$$

и, аналогично, $\langle \Delta_\Phi h_2,\, h_1 - h_2\rangle = 0$. В силу предложения 2.5 имеем $h_1 - h_2 = u_1 - u_2 \in D^\Phi(X)^G$. □

Следствие 2.8 *Если действие группы G на X свободно, то пространство $\overline{H}^1(G,\, \ell^\Phi(X))$ может быть естественным образом отождествлено с пространством $HD^\Phi(X)/D^\Phi(X)^G$.*

Доказательство. Непосредственно следует из рассуждений, изложенных в ходе доказательств теоремы 2.3 и теоремы 2.7. □

Теорема 2.9 *Если $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$, а конечно порожденная группа G имеет бесконечный центр, то $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(G)) = 0$.*

Доказательство. В действительности ниже мы доказываем несколько более общее утверждение (теорема 2.10), данная же теорема может быть получена сходными рассуждениями, по необходимости отбросив лишние детали. □

Теорема 2.10 *Пусть Φ — N-функция из $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$, и пусть Γ, G — бесконечные конечно порожденные группы, причем G неаменабельна. Если G — нормальная подгруппа Γ с бесконечным централизатором $Z_\Gamma(G)$, то $\overline{H}^1(\Gamma, \ell^\Phi(\Gamma)) = 0$*

Доказательство. Известно, что каждое пространство Орлича $\ell^\Phi(\Gamma)$ топологически изоморфно пространству $\ell^{\tilde{\Phi}}(\Gamma)$, где $\tilde{\Phi}$ — некоторая непрерывно дифференцируемая строго выпуклая G-функция такая, что

$$\Phi(u) \le \tilde{\Phi}(u) \le 2\Phi(u) \tag{2.1}$$

(см. [14, 18]). Таким образом, мы имеем пару топологических изоморфизмов $H^1(\Gamma, \ell^\Phi(\Gamma)) \cong H^1(\Gamma, \ell^{\tilde{\Phi}}(\Gamma))$ и $\overline{H}^1(\Gamma, \ell^\Phi(\Gamma)) \cong \overline{H}^1(\Gamma, \ell^{\tilde{\Phi}}(\Gamma))$. Неравенства (2.1) влекут эквивалентность N-функций Φ и $\tilde{\Phi}$ [18, 29]. Поэтому если $\Phi \in \Delta_2(0)$, то $\tilde{\Phi} \in \Delta_2(0)$ (см., например, [29, § 2.3]); кроме того, для функций Ψ и $\tilde{\Psi}$, дополнительных к Φ и $\tilde{\Phi}$ соответственно, обращаясь к (2.1), имеем

$$\Psi\left(\frac{v}{2}\right) \le \tilde{\Psi}(v) \le \Psi(v).$$

Следовательно, ∇_2-регулярность также сохраняется при переходе от Φ к $\tilde{\Phi}$, и, таким образом, можно утверждать, что $\ell^{\tilde{\Phi}}$ рефлексивно. Как следствие, мы можем без ограничения общности полагать, что сама Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая G-функция.

Сперва заметим, что $\mathscr{D}_\Phi(\Gamma)^{Z_\Gamma(G)} = 0$. Действительно, пусть $[f]$ — класс эквивалентности в $\mathscr{D}_\Phi(\Gamma)^{Z_\Gamma(G)}$, содержащий элемент f. Тогда $\lambda_\Gamma(g)f - f \in D^\Phi(\Gamma)^G$ для всех $g \in Z_\Gamma(G)$; другими словами, $\lambda_\Gamma(n)(\lambda_\Gamma(g)f - f) = \lambda_\Gamma(g)f - f$ для всех $n \in G$. Это эквивалентно тому, что $\lambda_\Gamma(g)(\lambda_\Gamma(n)f - f) = \lambda_\Gamma(n)f - f$, поскольку n, $g \in Z_\Gamma(G)$. Так как $[f] \in \mathscr{D}_\Phi(\Gamma)^{Z_\Gamma(G)}$, имеем $\lambda_\Gamma(n)f - f \in \ell^\Phi(\Gamma)$, что влечет как следствие $\lambda_\Gamma(n)f - f \in \ell^\Phi(\Gamma)^{Z_\Gamma(G)}$. Вспоминая, что централизатор $Z_\Gamma(G)$ бесконечен, мы заключаем, что функция $\lambda_\Gamma(n)f - f$ тождественно равна нулю, т.е. $f \in D^\Phi(\Gamma)^G$. Таким образом, $[f] = 0$.

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Пусть отображение $\alpha : \mathscr{D}^\Phi(\Gamma) \to Z^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G)$ определено так же, как и в теореме 2.3. Как упоминалось выше, действие группы Γ на $\mathscr{D}^\Phi(\Gamma)$ индуцирует действие на $Z^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G)$, определяемое формулой

$$(g \cdot b)(n) = \lambda(g)(b(g^{-1}ng)), \quad b \in Z^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G), \quad g \in \Gamma, \quad n \in G.$$

Поскольку это действие оставляет пространство $B^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G)$ инвариантным, оно корректно определено на $H^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G)$. Несложные вычисления дают

$$(m \cdot b)(n) = b(n) + (\lambda(n)b(m) - b(m)) \text{ для } m \in G.$$

В силу вышеизложенного, действие G на $H^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G)$ тривиально. Несложно проверить, что α Γ-эквивариантно. Поэтому, по следствию 2.8, существует $Z_\Gamma(G)$-эквивариантная биекция между $HD^\Phi(\Gamma)/D^\Phi(\Gamma)^G$ и $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G)$. Рассмотрим отдельно случаи конечного и бесконечного пересечения $G \cap Z_\Gamma(G)$.

Сперва допустим, что оно бесконечно. Индуцированное действие G оставляет элементы $HD^\Phi(\Gamma)/D^\Phi(\Gamma)^G$ неподвижными, потому что оно тривиально. Повторив приведенные рассуждения, заключаем, что $\mathscr{D}_\Phi(\Gamma)^{G \cap Z_\Gamma(G)} = 0$, и, следовательно, $HD^\Phi(\Gamma)/D^\Phi(\Gamma)^G = 0$. Отсюда следует, что $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G) = 0$, и, по лемме 2.1, $\overline{H}^1(\Gamma, \ell^\Phi(\Gamma)) = 0$.

Теперь пусть пересечение конечно. Для неаменабельной группы G имеем

$$\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G) = H^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G).$$

Аналогично предыдущему, заключаем, что $H^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G)^{Z_\Gamma(G)/(G \cap Z_\Gamma(G))} = 0$; поэтому $H^1(G, \ell^\Phi(\Gamma)|_G)^{\Gamma/G} = 0$. Отсюда, воспользовавшись леммой 2.1, заключаем, что

$$H^1(\Gamma, \ell^\Phi(\Gamma)) = 0 = \overline{H}^1(\Gamma, \ell^\Phi(\Gamma)).$$

□

Рассмотрим аддитивную группу целых чисел $G = \langle \mathbb{Z}, +\rangle$ с набором порождающих $S = \langle -1, +1\rangle$, действующую на $\mathbb{Z}$:

$$m(n) = n + m, \text{ где } m \in \langle \mathbb{Z}, +\rangle, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Данное действие естественным образом продолжается на пространство функций $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$:

$$\lambda_{\mathbb{Z}}(m) f(n) = f(n - m).$$

Рассмотрим N-функцию $\Phi(x) = e^{|x|^p} - 1$, $1 < p$. Известно, что Φ лежит в классе $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$, см. [30].

Проиллюстрируем, что происходит с редуцированными и обычными первыми ℓ^Φ-когомологиями. Пусть $f \in HD^\Phi(\mathbb{Z}) \subset D^\Phi(\mathbb{Z})$, тогда

$$\begin{aligned}\Delta_\Phi f(n) = \sum_{s \in S} & \Phi'(\lambda_\Gamma(s) f(n) - f(n)) \\ & = \Phi'(f(n-1) - f(n)) + \Phi'(f(n+1) - f(n)) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, для гармонических функций f имеем:

$$\Phi'(f(n-1) - f(n)) = -\Phi'(f(n+1) - f(n)).$$

Поскольку данное соотношение верно для любого n, а Φ' нечетная функция, можем записать:

$$\begin{aligned}\Phi'(f(n+1) - f(n)) = & \Phi'(f(n) - f(n-1)) \\ & = \Phi'(f(n-1) - f(n-2)) = \dots = \Phi'(f(1) - f(0)).\end{aligned}$$

В силу того, что Φ' строго монотонная имеем:

$$f(n+1) - f(n) = f(1) - f(0) \text{ для всех } n.$$

Но тогда $\lambda_{\mathbb{Z}}(-1) f - f$ принадлежит $\ell^\Phi(\mathbb{Z})$, соответственно $f \in D^\Phi(\mathbb{Z})$, только в случае констант. Таким образом, множество гармонических функций ограничивается константами, отсюда, используя следствие 2.8, заключаем $\overline{H}^1(\mathbb{Z}, \ell^\Phi(\mathbb{Z})) = 0$.

Рассмотрим теперь функцию $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ следующего вида:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[p]{n}}, & \text{если } n \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Поскольку $\Phi(f(n)) \sim 1/n$ при $n \to \infty$, функция f не принадлежит $\ell^\Phi(\mathbb{Z})$. Рассмотрим функцию $\lambda_{\mathbb{Z}}(1)f - f = f(n-1) - f(n)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(f(n-1) - f(n)) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\exp\left(\left| \frac{n^{1/p} - (n-1)^{1/p}}{n^{1/p}(n-1)^{1/p}} \right|^p \right) - 1 \right).$$

Несложно проверить, что на бесконечности

$$\left| \frac{n^{1/p} - (n-1)^{1/p}}{n^{1/p}(n-1)^{1/p}} \right|^p \sim \frac{1}{n^{p+1}}$$

и, соответственно,

$$\Phi(f(n-1) - f(n)) \sim \frac{1}{n^{p+1}} \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(f(n-1) - f(n)) < \infty.$$

Следовательно, $f \in D^\Phi(\mathbb{Z})$ и, соответственно, представляет некоторый ненулевой класс в $H^\Phi(\mathbb{Z})$.

Глава 3

Φ−гармонический анализ на графах

Пусть $\Gamma = (V,\ E)$ — связный бесконечный граф (без петель) ограниченной степени, где V — множество вершин, а E — множество ребер. Будем писать $x \sim y$, если $(x,\ y)$ — пара смежных вершин, т. е. $(x,\ y) = e \in E$.

Далее, для функции $f\colon S \cup \partial S \to \mathbb{R}$, где $S \subset V$ и

$$\partial S = \bigcup_{x \in S} \{y \in V \backslash S \mid y \sim x\},$$

введем ряд определений.

Определение 3.1 *Следуя разделу 2.2, будем называть Φ−лапласианом оператор, определяемый следующим соотношением*

$$\Delta_\Phi f(x) = \sum_{x \sim y} \Phi'(f(y) - f(x)),\ \text{где } x \in S.$$

Определение 3.2 *Функция f называется Φ−гармонической на множестве $S \subset V$, если для всех $x \in S$ выполняется равенство $\Delta_\Phi f(x) = 0$. Обозначим множество всех функций на S, обладающих данным свойством, символом $\mathcal{H}^\Phi(S)$.*

Замечание. Очевидно, что функции вида $af+b$, где $a,\ b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{H}^\Phi(S)$, также являются Φ−гармоническими.

Определение 3.3 *Определим функционал* $\mathbb{R}^{S\cup\partial S} \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^{\geq 0}$ *по правилу*

$$\rho(f) = \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}\Phi(f(y) - f(x)).$$

Положим

$$\langle f,\, g\rangle(x,\, y) = \Phi'(f(y) - f(x))(g(y) - g(x)).$$

Определение 3.4 *Введем операцию свертки пары функций на множестве* $S \subset V$*, заданную следующей формулой*

$$\langle \Delta_\Phi f,\, g\rangle = \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}\langle f,\, g\rangle(x,\, y).$$

Определение 3.5 *Будем говорить, что* f *—* Φ*-гармоническая в слабом смысле функция на* $S \subset V$*, если* $\langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = 0$ *для всех* $g\colon S \cup \partial S \to \mathbb{R}$ *таких, что* $g|_{\partial S} = 0$.

Определение 3.6 *Для каждого* $x \in S$ *определим* $\delta_x : S \to \mathbb{R}$ *по правилу*

$$\delta_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = x; \\ 0, & \text{если } t \neq x. \end{cases}$$

Следующая лемма позволяет связать между собой оба определения Φ-гармонической функции.

Лемма 3.7 *Пусть* $S \subset V$ *— конечное множество. Тогда свойство* Φ*-гармоничности в слабой форме равносильно* Φ*-гармоничности. Другими словами,* $\Delta_\Phi f = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = 0$ *для всех* $g\colon S \cup \partial S \to \mathbb{R}$ *таких, что* $g|_{\partial S} = 0$.

Доказательство. Имеем по определению

$$\langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}\Phi'(f(y) - f(x))(g(y) - g(x)).$$

Пусть $S = \{x_i\}$. Достаточно очевидно, что справедливо равенство $g(x) = \sum\limits_i g_i\delta_{x_i}(x)$, где $g_i = g(x_i)$. Теперь можем записать:

$$\begin{aligned}\langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle &= \sum_i \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x} g_i \Phi'(f(y)-f(x))(\delta_{x_i}(y)-\delta_{x_i}(x))\\ &= -\sum_i \sum_{y\sim x_i} g_i\Phi'(f(y)-f(x_i)) + \sum_i\sum_{x_i\sim x} g_i\Phi'(f(x_i)-f(x))\\ &= -2\sum_i g_i \Delta_\Phi f(x_i).\end{aligned}$$

Выражение

$$\langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = -2\sum_i g_i\Delta_\Phi f(x_i)$$

имеет силу для всех g и, в частности, для $\{\delta_{x_i}\}$, что очевидным образом завершает наше доказательство.

$\square$

Заметим, что дифференцирование функционала ρ по Гато дает следующее соотношение

$$\rho'_f(g) = \langle \Delta_\Phi f,\ g\rangle = -2\sum_i g_i\Delta_\Phi f(x_i)$$

Далее, проясним связь между $\Phi-$лапласианом и функционалом ρ.

Лемма 3.8 *Пусть $S \subset V$ — конечное множество. Равенство $\Delta_\Phi f = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда f минимизирует $\rho(g)$ на множестве $M_f = \{g\colon S\cup\partial S \to \mathbb{R} \mid g|_{\partial S} = f|_{\partial S}\}$.*

Доказательство. Допустим, $f_t = f + tu$, где $t \in \mathbb{R}$ и $u|_{\partial S} = 0$. Очевидно, что $f_t \in M_f$. Посколькуf минимизирует $\rho(g)$, имеем

$$\rho'_f(u) = 0,$$

что равносильно равенству $\langle \Delta_\Phi f,\ u\rangle = 0$ для всех u таких, что $u|_{\partial S} = 0$, и, следовательно, $\Delta_\Phi f = 0$.

Предположим, $\Delta_\Phi f = 0$ и $g - f|_{\partial S} = 0$. Тогда, воспользовавшись предложением 5.4 из [23], можем заключить

$$\rho(g) > \rho(f) + \rho'_f(g-f) = \rho(f) + \langle \Delta_\Phi f, g-f\rangle = \rho(f).$$

$\square$

Пусть $\{f_i\}$ — последовательность функций на $S \cup \partial S$, где S конечно, сходящихся поточечно к функции f, тогда очевидным образом имеем

$$\rho(f_i) \to \rho(f), \ \Delta_\Phi f_i(x) \to \Delta_\Phi f(x)$$

Теорема 3.9 *Предположим, что $S \subset V$ конечно. Для произвольной функции f, определенной на ∂S, существует такая функция h на $S \cup \partial S$, что h — Φ-гармоническая на S и $h|_{\partial S} = f$.*

Доказательство. Пусть $\{h_i\}$ — последовательность функций из $S \cup \partial S$ такая, что $h_i|_{\partial S} = f$ и

$$\rho(h_i) \to \rho = \inf_g \rho(g),$$

где инфимум берется по всем g таким, что $g|_{\partial S} = f|_{\partial S}$. Можем считать, что $m = \min_{y \in \partial S} f(y) \le h_i \le M = \max_{y \in \partial S} f(y)$. Действительно, в силу того, что $\Phi(x)$ четная и строго возрастает по параметру $|x|$, замена всех значений $h_i(x)$ в тех точках, где $h_i(x) < m$ (или $h_i(x) > M$), на m (соответственно M) лишь уменьшает $\rho(h_i)$, оставляя граничные значения h_i нетронутыми. Следовательно, существует некоторая подпоследовательность (за ней мы сохраним прежние обозначения $\{h_i\}$) которая сходится к функции h на $S \cup \partial S$. Таким образом, имеем $h|_{\partial S} = f$ и $\rho(h) = \lim\limits_{i \to \infty} \rho(h_i)$. То есть h — Φ-гармоническая функция в S.

□

Замечание. Единственность полученной функции является прямы следствием дальнейших рассуждений (см. следствие 3.12)

Определение 3.10 *Будем говорить, что h — Φ-супергармоническая (субгармоническая) на $U \subset V$ функция, если $\Delta_\Phi h(x) \le 0$ (соответственно $\Delta_\Phi h(x) \ge 0$) в каждой точке $x \in U$.*

В силу рассуждений из доказательства леммы 3.7, h — Φ-супергармоническая (субгармоническая) тогда и только тогда, когда

$$\langle \Delta_\Phi h, \ f \rangle \ge 0 \text{ (соответственно } \le 0)$$

для всех $f \colon U \cup \partial U \to \mathbb{R}^+$ таких, что $f|_{\partial U} = 0$ и f имеет конечный носитель.

Теорема 3.11 *Пусть f — Φ-супергармоническая, а g — Φ-субгармоническая функции на конечном множестве $S \subset V$ такие, что $f \geq g$ на ∂S. Тогда $f \geq g$ на S.*

Доказательство. Определим пару множеств

$$A = \{x \in S \mid g(x) \leq f(x)\},$$

$$B = \{x \in S \mid g(x) > f(x)\}$$

и, в дополнение, для каждого $x \in S$ построим следующие множества:

$$C_x = \{y \in S \cup \partial S \mid y \sim x,\ g(y) \leq f(y)\},$$

$$D_x = \{y \in S \cup \partial S \mid y \sim x,\ g(y) > f(y)\}.$$

Положим $u(x) = \max\{0, g(x) - f(x)\}$. Тогда $u \geq 0,\ u|_{\partial S} = u|_A = 0$ и $u|_{C_x} = 0$ для каждого $x \in S$.

Поскольку f супергармоническая, а g субгармоническая, мы имеем

$$\langle \Delta_\Phi f, u\rangle \geq 0,\ \langle \Delta_\Phi g, u\rangle \leq 0.$$

И, следовательно,

$$0 \geq \langle \Delta_\Phi g, u\rangle - \langle \Delta_\Phi f, u\rangle = \sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}(\langle g, u\rangle(x, y) - \langle f, u\rangle(x, y))$$
$$= \sum_{x\in A}\sum_{y\sim C_x}(\langle g, u\rangle(x, y) - \langle f, u\rangle(x, y)) + \sum_{x\in A}\sum_{y\sim D_x}(\langle g, u\rangle(x, y) - \langle f, u\rangle(x, y))$$
$$+ \sum_{x\in B}\sum_{y\sim C_x}(\langle g, u\rangle(x, y) - \langle f, u\rangle(x, y)) + \sum_{x\in B}\sum_{y\sim D_x}(\langle g, u\rangle(x, y) - \langle f, u\rangle(x, y)).$$

В силу того, что $u(x) = u(y) = 0$ для всех $x \in A$, $y \in C_x$, очевидным образом имеем

$$\sum_{x\in A}\sum_{y\sim C_x}(\langle g, u\rangle(x, y) - \langle f, u\rangle(x, y)) = 0.$$

Далее,

$$\sum_{x\in B}\sum_{y\sim D_x}(\langle g,\,u\rangle(x,\,y)-\langle f,\,u\rangle(x,\,y))=\sum_{x\in B}\sum_{y\sim D_x}(a-b)(\Phi'(a)-\Phi'(b))\geq 0$$

где $a=g(y)-g(x),\ b=f(y)-f(x)$.

$$\sum_{x\in A}\sum_{y\sim D_x}(\langle g,\,u\rangle(x,\,y)-\langle f,\,u\rangle(x,\,y))=\sum_{x\in A}\sum_{y\sim D_x}u(y)(\Phi'(a)-\Phi'(b))>0,$$

где $u>0$ и $g(x)\leq f(x)$, $g(y)>f(y)$, что влечет $a=g(y)-g(x)>f(y)-f(x)=b$.

$$\sum_{x\in B}\sum_{y\sim C_x}(\langle g,\,u\rangle(x,\,y)-\langle f,\,u\rangle(x,\,y))=\sum_{x\in B}\sum_{y\sim C_x}-u(x)(\Phi'(a)-\Phi'(b))>0,$$

где $u>0$ и $g(x)>f(x)$, $g(y)\leq f(y)$, следовательно, $a=g(y)-g(x)<f(y)-f(x)=b$. Имеем, таким образом, в том случае, когда B не пусто,

$$0\geq\langle\Delta_\Phi g,\,u\rangle-\langle\Delta_\Phi f,\,u\rangle>0.$$

Полученное противоречие завершает наше доказательство. □

Следствие 3.12 *Пусть f и g — Φ-гармонические функции на конечном множестве S такие, что $f|_{\partial S}=g|_{\partial S}$. Тогда $f=g$ на S.*

Неравенство Гарнака показывает, что значение неотрицательной гармонической функции на границе шара не превосходит значение в центре с некоторой константой, зависящей от радиуса данного шара.
Дискретные аналоги данного неравенства были установлены Доджиком [4] :

$$\max_{y\sim x}h(y)\leq\deg(x)h(x)$$

и позднее Холопайненом и Соарди [7], как обобщение для дискретных p-супергармонических функций:

$$\max_{y\sim x}h(y)\leq(\deg(x)^{1/(p-1)}+1)h(x).$$

Далее мы обобщим данное утверждение на случай Φ-гармонических функций. Будем считать, что $U\subset V$ — некоторое подмножество вершин, возможно бесконечное.

Теорема 3.13 *(Неравенство Гарнака)*
Пусть Φ и Ψ — пара двойственных $N-$функций, и $h\colon U\cup\partial U\to\mathbb{R}^{\geq 0}$ — Φ-супергармоническая на U функция. Тогда для каждого $x\in U$ имеет место оценка

$$\max_{y\sim x} h(y)\leq [\Psi'(\Phi'(1)\deg(x))+1]h(x).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и

$$\widetilde{h_\varepsilon}(t)=\frac{h(t)+\varepsilon}{h(x)+\varepsilon}.$$

Имеем $\widetilde{h_\varepsilon}(t)>0$ и $\widetilde{h_\varepsilon}(x)=1$. Далее,

$$\begin{aligned}0\geq \Delta_\Phi\widetilde{h_\varepsilon}(x)&=\sum_{x\sim y}\Phi'(\widetilde{h_\varepsilon}(y)-\widetilde{h_\varepsilon}(x))\\&=\sum_{x\sim y,\,\widetilde{h_\varepsilon}(y)>1}\Phi'(\widetilde{h_\varepsilon}(y)-1))-\sum_{x\sim y,\,\widetilde{h_\varepsilon}(y)<1}\Phi'(1-\widetilde{h_\varepsilon}(y)).\end{aligned}$$

Таким образом, можем заключить, что

$$\begin{aligned}\Phi'(1)\deg(x)\geq\sum_{x\sim y,\,\widetilde{h_\varepsilon}(y)<1}\Phi'(1-\widetilde{h_\varepsilon}(y))&\geq\sum_{x\sim y,\,\widetilde{h_\varepsilon}(y)>1}\Phi'(\widetilde{h_\varepsilon}(y)-1))\\&\geq\Phi'(\max_{y\sim x}\widetilde{h_\varepsilon}(y)-1).\end{aligned}$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в неравенстве

$$\Phi'(1)\deg(x)\geq\Phi'\left(\frac{\max\limits_{y\sim x}h(y)+\varepsilon}{h(x)+\varepsilon}-1\right),$$

и вспоминая о связи между двойственными $N-$функциями, имеем требуемую оценку

$$\max_{y\sim x} h(y)\leq [\Psi'(\Phi'(1)\deg(x))+1]h(x).$$

$\square$

Лемма 3.14 *Пусть* $\{S_i\}$ *— возрастающая последовательность конечных связных подмножеств* V*, и пусть* $U = \bigcup_i S_i$*. Допустим, что* $\{h_i\}$ *— последовательность функций на* $U \cup \partial U$ *такая, что* $h_i(x) \to h(x) < \infty$ *для всех* $x \in U \cup \partial U$*. Тогда, если* h_i *—* Φ*-гармоническая (или* Φ*-супергармоническая,* Φ*-субгармоническая) на каждом* S_i*, то* h *—* Φ*-гармоническая (соответственно* Φ*-супергармоническая,* Φ*-субгармоническая) на* U*.*

Доказательство. Получается как прямое следствие определений и равенств $\Delta_\Phi h_i(x) \to \Delta_\Phi h(x)$. □

Теорема 3.15 *(Принцип Гарнака)*
Допустим, что S_i *и* U *определены так же, как и в предыдущей лемме. Пусть* $\{h_i\}$ *— возрастающая последовательность функций на* $U \cup \partial U$*. Тогда, если* h_i *—* Φ*-гармоническая (или* Φ*-супергармоническая) на каждом* S_i*, то или* $h_i(x) \to \infty$ *для всех* $x \in U$*, или* $h_i(x) \to h(x)$ *для всех* $x \in U$ *и* h*—* Φ*-гармоническая (соответственно* Φ*-супергармоническая) на* U*.*

Доказательство. Допустим, что $h_i(x) \to a < \infty$ в некоторой точке $x \in U$. По неравенству Гарнака последовательность $\{h_i\}$ равномерно ограничена на множестве $\{y \in V \mid x \sim y\}$, а также, аналогичным образом, учитывая строение множества U, на любом связном конечном подмножестве $S \subset U \cup \partial U$. Таким образом, $h_i(x) \to h(x)$ для всех $x \in U \cup \partial U$, что по предыдущей лемме дает нам требуемые свойства Φ-гармоничности (соответственно Φ-супергармоничности).
□

Глава 4

Операторы регуляризации де Рама

4.1 Базовые сведения о потоках

Сперва дадим ряд формальных определений. Пусть M — гладкое многообразие, а $\Omega(M)$ — пространство дифференциальных форм, задаваемых сечениями $\omega\colon M \to \Lambda^*(M)$ класса $C^\infty(M)$. Подмножество форм с компактным носителем будем обозначать $\Omega_c(M)$.

Введем на $\Omega(M)$ топологию следующим образом. Для последовательности форм $\{\omega_k\} \subset \Omega(M)$ запись $\omega_k \to \omega$ означает, что при любом α в каждой локальной системе координат

$$|D^\alpha \omega_k - D^\alpha \omega| \to 0$$

сходится равномерно. Здесь D^α оператор взятия α-производной от коэффициентов формы в данных координатах. В случае, когда мы рассматриваем последовательность $\{\omega_k\} \subset \Omega_c(M)$, потребуем дополнительно, чтобы множество $\overline{\bigcup_k \operatorname{supp}(\omega_k)}$ было компактно.

Определение 4.1 *Потоком будем называть линейный функционал T на $\Omega_c(M)$, обладающий непрерывностью в смысле упомянутой выше топологии: пусть $\{\omega_i\}$ такая последовательность форм из $\Omega_c(M)$, что все производные ее коэффициентов равномерно сходятся к нулю при $i \to \infty$, тогда $T(\omega_i) \to 0$ при $i \to \infty$.*

Замечание 4.2 *Условие непрерывности для линейного функционала $T\colon \Omega(M) \to \mathbb{R}$ эквивалентно ограниченности T по абсолютной величине на любом ограниченном подмножестве $\{\omega_\alpha\} \subset \Omega(M)$.*

Замечание 4.3 *В частности, локально интегрируемая k-форма γ на n-мерном многообразии M определяет поток на пространстве форм с компактным носителем размерности $n-k$:*

$$\gamma(\omega) = \int \gamma \wedge \omega.$$

Будем обозначать векторное пространство всевозможных потоков на многообразии M символом $\mathcal{D}'(M)$. Условимся говорить, что поток T *равен нулю* ($T = 0$) *в открытом множестве* U, если для всех форм $\omega \in \Omega_c(M)$, таких, что $\operatorname{supp}(\omega) \subset U$ выполнено $T(\omega) = 0$.

Определение 4.4 *Носителем потока* $\operatorname{supp}(T)$ *называется дополнение объединения всех таких открытых множеств $\bigcup_\alpha U_\alpha$, что для всех форм с носителем* $\operatorname{supp}(\omega) \subset U_\alpha$ *выполняется $T(\omega) = 0$.*

Допустим, что $\operatorname{supp}(T)$ компакт. Рассмотрим разбиение единицы $\{\psi_i \mid i \in I\}$ и множество форм $\{\psi_i\omega\}$ для некоторой ограниченной формы $\omega \in \Omega(M)$. Очевидно, что множество $\{\psi_i\omega\}$ также ограничено, а формы $\psi_i\omega$ обладают компактными носителями $\operatorname{supp}(\psi_i\omega) \subseteq \operatorname{supp}(\psi_i)$, тогда $|T(\psi_i\omega)|$ остается ограниченным. Определим значение потока T на ω как

$$T(\omega) = \sum_i T(\psi_i\omega).$$

Данное определение корректно, поскольку найдется такое число N, что для всех $i > N$ пересечение $\operatorname{supp}(\psi_i) \cap \operatorname{supp}(T)$ пусто и $T(\psi_i\omega) = 0$. Очевидно, $|T(\omega)|$ также ограничено. Таким образом, поток с компактным носителем определяет непрерывный на $\Omega(M)$ функционал.

Непрерывный на $\Omega(M)$ линейный функционал $T(\omega)$ непрерывен и на $\Omega_c(M)$, следовательно, является потоком. Он также обладает компактным носителем, см. [22].

Таким образом, потоки с компактными носителями образуют сопряженное пространство $(\Omega(M))^* = \mathcal{D}'_c(M)$ и

$$\begin{tikzcd}
\Omega_c(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, "*"'] & \Omega(M) \arrow[d, "*"'] \\
\mathcal{D}'(M) & \mathcal{D}'_c(M) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

4.2 Регуляризация по де Раму

Определим сперва операторы усреднения для форм на $\mathbb{R}^n$. Пусть для каждого $v \in \mathbb{R}^n$ задано отображение

$$s_v \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

сдвига $s_v x = x + v$ и соответственно гомотопия s_{tv}, где $0 \leq t \leq 1$. Отображение s_v индуцирует соответствующее отображение переноса на формах:

$$s_v^* \colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n).$$

Также введем операцию внутреннего произведения формы ω и вектора v:

- $i_v(\omega) = \omega(v)$, если $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$;
- $i_v(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_v(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge i_v(\omega_2)$, где $\omega_1 \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, у нас определен оператор

$$\Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$$

Здесь мы в действительности можем рассматривать результат действия приведенных операторов как функции

$$S_\omega \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to A^k(\mathbb{R}^n),$$

$$G_\omega \colon \mathbb{R}^n \times I \times \mathbb{R}^n \to A^{k-1}(\mathbb{R}^n),$$

где результат функций определен в пространстве $k-$линейных антисимметричных функций $A^k(\mathbb{R}^n)$ соотношениями

$$S_\omega(x,\, v) = s_v^* \omega(x),$$

$$G_\omega(x,\, t,\, v) = (s_{tv}^* \circ i_v)\omega(x).$$

Будем обозначать символом $\tau(x)$, такую форму $f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, что неотрицательная четная функция $f \in C^\infty$ обладает носителем $\mathrm{supp}(f)$, лежащим внутри $\varepsilon-$шара и

$$\int \tau(x) = 1.$$

Определим теперь операторы

$$R_\varepsilon^*\omega(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} S_\omega(x,\, \varepsilon v)\tau(v),$$

$$A_\varepsilon^*\omega(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_0^1 G_\omega(x,\, t,\, \varepsilon v)dt \right) \tau(v).$$

Таким образом, операторы $R^*\omega$ и $A^*\omega$ определяются как результат интегрирования таких функций по одному из параметров — v. То есть результатом действия данных операторов на формах вновь являются формы

$$R_\varepsilon^*\colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n),$$

$$A_\varepsilon^*\colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n).$$

Приведенные формулы показывают, что операторы s_y^*, $\int_0^1 G_\omega(x,\, t,\, \varepsilon v)dt$ сохраняют ограниченность множества форм, а носители $R^*\omega$ и $A^*\omega$ содержатся в $\varepsilon-$окрестности носителя ω и также сохраняют ограниченность.

Определим теперь операторы регуляризации на потоке T по формулам

$$RT(\omega) = T(R^*\omega),$$

$$AT(\omega) = T(A^*\omega).$$

Очевидно, что построенные функционалы $RT,\ AT$ являются потоками, поскольку, они ограничены на ограниченных множествах форм. Их носители также содержатся в $\varepsilon-$окрестности носителя T.

Далее, следуя де Раму, можем считать, что наши операторы заданы на формах, определенных в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащем открытый единичный шар B. Здесь нам требуется рассмотреть преобразование $\mathfrak{s}_v\colon U \times \mathbb{R}^n \to U$, задаваемое правилом

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{v}} x = \begin{cases} h s_v h^{-1} x, & \text{если } x \in B \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где h – гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на B. После замены s_v на $\mathfrak{s}_{\mathfrak{v}}$ остальные операторы строятся аналогично предыдущему случаю.

4.3 Регуляризация в пространствах Орлича

Будем обозначать символом $\rho(x)dx$ элемент объема U.

Далее нам потребуется следующая лемма, доказанная в [1].

Лемма 4.5 *Для любой формы ω на U выполнено*

$$|S_\omega(x,\, v)|_x \leq C(v)|\omega(s_v x)|_{s_v x}$$

$$|G_\omega(x,\, t,\, v)|_x \leq M(v)|\omega(s_{tv} x)|_{s_{tv} x}$$

где $C(v) \to 1$ и $M(v) \to 0$ при $v \to 0$.

Теперь можем описать основные свойства наших операторов.

Лемма 4.6 *Для любого $\varepsilon > 0$, R^*_ε отображает $L^\Phi(U, \Lambda^k)$ в $L^\Phi(U, \Lambda^k)$; и более того*

$$\|R^*_\varepsilon\|_\Phi \leq C_1(\varepsilon), \tag{4.1}$$

где $C_1(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. По лемме 1.12 нам достаточно оценить

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|S_\omega(\cdot,\, \varepsilon v)\|_\Phi \tau(v). \tag{4.2}$$

Сперва, получим оценку на $\|S_\omega(x,\, \varepsilon v)\|_\Phi$. Возьмем форму $\theta \in L^\Psi(U, \Lambda^k)$ такую, что $\rho_\Psi(\theta) \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\left| \int_U (S_\omega(x,\, \varepsilon v), \theta(x))_x \rho(x)\, dx \right| \leq \int_U |(S_\omega(x,\, \varepsilon v), \theta(x))_x| \rho(x)\, dx \\
&\leq \int_U |S_\omega(x,\, \varepsilon v)|_x |\theta(x)|_x \rho(x)\, dx \leq \int_U C(\varepsilon v)|\omega(s_{\varepsilon v} x)|_{s_{\varepsilon v} x} |\theta(x)|_x \rho(x)\, dx \\
&\qquad \leq C(\varepsilon v) \int_U |\omega(y)|_y |\theta(s_{-\varepsilon v} y)|_{s_{-\varepsilon v} y} J_{\varepsilon v}(y) \rho(s_{-\varepsilon v} y)\, dy \\
&\qquad\qquad \leq C(\varepsilon v) C_2(\varepsilon v) \int_U |\omega(y)|_y |\theta(s_{-\varepsilon v} y)|_{s_{-\varepsilon v} y} \rho(y)\, dy,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где C_2 — функция вида

$$C_2(v) = \sup_{y \in U} \frac{\rho(s_{-v} y) J_v(y)}{\rho(y)}.$$

Взяв функцию $g(x)$, удовлетворяющую $\rho_\Psi(g) \leq 1$, получим

$$\rho_\Psi(g \circ s_{-\varepsilon v}) = \int_U \Psi(g(s_{-\varepsilon v}y))dy$$
$$= \int_U \Psi(g(z))|J_{\varepsilon v}(z)|dz \leq L_0(\varepsilon v) \int_U \Psi(g(z))dz,$$

где $L_0(v) = \sup\limits_{y\in U} |J_v(y)|$, и, следовательно, $\rho_\Psi(g \circ s_{-\varepsilon v}) \leq L_0(\varepsilon v)\rho_\Psi(g)$.

Возьмем $\lambda(x)$, удовлетворяющую $\rho_\Psi(\lambda) < \infty$, и положим

$$\tilde{\lambda}(y) = \begin{cases} \frac{\lambda(s_{-\varepsilon v}y)}{\rho_\Psi(\lambda\circ s_{-\varepsilon v})} & \text{если } \rho_\Psi(\lambda \circ s_{-\varepsilon v}) > 1; \\ \lambda(s_{-\varepsilon v}y) & \text{если } \rho_\Psi(\lambda \circ s_{-\varepsilon v}) \leq 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

Положим

$$L(v) = \max\{L_0(v), 1\}.$$

Если $\rho_\Psi(\lambda \circ s_{-\varepsilon v}) > 1$, то

$$\rho_\Psi(\tilde{\lambda}) = \int_U \Psi\left(\frac{|\lambda(s_{-\varepsilon v}y)|}{\rho_\Psi(\lambda \circ s_{-\varepsilon v})}\right) dy$$
$$\leq \frac{1}{\rho_\Psi(\lambda \circ s_{-\varepsilon v})} \int_U \Psi(|\lambda(s_{-\varepsilon v}y)|)dy \leq \frac{\rho_\Psi(\lambda \circ s_{-\varepsilon v})}{\rho_\Psi(\lambda \circ s_{-\varepsilon v})} = 1.$$

Продолжая (4.3) и положив $K_\theta := |\theta|$, можем заключить

$$C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v) \int_U |\omega(y)|_y |\theta(s_{-\varepsilon v}y)|_{s_{-\varepsilon v}y} \rho(y)\, dy$$
$$\leq C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v) \max\{\rho_\Psi(K_\theta \circ s_{-\varepsilon v}), 1\} \int_U |\omega(y)|_y \widetilde{K_\theta}(y)\rho(y)\, dy$$
$$\leq C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v) \max\{L_0(\varepsilon v)\rho_\Psi(\theta), 1\} \int_U |\omega(y)|_y \widetilde{K_\theta}(y)\rho(y)\, dy$$
$$\leq C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v) \int_U |\omega(y)|_y \widetilde{K_\theta}(y)\rho(y)\, dy$$
$$\leq \|\omega\|_\Phi \int_{\mathbb{R}^n} C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v)\tau(v),$$

где $\tilde{\theta}$ получено из θ по формуле (4.4). Последнее неравенство нам дает лемма 1.11. Взяв супремум по всем формам $\theta \in L^\Psi(U, \Lambda^k)$, удовлетворяющим $\rho_\Psi(\theta) \leq 1$, от выражения

$$\left|\int_U (S_\omega(x,\, \varepsilon v), \theta(x))_x \rho(x)\, dx\right|$$

и воспользовавшись (4.2), получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|S_\omega(x,\, \varepsilon v)\|_\Phi \tau(v) \le \|\omega\|_\Phi \int_{\mathbb{R}^n} C(\varepsilon v) C_2(\varepsilon v) L(\varepsilon v) \tau(v).$$

Таким образом, по лемме 1.12,

$$\|R_\varepsilon^* \omega\|_\Phi \le C_1(\varepsilon)\|\omega\|_\Phi,$$

где $C_1(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v)\tau(v)$.

Несложно видеть, что $C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда, если

$$|C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v) - 1| < \delta \quad \text{для } \varepsilon < \varepsilon(\delta)$$

то

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v)\tau(v) - 1\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v)\tau(v) - \int_{\mathbb{R}^n} \tau(v)\right|$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v) - 1|\,\tau(v) \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta\tau(v) \le \delta \quad \text{для } \varepsilon < \varepsilon(\delta).$$

Теперь можем заключить, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} C(\varepsilon v)C_2(\varepsilon v)L(\varepsilon v)\tau(v) \to 1 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

□

Лемма 4.7 *Для любого $\varepsilon > 0$ оператор A_ε^* отображает $L^\Phi(U, \Lambda^k)$ в $L^\Phi(U, \Lambda^{k-1})$ и*

$$\|A_\varepsilon^*\|_\Phi \le M_1(\varepsilon), \tag{4.5}$$

где $M_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Как и случае выше, по лемме 1.12, нам достаточно оценить

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_0^1 \|G_\omega(x,\, t,\, \varepsilon v)\|_\Phi dt \right) \tau(v).$$

Возьмем форму $\theta \in L^{\Psi}(U, \Lambda^k)$, удовлетворяющую $\rho_{\Psi}(\theta) \leq 1$. Имеем

$$\left|\int_U (G_\omega(x,\, t,\, \varepsilon v), \theta(x))_x \rho(x)\, dx\right| \leq \int_U |(G_\omega(x,\, t,\, \varepsilon v), \theta(x))_x| \rho(x)\, dx$$

$$\leq \int_U |G_\omega(x,\, t,\, \varepsilon v)|_x |\theta(x)|_x \rho(x)\, dx \leq \int_U M(\varepsilon v)|\omega(s_{t\varepsilon v}x)|_{s_{t\varepsilon v}x}|\theta(x)|_x \rho(x)\, dx$$

$$= \int_U M(\varepsilon v)|\omega(y)|_y |\theta(s_{-t\varepsilon v}y)|_x \rho(s_{-t\varepsilon v}y)|J_{s_{t\varepsilon v}}(y)|\, dy.$$

Используя лемму 4.5, аналогично тому как в доказательстве леммы 4.6, можем заключить, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \|G_\omega(x,\, t,\, \varepsilon v)\|_\Phi dt\, \tau(v) \leq \|\omega\|_\Phi \int_{\mathbb{R}^n} M(\varepsilon v) \int_0^1 C_2(t\varepsilon v) L(t\varepsilon v) dt\, \tau(v).$$

Положим

$$M_1(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} M(\varepsilon v) \int_0^1 C_2(t\varepsilon v) L(t\varepsilon v) dt\, \tau(v).$$

Поскольку $M(v) \to 0$ при $v \to 0$, то также и $M_1(v) \to 0$ при $v \to 0$. □

Замечание 4.8 *Первоначально в [22] операторы R_ε^* and A_ε^* определяются де Рамом на пространстве гладких форм с компактным носителем. Операторы R_ε и A_ε определяются на пространстве потоков, как сопряженные к R_ε^* и A_ε^*. Де Рамом было показано, что для симметричного ядра τ (что включает и наш случай),*

$$R_\varepsilon^* = R_\varepsilon \text{ и } A_\varepsilon^* = A_\varepsilon \tag{4.6}$$

на пространстве гладких форм с компактным носителем. В [1], равенства (4.6) были получены для случая $L^p(U, \Lambda^k)$. Рассуждения аналогичные приведенным в [1], показывают, что равенства (4.6) сохраняют свою силу и в пространствах Орлича $L^{\Phi}(U, \Lambda^k)$.

Укажем теперь основные конструкции де Рама, позволяющие распространить данные результаты на произвольное многообразие M. Выберем атлас на многообразии таким образом, чтобы для каждой карты $(U_i,\, \varphi)$ область U_i содержала единичный шар B. Для всех i произвольный поток

T можно представить как сумму двух потоков $T = T' + T''$ таким образом, что носитель потока лежит в $\varphi_i(U_i)$, а носитель T'' лежит $M\backslash\varphi_i(B)$. Определим теперь набор операторов, зависящих от набора неотрицательных параметров $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \dots,$

$$R_i T = \varphi_i^{-1}\mathfrak{R}_{\varepsilon_i}\varphi_i T' + T'',\ A_i T = \varphi_i^{-1}\mathfrak{A}_{\varepsilon_i}\varphi_i T';$$

где операторы $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$ для каждого i, определенные внутри B, строятся аналогично операторам R, A с той разницей, что носитель усредняющей функции считается определенным в ε_i-шаре, и мы используем вместо сдвига оператор

$$\mathfrak{s}_y = h s_y h^{-1},$$

где s_y — обычный сдвиг в $\mathbb{R}^n$, а h — гомеоморфизм класса C^∞ пространства $\mathbb{R}^n$ на B. Положим

$$R^k = R_1 R_2 \dots R_k \text{ и } A^k = R_1 R_2 \dots R_{k-1} A_k.$$

В окрестности любого компакта K операторы R_i сводятся к тождественному, а A_i к 0, когда i достаточно велико для того, чтобы K не пересекался с областью определения i карты. Следовательно, определены операторы

$$R = \lim_{i\to\infty} R^i \text{ и } A = \sum_{i=1}^{\infty} A^i,$$

причем существует такое число i_0, зависящее только от выбора K, такое, что при $i \geq i_0$

$$RT(\omega) = R^i T(\omega),\ AT(\omega) = \sum_{j=1}^{i} A^j T(\omega)$$

для любого потока T и любой формы ω с носителем в K.

Теперь сформулируем основные свойства операторов регуляризации де Рама

Теорема 4.9 *Пусть M — риманово многообразие. Существует последовательность операторов $R_{(i)}$, $A_{(i)}$ на пространстве потоков $\mathcal{D}'(M)$ таких, что*

(1) Оператор $R_{(i)}$ отображает $L^\Phi(M,\Lambda^k)$ в $L^\Phi(M,\Lambda^k)$ таким образом, что

$$\|R_{(i)}\|_\Phi \leq 1 + \frac{1}{i};$$

(2) Оператор $A_{(i)}$ отображает $L^\Phi(M,\Lambda^k)$ в $L^\Phi(M,\Lambda^{k-1})$ таким образом, что

$$\|A_{(i)}\|_\Phi \le \frac{1}{i};$$

(3) $R_{(i)}\omega$ — гладкая форма; если ω — гладкая форма, то $A_{(i)}\omega$ — гладкая;

(4) Если Φ — Δ_2-регулярная функция, то $R_{(i)}\omega \to \omega$ при $i \to \infty$ для всех $\omega \in L^\Phi(M,\Lambda^k)$;

Доказательство. (1)-(2) В силу оценок (4.1) и (4.5), можем выбрать сходящуюся последовательность параметров ε_ν, будем обозначать ее $\{\varepsilon^i_\nu\}$, так, что

$$\prod_{\nu=1}^{N}\|R^i_\nu\|_\Phi \le 1+\frac{1}{i},\quad \text{здесь оператор } R^i_\nu = R_\nu \text{ с параметром } \varepsilon^i_\nu < \frac{1}{i},$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\|R^i_1\|_\Phi\|R^i_2\|_\Phi\dots\|R^i_{\nu-1}\|_\Phi \le \frac{1}{i}$$

Таким образом, можем взять в качестве набора параметров $\{\varepsilon^i_1, \varepsilon^i_2, \dots\}$, и, соответственно,

$$R_{(i)} = \lim_{\nu\to\infty} R^i_1R^i_2\dots R^i_\nu,$$

$$A_{(i)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} R^i_1R^i_2\dots R^i_{\nu-1}A_\nu.$$

Согласно изложенному выше, операторы $R_{(i)}$ и $A_{(i)}$ отображают $L^\Phi(X,\Lambda^k)$ в $L^\Phi(X,\Lambda^k)$ и $L^\Phi(X,\Lambda^{k-1})$, соответственно, так, что $\|R_{(i)}\|_\Phi \le 1+\frac{1}{i}$, $\|A_{(i)}\|_\Phi \le \frac{1}{i}$.

(3) Доказано де Рамом для всех потоков ω на M.

(4) Свойство (5) операторов де Рама R из преамбулы данной главы влечет для любой гладкой формы ω с компактным носителем из M сходимость $R_{(i)}\omega \to \omega$ в пространстве форм с компактными носителями. Следовательно, для таких форм, мы имеем $R_{(i)}\omega \to \omega$ в $L^\Phi(X,\Lambda^k)$ для любой N-функции Φ. Поскольку Φ — Δ_2-регулярная функция, гладкие формы с компактным носителем плотны в $L^\Phi(X,\Lambda^k)$ (см. [29, стр. 65]). Пусть ω — произвольная форма из $L^\Phi(X,\Lambda^k)$ и пусть $\varepsilon > 0$. Выберем гладкую k-форму $\overline{\omega}$ с компактным носителем в M таку, что $\|\omega - \overline{\omega}\| < \frac{\varepsilon}{6}$.

В силу сказанного выше $R_{(i)}\overline{\omega} \to \overline{\omega}$ в $L^{\Phi}(X, \Lambda^k)$ при $i \to \infty$, и найдется $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\|R_{(i)}\overline{\omega} - \overline{\omega}\|_{\Phi} < \frac{\varepsilon}{2}$ для $i \geq i_0$. А, следовательно, и для $i \geq i_0$,

$$\begin{aligned} \|R_{(i)}\omega - \omega\|_{\Phi} &\leq \|R_{(i)}\omega - R_{(i)}\overline{\omega}\|_{\Phi} + \|R_{(i)}\overline{\omega} - \overline{\omega}\|_{\Phi} + \|\overline{\omega} - \omega\|_{\Phi} \\ &\leq (\|R_{(i)}\| + 1)\|\omega - \overline{\omega}\|_{\Phi} + \|R_{(i)}\overline{\omega} - \overline{\omega}\| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $R_{(i)}\omega \to \omega$ в $L^{\Phi}(X, \Lambda^k)$ при $i \to \infty$. □

4.4 L^{Φ}-Комплекс де Рама

Теорема 4.10 *Если Φ_1 и Φ_2 — Δ_2-регулярные функции и $\omega \in \Omega^k_{\Phi_1,\Phi_2}(M)$, то существуют коммутативные квадраты*

$$\begin{tikzcd} L^{\Phi_1}(M,\, \Lambda^k) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "R_{(i)}"'] & L^{\Phi_2}(M,\, \Lambda^{k+1}) \arrow[d, "R_{(i)}"] \\ L^{\Phi_1}(M,\, \Lambda^k) \arrow[r, "d"] & L^{\Phi_2}(M,\, \Lambda^{k+1}), \end{tikzcd}$$

а, следовательно, $R_{(i)}\omega \in \Omega^k_{\Phi_1,\Phi_2}(M)$ и $R_{(i)}\omega \to \omega$ в $\Omega^k_{\Phi_1,\Phi_2}(M)$.

Доказательство. Пусть ω — некоторая форма из $\Omega^k_{\Phi_1,\Phi_2}(X)$. Имеем $dR_{(i)}\omega = R_{(i)}d\omega$. Поскольку $d\omega \in L^{\Phi_2}(X, \Lambda^{k+1})$, очевидно, что $R_{(i)}d\omega \in L^{\Psi}(X, \Lambda^{k+1})$ и $dR_{(i)}\omega \in L^{\Phi_2}(X, \Lambda^{k+1})$. Следовательно, $R_{(i)}\omega \in \Omega^k_{\Phi_1,\Phi_2}(X)$. В силу свойства (4) теоремы (4.9) видим, что $R_{(i)}\omega \to \omega$ в $L^{\Phi_1}(X, \Lambda^k)$ и $R_{(i)}d\omega \to d\omega$ в $L^{\Phi_2}(X, \Lambda^{k+1})$, таким образом, $R_{(i)}\omega \to \omega$ в $\Omega^k_{\Phi_1,\Phi_2}(X)$. □

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 4.11 *Для любого гладкого риманова многообразия M и любых Δ_2-регулярных N-функций Φ_1 и Φ_2, гладкие формы лежащие в $\Omega^k_{\Phi_1,\Phi_2}(M)$ образуют плотное подмножество в $\Omega^k_{\Phi_1,\Phi_2}(M)$.*

Теорема 4.12 *Если Φ — Δ_2-регулярная функция, тогда имеет место следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] & \Omega^{k}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "A_{(i)}"'] & \Omega^{k+1}_{\Phi}(M) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "A_{(i)}"'] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}_{\Phi}(M) \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

и выполняется соотношение

$$R_{(i)} - \mathrm{id} = A_{(i)}d + dA_{(i)}.$$

Доказательство. Как было показано в [22],

$$R_{(i)}\omega - \omega = dA_{(i)}\omega + A_{(i)}d\omega$$

для всякой формы ω на M. Поскольку $R_{(i)}\omega,\ \omega,\ A_{(i)}d\omega \in L^{\Phi}(M, \Lambda^k)$ для $\omega \in \Omega^k_{\Phi}(M)$, мы имеем $dA_{(i)}\omega \in L^{\Phi}(M, \Lambda^k)$. По свойству (1) теоремы (4.9), $A_{(i)}\omega \in L^{\Phi}(M, \Lambda^k)$. Таким образом, $A_{(i)}\omega \in \Omega^k_{\Phi}(M)$. □

Рассмотрим следующие пространства

$$\begin{tikzcd}
 & B^k_{\Phi}(M) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{im}\, d"] & Z^k_{\Phi}(M) \arrow[d, "\ker d"] & & \\
\ldots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_{\Phi}(M) \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Omega^k_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}_{\Phi}(M) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Символом $\overline{B}^k_{\Phi}(M)$ будем обозначать замыкание множества $B^k_{\Phi}(M)$ в пространстве $L^{\Phi}(M, \Lambda^k)$. Факторпространства

$$H^k_{\Phi}(M) := Z^k_{\Phi}(M)/B^k_{\Phi}(M)$$

и

$$\overline{H}^k_{\Phi}(M) := Z^k_{\Phi}(M)/\overline{B}^k_{\Phi}(M)$$

называют k-ми *L_{Φ}-когомологиями* и, соответственно, k-ми *редуцированными L_{Φ}-когомологиями* риманова многообразия M.

В цепном комплексе $\{\Omega^*_{\Phi}(M), d\}$ рассмотрим его подкомплекс $\{\Omega^*_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M), d\}$, состоящий из всех гладких форм в $\{\Omega^*_{\Phi}(M), d\}$, и обозначим когомологии этого комплекса $H^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M)$. В силу сказанного выше, отображение $R_{(i)}$ порождает морфизм данных комплексов, т. е. все квадраты в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "R_{(i)}"'] & \Omega^k_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "R_{(i)}"'] & \Omega^{k+1}_{\Phi}(M) \arrow[r] \arrow[d, "R_{(i)}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

коммутативны.

Как известно из гомологической алгебры, операция взятия k-когомологий коцепного комплекса

$$H^k\colon \{\Omega^*(M),\, d\} \to H^k(M)$$

задана ковариантным функтором из категории комплексов над абелевой категорией в саму эту категорию. Другими словами, $R_{(i)}$ индуцирует корректное отображение когомологий. Действительно, в силу универсальности ядра и коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
Z^k_\Phi(M) \arrow[d, "\ker d"] & \\
\Omega^k_\Phi(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "R_{(i)}"'] & \Omega^{k+1}_\Phi(M) \arrow[d, "R_{(i)}"'] \\
\Omega^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \\
Z^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[u, "\ker d"'] &
\end{tikzcd}$$

$Z^k_\Phi(M)$ пропускается через $Z^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M)$:

$$\begin{tikzcd}
 & Z^k_\Phi(M) \arrow[dl] \arrow[d, "R_{(i)}"] & \\
Z^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r, "\ker d"] \arrow[d] & \Omega^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r, "d"] & 0 \\
H^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) & &
\end{tikzcd}$$

То есть имеем морфизм

$$Z^k_\Phi(M) \to H^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M).$$

Далее, в силу коммутативности квадрата

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{k-1}_\Phi(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "R_{(i)}"'] & \Omega^k_\Phi(M) \arrow[d, "R_{(i)}"'] \\
\Omega^{k-1}_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M)
\end{tikzcd}$$

имеем коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
B^k_\Phi(M) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "R_{(i)}"'] & Z^k_\Phi(M) \arrow[d] & \\
B^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Z^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \arrow[r] & H^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M)
\end{tikzcd}
$$

и, следовательно, морфизм $B^k_\Phi(M) \to H^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M)$ — нулевой. Таким образом морфизм комплексов порождает корректное отображение когомологий. Суммируем изложенное выше в следующем утверждении:

Теорема 4.13 *Если Φ — Δ_2-регулярная N-функция, то построенное выше отображение $H^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \to H^k_\Phi(M)$ — изоморфизм.*

Заключение

В диссертационной работе развиваются методы дискретного гармонического анализа в пространствах Орлича, что является логичным обобщением теории гармонического и p-гармонического анализа. Описание первых когомологий групп с помощью гармонических функций развивает идеи теории Ходжа и позволяет с большой наглядностью проиллюстрировать связь первых групповых когомологий с комбинаторно-геометрическими свойствами графа Кэли, соответствующего группе.

Теорема о свойствах операторов регуляризации показывает, что данные операторы задают гомотопию L^Φ-комплекса де Рама и его подкомплекса, состоящего из гладких форм, что позволяет установить изоморфизм L^Φ-когомологий и L^Φ-когомологий, взятых по гладким формам.

Литература

[1] Гольдштейн В.М., Кузьминов В.И., Шведов И.А., *Об одном свойстве операторов регуляризации Де Рама*// Сибирский математический журнал. —1984. Том 25, № 2. —С. 104–111.

[2] Степовой Д. В. *Модели и алгоритмы решения задач математической физики на ориентированных графах и их приложение в квантовой механике*, автореферат диссертации на соискание ученой степени канд.физ.-мат.наук, Ростов-на-Дону, 1998.

[3] Bourdon M., Martin F. and Valette A., *Vanishing and non-vanishing for the first* L^p*-cohomology of groups*// Comm. Math. Helv. —2005. Vol. 80, no. 2. —P. 377-389

[4] Dodziuk J., *Difference Equations, Isoperimetric Inequality and Transience of Certain Random Walks*// Transactions of the American Mathematical Society. —1984. Vol. 284, no. 2. —P. 787–794.

[5] Dodziuk J., *Laplacian on manifolds and analogous difference operator for graphs*// Contemp. Math. —1986. Vol. 49. —P. 45–49.

[6] Dodziuk J., Karp L., *Spectral and function theory for combinatorial Laplacians*// Contemp. Math. —1988. Vol. 73. —P. 25–40.

[7] Holopainen I, Soardi P.M., *p-harmonic functions on graphs and manifolds*// Manuscripta mathematica. —1997. Vol. 94, issue 1. —P. 95–110.

[8] Kamińska A., Musielak J., *On convolution operator in Orlicz spaces*// Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid. —1989. Vol. 2, suppl. —P. 157–178.

[9] Kanai M., *Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds*// Journal of the Mathematical Society of Japan. —1986. Vol. 38, no. 2. —P. 227–238.

[10] Kleiner B., *A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth*// Journal of the Amer. Math. Soc. —2010. Vol. 23, no. 3. —P. 815–829.

[11] Martin F., Valette A., *On the first L^p-cohomology of discrete groups*// Groups Geom. Dyn. —2007. Vol. 1, no. 1. —P. 81–100.

[12] Pagliacci M., *Heat and wave equation on homogeneous trees*// Boll. Un. Mat. Ital. —1993. Vol. A(7). —P. 37–45.

[13] Puls M., *The first L^p-cohomology of some finitely generated groups and p-harmonic functions*// J. Funct. Anal. —2006. Vol. 237, no. 2. —P. 391–401.

[14] Rao M.M., *Almost every Orlicz space is isomorphic to a strictly convex Orlicz space*// Proc. Am. Math. Soc. —1968. Vol. 19. —P. 377–379.

[15] Rao M.M., *Convolutions of vector fields. III: Amenability and spectral properties*, in: *Rao M. M. (ed.), Real and Stochastic Analysis. New Perspectives*// Trends in Mathematics, Birkhäuser. Boston, MA (2004). —P. 375–401.

[16] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В., *Курс метрической геометрии*// Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004

[17] Зорич В.А., *Математически анализ*, часть I// М.: Наука, 1981

[18] Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б., *Выпуклые функции и пространства Орлича*// М.: ГИФМЛ, 1958.

[19] Кутателадзе С.С., *Основы функционального анализа*// Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.

[20] Bekka B., de la Harpe P., and Valette A., *Kazhdan's Property (T)*// Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.

[21] Brown K., *Cohomology of Groups*// New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[22] de Rham G., *Variétés Différentiables. Formes, Courants, Formes Harmoniques*// Paris: Hermann, 1955.

[23] Ekeland I., Témam R., *Convex Analysis and Variational Problems*// Classics in Applied Mathematics. 28. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

[24] Guichardet A., *Cohomologie des Groupes Topologiques et des Algèbres de Lie*// Paris: Cedic/Nathan, 1980.

[25] Hardy G.H., Littlewood J.E. and Pólya G., *Inequalities*// Cambridge, Engl.: At the University Press, 1952.

[26] Iwaniec T., Martin G., *Geometric Function Theory and Nonlinear Analysis*// Oxford: Oxford University Press, 2001.

[27] Lubotzky A., *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures*// Basel: Birkhauser, 2010.

[28] Musielak J., *Orlicz Spaces and Modular Spaces*// Lecture Notes in Mathematics, 1034. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983.

[29] Rao M.M., Ren Z.D., *Theory of Orlicz Spaces.*// Pure and Applied Mathematics, 146. New York etc.: Marcel Dekker, 1991.

[30] Rao M.M., Ren Z.D., *Applications of Orlicz Spaces*// Pure and Applied Mathematics, 250. New York, NY: Marcel Dekker, 2002.

[31] Soardi P., *Potential Theory on Infinite Networks*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1590, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Работы автора по теме диссертации:

[32] Копылов Я.А., Паненко Р.А., Φ-*гармонические функции на дискретных группах и первые* ℓ^Φ-*когомологии*// Сибирский математический журнал. —2014. Том 55, № 5. —С. 1104–1117.

[33] Паненко Р.А., Φ-*гармонические функции на графах*// Сибирские электронные математические известия. —2017. Том 14. —С. 1–9.

[34] Kopylov Ya. A., Panenko R. A., *De Rham regularization operators in Orlicz spaces of differential forms on Riemannian manifolds*// Сибирские электронные математические известия. —2015. Том 12. — С. 361–371.