Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 517.518+517.54

Меновщиков Александр Викторович

Операторы композиции в пространствах Соболева — Орлича

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Водопьянов Сергей Константинович

Новосибирск — 2018

Оглавление

Введение

В данном диссертационном исследовании проводится изучение ограниченных операторов композиции в пространствах Соболева — Орлича, а также отображений, порождающих такие операторы (отображение $\varphi : D \to D'$ порождает оператор композиции φ^* по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$ для любой $f : D' \to \mathbb{R}$).

Для получения описания исследуемых объектов решается несколько задач.

1) Нахождение необходимых и достаточных условий, при которых гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, где D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$. Заметим, что если N-функции M, M_1, определяющие пространства Соболева — Орлича, задаются равенством $M(u) = u^q$, $M_1(u) = u^p$, где $1 \leq q \leq p < \infty$, то задача сводится к случаю пространств Соболева L^1_p.

2) Описание свойств регулярности обратного отображения к гомеоморфизму класса Соболева — Орлича W^1_M (порождающего ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$) по известным свойствам регулярности прямого отображения. В качестве следствия доказывается теорема об условиях, при выполнении которых обратный гомеоморфизм порождает ограниченный оператор композиции другой пары пространств Соболева — Орлича, определяемой по первой.

3) Изучение вопроса о полунепрерывности снизу коэффициента искажения класса отображений, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича. Установление данного свойства для класса отображений играет важную роль в исследовании вариационных задач, в частности задач теории упругости. В настоящей работе оно применяется для доказательства существования решения задачи минимизации функционала энергии.

Обзор темы диссертационного исследования

Существуют различные способы построения новых отображений, удовлетворяющих некоторым условиям, по уже имеющимся отображениям $f : A_1 \to B_1$ и $\varphi : A_2 \to B_2$. Один из основных таких способов — получить их композицию $f \circ \varphi$, то есть новое отображение

$h : f^{-1}(A_2) \to B_2$, действующее по правилу $h(x) = f(\varphi(x))$. Если рассмотреть f как элемент некоторого функционального пространства, заданного на области определения отображения φ, то преобразование функции f в $f \circ \varphi$ будет линейным оператором. Такой оператор называют оператором композиции, порожденным отображением φ, и обозначают C_φ или φ^* (в данной работе будет использоваться второй вариант). Естественным образом возникает задача установления соотношения между свойствами данного оператора и порождающего его отображения.

В истории изучения операторов композиции можно выделить три основных направления, которые возникли при решении прикладных задач в различных областях. Первое направление стало развиваться после публикации Е. Шредером в 1871 г. одной из наиболее ранних работ по теории операторов композиции [1], в которой он изучает следующую задачу: *определить функцию f и константу α такие, что $(f \circ T)(z) = \alpha f(z)$ для всех z из соответствующей области, в которой определена функция T*. Решение этой задачи было предложено в статье [2] в 1884 году. В дальнейшем изучение операторов композиции в случае, когда порождающее его отображение является голоморфной функцией и действует между областями в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}^n$, стало классическим для данной теории. Первое систематическое исследование по данному направлению приведено в работе Г. Шварца 1969 года [3]. В последние годы изучение оператора композиции, порожденного голоморфным отображением, проводилось в различных функциональных пространствах (пространства H_p, пространства Бергмана и общие пространства Харди). В качестве современных работ в данном направлении можно привести статьи С. Стевича [4–6], в которых изучается ограниченность и компактность оператора, действующего из смешанного пространства в пространство типа Блоха и Бергмана, а также рассмотрен случай весового оператора композиции. Необходимость изучения оператора композиции в указанных выше пространствах возникает при решении задач теории дифференцируемых динамических систем, статистической механики и теории обобщенных функций (см., например, [7, 8]).

Следующее крупное направление связано с задачами топологической динамики, теории групп преобразований и изучением непрерывных функций. Объектом исследования в нем является оператор на топологических пространствах, порожденный непрерывным отображением. В качестве примера приведем работы [9–11].

Третьим направлением в изучении операторов композиции является рассмотрение операторов, действующих на пространствах с мерой и порожденных измеримым отображением. Вопросы о свойствах таких операторов возникают в теории энтропии, эргодической теории и классической механике (см. [12, 13]). В первую очередь такие операторы рассматривались на пространствах L_p (одним из наиболее ранних систематических изложений исследований в данном направлении являются работы Нордгрена и Риджа [14,15]). Естественным развитием даной тематики является варьирование исходных функциональных пространств.

Особый интерес при обзоре тематики данного диссертационного исследования представляют работы С.К. Водопьянова и А.Д. Ухлова [16–21], которые также можно отнести к третьему направлению. В них были получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие ограниченность оператора композиции на пространствах Соболева L^1_p. Приведем этот результат (функция искажения, используемая в формулировке утверждения, будет определена ниже)

Теорема 0.1 ([18]). *Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ (D, D' — области в $\mathbb{R}^n$) порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \leq q \leq p < \infty,$$

по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) *φ принадлежит $\mathrm{ACL}(D)$ (абсолютно непрерывно на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси и имеющих непустое пересечение с D);*

2) *φ имеет конечное искажение (частные производные обращаются в нуль почти всюду на множестве нулей якобиана);*

3) *функция искажения $K_\varphi(\cdot)$ принадлежит $L_\varkappa(D')$, где $\varkappa = \frac{pq}{p-q}$ при $q < p < \infty$ и $\varkappa = \infty$ при $p = q < \infty$.*

Норма оператора φ^* эквивалентна $\|K_\varphi(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\|$.

Отображения, обладающие такими свойствами, называются отображениями с ограниченным (p,q)-искажением, и при $p = q = n$ этот класс совпадает с классом квазиконформных отображений (см. [18]). История установления такой связи между теорией операторов композиции на пространствах Соболева и квазиконформным анализом берет начало в работах, направленных на решение задачи, сформулированной Ю.Г. Решетняком в 1968: требовалось описать все изоморфизмы φ^* однородных пространств Соболева L^1_n, порожденных квазиконформными отображениями φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ (см. [22]). Решение данной проблемы было предложено в [23], а именно:

Теорема 0.2 ([23]). *Пусть $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ и D' — ограниченная область. Для всякого структурного изоморфизма $\varphi^* : L^1_n(D') \to L^1_n(D)$ существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям:*

1) *область* $\varphi(D)$ $(1,n)$*-эквивалентна* D'*;*

2) *для всякой функции* $f \in L^1_n(D')$ $(\varphi^* f)(x) = f(\varphi(x))$ *почти всюду.*

Далее, в статье [24] был исследован случай пространств L^1_p, $p > n$. В статье [25] был получен результат для $1 \leq p < \infty$, $p \neq n$:

Теорема 0.3 ([25])**.** *Отображение* $\varphi : D \to D'$ *индуцирует изоморфизм* $\varphi^* : W^1_n(D') \to W^1_n(D)$*,* $1 \leq p < \infty$*,* $p \neq n$ *тогда и только тогда, когда* φ *совпадает п. в. с некоторой квазиизометрией* $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$*, для которой области* $\Phi(D)$ *и* D' $(1,p)$*-эквивалентны.*

В изначальной постановке задачи в ее условиях не предполагалось существование отображения, порождающего оператор φ^*, что связывает ее с теоремой Банаха-Стоуна: *Пусть* $H : C(S) \to C(T)$ *— изоморфизм, тогда существует гомеоморфизм* $h : T \to S$ *такой, что*

$$(Hf)(t) = f(h(t)), \quad t \in T, \quad f \in C(S).$$

Подход к решению задачи Ю.Г. Решетняка, найденный в [23–25] позволил изменить исходную формулировку и рассмотреть следующую проблему: описать метрические и аналитические свойства отображений, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева L^1_p. В результате развития данного направления возникла и задача, исследованная в серии работ [17–21]. Важно подчеркнуть, что одной из основных характеристик исследованных отображений является свойство конечности искажения: частные производные обращаются в нуль почти всюду на множестве нулей якобиана. Этот факт позволяет установить связь теории операторов композиции на пространствах Соболева с еще одним важным направлением современного математического анализа — с теорией отображений с ограниченным искажением и их обобщениями.

Теория отображений с ограниченным искажением развивалась как многомерное обобщение теории аналитических функций и берет свое начало в работах Ю.Г. Решетняка [26–37]. В них исследовались отображения $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющие условию

$$|D\varphi(x)|^n \leq K J(x,\varphi) \text{ для почти всех } x \in D$$

для некоторого числа $1 \leq K < \infty$ (здесь и далее символом $D\varphi$ будем обозначать матрицу Якоби, $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$ — её определитель, а символом $|D\varphi(x)| = \sup\limits_{h \in \mathbb{R}^n, |h|=1} |D\varphi(x)h|$ операторную норму матрицы). Отметим, что рассматриваемые Г. Грёчем [38], Л. Альфорсом [39] и М.А. Лаврентьевым [40] квазиконформные отображения совпадают с классом гомеоморфизмов, обладающих ограниченным искажением. Подробное исследование данного класса отображений можно найти в [41–44].

Интерес к изучению таких отображений был вызван в частности тем, что некоторые их свойства, такие как непрерывность, открытость, дискретность, N и N^{-1}- свойства Лузина, отвечают требованиям, предъявляемым в теории упругости к деформациям твердого тела. Однако условие ограниченности искажения слишком обременительно в большинстве реальных задач. Следовательно, возникла необходимость определения менее жестких условий, но все еще позволяющих установить аналогичные топологические свойства отображений. Таким обобщением и стали отображения с конечным искажением.

Класс отображений с конечным искажением был введен и впервые изучен в диссертации С.К. Водопьянова [45] и работе [46]. Были рассмотрены отображения $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ такие, что $J(x,\varphi) \geq 0$ почти всюду в D и

$$|D\varphi(x)|^n \leq K(x)J(x,\varphi) \text{ для почти всех } x \in D,$$

где $1 \leq K(x) < \infty$ почти всюду в D.

Для таких отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ в [46] было доказано, что они непрерывны и имеют монотонные компоненты. Название данного класса было предложено позднее, в 1993 г., в работе [47]. Топологические свойства отображений с конечным искажением, аналогичные полученным Ю.Г. Решетняком, установлены в статье [48]:

Теорема 0.4. *Пусть $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$, $J(x,\varphi) \geq 0$ п.в. в D — непостоянное отображение с конечным искажением, коэффициент искажения которого $K_\varphi \in L_{s,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда если $s > n-1$, то отображение φ непрерывно, открыто и дискретно.*

Далее было установлено N-свойство Лузина [49]. Более простое доказательство данного факта содержится в [50, 51]. Обзор основных результатов, полученных для отображений с конечным искажением, приведен в монографии [52].

Естественным продолжением приведенных исследований является изучение свойств отображений, порождающих операторы композиции в других функциональных пространствах «соболевского типа». В даннй диссертации проводится изучение таких операторов в пространствах Соболева-Орлича. Пространства Орлича обобщают L_p пространства и более тонко учитывают характер функций, их составляющих.

Одним из фундаментальных результатов в теории L_p-пространств является доказанная в 1910 году Ф. Риссом (см. [53]) теорема о том, что $(L_p)^* = L_{p'}$, где p' — двойственный к p

индекс, то есть $1/p + 1/p' = 1$. Для доказательства этого факта используется неравенство $uv \leq u^p/p + v^{p'}/p'$, $u,v \geq 0$. В 1912 г. в работе [54] это неравенство было обобщено У. Юнгом на случай выпуклых функций $(uv \leq M(u)+M^*(v))$. На основании этих результатов в 1931 г. З. Бирнбаум и В. Орлич опубликовали работу [55], заложившую основу теории двойственных функций и в дальнейшем приведшую к введению пространств Орлича.

В 1932 году В. Орлич в статье [56], используя понятие двойственной функции, дает определение пространств L_M, снабжая их следующей нормой

$$\|u\| = \sup_{\substack{v \in \tilde{L}_M(D) \\ \mathcal{I}(v;M^*) \leq 1}} \left| \int_D u(x)v(x)dx \right|.$$

В изначальных предположениях Орлича функция M должна была удовлетворять Δ_2-условию (распространение на более широкий класс было получено в 1936 году в работе [57]). Впервые термин «пространство Орлича» был использован в 1949 году в работе [58] А. Заанена. В 1950 Х. Накано, а в 1955 В. Люксембург (см. [59, 60]) предложили второй метод введения нормы в пространстве L_M, основанный на использовании функционала Минковского и позволяющий проводить ее фактическое вычисление. Несмотря на то, что в работах Х. Накано такая норма была введена на 5 лет раньше, ее принято называть «нормой Люксембурга». Дальнейшее развитие теории пространств Орлича велось шестью математическими школами:

1) Саппоро (Япония), была основана Х. Накано. Основным объектом изучения является общая теория модулярных пространств (см., например [59]);

2) Воронеж (СССР), была основана М.А. Красносельским и Я.Б. Рутицким, исследовавшими общие вопросы теории пространств Орлича и их применения к теории интегральных уравнений [61];

3) Лейден (Нидерланды), основанная А. Зааненом и В. Люксембургом, изучавшими возможные обобщения пространств Орлича и общими вопросами банаховых функциональных пространств [62–64];

4) Познань (Польша), основанная В. Орличем и Я. Муселаком. Проводились изучения теории модулярных пространств, а также структуры пространств Орлича и их обобщений на случай невыпуклых порождающих функций [65];

5) Иерусалим (Израиль), была основана Й. Линденштрауссом и Л. Тзафрири, изучавшими банаховы пространства методами геометрического анализа [66];

6) Харбин (КНР) — изучались некоторые тонкие свойства пространств Орлича [67].

В качестве одних из наиболее ранних работ, в которых возникают пространства Соболева — Орлича, можно привести монографию Ю. Дубинского [68], статьи Т.К. Дональдсона и Н.С. Трюденгера [69, 70], а также работы Р. Адамса [71, 72]. Рассмотрение пространств Соболева — Орлича вместо классических соболевских пространств позволило получить более точные теоремы вложения [70] (окончательный результат получен в терминах пространств Орлича — Лоренца, см. [73]). Другой важной изначальной мотивировкой рассмотрения такого обобщения было решение задачи Дирихле для эллиптических операторных уравнений (см., например [74]).

Изучение приведенных выше работ позволяет сделать вывод о том, какого рода улучшения и уточнения по сравнению со случаем L_p возможно получить при использовании пространств Орлича. В рамках даннй диссертационной работы мы описываем необходимые и достаточные условия, при которых отображение φ порождает ограниченный оператор композиции пространств Орлича и Соболева — Орлича. Полученные результаты используются для изучения регулярности отображений, обратных к гомеоморфизмам класса Соболева — Орлича. Далее исследуется свойство замкнутости относительно локально равномерной сходимости отображений, порождающих оператор φ^*, необходимое для решения вариационных задач теории упругости. Обобщение полученных в работах [75, 76] результатов в этом направлении даст возможность изучить аналогичные проблемы теории упругости для более широкого класса отображений.

Отметим, что в работе [77] также проводилось изучение ограниченности оператора композиции в пространствах Соболева — Орлича, но исходная постановка задачи была несколько иной. В главе 2 приводится сравнение полученных в [77] результатов с результатами, полученными в настоящей работе.

Структура диссертации и обзор результатов

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 124 наименования и приведен в порядке цитирования. Общий объем диссертации составляет 98 страниц.

Все утверждения (теоремы, леммы, предложения, следствия, замечания) и формулы пронумерованы двумя числами: первое обозначает номер главы, второе — порядковый номер утверждения в данной главе.

В **главе 1** диссертационного исследования вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения. В **параграфе 1.1** приводятся основные сведения из теории выпуклых функций и вводятся используемые в работе обозначения. Далее определяются пространства Орлича L_M, приводятся их свойства, используемые в диссертации, а так же доказываются оценки на норму Люксембурга для специальных классов N-функций, определяющих пространство L_M. **Параграф 1.2** посвящен описанию пространств Соболева — Орлича W^1_M и L^1_M и формулировке их основных свойств. Приводится теорема вложения, аналогичная классической теореме Соболева. Кроме того, доказывается один из вариантов неравенства Пуанкаре, применяемый в дальнейшем. В **параграфе 1.3** приводится определение класса ACL и аппроксимативной дифференцируемости. Для аппроксимативно дифференцируемых функций приводится формула замены переменной. Также вводится определение, играющее важную роль во всем дальнейшем изложении:

Определение 1.10. *Отображение $\varphi : D \to D'$ имеет конечное искажение (коискажение), если $D\varphi(x) = 0$ ($\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$) почти всюду на множестве*

$$Z = \{x \in D \mid J(x,\varphi) = 0\}.$$

Условие конечности искажения означает, что частные производные отображения обращаются в ноль почти всюду на множестве нулей Якобиана $J(x,\varphi)$.

В **параграфе 1.4** дается определение и формулируются основные свойства квазиаддитивных функций множеств, определяются их верхняя и нижняя производные, а также приводятся две леммы о покрытии, связанные с определяемыми функциями. Сведения, приводимые в **параграфе 1.5**, необходимы для формулировки и доказательства утверждений главы 4 и главы 5. В нем вводится понятие кусочной (biting) сходимости и отмечаются ее некоторые важные свойства. Кроме того, для удобства читателя, в **параграфе 1.5** приводится формулировка теоремы Мазура о слабой сходимости.

В **главе 2** определяются необходимые и достаточные условия, при которых гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, где D,D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, порождает ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D), \quad \varphi^* f = f \circ \varphi.$$

На первом шаге, в **параграфе 2.1**, исследуется задача об ограниченности оператора композиции в пространствах Орлича. Устанавливается справедливость следующих утверждений (далее коэффициенты α, β, γ, связанные с N-функциями M, M_1, M_2, определяются из условий (2.3)):

Теорема 2.4. *Пусть измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D)$ и N-функции M, M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда*

$$J^{\frac{1}{\alpha}}(y, \varphi^{-1}) \in L_\gamma(D').$$

Достаточные условия, выраженные через объемную производную обратного отображения, могут быть получены без наложения дополнительных ограничений на N-функции.

Теорема 2.5. *Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D)$, если*

$$J(y, \varphi^{-1}) \in L_{F^*}(D'),$$

где $F^*(u)$ — функция, дополнительная к функции $F(u) = M_1(M^{-1}(u))$.

Полученные результаты сравниваются с теоремой, полученной ранее группой авторов в статье [78]. Утверждения, доказанные в **параграфе 2.1**, являются отправной точкой в решении основной задачи **главы 2** в случае пространств Соболева — Орлича. Они позволяют выявить базовые ограничения на N-функции, определяющие исследуемые пространства, связанные только с особенностями пространств Орлича.

В **параграфе 2.2** формулируются основные положения **главы 2**. Нам потребуется следующее определение:

Определение 2.1. *Для гомеоморфизма $\varphi : D \to D'$ будем рассматривать операторные функции искажения:*

$$K_M(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi|(x)}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}, & \text{если } J(x,\varphi) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$K_\alpha(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{(M(|D\varphi|(x)))^{1/\alpha}}{|J(x,\varphi)|^{1/\beta}}, & \text{если } J(x,\varphi) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В первую очередь доказывается следующая вспомогательная теорема:

Теорема 2.6. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, функции M и M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда*

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')} \left(C \frac{\|\varphi^* f \mid L^1_M(\varphi^{-1}(A'))\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')\|} \right)^\gamma,$$

где C — некоторая постоянная, является ограниченной монотонной счетно аддитивной функцией, определенной на открытых множествах из области D'.

Используя приведенную теорему устанавливается следующий результат:

Теорема 2.7. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ и N-функции M, M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда верны следующие утверждения:*

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$;

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

4) *конечна величина $K_{\varphi,\alpha} = \|K_\alpha(\cdot, \varphi) \mid L_\gamma(D)\|$ ($K_{\varphi,\alpha} = \|K_\alpha(\cdot, \varphi) \mid L_\infty(D)\|$ при $M = M_1$).*

Достаточные условия удается получить для N-функций несколько иного класса.

Теорема 2.8. *Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$, если функция M_1 удовлетворяет Δ'-условию и выполнены следующие требования:*

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$;

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

3) *конечна величина $K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot, \varphi) \mid L_{M_2}(D)\|$ ($K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot, \varphi) \mid L_\infty(D)\|$ при $M = M_1$).*

Далее, оператор φ^* теорем 2.7 и 2.8 распространяется на все пространство $L^1_{M_1}$. Для этого доказывается несколько утверждений, имеющих независимый интерес. В результате, формулируется следующее предложение:

Теорема 2.1. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$. Тогда распространение этого оператора по непрерывности совпадает с оператором композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$.*

Параграф 2.2 завершается сравнением полученных результатов с результатами работы [77].

В **параграфе 2.3** рассмотрены случаи более строгих ограничений на N-функции, определяющие пространства Соболева — Орлича, а именно функции вида

$$\text{гл. часть } M(u) = Q(u) = Cu^\alpha (\ln u)^{a_1} (\ln \ln u)^{a_2} ... (\ln ... \ln u)^{a_n},$$

и N-функции, удовлетворяющие Δ'-условию. Это позволяет приблизить необходимые условия к достаточным. Особый интерес представляет теорема 2.12.

Теорема 2.12. *Пусть функции M и M_1 удовлетворяют Δ'-условию и выбраны так, что функция M_2 из равенств* (1.7) *также удовлетворяет Δ'-условию. Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$*;*

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

3) *конечна величина $K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}\|$ ($K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_\infty\|$ при $M = M_1$).*

Норма оператора $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ эквивалентна величине $K_{\varphi,M}$, а именно $\alpha K_{\varphi,M} \le \|\varphi^*\| \le K_{\varphi,M}$, где α — положительная постоянная.

Основной задачей **главы 3** является определение условий для гомеоморфизма $\varphi \in W^1_M$, обеспечивающих регулярность обратного отображения. В **параграфе 3.1** проведен анализ направлений изучения свойств обратного отображения по известным свойствам прямого. Определены основные подходы к решению таких задач и сформулированы основные результаты по каждому направлению.

В **параграфе 3.2** формулируются основные результаты **главы 3**.

Введем следующую функцию искажения для отображения $\varphi : D \to D'$:

$$\mathcal{K}_M(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{adj} D\varphi|(x)}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{n-1}}, & \text{если } J(x,\varphi) \ne 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказывается следующая теорема:

Теорема 3.5. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi \in W^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$*, где N-функция M удовлетворяет условиям теоремы 3.4;*

2) *φ имеет конечное коискажение;*

3) $\mathcal{K}_{\varphi,M} = \|\mathcal{K}_M(\cdot,\varphi) \mid L_{F_2}(D)\| < \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{F_1,\mathrm{loc}}(D')$*;*

5) *φ^{-1} имеет конечное искажение;*

6) $K_{\varphi^{-1},F_1} = \left\| \frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2}(D') \right\| < \infty$.

Здесь N-функции F, F_2 определяются равенствами:

$$F^{-1}(u) = u(M^{-1}(1/u))^{n-1}, \quad F_2(u) = M_2(u^{\frac{1}{n-1}}),$$

а функция F_1 определяется из равенств:

$$F(u) = F_1(2F_3(u)), \quad F_2(u) = F_1(2F_3^*(u)).$$

Приводится пример, в котором в явном виде определяются функции F, F_1, F_2 по известным функциям M и M_1.

С помощью установленных результатов **параграфа 3.2** в **параграфе 3.3** доказываются теоремы об обратимости оператора композиции для разных классов N-функций. Приведем один из них.

Теорема 3.7. *Пусть функции M и M_1 удовлетворяют Δ'-условию. Пусть, кроме того, N-функция M удовлетворяет условиям теоремы 3.4. Если гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$$

и имеет конечное коискажение, то обратное отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ порождает ограниченный оператор композиции

$$(\varphi^{-1})^* : L^1_F(D) \to L^1_{F_1}(D')$$

и имеет конечное искажение.

На следующем этапе диссертационного исследования, в **главе 4**, рассматривается вопрос о полунепрерывности коэффициентов искажения изученных ранее отображений. Приведен краткий обзор результатов, связанных с доказательством свойства замкнутости для различных классов отображений. Данное свойство играет важную роль при решении задач теории упругости. В частности, приводимая теорема 4.2 и аналогичные результаты для других классов отображений необходимы для доказательства существования решения задачи минимизации функционала энергии. В настоящей работе мы получаем подобные свойства для некоторого класса гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича. В формулируемом ниже результате предполагаем, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, а функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ'-условию. Кроме того, функция $M_2(u)$, определяемая равенствами (1.7) также должна удовлетворять Δ_2-условию.

Теорема 4.4. *Пусть сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы последовательности* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varphi_k : D \to D'$, *удовлетворяют условиям теоремы 2.8. Пусть также* $\{\varphi_k\}$ *локально равномерно сходится к гомеоморфизму* $\varphi_0 : D \to D'$, *а* $\{D\varphi_k\}$ *сходится слабо к некоторой вектор-функции* $u \in L^1_M(D)$ *и, кроме этого,*

1) *существует ограниченная в* $L_{M_2}(D)$ *последовательность функций* $G_k \in L_{M_2}(D)$, *такая, что*

$$K_M(x,\varphi_k) \le G_k(x)$$

для почти всех $x \in D$, *если* $M < M_1$;

2) *существует ограниченная последовательность* $G_k > 0$ *такая, что*

$$K_{\varphi_k,M}(D) \le G_k,$$

если $M = M_1$.

Тогда существует функция $G \in L_{M_2}$ *такая, что некоторая подпоследовательность функций* $M_2(G_k)$ *сходится в кусочном смысле к* $M_2(G)$. *Кроме того, предельное отображение* φ_0 *сохраняет ориентацию и порождает ограниченный оператор композиции* $\varphi_0^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, *причем*

1) $K_\alpha(x,\varphi_0) \le (M_2(G(x)))^{1/\gamma}$ *для почти всех* $x \in D$, *если* $M < M_1$;

2) $K_{\varphi_0,\alpha}(D) \le \varliminf\limits_{k\to\infty} K_{\varphi_k,\alpha}(D)$, *если* $M = M_1$.

Далее приводится следствие из этой теоремы, которое будет использовано в **главе 5**.

Глава 5 посвящена доказательству теоремы существования смешанной краевой задачи для стационарной теории упругости. В **параграфе 5.1** дается математическая модель нелинейной теории упругости и описываются существующие подходы к решению поставленной задачи. Для класса гиперупругих материалов в случае когда нагрузки, приложенные к телу, являются замороженными, она сводится (см., например, [79]) к задаче минимизации функционала полной энергии

$$I(\varphi) = \int\limits_D W(x, D\varphi(x))\,dx$$

на множестве допустимых деформаций. Функция $W(x,F)$ удовлетворяет двум важным условиям: поливыпуклости и коэрцитивности (определения приведены в **параграфе 5.1**).

Опираясь на результаты [76], в **параграфе 5.2** для N-функции M_2 и постоянной $L > 0$ вводим следующие классы допустимых деформаций, совпадающих на границе с некоторым гомеоморфизмом:

$$\mathcal{H}(M_2,L)=\{\varphi:D\to D' - \text{ гомеоморфизм с конечным искажением}, \varphi\in W_1^1(D), I(\varphi)<\infty,$$
$$J(x,\varphi)\geq 0 \text{ для п.в. } x\in D, \|K_{M,n}(\cdot,\varphi)\mid L_{M_2}\|\leq L, \varphi|_{\partial D}=\overline{\varphi}|_{\partial D} \text{ п. в. на } \partial D\},$$
$$\mathcal{H}_\alpha(\gamma,L)=\{\varphi:D\to D' - \text{ гомеоморфизм с конечным искажением}, \varphi\in W_1^1(D), I(\varphi)<\infty,$$
$$J(x,\varphi)\geq 0 \text{ для п.в. } x\in D, \|K_{\alpha,n}(\cdot,\varphi)\mid L_{\gamma}\|\leq L, \varphi|_{\partial D}=\overline{\varphi}|_{\partial D} \text{ п. в. на } \partial D\}.$$

Функции искажения $K_{M,n}(x,\varphi)$ и $K_{\alpha,n}(x,\varphi)$ — частный случай функций $K_M(x,\varphi)$ и $K_\alpha(x,\varphi)$, определенных ранее, N-функция $M_1(u)$ в которых имеет вид u^n.

Используя приводимые в **параграфе 5.2** результаты для отображений с конечным искажением, мы устанавливаем справедливость следующей теоремы:

Теорема 5.3. *Пусть функция $W(x,F)$ удовлетворяет условиям поливыпуклости и коэрцитивности* (5.4), *а класс допустимых деформаций $\mathcal{H}(M_2,L)$ не пуст, $L>0$. Тогда существует хотя бы одно отображение $\varphi_0\in\mathcal{H}_\alpha(\gamma,L)$ (γ из условий* (2.3)*) такое, что*

$$I(\varphi_0)=\inf I(\varphi),\quad \varphi\in\mathcal{H}(M_2,L).$$

Полученные результаты опубликованы в 5 печатных изданиях [A1–A5] из которых 3 изданы в журналах, рекомендованных ВАК [A1–A3], и 2 — в тезисах докладов и материалах конференций [A4, A5]. Все сформулированные результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Научному руководителю С. К. Водопьянову принадлежат формулировки задач и общее руководство работой.

Апробация работы

Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

• Международная научная конференция «Метрические структуры и управляемые системы». Новосибирск, 2015.

• Международная научная конференция «Геометрический анализ и теория управления». Новосибирск, 2016.

• Семинар по геометрическому анализу, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. Руководитель: д. ф.-м. н., профессор С. К. Водопьянов.

- Семинар лаборатории геометрической теории управления, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. Руководитель: д. ф.-м. н., профессор А. А. Аграчев.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. К. Водопьянову за постановку и обсуждение задач, и за неоценимую поддержку на всем протяжении подготовки диссертации.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Выпуклые функции и пространства Орлича

1.1.1 N-функции

Напомним основные определения из теории пространств Орлича (формулируемые определения и утверждения читатель сможет найти в [61]).

Определение 1.1. *Непрерывная и выпуклая функция $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ называется N-функцией, если она четная и удовлетворяет условиям:*

$$\lim_{u\to 0}\frac{M(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u} = \infty.$$

Для N-функции $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ вводится дополнительная (двойственная по Юнгу) функция $M^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, определяемая преобразованием Лежандра:

$$M^*(v) = \sup\{u|v| - M(u) : u \geq 0\}.$$

Нетрудно видеть, что функция $M^*(v)$ также является N-функцией.

Из приведенного аналитического определения преобразования Лежандра можно получить неравенство Юнга, которое играет важную роль при изучении N-функций: для всех u,v справедливо неравенство

$$uv \leq M(u) + M^*(v). \tag{1.1}$$

Случай равенства в неравенстве (1.1) достигается при $v = p(|u|)\operatorname{sign} u$, где $p(u)$ — правая производная функции $M(u)$.

Следствием из (1.1) является неравенство

$$u < M^{-1}(u)M^{*-1}(u) \leq 2u. \tag{1.2}$$

Для N-функции $M(u)$ определим функцию $H(u)$ равенством:

$$H(u) = \frac{1}{M(\frac{1}{u})}.$$

Выпуклую функцию $Q(u)$ будем называть главной частью N-функции $M(u)$, если $Q(u) = M(u)$ при больших значениях аргумента.

Будем писать $M = M_1$, если функции M и M_1 совпадают, и $M < M_1$, если $M(u) < M_1(u)$ при больших значениях аргумента.

Существенную роль играет скорость роста N-функции $M(u)$ при $u \to \infty$. Поэтому удобно рассматривать специальные классы N-функций, характер поведения которых удовлетворяет некоторым условиям.

Говорят, что N-функция удовлетворяет Δ_2-условию (глобально), если существует такая постоянная $C_M > 0$, что

$$M(2u) \leq C_M M(u) \quad \text{для всех } u.$$

Можно показать, что N-функции, удовлетворяющие Δ_2-условию, растут не быстрее степенных.

Говорят, что N-функция удовлетворяет Δ'-условию (глобально), если существует такая постоянная $c > 0$, что

$$M(uv) \leq cM(u)M(v) \quad \text{для всех } u, v.$$

Из приведенных неравенств непосредственно следует, что если N-функция удовлетворяет Δ'-условию, то она удовлетворяет и Δ_2-условию. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, рассмотрим N-функцию

$$F_1(u) = |u|^q(|\ln|u|| + 1) \quad (q > 1).$$

Эта функцию удовлетворяет как Δ_2-условию, так и Δ'-условию. Действительно

$$\begin{aligned} F_1(uv) = |uv|^q(|\ln|uv|| + 1) &\leq |u|^q|v|^q(|\ln|u|| + |\ln|v|| + 1) \\ &\leq |u|^q(|\ln|u|| + 1) \cdot |v|^q(|\ln|v|| + 1) = F_1(u)F_1(v). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$F_2(u) = \frac{u^q}{\ln(e+|u|)} \quad (q>1).$$

Она также удовлетворяет Δ_2-условию, так как

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F_2(2u)}{F_2(u)} = 2^q,$$

но при этом не удовлетворяет Δ'-условию, так как

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F_2(u^2)}{F_2^2(u)} = \infty.$$

1.1.2 Пространства Орлича

Напомним определение пространств Орлича. Классом Орлича $\tilde{L}_M(D)$, определенным некоторой N-функцией M, назовем класс таких вещественных измеримых функций $u : D \to \mathbb{R}$ (D — область в $\mathbb{R}^n$), для которых

$$\mathcal{I}(u; M) = \int\limits_D M(u(x))\, dx < \infty.$$

Определение 1.2. *Пространство Орлича $L_M(D)$ — это совокупность измеримых функций $u : D \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию*

$$\int\limits_D u(x)v(x)\, dx < \infty$$

при всех $v : D \to \mathbb{R}$, $v \in \tilde{L}_{M^*}(D)$.

Заметим, что в случае степенных функций $M(u) = u^p$, $p > 1$ пространства Орлича совпадают с пространствами Лебега L_p. Используя обозначения, принятые для пространств L_p, будем обозначать как $L_{M,\mathrm{loc}}(D)$ пространство измеримых функций таких, что $f \in L_M(K)$ для всех $K \subset D$, K — компакт.

В пространстве Орлича вводятся две эквивалентные нормы: норма Орлича $\|u \mid L_{(M)}(D)\|$ и Люксембурга $\|u \mid L_M(D)\|$. Они определены следующим образом:

$$\|u \mid L_{(M)}(D)\| = \sup_{\substack{v\in\tilde{L}_M(D)\\ \mathcal{I}(v;M^*)\le 1}} \left| \int\limits_D u(x)v(x)\, dx \right|,$$

$$\|u \mid L_M(D)\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_D M\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)\,dx \le 1\right\}.$$

Эквивалентность норм понимается как $\|u \mid L_M(D)\| \le \|u \mid L_{(M)}(D)\| \le 2\|u \mid L_M(D)\|$.

В [61] показано, что пространства Орлича являются банаховыми для любых N-функций. Кроме того, они рефлексивны, если N-функция, определяющая данное пространство, и дополнительная к ней удовлетворяют Δ_2-условию.

Также отметим, что из определения нормы Люксембурга следует неравенство [61]

$$\mathcal{I}\left(\frac{u}{\|u \mid L_M(D)\|}; M\right) = \int\limits_D M\left(\frac{u(x)}{\|u \mid L_M(D)\|}\right) dx \le 1, \tag{1.3}$$

причем знак равенства имеет место только в случае, когда функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Также, если $\mathcal{I}(u; M) \le K$, то $\|u \mid L_M(D)\| \le \max(K,1)$.

Одним из фундаментальных инструментов для исследования пространств Лебега является неравенство Гёльдера: пусть $f \in L_p(D)$, $g \in L_q(D)$, $1/p + 1/q = 1$, тогда

$$\int\limits_D fg\,dx \le \|f \mid L_p(D)\| \cdot \|g \mid L_q(D)\|. \tag{1.4}$$

Так как пространства Орлича являются обобщением пространств L_p, то естественно ожидать, что для них будет верен некоторый аналог неравенства Гёльдера. Он имеет следующий вид [61]:

$$\int\limits_D |fg|\,dx \le \|f \mid L_M(D)\| \cdot \|g \mid L_{M^*}(D)\|. \tag{1.5}$$

В статье [80] доказывается следующий вариант неравенства Гёльдера:

$$\|uv \mid L_M(D)\| \le 2\|u \mid L_{M_1}(D)\| \cdot \|v \mid L_{M_2}(D)\|, \tag{1.6}$$

где M, M_1, M_2 — N-функции такие, что

$$M_1(u) = M(2M_3(u)), \quad M_2(u) = M(2M_3^*(u)). \tag{1.7}$$

В качестве примера приведем вид функций M_2, M_3, M_3^* для случая, когда функции M и M_1 степенные. Пусть $M(u) = u^q$, $M_1(u) = u^p$, $q < p$. Тогда из первого равенства можно определить функцию $M_3(u) = \frac{1}{2}u^{p/q}$. Далее найдем функцию $M_3^*(u)$, являющуюся дополнительной к $M_3(u)$. В данном случае $M_3^*(u) = \frac{p-q}{q}(\frac{2q}{p})^{q/(p-q)}u^{p/(p-q)} = Cu^{p/(p-q)}$. Таким образом, функция $M_2(u) = C^q u^{pq/(p-q)}$. В результате получено классическое неравенство Гёльдера (с точностью до умножения на константу).

К сожалению, приведенная выше форма неравенства Гёльдера не позволяет использовать его столь же эффективно, как и в пространствах L_p (в силу определения норм Орлича и Люксембурга). В книге [81] показано, что аналога интегрального неравенства Гёльдера для выпуклых функций, отличных от степенных, не существует. Однако некоторые технические сложности удается обойти с помощью специальных оценок для нормы. Например, если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то имеют место следующие соотношения [82]:

$$\frac{1}{C_M}\int\limits_D M(u)dx \le \|u \mid L_M(D)\|^{\ln C_M/\ln 2} \le C_M\int\limits_D M(u)dx, \tag{1.8}$$

где C_M — постоянная из определения Δ_2-условия. В частности, для приведенных ранее функций $F_1(u) = |u|^q(|\ln|u|| + 1)$ и $F_2(u) = \frac{u^q}{\ln(e+|u|)}$ степень $\ln C_M/\ln 2$ равна q.

Более точные оценки удается получить, если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'-условию. А именно, имеют место следующие соотношения:

$$M^{-1}\left(c\int\limits_D M(u)\,dx\right) \le \|u \mid L_M(D)\| \le H^{-1}\left(c\int\limits_D M(u)\,dx\right), \tag{1.9}$$

где c — константа из определения Δ'-условия.

Доказательство. Докажем левую часть неравенства. Функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'-условию и, следовательно, Δ_2-условию. Тогда мы имеем знак равенства в (1.3). Умножив левую и правую часть на $M(\|u \mid L_M(D)\|)$ и воспользовавшись Δ'-условием получаем

$$M(\|u \mid L_M(D)\|) = \int\limits_D M\left(\frac{u(x)}{\|u \mid L_M(D)\|}\right) M(\|u \mid L_M(D)\|)\,dx \ge c\int\limits_D M(u(x))\,dx.$$

Аналогично доказывается правая часть неравенства

$$1 = \int\limits_D M\left(\frac{u(x)}{\|u \mid L_M(D)\|}\right)dx \le c\int\limits_D M(u(x))M\left(\frac{1}{\|u \mid L_M(D)\|}\right)dx$$

следовательно, по определению функции $H(u)$

$$H(\|u \mid L_M(D)\|) \le c\int\limits_D M(u(x))\,dx.$$

□

Как и в случае интегрального неравенства Гёльдера, для произвольных наборов чисел нельзя получить аналог этого неравенства для сумм. Но при условии, что для всех чисел из этих наборов выполняются равенства в неравенстве (1.1), можно получить следующее соотношение, верное для произвольной N-функции M:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i v_i \geq M^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N} M(u_i)\Big) M^{*-1}\Big(\sum_{i=1}^{N} M^*(v_i)\Big). \tag{1.10}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$U = M^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N} M(u_i)\Big), \quad V = M^{*-1}\Big(\sum_{i=1}^{N} (M^*(v_i))\Big).$$

Используя неравенство Юнга и принимая во внимание, что условия для случая равенства предполагаются выполненными, получаем:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} u_i v_i}{UV} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} M(u_i) + \sum\limits_{i=1}^{N} M^*(v_i)}{UV} = \frac{M(U) + M^*(V)}{UV} \geq 1.$$

Из этого неравенства и следует доказываемый результат. □

Во введении было отмечено, что в первых работах Орлича, в которых были введены рассматриваемые пространства, предполагалось выполнение Δ_2-условия для определяющей их N-функции. Несмотря на то, что в дальнейшем от этого удалось отказаться и определить пространства для произвольных N-функций, во многих современных работах, посвященных пространствам Орлича, вводится данное ограничение на N-функции. Это обусловлено тем, что многие «хорошие» пространств Орлича теряются, если не выполнено Δ_2-условие. В частности, в [61] доказано утверждение о том, что если функция $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет Δ_2-условию, то $\tilde{L}_M(D)$ совпадает с $L_M(D)$. Пространство Орлича L_M сепарабельно только в том случае, если $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

1.2 Пространства Соболева — Орлича

Определение 1.3 ([83]). *Функция* $v_i : D \to \mathbb{R}$, $v_i \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $i = 1, \dots, n$, *называется обобщенной частной производной функции* $u : D \to \mathbb{R}$, $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ ($v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$) *если*

$$\int\limits_D u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int\limits_D v_i(x) \varphi(x)\, dx$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$. *Будем обозначать как* $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u}{\partial x_n})$ *обобщенный градиент функции* u.

Определение 1.4 ([74]). *Пространство Соболева — Орлича* $W_M^1(D)$ (D *— область в* $\mathbb{R}^n$) *— совокупность классов эквивалентности функций из пространства Орлича* $L_M(D)$, *имеющих первые обобщенные производные, принадлежащие пространству Орлича* $L_M(D)$.

В пространстве Соболева — Орлича $W_M^1(D)$ рассматривается норма

$$\|f \mid W_M^1\| = \|f \mid L_M\| + \|Df \mid L_M\|.$$

Определение 1.5 ([74]). *Пространство Соболева — Орлича* $L_M^1(D)$ (D *– область в* $\mathbb{R}^n$) *— совокупность классов эквивалентности локально суммируемых функций с первыми обобщенными производными, принадлежащими пространству Орлича* $L_M(D)$.

В пространстве Соболева — Орлича $L_M^1(D)$ рассматривается полунорма

$$\|f \mid L_M^1\| = \|Df \mid L_M\|.$$

Будем обозначать символом $\overset{\circ}{L}{}_M^1(D)$ ($\overset{\circ}{W}{}_M^1(D)$) замыкание множества финитных гладких функций в пространстве $L_M^1(D)$ ($W_M^1(D)$).

1.2.1 Теоремы вложения

Определение 1.6 ([84]). *Область* $D \subset \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию конуса, если все точки* $x \in \partial D$ *являются вершинами некоторого конуса, замыкание которого содержится в* D.

Для ограниченных областей вместо условия конуса можно рассматривать условие локально липшицевой границы.

Определение 1.7 ([84]). *Область D имеет локально липшицеву границу, если для каждой точки $x \in \partial D$ существует окрестность U_x такая, что пересечение $U_x \cap \partial D$ есть график липшицевого гомеоморфизма.*

При изучении вопросов, связанных с пространствами Соболева, важную роль играют теоремы вложения. Нам потребуется аналог следующей теоремы:

Теорема 1.1. *(Теорема вложения Соболева [72]) Пусть область D удовлетворяет условию конуса. Тогда*

1) *вложение $W_p^1(D) \to L_{p^*}(D)$, где $p^* = np/(n-p)$, непрерывно, если $p < n$;*

2) *вложение $W_p^1(D) \to L_\infty(D) \cap C(D)$ непрерывно, если $p > n$;*

Будем называть область D допустимой, если заключения теоремы 1.1 верны для случая $p = 1$.

Сформулируем аналог приведенной выше теоремы для пространств Соболева — Орлича, доказанный Т.К. Дональдсоном.

Теорема 1.2 ([70]). *Пусть D — ограниченная, допустимая область в n-мерном евклидовом пространстве, $M(t)$ — некоторая N-функция, $\overline{M}(t)$ — функция, сопряженная $M(t)$ и определяемая равенством:*

$$(\overline{M}(u))^{-1} = \int\limits_1^{|u|} \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}} dt. \tag{1.11}$$

Тогда

1) *вложение $W_M^1(D) \to L_{\overline{M}}(D)$ непрерывно, если*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}} dt = \infty, \tag{1.12}$$

2) *вложение $W_M^1(D) \to L_\infty(D) \cap C(D)$ непрерывно, если*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}} dt < \infty. \tag{1.13}$$

1.2.2 Неравенство Пуанкаре

Нам потребуется использовать неравенство Пуанкаре для функций из пространства Соболева — Орлича. Доказательство этого неравенства в наиболее простом виде читатель сможет найти, например, в [82].

Предложение 1.1 ([82]). *Пусть* $B = B(x,r)$. *Тогда существует постоянная* $C = C(n)$ *такая, что*

$$\int\limits_B M\Big(\frac{|u-\bar{u}_B|}{r}\Big)dx \le C\int\limits_B M(|\nabla u|)dx$$

для всех $u \in W^1_M(B)$, *где* $\bar{u}_B = \frac{1}{|B|}\int\limits_B u dx$.

Справедливость различных вариантов неравенства Пуанкаре для N-функций исследовалась рядом авторов (см., например, [73, 85]). Установим следующий его вариант (для случая пространств Соболева данный результат доказан в [21]):

Предложение 1.2. *Пусть* F *— измеримое подмножество шара* $B = B(0,r)$ *положительной меры. Для всех* $u \in W^1_M(B)$, $u|_F = 0$ *и функции* M, *удовлетворяющей* Δ_2*-условию, выполняется неравенство*

$$\|u \mid L_{\overline{M}}(B)\| \le C\|\nabla u \mid L_M(B)\|,$$

где $C = C(n, M, r, |F|)$ *— некоторая постоянная, а функция* $\overline{M}$ *определена в* (1.11).

Доказательство. В первую очередь отметим, что функция $\overline{M}(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если ему удовлетворяет функция $M(u)$ (для этого достаточно заметить, что из Δ_2-условия следует неравенство $M^{-1}(C_M u) \ge 2M^{-1}(u)$, а затем непосредственно проверить его для функции $(\overline{M}(u))^{-1}$, подставив неравенство для $M^{-1}(u)$ в ее представление в виде интеграла (1.11))

Докажем утверждение для случая $r = 1$ (чтобы получить утверждение для произвольного шара достаточно воспользоваться преобразованием растяжения). Для шара $B = B(0,1)$ рассмотрим произвольную функцию $u \in W^1_M(B)$ такую, что $u|_F = 0$, где $F \subset B$ — множество положительной меры, и $Q = \|u \mid L_{\overline{M}}(B)\| > 0$. Также для определенности положим $\bar{u}_B = \int\limits_B u\, dx \ge 0$. Тогда

$$\|1 - Q^{-1}u \mid L_{\overline{M}}(B)\|^{\ln C_{\overline{M}}/\ln 2} \ge \frac{1}{C_{\overline{M}}}\int\limits_F \overline{M}(|1 - Q^{-1}u|)\, dx = |F|.$$

Следовательно,

$$Q^{\ln C_{\overline{M}}/\ln 2}|F| \le \|Q - u \mid L_{\overline{M}}(B)\|^{\ln C_{\overline{M}}/\ln 2}.$$

Заметим, что

$$|Q - \bar{u}_B| = |\|u \mid L_{\overline{M}}(B)\| - \|\bar{u}_B \mid L_{\overline{M}}(B)\|| \le \|u - \bar{u}_B \mid L_{\overline{M}}(B)\|^{\ln C_{\overline{M}}/\ln 2}.$$

Далее воспользуемся следующим неравенством Пуанкаре (см., [73,85]): $\|u-\bar{u}_B \mid L_{\overline{M}}(B)\| \leq C_1\|\nabla u \mid L_M(B)\|$.

$$\|Q-u \mid L_{\overline{M}}(B)\| \leq \|Q-\bar{u}_B \mid L_{\overline{M}}(B)\| - \|u-\bar{u}_B \mid L_{\overline{M}}(B)\| \\ \leq 2\|u-\bar{u}_B \mid L_{\overline{M}}(B)\| \leq C_2\|\nabla u \mid L_M(B)\|,$$

где C_2 — константа, не зависящая от u. Учитывая оценку на меру множества F, получаем требуемый результат. $\square$

1.3 Аппроксимативная дифференцируемость

Напомним определения класса ACL и понятие аппроксимативной дифференцируемости отображения.

В $\mathbb{R}^n$ рассмотрим разложение вектора $x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ по стандартному базису $\{e_i\}$. Обозначим символом Pr_i проекцию вектора вдоль оси i, т.е. $Pr_i(x)=x-x_ie_i$.

Определение 1.8 ([86]). *Отображение $\varphi : D \to D'$, $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, принадлежит классу* ACL(D) *тогда и только тогда, когда для почти всех $y \in Pr_i(D')$ (относительно $n-1$ мерной меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}$) отображение $\varphi : Pr_i^{-1}(y)\cap D' \to \mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывно на каждом отрезке $[a,b] \subset Pr_i^{-1}(y)\cap D'$*

Отображения $\varphi : D \to D'$ класса ACL имеет частные производные $\mathcal{H}^n$-почти всюду в D' (см., например [86]).

Определение 1.9 ([86]). *Отображение $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ называется аппроксимативно дифференцируемым в точке $x \in D$, если существует линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что*

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^n(\{y\in B(x,r) : |\varphi(y)-\varphi(x)-L(y-x)|>\varepsilon\})}{r^n}=0$$

для любого $\varepsilon>0$.

Известно, что аппроксимативный дифференциал единственен и что всякая непрерывное отображение класса ACL аппроксимативно дифференцируемо почти всюду. Для функций классов Соболева, которые также являются аппроксимативно дифференцируемыми почти всюду, аппроксимативные частные производные совпадают с обобщенными (более подробно см. [87] и [52]). Обозначим аппроксимативный дифференциал отображения в точке x как $D\varphi(x)$, а $\operatorname{adj} D\varphi(x)$ — присоединенную матрицу, $J(x,\varphi)$ — определитель матрицы Якоби.

Следующее определение имеет важную роль для всего последующего изложения.

Определение 1.10 ([86]). *Отображение $\varphi : D \to D'$ имеет конечное искажение (коискажение), если $D\varphi(x) = 0$ ($\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$) почти всюду на множестве*

$$Z = \{x \in D \mid J(x, \varphi) = 0\}.$$

Напомним определение N и N^{-1} -свойств Лузина. Измеримое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, определенное на измеримом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, обладает N-свойством Лузина, если для любого множества $A \subset U$, $|A| = 0$, выполняется $|\varphi(A)| = 0$. Соответственно, отображение обладает N^{-1}-свойством Лузина, если для всякого $B \subset \mathbb{R}^n$, $|B| = 0$, верно $|\varphi^{-1}(B)| = 0$.

Далее сформулируем формулу замены переменной для аппроксимативно дифференцируемых функций.

Теорема 1.3 ([88]). *Пусть даны открытое множество $D \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$. Если выполнено одно из эквивалентных условий:*

1) *f аппроксимативно дифференцируемо почти всюду в D;*

2) *f имеет аппроксимативные частные производные почти всюду в D;*

3) *для любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество $F \subset D$ и функция $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ такие, что $|D \setminus F| < \varepsilon$, $f|_F = g|_F$;*

тогда отображение f можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы оно удовлетворяло N-свойству Лузина.

Если отображение удовлетворяет одному из условий 1), 2), 3) и N-свойству Лузина, тогда для любой измеримой функции $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и любого измеримого множества $\Omega \subset D$ справедливо:

1) *функции $(u \circ f)(x)|J(x, f)|$ и $u(y)N_f(y,\Omega)$ измеримы ($N_f(y,\Omega)$ – функция кратности);*

2) *если $u \geq 0$, то*

$$\int\limits_{\Omega} (u \circ f)(x)|J(x, f)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)N_f(y,D)\, dy; \tag{1.14}$$

3) *если одна из функций $(u \circ f)(x)|J(x, f)|$ и $u(y)N_f(y,\Omega)$ интегрируема, то вторая также будет интегрируема и справедлива формула замены переменной (1.14).*

1.4 Функция множеств

В настоящем разделе будем рассматривать пространство (X,ρ,μ), для которого выполняются некоторые специальные соотношения между мерой и метрикой, а именно *пространства однородного типа.*

Определение 1.11 ([20]). *Пространство однородного типа* (X,ρ,μ) *— это квазиметрическое пространство с мерой, обладающее следующими свойствами:*

1) *Поглащение: существует константа* $c_1 \geq 1$ *такая, что для шаров* $B_\delta(x) = \{z \in X \mid \rho(z,x) < \delta\}$ *и* $B_\delta(y)$, *имеющих непустое пересечение* $B_\delta(y) \subset B_{c_1\delta}(x)$ *для всех* $x,y \in X$ *и* $\delta > 0$;

2) *Удвоение: для любого шара* $B_\delta(x) \subset X$ *выполнено неравенство* $0 < \mu(B_\delta(x)) < \infty$ *и существует постоянная* $c_2 > 0$ *такая, что*

$$\mu(B_{c_1\delta}(x)) \leq c_2\mu(B_\delta(x))$$

для всех $x \in X$ *и* $\delta > 0$.

Примеры пространств однородного типа приведены в [89]. В частности, таковыми являются евклидовы пространства.

Определение 1.12. *Отображение* Φ, *определенное на открытых подмножествах открытого множества* $D \subset X$ *и принимающее неотрицательные значения, называется конечно* λ*-квазиаддитивной функцией множеств* $1 \leq \lambda < \infty$, *если*

1) *для любого* $x \in D$ *существует* $r > 0$ *такое, что* $0 \leq \Phi(B(x,r)) < \infty$;

2) *неравенство* $\sum\limits_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \leq \lambda\Phi(U)$ *выполнено для любого набора попарно непересекающихся открытых множеств* $U_1,\ldots,U_k \subset U \subset D$, $i = 1,\ldots,k$.

В случае $\lambda = 1$ будем говорить, что Φ — *квазиаддитивная функция.*

Если вместо второго условия в определении функции множеств потребовать

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) = \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)$$

для любого конечного набора попарно непересекающихся открытых множеств $U_i \subset D$, то такая функция называется *конечно-аддитивной.* Кроме того, если это равенство распространить на счетный набор, то функция называется *счетно-аддитивной.*

Квазиаддитивная функция Φ называется *монотонной*, если $\Phi(U_1) \le \Phi(U_2)$ для любых открытых множеств $U_1 \subset U_2 \subset D$.

Для квазиаддитивной функции множеств можно определить верхнюю и нижнюю производные как

$$\overline{\Phi}'(x) = \lim_{d\to 0} \sup_{r\le d} \frac{\Phi(B_r)}{|B_r|} \quad \text{и} \quad \underline{\Phi}'(x) = \lim_{d\to 0} \inf_{r\le d} \frac{\Phi(B_r)}{|B_r|}, \tag{1.15}$$

где супремум и инфимум берутся по всем открытым шарам B_r с радиусом $r \le d$, содержащих точку x. Если в некоторой точке x верхняя и нижняя производные совпадают, то их общее значение называется *производной* $\Phi'(x)$ *функции множеств* Φ.

Для квазиаддитивной функции множества справедливо

Предложение 1.3 ([20]). *Пусть Φ — конечная λ-квазиаддитивная функция множеств определена на открытых подмножествах области $D \subset X$. Тогда*

1) *для любого открытого множества $U \subset D$*

$$\int_U \overline{\Phi}'(x)\,dx \le \lambda \Phi(U);$$

2) *почти в каждой точке $x \in D$ существует конечная верхняя производная и*

$$\overline{\Phi}'(x) \le \lambda \underline{\Phi}'(x);$$

если $\lambda = 1$, то почти в каждой точке $x \in D$ существует конечная производная

$$\Phi'(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\Phi(B_r)}{|B_r|}.$$

Использование функций множеств позволяет доказать следующую теорему Лебега.

Теорема 1.4 ([20]). *Пусть D — область в X. Предположим, что функция f принадлежит $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда для почти всех $x \in D$ имеем*

$$\lim_{r\to 0,\, x\in B_r} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y) - f(x)|\,dy = 0.$$

Приведем еще две леммы о покрытиях, которыми мы будем пользоваться при доказательстве основных результатов.

Лемма 1.1 ([20]). *Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n, U \ne \mathbb{R}^n$, существует счетное семейство евклидовых шаров $\mathcal{B} = \{B_j\}$ таких, что*

1) $\bigcup_j B_j = U$;

2) *если* $B_j = B(x_j,r_j) \in \mathcal{B}$, *то* $\operatorname{dist}(x_j,\partial D) = 12r_j$;

3) *семейства* $\mathcal{B} = \{B_j\}$ *и* $2\mathcal{B} = \{2B_j\}$ *образуют конечнократное покрытие* U;

4) *если* $B_i(x_i,r_i) \cap B_j(x_j,r_j) = \emptyset$, *то* $\frac{5}{7}r_i \le r_j \le \frac{7}{5}r_i$;

5) *семейство* $\{2B_j\}$ *может быть разделено на конечные семейства, зависящие только от размерности* n *так, что в каждом семействе шары не пересекаются.*

Лемма 1.2 ([20]). *Пусть монотонная счетно-аддитивная функция* Φ *определена на открытых подмножествах открытого множества* $D \subset X$. *Тогда для всякого открытого множества* $U \subset D, U \ne X$, *существует последовательность евклидовых шаров* $\{B_j\}$ *такая, что*

1) *семейства* $\{B_j\}$ *и* $\{2B_j\}$ *образуют конечнократное покрытие* U;

2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(2B_j) \le \zeta_n \Phi(U)$, *где* ζ_n — *постоянная, зависящая только от размерности* n.

1.5 Кусочная сходимость

В данном диссертационном исследовании нам потребуется использовать понятие кусочной сходимости, введенное в работах [90, 91].

Определение 1.13 ([90]). *Будем говорить, что последовательность измеримых функций* $f_k : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, *сходится к измеримой функции* $f : D \to \mathbb{R}$ *в кусочном (“biting”) смысле, если существует счётный набор упорядоченных по включению измеримых множеств* $\{E_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, $E_\nu \subset E_{\nu+1}$ *таких, что* $D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ *и функции* f, f_k *принадлежат классу* $L_1(E_\nu)$ *для всех* k *и* ν, *а также*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_\nu} g f_k \, dx = \int_{E_\nu} g f \, dx$$

для любой функции $g \in L_\infty(E_\nu)$.

В приведенном определении предел не зависит от выбора множеств E_ν.

Кусочная сходимость оказывается крайне полезной в тех случаях, когда единственной информацией об исследуемой последовательности является ее ограниченность в пространстве $L_1(D)$. Такие ситуации естественным образом возникают при решении некоторых вариационных задач (см., например, [92, 93]) и задач геометрической теории функций ([44, 94]). Одной из основных мотивировок рассмотрения такого типа сходимости является следующая лемма:

Лемма 1.3 ([90]). *Каждая ограниченная в* $L_1(D)$ *последовательность функций* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *содержит подпоследовательность, сходящуюся в кусочном смысле к* $f \in L_1(D)$.

Отметим следующее свойство кусочной сходимости.

Лемма 1.4 ([44]). *Если последовательность $f_k : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ сходится в кусочном смысле к функции $f : D \to \mathbb{R}$ и θ — конечная измеримая функция в D, то $\theta f_k \to \theta f$ в кусочном смысле в D.*

Также напомним формулировку теоремы Мазура, которую мы будем использовать при доказательстве некоторых результатов.

Теорема 1.5 ([95]). *Дано банахово пространство X. Пусть последовательность $\{u_k\} \subset X$ слабо сходится к $u_0 \in X$. Тогда существует последовательность $\{w_k\} \subset X$, где*

$$w_k = \sum_{i=k}^{N(k)} \lambda_i^k u_i, \quad \sum_{i=k}^{N(k)} \lambda_i^k = 1, \quad \lambda_i^k \geq 0,$$

составленная из выпуклых линейных комбинаций элементов u_k, такая, что w_k сильно сходятся к u_0.

Глава 2

Ограниченность оператора композиции

2.1 Операторы композиции в пространствах Орлича

Изучение основной задачи настоящей работы в случае пространств Орлича, обладающих более «бедной» структурой, чем пространства Соболева — Орлича, представляется первым естественным шагом. Это позволит установить базовые ограничения на N-функции, определяющие исследуемые пространства, связанные только с особенностями пространств Орлича и, используя разработанные методы, перейти к изучению случая пространств Соболева — Орлича. Будем исследовать ограниченность оператора композиции

$$\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D) \quad \varphi^* f = f \circ \varphi$$

порожденного измеримым отображением $\varphi : D \to D'$, $D \subset X$, $D' \subset Y$, (X, ρ_1, μ), (Y, ρ_2, ν) — пространства однородного типа, обладающим N^{-1}-свойством Лузина. Это свойство гарантирует, что мера $\mu \circ \varphi^{-1}$ абсолютно непрерывна относительно меры ν. Тогда по теореме Радона — Никодима существует функция $J(y, \varphi^{-1})$ такая, что

$$\mu \circ \varphi^{-1}(A) = \int\limits_A J(y, \varphi^{-1})\, d\nu(y).$$

Производная Радона-Никодима $\frac{d\mu \circ \varphi^{-1}}{d\nu} = J(y, \varphi^{-1})$ может быть вычислена как объемная производная «обратного» отображения:

$$J(y, \varphi^{-1}) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(\varphi^{-1}(B(y,r)))}{\nu(B(y,r))} \qquad \text{п.в. в } D'.$$

В случае регулярного инъективного отображения данная величина совпадает с якобианом обратного отображения.

Отметим, что оператор композиции пространств Орлича в случае, когда N-функции M и M_1 совпадают, был изучен в статье [78]. Приведем основной результат этой работы.

Теорема 2.1 ([78])**.** *Пусть измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ обладает N^{-1}-свойством Лузина. Тогда оператор $\varphi^* : L_M(D') \to L_M(D)$ ограничен, если*

$$\mu(\varphi^{-1}(A)) \leq K\nu(A) \tag{2.1}$$

для любого борелевского $A \subset D'$. Если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то данное условие также является необходимым.

Несмотря на то, что условие (2.1) является необходимым и достаточным, в контексте данного диссертационного исследования оно имеет недостатки. Как отмечалось во введении, теория операторов композиции в пространствах Соболева тесно связана с квазиконформным анализом. Следовательно, для установления аналогичных связей в случае пространств Соболева-Орлича, нам необходимо получать условия ограниченности изучаемого оператора φ^*, основанные на характеристиках порождающего его отображения φ. Кроме того, для конкретного отображения условие (2.1) достаточно трудно проверить. Однако отметим, что из теоремы 2.1 следует следующее утверждение:

Теорема 2.2. *Пусть измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ обладает N^{-1}-свойством Лузина. Тогда оператор $\varphi^* : L_M(D') \to L_M(D)$ ограничен, если*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y \in D'} J(y, \varphi^{-1}) < \infty. \tag{2.2}$$

Если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то данное условие также является необходимым.

Действительно, покажем, что при выполнении условия (2.1) выполняется условие (2.2). Предположим, что условие (2.2) не выполняется. Тогда существует множество $A \subset D'$ такое, что $0 < \nu(A) < \infty$ и $J(y, \varphi^{-1}) > K$ для любого $t \in A$. Это означает, что $\mu \circ \varphi^{-1}(A) = \int\limits_A J(y, \varphi^{-1})\, d\nu(y) > K\nu(A)$, что противоречит условию (2.1).

Введем следующие обозначения, которых будем придерживаться в данной работе:

$$\alpha = \ln C_M / \ln 2 \quad \beta = \ln C_{M_1} / \ln 2 \quad \gamma = \alpha\beta/(\beta - \alpha), \tag{2.3}$$

где C_M, C_{M_1} — константы из Δ_2-условия для функций M и M_1 соответственно.

Далее мы определим условия ограниченности оператора композиции, действующего между разными пространствами Орлича. Для этого потребуется следующая лемма (аналогичное утверждение для пространств Соболева-Орлича будет доказано в теореме 2.6, доказательство в пространствах Орлича является его дословным повторением):

Теорема 2.3. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D)$, функции M и M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда*

$$\Psi(A') = \sup_{f \in L_{M_1}(A')} \left(C \frac{\|\varphi^* f \mid L_M(\varphi^{-1}(A'))\|}{\|f \mid L_{M_1}(A')\|} \right)^{\gamma},$$

где C — некоторая постоянная, является ограниченной монотонной счетно аддитивной функцией, определенной на открытых множествах из области D'.

Используя приведенную лемму, докажем следующий результат:

Теорема 2.4. *Пусть измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D)$ и N-функции M, M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда*

$$J^{\frac{1}{\alpha}}(y, \varphi^{-1}) \in L_{\gamma}(D').$$

Доказательство. По теореме 2.3 для всякого борелевского множества $A \subset D'$ и функции $f \in L_{M_1}(A)$ выполнено неравенство

$$\|\varphi^* f \mid L_M(\varphi^{-1}(A))\| \leq \Psi(A)^{\frac{1}{\gamma}} \|f \mid L_{M_1}(A)\|.$$

Зафиксируем некоторую точку $\tilde{y}$. Подставим в данное неравенство характеристическую функцию $f(y) = \chi_B(y)$ шара $B = B(\tilde{y}, r) \subset D'$. Используя оценки на норму (1.8) получаем

$$\mu(\varphi^{-1}(B(\tilde{y}, r)))^{\frac{1}{\alpha}} \leq C \Psi(B(\tilde{y}, r))^{\frac{1}{\gamma}} \nu(B(\tilde{y}, r))^{\frac{1}{\beta}}.$$

Разделим на $\nu(B(\tilde{y}, r))^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\left(\frac{\mu(\varphi^{-1}(B(\tilde{y}, r)))}{\nu(B(\tilde{y}, r))} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq C \left(\frac{\Psi(B(\tilde{y}, r))}{\nu(B(\tilde{y}, r))} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$, получаем

$$J^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}(y, \varphi^{-1}) \leq C \Psi'(y) \text{ для почти всех } y \in D'.$$

Интегрируя по области D', приходим к требуемому соотношению

$$\left(\int\limits_{D'} J^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(y,\varphi^{-1})\,d\nu(y)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq C\Psi(D')^{\frac{1}{\gamma}} = \|\varphi^*\|.$$

□

Замечание 2.1. *Отметим, что при доказательстве теоремы мы использовали оценки на норму характеристической функции вместо точного выражения. С одной стороны, это дает более грубое условие (объемная производная принадлежит пространству Лебега, а не пространству Орлича), но, с другой стороны, оно выражено через конкретную характеристику отображения, порождающего изучаемый оператор, что было бы невозможно при использовании точного значения нормы. Действительно, без оценок* (1.8) *на втором шаге доказательства теоремы 2.4 мы бы получили следующее неравенство:*

$$M_1^{-1}\left(\frac{1}{\nu(B(\tilde{y},r))}\right) \leq \Psi(B(\tilde{y},r))^{\frac{1}{\gamma}} M^{-1}\left(\frac{1}{\mu(\varphi^{-1}(B(\tilde{y},r)))}\right),$$

из которого, даже для функций M, M_1, удовлетворяющих Δ_2-условию, вывести требования к объемной производной обратного отображения не удается.

Достаточные условия, выраженные через объемную производную обратного отображения, могут быть получены без требования дополнительных ограничений на N-функции.

Теорема 2.5. *Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D)$, если*

$$J(y,\varphi^{-1}) \in L_{F^*}(D'),$$

где $F^*(u)$ — функция, дополнительная к функции $F(u) = M_1(M^{-1}(u))$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся тем фактом, что, если

$$\mathcal{I}(f,M) = \int\limits_{D} M(f(x))\,d\mu(x) < C,$$

где C — некоторая константа, то $\|f \mid L_M(D)\| \leq \max\{C,1\}$ (доказательство этого утверждения приведено в [61]).

Рассмотрим $\mathcal{I}(\varphi^* f, M)$. Применяя формулу замены переменной и неравенство Гёльдера (1.5), имеем

$$\mathcal{I}(\varphi^* f, M) = \int\limits_D M(f(\varphi(x)))\,d\mu(x) = \int\limits_{D'} M(f(y))J(y,\varphi^{-1})\,d\nu(y)$$

$$\leq 2\|J(\cdot,\varphi^{-1}) \mid L_{F^*}(D')\| \cdot \|M(f) \mid L_F(D')\|.$$

Так как по определению функции $F(u) = M_1(M^{-1}(u))$

$$\mathcal{I}(M(f), F) = \int\limits_{D'} F(M(f(y)))\,d\nu(y) = \int\limits_{D'} M_1(f(y))\,d\nu(y) = I(f, M_1),$$

то можно сделать вывод, что $\|M(f) \mid L_F(D')\| = \|f \mid L_{M_1}(D')\|$. Следовательно,

$$\|\varphi^* f \mid L_M(D)\| \leq \max\{2\|J(\cdot,\varphi^{-1}) \mid L_{F^*}(D')\|, 1\}\|f \mid L_{M_1}(D')\|,$$

из чего можем сделать вывод об ограниченности оператора $\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D)$. $\square$

2.2 Операторы композиции в пространствах Соболева – Орлича. Общий случай

Пусть D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, а N-функция $M(u)$ растет не быстрее функции $M_1(u)$ ($M(u) \leq M_1(u)$ для всех $u \in \mathbb{R}^+$). Будем говорить, что гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \operatorname{Lip}(D') \to L^1_M(D)$, действующий по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$, если $f \circ \varphi \in L^1_M(D)$ и существует постоянная $K < \infty$, не зависящая от выбора функции f, такая, что

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\| \leq K\|f \mid L^1_{M_1}(D')\|$$

для любой функции $f \in L^1_{M_1}(D') \cap \operatorname{Lip}(D')$.

Введем следующее определение.

Определение 2.1. *Для гомеоморфизма $\varphi : D \to D'$ будем рассматривать операторные функции искажения:*

$$K_M(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi|(x)}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}, & \text{если } J(x,\varphi) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$K_\alpha(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{(M(|D\varphi|(x)))^{1/\alpha}}{|J(x,\varphi)|^{1/\beta}}, & \text{если } J(x,\varphi) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Замечание 2.2. *Заметим, что функции $K_M(x,\varphi)$ и $K_\alpha(x,\varphi)$ совпадают, если в качестве N-функций $M(u)$ и $M_1(u)$ рассмотреть степенные функции u^q и u^p. При таких условиях функция искажения $K_q(x,\varphi)$ впервые была введена в работе [96] и характеризует отображения с ограниченным (p,q)-искажением.*

Для доказательства основного результата нам потребуется установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.6. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, функции M и M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда*

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')} \left(C \frac{\|\varphi^* f \mid L^1_M(\varphi^{-1}(A'))\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')\|} \right)^\gamma,$$

где C — некоторая постоянная, является ограниченной монотонной счетно аддитивной функцией, определенной на открытых множествах из области D'.

Доказательство. Из определения функции Φ следует, что $\Phi(A'_1) \leq \Phi(A'_2)$, если $A'_1 \subset A'_2$.

Пусть $A'_i, i \in N$, — открытые попарно непересекающиеся множества в $D', A'_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A'_i, A_i = \varphi^{-1}(A'_i), i = 0,1\dots$. Рассмотрим такую функцию $f_i \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)$, чтобы одновременно выполнялись условия $\|\varphi^* f_i \mid L^1_M(A_i)\| \geq (\Phi(A'_i)(1-\frac{\varepsilon}{2^i}))^{1/\gamma}\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)\|$ и $\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)\|^\beta = \Phi(A'_i)(1-\frac{\varepsilon}{2^i})$, $\varepsilon \in (0,1)$. Такая функция существует в силу того, что норма в пространстве L_M однородна, из чего следует, что умножение на положительную константу не изменит знака приведенного выше неравенства и, подбирая константу соответствующим образом, мы всегда сможем добиться выполнения последнего равенства. Полагая $f_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$ и применяя неравенство Гёльдера, получаем:

$$\Big\|\varphi^* f_N \mid L^1_M\Big(\bigcup_{i=1}^N A_i\Big)\Big\| \geq \Big(\frac{1}{C^2_M}\Big)^{1/\alpha}\Big(\sum_{i=1}^N \|\varphi^* f_i \mid L^1_M(A_i)\|^\alpha\Big)^{1/\alpha}$$
$$\geq \Big(\frac{1}{C^2_M}\Big)^{1/\alpha}\Big(\sum_{i=1}^N \Big(\Phi(A'_i)\Big(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\Big)\Big)^{\alpha/\gamma}\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)\|^\alpha\Big)^{1/\alpha}$$
$$\geq \Big(\frac{1}{C^2_M}\Big)^{1/\alpha}\Big(\sum_{i=1}^N \Phi(A'_i)\Big(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\Big)\Big)^{1/\gamma}\Big(\sum_{i=1}^N \|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)\|^\beta\Big)^{1/\beta}$$
$$\geq \Big(\frac{1}{C^2_M}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{1}{C^2_{M_1}}\Big)^{1/\beta}\Big(\sum_{i=1}^N \Phi(A'_i) - \varepsilon\Phi(A'_0)\Big)^{1/\gamma}\Big\|f_N \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\Big(\bigcup_{i=1}^N A'_i\Big)\Big\|.$$

Заметим, что $C = \Big(\frac{1}{C^2_M}\Big)^{1/\alpha}\Big(\frac{1}{C^2_{M_1}}\Big)^{1/\beta}$ — константа, зависящая только от конкретного вида N-функций M и M_1.

Отсюда следует, что

$$(\Phi(A'_0))^{1/\gamma} \geq \sup C \frac{\Big\|\varphi^* f_N \mid L^1_M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^N A_i\Big)\Big\|}{\Big\|f_N \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^N A'_i\Big)\Big\|} \geq \Big(\sum_{i=1}^N \Phi(A'_i) - \varepsilon\Phi(A'_0)\Big)^{1/\gamma},$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $f_N \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^N A'_i\Big)$ указанного выше вида. Так как N и ε произвольны, получаем

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^N A_i\Big) \geq C\sum_{i=1}^N \Phi(A_i).$$

Установим справедливость обратного неравенства. Применяя оценки на нормы (1.8) и неравенство Гёльдера, исходя из определения функции Φ, получаем

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(\bigcup_{i=1}^N A_i)\|^\alpha \leq \sum_{i=1}^N \|\varphi^* f \mid L^1_M(A_i)\| \leq \sum_{i=1}^N (\Phi(A'_i))\|^{\frac{\alpha}{\gamma}} f \mid L^1_{M_1}(A'_i)\|^\alpha$$
$$\leq \Big(\sum_{i=1}^N \Phi(A'_i)\Big)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\Big(\sum_{i=1}^N \|f \mid L^1_{M_1}(A'_i)\|^\beta\Big)^{\frac{\alpha}{\beta}} \leq \Big(\sum_{i=1}^N \Phi(A'_i)\Big)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\|f \mid L^1_{M_1}(\bigcup_{i=1}^N A'_i)\|^\alpha.$$

Следовательно, получаем $\Phi(\bigcup\limits_{i=1}^N A_i) \leq C\sum\limits_{i=1}^N \Phi(A_i)$. □

Используя приведенную теорему, мы можем доказать следующий результат:

Теорема 2.7. *Пусть гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *порождает ограниченный оператор композиции* $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ *и* N*-функции* M, M_1 *удовлетворяют* Δ_2*-условию. Тогда верны следующие утверждения:*

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$;

2) *отображение* φ *имеет конечное искажение;*

3) *конечна величина* $K_{\varphi,\alpha} = \|K_\alpha(\cdot,\varphi) \mid L_\gamma(D)\|$ $(K_{\varphi,\alpha} = \|K_\alpha(\cdot,\varphi) \mid L_\infty(D)\|$ *при* $M = M_1)$.

Доказательство. В статье [19] приводится доказательство того, что отображение φ, порождающее ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D), 1 \le q \le p \le \infty$, по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_p$, принадлежит классу $\mathrm{ACL}(D)$. Метод доказательства ACL-свойства применим также и к пространствам Соболева — Орлича.

По доказанной теореме для любой функции $f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A) \cap \mathrm{Lip}(A)$ выполняется неравенство

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(\varphi^{-1}(A))\| \le C(\Phi(A))^{1/\gamma} \|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A)\|,$$

где $A \subset D'$ — открытое подмножество (при $M = M_1$ полагаем $(\Phi(A))^{1/\gamma} = \|\varphi^*\|$). Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне $B(0,2)$. Подставляя в это неравенство функции $f_i(y) = (y_i - y_{0,i})\eta(\frac{y-y_0}{r})$, получаем:

$$\left(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx\right)^{1/\alpha} \le C(\Phi(B(y_0,2r)))^{1/\gamma}(r^n)^{1/\beta}. \tag{2.6}$$

Если гомеоморфизм φ не обладает N-свойством, то по теореме о замене переменной [88] существует борелевское множество E нулевой меры такое, что справедлива формула

$$\int\limits_{D\setminus E} (g \circ \varphi)|J(x,\varphi)|dx = \int\limits_{D'} g(y)dy. \tag{2.7}$$

Докажем, что отображение $\varphi : D \to D'$ обладает конечным искажением. Для этого покажем, что выполнено равенство

$$\int\limits_Z M(|D\varphi|)dx = 0, \tag{2.8}$$

где $Z = \{x \in D \setminus E \mid J(x,\varphi) = 0\}$.

По формуле (2.7) $|\varphi(Z \setminus E)| = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \supset \varphi(Z \setminus E)$, $|U| < \varepsilon$. Существует конечнократное покрытие множества U шарами $\{B(x_i,r_i)\}$ такое, что шары $\{B(x_i,2r_i)\}$ также образуют конечнократное покрытие множества U и $\sum r_i^n < N\varepsilon$ (кратность N покрытия не зависит от множества U). Тогда из неравенства (2.6) получаем:

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(Z)} M(|D\varphi|)\,dx \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} M(|D\varphi|)\,dx \le C\|\varphi^*\|^{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n \quad \text{при } M = M_1;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} M(|D\varphi|)dx \le C\sum_{i=1}^{\infty} (\Phi(B(y_i,2r_i)))^{\alpha/\gamma}(r_i^n)^{\alpha/\beta}$$
$$\le C(\Phi(D'))^{\alpha/\gamma}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} r_i^n\Big)^{\alpha/\beta} < C(\Phi(D'))^{\alpha/\gamma}(N\varepsilon)^{\alpha/\beta} \quad \text{при } M < M_1.$$

Так как $\Phi(D') < \infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то (2.8) доказано и, следовательно, $|D\varphi| = 0$ почти всюду на множестве Z.

Перейдем к доказательству утверждения 3) настоящей теоремы. Рассмотрим случай, когда $M = M_1$. Применим к левой части (2.6) формулу (2.7). Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла вытекает, что

$$\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|} \le C\|\varphi^*\|^{\alpha} \quad \text{почти всюду в } D' \setminus \varphi(E \cup Z).$$

Пусть $S \subset D' \setminus \varphi(E \cup Z)$ — множество, где последнее неравенство неверно. Тогда по формуле (2.7) $|J(x,\varphi)| = 0$ почти всюду на множестве $\varphi^{-1}(S)$. Поэтому $\varphi^{-1}(S) \subset Z$ и

$$M(|D\varphi|) \le C\|\varphi^*\|^{\alpha}|J(x,\varphi)| \text{ почти всюду в } D.$$

При $M < M_1$ из неравенства (2.6) выводим соотношение

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx \le C\bigg(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\bigg)^{\alpha/\gamma} r^n.$$

Применим к левой части этого неравенства формулу (2.7) замены переменной:

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z} M(|D\varphi|)dx$$
$$= \int\limits_{B(y_0,r)} \frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}dy \le C\bigg(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\bigg)^{\alpha/\gamma} r^n.$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной счетно-аддитивной функции множества вытекает, что

$$\left(\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right)^{\gamma/\alpha} \leq C\Phi'(y) \quad \text{почти всюду в } D'.$$

Интегрируя неравенство по области D', получаем:

$$(K_{\varphi,\alpha})^{\gamma} \leq C_1 \int\limits_{D\setminus Z} \left(\frac{(M(|D\varphi|))^{1/\alpha}}{|J(x,\varphi)|^{1/\beta}}\right)^{\gamma} dx = C_1 \int\limits_{D\setminus Z} \left(\frac{M(|D\varphi|)}{|J(x,\varphi)|}\right)^{\gamma/\alpha} |J(x,\varphi)|dx$$
$$= C_1 \int\limits_{D'} \left(\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right)^{\gamma/\alpha} dy \leq C \int\limits_{D'} \Phi'(y)dy \leq C\Phi(D') \leq C\|\varphi^*\|^{\gamma}.$$

□

Теорема 2.8. *Гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *порождает ограниченный оператор композиции* $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \operatorname{Lip}(D') \to L^1_M(D)$, *если функция* M_1 *удовлетворяет* Δ'*-условию и выполнены следующие требования:*

1) $\varphi \in \operatorname{ACL}(D)$;

2) *отображение* φ *имеет конечное искажение;*

3) *конечна величина* $K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}(D)\|$ ($K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_\infty(D)\|$ *при* $M = M_1$).

Доказательство. Покажем, что неравенство $\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\| \leq K\|f \mid L^1_{M_1}(D')\|$ выполняется для любой функции $f \in L^1_{M_1}(D') \cap \operatorname{Lip}(D')$.

Учитывая тот факт, что $f \circ \varphi$ принадлежит $\operatorname{ACL}(D)$, и используя аналог неравенства Гёльдера (1.6), получаем:

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\| \leq \left\| |Df||D\varphi| \frac{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_M(D) \right\|$$
$$\leq 2 \left\| \frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}(D) \right\| \||Df| M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|) \mid L_{M_1}(D)\|.$$

Рассмотрим второй сомножитель. Функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ'-условию, а, следовательно, и Δ_2-условию. Тогда мы можем использовать оценки (1.8) на норму Люксембурга и

Δ'-условие, чтобы «отделить» якобиан.

$$\||Df|M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|) \mid L_{M_1}(D)\| \leq C_1 \left(\int_{D\setminus Z} M_1(|Df|(\varphi(x))M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))dx\right)^{1/\beta}$$
$$\leq C_2 \left(\int_{D'} M_1(|Df|(\varphi(x)))dy\right)^{1/\beta} \leq C\||Df| \mid L_{M_1}(D')\|.$$

Подставив полученное неравенство в исходное, выводим требуемый результат. При этом $K = C\left\|\frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2}\right\|$. В случае, когда функции M и M_1 совпадают, $K = C\left\|\frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_\infty\right\|$. □

В качестве следствия можно получить свойство абсолютной непрерывности введенной ранее функции множеств.

Следствие 2.1. *Функция множеств Φ, определенная на открытых множествах $A' \subset D'$, абсолютно непрерывна. Распространение $\tilde{\Phi}(U) = \inf\limits_{A\supset U} \Phi(A)$ на измеримые множества также абсолютно непрерывно.*

Доказательство. Из теоремы 2.8 можем получить оценку для любого открытого ограниченного множества $A' \subset D'$ и функции $f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')$

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(D)\| \leq C\|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}(\varphi(A'))\|\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')\|.$$

Отсюда получаем неравенство $\Phi(A') \leq C\|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}(\varphi(A'))\|$, из которого и следует абсолютная непрерывность функции Φ и ее продолжения $\tilde{\Phi}$. □

Оператор $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ теорем 2.7 и 2.8 можно распространить на все пространство $L^1_{M_1}(D')$. Для этого необходимо установить справедливость следующего утверждения, представляющего независимый интерес.

Теорема 2.9. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D),$$

а N-функции $M(u), M_1(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию, $M \leq M_1$ и

$$\int\limits_1^\infty \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}}\,dt = \infty; \quad \int\limits_1^\infty \frac{M_1^{-1}(t)}{t^{1+1/n}}\,dt = \infty. \tag{2.9}$$

Тогда φ *обладает* N^{-1}*-свойством Лузина.*

Доказательство. В случае степенных функций $M(u) = u^q$ и $M_1(u) = u^p$ получаем, что условия (2.9) означают неравенство $1 \le q \le p \le n$. Так как Δ_2-условие гарантирует, что N-функции растут не быстрее степенных, то для выполнения (2.9) $M(u), M_1(u)$ должны расти медленнее функций $u^{n+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Это в свою очередь означает, что константы $\alpha = \ln C_M / \ln 2$ и $\beta = \ln C_{M_1} / \ln 2$ не превосходят n.

Так как отображение $\varphi : D \to D'$ удовлетворяет условиям теоремы 2.7, то оно принадлежит классу $\mathrm{ACL}(D)$ и имеет конечное искажение. Без ограничения общности можем полагать, что множество D ограничено.

Зафиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на шаре $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. По теореме 2.6 для любой функции $f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A) \cap \mathrm{Lip}(A)$ выполняется неравенство

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(\varphi^{-1}(D))\| \le C(\Phi(A))^{1/\gamma} \|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A)\|,$$

где $A \subset D'$ — открытое подмножество (при $M = M_1$ полагаем $(\Phi(A))^{1/\gamma} = \|\varphi^*)\|$). Подставляя в это неравенство функцию $f(y) = C(r)\eta(\frac{y-y_0}{r})$ ($C(r)$ — нормирующий множитель, равный $M_1^{-1}(\frac{1}{r^\beta})r$), получаем

$$\|\varphi^* f \mid L^1_M(\varphi^{-1}(D))\| \le C(\Phi(2B))^{1/\gamma} |B|^{\frac{n-p}{np}},$$

где $B = B(y_0,r)$ — такой шар, что $\bar{B}(y_0,2r) \subset D'$, $2B = B(y_0,2r)$. Зафиксируем произвольное множество E нулевой меры в D' (без ограничения общности можно считать, что E ограничено). По теореме 2.7 отображение φ имеет конечное искажение, из чего следует, что $\varphi^{-1}(E) \ne D$, так как иначе $Jx,\varphi = 0$ и, следовательно, $D\varphi(x) = 0$ и φ — постоянное отображение. Тогда существует куб $Q \subset D$ такой, что $2Q \subset D$ и $|Q \setminus \varphi^{-1}(E)| > 0$ ($2Q$, по аналогии с $2B$ будем обозначать куб с тем же центром, что и Q, и с удвоенной длинной ребер). Выберем компакт $T \subset Q \setminus \varphi^{-1}(E)$ положительной меры. Тогда образ $\varphi(T) \subset D'$ компактен и $\varphi(E) \cap T = \emptyset$. Далее рассмотрим произвольное открытое множество $U \subset D'$, содержащее E, такое, что $\varphi(T) \cap U = \emptyset$. По лемме 1.1 о покрытии найдется набор шаров $\{B(y_i,r_i)\}$ такой, что $\{B(y_i,r_i)\}$ и $\{B(y_i, 2r_i)\}$ образуют покрытия множества U, причем кратность покрытия $\{B(y_i, 2r_i)\}$ конечна. Свяжем с каждым шаром функцию f_i указанного выше вида. Для таких функций $f_i \circ \varphi = C$ на множестве $\varphi^{-1}(B(y_i, r_i))$ и $f_i \circ \varphi = 0$ вне прообраза шара двойного радиуса $\varphi^{-1}(B(y_i, 2r_i))$, в том числе и на множестве T. Для функций такого вида получаем неравенство

$$\|\varphi^* f_i \mid L^1_M(\varphi^{-1}(2Q))\| \le \|\varphi^* f_i \mid L^1_M(\varphi^{-1}(D))\| \le C(\Phi(B(y_i, 2r_i)))^{1/\gamma}|B(y_i,r_i)|^{\frac{n-p}{np}}.$$

Теперь применим к левой части данного выражения следующий вариант неравенства Пуанкаре (предложение 1.2):

$$\|g \mid L_{\overline{M}}(B)\| \le C\|\nabla g \mid L_M(B)\|,$$

где $g \in W^1_{M,\,\mathrm{loc}}(Q)$ — произвольная функция, равная нулю на множестве T, константа C зависит только от размерности n, вида N-функции $M(u)$ и длины ребра куба Q, а функция $\overline{M}(u)$ определяется из равенства:

$$(\overline{M}(u))^{-1} = \int\limits_1^{|u|} \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}}dt.$$

Как было отмечено при доказательстве предложения 1.2, функция $\overline{M}(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если ему удовлетворяет функция $M(u)$. Кроме того, заметим, что функция $M(u)$ растет не быстрее $u^{\alpha+\varepsilon}$ и не медленнее $u^{\alpha-\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Из определения функции $\overline{M}(u)$ выводим, что она растет не быстрее $u^{\frac{(\alpha+\varepsilon)n}{(\alpha+\varepsilon)-n}}$ и не медленнее $u^{\frac{(\alpha-\varepsilon)n}{(\alpha-\varepsilon)-n}}$. Следовательно, величина $\alpha^* = \ln C_{\overline{M}}/\ln 2$ равна $\frac{\alpha n}{\alpha-n}$, и, используя оценки (1.8), выводим

$$\left(\int\limits_Q \overline{M}(g)\,dx\right)^{\frac{n-\alpha}{n\alpha}} \le C\left(\int\limits_{2Q} M(|\nabla g)\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

Применяя приведенное неравенство Пуанкаре к функции $f_i \circ \varphi$, получаем

$$|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i)) \cap Q|^{\frac{n-\alpha}{n\alpha}} \le C(\Phi(B(y_i, 2r_i)))^{1/\gamma}|B(y_i,r_i)|^{\frac{n-p}{np}}.$$

Суммируя и применяя неравенство Гёльдера для сумм, выводим

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i)) \cap Q|\right)^{\frac{n-\alpha}{n\alpha}} \le C\left(\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(B(y_i, 2r_i))\right)^{1/\gamma}\left(\sum_{i=1}^{N}|B(y_i,r_i)|\right)^{\frac{n-p}{np}}.$$

Теперь оценим значения функции Φ через кратность покрытия по лемме 1.2

$$|\varphi^{-1}(E) \cap Q|^{\frac{n-\alpha}{n\alpha}} \le C(\Phi(U))^{1/\gamma}|U|^{\frac{n-p}{np}}.$$

Из этой оценки в силу произвольности выбора открытого множества U и абсолютной непрерывности функции Φ получим, что $|\varphi^{-1}(E)\cap Q| = 0$. Так как куб Q также выбран произвольно, получаем, что $|\varphi^{-1}(E)| = 0$ и, следовательно, отображение φ обладает N^{-1}-свойством Лузина.

$\square$

В качестве следствия теоремы 2.9 можно получить следующий результат:

Следствие 2.2. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_{M_1}(D')\cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D),$$

а N-функции $M(u), M_1(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию и

$$\int\limits_1^\infty \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/m}}\,dt = \infty; \quad \int\limits_1^\infty \frac{M_1^{-1}(t)}{t^{1+1/m}}\,dt = \infty.$$

Тогда якобиан $J(x,\varphi)$ такого отображения почти всюду отличен от нуля.

Доказательство. По теореме 2.9 отображение φ обладает N^{-1}-свойством Лузина. Это, в частности, означает, что образ множества положительной меры также является множеством положительной меры. Рассмотрим формулу замены переменной в интеграле Лебега:

$$\int\limits_{D\setminus E} (g\circ\varphi)|J(x,\varphi)|dx = \int\limits_{D'} g(y)dy,$$

где E — некоторое множество нулевой меры. Обозначим символом Z множество нулей якобиана $Z = \{x\in D\setminus E \mid J(x,\varphi)=0\}$. Если $|Z|>0$, то $|\varphi(Z\setminus E)|>0$. Но по формуле замены переменной $|\varphi(Z\setminus E)| = 0$. Следовательно, $|Z| = 0$. $\square$

С помощью теоремы 2.9 докажем утверждение о продолжении изучаемого оператора композиции.

Предложение 2.1. *Пусть отображение $\varphi : D\to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D')\cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$. Тогда распространение этого оператора по непрерывности совпадает с оператором композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$.*

Доказательство. Покажем, что $f\circ\varphi$ — локально суммируемая в D функция. Для случая пространств Соболева этот факт доказан в [86], а так как в рассматриваемом в настоящей работе случае N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, мы также можем воспользоваться неравенством Пуанкаре [82] и применить схему доказательства шага 3 теоремы 5 статьи [86].

Фиксируем шар $B \Subset D$. Заметим, что $|B \setminus Z| > 0$. Суммируемость композиции $f \circ \varphi$ на B очевидна, если функция f ограничена в D. Приведем случай с произвольной функцией к ограниченной снизу функции f такой, что $f \circ \varphi(x) = 0$ на некотором множестве $F \subset B \setminus Z$ положительной меры. Множество $\{z \in \varphi(B \setminus Z) \mid f(z) - k_0 \leq 0\}$ будет иметь положительную меру при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$. Тогда вместо f можно рассмотреть функцию $\max(f(z) - k_0, 0) \in L^1_{M_1}(D')$. Фиксируем функцию $f \in L^1_{M_1}(D')$, для которой множество $F = \{x \in B \setminus Z \mid f \circ \varphi(x) = 0\}$ имеет положительную меру. Тогда функции $u_m = g_m \circ \varphi \in L^1_M(D)$, где $g_m = \min(f, m)$, монотонно возрастая, сходятся на B к функции $u = f \circ \varphi$ при $m \to \infty$. Так как функции u_m ограничены, мы можем применить для них неравенство Пуанкаре предложения 1.2. В результате получим

$$\int\limits_B M(|u_m|)dx \leq C \int\limits_B M(|\nabla u_m|)dx \leq C \int\limits_B M(|\nabla u|)dx.$$

Так как функции $u_m = g_m \circ \varphi$, монотонно возрастая, сходятся на B к функции $u = f \circ \varphi$, то по теореме Беппо Леви функция $u = f \circ \varphi \in L_M(B)$. Поскольку шар $B \Subset D$ произволен, композиция $f \circ \varphi$ локально суммируема в D.

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть N-функция $M(u)$ удовлетворяет условию (2.9). Рассмотрим последовательность функций $f_k \in L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D')$, сходящихся к f не только в $L^1_{M_1}(D')$, но и почти всюду в области D'. Тогда последовательность композиций $f_k \circ \varphi$ сходится в $L^1_M(D)$ и кроме того сходится почти всюду в D, так как в рассматриваемом случае отображение φ обладает N^{-1}-свойством Лузина.

Случай 2. Пусть теперь N-функция $M(u)$ удовлетворяет условию 2 теоремы 1.2. В этом случае из последовательности функций $f_k \in L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D')$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к f не только в $L^1_{M_1}(D')$, но и поточечно в области D'. Тогда последовательность композиций $f_k \circ \varphi$ сходится в $L^1_M(D)$ и сходится поточечно к $f \circ \varphi$ в D. Заметим, что в данном случае в определении оператора композиции $\varphi^* f = f \circ \varphi$ функция f должна являться непрерывным представителем класса эквивалентных функций из $f_k \in L^1_{M_1}(D')$. $\square$

Замечание 2.3. *В статье [77] проводилось исследование оператора композиции пространств Соболева — Орлича, но рассматривались операторы $\varphi^* : W^1_M(D') \to W^1_M(D)$ в нормированных пространствах $W^1_M(D)$, а не полунормированных L^1_M. Кроме того, на*

N-функции, определяющие эти пространства, накладывались более жесткие ограничения: рассматриваемые в [77] N-функции $M:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ удовлетворяют условию

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u^q\ln^\alpha u}=1$$

для $q\geq n$ и $\alpha\geq 0$ или $q\leq n$ и $\alpha\leq 0$. В [77] было доказано, что если гомеоморфизм порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича W^1_M, то он является q-квазиконформным отображением ($\varphi\in W^{1,1}_{loc}(D)$, $|D\varphi(x)|^q\leq K|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x\in D$). Необходимое условие настоящей работы в случае, когда функции, определяющие пространства Соболева — Орлича, равны и имеют тот же вид, что и в [77], совпадает с необходимым условием [77].

2.3 Случаи более строгих ограничений на N-функции

Как отмечалось во введении, важную роль при изучении пространств Орлича играет скорость роста функции, его определяющей. В этом разделе приведены результаты, аналогичные теореме 2.7, но полученные для специальных классов N-функций. Введение дополнительных ограничений позволяет приблизить необходимые условия к достаточным.

2.3.1 N-функции, имеющие главные части вида $u^\alpha(\ln u)^a$

Рассмотрим пространства Соболева — Орлича $L^1_M(D')$ и $L^1_{M_1}(D)$, определенные особым классом N-функций, их главные части имеют вид

$$\text{гл. часть } M(u)=Q(u)=Cu^\alpha(\ln u)^{a_1}(\ln\ln u)^{a_2}...(\ln...\ln u)^{a_n}, \tag{2.10}$$

$$\text{гл. часть } M_1(u)=Q_1(u)=C_1u^\beta(\ln u)^{b_1}(\ln\ln u)^{b_2}...(\ln...\ln u)^{b_n}. \tag{2.11}$$

Отметим, что такие функции удовлетворяют Δ_2-условию с константами 2^α и 2^β соответственно, так как выполняются равенства

$$\lim_{u\to\infty}\frac{M(2u)}{M(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{M(2u)}{M(u)}=2^\alpha.$$

Используя элементарные свойства степенных и логарифмических функций, мы можем получить неравенства, представленные для наглядности в виде следующей таблицы (на примере функции $M(u)$, $\varepsilon>1$):

$a_i > 0$	$a_i < 0$
$k_1 u^{\alpha} \le k_2 M(u) \le u^{\alpha\varepsilon} + 1$	$u^{\alpha/\varepsilon} - 1 \le k_3 M(u) \le k_4 u^{\alpha}$
$(u-1)^{\frac{1}{\alpha\varepsilon}} \le k_5 M^{-1}(u) \le k_6 u^{\frac{1}{\alpha}}$	$k_7 u^{\frac{1}{\alpha}} \le k_8 M^{-1}(u) \le (u+1)^{\frac{\varepsilon}{\alpha}}$

Далее определим главную часть функции $M_2(u)$ из равенств (1.7). Для этого найдем функцию $Q_3 =$ гл. часть $M_3(u) = \frac{1}{2}(Q^{-1} \circ Q_1)(u)$. Она будет иметь вид:

$$Q_3(u) = C_3 u^{\frac{\beta}{\alpha}} (\ln u)^{\frac{b_1 - a_1}{\alpha}} (\ln \ln u)^{\frac{b_2 - a_2}{\alpha}} ... (\ln ... \ln u)^{\frac{b_n - a_n}{\alpha}}.$$

Теперь определим дополнительную к ней функцию Q_3^*:

$$Q_3^*(u) = C_3^* u^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}} (\ln u)^{\frac{a_1 - b_1}{\beta - \alpha}} (\ln \ln u)^{\frac{a_2 - b_2}{\beta - \alpha}} ... (\ln ... \ln u)^{\frac{a_n - b_n}{\beta - \alpha}}.$$

В результате получаем, что главная часть функции $M_2(u) = M(2M_3^*(u))$ имеет вид

$$Q_2(u) = C_2 u^{\frac{pq}{p-q}} (\ln u)^{\frac{pa_1 - qb_1}{p-q}} (\ln \ln u)^{\frac{pa_2 - qb_2}{p-q}} ... (\ln ... \ln u)^{\frac{pa_n - qb_n}{p-q}}.$$

В соответствии с определением 2.1 для отображения $\varphi : D \to D'$ введем следующие функции искажения $K_{M_1,M_2}(x,\varphi)$ (вместо символов N-функций будем ставить знаки $+$ и $-$ в зависимости от того, в положительные или отрицательные степени возводятся логарифмы соответствующей N-функции; $K_{M_1,M_2}(x,\varphi) = 0$, если знаменатель обращается в ноль):

	$a_i > 0; b_i > 0$	$a_i > 0; b_i < 0$
$pa_i - qb_i > 0$	$K_{+,+}(x,\varphi) = \frac{(\lvert D\varphi\rvert(x))^{\frac{1}{\varepsilon}}}{M_1^{-1}(\lvert J(x,\varphi)\rvert+1)}$	$K_{-,+}(x,\varphi) = \frac{(\lvert D\varphi\rvert(x))^{\frac{1}{\varepsilon}}}{(M_1^{-1}(\lvert J(x,\varphi)\rvert))^{\frac{1}{\varepsilon}}}$
$pa_i - qb_i < 0$	$K_{+,-}(x,\varphi) = \frac{\lvert D\varphi\rvert(x)}{(M_1^{-1}(\lvert J(x,\varphi)\rvert+1))^{\varepsilon}}$	

Отметим, что случай $a_i < 0$ можно рассмотреть таким же образом, однако результаты оказываются менее симметричными и не позволяют заметно улучшить теорему 2.7.

Сформулируем теорему, аналогичную теореме 2.7 для N-функций, имеющих указанный выше вид.

Теорема 2.10. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$, M,M_1 имеют вид* (2.10). *Тогда φ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$*;*

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

4) *конечна величина $K_{M_1,M_2,\varphi} = \|K_{M_1,M_2}(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}\|$.*

Доказательство. Как было отмечено выше, отличие данной теоремы от теоремы 2.7 состоит в уточнении условия 3).

По теореме 2.6 для любой функции $f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A) \cap \mathrm{Lip}(A)$ выполняется неравенство $\|\varphi^* f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_M(\varphi^{-1}(A))\| \leq C(\Phi(A))^{1/\gamma}\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A)\|$, где $A \subset D'$ — открытое подмножество. Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне $B(0,2)$. Подставляя в это неравенство функции $f_i(y) = (y_i - y_{0,i})\eta(\frac{y-y_0}{r})$, получаем:

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx\Bigg)^{1/\alpha} \leq C(\Phi(B(y_0,2r)))^{1/\gamma}(r^n)^{1/\beta}. \tag{2.12}$$

При $M < M_1$ из неравенства (2.12) выводим соотношение

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx \leq C\bigg(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\bigg)^{\alpha/\gamma} r^n.$$

Применим к левой части этого неравенства формулу (2.7) замены переменной:

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z} M(|D\varphi|)dx$$
$$= \int\limits_{B(y_0,r)} \frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}dy \leq C\bigg(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\bigg)^{\alpha/\gamma} r^n.$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной счетно-аддитивной функции множества вытекает, что

$$\bigg(\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\bigg)^{\gamma/\alpha} \leq C\Phi'(y) \quad \text{почти всюду в } D'.$$

Интегрируя неравенство по области D' и пользуясь свойствами функций M и M_1 (ε будем выбирать одинаковым для всех N-функций), получаем требуемый результат (рассмотрим только случай функции $K_{-,+}(x,\varphi)$):

$$
\begin{gathered}
C\|\varphi^*\|^\gamma \geq C\Phi(D') \geq C\int\limits_{D'} \Phi'(y)dy \geq C_1 \int\limits_{D'} \left(\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right)^{\gamma/\alpha} dy = \\
C_1 \int\limits_{D\setminus Z} \left(\frac{M(|D\varphi|)}{(|J(x,\varphi)|)}\right)^{\gamma/\alpha} |J(x,\varphi)|dx = C_1 \int\limits_{D\setminus Z} \left(\frac{(M(|D\varphi|))^{1/\alpha}}{(|J(x,\varphi)|)^{1/\beta}}\right)^{\gamma} dx \geq \\
C_2 \int\limits_{D\setminus Z} \left(\frac{(M(|D\varphi|))^{1/\alpha\varepsilon}}{(|J(x,\varphi)|)^{1/\beta\varepsilon}}\right)^{\gamma\varepsilon} dx \geq C_3 \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{(M(|D\varphi|))^{1/\alpha\varepsilon}}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right) dx - C_3|D| \geq \\
C_4 \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{|D\varphi|^{1/\varepsilon}}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right) dx - C_3|D| \geq CK_{M_1,M_2,\varphi} - C'|D|
\end{gathered}
$$

□

2.3.2 N-функции, удовлетворяющие Δ'-условию

Далее мы рассмотрим пространства Соболева — Орлича, определенные N-функциями, удовлетворяющими Δ'-условию. Кроме того, функция M_2 из условий неравенства Гёльдера также должна удовлетворять Δ'-условию. В этом случае аналогичными рассуждениями может быть получено утверждение, более точно описывающее поведение нормы оператора композиции сравнительно с теоремой 2.6.

Теорема 2.11. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$. Тогда*

$$
\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')} M_2\left(C\frac{\|\varphi^* f \mid L^1_M(\varphi^{-1}(A'))\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')\|}\right),
$$

где C — некоторая постоянная, является ограниченной монотонной квазиаддитивной функцией, определенной на открытых множествах из области D'.

Доказательство. Монотонность следует из определения функции Φ

Пусть $A'_i, i \in N,$ — открытые попарно непересекающиеся множества в D', $A'_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A'_i$, $A_i = \varphi^{-1}(A'_i), i = 0, 1....$ Рассмотрим такую функцию $f_i \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)$, чтобы одновременно выполнялись условия

$$
\|\varphi^* f_i \mid L^1_M(A_i)\| \geq M_2^{-1}(\Phi(A'_i)(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}))\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)\|,
$$

$$
H(\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A'_i)\|) = \hat{p}_3^*(H(M_2^{-1}(\Phi(A'_i)(1 - \frac{\varepsilon}{2^i})))),
$$

где $\hat{p}_3^*$ — правая производная функции $\hat{M}_3^*$, определяемой ниже, $\varepsilon \in (0{,}1)$. Такая функция существует в силу того, что норма в пространстве L_M однородна, из чего следует, что умножение на положительную константу не изменит знака приведенного выше неравенства, и, подбирая константу соответствующим образом, мы всегда сможем добиться выполнения последнего равенства. Полагая $f_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$ и используя неравенство (1.6), получаем:

$$
\begin{aligned}
\left\| \varphi^* f_N \mid L_M^1\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)\right\| &\geq M^{-1}\left(\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{N} H(\|\varphi^* f_i \mid \overset{\circ}{L}{}_M^1(A_i)\|)\right) \\
&\geq M^{-1}\left(\frac{1}{c^3}\sum_{i=1}^{N} H\left(M_2^{-1}\left(\Phi(A_i')\left(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)\right) H(\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}_{M_1}^1(A_i')\|)\right) \\
&\geq M^{-1}\left(\frac{1}{c^3}\hat{M}_3^{*-1}\left(\sum_{i=1}^{N} \hat{M}_3^*\left(H\left(M_2^{-1}\left(\Phi(A_i')\left(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\right)\right)\right)\right)\times\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times\, \hat{M}_3^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{M}_3(H(\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}_{M_1}^1(A_i')\|))\right)\right),
\end{aligned}
$$

где функции $\hat{M}_3$ и $\hat{M}_3^*$ определяются из равенств $M_1(u) = \hat{M}_3(M(u))$, $M_2(u) = \hat{M}_3^*(M(u))$. Функции $\hat{M}_3$ и $\hat{M}_3^*$ не обязательно являются дополнительными друг другу, но для них выполняется неравенство (1.1) в силу их определения. Следовательно, для них верно и неравенство (1.6).

Теперь рассмотрим N-функцию $\hat{M}(u)$, эквивалентную $M(u)$, такую, чтобы $\hat{M}^{-1}(H(u)) \geq Cu$, где C — некоторая константа. Для такой функции может нарушаться глобальность Δ'-условия, но так как мы не будем его применять для функции $\hat{M}(u)$, это не повлияет на дальнейшие рассуждения. Более того, $M^{-1}(\hat{M}(u)) \geq C_1 u$ (подробную информацию о свойствах классов эквивалентных N-функций читатель сможет найти в [61] и в [74]). В результате получим следующее неравенство: $M^{-1}(H(u)) = M^{-1}(\hat{M}(\hat{M}^{-1}(H(u)))) \geq Cu$. Используя это неравенство и определение функций $\hat{M}_3$ и $\hat{M}_3^*$, приходим к соотношениям:

$$M^{-1}\Big(\frac{1}{c^3}\hat{M}_3^{*-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}\hat{M}_3^*\Big(H\Big(M_2^{-1}\Big(\Phi(A_i')\Big(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\times$$

$$\times\hat{M}_3^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}\hat{M}_3(H(\|f_i\mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A_i')\|))\Big)\Big)$$

$$\geq c_1M_2^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Phi(A_i')\Big(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\Big)\Big)M_1^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}M_1(c_2\|f_i\mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A_i')\|)\Big)$$

$$\geq c_1M_2^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Phi(A_i')\Big(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\Big)\Big)H_1^{-1}\Big(H_1\Big(c_2\Big\|f_N\mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\Big(\bigcup_{i=1}^{N}A_i'\Big)\Big\|\Big)\Big)$$

$$\geq CM_2^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Phi(A_i')-\varepsilon\Phi(A_0')\Big)\Big\|f_N\mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\Big(\bigcup_{i=1}^{N}A_i'\Big)\Big\|,$$

где C — константа, зависящая только от конкретного вида N-функций M и M_1.

Отсюда следует, что

$$M_2^{-1}(\Phi(A_0'))\geq\sup C\frac{\Big\|\varphi^*f_N\mid \overset{\circ}{L}{}^1_M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N}A_i\Big)\Big\|}{\Big\|f_N\mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N}A_i'\Big)\Big\|}\geq M_2^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Phi(A_i')-\varepsilon\Phi(A_0')\Big),$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $f_N\in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N}A_i'\Big)$ указанного выше вида. Так как N и ε произвольны, квазиаддитивность функции Φ доказана. □

Используя доказанную теорему, получаем следующий результат.

Теорема 2.12. *Пусть функции M и M_1 такие, что функция M_2 из равенств* (1.7) *удовлетворяет Δ'-условию. Гомеоморфизм $\varphi : D\to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D')\cap\mathrm{Lip}(D')\to L^1_M(D)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\varphi\in\mathrm{ACL}(D)$;

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

3) *конечна величина $K_{\varphi,M}=\|K_M(\cdot,\varphi)\mid L_{M_2}\|$ ($K_{\varphi,M}=\|K_M(\cdot,\varphi)\mid L_\infty\|$ при $M=M_1$).*

Норма оператора $\varphi^* : L^1_{M_1}(D')\cap\mathrm{Lip}(D')\to L^1_M(D)$ эквивалентна величине $K_{\varphi,M}$, а именно $\alpha K_{\varphi,M}\leq\|\varphi^*\|\leq K_{\varphi,M}$, где α — положительная постоянная.

Доказательство. Необходимость. ACL-свойство для отображения $\varphi : D\to D'$ устанавливается аналогично теореме 2.7.

По теореме 2.11 для любой функции $f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A) \cap \mathrm{Lip}(A)$ выполняется неравенство $\|\varphi^* f \mid L^1_M(\varphi^{-1}(A))\| \le CM_2^{-1}(\Phi(A))\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A)\|$, где $A \subset D'$ — открытое подмножество (при $M = M_1$ полагаем $M_2^{-1}(\Phi(A)) = \|\varphi^*\|$). Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0{,}1)$ и нулю вне $B(0{,}2)$. Подставляя в это неравенство функции $f_i(y) = (y_i - y_{0,i})\eta(\frac{y-y_0}{r})$, получаем:

$$M^{-1}\left(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx\right) \le CM_2^{-1}(\Phi(B(y_0{,}2r)))M^{-1}(r^n). \tag{2.13}$$

Пусть $Z = \{x \in D \setminus E \mid J(x,\varphi) = 0\}$. Покажем, что

$$\int\limits_Z M(|D\varphi|)dx = 0. \tag{2.14}$$

По формуле (2.7) $|\varphi(Z \setminus E)| = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \supset \varphi(Z \setminus E)$, $|U| < \varepsilon$. Существует конечнократное покрытие множества U шарами $\{B(x_i{,}r_i)\}$ такое, что шары $\{B(x_i{,}2r_i)\}$ также образуют конечнократное покрытие множества U и $\sum r_i^n < N\varepsilon$ (кратность N покрытия не зависит от множества U). Тогда из неравенства (2.13), используя тот факт, что функция M удовлетворяет Δ'-условию и что функции, удовлетворяющие Δ_2-условию, растут не быстрее некоторой степенной функции, получаем:

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(Z)} M(|D\varphi|)dx \le \sum_{i=1}^\infty \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} M(|D\varphi|)dx \le CM(\|\varphi^*\|)\sum_{i=1}^\infty r_i^n \quad \text{при } M = M_1;$$

$$\sum_{i=1}^\infty \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} M(|D\varphi|)dx \le C\sum_{i=1}^\infty \hat{M}_3^{*-1}(\Phi(B(y_i{,}2r_i)))\hat{M}_3^{-1}(r_i^n)$$
$$\le C(\Phi(D'))^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^\infty r_i^n\right)^{\frac{1}{q}} < C(\Phi(D'))^{\frac{1}{p}}(N\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при } M < M_1.$$

Так как $\Phi(D') < \infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то (2.14) доказано и, следовательно, $|D\varphi| = 0$ почти всюду на множестве Z.

Рассмотрим случай, когда $M = M_1$. Применим к левой части (2.13) формулу (2.7). Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла вытекает, что

$$\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|} \leq CM(\|\varphi^*\|) \quad \text{почти всюду в } D' \setminus \varphi(E \cup Z).$$

Пусть $S \subset D' \setminus \varphi(E \cup Z)$ — множество, где последнее неравенство неверно. Тогда по формуле (2.7) $|J(x,\varphi)| = 0$ почти всюду на множестве $\varphi^{-1}(S)$. Поэтому $\varphi^{-1}(S) \subset Z$ и

$$M(|D\varphi|) \leq CM(\|\varphi^*\|)|J(x,\varphi)| \text{ почти всюду в } D.$$

При $M < M_1$ из неравенства (2.13), следствия из неравенства Юнга и Δ'-условия получим:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx \\
&\leq CM\Big(M_2^{-1}(\Phi(B(y_0,2r)))M_2^{-1}\Big(\frac{1}{|B(y_0,2r)|}\Big)H_2^{-1}(r^n)M_1^{-1}(r^n)\Big) \\
&\leq C_1 M\left(M_2^{-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)M_2^{-1}(r^n)M_1^{-1}(r^n)\right) \\
&\leq C_2 \hat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)M(M_2^{-1}(r^n)M_1^{-1}(r^n)) \\
&\leq C_3 \hat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)M(M_3^{*-1}(M^{-1}(r^n))M_3^{-1}(M^{-1}(r^n))) \\
&\leq C_3 \hat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)M(M^{-1}(r^n)) \\
&\leq C_3 \hat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)r^n.
\end{aligned}$$

Применим к левой части этого неравенства формулу (2.7) замены переменной:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} M(|D\varphi|)dx &= \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z} M(|D\varphi|)dx \\
&= \int\limits_{B(y_0,r)} \frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}dy \leq C\hat{M}_3^{*-1}\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)r^n.
\end{aligned}$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной счетно-аддитивной функции множества вытекает, что

$$\hat{M}_3^*\left(\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right) \leq C\Phi'(y) \quad \text{почти всюду в } D'.$$

Интегрируя неравенство по области D' и используя следствие из неравенства Юнга и Δ'-условие, выводим:

$$
\begin{aligned}
M_2(K) &\leq C \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}\right) dx \\
&= C \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \frac{M_2^{-1}(|J(x,\varphi)|)}{M_2^{-1}(|J(x,\varphi)|)}\right) dx \\
&\leq C \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{|D\varphi|}{M^{-1}(|J(x,\varphi)|)} M_2^{-1}(|J(x,\varphi)|)\right) dx \\
&\leq C_1 \int\limits_{D\setminus Z} M_2\left(\frac{|D\varphi|}{M^{-1}(|J(x,\varphi)|)}\right) |J(x,\varphi)| dx \\
&\leq C_1 \int\limits_{D'} \hat{M}_3^*\left(M\left(\frac{|D\varphi|(\varphi^{-1}(y))}{M^{-1}(|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|)}\right)\right) dy \\
&\leq C_2 \int\limits_{D'} \hat{M}_3^*\left(M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y)) M\left(H^{-1}\left(\frac{1}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right)\right)\right) dy \\
&\leq C_3 \int\limits_{D'} \hat{M}_3^*\left(\frac{M(|D\varphi|)(\varphi^{-1}(y))}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\right) dy \\
&\leq C \int\limits_{D'} \Phi'(y) dy \leq C\Phi(D') \leq C M_2(\|\varphi^*\|).
\end{aligned}
$$

Достаточность. Доказана в теореме 2.8. □

Замечание 2.4. *В качестве примера N-функций M и M_1, удовлетворяющих Δ'-условию, для которых функция M_2 также удовлетворяет этому условию, рассмотрим функции, главные части которых имеют следующий вид:*

$$Q(u) = Cu^q (\ln u)^{a_1} (\ln\ln u)^{a_2} ... (\ln ... \ln u)^{a_n} \quad (a_i \geq 0),$$

$$Q_1(u) = C_1 u^p (\ln u)^{b_1} (\ln\ln u)^{b_2} ... (\ln ... \ln u)^{b_n} \quad (b_i \geq 0).$$

В этом случае главная часть функция M_2 будет выглядеть как:

$$Q_2(u) = C_2 u^{\frac{pq}{p-q}} (\ln u)^{\frac{pa_1 - qb_1}{p-q}} (\ln\ln u)^{\frac{pa_2 - qb_2}{p-q}} ... (\ln ... \ln u)^{\frac{pa_n - qb_n}{p-q}}.$$

Можно показать, что если выполняется условие $pa_i \geq qb_i$, $i = 1, \ldots, n$, то функция M_2 удовлетворяет Δ'-условию.

Замечание 2.5. *Оператор композиции теорем 2.10 и 2.12 может быть распространен на все пространство как и в теореме 2.7.*

Глава 3

Регулярность отображения, обратного к гомеоморфизму класса Соболева — Орлича

Основной задачей является определение условий для гомеоморфизма $\varphi \in W^1_M$, обеспечивающих регулярность обратного отображения. Отметим, что если N-функция M, определяющая пространство Соболева — Орлича W^1_M, является степенной, задача сводится к случаю пространств Соболева W^1_p, наиболее полное исследование которого проведено в статье [86]. Методы [86] применяются для доказательства утверждений, приведенных в данной главе.

3.1 Направления изучения свойств регулярности обратного отображения

Существует два основных направления, позволяющих изучать свойства регулярности обратного отображения по известным свойствам регулярности прямого. Первое из них основано не методах квазиконформного анализа, второе возникло при исследовании свойств специальных классов отображений, появившихся при изучении некоторых вопросов нелинейной теории упругости. Мы приведем основные этапы исследований в каждом направлении.

В первую очередь рассмотрим исторически первое направление, связанное с квазиконформным анализом. В работах [97, 98] сформулирован следующий базовый результат: *гомеоморфизм, обратный к квазикоформному гомеоморфизму $\varphi : \Omega \to \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, также квазиконформен.* Этот результат можно представить в следующем виде: *гомеомор-*

физм $\varphi : \Omega \to \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *класса Соболева* $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, *удовлетворяющий условию*

$$|D\varphi(x)|^n \leq K|\det D\varphi(x)|$$

для почти всех $x \in \Omega$ *с некоторой постоянной* K, *не зависящей от* $x \in \Omega$, *имеет обратный, принадлежащий* $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega')$ *и такой, что*

$$|D\varphi^{-1}(y)|^n \leq K'|\det D\varphi^{-1}(y)|$$

для почти всех $y \in \Omega'$, *где постоянная* K' *выражается через* K .

Для исследования проблемы описания свойств регулярности обратного отображения важными являются результаты работы [24], возникшей из методов статей [23, 24]. В ней впервые изучены свойства отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ с условием конечного искажения.

Далее, новыми методами и методами квазиконформного анализа работ [99, 100] в статьях [17, 18] исследовался вопрос об аналитических свойствах гомеоморфизма $\psi : \Omega' \to \Omega$, обратный φ к которому индуцирует ограниченный оператор

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega') \to L^1_q(\Omega), \quad n \leq q \leq p < \infty.$$

Полученные свойства гомеоморфизма ψ обеспечивают ограниченность оператора

$$\psi^* : L^1_{q/(q-n+1)}(\Omega) \to L^1_{p/(p-n+1)}(\Omega').$$

Окончательные результаты установлены в [86] с использованием геометрической теории меры. Отметим, что в работах [17, 18] возникает упомянутый во введении класс отображений с ограниченным (p,q)-искажением (отображение $f : \Omega \to \Omega'$ принадлежит $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, а его локальное p-искажение

$$K_p(x,f) = \inf\{k(x) : |Df(x)| \leq k(x)J(x,f)^{1/p}\}$$

интегрируемо в степени κ, $1/\kappa = 1/q - 1/p$, $p \geq q \geq 1$). Подробное изучение свойств таких отображений читатель сможет найти в [101].

Как уже отмечалось ранее, наиболее полные результаты по рассматриваемому вопросу в случае отображений классов Соболева были получены в [86]. Одним из основных утверждений этой работы является приведенная ниже теорема [**?**], отличительная особенность которой состоит в том, что исходное отображение не предполагается принадлежащим некоторому классу Соболева, что обеспечивает более широкий круг ее применения. Приведем еще один результат статьи [86], аналог которого для пространств Соболева — Орлича мы доказываем в настоящей работе (как $\operatorname{adj} A$ будем обозначать матрицу, присоединенную к A, т.е. составленную из алгебраических дополнений для соответствующих элементов транспонированной матрицы).

Теорема 3.1 ([86]). *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D), n-1 \leq q \leq \infty$;

2) φ *имеет конечное коискажение* ($\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ *почти всюду на множестве* $Z = \{x \in D : J(x,\varphi) = 0\}$);

3) $\mathcal{K}_{\varphi,p}(x) = \frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x,\varphi)|^{(n-1)/p}} \in L_\rho(D)$, *где* $1/\rho = (n-1)/q - (n-1)/p, n-1 \leq q \leq p \leq \infty$ ($\rho = \infty$ *при* $q = p$).

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{p',\mathrm{loc}}(D')$, *где* $p' = p/(p-n+1)$, $p' = 1$ *при* $p = \infty$;

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение;*

6) $K_{\varphi^{-1},p'}(y) = \frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{|J(y,\varphi^{-1})|^{1/q'}} \in L_\rho(D')$, *где* $q' = q/(q-n+1)$, $q' = \infty$ *при* $q = n-1$.

Из условий на исходное отображение в представленной теореме 3.1 можно заметить еще одну существенную особенность приведенных в статье [86] результатов. В ней предполагается, что гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает свойством конечного коискажения:

Определение 3.1. *Отображение $\varphi : D \to D'$ имеет конечное коискажение, если* $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ *почти всюду на множестве*

$$Z = \{x \in D : J(x,\varphi) = 0\}.$$

В то же время во многих предшествующих работах, посвященных этому вопросу, требуется условие конечности искажения.

Далее мы рассмотрим основные этапы второго направления изучения проблемы, исследуемой в настоящей работе. Необходимость определения свойств обратного отображения для гомеоморфизмов класса Соболева W^1_p возникла также в связи с изучением некоторых вопросов нелинейной теории упругости. В работах Дж. Болла [79, 102] доказан следующий результат:

Теорема 3.2 ([79]). *Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ - ограниченная, строго Липшицева область. Если функция $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ принадлежит $W^1_q(\Omega)$, $q>n$, совпадает на $\partial\Omega$ с некоторым гомеоморфизмом*

u_0 области Ω, причем $u_0(\Omega)$ удовлетворяет условию конуса, а $\det Du(x) > 0$ *почти всюду в Ω и если для некоторого $p' > n$ выполнено условие*

$$\int\limits_{\Omega} |Du^{-1}(u(x))|^{p'} \det Du(x) dx < \infty,$$

тогда исходная функция u является гомеоморфизмом из Ω в $u_0(\Omega)$, а обратное отображение u^{-1} принадлежит классу $W^1_{p'}(u_o(\Omega))$.

Доказательство того факта, что отображение $u : \Omega \to u_0(\Omega)$ является гомеоморфизмом, приведено в [102]. Покажем, что второе утверждение теоремы 3.2 может быть получено как частный случай теоремы 3.1:

$$\int\limits_{\Omega} |Du^{-1}(u(x))|^{p'} \det Du(x) dx = \int\limits_{\Omega} \frac{|\operatorname{adj} Du(x)|^{p'}}{J(x,u)^{(p'-1)}} dx = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|\operatorname{adj} Du(x)|}{J(x,u)^{(n-1)/p}} \right)^{p'} dx < \infty,$$

где $p = p'(n-1)/(p'-1)$. Следовательно, величина p больше $n-1$, так как по условию теоремы $p' > n$. Условие $1/\rho = (n-1)/q - (n-1)/p$ теоремы 3.1 в данном случае выглядит следующим образом: $1/p' = (n-1)/q - (p'-1)/p'$. Из этого заключаем, что $q = n-1$. Так как в работе [102] требуется, чтобы исходное отображение $u \in W^1_q, q > n$, а в теореме 3.1 для достижения того же самого результата требуется, чтобы u принадлежало только W^1_{n-1}, то из приведенных рассуждений следует, что указанная теорема Дж. Болла содержится в качестве частного случая в теореме 3.1.

Наряду с указанным результатом Дж. Болл в [79, 102] определяет классы отображений

$$A_{p,q} = \{f \in W^1_p(\Omega) : \operatorname{adj} Df \in L_q\},$$

где $p \geq n-1$ и $q \geq p/(p-1)$. Исследованию отображений различных подклассов в $A_{p,q}$ посвящены приводимые ниже работы.

О некоторых результатах в данном направлении уже упоминалось выше (отображения с конечным искажением). В [103–105] определены некоторые свойства отображений с конечным искажением без предположения о принадлежности такого отображения классу W^1_n. Также в статьях [103–105] авторы изучают класс отображений с экспоненциально интегрируемым искажением и приводят следующий результат: *пусть $f \in W^1_1(\Omega)$ удовлетворяет условию*

$$|Df(x)|^n \leq K(x) J(x,f)$$

почти всюду в Ω*, где* $K \geq 1$ *и* $\exp(\lambda K)$ *интегрируема для некоторого* $\lambda > 0$*. Если* $J(x, f)$ *интегрируем, тогда* f *или постоянное отображение, или открытое и дискретное.* Дальнейшее изучение отображений с экспоненциально интегрируемым искажением представлено в статье [106], в которой рассмотрен более общий случай, когда $\exp(\Psi(K)) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\Psi(t)$ — строго возрастающая, дифференцируемая функция, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям.

Также стоит отметить работы, посвященные определению условий, при которых отображения с конечным искажением обладают N-свойством Лузина. Основные методы решения этой задачи были заложены при установлении N-свойства для отображений с ограниченным искажением в [28]. Далее, для отображений с конечным искажением этот вопрос последовательно изучался в [24, 107–109] и в [105]. В работе [110] изучена данная проблема для отображений с экспоненциально интегрируемым искажением.

Достижения в исследовании приведенных выше различных классов отображений позволили решить задачу об определении свойств обратного отображения по известным свойствам прямого. Сначала данная проблема была изучена для различных гомеоморфизмов $f : \Omega \to f(\Omega)$, $\Omega, f(\Omega) \in \mathbb{R}^2$, а затем получено обобщение для пространств $\mathbb{R}^n, n > 2$.

В работах [111, 112] рассматривался вопрос: при каких условиях обратное отображение для гомеоморфизма $f : \Omega \to f(\Omega)$, $\Omega, f(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$, $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \geq 1$ принадлежит классу $W^1_{1,\mathrm{loc}}(f(\Omega))$ или даже $W^1_{q,\mathrm{loc}}(f(\Omega))$ для некоторого $q > 1$. Наиболее важным из таких условий в работах [111,112] является конечность искажения. В [111,113–115] также исследовалась аналогичная задача, но для случая отображений с экспоненциально интегрируемым искажением. Приведем один из основных полученных в [115] результатов: *пусть* Ω *— область в* $\mathbb{R}^2$ *и* $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *— гомеоморфизм с конечным искажением. Предположим, что функция искажения* K_f *удовлетворяет условию* $\exp(\lambda K_f) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *для некоторого* $\lambda > 0$*. Тогда* $K^p_{f^{-1}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(f(\Omega))$ *для всех* $p < \lambda$*.* В работе [116] изучается вопрос об обратимости отображений с ограниченной вариацией. Для них доказано следующее утверждение: *пусть* Ω *— область в* $\mathbb{R}^2$ *и* $f : \Omega \to \Omega'$ *— гомеоморфизм. Тогда* $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega')$*. Более того,* f *и* f^{-1} *почти всюду дифференцируемы.*

Исследованию задачи в пространствах $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, посвящены работы [116–118]. Приведенные в них результаты были обобщены в [119]. Основное утверждение состоит в следующем: *пусть* Ω *— область в* $\mathbb{R}^n$ *и пусть гомеоморфизм* $f \in W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$*. Тогда* $f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}(f(\Omega))$*. Если* f *имеет конечное искажение, тогда* $f^{-1} \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(f(\Omega))$ *и имеет конечное искажение.*

Отметим, что приведенные в двух предыдущих абзацах результаты, относящиеся к отображениям с конечным искажением и к отображениям с ограниченной вариацией, в качестве частных случаев также содержатся в работе [86].

3.2 Основной результат

Доказательство основного результата настоящей главы базируется на следующей теореме.

Теорема 3.3 ([86])**.** *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) *φ аппроксимативно дифференцируем почти всюду;*

2) $\operatorname{adj} D\varphi \in L_1$*;*

3) *отображение φ имеет конечное коискажение;*

4) *φ обладает N-свойством Лузина на гиперповерхностях.*

Тогда обратное отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$

5) *принадлежит классу* ACL*;*

6) *$D\varphi^{-1} \in L_1(D')$;*

7) *φ^{-1} имеет конечное искажение.*

С другой стороны, если обратное к гомеоморфизму $\varphi : D \to D'$ отображение имеет свойства 5)-7)*, а гомеоморфизм φ аппроксимативно дифференцируем на множестве Z, то φ обладает свойствами* 1)-4)*.*

Заметим, что свойство 4) выполняется для отображений классов Соболева — Орлича, при соблюдении условий приведенной ниже теоремы 3.4:

Теорема 3.4 ([120])**.** *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^1_{M,\,\mathrm{loc}}(D)$, где $M : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, такая что*

$$\int\limits_1^\infty \left(\frac{t}{M(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty.$$

Тогда отображение φ имеет почти всюду полный дифференциал в D. Кроме того, оно обладает N-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперповерхностях, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости.

Обозначения N-функций, фигурирующих в данной главе, соответствуют обозначениям, введенным в главе 2. Мы также рассматриваем в качестве исходных функций $M(u)$ и $M_1(u)$, по которым из равенств (1.7) определяем функцию $M_2(u)$. В формулируемых в настоящей главе результатах мы предполагаем, что N-функции M и M_1 выбраны таким образом, что функция M_2 удовлетворяет Δ'-условию.

Введем следующую функцию искажения для отображения $\varphi : D \to D'$:

$$\mathcal{K}_M(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{adj} D\varphi|(x)}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{n-1}}, & \text{если } J(x,\varphi) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \tag{3.1}$$

Теорема 3.5. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi \in W^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$*, где N-функция M удовлетворяет условиям теоремы 3.4;*

2) φ *имеет конечное коискажение;*

3) $\mathcal{K}_{\varphi,M} = \|\mathcal{K}_M(\cdot,\varphi) \mid L_{F_2}(D)\| < \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{F_1,\mathrm{loc}}(D')$*;*

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение;*

6) $K_{\varphi^{-1},F_1} = \left\| \frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2}(D') \right\| < \infty$.

Здесь N-функции F, F_2 определяются равенствами:

$$F^{-1}(u) = u(M^{-1}(1/u))^{n-1}, \quad F_2(u) = M_2(u^{\frac{1}{n-1}}),$$

а функция F_1 определяется из равенств:

$$F(u) = F_1(2F_3(u)), \quad F_2(u) = F_1(2F_3^*(u)).$$

Доказательство. Заметим, что условия 1)-3) теоремы 3.3 следуют из условий 1) и 2) теоремы 3.5. Условие 4) теоремы 3.3 выполнено, так как N-функция M удовлетворяет условию теоремы 3.4. Следовательно, для отображения $\varphi^{-1} : D' \to D$ верны заключения теоремы 3.3, и пункт 5) настоящей теоремы установлен.

Перейдем к доказательству свойства 6). Будем обозначать как Z множество нулей якобиана для отображения φ, а Z' - для φ^{-1}. В статье [86] показано, что множество Z можно выбрать таким образом, что $\varphi(Z) = \Sigma'$, где Σ' - множество сингулярности для отображения φ^{-1} (о множествах сингулярности см. [86]). Аналогично множество сингулярности Σ для φ можно выбрать так, что $Z' = \varphi(\Sigma)$.

В точках невырожденности матрицы Якоби $D\varphi(x)$ верны равенства [86]

$$J(y, \varphi^{-1}) = J(x, \varphi)^{-1}; \quad |D\varphi^{-1}(y)| = |J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|^{-1} |\operatorname{adj} D\varphi(\varphi^{-1}(y))|.$$

Используя их и следствие из неравенства Юнга (1.2), получаем:

$$\left\|\frac{|\operatorname{adj} D\varphi|}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{n-1}} \mid L_{F_2}(D)\right\|^{\ln C_{F_2}/\ln 2} \geq C \int\limits_{D\setminus Z} F_2\left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{n-1}}\right)\frac{|J(x,\varphi)|}{|J(x,\varphi)|}dx$$

$$\geq C \int\limits_{D'\setminus(Z'\cup\Sigma')} F_2\left(\frac{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|^{-1}|\operatorname{adj} D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|^{-1}(M^{-1}(|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|))^{n-1}}\right)dy$$

$$= C \int\limits_{D'\setminus Z'} F_2\left(\frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{F^{-1}(|J(y,\varphi^{-1})|)}\right)dy \geq C \left\|\frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2}(D')\right\|^{\ln C_{F_2}/\ln 2}.$$

Также отметим, что из определения функции F_2 следует, что она удовлетворяет Δ'-условию.

Теперь покажем, что $\varphi^{-1} \in W^1_{F_1,\mathrm{loc}}(D')$. Для этого используем неравенство Гёльдера (1.6):

$$\|D\varphi^{-1} \mid L_{F_1}(D')\| \leq 2\|F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|) \mid L_F(D')\| \left\|\frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2}(D')\right\|,$$

где F и F_1 должны удовлетворять равенствам, приведенным в условии теоремы. Из полученного неравенства следует конечность величины $\|D\varphi^{-1} \mid L_{F_1}(D')\|$, и, тем самым, пункт 4) настоящей теоремы доказан. □

В качестве примера определим функции F, F_1, F_2, если функция M — степенная (например, $M(u) = u^q$), а главная часть функции $M_1(u)$ имеет вид $Q_1(u) = u^p(\ln u)^a$, $a \in \mathbb{R}$. Введем обозначения: $q' = q/(q-n+1)$, $p' = p/(p-n+1)$.

В первую очередь из равенств (1.7) найдем функцию $M_2(u)$. Ее главная часть будет иметь вид:

$$Q_2(u) = u^{\frac{pq}{p-q}}(\ln u)^{\frac{-qa}{p-q}}.$$

Тогда главная часть функции $F_2(u)$ будет выглядеть как

$$G_2(u) = u^{\frac{p'q'}{q'-p'}}(\ln u^{1/(n-1)})^{\frac{-qa}{p-q}}.$$

Очевидно, функция $F(u) = u^{q'}$. Теперь мы можем определить главную часть функции $F_1(u)$ с помощью приведенных в теореме соотношений:

$$G_1(u) = u^{p'}(\ln u^{1/(n-1)})^{a(p'-1)}.$$

На основании теоремы 3.5 устанавливается справедливость следующего результата:

Теорема 3.6. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi \in W^1_{M,\,\mathrm{loc}}(D)$, *где N-функция M удовлетворяет условиям теоремы 3.4;*

2) φ *имеет конечное искажение;*

3) $K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}(D)\| < \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{F_1,\,\mathrm{loc}}(D')$;

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение;*

6) $K_{\varphi^{-1},F} = \|K_F(\cdot,\varphi^{-1}) \mid L_{F_2}(D')\| < \infty$.

Доказательство. Для доказательства покажем, что условия 2) и 3) теоремы 3.5 выполнены, если выполнены условия 2) и 3) настоящей теоремы. Свойство $\mathrm{adj}\, D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z, следует непосредственно из условия 2). Далее, используя соотношение [86] $|\,\mathrm{adj}\, D\varphi(x)| \le |D\varphi(x)|^{n-1}$ получаем:

$$\left\| \frac{|D\varphi|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \mid L_{M_2} \right\|^{\ln C_{M_2}/\ln 2} \ge C \int\limits_D M_2 \left(\frac{|D\varphi(x)|}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \right) dx$$
$$\ge C \int\limits_D M_2 \left(\frac{|\,\mathrm{adj}\, D\varphi(x)|^{\frac{1}{n-1}}}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)} \right) dx = \int\limits_D F_2 \left(\frac{|\,\mathrm{adj}\, D\varphi(x)|}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{n-1}} \right) dx$$
$$\ge C \left\| \frac{|\,\mathrm{adj}\, D\varphi^{-1}|}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{n-1}} \mid L_{F_2} \right\|^{\ln C_{F_2}/\ln 2}$$

Следовательно, выполнены условия теоремы 3.5 и верно ее заключение. □

3.3 Обратимость оператора композиции

При требовании дополнительных условий на функции $M(u)$ и $M_1(u)$ с помощью теорем 2.12 и 3.6 получаем следующий результат:

Теорема 3.7. *Пусть функции M и M_1 удовлетворяют Δ'-условию. Пусть, кроме того, N-функция M удовлетворяет условиям теоремы 3.4. Если гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$$

и имеет конечное коискажение, то обратное отображение $\varphi^{-1}: D' \to D$ *порождает ограниченный оператор композиции*

$$(\varphi^{-1})^*: L^1_F(D) \to L^1_{F_1}(D')$$

и имеет конечное искажение.

Доказательство. Так как по условиям теоремы N-функции M,M_1,M_2 удовлетворяют Δ'-условию, мы можем воспользоваться теоремой 2.12 для гомеоморфизма $\varphi: D \to D'$. Тогда для этого отображения верны следующие утверждения:

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$;

2) отображение φ имеет конечное искажение;

3) конечна величина $K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}\|$ ($K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_\infty\|$ при $M = M_1$).

Так же, как и в теореме 3.5, используя аналог неравенства Гёльдера (1.6), делаем вывод, что $\varphi \in W^1_{M,\,\mathrm{loc}}(D)$. Теперь заметим, что выполнены все условия теоремы 3.6, и, кроме того, отметим тот факт, что функция $F(u)$ удовлетворяет Δ'-условию, если этому условию удовлетворяет функция $M(u)$. В результате получаем, что отображение $\varphi^{-1}: D' \to D$ имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in \mathrm{ACL}(D')$;

5) φ^{-1} имеет конечное искажение;

6) $K_{\varphi^{-1},F_1} = \left\| \frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2}(D') \right\| < \infty$.

По теореме 2.12 для того, чтобы отображение φ^{-1} порождало ограниченный оператор композиции $\varphi^{-1^*}: L^1_F(D) \to L^1_{F_1}(D')$, достаточно, чтобы были выполнены условия 4)-6), а N-функция, определяющая пространство L^1_F, удовлетворяла Δ'-условию. Поэтому мы можем сделать вывод, что отображение $\varphi^{-1}: D' \to D$ порождает ограниченный оператор композиции $(\varphi^{-1})^*: L^1_F(D) \to L^1_{F_1}(D')$ и имеет конечное искажение. □

Далее мы приведем еще один результат о свойствах оператора композиции, порождаемого обратным отображением к некоторому гомеоморфизму класса Соболева — Орлича. Доказательство этого результата основано на теоремах 2.7 и 3.1.

Теорема 3.8. *Пусть* $Q(u) = Cu^q(\ln u)^{a_1}(\ln\ln u)^{a_2}...(\ln...\ln u)^{a_n}$, $q > 1$, $a_i \geq 0$, *является главной частью* N*-функции* M, *а* M_1 *удовлетворяет* Δ_2*-условию. Пусть* N*-функция* M *также удовлетворяет условиям теоремы 3.4. Если гомеоморфизм* $\varphi: D \to D'$ *порождает* *ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$$

и имеет конечное коискажение, то обратное отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ *порождает ограниченный оператор композиции*

$$(\varphi^{-1})^* : L^1_{\alpha'}(D) \to L^1_{\beta'}(D')$$

и имеет конечное искажение.

Доказательство. Прежде всего заметим, что по теореме 2.7 отображение $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$;

2) φ имеет конечное искажение;

3) конечна величина $K_{\varphi,\alpha} = \|K_\alpha(\cdot, \varphi) \mid L_\gamma(D)\|$ ($K_{\varphi,\alpha} = \|K_\alpha(\cdot, \varphi) \mid L_\infty(D)\|$ при $M = M_1$).

Для функции $M(u)$ с приведенной выше главной частью $Q(u)$ показатель α равен q. Следовательно, $(M(u))^{1/\alpha} \geq u$. Тогда для отображения φ верно следующее утверждение:

4) конечна величина $K_{\varphi,q} = \left\| \frac{|D\varphi|}{(|J(x,\varphi)|)^\beta} \mid L_\gamma(D) \right\|$.

Этот факт и теорема 3.6 позволяют нам применить теорему 3.1 к отображению $\varphi : D \to D'$. В результате получим, что обратное отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ обладает свойствами:

5) $\varphi^{-1} \in W^1_{\beta',\mathrm{loc}}(D')$, где $\beta' = \beta/(\beta - n + 1)$;

6) φ^{-1} имеет конечное искажение;

7) $K_{\varphi^{-1},\beta'} = \left\| \frac{|D\varphi^{-1}(y)|}{|J(y,\varphi^{-1})|^{1/\alpha'}} \mid L_\gamma(D') \right\|$, где $\alpha' = \alpha/(\alpha - n + 1)$, $q' = \infty$ при $q = n - 1$.

В статье [86] также изучен вопрос об определении условий, при которых гомеоморфизм евклидовых областей порождает ограниченный оператор композиции. Полученные условия на отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ позволяют установить этот факт. В итоге заключаем, что в наших обозначениях отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ порождает ограниченный оператор композиции $(\varphi^{-1})^* : L^1_{\alpha'}(D) \to L^1_{\beta'}(D')$ и имеет конечное искажение. $\square$

Глава 4

Полунепрерывность снизу коэффициентов искажения гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича

Во введении была отмечена связь между классами отображений с ограниченным (p,q)-искажением и операторами композиции пространств Соболева L^1_p. Отображения этого класса наследуют некоторые свойства отображений с ограниченным искажением, в том числе значимые для получения физических приложений. Поэтому естественным представляется рассмотрение подобных задач и для отображений, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича. В данной главе мы рассматриваем вопрос о полунепрерывности коэффициентов искажения изученных ранее отображений.

В монографии [41], посвященной отображениям с ограниченным искажением, доказан следующий результат:

Теорема 4.1 ([41, § 9.2]). *Пусть последовательность отображений с ограниченным искажением $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится локально в $L_n(D)$ к отображению φ_0. Предположим также, что последовательность коэффициентов искажения $\{K_{\varphi_j}\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена. Тогда φ_0 является отображением с ограниченным искажением и*

$$K_{\varphi_0} \leq \varliminf_{j\to\infty} K_{\varphi_j}. \tag{1}$$

Приведенное свойство играет важную роль в исследовании задач теории упругости. Но для некоторых вопросов нелинейной теории упругости класс отображений с ограниченным искажением оказывается слишком узким, и, следовательно, возникает необходимость расширить класс отображений, обладающих подобными свойствами. Одним из таких классов являются отображения с конечным искажением. Для них в [94] установлена справедливость следующей теоремы:

Теорема 4.2 ([94]). *Пусть последовательность отображений с конечным искажением $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится слабо в $W_n^1(D)$ к отображению φ_0. Предположим также, что для некоторой измеримой функции $M(x)$*

$$K_{\varphi_j}(x) = \frac{|D\varphi_j(x)|^n}{J(x,\varphi_j)} \leq M(x) \text{ почти всюду в } D.$$

Тогда φ_0 имеет конечное искажение и существует подпоследовательность $\{\varphi_{j_k}\}$ такая, что

$$K_{\varphi_0}(x) \leq \lim_{k\to\infty} K_{\varphi_{j_k}}(x) \text{ в } D$$

(предел понимается в смысле кусочной сходимости). В частности

$$K_{\varphi_0}(x) \leq M(x) \text{ почти всюду в } D.$$

В теории упругости теорема 4.2 и аналогичные результаты для других классов отображений необходимы для доказательства существования решения задачи минимизации функционала энергии. В [121] был предложен новый подход к доказательству свойства замкнутости отображений с конечным искажением, который позволил установить это свойство для других классов отображений. В работе [75] этот подход применяется для установления свойства замкнутости для отображений с ограниченным (θ,σ)-весовым (p,q)-искажением, $1 < q \leq p < \infty$:

Теорема 4.3 ([75]). *Пусть последовательность непрерывных, открытых, дискретных и сохраняющих ориентацию отображений $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varphi_k : \Omega \to \Omega'$, с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p,q)-искажением, $1 < q \leq p < \infty$, локально равномерно сходится к непрерывному, открытому и дискретному отображению $\varphi_0 : \Omega \to \Omega'$. Предположим также, что*

1) *существует ограниченная в $L_\varkappa$ последовательность функций $M_k \in L_\varkappa(\Omega)$, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ такая, что*

$$K_q^{(\theta,1)}(x, \varphi_k) \leq M_k(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$, если $q < p$;

2) *существует ограниченная последовательность* $M_k > 0$ *такая, что*

$$\|K_q^{(\theta,1)}(x,\varphi_k) \mid L_\infty(\Omega)\| < M_k,$$

если $q = p$.

Тогда существует функция $M \in L_\varkappa(\Omega)$ *такая, что некоторая подпоследовательность функций* $M_k^\varkappa$ *сходится в кусочном смысле к* $M^\varkappa$. *Более того, предельное отображение* φ_0 *также сохраняет ориентацию и является отображением с ограниченным* $(\theta, 1)$*-весовым* (p,q)*-искажением, причём*

3) $K_q^{(\theta,1)}(x, \varphi_0) \leq M(x)$ *для почти всех* $x \in \Omega \setminus (B_{\varphi_0} \cap \{J(x,\varphi_0) \neq 0\})$, *если* $q < p$;

4) $\|K_q^{(\theta,1)}(x,\varphi_0) \mid L_\infty(\Omega \setminus (B_{\varphi_0} \cap \{J(x,\varphi_0) \neq 0\}))\| \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} \|K_q^{(\theta,1)}(x,\varphi_k) \mid L_\infty(\Omega)\|$, *если* $q = p$.

Отметим, что в ряде работ рассматривались различные обобщения свойства замкнутости. В статье [122] исследовались отображения класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}$ на плоскости, в работе [94] для отображений с конечным искажением класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ изучался вопрос о полунепрерывности коэффициентов искажения K_O (outer dilatation) и K_I (inner dilatation), в [123] предложен метод доказательства свойства замкнутости, основанный на полунепрерывности квазивыпуклых функций, а в [124] изучались отображения с ограниченным искажением на группах Карно.

Мы получаем подобные свойства для некоторого класса гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича. В формулируемом ниже результате предполагаем, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, а функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ'-условию. Кроме того, функция $M_2(u)$, определяемая равенствами (1.7), также должна удовлетворять Δ_2-условию.

Для того чтобы сформулировать и доказать основной результат, нам потребуется установить справедливость следующего утверждения:

Лемма 4.1. *Пусть ограниченная в* $L^1_M(D)$ *последовательность непрерывных функций* $f_k \in L^1_M(D)$, $k \in \mathbb{N}$, *сходится локально равномерно к* f_0, *а* Df_k *сходится слабо к некоторой вектор-функции* $g \in L^1_M(D)$. *Тогда* f_0 *принадлежит* $L^1_M(D)$ *и существует подпоследовательность последовательности* f_k, *сходящаяся слабо в* $L^1_M(D)$ *к* f_0.

Доказательство. По теореме Мазура существуют выпуклые комбинации $w_m = \sum_{l=m}^{N(m)} \lambda_l^m Df_l$, где $\sum_{l=m}^{N(m)} \lambda_l^m = 1$, $\lambda_l^m \geq 0$, $m \leq l \leq N(m)$, сходящиеся сильно в $L_M(D)$

к $g(x)$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int\limits_B |w_m(x)-g(x)|\chi_B(x)dx \leq \|w_m(x)-g(x)\mid L_M\|\|\chi_B \mid L_{M^*}\| \leq C_B\|w_m-g\mid L_M\|$$

т.е. последовательность w_m сходится сильно к g в $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$.

Заметим также, что так как последовательность $\{f_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, сходится локально равномерно к f_0, то выпуклые комбинации $\sum_{l=m}^{N(m)}\lambda_l^m f_l$ также сходятся локально равномерно к f_0.

Далее покажем, что $Df_0=g$. Для пробной функции $\eta\in C_0^\infty(D)$ имеем

$$\int\limits_D w_m\eta dx = \int\limits_D \sum_{l=m}^{N(m)}\lambda_l^m Df_l\eta dx = -\int\limits_{D\cap\operatorname{supp}\eta}\sum_{l=m}^{N(m)}\lambda_l^m f_l D\eta dx.$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$, получаем

$$\int\limits_D g\eta dx = -\int\limits_{D\cap\operatorname{supp}\eta} f_0 D\eta dx = -\int\limits_D f_0 D\eta dx.$$

Из этих равенств заключаем, что $g=Df_0$. Следовательно, f_0 принадлежит $L_M^1(D)$ и существует слабо сходящаяся к f_0 в $L_M^1(D)$ подпоследовательность функций f_k. □

Используя эту лемму, получим свойство полунепрерывности для изучаемых отображений.

Теорема 4.4. *Пусть сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы последовательности $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varphi_k : D\to D'$, удовлетворяют условиям теоремы 2.8. Пусть также $\{\varphi_k\}$ локально равномерно сходится к гомеоморфизму $\varphi_0 : D\to D'$, а $\{D\varphi_k\}$ сходится слабо к некоторой вектор-функции $u\in L_M^1(D)$ и, кроме этого,*

1) *существует ограниченная в $L_{M_2}(D)$ последовательность функций $G_k\in L_{M_2}(D)$, такая, что*

$$K_M(x,\varphi_k)\leq G_k(x)$$

для почти всех $x\in D$, если $M<M_1$;

2) *существует ограниченная последовательность $G_k>0$ такая, что*

$$K_{\varphi_k,M}(D)\leq G_k,$$

если $M=M_1$.

Тогда существует функция $G \in L_{M_2}$ *такая, что некоторая подпоследовательность функций* $M_2(G_k)$ *сходится в кусочном смысле к* $M_2(G)$. *Кроме того, предельное отображение* φ_0 *сохраняет ориентацию и порождает ограниченный оператор композиции* $\varphi_0^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, *причем*

1) $K_\alpha(x,\varphi_0) \le (M_2(G(x)))^{1/\gamma}$ *для почти всех* $x \in D$, *если* $M < M_1$;

2) $K_{\varphi_0,\alpha}(D) \le \varliminf\limits_{k\to\infty} K_{\varphi_k,\alpha}(D)$, *если* $M = M_1$.

Доказательство. Функция $M_2(G(x))$ существует по лемме 1.3. Покажем, что предельное отображение порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича. Для этого заметим, что отображения $\{\varphi_k\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.8, и нормы порождаемых ими операторов ограничены в совокупности ($\hat{G}$ обозначает некоторую общую константу):

$$\|\varphi_k^*\| \le \|K_M(\cdot,\varphi_k) \mid L_{M_2}(D)\| \le \|G_k(\cdot) \mid L_{M_2}(D)\| \le \hat{G} < \infty, \quad \text{если } M < M_1,$$

$$\|\varphi_k^*\| \le G_k \le \hat{G} < \infty, \quad \text{если } M = M_1.$$

Рассмотрим функции $f \in L^1_{M_1}(D') \cap C_0^\infty(D')$. Последовательность $g_k = \varphi_k^* f = f \circ \varphi_k$ ограничена в $L^1_M(D)$ и сходится локально равномерно к $g_0(x) = f(\varphi_0(x))$. По лемме 4.1 получаем, что $g_0 \in L^1_M(D)$, а последовательность g_k сходится слабо в $L^1_M(D)$ к g_0 при $k \to \infty$. Получаем

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi_0 \mid L^1_M(D)\| = \|g_0 \mid L^1_M(D)\| \le \varliminf_{k\to\infty} \|g_k \mid L^1_M(D)\| = \varliminf_{k\to\infty} \|f\circ\varphi_k \mid L^1_M(D)\| \\ \le \varliminf_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\|\cdot\|f \mid L^1_M(D')\| \le \hat{G}\|f \mid L^1_M(D')\|.\end{aligned}$$

Следовательно, отображение φ_0 порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$.

Далее получим оценку для $K_\alpha(x,\varphi_0)$. Как в определении кусочной сходимости, разобьем область D на счетный набор измеримых множеств E_ν ($D = \bigcup_{\nu=1}^\infty E_\nu$). Возьмем неотрицательную функцию $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$. Используя аналог неравенства Гёльдера, следствие из неравенства

Юнга и неравенства для нормы в пространстве Орлича, для случая $M < M_1$ получаем

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{E_\nu} M(|D\varphi_k(x)|M^{-1}(\eta(x)))dx &\le C_1\||D\varphi_k|M^{-1}(\eta) \mid L_M\|^\alpha \\
&\le C_1 \left\| \frac{|D\varphi_k|M_2^{-1}(\eta)}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi_k)|)} M_1^{-1}(\eta)M_1^{-1}(|J(x,\varphi_k)|) \mid L_M \right\|^\alpha \\
&\le C_2 \left\| \frac{|D\varphi_k|M_2^{-1}(\eta)}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi_k)|)} \mid L_{M_2} \right\| \|M_1^{-1}(|J(x,\varphi_k)|)M_1^{-1}(\eta) \mid L_{M_1}\| \\
&\le C_3 \left(\int\limits_{E_\nu} M_2(K_M(x,\varphi_k)M_2^{-1}(\eta))dx \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\int\limits_{E_\nu} |J(x,\varphi_k)|\eta(x)dx \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \\
&\le C_3 \left(\int\limits_{E_\nu} M_2(G_k(x)M_2^{-1}(\eta))dx \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\int\limits_{E_\nu} |J(x,\varphi_k)|\eta(x)dx \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.
\end{aligned}
$$

При $M = M_1$ выводим

$$
\begin{aligned}
\int\limits_D M(|D\varphi_k(x)|)\eta(x)dx = \int\limits_D \frac{M(|D\varphi_k(x)|)}{|J(x,\varphi_k)|}|J(x,\varphi_k)|\eta(x)dx& \\
\le K_{\varphi_k,\alpha}(D) \int\limits_D |J(x,\varphi_k)|\eta(x)dx.&
\end{aligned}
$$

Для точки $x_0 \in D$ рассмотрим функцию $\eta \in C_0^\infty(D)$, $0 \le \eta(x) \le 1$, которая принимает значение 0 вне шара $B(x_0,r)$ и 1 внутри шара $B(x_0,r-\varepsilon)$. Подставляя η в приведенные выше неравенства и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$
\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} M(|D\varphi_k(x)|)dx \le C_3 \left(\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} M_2(G_k(x))dx \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} |J(x,\varphi_k)|dx \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \text{если } M < M_1,
$$

$$
\int\limits_{B(x_0,r)} M(|D\varphi_k(x)|)dx \le K_{\varphi_k,\alpha}(D) \int\limits_{B(x_0,r)} |J(x,\varphi_k)|dx, \quad \text{если } M = M_1.
$$

С помощью аналога неравенства Гёльдера из теоремы 2.8 можно заключить, что отображения $\{\varphi_k\}$ принадлежат классу $L^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$ ($\{\varphi_k\} \in L^1_M(K)$ для всех $K \subset D$, K — компакт) и по условию $D\varphi_k$ сходятся слабо в $L_{M,\mathrm{loc}}(D)$ к $D\varphi_0$. Тогда верна следующая оценка:

$$
\int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} M(|D\varphi_0(x)|)dx \le \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{B(x_0,r)\cap E_\nu} M(|D\varphi_k(x)|)dx.
$$

Далее воспользуемся тем фактом, что

$$\int\limits_{B(x_0,r)} |J(x,\varphi_k)|\,dx \leq |\varphi_k(B(x_0,r)|.$$

Для любого $j \in \mathbb{N}$ рассмотрим все сферы $S(x_0,t)$ с центром в точке x_0, лежащие внутри шара $B(x_0,r)$ такие, что $|\varphi_k(S(x_0,t))| \geq \frac{1}{j}$. Таких сфер может быть не более чем $j|\varphi_k(B(x_0,r))|$, т.е. конечное число, так как мера шара $|\varphi_k(B(x_0,r))|$ конечна. Объединение по всем $j \in \mathbb{N}$ дает не более чем счётное множество. Отсюда следует, что образы сфер $\varphi_k(S(x_0,r))$, $k \in \mathbb{N}$, имеют меру нуль для почти всех $r \in (0,R)$, где R такое, что $B(x_0,R) \subset D$. Тогда

$$|\varphi_k(B(x_0,r))| \to |\varphi_0(B(x_0,r))|$$

при $k \to \infty$ для почти всех $r \in (0,R)$.

Теперь, переходя к нижнему пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{B(x_0,r)} M(|D\varphi_0(x)|)\chi_{E_\nu}(x)dx \leq \Bigg(\int\limits_{B(x_0,r)} M_2(G(x))\chi_{E_\nu}(x)dx\Bigg)^{\frac{\alpha}{\gamma}} |\varphi_0(B(x_0,r)|^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \text{если } M < M_1,$$

$$\int\limits_{B(x_0,r)} M(|D\varphi_0(x)|)dx \leq \varliminf_{k\to\infty} K_{\varphi_k,\alpha}(D)|\varphi_0(B(x_0,r)|, \quad \text{если } M = M_1.$$

Разделив на меру шара $B(x_0,r)$, получим неравенства

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} M(|D\varphi_0(x)|)\chi_{E_\nu}(x)dx$$
$$\leq \Bigg(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} M_2(G(x))\chi_{E_\nu}(x)dx\Bigg)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \Bigg(\frac{|\varphi_0(B(x_0,r)|}{|B(x_0,r)|}\Bigg)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \text{если } M < M_1,$$

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int\limits_{B(x_0,r)} M(|D\varphi_0(x)|)dx \leq \varliminf_{k\to\infty} K_{\varphi_k,\alpha}(D)\frac{|\varphi_0(B(x_0,r)|}{|B(x_0,r)|}, \quad \text{если } M = M_1.$$

Из того факта, что φ_0 — аппроксимативно дифференцируемый гомеоморфизм, следует, что якобиан характеризует локальное искажение меры (см., например, [86, равенство (2.5)]):

$$\frac{|\varphi_0(B(x_0,r)|}{|B(x_0,r)|} \to |J(x,\varphi_0)| \quad \text{при } r \to 0 \text{ почти всюду в } D.$$

Тогда для почти всех $x \in D$ получим

$$M(|D\varphi_0(x)|)\chi_{E_\nu}(x) \leq (M_2(G(x)))^{\frac{\alpha}{\gamma}}\chi_{E_\nu}(x)|J(x,\varphi)|^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Так как $D = \bigcup E_\nu$, для любого $x \in D$ найдется номер N такой, что $x \in E_N$. Тогда $\chi_{E_N}(x) = 1$ и выполняется неравенство

$$M(|D\varphi_0(x)|) \leq (M_2(G(x)))^{\frac{\alpha}{\gamma}}|J(x,\varphi_0)|^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Из этого соотношения заключаем, что $K_\alpha(x,\varphi_0) \leq (M_2(G(x)))^{1/\gamma}$ для почти всех $x \in D$.

Если $M = M_1$, получаем следующее неравенство

$$M(|D\varphi_0(x)|)dx \leq \varliminf_{k\to\infty} K_{\varphi_k,\alpha}(D)|J(x,\varphi_0)|.$$

Следовательно, $K_{\varphi_0,\alpha}(D) \leq \varliminf_{k\to\infty} K_{\varphi_k,\alpha}(D)$.

Остается отметить, что φ_0 обладает свойством сохранения ориентации, так как оно наследуется при локально равномерной сходимости (см., например [75]).

$\square$

Замечание 4.1. *В теореме 4.4 требование слабой сходимости для последовательности $\{D\varphi_k\}$ обусловлено тем, что, в общем случае пространства Орлича не рефлексивны. Однако если N-функция, определяющая это пространство, вместе со своей дополнительной функцией удовлетворяют Δ_2-условию, то пространство Орлича будет рефлексивным. Таким образом, в условиях теоремы 4.4 мы можем потребовать, чтобы функция M^* удовлетворяла Δ_2-условию, и отказаться от требования слабой сходимости $\{D\varphi_k\}$.*

В качестве следствия приведенной теоремы можем получить следующий результат:

Следствие 4.1. *Предположим, что функция $M_1(u) = u^n$, а $M(u)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 1.2. Пусть D — ограниченная область с липшицевой границей и последовательность отображений $\varphi_k : D \to D'$, $\varphi_k \in W^1_n(D)$, обладающих конечным искажением, $J(x,\varphi_k) \geq 0$ почти всюду в D, слабо сходится в $W^1_n(D)$ к отображению $\varphi_0 : D \to D'$. Пусть также*

$$K_M(x,\varphi_k) \leq G_k(x) \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \text{ для почти всех } x \in D,$$

где последовательность $G_k \in L_{M_2}(D)$, $0 \leq G_k(x) < \infty$ п.в., сходится в кусочном смысле к функции $G \in L_{M_2}(D)$, $0 \leq G(x) < \infty$ п.в.

Тогда для предельного отображения φ_0 *выполняется*

$$K_\alpha(x,\varphi_0) \leq (M_2(G(x)))^{1/\gamma} \text{ для почти всех } x \in D.$$

Глава 5

Существование минимума функционала энергии

В данной главе в качестве примера возможного применения полученных результатов докажем теорему существования для стационарной задачи нелинейной теории упругости в некотором новом классе отображений.

5.1 Математическая модель нелинейной теории упругости

Подробному описанию математической модели теории упругости и основных результатов в этой области посвящена монография [125]. Приведем некоторые сведения, необходимые для формулировки результатов настоящей главы.

Далее в качестве отображения φ будет выступать деформация (смещение) — векторное поле $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$, где $D \subset \mathbb{R}^3$ — область с достаточно гладкой границей. Деформация задается равенством

$$\varphi = r' - r,$$

где r, r' — радиус-векторы точки в недеформированном и деформированном состоянии соответственно. Из соображений физической реализации модели в качестве деформаций рассматривают инъективные, сохраняющие ориентацию отображения и имеющие обобщенные производные.

Теперь рассмотрим смешанную краевую задачу для стационарной теории упругости

$$\begin{cases} -\operatorname{div} T_R(x) = f(x), \quad \text{если } x \in D, \\ T(x)\bar{n} = h(x), \quad \text{если } x \in \Gamma_1, \\ \varphi(x) = \overline{\varphi}(x), \quad \text{если } x \in \Gamma_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Поясним используемые обозначения (см. [125]). Матрица $T_R(x)$ — первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа, определяемый равенством

$$T_R(x) = J(x,\varphi)T(\varphi(x))D\varphi(x)^T,$$

где $T(x)$ — тензор напряжений Коши в точке x. Векторное поле $f : D \to \mathbb{R}^3$ — приложенная объемная сила на единицу объема, $h : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ — приложенная поверхностная сила на единицу площади поверхности, $\overline{\varphi} : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ — заданная деформация, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial D$.

Исследование приведенной задачи для произвольного класса материалов весьма затруднительно. Заметного продвижения удается добиться, если рассматривать так называемые гиперупругие материалы. Для них тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа T_R равен функции реакции $\hat{T}(x, D\varphi)$, причем существует функция запасенной энергии $W : D \times \mathbb{M}^{3\times3}_+ \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{M}^{3\times3}_+$ — множество матриц 3×3 с положительным определителем) такая, что

$$\hat{T}(x,F) = \frac{\partial W}{\partial F}(x, F) \quad \text{для всех } x \in D, F \in \mathbb{M}^{3\times3}_+.$$

В [125] для гиперупругих материалов показано, что в случае когда нагрузки, приложенные к телу, являются замороженными (функции f и h не зависят от рассматриваемой деформации φ), задача (5.1) эквивалентна задаче минимизации функционала полной энергии

$$I(x,\varphi) = \int\limits_D W(x, D\varphi(x))\, dx - \left(\int\limits_D f(x)\varphi(x)\, dx + \int\limits_{\Gamma_1} h(x)\varphi(x)\, ds \right)$$

на множестве допустимых деформаций.

Одним из базовых методов исследования существования решений является подход Джона Болла, предложенный им в 1977 году [79]. Данный метод заключается в рассмотрении последовательности $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, минимизирующей функционал энергии $I(\varphi)$ вида

$$I(\varphi) = \int\limits_D W(x, D\varphi(x))\, dx \tag{5.2}$$

на множестве допустимых деформаций

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in W_1^1(D), I(\varphi) < \infty, J(x,\varphi) > 0 \text{ п. в. в } D, \varphi|_{\partial D} = \overline{\varphi}|_{\partial D} \text{ п. в. на } \partial D\}, \tag{5.3}$$

где $\overline{\varphi}$ — заданные граничные условия. Для функции запасенной энергии W предполагается выполненным условия:

1) Поливыпуклость. Существует выпуклая функция $G : D \times \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори (непрерывна почти всюду по первой переменной и измерима по второй) такая, что

$$G(x, F_{\#}) = W(x, F) \quad \text{для почти всех } x \in D,$$

где $F_{\#}$ — упорядоченный набор всех миноров матрицы F;

2) Коэрцитивность. Существуют постоянная $c > 0$ и функция $g \in L_1(D)$ такие, что

$$W(x,F) \geq c(|F|^p + |AdjF|^q + (\det F)^r) + g(x)$$

для почти всех $x \in D$ и всех $F \in \mathbb{M}_+^{3\times 3}$, $p > 2$, $q \geq \frac{p}{p-1}$, $r > 1$. Кроме того, для принадлежности предельного отображения φ_0 классу $\mathcal{A}$ требуется условие барьерности

$$W(x,F) \to \infty \text{ при } \det F \to 0_+.$$

Отметим, что в работе [79] Дж. Болл подчеркивает возможность использования пространств Орлича и Соболева — Орлича вместо L_p и W_p^1 для получения результатов, более точно учитывающих физические свойства исследуемых материалов.

Исходя из несколько иных по сравнению с [79] мотивировок, авторы работы [76] решают задачу существования на новом классе допустимых деформаций:

$$\mathcal{A}^{L,s} = \{\varphi : D \to D' - \text{ гомеоморфизм с конечным искажением}, \varphi \in W_1^1(D), I(\varphi) < \infty,$$
$$J(x,\varphi) \geq 0 \text{ для п.в. } x \in D, \|K_\varphi \mid L_s(D)\| \leq L\},$$

где $K_\varphi = \frac{|D\varphi(x)|^n}{J(x,\varphi)}$ — коэффициент искажения отображения φ. При этом меняется условие коэрцитивности для функции запасенной энергии. Оно имеет вид:

$$W(x,F) \geq d|F|^n + g(x) \tag{5.4}$$

для почти всех $x \in D$ и всех $F \in \mathbb{M}^{n\times n}$, $\det F \geq 0$, где d — постоянная, а функция g принадлежит $L_1(D)$. Естественным обобщением представляется применение шкалы пространств Орлича в данном направлении.

5.2 Теорема существования

Следуя работе [76], для N-функции M_2 (индекс «2» подчеркивает тот факт, что функция $M_2(u)$ играет ту же роль, что и в теореме об операторе композиции) и постоянной $L > 0$ определим следующие классы допустимых деформаций, совпадающих на границе с некоторым гомеоморфизмом:

$$\mathcal{H}(M_2, L) = \{\varphi : D \to D' - \text{ гомеоморфизм с конечным искажением}, \varphi \in W_1^1(D), I(\varphi) < \infty,$$
$$J(x,\varphi) \geq 0 \text{ для п.в. } x \in D, \|K_{M,n}(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}\| \leq L, \varphi|_{\partial D} = \overline{\varphi}|_{\partial D} \text{ п. в. на } \partial D\},$$
$$\mathcal{H}_\alpha(\gamma, L) = \{\varphi : D \to D' - \text{ гомеоморфизм с конечным искажением}, \varphi \in W_1^1(D), I(\varphi) < \infty,$$
$$J(x,\varphi) \geq 0 \text{ для п.в. } x \in D, \|K_{\alpha,n}(\cdot,\varphi) \mid L_\gamma\| \leq L, \varphi|_{\partial D} = \overline{\varphi}|_{\partial D} \text{ п. в. на } \partial D\}.$$

Функции искажения $K_{M,n}(x,\varphi)$ и $K_{\alpha,n}(x,\varphi)$ — частный случай функций $K_M(x,\varphi)$ и $K_\alpha(x,\varphi)$, определенных ранее, N-функция $M_1(u)$ в которых имеет вид u^n.

Приведем некоторые утверждения, которые потребуются для доказательства формулируемой ниже теоремы.

Лемма 5.1 ([94]). *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ с локально липшицевой границей и последовательность отображений $\varphi_k : D \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$, $J(x,\varphi_k) \geq 0$ п.в. в D, сходится слабо в $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ к отображению φ_0. Тогда для всех наборов $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq n$ и $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq n$ верны равенства*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_D \Theta \frac{\partial(\varphi_k^{i_1}, \ldots, \varphi_k^{i_l})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l})}\, dx = \int\limits_D \Theta \frac{\partial(\varphi_0^{i_1}, \ldots, \varphi_0^{i_l})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l})}\, dx$$

для всех функций $\Theta \in \overset{\circ}{L}_{n/(n-1)}$ и соответствующих $l \times l$-миноров матриц $D\varphi_k$ и $D\varphi_0$.

Теорема 5.1 ([76]). *Пусть даны ограниченные области $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ с локально липшицевыми границами и последовательность обладающих конечным искажением гомеоморфизмов $\varphi_k : D \to D'$ класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $n-1 \leq q \leq n$, с $J(x,\varphi_k) \geq 0$ п.в. в D такая, что*

1) *$\varphi_k \to \varphi_0$ слабо в $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, причем $J(x,\varphi_0) \geq 0$ п.в. в D;*

2) *φ_k порождают ограниченные операторы композиции $\varphi_k^* : L_n^1(D') \to L_q^1(D)$;*

3) *нормы операторов* $\|\varphi_k\|$ *ограничены в совокупности.*

Тогда отображение φ_0 *почти всюду инъективно.*

Лемма 5.2 ([76]). *В условиях теоремы 5.1 последовательность обратных гомеоморфизмов* $\psi_k = \varphi_k^{-1}$ *содержит подпоследовательность* $\{\psi_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ *такую, что* $\psi_{k_l}(y) \to \psi_0(y)$ *равномерно вплоть до границы.*

Лемма 5.3. *Пусть* N*-функция* M *удовлетворяет условию* (1.12). *Пусть также даны ограниченные области* $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ *с локально липшицевыми границами и последовательность гомеоморфизмов* $\varphi_k : D \to D'$ *класса* $W^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$, *обладающих конечным искажением и с* $J(x,\varphi_k) \geq 0$ *п.в. в* D *такая, что*

1) $\varphi_k \to \varphi_0$ *слабо в* $W^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$, *причем* $J(x,\varphi_0) \geq 0$ *п.в. в* D;

2) φ_k *порождают ограниченные операторы композиции* $\varphi_k^* : L^1_n(D') \to L^1_M(D)$;

3) *нормы операторов* $\|\varphi_k\|$ *ограничены в совокупности.*

Тогда отображение φ_0 *будет порождать ограниченный оператор композиции* $\varphi_0^* : L^1_n(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$.

Доказательство. В силу ограниченности $\|\varphi_k\|$ последовательность $w_k = \varphi_k^* g = g \circ \varphi_k$ ($g \in L^1_n(D') \cap \mathrm{Lip}(D')$) ограничена в $L^1_M(D)$. По теореме вложения 1.2 получаем, что существует подпоследовательность $w_k \to w_0$ в $L_{\overline{M}}(D)$. Далее, из нее мы можем выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в D. Если $g \in L^1_n(D') \cap \mathrm{Lip}(D')$, то $w_0 = g \circ \varphi_0$ для почти всех $x \in D$.

Так как w_k сходится слабо к w_0 в $L^1_{M,\mathrm{loc}}(D)$, то справедливо

$$\|g \circ \varphi_0 \mid L^1_M(D)\| = \|w_0 \mid L^1_M(D)\| \leq \varliminf_{k\to\infty} \|w_k \mid L^1_M(D)\| = \varliminf_{k\to\infty} \|\varphi_k^* g \mid L^1_M(D)\|$$
$$\leq \varliminf_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\| \cdot \|g \mid L^1_n(D')\| \leq C\|g \mid L^1_n(D')\|.$$

Из приведенных неравенств следует, что φ_0 порождает ограниченный оператор композиции $\varphi_0^* : L^1_n(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ и $\|\varphi_0^*\| \leq C$.

□

Теорема 5.2 ([48]). *Пусть* $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$, $J(x,\varphi) \geq 0$ *п.в. в* D *— непостоянное отображение, коэффициент искажения* $K_\varphi = \frac{|D\varphi(x)|^n}{J(x,\varphi)}$ *принадлежит классу* $L_{s,\mathrm{loc}}(D)$. *Тогда если* $s > n-1$, *то отображение* φ *непрерывно, открыто и дискретно.*

В формулируемой ниже теореме предполагаем, что функция $M_2(u)$ выбрана таким образом, чтобы функция $M(u)$, определяемая из соотношений

$$u^n = M(2M_3(u)), \quad M_2(u) = M(2M_3^*(u)), \tag{5.5}$$

росла не быстрее, чем u^{n-1}. Пример таких функций был приведен после доказательства теоремы 3.5 об обратном отображении из главы 3.

Теорема 5.3. *Пусть функция $W(x,F)$ удовлетворяет условиям поливыпуклости и коэрцитивности (5.4), а класс допустимых деформаций $\mathcal{H}(M_2,L)$ не пуст, $L>0$, а функция $M_2(u)$ выбрана указанным выше образом. Тогда существует хотя бы одно отображение $\varphi_0 \in \mathcal{H}_\alpha(\gamma,L)$ (γ из условий (2.3)) такое, что*

$$I(\varphi_0) = \inf\{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{H}(M_2,L)\}.$$

Доказательство. Для доказательства существования минимизирующего отображения рассмотрим функционал

$$\bar{I}(\varphi) = I(\varphi) - \int\limits_D g(x)dx.$$

Используя неравенство Пуанкаре и свойство коэрцетивности функции $W(x,F)$, для любого $\varphi \in \mathcal{H}(M_2,L)$ получаем оценку

$$I(\varphi) - \int\limits_D g(x)dx \geq a\|\varphi \mid W_n^1\|^n + b,$$

где $a>0$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Если $\{\varphi_i\}$ — минимизирующая последовательность для функционала $\bar{I}$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \bar{I}(\varphi_i) = \inf \bar{I}(\varphi), \varphi \in \mathcal{H}(M_2,L)$. Следовательно, используя полученную ранее оценку, делаем вывод об ограниченности последовательности $\{\varphi_i\}$ в $W_n^1(D)$. Это позволяет применить лемму 5.1 о слабой сходимости миноров к данной последовательности, из которой заключаем, что существует предельное отображение φ_0, минимизирующее $\bar{I}$. Кроме того, в силу этой же леммы получаем, что при $i \to \infty$ $J(\cdot,\varphi_i) \to J(\cdot,\varphi_0)$ слабо в $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, из чего можно сделать вывод о том, что $J(x,\varphi_0) > 0$ для почти всех $x \in D$.

Покажем, что отображение φ_0 принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha(\gamma,L)$. В первую очередь проверим гомеоморфность φ_0. По лемме 5.3 оно порождает ограниченный оператор композиции $\varphi_0^* : L_n^1 \to L_M^1$, где функция M(u) находится из равенств (5.5) и по условию теоремы растет не быстрее чем u^{n-1}. Вместе с тем, для отображений φ_i выполнены все условия теоремы 5.1 и, следовательно, φ_0 инъективно. Далее, вместе с последовательностью гомеоморфизмов $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ рассмотрим последовательность обратных гомеоморфизмов $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, сходящихся слабо в W^1_n и локально равномерно к φ_0 и ψ_0 (см. лемму 5.2). Тогда φ_0 и ψ_0 непрерывны и $\psi_0(\varphi_0(x)) = x$, $\varphi_0(\psi_0(y)) = x$ для $\varphi_0(x) \notin \partial D'$ и $\psi_0(y) \notin \partial D$. Далее, используя совпадение на границе с гомеоморфизмом и переходя к пределу в равенствах $\psi_i(\varphi_i(x)) = x$, $\varphi_i(\psi_i(y)) = x$, получим, что $\psi_0(y) = x \in D$, $\varphi_0(x) = y \in D'$

Выполнение условия $\|K_{\alpha,n} \mid L_\gamma\| \leq L$ следует из теоремы о полунепрерывности коэффициента искажения.

Далее докажем полунепрерывность снизу функционала энергии. Для этого достаточно доказать, что

$$\int\limits_K W(x, D\varphi_0)\,dx \leq \varliminf_{i\to\infty} \int\limits_K W(x, D\varphi_i)\,dx$$

для любого компактного множества $K \subset \Omega$ и применить теорему Беппо Леви.

Пусть правая часть неравенства меньше бесконечности (в противном случае неравенство очевидно). Тогда существует подпоследовательность $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, для которой последовательность $\Big\{ \int\limits_K W(x, D\varphi_m)\,dx \Big\}_{m\in\mathbb{N}}$ сходится. По теореме Мазура и лемме о слабой сходимости миноров получаем, что для каждого m найдется целое число $k(m) \geq m$ и вещественные числа $\mu^t_m > 0$, $m \leq t \leq k(m)$, такие, что

$$\sum_{t=m}^{k(m)} \mu^t_m = 1,$$

и выполнено

$$T_m = \sum_{t=m}^{k(m)} \mu^t_m (D\varphi_t)_\# \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (D\varphi_0)_\#$$

в $L_n(K) \times L_{\frac{n}{n-1}}(K) \times \dots \times L_1(K)$. Можно считать, что подпоследовательность $\{T_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ сходится почти всюду в K.

По условию функция G удовлетворяет условию Каратеодори, и, следовательно, $G(x,\cdot)$ непрерывна для почти всех $x \in D$. Тогда

$$W(x, D\varphi_0) = G(x, (D\varphi_0)_\#) = \lim_{l\to infty} G\Big(x, \sum_{t=l}^{k(l)} \mu^t_l (D\varphi_t)_\#\Big).$$

Используя выпуклость функции G, по лемме Фату получаем

$$\int\limits_K W(x, D\varphi_0)\,dx \leq \varliminf\lim_{l\to\infty}\int\limits_K G\Big(x, \sum_{t=l}^{k(l)} \mu_m^t (D\varphi_t)_\#\Big)\,dx$$

$$\leq \varliminf_{l\to\infty}\sum_{t=l}^{k(l)}\mu_l^t\int\limits_K G(x,(D\varphi_t)_\#)\,dx = \lim_{l\to\infty}\int\limits_K W(x, D\varphi_l)\,dx.$$

Следовательно, полунепрерывность снизу функционала энергии доказана.

$\square$

Замечание 5.1. *В рассматриваемых классах отображений условие совпадения на границе с некоторым гомеоморфизмом может быть опущено при требовании более строгих ограничений на N-функцию M_2. А именно, можно добиться выполнения условий теоремы 5.2 — функция $M_2(u^n)$ должна расти быстрее u^{n-1}, а функция $M(u)$ из равенств (5.5) должна расти быстрее, чем u^α.*

Заключение

Изложенные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в различных областях анализа, геометрии, уравнений в частных производных и теории упругости. Отметим основные результаты:

1. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых гомеоморфизм евклидовых областей порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича.

2. Определены свойства регулярности отображения, обратного к гомеоморфизму класса Соболева — Орлича, по известным свойствам регулярности прямого отображения.

3. Доказана полунепрерывность снизу коэффициентов искажения отображений из рассмотренных классов.

4. Используя полученные результаты, доказана теорема существования задачи минимизации функционала энергии для специальных классов отображений в условиях поливыпуклости и коэрцитивности функции запасенной энергии.

Результаты диссертационного исследования могут быть применены в образовательном процессе при организации спецкурсов по теории функциональных пространств и квазиконформному анализу, предназначенных для студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений.

Список литературы

1. *Shröeder E.* Über iteratierte funcktionen // *Math. Anal.* — 1871. — Vol. 3. — Pp. 296–322.

2. *Köenigs G.* Recherches sur le integrales de Certcuns equations fontionalles // *Anneles Sci. de L'Eco Normale Superieur.* — 1884. — Vol. 1. — Pp. 3–41.

3. *Schwartz H. J.* Composition operators on H^p. — University of Toledo, 1969.

4. *Стевич С.* Произведения операторов интегрального типа и операторов композиции из пространства со смешанной нормой в пространства типа Блоха // *Сиб. матем. журн.* — 2009. — Т. 50, № 4. — С. 915–927.

5. *Стевич С.* Weighted differentiation composition operators from mixed-norm spaces to weighted-type spaces // *Appl. Math. Comput.* — 2009. — Vol. 211, no. 1. — Pp. 222–233.

6. *С. Стевич Р. Чен З. Чжоу.* Взвешенные композиционные операторы, действующие из одного пространства Блоха в полидиске в другое // *Матем. сб.* — 2010. — Т. 201, № 2. — С. 131–160.

7. *Mayer D. H.* Spectral properties of certain composition operators arising in statistical mechanics // *Commun. Math. Phys.* — 1979. — Vol. 68. — Pp. 1–8.

8. *Mayer D. H.* On composition operators on Banach spaces of holomorphic functions // *J . Funct. Anal.* — 1980. — Vol. 35. — Pp. 191–206.

9. *Kamowitz H.* Compact weighted endomorphisms of $C(X)$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1981. — Vol. 83. — Pp. 517–521.

10. *J. E. Jamison M. Rajagopalan.* Weighted composition operators on $C(X,E)$ // *J . Operator Theory.* — 1988. — Vol. 19. — Pp. 307–317.

11. *Takagi H.* Compact weighted composition operators on certain subspaces of $C(X,E)$ // *Tokyo J . Math.* — 1991. — Vol. 14. — Pp. 121–127.

12. *Halmos P. R.* Lectures on ergodic theory. — New York: Chelsea Publishing Co., 1965.

13. *Petersen K.* Ergodic theory. — New York: Cambridge University Press, 1983.

14. *Nordgren E. A.* Composition operators // *Canad. J . Math.* — 1968. — Vol. 20. — Pp. 442–449.

15. *Ridge W. C.* Composition operators. — Indiana University, 1969.

16. *Водопьянов С. К.* Формула Тейлора и функциональные пространства: Учеб. пос. — Новосибирск: НГУ, 1988. — 96 с.

17. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // *Сиб. мат. журн.* — 1993. — Т. 34, № 1. — С. 185–192.

18. *Водопьянов С. К. Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // *Сиб. мат. журн.* — 1998. — Т. 39, № 4. — С. 776–795.

19. *Водопьянов С. К. Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // *Известия вузов. Математика.* — 2002. — № 10. — С. 11–33.

20. *Водопьянов С. К. Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // *Матем. тр.* — 2003. — Т. 6, № 2. — С. 14–65.

21. *Водопьянов С. К. Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. II // *Матем. тр.* — 2004. — Т. 7, № 1. — С. 13–49.

22. *Poleckiĭ E. A.* Quasiconformal homeomorphisms and orthogonal isomorphisms // Metric questions of the theory of functions and mappings, No. V (Russian). — Izdat. “Naukova Dumka”, Kiev, 1974. — Pp. 120–127.

23. *Водопьянов С. К. Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения // *Сиб. мат. журн.* — 1975. — Т. 16, № 2. — С. 224–246.

24. *Водопьянов С. К. Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // *Сиб. мат. журн.* — 1976. — Т. 17, № 4. — С. 768–773.

25. *Vodopyanov S.K.* Composition operators on Sobolev spaces. // Complex analysis and dynamical systems II. Proceedings of the 2nd conference in honor of Professor Lawrence Zalcman’s sixtieth birthday, Nahariya, Israel, June 9–12, 2003. — Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Ramat Gan: Bar-Ilan University, 2005. — Pp. 401–415.

26. *Решетняк Ю. Г.* Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными // *Сиб. мат. журн.* — 1966. — Т. 7, № 5. — С. 886–919.

27. *Решетняк Ю. Г.* Оценки модуля непрерывности для некоторых отображений // *Сиб. мат. журн.* — 1966. — Т. 7, № 5. — С. 1106–1114.

28. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // *Сиб. мат. журн.* — 1967. — Т. 8, № 3. — С. 629–658.

29. *Решетняк Ю. Г.* Теорема Лиувилля при минимальных предположениях регулярности // *Сиб. мат. журн.* — 1967. — Т. 8, № 4. — С. 835–840.

30. *Решетняк Ю. Г.* Общие теоремы о полунепрерывности и о сходимости с функционалом // *Сиб. мат. журн.* — 1967. — Т. 8, № 5. — С. 1052–1071.

31. *Решетняк Ю. Г.* О множестве особых точек решений некоторых нелинейных уравнений эллиптического типа // *Сиб. мат. журн.* — 1968. — Т. 9, № 2. — С. 354–367.

32. *Решетняк Ю. Г.* Об условии ограниченности индекса для отображений с ограниченным искажением // *Сиб. мат. журн.* — 1968. — Т. 9, № 2. — С. 368–374.

33. *Решетняк Ю. Г.* Отображения с ограниченным искажением как экстремали интегралов Дирихле // *Сиб. мат. журн.* — 1968. — Т. 9, № 3. — С. 652–666.

34. *Решетняк Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // *Мат.сб.* — 1968. — Т. 75, № 3. — С. 323–334.

35. *Решетняк Ю. Г.* О понятии ёмкости в теории функций с обобщенными производными // *Сиб. мат. журн.* — 1969. — Т. 10, № 5. — С. 1109–1138.

36. *Решетняк Ю. Г.* Об экстремальных свойствах отображений с ограниченным искажением // *Сиб. мат. журн.* — 1969. — Т. 10, № 6. — С. 1308–1318.

37. *Решетняк Ю. Г.* Локальная структура отображений с ограниченным искажением // *Сиб. мат. журн.* — 1969. — Т. 10, № 6. — С. 1319–1333.

38. *Grötzsch H.* Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I // *Ber. Verh. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl.* — 1928. — Vol. 80, no. 6. — Pp. 367–376.

39. *Ahlfors L.* Zur theorie der Überlagerungsflächen // *Acta Mathematica.* — 1935. — Vol. 65, no. 1. — Pp. 157–194.

40. *Лаврентьев М. А.* Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей // *Докл. АН СССР.* — 1938. — Т. 20. — С. 241–242.

41. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982.

42. *Rickman S.* Quasiregular mappings. — Berlin: Springer-Verlag, 1993.

43. *J. Heinonen T. Kilpeläinen O. Martio.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. — Oxford: Oxford University Press, 1993.

44. *T. Iwaniec G. Martin.* Geometric function theory and non-linear analysis. — Oxford: Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 2001.

45. *Водопьянов С. К.* Функционально-теоретический подход к некоторым задачам теории пространственных квазиконформных отображений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Сиб. отделение АН СССР, Ин-т математики, Новосибирск, 1975.

46. *Водопьянов С. К. Гольдштейн В. М.* Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // *Сиб. мат. журн.* — 1976. — Т. 17, № 3. — С. 515–531.

47. *T. Iwaniec V. Šverák.* On mappings with integrable dilatation // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1993. — Vol. 118. — Pp. 185–188.

48. *J. Manfredi E. Villamor.* An extension of Reshetnyak's theorem // *Indiana Univ. Math. J.* — 1998. — Vol. 47, no. 3. — Pp. 1131–1145.

49. *O. Martio J. Malý.* Lusin's condition (N) and mappings of the class W_n^1 // *J. Reine Angew. Math.* — 1995. — Vol. 485. — Pp. 19–36.

50. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // *Сиб. мат. журн.* — 1996. — Т. 37, № 6. — С. 1269–1295.

51. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // *Матем. сб.* — 2003. — Т. 194, № 6. — С. 67–86.

52. *S. Hencl P. Koskela.* Lectures on mappings of finite distortion. — Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2096.: Springer International Publishing, 2014. — xi+176 pp.

53. *Riesz F.* Untersuchungen uber Systeme integrierbarer Funktionen // *Mathematische Annalen.* — 1910. — Vol. 69. — Pp. 449–497.

54. *Young W. H.* On Classes of Summable Functions and their Fourier Series // *Proc. Royal Soc.* — 1912. — Vol. 87. — Pp. 225–229.

55. *Z. W. Birnbaum W. Orlicz.* Uber die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander Konjugierten Potenzen // *Studia Math.* — 1931. — Vol. 3. — Pp. 1–67.

56. *Orlicz W.* Uber eine gewisse Klasse von Raumen vom Typus B // *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.* — 1932. — Pp. 207–220.

57. *Orlicz W.* Uber Raume (L_M) // *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.* — 1932. — Pp. 93–107.

58. *Zaanen A. C.* Note on a certain class of Banach spaces // *Indag. Math.* — 1949. — Vol. 11. — Pp. 148–158.

59. *Nacano H.* Modulared semi-ordered linear spases. V.1. — Tokyo: Mathem. Book-series, 1950.

60. *Luxemburg W. A. J.* Banach function spaces. — Delft: Technische Hogeschool te Delft, 1955.

61. *М. А. Красносельский Я. Б. Рутицкий.* Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1958.

62. *Zaanen A. C.* Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces // *Compositio Math.* — 1952. — Vol. 10. — Pp. 56–94.

63. *Luxemburg W. A. J.* On the measurability of a function which occurs in the paper by A. C. Zaanen // *Indag. Math.* — 1958. — Vol. 20. — Pp. 259–265.

64. *Zaanen A. C.* Integration. — Amsterdam, 1967.

65. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. — Berlin–Heidelberg–New York: Lecture Notes in Math. 1034, 1983.

66. *J. Lidenstrauss L. Tzafriri.* Classical Banach spaces I. Function spaces. — Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

67. *Wu Cong-Xin Wang Ting-Fu.* Orlicz spaces and their applications. — Harbin, 1983.

68. *Dubinskij Ju. A.* Sobolev spaces of infinite order and differential equations. — Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1986.

69. *Donaldson T. K.* Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz—-Sobolev spaces // *Journal of differential equations.* — 1971. — Vol. 10. — Pp. 507–528.

70. *T. K. Donaldson N. S. Trudinger.* Orlicz—Sobolev spaces and imbedding theorems // *Journal of functional analysis.* — 1971. — Vol. 8. — Pp. 52–75.

71. *Adams A. R.* Sobolev spaces. — New York: Academic Press, 1975.

72. *Adams A. R.* On the Orlicz—Sobolev imbedding theorem // *J. functional Anal.* — 1977. — Vol. 24. — Pp. 241–257.

73. *Cianchi. A.* Optimal Orlicz-Sobolev embeddings // *Rev. Mat. Iberoamericana.* — 2004. — Vol. 20. — Pp. 427–474.

74. *M. M. Rao Z. D. Ren.* Theory of Orlicz Spaces. — Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, 1991.

75. *С. К. Водопьянов А. О. Молчанова.* Полунепрерывность снизу коэффициента искажения отображения с ограниченным (θ,1)-весовым (p,q)-искажением // *Сиб. матем. журн.* — 2016. — Т. 57, № 5. — С. 999–1011.

76. *С. К. Водопьянов А. О. Молчанова.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity [Электронный ресурс] // *arxiv.org.* — 2017. — Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1704.08022.

77. *S. Hencl L. Kleprlik.* Composition of q-quasiconformal mappings and functions in Orlicz–Sobolev spaces // *Illinois J. Math.* — 2012. — Vol. 56, no. 3. — Pp. 931–955.

78. *Y. Cui H. Hudzik R. Kumar, L. Maligranda.* Composition operators in Orlicz spaces // *J.Aust. Math. Soc.* — 2004. — Vol. 76. — Pp. 189–206.

79. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1977. — Vol. 63, no. 4. — Pp. 337–403.

80. *Чернов А. В.* Об аналоге обобщенного неравенства Гёльдера в пространствах Орлича // *Вестник Нижегородского ун-та.* — 2013. — Т. 6, № 1. — С. 157–161.

81. *Г. Г. Харди Дж. Е. Литтльвуд Г. Полиа.* Неравенства. — М.: Гос. издательство иностр. литературы, 1948.

82. *J. Maly D. Swanson W. P. Ziemer.* Fine behavior of functions whose gradients are in an Orlicz space // *Studia Math.* — 2005. — Vol. 190, no. 1. — Pp. 33–71.

83. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

84. *Maz'ya V.* Sobolev spaces: with applications to elliptic partial differential equations. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — 336 с.

85. *Heikkinen T.* Sharp self-improving properties of generalized Orlicz-Poincare inequalities in connected metric measure spaces // *Indiana University Mathematics Journal.* — 2010. — Vol. 59, no. 3. — Pp. 957–986.

86. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // *Матем. сб.* — 2012. — Т. 203, № 10. — С. 3–32.

87. *L. G. Evans R. F. Gariepy.* Measure Theory and Fine Properties of Functions. — CRC Press, 1992. — viii+268 pp pp.

88. *Hajłasz P.* Change of variables formula under minimal assumptions // *Colloq. Math.* — 1993. — Vol. 64, no. 1. — Pp. 93–101.

89. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variables Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

90. *J. K. Brooks R. V. Chacon.* Continuity and compactness of measures // *Adv. Math.* — 1980. — Vol. 37. — Pp. 16–26.

91. *J. K. Brooks R. V. Chacon.* Convergence theorems in the theory of diffusions // *MeasureTheory and its Applications / Ed. by J. M. Belley, J. Dubois, P. Morales. — Springer, Berlin.* — 1983. — Vol. 1033 of Lecture Notes in Math. — Pp. 79–93.

92. *J. M. Ball K. W. Zhang.* Lower semicontinuity of multiple integrals and the biting lemma // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A.* — 1990. — Vol. 114. — Pp. 367–379.

93. *Zhang K. W.* Biting theorems for the Jacobians and their applications // *Ann. Inst. Henri Poicare.* — 1990. — Vol. 7. — Pp. 345–365.

94. *F. W. Gehring T. Iwaniec.* The limit of mappings with finite distortion // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* — 1999. — Vol. 24. — Pp. 253–264.

95. *I. Ekeland R. Temam.* Convex analysis and variational problems. — Amsterdam: North-Holland, 1976.

96. *Vodop'yanov S. K.* Composition operators of Sobolev spaces // Modern Problems of Function Theory and its Applications. — The address of the publisher: Saratov, 2002. — 1. — Pp. 42–43.

97. *Mostow G. D.* Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms // *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* — 1968. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 53–104.

98. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229. — Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. — Pp. xiv+144.

99. *O. Martio S. Rickman J. Vaisala.* Definitions for quasiregularmappings // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.* — 1969. — Vol. 448, no. 1. — Pp. 1–40.

100. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // *Матем. сб.* — 1987. — Т. 130(172), № 2(6). — С. 185–206.

101. *A. D. Ukhlov S. K. Vodopyanov.* Mappings with bounded (P,Q) —distortion on Carnot groups // *Bull. Sci. Math.* — 2010. — Vol. 134, no. 6. — Pp. 605–634.

102. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* — 1981. — Vol. 88, no. 3. — Pp. 315–328.

103. *J. Kauhanen P. Koskela J. Maly.* Mappings of finite distortion: discreteness and openness // *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 2001. — Vol. 160, no. 2. — Pp. 135–151.

104. *T. Iwaniec P. Koskela J. Onninen.* Mappings of finite distortion: monotonicity and continuity // *Invent. Math.* — 2001. — Vol. 144, no. 3. — Pp. 507–531.

105. *T. Iwaniec P. Koskela G. Martin.* Mappings of BMO-distortion and Beltrami type operators // *J. Anal. Math.* — 2002. — Vol. 88. — Pp. 337–381.

106. *J. Kauhanen P. Koskela J. Maly, X. Zhong.* Mappings of finite distortion: sharp Orlicz-conditions // *Rev. Mat. Iberoamericana.* — 2003. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 857–872.

107. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* — 1998. — Vol. 13. — Pp. 25–70.

108. *Sverak V.* Regularity properties of deformations with finite energy // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1988. — Vol. 100. — Pp. 105–127.

109. *S. Muller S. J. Spector.* An existence theory for nonlinear elasticity that allows for cavitation // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1995. — Vol. 131. — Pp. 1–66.

110. *J. Kauhanen P. Koskela J. Maly.* Mappings of finite distortion: condition N // *Michigan Math. J.* — 2001. — Vol. 49, no. 1. — Pp. 169–181.

111. *K. Astala T. Iwaniec G. J. Martin, J. Onninen.* Extremal mappings of finite distortion // *Proc. London Math. Soc.* — 2005. — Vol. 91, no. 3. — Pp. 655–702.

112. *S. Hencl P. Koskela.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 2006. — Vol. 180, no. 1. — Pp. 75–95.

113. *S. Hencl P. Koskela J. Onninen.* A note on extremal mappings of finite distortion // *Math. Res. Lett.* — 2005. — Vol. 12, no. 2. — Pp. 231–237.

114. *P. Koskela J. Onninen.* Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities // *J. Reine Angew. Math.* — 2006. — Vol. 599. — Pp. 1–26.

115. *Gill J.* Integrability of derivatives of inverses of maps of exponentially integrable distortion in the plane // *J. Math. Anal. Appl.* — 2009. — Vol. 352. — Pp. 762–766.

116. *S. Hencl P. Koskela J. Onninen.* Homeomorphisms of bounded variation // *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 2007. — Vol. 186, no. 3. — Pp. 351–360.

117. *S. Hencl P. Koskela J. Maly.* Regularity of the inverse of a Sobolev homeomorphism in space // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* — 2006. — Vol. 136, no. 6. — Pp. 1267–1285.

118. *Onninen J.* Regularity of the inverse of spatial mappings with finite distortion // *Calc. Var. Partial Differential Equations.* — 2006. — Vol. 26, no. 3. — Pp. 331–341.

119. *M. Csornyei S. Hencl J. Maly.* Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // *J. Reine Angew. Math.* — 2010. — Vol. 644. — Pp. 221–235.

120. *Д. А. Ковтонюк В. И. Рязанов Р. Р. Салимов и Е. А. Севостьянов.* К теории классов Орлича–Соболева // *Алгебра и анализ.* — 2013. — Т. 25, № 6. — С. 50–102.

121. *С. К. Водопьянов А. О. Молчанова.* Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // *Докл. АН.* — 2015. — Т. 465, № 5. — С. 523–526.

122. *L. Greco C. Sbordone C. Trombetti.* A note on planar homeomorphisms // *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli.* — 2008. — Vol. 75, no. 4. — Pp. 53–59.

123. *Yan B.* On the weak limit of mappings with finite distortion // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2000. — Vol. 128, no. 11. — Pp. 3335–3340.

124. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // *Матем. тр.* — 2002. — Т. 5, № 2. — С. 92–137.

125. *Съярле Ф.* Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992.

Публикации автора по теме диссертации

[A1] *Меновщиков А. В.* Операторы композиции в пространствах Соболева — Орлича// *Сибирский математический журнал.* — 2016. — Т. 57, № 5. — С. 1088–1101.

[A2] *Меновщиков А. В.* О регулярности отображений, обратных к гомеоморфизмам классов Соболева — Орлича// *Сибирский математический журнал.* — 2017. — Т. 58, № 4. — С. 834–850.

[A3] *Меновщиков А. В.* Полунепрерывность снизу коэффициентов искажения гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича// *Сибирский математический журнал.* — 2018. — Т. 59, № 2. — С. 422–432.

[A4] *Меновщиков А. В.* Операторы композиции в пространствах Орлича — Соболева // Международная конференция «Метрические структуры и управляемые системы». Тезисы докладов. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2015. — С. 41–42.

[A5] *Menovschikov A.* Regularity of the inverse of Sobolev — Orlicz mappings // Международная конференция «Геометрический анализ и теория управления». Тезисы докладов. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2016. — С. 67–68.