

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Новосибирский национальный исследовательский  
государственный университет»

*На правах рукописи*

Маулешова Гульнара Сайновна

**Алгебро–геометрические односточные коммутирующие  
разностные операторы ранга 1 и ранга 2**

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:

д. ф.–м. н., член–корреспондент РАН

А. Е. Миронов

Новосибирск — 2018

# Содержание

Введение	3
<b>1 Алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 2</b>	<b>25</b>
1.1 Уравнения Кричевера–Новикова на параметры Тюринга	25
1.2 Примеры одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 2 . . . . .	30
<b>2 Алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1</b>	<b>45</b>
2.1 Основные результаты . . . . .	45
2.2 Вложение разностных операторов с полиномиальными коэффициентами в первую алгебру Вейля . . . . .	55
<b>3 Связь одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга один с конечнозонными операторами Шредингера</b>	<b>59</b>
Заключение	64
Список литературы	66

# Введение

Диссертация посвящена исследованию алгебро–геометрических одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 1 и ранга 2, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым произвольного рода. В диссертационной работе в случае операторов ранга 2 получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера–Новикова на дискретную динамику параметров Тюринга. С помощью этих уравнений построены примеры операторов, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым произвольного рода. Изучен новый класс операторов, а именно алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один. В эти операторы оператор сдвига входит только с положительными степенями. Найдены спектральные данные и примеры таких операторов в случае гиперэллиптических спектральных кривых. Также установлена связь таких операторов с одномерными конечнозонными операторами Шредингера, в частности, получена

дискретизация конечнозонных операторов Ламе в случае спектральной кривой рода 1.

Напомним необходимые нам определения. Пусть  $L_k, L_s$  — разностные операторы порядков  $k$  и  $s$

$$L_k = \sum_{j=-N_-}^{N_+} u_j(n)T^j, \quad L_s = \sum_{j=-M_-}^{M_+} v_j(n)T^j, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$N_+ \geq N_- \geq 0$ ,  $M_+ \geq M_- \geq 0$ ,  $k = N_- + N_+$ ,  $s = M_- + M_+$ ,  $T$  — оператор сдвига, условие их коммутируемости эквивалентно сложной системе нелинейных разностных уравнений на их коэффициенты. Эти уравнения изучаются, начиная с начала 20-го века (см. [1]). Для коммутирующих разностных операторов справедлив аналог леммы Бурхналла–Чаунди [2]. А именно, если  $L_k L_s = L_s L_k$ , то существует ненулевой полином  $F(z, w)$  такой, что  $F(L_k, L_s) = 0$  [3]. Полином  $F$  задает *спектральную кривую* пары  $L_k, L_s$

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z, w) = 0\}.$$

Спектральная кривая параметризует совместные собственные числа, если

$$L_k \psi = z\psi, \quad L_s \psi = w\psi,$$

то  $(z, w) \in \Gamma$ . *Рангом* пары  $L_k, L_s$  называется размерность пространства совместных собственных функций при фиксированных собственных числах

$$l = \dim\{\psi : L_k \psi = z\psi, \quad L_s \psi = w\psi\},$$

при этом предполагается, что точка  $(z, w) \in \Gamma$  находится в общем положении. Таким образом, спектральная кривая и ранг определяются точно также, как и в случае коммутирующих дифференциальных операторов. В целом, между теориями коммутирующих дифференциальных и разностных операторов существует много общего, но есть и существенные различия, которые мы упомянем ниже.

Коммутирующие разностные и дифференциальные операторы имеют важные приложения в солитонных уравнениях. В частности, И.М. Кричевером и С.П. Новиковым [4, 5] открыт замечательный класс точных решений солитонных уравнений — алгебро-геометрических решений ранга  $l > 1$ . Этот класс выделяется следующим условием. Совместные собственные функции вспомогательных коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов или их разностных аналогов образуют векторное расслоение ранга  $l$  над спектральной кривой  $\Gamma$ . В случае спектральной кривой рода  $g = 1$  в [4, 5] найдены решения ранга два уравнения Кадомцева–Петвиашвили и  $2D$ -цепочки Тоды. Основной трудностью при построении таких решений является задача построения коммутирующих операторов высокого ранга и их деформаций. Задача классификации коммутирующих дифференциальных операторов ранга  $l > 1$  решена в [6], а задача классификация коммутирующих разностных операторов существенно развита в работах [4, 5, 7]. Нахождение операторов ранга  $l > 1$  в общем случае является открытой

проблемой.

Прежде чем продолжить обсуждение разностных операторов, остановимся на дифференциальных операторах. И.М. Кричевером и С.П. Новиковым [4], с помощью предложенного ими метода деформации параметров Тюринга, найдены операторы ранга два при  $g = 1$ . Эти операторы изучались в [8]–[14] (см. также [15], [16]). При  $l = 3$ ,  $g = 1$  операторы найдены О.И. Моховым [17] (см. также [18]). Операторы ранга  $l$  с периодическими коэффициентами изучались в [19]. В последнее время было получено много интересных результатов об операторах ранга  $l > 1$  при  $g > 1$  [20]–[36].

Максимальное коммутативное кольцо разностных операторов, содержащее  $L_k$  и  $L_s$ , изоморфно кольцу мероморфных функций на некоторой алгебраической кривой с полюсами в выделенных точках  $q_1, \dots, q_m$  (см. [4]). Такие операторы называются  $m$ -точечными. Отметим, что любое кольцо коммутирующих дифференциальных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной кривой с единственным полюсом. В этом заключается одно из основных отличий коммутирующих дифференциальных и разностных операторов. Совместные собственные функции (функции Бейкера–Ахиезера) строятся по спектральным данным. Спектральные данные для двухточечных разностных коммутирующих операторов ранга 1 найдены И.М. Кричевером [3] (см. также [37]). Собственные функции таких операторов явно находятся через тэта-

функции спектральных кривых. Классификация  $m$ -точечных операторов ранга  $l$  существенно развита в [4]. В частности, в этой работе найдены спектральные данные для одноточечных операторов ранга  $l > 1$ . При этом, в случае ранга  $l > 1$  собственные функции не могут быть найдены явно и нахождение таких операторов — открытая проблема. Одноточечные операторы ранга два, отвечающие эллиптической спектральной кривой, найдены в [4], операторы с полиномиальными коэффициентами среди этих операторов найдены в [38]. В случае спектральных кривых рода  $g > 1$  и ранга  $l$  ранее не было известно примеров одноточечных коммутирующих разностных операторов до работы [1\*].

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Список литературы насчитывает 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 76 страниц.

Основные результаты **главы 1** заключаются в следующем.

В настоящей главе рассматриваются алгебро-геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга два  $L_4$ ,  $L_{4g+2}$ , отвечающие гиперэллиптической спектральной кривой  $\Gamma$  рода  $g$ , заданной уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + c_{2g-1}z^{2g-1} + \dots + c_0, \quad (1)$$

при этом

$$L_4 = \sum_{i=-2}^2 u_i(n)T^i, \quad L_{4g+2} = \sum_{i=-(2g+1)}^{2g+1} v_i(n)T^i, \quad u_2 = v_{2g+1} = 1, \quad (2)$$

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad \psi = \psi(n, P), \quad P = (z, w) \in \Gamma. \quad (3)$$

Совместные собственные функции  $L_4$  и  $L_{4g+2}$  удовлетворяют уравнению (см. [4])

$$\psi(n+1, P) = \chi_1(n, P)\psi(n-1, P) + \chi_2(n, P)\psi(n, P), \quad (4)$$

функции  $\chi_1(n, P)$  и  $\chi_2(n, P)$  рациональны на  $\Gamma$  и имеют  $2g$  простых полюсов, зависящих от  $n$ . Функция  $\chi_2(n, P)$  дополнительно имеет простой полюс в бесконечно удаленной точке  $q$ . Для того, чтобы найти  $L_4$  и  $L_{4g+2}$  достаточно найти  $\chi_1$  и  $\chi_2$ . Пусть  $\sigma$  — инволюция на  $\Gamma$ ,  $\sigma(z, w) = (z, -w)$ . Основные результаты этой главы — теоремы 1.1–1.6.

**Теорема 1.1** ([1\*]). *Если*

$$\chi_1(n, P) = \chi_1(n, \sigma(P)), \quad (5)$$

то  $L_4$  имеет вид

$$L_4 = (T + U_n + V_n T^{-1})^2 + W_n, \quad (6)$$

при этом

$$\chi_1 = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}, \quad \chi_2 = \frac{w}{Q_n} + \frac{S_n}{Q_n}, \quad (7)$$

где

$$S_n(z) = -U_n z^g + \beta_{g-1}(n) z^{g-1} + \dots + \beta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Функции  $U_n, V_n, W_n, S_n$  удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S_n^2 + Q_{n-1} Q_{n+1} V_n + Q_n (Q_{n+2} V_{n+1} + \dots) \quad (8)$$



$$Q_{n+1}(z - U_n^2 - V_n - V_{n+1} - W_n).$$

В теореме 1.1 и далее мы используем обозначение  $U_n, V_n, W_n$  вместо  $U(n), V(n), W(n)$ . Замечательно, что уравнение (8) линеаризуется.

**Следствие 1.1** ([1\*]). *Функции  $S_n(z), U_n, V_n, W_n$  удовлетворяют уравнению*

$$(S_n - S_{n+1})(U_n + U_{n+1}) - Q_{n-1}V_n - Q_n(z - U_n^2 - V_n - V_{n+1} - W_n) + Q_{n+2}(z - U_{n+1}^2 - V_{n+1} - V_{n+2} - W_{n+1}) + Q_{n+3}V_{n+2} = 0. \quad (9)$$

Если  $S_n(z)$  удовлетворяет уравнению (9), то  $S_n(z)$  удовлетворяет уравнению (8) для некоторого  $F_g(z)$ .

В случае эллиптической спектральной кривой уравнение (8) позволяет выразить  $U_n, V_n, W_n$  через два произвольных функциональных параметра  $\gamma_n, \vartheta_n$ .

**Следствие 1.2** ([1\*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + U_n + V_n T^{-1})^2 + W_n,$$

где

$$U_n = -\frac{\vartheta_n + \vartheta_{n+1}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1}, \quad (10)$$

$$V_n = \frac{\vartheta_n^2 - F_1(\gamma_n)}{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(\gamma_n - \gamma_{n+1})}, \quad F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

коммутирует с оператором

$$L_6 = T^3 + (U_n + U_{n+1} + U_{n+2})T^2 +$$

$$\begin{aligned}
& (V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + W_n - \gamma_{n+2} + U_n^2 + U_n U_{n+1} + U_{n+1}^2)T + \\
& (U_n^3 + U_{n-1}V_n + U_{n+1}V_{n+1} + U_n(2(V_n + V_{n+1}) + W_n) - \vartheta_n - \gamma_n U_n) + \\
& + V_n(V_{n-1} + V_n + V_{n+1} + W_n - \gamma_{n-1} + U_{n-1}^2 + U_{n-1}U_n + U_n^2)T^{-1} + \\
& (U_{n-2} + U_{n-1} + U_n)V_{n-1}V_n T^{-2} + V_{n-2}V_{n-1}V_n T^{-3}.
\end{aligned}$$

Спектральная кривая пары  $L_4, L_6$  задается уравнением  $w^2 = F_1(z)$ .

Если в теореме 1.1 положить  $\vartheta_n = 0$ , то мы получим оператор вида

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n.$$

Верна следующая теорема.

**Теорема 1.2** ([1\*]). *Если*

$$\chi_1(n, P) = \chi_1(n, \sigma(P)), \quad \chi_2(n, P) = -\chi_2(n, \sigma(P)), \quad (11)$$

то  $L_4$  имеет вид

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n, \quad (12)$$

при этом

$$\chi_1 = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}, \quad \chi_2 = \frac{w}{Q_n}, \quad (13)$$

где

$$Q_n(z) = z^g + \alpha_{g-1}(n)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(n).$$

Функции  $V_n, W_n, Q_n$  удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = Q_{n-1}Q_{n+1}V_n + Q_n(Q_{n+2}V_{n+1} + Q_{n+1}(z - V_n - V_{n+1} - W_n)). \quad (14)$$

Уравнение (14) линеаризуется. А именно, если в (14) заменить  $n$  на  $n + 1$  и от полученного уравнения отнять (14), то результат делится на  $Q_{n+1}(z)$ . В итоге приходим к линейному уравнению на  $Q_n(z)$ .

**Следствие 1.3** ([1\*]). *Функции  $Q_n(z), V_n, W_n$  удовлетворяют уравнению*

$$Q_{n-1}V_n + Q_n(z - V_n - V_{n+1} - W_n) - \\ - Q_{n+2}(z - V_{n+1} - V_{n+2} - W_{n+1}) - Q_{n+3}V_{n+2} = 0. \quad (15)$$

Если  $Q_n(z)$  удовлетворяет уравнению (15), то  $Q_n(z)$  удовлетворяет уравнению (14) для некоторого  $F_g(z)$ .

В случае эллиптической спектральной кривой уравнение (14) позволяет выразить  $V_n, W_n$  через произвольный функциональный параметр  $\gamma_n$ .

**Следствие 1.4** ([1\*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n,$$

где

$$V_n = \frac{F_1(\gamma_n)}{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(\gamma_n - \gamma_{n+1})}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1}, \quad (16)$$

$$F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

коммутирует с оператором

$$L_6 = T^3 + (V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + W_n - \gamma_{n+2})T +$$

$$+V_n(V_{n-1} + V_n + V_{n+1} + W_n - \gamma_{n-1})T^{-1} + V_{n-2}V_{n-1}V_nT^{-3}.$$

Спектральная кривая пары  $L_4, L_6$  задается уравнением  $w^2 = F_1(z)$ .

Теорема 1.2 позволяет эффективно строить примеры коммутирующих разностных операторов.

**Теорема 1.3** ([1\*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + (r_3n^3 + r_2n^2 + r_1n + r_0)T^{-1})^2 + g(g+1)r_3n, \quad r_3 \neq 0$$

коммутирует с разностным оператором  $L_{4g+2}$ .

**Теорема 1.4** ([1\*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + (r_1a^n + r_0)T^{-1})^2 + r_1(a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1)a^{n-g}, \quad r_1 \neq 0, a \neq 0,$$

где  $a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1 \neq 0$ , коммутирует с разностным оператором

$L_{4g+2}$ .

**Теорема 1.5** ([1\*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + (r_1 \cos(n) + r_0)T^{-1})^2 - 4r_1 \sin\left(\frac{g}{2}\right) \sin\left(\frac{g+1}{2}\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad r_1 \neq 0$$

коммутирует с разностным оператором  $L_{4g+2}$ .

Рассмотрим следующую систему дифференциально-разностных уравнений на функции  $V_n(t), W_n(t)$

$$\dot{V}_n = V_n(W_{n-1} - W_n + V_{n-1} - V_{n+1}), \quad (17)$$

$$\dot{W}_n = (W_n - W_{n-1})V_n + (W_{n+1} - W_n)V_{n+1}, \quad (18)$$

Из (17), (18) вытекает, что функция  $\varphi_n(t)$ , где  $e^{\varphi_n(t)} = V_n(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\varphi}_n = e^{\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n-1} + \varphi_n} - e^{\varphi_n + \varphi_{n+1}} + e^{\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}}.$$

Также из (17), (18) следует, что

$$[L_4, \partial_t - V_{n-1}V_n T^{-2}] = 0, \quad (19)$$

где

$$L_4 = (T + V_n(t)T^{-1})^2 + W_n(t).$$

Предположим, что  $V_n(t), W_n(t)$  — решение ранга два системы (17), (18), т.е. предположим, что дополнительно к (19) выполнено  $[L_4, L_{4g+2}] = 0$ . Найдем эволюционное уравнение на полином  $Q_n$ , ассоциированный с  $L_4$  (см. теорему 1.2).

**Теорема 1.6** ([1\*]). *Предположим, что потенциалы  $V_n(t), W_n(t)$  оператора  $L_4 = (T + V_n(t)T^{-1})^2 + W_n(t)$  удовлетворяют системе (17), (18). Тогда полином*

$$Q_n = z^g + \alpha_{g-1}(n)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(n),$$

*отвечающий  $L_4$ , удовлетворяет эволюционному уравнению*

$$\dot{Q}_n = V_n(Q_{n+1} - Q_{n-1}). \quad (20)$$

Уравнение (20) задает симметрию уравнения (14). При  $g = 1$  функции  $V_n(t), W_n(t)$  выражаются через функциональный параметр

$\gamma_n(t)$  по формулам (16). В этом случае система (17), (18) и уравнение (20) сводится к одному уравнению

$$\dot{\gamma}_n = \frac{F_1(\gamma_n)}{(\gamma_{n-1} - \gamma_n)(\gamma_n - \gamma_{n+1})}(\gamma_{n-1} - \gamma_{n+1}),$$

где  $F_1(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$  определяет спектральную кривую пары  $L_4, L_{4g+2} : w^2 = F_1(z)$ . Это уравнение является дискретным аналогом уравнения Кричевера–Новикова

$$W_{t_1} = \frac{48F_1(\frac{1}{2}(-c_2 - W)) - W_{xx}^2 + 2W_xW_{xxx}}{8W_x}, \quad (21)$$

которое возникает в теории решений ранга два уравнения Кадомцева–Петвиашвили [5]. Уравнение (21) имеет следующие представление Лакса

$$[\mathcal{L}_4, \partial_t - A] = 0, \quad (22)$$

где  $\mathcal{L}_4 = (\partial_x^2 + V(x, t))^2 + W(x, t)$ ,  $A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}V(x, t)\partial_x + \frac{3}{4}V_x(x, t)$  и  $V = \frac{-16F_1(\frac{1}{2}(-c_2 - W)) - W_{xx}^2 + 2W_xW_{xxx}}{4W_x^2}$ . Уравнение (22) является аналогом (19).

Основные результаты **главы 2** заключаются в следующем.

В данной главе изучаются алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1. Коэффициенты таких операторов зависят от одного функционального параметра, а операторы сдвига входят в разностные операторы только с положительными степенями. Мы изучаем эти операторы в случае гиперэллиптических спектральных кривых, когда выделенная точка

совпадает с бесконечно удаленной точкой ветвления. Отметим, что все другие классы коммутативных колец разностных операторов, исследованные ранее (см. [4], [3], [37]–[38], [1\*]), содержат операторы, в которые оператор сдвига входит как с положительными, так и с отрицательными степенями.

Рассмотрим следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_g, q, k^{-1}, P_n\},$$

где  $\Gamma$  — риманова поверхность рода  $g$ ,  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$  — неспециальный дивизор на  $\Gamma$  ( $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  — в общем положении),  $q \in \Gamma$  — выделенная точка,  $k^{-1}$  — локальный параметр около  $q$ ,  $P_n \in \Gamma$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  — набор точек в общем положении (т.е. если  $n > 0$ , то точки  $(P_1, \dots, P_n)$  принадлежат некоторому всюду плотному подмножеству в  $\Gamma^n = \Gamma \times \dots \times \Gamma$  и аналогично при  $n < 0$ ).

**Теорема 2.1** ([2\*]). *Существует единственная функция  $\psi(n, P)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $P \in \Gamma$ , которая обладает следующими свойствами.*

**1.** *Дивизор нулей и полюсов  $\psi$  имеет вид*

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) + P_1 + \dots + P_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq,$$

*если  $n \geq 0$  и имеет вид*

$$\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) - P_{-1} - \dots - P_n - \gamma_1 - \dots - \gamma_g - nq,$$

*если  $n < 0$ .*

2. В окрестности  $q$  функция  $\psi$  имеет разложение

$$\psi = k^n + O(k^{n-1}).$$

3.  $\psi(0, P) = 1$ .

Функцию  $\psi(n, P)$  назовем функцией Бейкера–Ахиезера. Для мероморфной функции  $f(P)$  на  $\Gamma$  с единственным полюсом порядка  $m$  в  $q$  с разложением  $f = k^m + O(k^{m-1})$  существует единственный оператор вида

$$L_m = T^m + u_{m-1}(n)T^{m-1} + \dots + u_0(n),$$

такой, что  $L_m\psi(n, P) = f(P)\psi(n, P)$ . Оператор  $L_m$  лежит в коммутативном кольце разностных операторов, изоморфном кольцу мероморфных функций на  $\Gamma$  с полюсом в  $q$ .

**Замечание 1.** *Спектральные данные, в которых появляется дополнительный набор точек  $P_n$  (аналогично нашей конструкции), рассматривались И.М. Кричевером [39] в случае двумерного дискретного оператора Шредингера.*

Отметим, что дивизор  $\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n)$  определяется по спектральным данным однозначно. Отметим также, что в частном случае, когда все точки  $P_n$  совпадают, мы получаем двухточечные операторы И.М. Кричевера [3] ранга один.

Двухточечные операторы ранга один, в которые операторы сдвига входят только с отрицательными степенями, рассматривались в работе [40].



Рассмотрим гиперэллиптическую спектральную кривую  $\Gamma$ , заданную уравнением (1), в качестве выделенной точки выберем  $q = \infty$ . Пусть  $\psi(n, P)$  — соответствующая функция Бейкера–Ахиезера. Тогда существуют коммутирующие операторы  $L_2, L_{2g+1}$  такие, что

$$L_2\psi = ((T + U_n)^2 + W_n)\psi = z\psi, \quad L_{2g+1}\psi = w\psi. \quad (23)$$

**Теорема 2.2** ([2\*]). *Имеет место равенство*

$$L_2 - z = (T + U_n + U_{n+1} + \chi(n, P))(T - \chi(n, P)),$$

где

$$\chi = \frac{\psi(n+1, P)}{\psi(n, P)} = \frac{S_n}{Q_n} + \frac{w}{Q_n}, \quad (24)$$

$$S_n(z) = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n) z^{g-1} + \dots + \delta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Функции  $U_n, W_n, S_n$  удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S_n^2 + (z - U_n^2 - W_n)Q_n Q_{n+1}. \quad (25)$$

Уравнение (25) так же, как и уравнение (14) может быть линеаризовано.

**Следствие 2.1** ([2\*]). *Функции  $S_n(z), U_n, W_n$  удовлетворяют уравнению*

$$(S_n - S_{n+1})(U_n + U_{n+1}) - (z - U_n^2 - W_n)Q_n + (z - U_{n+1}^2 - W_{n+1})Q_{n+2} = 0. \quad (26)$$

**Следствие 2.2** ([2\*]). *В случае эллиптической спектральной кривой  $\Gamma$ , заданной уравнением*

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0,$$

*оператор*

$$L_2 = (T + U_n)^2 + W_n, \quad (27)$$

*где*

$$U_n = -\frac{\mu_1\sqrt{F_1(\gamma_n)} + \mu_2\sqrt{F_1(\gamma_{n+1})}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1}, \quad (28)$$

$\mu_1, \mu_2 = \pm 1$ ,  $\gamma_n$  — произвольный функциональный параметр, коммутирует с некоторым оператором  $L_3$ .

Отметим, что данные операторы могут быть получены из односточечных операторов Кричевера–Новикова ранга два (см. [4]). Продemonстрируем это при  $g = 1$ . Если в следствии 1.2 возьмем  $\vartheta_n = \pm\sqrt{F_1(\gamma_n)}$ , то мы получаем операторы из следствии 2.2.

Теорема 2.2 позволяет строить явные примеры.

**Теорема 2.3** ([2\*]). *Оператор*

$$L_2 = (T + r_1 \cos(n))^2 + \frac{1}{2}r_1^2 \sec^2\left(g + \frac{1}{2}\right) \sin(g) \sin(g + 1) \cos(2n),$$

$r_1 \neq 0$  коммутирует с оператором  $L_{2g+1}$  порядка  $2g + 1$ .

**Теорема 2.4** ([2\*]). *Оператор*

$$L_2 = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_0)^2 - g(g + 1)\alpha_2^2 n^2, \quad \alpha_2 \neq 0$$

*коммутирует с оператором  $L_{2g+1}$  порядка  $2g + 1$ .*

Основные результаты **главы 3** заключаются в следующем.

В этой главе мы будем изучать алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие  $\varepsilon$ –разностные операторы ранга 1 вида

$$L_m = \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + u_{m-1}(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \dots + u_0(x, \varepsilon),$$

где  $T_\varepsilon$  – оператор сдвига на  $\varepsilon$ ,  $T_\varepsilon \varphi(x) = \varphi(x + \varepsilon)$ . Пусть  $\Gamma$  – гиперэллиптическая спектральная кривая, удовлетворяющая уравнению (1) и  $g = \infty$ . Предположим, что оператор

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + B(x, \varepsilon)$$

коммутирует с оператором  $L_{2g+1}$ . Аналогами теоремы 2.2 и следствия 2.2 из [2\*] являются следующие теорема и следствие.

**Теорема 3.1** ([3\*]). *Имеет место равенство*

$$L_2 - z = \left( \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + A(x, \varepsilon) + \chi(x + \varepsilon, \varepsilon, z) \right) \left( \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x, \varepsilon, z) \right),$$

где

$$\chi = \frac{S(x, \varepsilon, z)}{Q(x, \varepsilon, z)} + \frac{w}{Q(x, \varepsilon, z)},$$

$$S(x, \varepsilon, z) = -\delta_g(x, \varepsilon)z^g + \delta_{g-1}(x, \varepsilon)z^{g-1} + \dots + \delta_0(x, \varepsilon),$$

$$A(x, \varepsilon) = \delta_g(x, \varepsilon) + \delta_g(x + \varepsilon, \varepsilon),$$

$$Q(x, \varepsilon, z) = -\frac{S(x - \varepsilon, \varepsilon, z) + S(x, \varepsilon, z)}{A(x - \varepsilon, \varepsilon)}.$$

Функции  $A, B, S, Q$  удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S^2(x, \varepsilon, z) + Q(x, \varepsilon, z)Q(x + \varepsilon, \varepsilon, z)(z - B(x, \varepsilon)). \quad (29)$$

Отметим, что уравнение (29) может быть линеаризовано. Функции  $A, B, S, Q$  удовлетворяют уравнению

$$(S(x, \varepsilon, z) - S(x + \varepsilon, \varepsilon, z))A(x, \varepsilon) - Q(x, \varepsilon, z)(z - B(x, \varepsilon)) + \\ Q(x + 2\varepsilon, \varepsilon, z)(z - B(x + \varepsilon, \varepsilon)) = 0. \quad (30)$$

Если  $S(x, \varepsilon, z)$  удовлетворяет уравнению (30), то  $S(x, \varepsilon, z)$  удовлетворяет уравнению (29) для некоторого  $F_g(z)$ .

Теорема 3.1 позволяет построить явный пример алгебро-геометрических коммутирующих одноточечных  $\varepsilon$ -разностных операторов в случае эллиптической спектральной кривой.

**Следствие 3.1** ([3\*]). *Оператор*

$$L_2 = \left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \delta_1(x, \varepsilon)\right)^2 + W(x, \varepsilon),$$

где

$$\delta_1(x, \varepsilon) = -\frac{\mu_1 \sqrt{F_1(\gamma(x, \varepsilon))} + \mu_2 \sqrt{F_1(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon))}}{\tilde{\gamma}(x, \varepsilon) - \tilde{\gamma}(x + \varepsilon, \varepsilon)},$$

$$W(x, \varepsilon) = -c_2 - \gamma(x, \varepsilon) - \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon),$$

$\mu_1, \mu_2 = \pm 1$ ,  $\gamma(x, \varepsilon)$  — произвольный функциональный параметр, коммутирует с оператором

$$L_3 = \frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3} + (\delta_1(x, \varepsilon) + \delta_1(x + \varepsilon, \varepsilon) + \delta_1(x + 2\varepsilon, \varepsilon)) \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \\ (\delta_1^2(x, \varepsilon) + \delta_1^2(x + \varepsilon, \varepsilon) + \delta_1(x, \varepsilon)\delta_1(x + \varepsilon, \varepsilon) + W(x, \varepsilon) - \gamma(x + 2\varepsilon, \varepsilon)) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \\ (\mp \sqrt{F_1(\gamma(x, \varepsilon))} + \delta_1(x, \varepsilon)(\delta_1^2(x, \varepsilon) + W(x, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon))).$$

Спектральная кривая пары  $L_2, L_3$  задается уравнением

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

При  $g > 1$  решить уравнение (29) очень трудно, более того, даже нахождение примеров является сложной задачей.

Отметим, что в теории обыкновенных коммутирующих дифференциальных операторов возникают уравнения аналогичные уравнениям (29) и (30). Сделаем сопоставление дискретных уравнений (29) и (30) с их гладкими аналогами. Напомним сначала некоторые известные факты об одномерных конечнозонных операторах Шредингера  $H = \partial_x^2 + u(x)$ . Теория таких операторов тесно связана с теорией периодических и квазипериодических решений уравнения Кортевега–де Фриза (см. [41]–[43]). Оператор  $H$  коммутирует с некоторым дифференциальным оператором  $M$  порядка  $2g + 1$

$$M = \partial_x^{2g+1} + v_{2g}(x)\partial_x^{2g} + \dots + v_0(x).$$

Спектральная кривая  $\Gamma$  пары  $H, M$  задается уравнением вида  $w^2 = F_g(z)$ , при этом для совместной собственной функции  $\psi(x)$

$$H\psi(x) = z\psi(x), \quad M\psi(x) = w\psi(x),$$

имеем  $(z, w) \in \Gamma$ . Справедливо разложение (см. [44])

$$H - z = (\partial_x + \chi_0(x))(\partial_x - \chi_0(x)),$$

где

$$\chi_0 = \frac{R_x}{2R} + \frac{w}{R}, \quad R(x, z) = z^g + \alpha_{g-1}(x)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(x).$$

Полином  $R$  удовлетворяет уравнению

$$F_g(z) = R^2(z - u) + \frac{R_x^2}{4} - \frac{RR_{xx}}{2}.$$

Известным примером конечнозонного оператора Шредингера является оператор Ламе

$$\partial_x^2 - g(g + 1)\wp(x).$$

где  $\wp(x)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса, которая удовлетворяет уравнению  $(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) + g_2\wp(x) + g_3$ .

Предположим, что для  $\varepsilon$ -разностного оператора  $L_2$  выполнены следующие разложения (см. теорему 3.1)

$$S(x, \varepsilon, z) = \frac{R(x, z)}{\varepsilon} + Q_0(x, z) + Q_1(x, z)\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$A(x, \varepsilon) = -\frac{2}{\varepsilon} + u(x)\varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad B(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^2),$$

тогда

$$L_2 = \partial_x^2 + u(x) + O(\varepsilon).$$

Из (29) вытекает равенство

$$F_g(z) = R^2(z - u) + \frac{R_x^2}{4} - \frac{RR_{xx}}{2} + O(\varepsilon).$$

В следствии 3.1 положим функциональный параметр равным

$$\gamma(x, \varepsilon) = \wp(x - \varepsilon),$$

тогда

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \left( -2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + \varepsilon) \right) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon),$$

где  $\zeta(x)$  — функция Вейерштрасса.

Основной результат этой главы — следующая теорема.

**Теорема 3.2** ([3\*]). *Оператор*

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \left( -2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + \varepsilon) \right) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon),$$

*коммутирует с оператором*

$$\begin{aligned} L_3 = & \frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3} + \left( -3\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + 2\varepsilon) \right) \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \\ & \left( (\zeta(\varepsilon) + \zeta(x - \varepsilon) - \zeta(x))(\zeta(\varepsilon) + \zeta(x) - \zeta(x + \varepsilon)) + \right. \\ & \left. 2\wp(\varepsilon) + \wp(x) \right) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\wp'(\varepsilon). \end{aligned}$$

*При этом*

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon), \quad L_3 = \partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x) + O(\varepsilon).$$

Отметим, что спектральная кривая пары коммутирующих дифференциальных операторов (т.е. кривая, заданная уравнением  $w^2 = F_1(z)$ )

$$\partial_x^2 - 2\wp(x), \quad \partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x)$$

такая же как и для  $\varepsilon$ -разностных операторов  $L_2, L_3$ . Таким образом, теорема 3.2 дает замечательную дискретизацию оператора Ламе в случае спектральной кривой рода 1.

Более того, в работе [3\*] мы нашли дискретизацию оператора Ламе для произвольного рода  $g$ . Но, поскольку доказательство достаточно длинное, данный результат мы не включили в диссертационную работу (см. замечание 3.1).

Отметим, что другая дискретизация оператора Ламе в рамках двухточечной конструкции рассматривалась в работе [45].

Полученные результаты опубликованы в 7 научных изданиях [1\*] — [7\*], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1\*] — [3\*], 4 — в тезисах докладов и материалах конференций [4\*] — [7\*]. Все сформулированные результаты являются новыми. Все результаты были получены совместно с А.Е. Мироновым. Вклад авторов равноправен и неделим.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.Е. Миронову за постановку задач, полезные обсуждения и всестороннюю поддержку.



## Глава 1

# Алгебро–геометрические одното- чечные коммутирующие разност- ные операторы ранга 2

### 1.1 Уравнения Кричевера–Новикова на параметры Тюрри- на

Как уже упоминалось, в случае операторов ранга один в рамках двухточечной конструкции собственные функции находятся явно через тэта–функцию многообразия Якоби спектральной кривой.

Приведем простейший пример. Пусть  $\Gamma$  — эллиптическая кривая

$\Gamma = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}\}, \tau \in \mathbb{C}, \text{Im}\tau > 0$ ,  $\theta(z)$  — тэта–функция  $\theta(z) =$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)$ . Тогда функция Бейкера–Ахиезера имеет

вид

$$\psi(n, z) = \frac{\theta(z + c + nh)}{\theta(z)} \left( \frac{\theta(z - h)}{\theta(z)} \right)^n, \quad c, h \notin \{\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}\}. \quad (31)$$

Для любой мероморфной функции вида  $\lambda = \frac{\theta(z-a_1)\dots(z-a_k)}{\theta^k(z)}$ ,  $a_1 + \dots + a_k = 0$  существует единственный оператор

$$L(\lambda) = v_k(n)T^k + \dots + v_0(n)$$

такой, что

$$L(\lambda)\psi = \lambda\psi.$$

Операторы  $L(\lambda)$  и  $L(\mu)$  коммутируют. Отметим, что функция вида (31) обобщается на случай главно поляризованных абелевых многообразий произвольной размерности. Это обобщения позволяет построить коммутирующие разностные операторы от многих дискретных переменных с матричными коэффициентами (см. [46]).

При  $l > 1$  совместные собственные функции не удается найти. Это является основной трудностью при построении коммутирующих операторов высокого ранга. Напомним необходимые нам результаты из [4]. Одноточечные коммутирующие операторы ранга  $l$  имеют вид

$$L = \sum_{i=-Nr_-}^{Nr_+} u_i(n)T^i, \quad A = \sum_{i=-Mr_-}^{Mr_+} v_i(n)T^i,$$

где  $l = r_+ + r_-$ ,  $(N, M) = 1$  [4]. Рассмотрим пространство  $U(z)$  решений уравнения  $Ly = zy$ ,

$$\dim U(z) = N(r_+ + r_-).$$

Из коммутируемости  $L$  и  $A$  следует, что оператор  $A$  определяет линейный оператор  $A(z)$  на пространстве  $U(z)$ . Выберем базис  $\varphi^i(n)$  в

пространстве  $U(z)$ , удовлетворяющий условию нормировки

$$\varphi^i(n) = \delta_{in}, \quad -Nr_- \leq i, n < Nr_+.$$

В базисе  $\varphi^i(n)$  компоненты матрицы  $A(z)$  — полиномы по  $z$ . В рассматриваемом случае характеристический полином матрицы  $A(z)$  имеет вид

$$\det(w - A(z)) = R^l(w, z).$$

Полином  $R$  определяет спектральную кривую  $\Gamma$ , параметризующую совместные собственные числа  $L$  и  $A$

$$L\psi = z\psi, \quad A\psi = w\psi, \quad R(z, w) = 0.$$

Совместные собственные функции образуют векторное расслоение ранга  $l$  над аффинной частью спектральной кривой. Для каждой точки  $P = (z, w) \in \Gamma$  выберем базис в пространстве совместных собственных функций, удовлетворяющий требованиям

$$\psi_n^i(P) = \delta_{i,n}, \quad -r_- \leq i, n < r_+.$$

В аффинной части спектральной кривой функции  $\psi_n^i(P)$  имеют дивизор полюсов  $\gamma$  степени  $lg$

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_{lg},$$

не зависящий от  $n$ . В точках  $\gamma_i$  выполнены соотношения

$$\alpha_s^j Res_{\gamma_s} \psi_n^i(P) = \alpha_s^i Res_{\gamma_s} \psi_n^j(P),$$

$\alpha_s^i$  не зависят от  $n$ . Набор данных  $(\gamma, \alpha_s)$ ,  $\alpha_s = \{\alpha_s^i\}$  называется *параметрами Тюринга*. Эти данные определяют оснащенное полустабильное расслоение ранга  $l$  степени  $lg$  над  $\Gamma$ .

Обозначим через  $\Psi(n, P)$  матрицу Вронского

$$\Psi^{ij}(n, P) = \psi_{n+j}^i(P), \quad -r_- \leq i, j < r_+.$$

Функция  $\det \Psi(n, P)$  голоморфна в окрестности бесконечности, ее дивизор полюсов совпадает с дивизором  $\gamma$ , а дивизор нулей зависит от  $n$

$$\gamma(n) = \gamma_1(n) + \dots + \gamma_{lg}(n),$$

при этом  $\gamma(0) = \gamma$ . Рассмотрим матричную функцию

$$\chi(n, P) = \Psi(n+1, P)\Psi^{-1}(n, P),$$

$$\chi(n, P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \chi_{-r_-}(n, P) & \chi_{-r_-+1}(n, P) & \chi_{-r_-+2}(n, P) & \dots & \chi_{r_+-1}(n, P) \end{pmatrix}.$$

Ее компоненты в окрестности бесконечности  $q$  имеют вид

$$\chi_i(n, k) = k^{-1}\delta_{i,0} - f_i(n, k),$$

где  $k$  — локальный параметр около  $q$ ,  $f_i(n, k)$  — аналитическая функция в окрестности  $q$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** (И.М. Кричевер, С.П. Новиков)

Матричная функция  $\chi(n, P)$  имеет на  $\Gamma$  простые полюсы в точках  $\gamma_j(n)$ . Имеют место соотношения на вычеты матричных элементов

$$\alpha_s^j \operatorname{Res}_{\gamma_s(n)} \chi_i(n, P) = \alpha_s^i \operatorname{Res}_{\gamma_s(n)} \chi_j(n, P). \quad (32)$$

Точки  $\gamma_s(n+1)$  являются нулями определителя матрицы  $\chi(n, P)$ , т.е.

$$\det \chi(n, \gamma_s(n+1)) = 0. \quad (33)$$

Вектор  $\alpha_j(n+1)$  удовлетворяет уравнению

$$\alpha_j(n+1) \chi(n, \gamma_j(n+1)) = 0. \quad (34)$$

Уравнения (32)—(34) определяют дискретную динамику параметров Тюринга. И.М. Кричевер и С.П. Новиков нашли решения уравнений (32)—(34) и коммутирующие операторы в случае, когда ранг равен двум, а спектральная кривая является эллиптической кривой.

В простейшем случае эти операторы имеют вид

$$L = L_2^2 - \wp(\gamma_n) - \wp(\gamma_{n-1}),$$

где  $L_2$  — разностный оператор Шредингера

$$L_2 = T + v_n + c_n T^{-1}$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{4}(s_{n-1}^2 - 1)F(\gamma_n, \gamma_{n-1})F(\gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}),$$

$$v_n = \frac{1}{2} (s_{n-1}F(\gamma_n, \gamma_{n-1}) - s_nF(\gamma_{n-1}, \gamma_n)),$$

$$F(u, v) = \zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2\zeta(v).$$

Здесь  $\wp(u)$ ,  $\zeta(u)$  — функции Вейерштрасса,  $s_n$ ,  $\gamma_n$  — функциональные параметры.

## 1.2 Примеры одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 2

В данном параграфе приведем доказательства теорем 1.1–1.6.

### Доказательство теоремы 1.1.

Пусть  $\Gamma$  — гиперэллиптическая спектральная кривая, заданная уравнением (1).  $L_4$ ,  $L_{4g+2}$  — операторы вида (2), для которых выполнено (3). Матрица  $\chi(n, P) = \Psi(n+1, P)\Psi^{-1}(n, P)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_1(n, P) & \chi_2(n, P) \end{pmatrix}.$$

Функции  $\chi_1$  и  $\chi_2$  имеют следующие разложения в окрестности точки  $q = \infty$  [4]

$$\chi_1(n) = b_0(n) + b_1(n)k + \dots, \quad \chi_2(n) = \frac{1}{k} + e_0(n) + e_1(n)k + \dots, \quad (35)$$

где  $k = \frac{1}{\sqrt{z}}$ . Коэффициенты оператора  $L_4$  выражаются через  $b_i(n)$ ,  $e_i(n)$ . Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.1.** *Оператор*

$$L_4 = T^2 + u_1(n)T + u_0(n) + u_{-1}(n)T^{-1} + u_{-2}(n)T^{-2}$$

имеет следующие коэффициенты:

$$u_1(n) = -e_0(n) - e_0(n+1),$$

$$u_0(n) = -b_0(n) - b_0(n+1) + e_0^2(n) + e_1(n) - e_1(n+1),$$

$$u_{-1}(n) = -b_1(n) + b_0(n) \left( e_0(n) + e_0(n-1) - \frac{b_1(n-1)}{b_0(n-1)} \right),$$

$$u_{-2}(n) = b_0(n)b_0(n-1).$$

Если  $b_1(n) = 0$ , то  $L_4$  представим в виде

$$L_4 = (T + U_n + V_n T^{-1})^2 + W_n,$$

где

$$U_n = -e_0(n), \quad V_n = -b_0(n), \quad W_n = -e_1(n) - e_1(n+1).$$

**Доказательство.** Пользуясь тождеством (4), выразим  $\psi_{n+2}(P)$  и  $\psi_{n-2}(P)$  через  $\psi_{n-1}(P)$ ,  $\psi_n(P)$ ,  $\chi_1(n, P)$  и  $\chi_2(n, P)$ , а именно

$$\psi_{n+2} = \psi_{n-1}\chi_1(n)\chi_2(n+1) + \psi_n(\chi_1(n+1) + \chi_2(n)\chi_2(n+1)),$$

$$\psi_{n-2} = -\psi_{n-1} \frac{\chi_2(n-1)}{\chi_1(n-1)} + \frac{\psi_n}{\chi_1(n-1)}.$$

Теперь заменим  $\psi_{n+2}$  и  $\psi_{n-2}$  в равенстве  $L_4\psi_n = z\psi_n$  на соответствующие выражения. Получим

$$P_1(n, P)\psi_n(P) + P_2(n, P)\psi_{n-1}(P) = z\psi_n(P),$$

где

$$P_1(n) = \chi_1(n+1) + \chi_2(n+1)\chi_2(n) + u_1(n)\chi_2(n) + u_0(n) + \frac{u_{-2}(n)}{\chi_1(n-1)},$$

$$P_2(n) = \chi_2(n+1)\chi_1(n) + u_1(n)\chi_1(n) + u_{-1}(n) - u_{-2}(n)\frac{\chi_2(n-1)}{\chi_1(n-1)}.$$

Следовательно, имеем тождества

$$P_1 = z = \frac{1}{k^2}, \quad P_2 = 0. \quad (36)$$

Подставив (35) в (36) получим

$$\begin{aligned} P_1 - \frac{1}{k^2} &= \frac{e_0(n) + e_0(n+1) + u_1(n)}{k} + (b_0(n+1) + e_0(n)e_0(n+1) + \\ &e_1(n) + e_1(n+1) + u_0(n) + e_0(n)u_1(n) + \frac{u_{-2}(n)}{b_0(n-1)}) + O(k) = 0, \\ P_2 &= \frac{b_0(n) - \frac{u_{-2}(n)}{b_0(n-1)}}{k} + (b_1(n) + b_0(n)e_0(n+1) + b_0(n)u_1(n) + \\ &u_{-1}(n) + \frac{b_1(n-1)u_{-2}(n)}{b_0^2(n-1)} - \frac{e_0(n-1)u_{-2}(n)}{b_0(n-1)}) + O(k) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим коэффициенты оператора  $L_4$ . Из полученных формул следует, что если  $b_1(n) = 0$ , то  $L_4$  имеет вид (6). Лемма 1.1 доказана.

Таким образом, если  $\chi_1$  и  $\chi_2$  удовлетворяют условию (5), то  $b_1(n) = 0$ , следовательно,  $L_4$  представим в виде (6).

Операторы  $L_4 - z$  и  $L_{4g+2} - w$  имеют общий правый делитель

$$T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1},$$

$$L_4 - z = l_1(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}), \quad L_{4g+2} - z = l_2(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}),$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — некоторые операторы порядков 2 и  $4g$ .

Предположим, что выполнено условие (5). Тогда

$$(T + U_n + V_n T^{-1})^2 + W_n - z = (T + A_n + B_n T^{-1})(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}),$$



где

$$A_n = U_n + U_{n+1} + \chi_2(n+1), \quad B_n = -\frac{V_{n-1}V_n}{\chi_1(n-1)},$$

при этом  $\chi_1$  и  $\chi_2$  удовлетворяют уравнениям

$$V_{n-1}V_n + \chi_1(n-1)(U_n^2 + V_n + V_{n+1} - z + W_n + \chi_1(n+1) + \chi_2(n)(U_n + U_{n+1} + \chi_2(n+1))) = 0, \quad (37)$$

$$(U_{n-1} + U_n)V_n\chi_1(n-1) - V_{n-1}V_n\chi_2(n-1) + \chi_1(n-1)\chi_1(n)(U_n + U_{n+1} + \chi_2(n+1)) = 0. \quad (38)$$

Имеем равенства

$$\det\chi(n, P) = -\chi_1(n, P) = \det\Psi(n+1, P)(\det\Psi(n, P))^{-1}.$$

Степень дивизора нулей  $\gamma_n$  функции  $\det\Psi(n, P)$  равна  $2g$ . В силу то, что функция  $\chi_1$  инвариантна относительно инволюции  $\sigma$ , дивизор  $\gamma_n$  имеет вид

$$\gamma_n = \gamma_1(n) + \sigma\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) + \sigma\gamma_g(n).$$

Пусть  $\gamma_i(n)$  имеет координаты  $(\delta_i(n), w(\delta_i(n)))$ . Обозначим через  $Q_n$  полином степени  $g$  по  $z$

$$Q_n = (z - \delta_1(n)) \dots (z - \delta_g(n)).$$

Тогда

$$\chi_1(n, P) = b_0(n) \frac{Q_{n+1}}{Q_n},$$

где  $b_0(n)$  — некоторая функция. В окрестности  $q$  имеем разложение

$$\chi_1 = b_0(n) + b_2(n)k^2 + O(k^4),$$

По лемме 1.1  $V_n = -b_0(n)$ . Окончательно получаем

$$\chi_1(n, P) = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}.$$

Далее, положим

$$S_n = -U_n(z - \nu_1(n)) \dots (z - \nu_g(n)),$$

и пусть  $S_n$  и  $Q_n$  удовлетворяют соотношению

$$Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Так как дивизор полюсов  $\chi_2(n, P)$  равен  $\gamma_n$ , а в окрестности  $q$  имеет место разложение (35), то

$$\chi_2(n, P) = \frac{w}{Q_n} + \frac{S_n}{Q_n}.$$

При таких  $\chi_1$  и  $\chi_2$  уравнение (38) выполнено тождественно, а (37) сводится к уравнению (8) на  $Q_n, U_n, V_n, W_n$ . Теорема 1.1 доказана.

Несложно проверить, что если  $\chi_1$  и  $\chi_2$  имеют вид (7), а  $S_n$  удовлетворяет уравнению (8), то выполняются уравнения Кричевера–Новикова (32)–(34).

### Доказательство теоремы 1.2.

Пусть  $\Gamma$  — гиперэллиптическая спектральная кривая, заданная уравнением (1).  $L_4, L_{4g+2}$  — операторы вида (2), для которых вы-

полнено (3). Матрица  $\chi(n, P) = \Psi(n+1, P)\Psi^{-1}(n, P)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_1(n, P) & \chi_2(n, P) \end{pmatrix}.$$

Функции  $\chi_1$  и  $\chi_2$  удовлетворяют разложению (35). Коэффициенты оператора  $L_4$  выражаются через  $b_i(n), e_i(n)$ . Если в лемме 1.1 дополнительно выполнено  $e_0(n) = 0$ , то  $L_4$  имеет вид (12). Таким образом, если  $\chi_1$  и  $\chi_2$  удовлетворяют условию (11), то  $b_1(n) = e_0(n) = 0$ , и следовательно,  $L_4$  представим в виде (12).

Операторы  $L_4 - z$  и  $L_{4g+2} - w$  также имеют общий правый делитель

$$T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1},$$

$$L_4 - z = l_1(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}), \quad L_{4g+2} - z = l_2(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}),$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — некоторые операторы порядков 2 и  $4g$ .

Предположим, что выполнено условие (11). Тогда

$$(T + V_n T^{-1})^2 + W_n - z = (T + A_n + B_n T^{-1})(T - \chi_2(n) - \chi_1(n)T^{-1}),$$

где

$$A_n = \chi_2(n+1), \quad B_n = -\frac{V_{n-1}V_n}{\chi_1(n-1)},$$

при этом  $\chi_1$  и  $\chi_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &V_{n-1}V_n + \chi_1(n-1)(V_n + V_{n+1} - z + \\ &W_n + \chi_1(n+1) + \chi_2(n)\chi_2(n+1)) = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

$$-V_{n-1}V_n\chi_2(n-1) + \chi_1(n-1)\chi_1(n)\chi_2(n+1) = 0. \quad (40)$$

Имеем равенства

$$\det\chi(n, P) = -\chi_1(n, P) = \det\Psi(n+1, P)(\det\Psi(n, P))^{-1}.$$

Степень дивизора нулей  $\gamma_n$  функции  $\det\Psi(n, P)$  равна  $2g$ . В силу то, что функция  $\chi_1$  инвариантна относительно инволюции  $\sigma$ , дивизор  $\gamma_n$  имеет вид

$$\gamma_n = \gamma_1(n) + \sigma\gamma_1(n) + \dots + \gamma_g(n) + \sigma\gamma_g(n).$$

Пусть  $\gamma_i(n)$  имеет координаты  $(\delta_i(n), w(\delta_i(n)))$ . Обозначим через  $Q_n$  полином степени  $g$  по  $z$

$$Q_n = (z - \delta_1(n)) \dots (z - \delta_g(n)).$$

Тогда

$$\chi_1(n, P) = b_0(n) \frac{Q_{n+1}}{Q_n},$$

где  $b_0(n)$  — некоторая функция. В окрестности  $q$  имеем разложение

$$\chi_1 = b_0(n) + b_2(n)k^2 + O(k^4),$$

По лемме 1.1  $V_n = -b_0(n)$ . Окончательно получаем

$$\chi_1(n, P) = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}.$$

Так как дивизор полюсов  $\chi_2(n, P)$  равен  $\gamma_n$ , а в окрестности  $q$  имеет место разложение (35), то

$$\chi_2(n, P) = \frac{w}{Q_n}.$$

При таких  $\chi_1$  и  $\chi_2$  уравнение (40) выполнено тождественно, а (39) сводится к уравнению (14) на  $Q_n, V_n, W_n$ . Теорема 1.2 доказана.

Несложно проверить, что если  $\chi_1$  и  $\chi_2$  имеют вид (13), а  $Q_n$  удовлетворяет уравнению (14), то выполняются уравнения Кричевера–Новикова (32)–(34).

Перейдем к доказательству теорем 1.3–1.5.

Нам достаточно доказать, что для потенциалов  $V_n, W_n$ , указанных в теоремах 1.3–1.5, найдутся полиномы  $Q_n(z)$  степени  $g$  по  $z$ , которые удовлетворяют уравнению (15).

### Доказательство теоремы 1.3.

Пусть

$$V_n = r_3 n^3 + r_2 n^2 + r_1 n + r_0, \quad W_n = g(g+1)r_3 n.$$

Уравнение (15) принимает вид

$$\begin{aligned} & Q_{n-1}(n^3 r_3 + n^2 r_2 + n r_1 + r_0) + Q_n(z - 2n^3 r_3 - n^2(2r_2 + 3r_3) - \\ & \quad n(2r_1 + 2r_2 + 3r_3 + g(g+1)r_3) - (2r_0 + r_1 + r_2 + r_3)) - \\ & Q_{n+2}(z - 2n^3 r_3 - n^2(2r_2 + 9r_3) - n(2r_1 + 6r_2 + 15r_3 + g(1+g)r_3) - \\ & \quad (2r_0 + 3r_1 + 5r_2 + 9r_3 + g(g+1)r_3)) - \end{aligned} \quad (41)$$

$$Q_{n+3}(n^3 r_3 + n^2(r_2 + 6r_3) + n(r_1 + 4r_2 + 12r_3) + r_0 + 2r_1 + 4r_2 + 8r_3) = 0.$$

Полином  $Q_n(z)$ , удовлетворяющий (41), будем искать в виде полинома степени  $g$  по  $n$

$$Q_n = \delta_g n^g + \dots + \delta_1 n + \delta_0, \quad \delta_i = \delta_i(z).$$

При подстановке полинома  $Q_n$  в (41) в левой части получаем полином степени  $(g + 3)$  по  $n$

$$\beta_{g+3}(z)n^{g+3} + \beta_{g+2}(z)n^{g+2} + \dots + \beta_0(z).$$

Удивительным свойством потенциалов  $V_n$ ,  $W_n$  является то, что на самом деле

$$\beta_g = \beta_{g+1} = \beta_{g+2} = \beta_{g+3} = 0$$

(это проверяется прямыми вычислениями). Из (41) находим  $\beta_s$

$$\begin{aligned} \beta_s = & r_3(2s+1)(g(g+1) - s(s+1))\delta_s + \sum_{m=1}^g ((-1)^m (C_{s+m}^m r_0 - C_{s+m}^{m+1} r_1 + \\ & C_{s+m}^{m+2} r_2 - C_{s+m}^{m+3} r_3) + 2^m (C_{s+m}^m (2r_0 + 3r_1 + 5r_2 + 9r_3 + g(g+1)r_3 - z) + \\ & 2C_{s+m}^{m+1} (2r_1 + 6r_2 + 15r_3 + g(g+1)r_3) + 4C_{s+m}^{m+2} (2r_2 + 9r_3) + 16C_{s+m}^{m+3} r_3) - \\ & 3^m (C_{s+m}^m (r_0 + 2r_1 + 4r_2 + 8r_3) + 3C_{s+m}^{m+1} (r_1 + 4r_2 + 12r_3) + \\ & 9C_{s+m}^{m+2} (r_2 + 6r_3) + 27C_{s+m}^{m+3} r_3)) \delta_{s+m}, \end{aligned}$$

где  $0 \leq s < g - 1$ ,  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$  при  $m \geq k$ ,  $C_m^k = 0$  при  $m < k$ ,

$\delta_g$  — некоторая константа и  $\delta_s = 0$ , если  $s > g$ . Из равенства  $\beta_s = 0$

выражаем  $\delta_s$  через  $\delta_{s+1}, \dots, \delta_g$ . В частности,

$$\delta_{g-1} = \frac{\delta_g(2g^2 r_2 + g(g+1)r_3 + 2z)}{2(2g-1)r_3}.$$

Далее выберем  $\delta_g$  таким образом, чтобы  $Q_n(z)$  принял вид

$$Q_n = z^g + \alpha_{g-1}(n)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(n).$$

Мы показали, что существует  $Q_n$ , удовлетворяющий (15). Теорема

1.3 доказана.

В [26] доказано, что оператор

$$\mathcal{L}_4^\sharp = (\partial_x^2 + r_3x^3 + r_2x^2 + r_1x + r_0)^2 + g(g+1)r_3x$$

коммутирует с оператором  $\mathcal{L}_{4g+2}^\sharp$  порядка  $4g+2$ . Оператор  $L_4$  из теоремы 1.3 является дискретным аналогом оператора  $\mathcal{L}_4^\sharp$ . При  $g=1$  операторы  $\mathcal{L}_4^\sharp, \mathcal{L}_6^\sharp$  найдены Дж. Диксмье [15], операторы  $\mathcal{L}_4^\sharp, \mathcal{L}_6^\sharp$  задают коммутативную подалгебру в алгебре Вейля.

#### Доказательство теоремы 1.4.

Пусть

$$V_n = r_1a^n + r_0, \quad W_n = (a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1)r_1a^{n-g}.$$

Тогда (15) принимает вид

$$\begin{aligned} & Q_{n-1}(r_0 + a^n r_1) + Q_n(z - 2r_0 - a^{n-g} r_1 - a^{n+g+1} r_1) + \\ & Q_{n+2}(2r_0 + a^{n+1-g} r_1 + a^{n+g+2} r_1 - z) - Q_{n+3}(r_0 + a^{n+2} r_1) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Будем искать решение уравнения (42) в следующем виде

$$Q_n = B_g a^{gn} + B_{g-1} a^{(g-1)n} + \dots + B_1 a^n + B_0, \quad B_i = B_i(z).$$

Положим для удобства  $y = a^n$ . Тогда  $Q_n = B_g y^g + \dots + B_0$ . При подстановке  $Q_n$  в (42) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^g (B_s (a^{-g-s}(a^g - a^s)(a^{g+s+1} - 1)(a^{2s+1} - 1)r_1 y^{s+1} - \\ & - a^{-s}(a^{2s} - 1)((a^s - 1)^2 r_0 + a^s z) y^s)) = \\ & = \sum_{s=1}^g (y^s (B_s a^{-s}(1 - a^{2s})((a^s - 1)^2 r_0 + a^s z) + \end{aligned}$$

$$+B_{s-1}a^{1-g-s}(a^g - a^{s-1})(a^{g+s} - 1)(a^{2s-1} - 1)r_1) = 0.$$

Отсюда получаем

$$B_{s-1} = B_s \frac{a^{-s}(a^{2s} - 1)((a^s - 1)^2 r_0 + a^s z)}{a^{1-g-s}(a^g - a^{s-1})(a^{g+s} - 1)(a^{2s-1} - 1)r_1}, \quad s = 1, \dots, g.$$

Таким образом, мы нашли полином  $Q_n$ , удовлетворяющий (15). Теорема 1.4 доказана.

Этот оператор является дискретным аналогом оператора

$$(\partial_x^2 + r_1 a^x + r_0)^2 + g(g+1)r_1 a^x$$

из [29], который коммутирует с оператором порядка  $4g + 2$ .

### Доказательство теоремы 1.5.

Пусть

$$V_n = r_1 \cos(n) + r_0, \quad W_n = -4r_1 \sin\left(\frac{g}{2}\right) \sin\left(\frac{g+1}{2}\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Уравнение (15) принимает вид

$$\begin{aligned} Q_{n-1}(r_0 + r_1 \cos(n)) + Q_n(z - 2r_0 - 2r_1 \cos(g + \frac{1}{2}) \cos(n + \frac{1}{2})) - \\ Q_{n+2}(z - 2r_0 - 2r_1 \cos(g + \frac{1}{2}) \cos(n + \frac{3}{2})) - \\ Q_{n+3}(r_0 + r_1 \cos(n + 2)) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Будем искать решение уравнения (43) в виде

$$Q_n = A_g \cos(gn) + A_{g-1} \cos((g-1)n) + \dots + A_1 \cos(n) + A_0, \quad A_i = A_i(z).$$

При подстановке  $Q_n$  в (43) после преобразований получаем

$$\sum_{s=0}^g A_s (2r_1 (\cos(s + \frac{1}{2}) - \cos(g + \frac{1}{2})) \sin(s + \frac{1}{2}) \sin((n+1)(s+1)) +$$



$$\begin{aligned}
& +2(z - 2r_0 + 2r_0 \cos(s)) \sin(s) \sin((n+1)s) + \\
& +2r_1(\cos(s - \frac{1}{2}) - \cos(g + \frac{1}{2})) \sin((n+1)(s-1)) \sin(s - \frac{1}{2}) = \\
& = \sum_{s=2}^g \sin((n+1)s) (2A_{s-1}r_1(\cos(s - \frac{1}{2}) - \cos(g + \frac{1}{2})) \sin(s - \frac{1}{2}) + \\
& +2A_s(z - 2r_0 + 2r_0 \cos(s)) \sin(s) + 2A_{s+1}r_1(\cos(s - \frac{3}{2}) - \\
& \cos(g + \frac{1}{2}) \sin(s - \frac{3}{2})) + \sin(n+1)2(2A_0r_1(\cos(\frac{1}{2}) - \\
& \cos(g + \frac{1}{2})) \sin(\frac{1}{2}) + A_1(z - 2r_0 + 2r_0 \cos(1)) \sin(1)) = 0,
\end{aligned}$$

где  $A_s = 0$  при  $s > g$ . При  $g = 1$  в предыдущей формуле суммирование по  $s$  нужно отбросить. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
A_0 &= A_1 \frac{(z - 2r_0 + 2r_0 \cos(1)) \sin(1)}{2r_1(\cos(g + \frac{1}{2}) - \cos(\frac{1}{2})) \sin(\frac{1}{2})}, \\
A_{s-1} &= A_s \frac{(z - 2r_0 + 2r_0 \cos(s)) \sin(s)}{r_1((\cos(g + \frac{1}{2}) - \cos(s - \frac{1}{2})) \sin(s - \frac{1}{2}))} + \\
& + A_{s+1} \frac{(\cos(s - \frac{3}{2}) - \cos(g + \frac{1}{2})) \sin(s - \frac{3}{2})}{(\cos(g + \frac{1}{2}) - \cos(s - \frac{1}{2})) \sin(s - \frac{1}{2})}, \quad 2 \leq s \leq g,
\end{aligned}$$

$A_g$  — подходящая константа. Мы нашли  $Q_n$ , удовлетворяющий уравнению (15). Теорема 1.5 доказана.

Этот оператор является аналогом оператора

$$(\partial_x^2 + r_1 \cos(x) + r_0)^2 + g(g+1)r_1 \cos(x)$$

из работы [28], который коммутирует с оператором порядка  $4g + 2$ .

Приведем несколько примеров операторов  $L_{4g+2}$  из теорем 1.3–1.5 при  $g = 1, 2$ .

**Пример 1.1.** Введем для удобства обозначение  $f(n) = r_3n^3 + r_2n^2 + r_1n + r_0$ . Оператор

$$L_4 = (T + f(n)T^{-1})^2 + 2r_3n$$

коммутирует с оператором

$$L_6 = T^3 + 3(f(n) + f'(n) + f''(n) + 4r_3)T + 3(f(n) + 3r_3n + r_2)T^{-1} + (f(n-2)f'(n) + 2f''(n) - 8r_3)(f(n) - f'(n) + 3r_3n - r_3 + r_2)f(n)T^{-3},$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = z^3 + (2r_2 + 3r_3)z^2 + (r_1r_3 + (r_2 + r_3)(r_2 + 3r_3))z + r_3((r_2 + r_3)(r_1 + r_2 + r_3) - r_0r_3).$$

**Пример 1.2.** При  $g = 2$  положим для простоты формул  $r_1 = r_2 = 0, r_3 = 1$ . Оператор

$$L_4 = (T + (n^3 + r_0)T^{-1})^2 + 6n,$$

коммутирует с оператором

$$L_{10} = T^5 + 5(n^3 + 6n^2 + 21n + r_0 + 26)T^3 + 5(2n^6 + 12n^5 + 60n^4 + 4n^3(r_0 + 40) + 3n^2(4r_0 + 93) + 3n(11r_0 + 90) + 2r_0^2 + 25r_0 + 108)T + 5(n^3 + r_0)(2n^6 + 30n^4 + 4n^3r_0 + 69n^2 + 21nr_0 + 2r_0^2 + 7)T^{-1} + 5((n-2)^3 + r_0)((n-1)^3 + r_0)(n^3 + r_0)(n^3 - 3n^2 + 12n - 10)T^{-3} + ((n-4)^3 + r_0)((n-3)^3 + r_0)((n-2)^3 + r_0)((n-1)^3 + r_0)(n^3 + r_0)T^{-5},$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = (z^2 + 6z + 12)((z + 3)^3 + 27r_0).$$

**Пример 1.3.** Оператор

$$L_4 = (T + (r_1 a^n + r_0)T^{-1})^2 + r_1(a^3 - a^2 - a + 1)a^{n-1}$$

коммутирует с

$$\begin{aligned} L_6 = & T^3 + (r_0(a + 1 + a^{-1}) + r_1 a^{n-1}(a^4 + a^2 + 1))T + \\ & + (a + 1 + a^{-1})(r_1 a^n + r_0)(r_1 a^{n+1} - r_1 a^n + r_1 a^{n-1} + r_0)T^{-1} + \\ & + (r_1 a^n + r_0)(r_1 a^{n-1} + r_0)(r_1 a^{n-2} + r_0)T^{-3}, \end{aligned}$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = z^3 + \frac{2r_0(a-1)^2}{a}z^2 + \frac{r_0^2(a-1)^4}{a^2}z.$$

**Пример 1.4.** Оператор

$$L_4 = (T + (r_1 \cos(n) + r_0)T^{-1})^2 - 4r_1 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sin(1) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

коммутирует с

$$\begin{aligned} L_6 = & T^3 + (2 \cos(1) + 1)(r_1(2 \cos(1) - 1) \cos(n + 1) + r_0)T + \\ & (2 \cos(1) + 1)(r_1 \cos(n) + r_0)(r_1(2 \cos(1) - 1) \cos(n) + r_0)T^{-1} + \\ & (r_1 \cos(n - 1) + r_0)(r_1 \cos(n - 2) + r_0)(r_1 \cos(n) + r_0)T^{-3}, \end{aligned}$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = z^3 - 8r_0 \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)z^2 - 8(r_1^2(\cos(1) + 1) - 2r_0^2) \sin^4\left(\frac{1}{2}\right)z.$$

### Доказательство теоремы 1.6.

Пользуясь

$$(\partial_t - V_{n-1}V_n T^{-2})\psi_n = 0,$$

и равенством (4), выразим  $\dot{\psi}_{n-1}, \dot{\psi}_n, \dot{\psi}_{n+1}, \psi_{n-2}, \psi_{n-3}$  через  $\psi_{n-1}, \psi_n, \chi_1(n), \chi_2(n)$

$$\dot{\psi}_{n-1} = V_{n-2}V_{n-1}\psi_{n-3}, \quad \dot{\psi}_n = V_{n-1}V_n\psi_{n-2}, \quad \dot{\psi}_{n+1} = V_nV_{n+1}\psi_{n-1},$$

$$\psi_{n-2} = -\psi_{n-1} \frac{\chi_2(n-1)}{\chi_1(n-1)} + \frac{\psi_n}{\chi_1(n-1)}.$$

$$\psi_{n-3} = \psi_{n-1} \frac{\chi_1(n-1) + \chi_2(n-2)\chi_1(n-1)}{\chi_1(n-2)\chi_1(n-1)} - \psi_n \frac{\chi_2(n-2)}{\chi_1(n-2)\chi_1(n-1)}.$$

Продифференцируем тождество (4) по  $t$ , получим

$$\dot{\psi}_{n+1} - \chi_1(n)\dot{\psi}_{n-1} - \dot{\chi}_1(n)\psi_{n-1} - \chi_2(n)\dot{\psi}_n - \dot{\chi}_2(n)\psi_n = A_n\psi_n + B_n\psi_{n-1} = 0,$$

где

$$A_n = V_{n-2}V_{n-1}\chi_1(n)\chi_2(n-2) - \chi_1(n-2)(V_{n-1}V_n\chi_2(n) + \chi_1(n-1)\dot{\chi}_2(n)),$$

$$B_n = V_{n-2}V_{n-1}\chi_1(n)(\chi_1(n-1) + \chi_2(n-2)\chi_2(n-1)) + V_n\chi_1(n-2) \times$$

$$(V_{n+1}\chi_1(n-1) + V_{n-1}\chi_2(n-1)\chi_2(n)) - \chi_1(n-2)\chi_1(n-1)\dot{\chi}_1(n).$$

Следовательно, имеем тождества

$$A_n = 0, \quad B_n = 0. \quad (44)$$

Прямыми вычислениями проверяется, что из (14) и (44) следует, что  $Q_n$  удовлетворяет уравнению (20). Теорема 1.6 доказана.

## Глава 2

# Алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1

### 2.1 Основные результаты

В данном параграфе приведем доказательства теорем 2.1.–2.4.

#### Доказательство теоремы 2.1.

Рассмотрим случай  $n > 0$  (случай  $n < 0$  рассматривается аналогично). По теореме Римана–Роха размерность пространства мероморфных функции на  $\Gamma$  с дивизором полюсов  $\gamma_1 + \dots + \gamma_g + nq$  равна

$$l(\gamma_1 + \dots + \gamma_g + nq) = n + 1.$$

Требование, что функция из этого пространства зануляется в точках  $P_1, \dots, P_n$  выделяет в нем одномерное подпространство. Условие (2) дает нам единственную функцию. Теорема 2.1 доказана.

Покажем, что для любой мероморфной функции  $f(P)$  на  $\Gamma$  с единственным полюсом порядка  $m$  в точке  $q$  существует единственный оператор вида

$$L_m = T^m + u_{m-1}(n)T^{m-1} + \dots + u_0(n)$$

такой, что

$$L_m\psi = f(P)\psi.$$

Рассмотрим случай  $n > 0$  (случай  $n < 0$  рассматривается аналогично). Заметим, что для любых  $u_j(n)$  дивизор полюсов функции

$$\varphi_n(P) = L_m\psi - f(P)\psi$$

имеет вид

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_g + (m + n - 1)q.$$

При этом функция  $\varphi_n(P)$  имеет нули в точках  $P_1, \dots, P_n$ . Следовательно, мы можем выбрать функции  $u_{m-1}(n), \dots, u_0(n)$  так, чтобы функция  $\varphi_n(P)$  имела нули в точках  $P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots, P_{m+n}$ . Тогда по теореме Римана–Роха  $\varphi_n(P) = 0$ . Аналогично для мероморфной функции  $g(P)$  существует оператор  $L_s$  такой, что  $L_s\psi = g(P)\psi$ . Операторы  $L_m$  и  $L_s$  коммутируют.

### Доказательство теоремы 2.2.

Пусть  $\Gamma$  — гиперэллиптическая спектральная кривая, заданная уравнением (1). Функция  $\psi_n(P)$  — соответствующая функция

Бейкера–Ахиезера.  $L_2, L_{2g+1}$  — операторы вида

$$L_2 = \sum_{j=0}^2 u_j(n)T^j, \quad L_{2g+1} = \sum_{j=0}^{2g+1} v_j(n)T^j, \quad u_2(n) = v_{2g+1}(n) = 1,$$

для которых выполнено (23). Функция  $\psi_n(P)$  также удовлетворяет уравнению

$$\chi_n(P) = \frac{\psi_{n+1}(P)}{\psi_n(P)},$$

где  $\chi_n(P)$  — рациональная функция на  $\Gamma$  с  $2g + 1$  простыми полюсами, зависящих от  $n$ . Отсюда следует, что функция  $\chi_n(P)$  имеет следующее разложение в окрестности точки  $q = \infty$

$$\chi_n = \frac{1}{k} + e_0(n) + e_1(n)k + \dots, \quad (45)$$

где  $k = \frac{1}{\sqrt{z}}$ . Коэффициенты оператора  $L_2$  выражаются через  $e_i(n)$ .

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.1.** *Оператор*

$$L_2 = T^2 + u_1(n)T + u_0(n)$$

*имеет следующие коэффициенты:*

$$u_1(n) = -e_0(n) - e_0(n+1), \quad u_0(n) = e_0^2(n) - e_1(n) - e_1(n+1),$$

*и представим в виде*

$$L_2 = (T + U_n)^2 + W_n,$$

*где*

$$U_n = -e_0(n), \quad W_n = -e_1(n) - e_1(n+1).$$

**Доказательство.** Пользуясь тождеством (24), выразим  $\psi_{n+2}(P)$  через  $\psi_n(P)$ , и  $\chi(n, P)$ , а именно

$$\psi_{n+2} = \psi_n \chi_2(n) \chi_2(n+1).$$

Теперь заменим  $\psi_{n+1}$ ,  $\psi_{n+2}$  в равенстве  $L_2 \psi_n = z \psi_n$ . Получим

$$P_1(n, P) \psi_n(P) = z \psi_n(P),$$

где

$$P_1(n) = \chi_2(n+1) \chi_2(n) + u_1(n) \chi_2(n) + u_0(n).$$

Следовательно, имеем тождество

$$P_1 = z = \frac{1}{k^2}. \quad (46)$$

Подставив (45) в (46) получим

$$P_1 - \frac{1}{k^2} = \frac{e_0(n) + e_0(n+1) + u_1(n)}{k} + (e_0(n)e_0(n+1) + e_1(n) + e_1(n+1) + u_0(n) + e_0(n)u_1(n)) + O(k) = 0.$$

Отсюда находим коэффициенты оператора  $L_2$ . Из полученных формул следует, что  $L_2$  имеет вид (27). Лемма 2.1 доказана.

Операторы  $L_2 - z$  и  $L_{2g+1} - w$  имеют общий правый делитель

$$T - \chi_n,$$

$$L_2 - z = l_1(T - \chi_n), \quad L_{2g+1} - w = l_2(T - \chi_n),$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — некоторые операторы порядков 1 и  $2g$ .



Предположим, что имеет место равенство

$$(T + U_n)^2 + W_n - z = (T + U_n + U_{n+1} + \chi_{n+1})(T - \chi_n),$$

при этом  $\chi_n$  удовлетворяет уравнению

$$-z + U_n^2 + W_n + \chi_n(U_n + U_{n+1} + \chi_{n+1}) = 0. \quad (47)$$

Обозначим через  $Q_n$  и  $S_n$  соответствующие полиномы степени  $g$  по  $z$

$$Q_n = (z - \delta_1(n)) \dots (z - \delta_g(n)),$$

$$S_n = -U_n(z - \lambda_1(n)) \dots (z - \lambda_g(n)).$$

Также предположим, что коэффициенты  $Q_n$  и  $S_n$  связаны соотношением

$$Q_n = -\frac{S_{n-1} + S_n}{U_{n-1} + U_n}.$$

Тогда  $\chi(n, P)$  можно переписать в виде

$$\chi(n, P) = \frac{w}{Q_n} + \frac{S_n}{Q_n}.$$

В этом случае уравнение (47) сводится к уравнению (25) на  $S_n, U_n, W_n$ . Теорема 2.2 доказана.

### Доказательство теоремы 2.3.

Пусть

$$U_n = r_1 \cos(n), \quad W_n = \frac{r_1^2 \sin(g) \sin(g+1)}{2 \cos^2(g + \frac{1}{2})} \cos(2n).$$

Уравнение (26) принимает вид

$$-\frac{1}{2}r_1(S_{n-1} + S_n)(\cos(n+1) + \cos(n+2))(-2z + r_1^2(2 \cos^2(n) +$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(g) \sin(g+1)}{\cos^2(g+\frac{1}{2})} \cos(2n))) + 8r_1^3(S_n - S_{n+1}) \cos^3(\frac{1}{2}) \cos(\frac{1}{2} - n) \times \\ & \cos(\frac{1}{2} + n) \cos(\frac{3}{2} + n) + (S_{n+1} + S_{n+2}) \left( \frac{1}{2} r_1 (\cos(1-n) + \cos(n)) (-2z + \right. \\ & \left. r_1^2 (2 \cos^2(n+1) + \cos(2(n+1))) \sec^2(g + \frac{1}{2}) \sin(g) \sin(g+1)) \right). \quad (48) \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения (48) в виде

$$S_n = A_{2g+1} \cos((2g+1)n) + A_{2g-1} \cos((2g-1)n) + \dots + A_1 \cos(n),$$

где  $A_i = A_i(z)$ . При подстановке  $S_n$  в (48) после преобразований получаем

$$\begin{aligned} B_s = & 8r_1^2 A_{s-3} \cos^2(\frac{1}{2}) (\cos(2g+1) - \cos(3-s)) \sin(\frac{3-s}{2}) + \\ & A_{s-1} \left( -r_1^2 \sin(\frac{1-3s}{2}) - 4r_1^2 \sin(\frac{5-3s}{2}) + 8z \sin(\frac{5-3s}{2}) + \right. \\ & 4r_1^2 \sin(\frac{1-s}{2}) + 8z \sin(\frac{3-s}{2}) + 4r_1^2 \sin(\frac{5-s}{2}) + 2r_1^2 \sin(\frac{7-s}{2}) + \\ & 2 \sin(1) \sin(2g) (-2(2z + r_1^2(-1 + \cos(1) + \cos(2))) \cos(\frac{s}{2}) \sin(\frac{3}{2}) + \\ & 2(r_1^2 - 2z)) \cos(\frac{3s}{2}) \sin(\frac{5}{2}) + 2 \cos(\frac{3}{2}) (2z + r_1^2(1 + 3 \cos(1) + \\ & \cos(2))) \sin(\frac{s}{2}) - 2(r_1^2 - 2z) \cos(\frac{5}{2}) \sin(\frac{3s}{2})) + \\ & 2 \cos(1) \cos(2g) (2(2z + r_1^2(-1 + \cos(1) + \cos(2))) \cos(\frac{s}{2}) \sin(\frac{3}{2}) - \\ & 2(r_1^2 - 2z) \cos(\frac{3s}{2}) \sin(\frac{5}{2}) - 2 \cos(\frac{3}{2}) (2z + r_1^2(1 + 3 \cos(1) + \\ & \cos(2))) \sin(\frac{s}{2}) + 2(r_1^2 - 2z) \cos(\frac{5}{2}) \sin(\frac{3s}{2})) - 3r_1^2 \sin(\frac{1+s}{2}) + \\ & \left. r_1^2 \sin(\frac{3(1+s)}{2}) - 2r_1^2 \sin(\frac{3+s}{2}) - r_1^2 \sin(\frac{5+s}{2}) + 2r_1^2 \sin(\frac{1+3s}{2}) \right) - \\ & A_{s+1} \left( 2r_1^2 \sin(\frac{1-3s}{2}) + r_1^2 \sin(\frac{3}{2} - \frac{3s}{2}) - 3r_1^2 \sin(\frac{1-s}{2}) - 2r_1^2 \sin(\frac{3-s}{2}) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r_1^2 \sin\left(\frac{5-s}{2}\right) + 2 \cos(1) \cos(2g) (2(2z + r_1^2(-1 + \cos(1) + \cos(2)))) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\right) - \\
& \quad 2(r_1^2 - 2z) \cos\left(\frac{3s}{2}\right) \sin\left(\frac{5}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{3}{2}\right) (2z + r_1^2(1 + 3 \cos(1) + \\
& \cos(2))) \sin\left(\frac{s}{2}\right) - 2(r_1^2 - 2z) \cos\left(\frac{5}{2}\right) \sin\left(\frac{3s}{2}\right) + 2 \sin(1) \sin(2g) (-2(2z + \\
& \quad r_1^2(-1 + \cos(1) + \cos(2)))) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\right) + 2(r_1^2 - \\
& \quad 2z) \cos\left(\frac{3s}{2}\right) \sin\left(\frac{5}{2}\right) - 2 \cos\left(\frac{3}{2}\right) (2z + r_1^2(1 + 3 \cos(1) + \cos(2))) \sin\left(\frac{s}{2}\right) + \\
& \quad 2(r_1^2 - 2z) \cos\left(\frac{5}{2}\right) \sin\left(\frac{3s}{2}\right) + 4r_1^2 \sin\left(\frac{1+s}{2}\right) + 8z \sin\left(\frac{3+s}{2}\right) + \\
& \quad 4r_1^2 \sin\left(\frac{5+s}{2}\right) + 2r_1^2 \sin\left(\frac{7+s}{2}\right) - r_1^2 \sin\left(\frac{1+3s}{2}\right) - 4r_1^2 \sin\left(\frac{5+3s}{2}\right) + \\
& \quad 8z \sin\left(\frac{5+3s}{2}\right) + 8r_1^2 A_{s+3} \cos^2\left(\frac{1}{2}\right) (-\cos(1+2g) + \cos(3+s)) \sin\left(\frac{3+s}{2}\right)
\end{aligned}$$

Из равенства  $B_s = 0$  находим  $A_i$ . Далее выберем  $A_g$  таким образом, чтобы  $S_n(z)$  принял вид

$$S_n = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n) z^{g-1} + \dots + \delta_0(n).$$

Мы нашли  $S_n$ , удовлетворяющий уравнению (26). Теорема 2.3 доказана.

#### Доказательство теоремы 2.4.

Пусть

$$U_n = a_2 n^2 + a_0, \quad W_n = -g(g+1) a_2^2 n^2.$$

Уравнение (26) принимает вид

$$\begin{aligned}
& (S_{n-1} + S_n) (2a_0 + a_2(5 + 6n + 2n^2)) (a_2^2 g(1+g)n^2 + z - \\
& (a_0 + a_2 n^2)^2) + (S_n - S_{n+1}) (2a_0 + a_2 - 2a_2 n + 2a_2 n^2) (2a_0 + a_2 +
\end{aligned}$$

$$2a_2n + 2a_2n^2)(2a_0 + a_2(5 + 6n + 2n^2)) - (S_{n+1} + S_{n+2})(2a_0 + a_2 - 2a_2n + 2a_2n^2)(a_2^2g(1 + g)(1 + n)^2 - (a_0 + a_2(1 + n)^2)^2 + z) = 0. \quad (49)$$

Полином  $S_n(z)$ , удовлетворяющий (49), будем искать в виде полинома четной степени  $2g + 2$  по  $n$

$$S_n = A_{2g+2}n^{2g+2} + A_{2g}n^{2g} + \dots + A_2n^2 + A_0, \quad A_i = A_i(z).$$

При подстановке полинома  $S_n$  в (49) в левой части получаем полином степени  $(2g + 8)$  по  $n$

$$\beta_{2g+8}(n, z)n^{2g+8} + \beta_{2g+7}(n, z)n^{2g+7} + \dots + \beta_0(n, z).$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\beta_{2g+5} = \beta_{2g+6} = \beta_{2g+7} = \beta_{2g+8} = 0.$$

Из (49) находим  $\beta_s$

$$\begin{aligned} \beta_s = & A_{s-3}(-2a_2^3(5 + 2g - s)(s - 4)(2g + s - 3)) + \\ & A_{s-2}(a_2^3(-4g(g + 1) + (s - 4)(s - 2))(s - 3)(s + 1)) + \\ & A_{s-1}\left(\frac{1}{6}a_2^2(-12a_0(6 + s(-29 + 4g(g + 1) - 3(s - 6)s)) + \right. \\ & a_2(-4g(s - 1)(27 + s(5s - 22)) - 4g^2(s - 1)(27 + s(5s - 22)) + \\ & \left. 3(s - 3)(8 + (s - 3)s(8 + (s - 3)s))) - 8a_2(s - 3)z) + \right. \\ & A_s\left(-\frac{1}{6}(a_2(s + 1)(6a_0a_2(4g(1 + s) - 8 + 4g^2(1 + s) - s(2 + 3(s - 3)s)) + \right. \\ & \left. a_2^2(-(s - 2)(-6 + (s - 3)(s - 1)^2s) + 2g(6 + s(9 + 4(s - 4)s)) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2g^2(6 + s(9 + 4(s - 4)s)) + 24(s - 2)z) + \\
& \sum_{m=1}^{2g+5} \left( (-1)^m (C_{s+m}^m (-(2a_0 + 5a_2)(a_0^2 - z)) + C_{s+m}^{m+1} (6a_2(a_0^2 - z)) + \right. \\
& \quad \left. + C_{s+m}^{m+2} (a_2(-6a_0^2 + 5a_2^2g(1 + g) + 2a_0a_2(-5 + g + g^2) + 2z)) + \right. \\
& C_{s+m}^{m+3} (-6a_2^2(-2a_0 + a - 2g(1 + g))) + C_{s+m}^{m+4} (a_2^2(-6a_0 + a_2(-5 + 2g(1 + g)))) + \\
& C_{s+m}^{m+5} (6a_2^3) - C_{s+m}^{m+6} (2a_2^3)) + (C_{s+m}^m ((-2a_0 - a_2)(a_2^2(4 + g + g^2) + 3a_0^2 + \\
& \quad 10a_0a_2 + z)) + C_{s+m}^{m+1} (-2a_2(9a_0^2 + 2a_2^2 + 2a_0a_2(4 + g + g^2) - z)) + \\
& \quad C_{s+m}^{m+2} (a_2(-18a_0^2 + a_2^2(-2 + g + g^2) - 2a_0a_2(19 + g + g^2) - 2z)) + \\
& C_{s+m}^{m+3} (-2a_2^2(18a_0 + a_2g(1 + g))) + C_{s+m}^{m+4} (-a_2^2(18a_0 + a_2(15 + 2g(1 + g)))) - \\
& \quad C_{s+m}^{m+5} (18a_2^3) - C_{s+m}^{m+6} (6a_2^3)) + 2^m (C_{s+m}^m ((2a_0 + a_2)(a_0^2 + \\
& 2a_0a_2 - a_2^2(-1 + g + g^2) - z)) - C_{s+m}^{m+1} (4a_2(3a_0^2 + a_2^2 - 2a_0a_2(-2 + g + g^2) + z)) - \\
& C_{s+m}^{m+2} (4a_2(6a_0^2 + a_2^2g(1 + g) - 2a_0a_2(-5 + g + g^2) - 2z)) + C_{s+m}^{m+3} (-16a_2^2(-6a_0 + \\
& \quad a_2g(1 + g))) + C_{s+m}^{m+4} (16a_2^2(6a_0 + a_2(5 - 2g(1 + g)))) + \\
& \quad \left. C_{s+m}^{m+5} (192a_2^3) + C_{s+m}^{m+6} (128a_2^3) \right) A_{s+m},
\end{aligned}$$

где  $0 \leq s < 2g + 4$ ,  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)}$  при  $m \geq k$ ,  $C_m^k = 0$  при  $m < k$ ,

$A_g$  — некоторая константа и  $A_s = 0$ , если  $s > 2g + 4$ . Из равенства

$\beta_s = 0$  найдем  $A_i$ .  $A_g$  — подходящая константа. Мы показали, что

существует  $S_n$ , удовлетворяющий (26). Теорема 2.4 доказана.

**Замечание 2.** Можно непосредственно проверить, что при  $g =$

$1, \dots, 5$  оператор

$$L_2 = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0)^2 - g(g + 1)\alpha_2 n(\alpha_2 n + \alpha_1), \quad \alpha_2 \neq 0$$

коммутирует с  $L_{2g+1}$ . По-видимому, это верно для любого  $g$ .

Приведем несколько примеров операторов  $L_{2g+1}$  из теорем 2.3–2.4 при  $g = 1, 2$ .

**Пример 2.1.** При  $g = 1$  оператор

$$L_2 = (T + a_2n^2 + a_0)^2 - 2a_2^2n^2$$

коммутирует с оператором  $L_3$

$$\begin{aligned} L_3 = & T^3 + (a_2(3n^2 + 6n + 5) + 3a_0)T^2 + \\ & \frac{1}{4}(a_2(2n^2 + 2n + 1) + 2a_0)(a_2(6n^2 + 6n - 1) + 6a_0)T + \\ & \frac{1}{4}(a_2(2n^2 - 2n - 1) + 2a_0)(a_2(n^2 - 1) + a_0)(a_2(2n^2 + 2n - 1) + 2a_0). \end{aligned}$$

Спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = \frac{1}{16}(z + a_2^2 - 2a_0a_2)(4z + a_2^2 - 4a_0a_2)^2.$$

**Пример 2.2.** При  $g = 2$  положим для простоты формул  $a_0 = -a_2$ .

Оператор

$$L_2 = (T + a_2(n^2 - 1))^2 - 6a_2^2n^2$$

коммутирует с оператором

$$\begin{aligned} L_5 = & T^5 + 5a_2(n^2 + 4n + 5)T^4 + \frac{5}{4}a_2^2(8n^4 + 48n^3 + 108n^2 + 108n + 39)T^3 + \\ & \frac{1}{4}a_2^3(40n^6 + 240n^5 + 240n^3 - 125n^2 + 460n^4 - 90n - 19)T^2 + \\ & \frac{1}{4}a_2^4(20n^8 + 80n^7 - 60n^6 - 460n^5 - 15n^4 + 830n^3 + 17n^2 - 488n + 139)T + \\ & \frac{1}{4}a_2^5(4n^{10} - 80n^8 + 577n^6 - 1804n^4 + 2276n^2 - 784), \end{aligned}$$

спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = -\frac{1}{16}(4z + 45a_2^2)^2(z + 15a_2^2)(z + 3a_2^2)^2.$$

**Пример 2.3.** При  $g = 1$  потенциалы  $U$ ,  $W$  примут вид

$$U_n = r_1 \cos(n), \quad W_n = \frac{r_1^2 \sin(1) \sin(2)}{2 \cos^2(\frac{3}{2})} \cos(2n).$$

Тогда полином

$$S_n = A_3(z) \cos(3n) + A_1(z) \cos(n),$$

$$A_3(z) = \frac{r_1^3 \sin^2(\frac{1}{2})}{(2 \cos(1) - 1)^3},$$

$$A_1(z) = \frac{r_1(2z(1 - 2 \cos(1))^2 + r_1^2(5 \cos(1) - 2 \cos(2) - 3))}{2(1 - 2 \cos(1))^2}.$$

При этом спектральная кривая

$$w^2 = \left(z - \frac{4r_1^2 \sin^4(\frac{1}{2})}{(1 - 2 \cos(1))^2}\right)^2 \left(z - \frac{r_1^2(1 - 2 \cos(1) + \cos(2))}{(1 - 2 \cos(1))^2}\right).$$

## 2.2 Вложение разностных операторов с полиномиальными коэффициентами в первую алгебру Вейля

Так как

$$[T, n] = T, \quad [x, (-x\partial_x)] = x,$$

то замена  $T \rightarrow x$ ,  $n \rightarrow (-x\partial_x)$  в операторах

$$L_2 = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2 n(\alpha_2 n + \alpha_1)$$

и  $L_{2g+1}$  дает пару коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, при этом оператору  $L_2$  соответствует оператор

$$(x + \alpha_2(x\partial_x)^2 - \alpha_1(x\partial_x) + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2(x\partial_x)(\alpha_2(x\partial_x) - \alpha_1).$$

Таким образом, мы получаем коммутативную подалгебру в первой алгебре Вейля  $A_1 = \mathbb{C}[x][\partial_x]$ . Алгебра  $A_1$  обладает следующими автоморфизмами  $\varphi_j : A_1 \rightarrow A_1$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

$$\varphi_1(x) = \alpha x + \beta \partial_x, \quad \varphi_1(\partial_x) = \gamma x + \delta \partial_x, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$$\varphi_2(x) = x + P_1(\partial_x), \quad \varphi_2(\partial_x) = \partial_x,$$

$$\varphi_3(x) = x, \quad \varphi_3(\partial_x) = \partial_x + P_2(x),$$

где  $P_1, P_2$  — произвольные полиномы. Диксмье [15] доказал, что группа автоморфизмов  $Aut(A_1)$  порождается автоморфизмами вида  $\varphi_j$ . Если к  $x, -x\partial_x \in A_1$  применить  $\varphi \in Aut(A_1)$ , то мы получим элементы  $A = \varphi(x)$ ,  $B = \varphi(-x\partial_x)$ , которые удовлетворяют уравнению  $[A, B] = A$ . Если заменить  $T \rightarrow A$ ,  $n \rightarrow B$  в  $L_2$  и  $L_{2g+1}$ , то мы получим коммутирующие элементы в  $A_1$ . Таким образом, возникает следующая важная задача. Описать решения уравнения

$$[A, B] = A, \quad A, B \in A_1$$

с точностью до действия автоморфизмов  $Aut(A_1)$ . Каждое такое решение позволяет строить по коммутирующим элементам в кольце разностных операторов с полиномиальными коэффициентами  $W_1 = \mathbb{C}[n][T]$ , коммутирующие элементы в  $A_1$ . Как нам сообщил П.С. Колесников группа автоморфизмов  $Aut(W_1)$  порождается элементами вида  $\varphi : W_1 \rightarrow W_1$ ,

$$\varphi(T) = T, \quad \varphi(n) = n + P(T),$$



где  $P$  — полином. Таким образом, с помощью  $Aut(W_1)$  и  $Aut(A_1)$  мы можем получать из коммутирующих разностных операторов коммутирующие дифференциальные операторы, причем с одной и той же спектральной кривой. Интересной задачей является задача описания всех коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами с фиксированной спектральной кривой, которые могут быть получены из коммутирующих разностных операторов с помощью указанной процедуры. Этот круг вопросов связан с гипотезой Диксмье. Эта гипотеза утверждает, что  $End(A_1) = Aut(A_1)$  или по-другому, если имеется решение уравнения струны

$$[A, B] = 1, \quad A, B \in A_1,$$

то операторы  $A$  и  $B$  могут быть получены из  $\partial_x$  и  $x$  с помощью некоторого автоморфизма  $Aut(A_1)$ , т.е.

$$A = \varphi(\partial_x), \quad B = \varphi(x), \quad \varphi \in Aut(A_1).$$

Общая гипотеза Диксмье стабильно эквивалентна гипотезе о Якобиане [47]. В недавней работе [48] было показано, что множество орбит действия группы  $Aut(A_1)$  на множестве коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами с фиксированной спектральной кривой вида (1) всегда бесконечно при  $g = 1$  и для любого  $g$  существует  $F_g(z)$  с бесконечным числом орбит. Если удастся описать какой-то класс коммутирующих дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициента-

ми (например, полученный из разностных операторов) с точностью до действия  $Aut(A_1)$  с фиксированной спектральной кривой, то это даст шанс сравнить  $Aut(A_1)$  и  $End(A_1)$ .

## Глава 3

# Связь одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга один с конечнозонными операторами Шредингера

В данной главе приведем доказательства теорем 3.1–3.2.

### Доказательство теоремы 3.1.

Функция  $\psi(x, P)$ , удовлетворяющая уравнениям

$$L_2\psi = z\psi, \quad L_{2g+1}\psi = w\psi,$$

также удовлетворяет уравнению

$$\chi(x, P) = \frac{\psi(x + \varepsilon, P)}{\psi(x, P)},$$

где  $\chi(x, P)$  — рациональная функция на  $\Gamma$  с  $2g + 1$  простыми полюсами, зависящих от  $x$ . Отсюда следует, что  $\chi(x, P)$  имеет следующее разложение в окрестности  $q$

$$\chi(x, P) = \frac{1}{k} + e_0(x, \varepsilon) + e_1(x, \varepsilon)k + \dots, \quad k = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Для того, чтобы найти  $L_2$ ,  $L_{2g+1}$  достаточно найти  $\chi(x, P)$ .

Операторы  $L_2 - z$  и  $L_{2g+1} - w$  имеют общий правый делитель

$$\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x, P),$$

$$L_2 - z = l_1\left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x, P)\right), \quad L_{2g+1} - w = l_2\left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x, P)\right),$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — некоторые операторы порядков 1 и  $2g$ .

Предположим, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A(x, \varepsilon)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + B(x, \varepsilon)\right) - z = \\ & \left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + A(x, \varepsilon) + \chi(x + \varepsilon, P)\right)\left(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x, P)\right), \end{aligned}$$

при этом  $\chi(x, P)$  удовлетворяет уравнению

$$-z + B(x, \varepsilon) + \chi(x, P)(A(x, \varepsilon) + \chi(x + \varepsilon, P)) = 0. \quad (50)$$

Обозначим через  $Q(x, \varepsilon, z)$  и  $S(x, \varepsilon, z)$  соответствующие полиномы степени  $g$  по  $z$

$$Q(x, \varepsilon, z) = (z - \beta_1(x, \varepsilon)) \dots (z - \beta_g(x, \varepsilon)),$$

$$S(x, \varepsilon, z) = -\delta_g(x, \varepsilon)(z - \lambda_1(x, \varepsilon)) \dots (z - \lambda_g(x, \varepsilon)).$$

Предположим, что коэффициенты  $Q$  и  $S$  связаны соотношением

$$Q(x, \varepsilon, z) = -\frac{S(x - \varepsilon, \varepsilon, z) + S(x, \varepsilon, z)}{A(x - \varepsilon, \varepsilon)}.$$

Тогда  $\chi(x, P)$  можно переписать в виде

$$\chi(x, \varepsilon, z) = \frac{w}{Q(x, \varepsilon, z)} + \frac{S(x, \varepsilon, z)}{Q(x, \varepsilon, z)}.$$

В этом случае уравнение (50) сводится к уравнению (29) на  $S(x, \varepsilon, z)$ .

Теорема 3.1 доказана.

При  $g = 1$  получаем следующие операторы

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + B(x, \varepsilon), \\ L_3 &= \frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3} + (A(x, \varepsilon) + \delta_1(x + 2\varepsilon, \varepsilon)) \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \\ &(\delta_1(x, \varepsilon)\delta_1(x + \varepsilon, \varepsilon) + B(x, \varepsilon) + B(x + \varepsilon, \varepsilon) + c_2 + \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \\ &(-\sqrt{F_1(\gamma(x, \varepsilon))} + \delta_1(x, \varepsilon)(B(x, \varepsilon) - \gamma(x, \varepsilon))), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A(x, \varepsilon) &= \delta_1(x, \varepsilon) + \delta_1(x + \varepsilon, \varepsilon), \\ B(x, \varepsilon) &= \delta_1^2(x, \varepsilon) - c_2 - \gamma(x, \varepsilon) - \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon), \\ \delta_1(x, \varepsilon) &= -\frac{\sqrt{F_1(\gamma(x, \varepsilon))} + \sqrt{F_1(\gamma(x + \varepsilon, \varepsilon))}}{\gamma(x, \varepsilon) - \gamma(x + \varepsilon, \varepsilon)}, \end{aligned}$$

$\gamma(x, \varepsilon)$  — произвольный функциональный параметр. Спектральная кривая пары  $L_2, L_3$  задается уравнением  $w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$ . При этом

$$\begin{aligned} Q(x, \varepsilon, z) &= z - \gamma(x, \varepsilon), \\ S(x, \varepsilon, z) &= -\delta_1(x, \varepsilon)z + \sqrt{F_1(\gamma(x, \varepsilon))} + \gamma(x, \varepsilon)\delta_1(x, \varepsilon). \end{aligned}$$

### Доказательство теоремы 3.2.

Пусть  $F_1(z) = z^3 + \frac{g_2}{4}z + \frac{g_3}{4}$  и пусть  $\gamma(x, \varepsilon) = \wp(x - \varepsilon)$ . Напомним, что  $\wp(x)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению  $(\wp'(x))^2 = 4F_1(\wp(x))$ . Тогда

$$A(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(x - \varepsilon, \varepsilon) + \wp'(x, \varepsilon)}{\wp(x - \varepsilon, \varepsilon) - \wp(x, \varepsilon)} + \frac{1}{2} \frac{\wp'(x, \varepsilon) + \wp'(x + \varepsilon, \varepsilon)}{\wp(x, \varepsilon) - \wp(x + \varepsilon, \varepsilon)},$$

$$B(x, \varepsilon) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(x - \varepsilon, \varepsilon) + \wp'(x, \varepsilon)}{\wp(x - \varepsilon, \varepsilon) - \wp(x, \varepsilon)} \right)^2 - c_2 - \wp(x - \varepsilon, \varepsilon) - \wp(x, \varepsilon).$$

Далее воспользуемся формулами

$$\frac{1}{2} \frac{\wp'(z) + \wp'(y)}{\wp(z) - \wp(y)} = \zeta(z - y) - \zeta(z) + \zeta(y),$$

$$(\zeta(v) + \zeta(y) + \zeta(z))^2 + \zeta'(v) + \zeta'(y) + \zeta'(z) = 0,$$

которые верны, если  $v + y + z = 0$ . Здесь  $\zeta(z)$  — функция Вейерштрасса, а именно,  $\zeta'(z) = -\wp(z)$ , тогда

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + (-2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + \varepsilon)) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon),$$

$$L_3 = \frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3} + (-3\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + 2\varepsilon)) \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} +$$

$$((\zeta(\varepsilon) + \zeta(x - \varepsilon) - \zeta(x))(\zeta(\varepsilon) + \zeta(x) - \zeta(x + \varepsilon)) + 2\wp(\varepsilon) + \wp(x)) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\wp'(\varepsilon),$$

$$Q(x, \varepsilon, z) = z - \wp(x - \varepsilon),$$

$$S(x, \varepsilon, z) = (\zeta(\varepsilon) + \zeta(x - \varepsilon) - \zeta(x))z - \frac{1}{2}\wp'(x) - \wp(x - \varepsilon)(\zeta(\varepsilon) + \zeta(x - \varepsilon) - \zeta(x)).$$

Имеет место разложение

$$A = -\frac{2}{\varepsilon} - 2\wp(x)\varepsilon - \frac{1}{3}\wp''(x)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5).$$

$$\tilde{S} = \frac{z - \wp(x)}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\wp'(x) + (z - \wp(x))\wp(x)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Тогда

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon), \quad L_3 = \partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x) + O(\varepsilon).$$

Теорема 3.2 доказана.

**Замечание 3.1.** В работе [3\*] построена дискретизация оператора Ламе для произвольного рода  $g$ . А именно, определим  $A_g(x, \varepsilon)$  следующим образом. Положим

$$A_1 = -2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x - \varepsilon) + \zeta(x + \varepsilon),$$

$$A_2 = -\frac{3}{2}(\zeta(\varepsilon) + \zeta(3\varepsilon) + \zeta(x - 2\varepsilon) - \zeta(x + 2\varepsilon)),$$

где  $\zeta(x)$  — функция Вейерштрасса. Далее, при нечетном  $g = 2g_1 + 1$  положим

$$A_g = A_1 \prod_{k=1}^{g_1} \left( 1 + \frac{\zeta(x - (2k + 1)\varepsilon) - \zeta(x + (2k + 1)\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) + \zeta((4k + 1)\varepsilon)} \right),$$

при четном  $g = 2g_1$

$$A_g = A_2 \prod_{k=2}^{g_1} \left( 1 + \frac{\zeta(x - 2k\varepsilon) - \zeta(x + 2k\varepsilon)}{\zeta(\varepsilon) + \zeta((4k - 1)\varepsilon)} \right).$$

Тогда оператор

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A_g(x, \varepsilon) \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon) \quad (51)$$

коммутирует с оператором  $L_{2g+1}$ . Имеет место разложение

$$L_2 = \partial_x^2 - g(g + 1)\wp(x) + O(\varepsilon).$$

Мы проверили, что при  $g = 1, 2$  (для  $g = 1$  см. теорема 3.2), а также численно проверили, что при  $g = 3, \dots, 5$  спектральная кривая не зависит от параметра  $\varepsilon$  и совпадает со спектральной кривой оператора Ламе. По-видимому спектральная кривая не зависит от  $\varepsilon$  для любого  $g$ . Таким образом, оператор (51) дает замечательную дискретизацию оператора Ламе с сохранением всех интегрируемых свойств.

## Заключение

В диссертационной работе изучаются алгебро–геометрические од-  
ноточечные коммутирующие разностные операторы рангов 1 и 2, от-  
вечающие гиперэллиптической спектральной кривой произвольного  
рода.

В работе получены следующие основные результаты.

1) В случае ранга 2 получены уравнения, эквивалентные урав-  
нениям Кричевера–Новикова на дискретную динамику параметров  
Тюринга. С помощью этих уравнений построены примеры операторов,  
отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым про-  
извольного рода.

2) Открыт новый класс операторов, а именно алгебро–  
геометрические одноточечные коммутирующие разностные операто-  
ры ранга один, где оператор сдвига входит в эти операторы только  
с положительными степенями. Найдены спектральные данные и по-  
строены примеры таких операторов в случае гиперэллиптических



спектральных кривых.

3) Установлена связь алгебро–геометрических одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга один с одномерными конечнозонными операторами Шредингера, в частности, получена дискретизация конечнозонных операторов Ламе в случае спектральной кривой рода 1.

Результаты этой работы могут быть использованы при дальнейшем исследовании одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 1 и ранга 2, а также при построении решений рангов 1 и 2 солитонных уравнений.

## Список литературы

- [1] Wallenberg, G. *Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differenzenausdrücke.* / G. Wallenberg // Arch. Math. Phys. bd. — 1909. — V. 15. P. 151–157.
- [2] Burchnall, J.L., Chaundy, I.W. *Commutative ordinary differential operators.* / J.L. Burchnall, I.W. Chaundy // Proc.Lond.Math.Soc.Ser. — 1923. — V. 21, № 2. P. 420–440.
- [3] Кричевер, И. М. *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.* / И. М. Кричевер // Успехи математических наук. — 1978. — Т. 33, № 4. С. 215–216.
- [4] Кричевер, И. М., Новиков, С. П. *Двумеризованная цепочка тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения.* / И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Успехи математических наук. — 2003. — Т. 58, № 3. — С. 51–88.
- [5] Кричевер, И. М., Новиков, С. П. *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.* / И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 35, № 6(216). — С. 47–68.
- [6] Кричевер, И. М. *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* / И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 3. С. 20–31.

- [7] Кричевер, И. М. *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.* / И. М. Кричевер // Функциональный анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 1. — С. 15–31.
- [8] Гриневич, П. Г., Новиков, С. П. *О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами.* / П. Г. Гриневич, С. П. Новиков // Функциональный анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, № 1. С. 25–26.
- [9] Гриневич, П. Г. *Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов.* / П. Г. Гриневич // Функциональный анализ и его прил. — 1982. — Т. 16, № 1. С. 19–24.
- [10] Grunbaum, F. *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six.* / F. Grunbaum // Phys. D. — 1988. — V. 31, № 3. P. 424–433.
- [11] Latham, G. *Rank 2 commuting ordinary differential operators and Darboux conjugates of KdV.* / G. Latham // Appl. Math. Lett. — 1995. — V. 8, № 6. P. 73–78.
- [12] Latham, G., Previato, E. *Darboux transformations for higher-rank Kadomtsev–Petviashvili and Krichever–Novikov equations.* / G. Latham, E. Previato // Acta Appl. Math. — 1995. — V. 39. P. 405–433.

- [13] Previato, E., Wilson, G. *Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves.* / E. Previato, G. Wilson // *Compositio Math.* — 1992. — V. 81, № 1. P. 107–119.
- [14] Dehornoy, P. *Opérateurs différentiels et courbes elliptiques.* / P. Dehornoy // *Compositio Math.* — 1981. — V. 43, № 1. P. 71–99.
- [15] Dixmier, J. *Sur les algèbres de Weyl.* / J. Dixmier // *Bull. Soc. Math. France.* — 1968. — V. 96. P. 209–242.
- [16] Дринфельд, В.Г. *О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец.* / В.Г. Дринфельд // *Функц. анализ и его прил.* — 1977. — Т. 11, № 1. С. 11–14.
- [17] Мохов, О.И. *Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой.* / О.И. Мохов // *Успехи математических наук.* — 1982. Т. 37, № 4(226). С. 169–170.
- [18] Мохов, О.И. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения.* / О.И. Мохов // *Известия АН СССР, серия математическая.* — 1989. Т. 53, № 6. С. 1291–1315.
- [19] С.П. Новиков, *Коммутирующие операторы ранга  $l > 1$  с периодическими коэффициентами.* / С.П. Новиков // *ДАН СССР.* — 1982. — Т. 263, № 6. С. 1311–1314.

- [20] Миронов, А. Е. *Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два.* / А. Е. Миронов // Матем. сб. — 2004. — Т. 195, № 5. С. 103–114.
- [21] Миронов, А. Е. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2.* / А. Е. Миронов // Сиб. электрон. матем. изв. — 2009. — Т. 6. С. 533–536.
- [22] Миронов, А. Е. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2.* / А. Е. Миронов // Функц. анализ и его прил. — 2005. — Т. 39, № 3. С. 91–94.
- [23] Zuo, D. *Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2.* / D. Zuo //, SIGMA. — 2012. — V. 8, № 044. P. 1–11.
- [24] Mokhov, O. I. *Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients.* / O. I. Mokhov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — 2014. — № 234. — P. 323–336.
- [25] Мохов, О. И. *О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода.* / О. И. Мохов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 2. С. 314–316.

- [26] Mironov, A. E. *Self-adjoint commuting differential operators.*  
/ A. E. Mironov // *Inventiones mathematicae.* — 2014. —  
V. 197, № 2. P. 417–431.
- [27] Mironov, A. E. *Commuting higher rank ordinary differential operators.* / A. E. Mironov // *Proceedings of 6th European Congress of Mathematics.* — July 2012. — Kraków, Poland — Europ. Math. Soc. Publ. House, 2013. — P. 459–473.
- [28] Mironov, A. E. *Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators.* / A. E. Mironov // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.* — 2014. — № 234. — P. 309–321.
- [29] Давлетшина, В. Н. *О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* / В. Н. Давлетшина // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2013. — Т. 10. С. 109–112.
- [30] Давлетшина, В. Н., Шамаев, Э. И. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга два.* / В. Н. Давлетшина, Э. И. Шамаев // *Сиб. матем. журнал.* — 2014. — Т. Т. 55, № 4. С. 744–749.
- [31] Оганесян, В. С. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода  $g$  с полиномиальными коэффициентами.* / В. С. Оганесян // *Успехи математических наук* — 2015. — 70, № 1(421). С. 179–180.

- [32] Миронов, А. Е. *Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два.* / А. Е. Миронов // Успехи математических наук. — 2016. — Т. 71, № 4(430). С. 155–184.
- [33] Оганесян, В. С. *Об операторах вида  $\partial_x^4 + u(x)$  из коммутирующей пары дифференциальных операторов ранга 2 рода  $g$ .* / В. С. Оганесян // Успехи математических наук — 2016. — 71, № 3(429). С. 201–202.
- [34] Оганесян, В. С. *Общие собственные функции коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2.* / В. С. Оганесян // Матем. заметки — 2016. — 99, № 2. С. 283–287.
- [35] Оганесян, В. С. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 с полиномиальными коэффициентами.* / В. С. Оганесян // Функц. анализ и его прил. — 2016. — 50, № 1. С. 67–75.
- [36] Давлетшина, В. Н. *Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два и их деформации заданные солитонными уравнениями.* / В. Н. Давлетшина // Матем. заметки — 2015. — 97, № 3. С. 350–358.
- [37] Mumford, D. *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg de Vries equation and related non-linear equations.* / D. Mumford // Proceedings of the International Symposium on Algebraic

Geometry. — Kyoto Univ., Kyoto. 1977. — Kinokuniya, Tokyo — 1978. — P. 115–153.

[38] Миронов, А. Е. *Дискретные аналоги операторов Диксмье.* / А. Е. Миронов // Матем. сб. — 2007. — Т. 198, № 10. 57–66.

[39] Кричевер, И. М. *Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия* / И. М. Кричевер // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, №1. С. 31–36.

[40] Кричевер, И. М. *Коммутирующие разностные операторы и комбинаторное преобразование Гэйла* / И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 2015. — Т. 49, № 3. С. 22–40.

[41] Новиков, С. П. *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза.* / С. П. Новиков // Функц. анализ и его прил. — 1974. — Т. 8, № 3. С. 54–66.

[42] Дубровин, Б. А. *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.* / Б. А. Дубровин // Функц. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, № 3. С. 41–51.

[43] Итс, А. Р., Матвеев, В. Б. *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и  $N$ -солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза.* / А. Р. Итс, В. Б. Матвеев // ТМФ. — 1975. — Т. 23, № 1. С. 51–68.



- [44] Дубровин, Б. А., Матвеев, В. Б., Новиков, С. П. *Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.* / Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков // *Успехи математических наук.* — 1976. — Т. 31, № 1(187). С. 55–136.
- [45] Кричевер, И. М., Забродин, А. Б. *Спиновое обобщение модели Рейсенарса–Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Toda и представления алгебры Склянина* / И. М. Кричевер, А. Б. Забродин // *УМН.* — 1995. — Т. 50, № 6(306). С. 3–56.
- [46] Миронов, А. Е., Накаяшики, А. *Дискретизация модулей Бейкера–Ахиезера и коммутирующие разностные операторы нескольких дискретных переменных.* / А. Е. Миронов, А. Накаяшики // *Тр. ММО.* — 2013. — Т. 74, № 2. С. 317–338.
- [47] Kanel–Belov, A. Ya., Kontsevich, M. L. *The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture* / A. Ya. Kanel–Belov, M. L. Kontsevich // *Mosc. Math. J.* — 2007. — V. 7, № 2. P. 209–218.
- [48] Mironov, A. E., Zheglov, A. B. *Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra.* / A. E. Mironov, A. B. Zheglov, // *International Math. Research Notices.* — 2016. — V. 2016, № 10. P. 2974–2993.

## Список публикаций автора по теме диссертации

- [1\*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *О коммутирующих разностных операторах ранга 2.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Успехи математических наук. — 2015. — Т. 70, № 3(423). — С. 181–182.
- [2\*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. С. 399–401.
- [3\*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один и их связь с конечнозонными операторами Шредингера.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Доклады академии наук. — 2018. — Т. 478, № 4. С. 392–394.
- [4\*] Маулешова, Г. С. *Коммутирующие разностные операторы, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым* / Г. С. Маулешова // Сборник трудов международной научно-практической конференции, посвященной научно-педагогической деятельности академика А. Д. Тайманова «Современная математика: проблемы и приложения »:/ Кызылор-

динский гос. ун-т. имени Коркыт Ата, Алматы: "Гылым ордасы". — 2013. — С. 218–222.

[5\*] Mauleshova, G.S., Mironov, A.E. *Discrete Dynamics of the Tyurin Parameters and Commuting Difference Operators* [Электронный ресурс] / Gulnara S. Mauleshova, Andrey E. Mironov // International Youth Conference «Geometry and Control», Moscow, April 14–18, 2014: Abstracts. — Moscow: Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences. — 2014. — P. 34–35. — Режим доступа: [http://gc2014.mi.ras.ru/Abstr\\_bookGC2014.pdf](http://gc2014.mi.ras.ru/Abstr_bookGC2014.pdf).

[6\*] Mauleshova, G.S., Mironov, A.E. *On Commuting Difference Operators of Rank One* [Электронный ресурс] / Gulnara Mauleshova, Andrey Mironov // Международная конференция «Динамика в Сибири», Новосибирск. — 2016. — 1 с. — Режим доступа: <http://www.math.nsc.ru/conference/ds/2016/pdfs/mauleshova.pdf>

[7\*] Маулешова, Г.С., Миронов, А.Е. *Дискретизация конечнозонных операторов Ламе* / Г.С. Маулешова, А.Е. Миронов // Сборник материалов международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию доктора физико-математических наук, академика А.Д. Тайманова «Тайма-

новские чтения — 2017»: Математика / Западно-Казахстанский  
гос. ун-т. имени М. Утемисова, Уральск. — 2017. — С. 44.