Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Лыткин Юрий Всеволодович

ГРУППЫ, КРИТИЧЕСКИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СПЕКТРОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Васильев Андрей Викторович

Новосибирск – 2018

Оглавление

Введение

Постановка задачи и цели исследования

В диссертации изучается строение конечных групп с заданным множеством порядков элементов, которое мы, следуя С. И. Адяну [1], назовём *спектром* группы. Спектр группы G будем обозначать через $\omega(G)$. Множество $\omega(G)$ замкнуто по отношению делимости, поэтому оно однозначно определяется своим подмножеством $\mu(G)$, которое состоит из максимальных по делимости элементов множества $\omega(G)$.

Спектр конечной группы несёт в себе важную информацию о её строении и свойствах. Например, хорошо известно, что если в группе любой нетривиальный элемент имеет порядок 2, то эта группа абелева. Известно и что, наоборот, если в группе нет элементов порядка 2, то эта группа разрешима. (Данный результат принадлежит У. Фейту и Дж. Томпсону [39] и, стоит отметить, является значительно более сложным.) Возникает вопрос: можно ли распознать конечную группу, зная лишь её спектр? Конечно, во многих случаях это не так (например, упомянутый выше случай элементарных абелевых 2-групп). Однако оказывается, что некоторые группы действительно однозначно определяются по своему спектру. Такие группы называются *распознаваемыми* (более точно, *распознаваемыми по спектру* в классе конечных групп).

Опишем возникающую ситуацию более подробно. Обозначим через $h(G)$ число попарно не изоморфных групп, *изопектральных* группе G (т. е. имеющих такой же спектр, что и G). Тогда группа G распознаваема при $h(G) = 1$. Назовём также *почти распознаваемыми* группы G, для которых $h(G) < \infty$ (т. е. существует лишь конечное число попарно не изоморфных групп, изоспектральных G). Наконец, если $h(G) = \infty$, будем говорить, что группа G *нераспознаваема*. Естественно возникает проблема распознаваемости групп по спектру, которую мы, следуя [8], сформулируем следующим образом: для конечной группы L определить число $h(L)$ и, если это число конечно, описать все попарно не изоморфные группы, изоспектральные L.

Особенный интерес эта проблема представляет для неабелевых простых групп. Согласно классификации конечных простых групп, каждая конечная неабелева простая группа является либо одной из 26 спорадических групп, либо знакопеременной группой, либо группой лиева типа. Группы лиева типа в свою очередь делятся на классические и исключительные. К первым относятся линейные группы $PSL_n(q)$, унитарные группы $PSU_n(q)$, симплектические группы $PSp_{2n}(q)$ и ортогональные группы $P\Omega_{2n+1}(q)$ и $P\Omega^{\pm}_{2n}(q)$.

В результате почти тридцатилетних исследований было установлено, что все неабелевы простые знакопеременные группы степени $n \neq 6, 10$ и все простые спорадические группы, кроме J_2, являются распознаваемыми [13, 52]. Оставшиеся же группы A_6, A_{10} и J_2 являются нераспознаваемыми [23,34,53]. В [12] доказано, что все исключительные группы лиева типа, кроме группы ${}^3D_4(2)$, являются почти распознаваемыми. Группа ${}^3D_4(2)$ действительно является здесь исключением, поскольку она нераспознаваема (см. [27]).

Таким образом, для всех неабелевых простых групп, кроме классических групп лиева типа, проблема распознаваемости решена. С классическими группами лиева типа, в свою очередь, ситуация оказывается гораздо более разнообразной: хотя классические группы лиева типа достаточно большой размерности почти распознаваемы (см. ниже), существуют также и примеры нераспознаваемых классических групп, среди которых линейная группа $PSL_3(3)$ [24], унитарная группа $PSU_3(3)$ [23], а также бесконечная серия симплектических групп $PSp_4(q)$, где q не является степенью числа 3 с нечётным показателем [23, 24, 29].

Гипотеза о том, что все простые группы лиева типа достаточно большого ранга являются почти распознаваемыми, была высказана В. Д. Мазуровым в 2007 году. Усилиями нескольких групп математиков эта гипотеза была доказана в 2015 году (см. [10, 45]).

Теорема A. *Пусть L — одна из следующих неабелевых простых групп:*

1) *исключительная группа лиева типа, кроме* ${}^3D_4(2)$;

2) $PSL_n(q)$*, где* $n \geq 45$*, либо* q *чётно*;

3) $PSU_n(q)$*, где* $n \geq 45$*, либо* q *чётно и* $(n, q) \neq (4, 2), (5, 2)$;

4) $PSp_{2n}(q)$, $P\Omega_{2n+1}(q)$*, где* $n \geq 19$*, либо* q *чётно,* $n \neq 2, 4$ *и* $(n, q) \neq (3, 2)$;

5) $P\Omega^+_{2n}(q)$*, где* $n \geq 31$*, либо* q *чётно и* $(n, q) \neq (4, 2)$;

6) $P\Omega^-_{2n}(q)$*, где* $n \geq 30$*, либо* q *чётно.*

Тогда любая группа, изоспектральная L, изоморфна группе G, для которой

$L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$. В частности, существует лишь конечное количество попарно неизоморфных конечных групп, изоспектральных L.

Оценки на размерности из теоремы A были позже улучшены в [54].

Отметим, что проблема распознаваемости простых групп по спектру (в указанной выше постановке) не включает в себя исследование групп, изоспектральных нераспознаваемым группам, поэтому наряду с данной проблемой актуальной является также проблема описания групп, изоспектральных нераспознаваемым простым группам, исследованию которой и посвящена диссертация.

Проблема 1. *Для каждой нераспознаваемой неабелевой простой группы описать строение конечных групп, ей изоспектральных.*

В работе [30] Мазуров и В. Дж. Ши доказали, что группа нераспознаваема тогда и только тогда, когда она изоспектральна группе, содержащей нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу. Кроме того, в этой же работе было сформулировано понятие критической группы, которое оказывается крайне полезным при исследовании нераспознаваемых групп.

Пусть ω — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Конечная группа G называется *критической относительно* ω (или ω*-критической*), если ω совпадает со спектром группы G и не совпадает со спектром любой её собственной секции, т. е. секции, отличной от G. (Под *секциями* группы G мы понимаем гомоморфные образы её подгрупп.)

Критические группы являются своего рода минимальными группами с данным спектром. Важнейшее для нашего исследования свойство критических групп заключается в том, что для любой группы G (в частности, нераспознаваемой) существует лишь конечное количество критических групп со спектром, как у группы G (см. [30]). Таким образом, понятие критической группы позволяет выделить из проблемы 1 следующую подпроблему.

Проблема 2. *Для каждой нераспознаваемой неабелевой простой группы описать все критические группы, ей изоспектральные.*

Стоит отметить, что, как следует из теоремы 1 настоящей работы, не существует независимой константы, ограничивающей сверху количество критических групп, имеющих один и тот же спектр. Однако существует гипотеза о том, что если рассматривать лишь спектры неабелевых простых групп, такая константа есть.

Степень проработанности темы

Как уже отмечалось ранее, среди неабелевых простых знакопеременных, спорадических групп и ислючительных групп лиева типа нераспознаваемыми являются лишь группы A_6, A_{10}, J_2 и ${}^3D_4(2)$. Ситуация же с классическими группами лиева типа является несколько более сложной. Из теоремы A следует, что все классические группы достаточно большой размерности являются почти распознаваемыми. Однако к настоящему времени не обо всех классических группах установлено, являются ли они распознаваемыми, почти распознаваемыми или нераспознаваемыми.

Таблица 1. Известные нераспознаваемые простые группы

G	Условия на G	H	Библиография
A_6		$2^4 : A_5$	[34]
A_{10}		$(7^4 \times 3^{12}) : (2.S_5)$	[23]
J_2		$2^6 : A_8$	[53]
${}^3D_4(2)$		$2^{24} : {}^3D_4(2)$	[27]
$PSL_3(3)$		$13^4 : (2.S_4)$	[24]
$PSL_4(13^{24})$		$13^{96} : PSL_4(13^{24})$	[60]
$PSU_3(q)$	$q = 5$	$2^{18} : PSL_3(4)$	[23]
	q — число Мерсенна, q и $q^2 - q + 1$ простые	$2^k : PSU_3(q)$	[17]
$PSU_5(2)$		$3^5 : M_{11}$	[23]
$PSp_4(q)$	$q = 3$	$3^4 : S_5$	[23]
	$q = 2^m$, $m > 1$	$2^{8m} : PSL_2(q^2)$	[29]
	$q = 3^{2m}$	$3^{28m} : PSL_2(q^2)$	[24]
	$q = p^m$, $p > 3$, p простое	$p^{8m} : (PSL_2(q^2).2)$	[24]
$PSp_8(q)$	$q = p^m$, $p \neq 2, 7$, p простое	$p^{8m} : (P\Omega_8^-(q).2)$	[15]
$P\Omega_9(q)$	$q = p^m$, p простое	$p^{8m} : P\Omega_8^-(q)$	[44]

Все известные на данный момент нераспознаваемые неабелевы простые группы приведены в таблице 1. В третьем столбце данной таблицы указана группа, изоспектральная G, содержащая нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу (существование такой группы доказано в [30]).

Отметим, что, как следует из [27], любая группа, изоспектральная группе ${}^3D_4(2)$, имеет секцию, изоморфную ${}^3D_4(2)$, поэтому группа ${}^3D_4(2)$ является единственной с точностью до изоморфизма критической группой с таким спектром.

Основные результаты диссертации

1. Доказано, что не существует общей независимой константы, ограничивающей количество неизоморфных конечных групп, критических относительно одного и того же подмножества множества натуральных чисел (теорема 1).

2. Получено полное описание критических групп со спектром, как у знакопеременных групп A_6 и A_{10}, спорадической группы J_2 и проективной специальной линейной группы $PSL_3(3)$ (теоремы 2, 3, 4 и 6). Теоремы 2–4 завершают решение проблемы 2 для неабелевых простых знакопеременных, спорадических групп и исключительных групп лиева типа (теорема 5).

3. Описано строение конечных групп (в частности, критических) со спектром, как у проективной специальной унитарной группы $PSU_3(3)$, а также проективных симплектических групп $PSp_4(q)$, где q — степень простого числа и $q > 3$ (теоремы 7, 8).

Методы исследования

По теореме Мазурова–Ши [30] любая нераспознаваемая группа изоспектральна группе H с нетривиальной нормальной элементарной абелевой p-подгруппой K для некоторого простого числа p. Действие группы H на K сопряжениями задаёт её естественный гомоморфизм в линейную группу характеристики p. Поэтому одним из основных инструментов, используемых в диссертации, является теория представлений, в том числе, модулярных. В частности, используются классические результаты о фробениусовом действии, а также элементы теории обыкновенных и брауэровых характеров.

Во многом изучение групп, изоспектральных нераспознаваемым неабелевым простым группам, базируется на теореме Грюнберга–Кегеля [56], которая описывает структуру групп с несвязным графом простых чисел. Данная теорема несёт достаточно важную информацию о структуре групп, изоспектральных нераспознаваемым неабелевым простым группам, поскольку среди известных на данный момент нераспознаваемых неабелевых простых групп лишь группы A_{10} и $PSL_4(13^{24})$ имеют связные графы простых чисел. Группа A_{10}, кроме того, является одной из всего лишь четырёх неабелевых простых групп, изоспектральных разрешимым группам (см. [51]). Кроме этой группы, данным свойством обладают группы $PSL_3(3)$, $PSU_3(3)$ и $PSp_4(3)$. Все остальные неабелевы простые группы не могут быть изоспектральны разрешимым группам, поэтому теорема Грюнберга–Кегеля накладывает достаточно серьёзные ограничения на возможное строение групп, изоспектральных таким неабелевым простым группам. Исследование групп, изоспектральных неабелевым простым группам, во многом облегчается тем, что спектры неабелевых простых групп известны и явно описаны (см. [3–7,11,33,38,46,50]).

Новизна и научная значимость работы

В диссертации сделан существенный шаг в изучении конечных нераспознаваемых групп. Показано, что не существует константы, ограничивающей сверху количество групп, критических относительно одного и того же подмножества множества натуральных чисел (теорема 1). Найдены все критические группы со спектрами, как у знакопеременных групп A_6, A_{10}, спорадической группы J_2 и классической группы лиева типа $PSL_3(3)$ (теоремы 2–4 и 6). Теоремы 2–4, по модулю известных результатов, решают проблему 2 для неабелевых простых знакопеременных, спорадических групп и исключительных групп лиева типа (см. теорему 5). Описаны группы (в частности, критические) со спектром, как у проективной специальной линейной группы $PSU_3(3)$, а также проективных симплектических групп $PSp_4(q)$, где q — степень простого числа и $q > 3$ (теоремы 7, 8). Все полученные результаты являются новыми.

Результаты диссертации могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области теории групп, связанных с вопросами распознаваемости и критичности относительно подмножеств множества натуральных чисел, а также могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в работах [63–84]. Основные результаты диссертации опубликованы в [63–66] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2015, 2016, 2017 гг.), международной конференции «Young algebraists' conference» (Лозанна, Швейцария, 2017 г.), международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (Нальчик, 2017 г.), XI школе-конференции по теории групп (Красноярск, 2016 г.), международной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, Беларусь, 2015 г.), международной конференции «Groups and their actions» (Бедлево, Польша, 2015 г.), международной конференции «X International Algebraic Conference in Ukraine» (Одесса, Украина, 2015 г.), международной конференции «Groups and graphs, algorithms and automata» (Екатеринбург, 2015 г.), XIII международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2015 г.), международной конференции «Алгебра и приложения» (Нальчик, 2014 г.), международной школе-конференции «Теория групп и её приложения» (Нальчик, 2014 г.), международной конференции «Mathematics in Armenia: Advances and perspectives» (Цахкадзор, Армения, 2013 г.), международной конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2013 г.), 51-й, 52-й и 53-й международной научной студенческой конференции МНСК (Новосибирск, 2013, 2014, 2015 гг.).

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору А. В. Васильеву и чл.-корр. В. Д. Мазурову за поставленные задачи, всестороннюю поддержку и помощь в работе.

Результаты диссертации получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 13–01–00505,

14–01–90013, 16–31–00147).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 8 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 73 страницах, включает 1 таблицу. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Основные результаты глав сформулированы в виде теорем и имеют сквозную нумерацию. Вспомогательные утверждения (леммы, предложения) имеют тройную нумерацию: первая цифра указывает на номер главы, вторая — на номер параграфа в главе, третья — на номер утверждения в текущем параграфе. Список литературы содержит 84 наименования. Работы автора по теме диссертации приведены отдельным списком.

Содержание диссертации

Глава 1 содержит необходимые общие предварительные сведения. В данной главе приведены все необходимые обозначения и вспомогательные формулировки (параграф 1.1), а также сформулированы предварительные утверждения, необходимые в дальнейших доказательствах (параграф 1.2).

Глава 2 посвящена доказательству того, что в общем случае не существует независимой константы, ограничивающей сверху количество групп, критических относительно одного и того же подмножества множества натуральных чисел (теорема 1). В параграфе 2.1 приведены предварительные рассуждения, используемые в доказательстве теоремы 1. Само доказательство теоремы приведено в параграфе 2.2.

В **главе 3** описываются критические группы со спектром, как у знакопеременной группы A_6 (теорема 2). Доказательство данной теоремы приведено в параграфе 3.1.

Глава 4 посвящена описанию групп, критических относительно спектра знакопеременной группы A_{10} (теорема 3). Доказательство данной теоремы базируется на результатах, приведённых в параграфе 4.1. Само доказательство приведено в параграфе 4.2.

В **главе 5** описываются критические группы, изоспектральные группе J_2 (теорема 4). Доказательство этой теоремы приведено в параграфе 5.1. В параграфе 5.2 сформулирована теорема о том, что для каждой конечной неабелевой простой знакопеременной, спорадической группы и исключительной группы лиева типа все критические группы с тем же спектром известны (теорема 5).

Глава 6 посвящена описанию критических групп со спектром, как у линейной группы $PSL_3(3)$ (теорема 6). Доказательство данной теоремы приведено в параграфе 6.1.

В **главе 7** исследуется строение групп, изоспектральных унитарной группе $PSU_3(3)$ (теорема 7). Предварительные результаты, необходимые для доказательства этой теоремы, приведены в параграфе 7.1. Само доказательство теоремы занимает несколько разделов: случай групп Фробениуса разбирается в параграфе 7.2, случай удвоенных групп Фробениуса — в параграфе 7.3, расширения с помощью $PGL_2(7)$ исследуются в параграфе 7.4, с помощью $PSL_2(7)$ — в параграфе 7.5, наконец, расширения с помощью группы $PSU_3(3)$ и её группы автоморфизмов исследуются в параграфе 7.6.

Глава 8 посвящена исследованию строения групп, изоспектральных симплектическим группам $PSp_4(q)$, где $q > 3$ (теорема 8). Параграф 8.1 содержит необходимые предварительные результаты. Само доказательство теоремы приведено в параграфе 8.2. В параграфе 8.3 сформулированы замечания к данной главе.

1. Предварительные сведения и результаты

§ 1.1. Основные обозначения

В данной работе под $GF(q)$ мы понимаем конечное поле порядка q. Мультипликативную группу поля F мы обозначаем как F^*. Циклическая группа порядка n обозначается через C_n. Центр группы G мы обозначаем символом $\boldsymbol{Z}(G)$, подгруппу Фраттини — $\Phi(G)$. Если H — произвольная подгруппа группы G, то её централизатор в G обозначается как $\boldsymbol{C}_G(H)$, нормализатор — $\boldsymbol{N}_G(H)$. Через G' обозначается коммутант группы G, т. е. подгруппа $[G, G]$. Подгруппу группы G, порождённую всеми элементами простых порядков группы G, будем обозначать через $\Omega(G)$.

Группу диэдра порядка $2n$ мы обозначаем через D_{2n}. Кроме того, K_4 обозначает четверную группу Клейна. Символом Q_m мы обозначаем (обобщённую) группу кватернионов порядка m.

Симметрическая группа подстановок степени n обозначается через S_n, знакопеременная — через A_n. Простые классические группы мы обозначаем как $L_n(q)$, $U_n(q)$, $S_{2n}(q)$, $O_{2n+1}(q)$ и $O^{\pm}_{2n}(q)$.

Через $N \leftthreetimes H$ мы обозначаем полупрямое произведение группы N на группу H, где H действует на N автоморфизмами, причём образ элемента $n \in N$ под действием $h \in H$ мы обозначаем через n^h.

Спектр $\omega(G)$ конечной группы G определяет *граф простых чисел* или *граф Грюнберга-Кегеля* $GK(G)$. Вершинами данного графа служат элементы множества $\pi(G)$, которое состоит из всех простых делителей числа $|G|$. Две различные вершины p и q смежны, если $pq \in \omega(G)$. Обозначим через $s = s(G)$ число компонент связности графа $GK(G)$, а через $\pi_i = \pi_i(G)$ — i-ю компоненту связности, $i = 1, \ldots, s$. Если порядок группы G чётен, положим $2 \in \pi_1$. Обозначим через $\omega_i = \omega_i(G)$ (соответственно, через $\mu_i = \mu_i(G)$) множество, состоящее из таких $n \in \omega(G)$ ($n \in \mu(G)$), что каждый простой делитель числа n лежит в $\pi_i(G)$.

§ 1.2. Предварительные результаты

Лемма 1.2.1 (Грюнберг, Кегель, [56]). *Если G — конечная группа с несвязным графом $GK(G)$, то верно одно из следующих утверждений:*

1) *$s(G) = 2$ и G — группа Фробениуса, т. е. G содержит нетривиальную нормальную нильпотентную холлову подгруппу A и $\boldsymbol{C}_G(a) \leq A$ для любого неединичного $a \in A$;*
2) *$s(G) = 2$ и G — удвоенная группа Фробениуса, т. е. G содержит нормальную подгруппу Фробениуса B с ядром A, такую, что G/A — группа Фробениуса с ядром B/A;*
3) *существует такая неабелева простая группа P, что*

$$P \leq \overline{G} = G/N \leq \operatorname{Aut} P$$

для некоторой нильпотентной нормальной $\pi_1(G)$-подгруппы N из G и $\overline{G}/P$ является $\pi_1(G)$-группой. Более того, граф $GK(P)$ несвязен, $s(P) \geq s(G)$ и для любого числа i, $2 \leq i \leq s(G)$, существует j, $2 \leq j \leq s(P)$, такое, что $\omega_i(G) = \omega_j(P)$.
В частности, G обладает самое большее одним неабелевым композиционным фактором.

Лемма 1.2.2 ([55, 58, 59]). *Пусть G — группа Фробениуса с ядром N и дополнением H. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *группа N нильпотентна; в частности, $GK(N)$ — полный граф;*
2) *если U — подгруппа порядка rs из H, где r и s — (не обязательно различные) простые числа, то U — циклическая группа; в частности, силовские r-подгруппы группы H для нечётных r циклические;*
3) *если порядок группы H чётен, то в H есть единственный элемент z порядка 2; в частности, силовские 2-подгруппы группы H являются циклическими группами или (обобщёнными) группами кватернионов, подгруппа N коммутативна и $n^z = n^{-1}$ для любого элемента n из N;*
4) *либо группа H разрешима и граф $GK(H)$ полный, либо H содержит нормальную подгруппу $L \simeq SL_2(5)$, такую, что $(|L|, |H : L|) \leq 2$ и $GK(H)$ может быть получен из полного графа на $\pi(H)$ удалением ребра $\{3, 5\}$.*

Лемма 1.2.3 (Аргумент Фраттини, [49, с. 15]). *Пусть G — конечная группа, $N \trianglelefteq G$, P — силовская p-подгруппа в N. Тогда $G = \boldsymbol{N}_G(P)N$.*

Лемма 1.2.4 (Гашютц, [48, с. 121]). *Пусть G — конечная группа, A — нормальная абелева p-подгруппа группы G. Если A дополняется в силовской p-подгруппе группы G, то A дополняется в G.*

Лемма 1.2.5 (Машке, [48, с. 123]). *Если характеристика поля F равна нулю или не делит порядок конечной группы G, то любое конечномерное представление группы G над полем F раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений.*

Лемма 1.2.6 ([26, теорема 2]). *Конечная группа G может действовать без неподвижных точек на нетривиальной абелевой группе тогда и только тогда, когда её подгруппа $\Omega(G)$ является прямым произведением циклической холловой подгруппы Z, порядок которой свободен от квадратов, и группы, изоморфной $SL_2(5)$, $SL_2(3)$ или тривиальной группе.*

Лемма 1.2.7 (Клиффорд, [41, с. 70]). *Пусть V — неприводимый G-модуль и $H \trianglelefteq G$. Тогда V равно прямой сумме H-инвариантных подпространств V_i, $1 \leq i \leq r$, каждое из которых удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$V_i = X_{i1} \oplus \cdots \oplus X_{it}$, где каждый X_{ij} — неприводимый H-подмодуль, t не зависит от i и H-подмодули X_{ij} и $X_{i'j'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $i = i'$.*
2. *Для любого H-подмодуля U из V выполняется $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, где $U_i = U \cap V_i$; в частности, любой неприводимый H-подмодуль лежит в одном из V_i.*
3. *Пусть отображение π ставит в соответствие элементу $x \in G$ отображение $V_i \to V_i^x$. Тогда для $x \in G$ отображение $x\pi : V_i \to V_i^x$ является подстановкой на множестве $S = \{V_1, \ldots, V_r\}$ и π индуцирует транзитивное подстановочное представление G на S; более того, $H\boldsymbol{C}_G(H)$ содержится в ядре π.*

Лемма 1.2.8 ([22]). *Пусть G — конечная группа, $N \trianglelefteq G$ и G/N является группой Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением H. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $N\boldsymbol{C}_G(N)/N$, то G содержит элемент порядка $p|H|$ для некоторого $p \in \pi(N)$.*

Предложение 1.2.9. *Конечная группа G является критической относительно множества $\omega(G)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *если M — максимальная подгруппа группы G, то $\omega(M) \neq \omega(G)$;*
2) *если S — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\omega(G/S) \neq \omega(G)$.*

Доказательство. Если группа G является критической относительно $\omega(G)$, то данные условия выполняются по определению. Пусть теперь для группы G выполняются условия 1 и 2. Рассмотрим собственную секцию H/N группы G. Если $H < G$, то для некоторой максимальной подгруппы $M < G$ выполняется цепочка включений

$$\omega(H/N) \subseteq \omega(H) \subseteq \omega(M) \neq \omega(G).$$

Если $H = G$, то N содержит некоторую минимальную нормальную подгруппу S группы G. В этом случае $\omega(G/N) \subseteq \omega(G/S) \neq \omega(G)$. Таким образом, группа G критическая. $\square$

2. Группы, критические относительно множеств натуральных чисел

Данная глава посвящена доказательству того, что в общем случае не существует независимой константы, ограничивающей сверху количество групп, критических относительно одного и того же подмножества множества натуральных чисел.

Теорема 1. *Пусть s — натуральное число и дано множество*

$$\{p_{ij} \mid i = 1, \ldots, s, j = 1, 2\}$$

попарно различных простых чисел. Тогда существует по меньшей мере 2^s попарно не изоморфных групп, критических относительно множества

$$\omega_0 = \{n_1 \cdots n_s \mid n_i \in \{1, p_{i1}, p_{i2}\}\}.$$

§ 2.1. Предварительные рассуждения

Прежде чем приступить к доказательству данной теоремы, опишем конструкцию групп, которая будет использована в дальнейшем.

Пусть p, r — различные простые числа. Рассмотрим поле F порядка p^α, где α — наименьшее натуральное число, такое, что r делит $p^\alpha - 1$. Отметим, что существование такого α гарантировано малой теоремой Ферма. Обозначим через A и B соответственно аддитивную и мультипликативную группы поля F. В группе B есть подгруппа H порядка r. Рассмотрим полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes H$, где действие H на A задано правыми умножениями.

Лемма 2.1.1. *Группа G является критической относительно множества $\omega = \{1, p, r\}$.*

Доказательство. Сперва покажем, что $\omega(G) = \omega$. Для этого возьмём произвольный нетривиальный элемент $ah \in G$. В случае, когда $h = 1$, порядок ah равен p. Если же $h \neq 1$, то для любого $k \in \mathbb{N}$

$$(ah)^k = aa^{h^{-1}}a^{h^{-2}} \ldots a^{h^{-(k-1)}}h^k.$$

Положим $h^{-1} = h_0$ и, поскольку $aa^{h^{-1}}a^{h^{-2}} \dots a^{h^{-(k-1)}}$ является элементом из A, запишем его в аддитивной форме. Имеем:

$$a + ah_0 + ah_0^2 + \dots + ah_0^{k-1} = a(1 + h_0 + h_0^2 + \dots + h_0^{k-1}) = a(h_0^k - 1)(h_0 - 1)^{-1}.$$

Итак, $(ah)^k = a^{(h^{-k}-1)(h^{-1}-1)^{-1}}h^k$, следовательно, порядок ah равен r.

Теперь докажем, что группа G является критической. Воспользуемся следующим замечанием: если некоторый элемент a порядка r действует без неподвижных точек на группе X порядка p^k, где r, p — различные простые числа, то r делит $p^k - 1$. Действительно, если элемент a действует на группе X, то задан гомоморфизм φ из группы $\langle a \rangle$ в группу S_{p^k-1}. Положим $\sigma = a\varphi$. Порядок σ равен r, значит, σ раскладывается в произведение независимых циклов длины r. Кроме того, σ не имеет неподвижных точек, следовательно, количество циклов должно быть равно $(p^k - 1)/r$. Таким образом, r делит $p^k - 1$.

Покажем, что в G нет собственных подгрупп, ей изоспектральных. Действительно, пусть K — подгруппа, изоспектральная G. Тогда K имеет порядок $p^\beta r$, где $0 < \beta \leq \alpha$, поэтому она изоморфна некоторой группе вида $C \rtimes H$, где C — H-инвариантная подгруппа группы A. Однако элементы из H не имеют в C нетривиальных неподвижных точек, следовательно, по доказанному выше замечанию число r делит $p^\beta - 1$. Ввиду выбора α имеем $\beta = \alpha$ и $K = G$.

Осталось показать, что в G нет нормальных подгрупп N, таких, что факторгруппа G/N изоспектральна G. Для этого достаточно доказать, что в G единственной собственной нетривиальной нормальной подгруппой является группа A. Пусть $N \trianglelefteq G$. Как мы уже показали, это будет подгруппа порядка p^β, где $\beta \leq \alpha$. Группа H действует на N сопряжениями и не имеет нетривиальных неподвижных точек, поэтому, как и ранее, r делит $p^\beta - 1$, откуда $\beta = \alpha$. $\square$

Итак, мы построили группу G порядка $p^\alpha r$, критическую относительно множества ω. Ясно, что в предложенной нами конструкции числа p и r можно поменять местами и аналогично получить группу H порядка $r^\gamma p$, также критическую относительно ω. Отметим, что группы G и H имеют различные порядки, поскольку если $\alpha = 1$, то r делит $p - 1$, поэтому $r < p$ и, следовательно, γ не может равняться 1.

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы.

§ 2.2. Доказательство теоремы 1

Для удобства обозначим $p_{i1} = p_i$ и $p_{i2} = r_i$ для всех $i \leq s$. Для каждой пары p_i, r_i, используя приведённую выше конструкцию, построим группы G_{i1} и G_{i2}, не изоморфные друг другу, критические относительно множества $\{1, p_i, r_i\}$.

Рассмотрим всевозможные прямые произведения $G_{1i_1} \times \cdots \times G_{si_s}$, где $i_k \in \{1, 2\}$. Спектры всех этих групп равны ω_0. Кроме того, они попарно не изоморфны. Действительно, допустим, что $H = G_{1i_1} \times \cdots \times G_{si_s}$, $K = G_{1j_1} \times \cdots \times G_{sj_s}$ — пара различных групп. Так как $H \neq K$, то существует такое натуральное число $k \leq s$, что $i_k \neq j_k$. Тогда порядки групп G_{ki_k} и G_{kj_k} различные, следовательно, $|H| \neq |K|$ и поэтому $H \not\simeq K$.

Осталось доказать критичность этих групп относительно ω_0. Случай $s = 1$ доказан в лемме 2.1.1.

Пусть $s > 1$. Рассмотрим группу $G = G_1 \times \cdots \times G_s$, где для каждого $i \leq s$ группа G_i — одна из групп G_{i1}, G_{i2}. Пусть $|G_i| = p_i^{\alpha_i} r_i$.

Допустим, что в группе G существует собственная подгруппа K, изоспектральная G. Тогда порядок K равен $p_1^{\beta_1} r_i \ldots p_s^{\beta_s} r_s$, причём существует индекс i, такой, что $\beta_i < \alpha_i$. Можно считать, что $i = 1$.

Рассмотрим подгруппу H группы K, порождённую всеми элементами из K, возведёнными в степень $p_2 r_2 \ldots p_s r_s$. Тогда группа H изоморфна подгруппе группы G_1, причём порядок H делит $p_1^{\beta_1} r_1$. Это невозможно в силу леммы 2.1.1. Таким образом, в G нет собственных подгрупп, изоспектральных G.

Предположим теперь, что в G есть нормальная подгруппа N, такая, что факторгруппа G/N изоспектральна G. Порядок N должен быть равен $p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}$, где $\beta_i < \alpha_i$ для каждого $i \leq s$.

Рассмотрим произвольный индекс $i \leq s$ и подгруппу M_i группы N, порождённую всеми элементами из N, возведёнными в степень $p_1 \ldots p_s / p_i$. Группа M_i изоморфна нормальной подгруппе группы G_i, причём порядок M_i делит $p_i^{\beta_i}$. Поскольку $\beta_i < \alpha_i$, по лемме 2.1.1 получаем, что $M_i = 1$, откуда $N = 1$. Итак, группа G критическая относительно ω_0. Теорема доказана.

3. Критические группы, изоспектральные группе A_6

Рассмотрим знакопеременную группу A_6. Спектр этой группы равен $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. В [34] доказано, что эта группа нераспознаваема по своему спектру. В следующей теореме дано полное описание критических групп со спектром как у A_6.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, критическая относительно множества $\omega(A_6)$. Тогда G либо изоморфна группе A_6, либо является полупрямым произведением элементарной абелевой группы N порядка 16 на группу $H \simeq A_5$, причём действие H на N определяется как естественное действие группы $SL_2(4) \simeq A_5$ на векторном пространстве $GF(4)^2$.*

§ 3.1. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа, критическая относительно множества $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Число компонент связности графа $GK(G)$ равно 3. Поэтому по лемме 1.2.1 существует такая неабелева простая группа P, что

$$P \leq G/N \leq \mathrm{Aut}\, P$$

для некоторой нормальной 2-подгруппы N из G. Из [61] следует, что P изоморфна одной из групп A_5, A_6, $U_4(2)$.

Случай $P \simeq U_4(2)$ невозможен, потому что в $U_4(2)$ есть, например, элементы порядка 6, в то время как в G нет элементов такого порядка. В случае $P \simeq A_6$ в силу критичности группы G получаем $G \simeq A_6$.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $P \simeq A_5$. В этом случае $\mathrm{Aut}\, P \simeq S_5$. Поскольку индекс S_5 по A_5 равен двум, а в S_5 есть элементы порядка 6, имеем $G/N \simeq A_5$.

Теперь покажем, что группа N элементарная абелева. Действительно, если это не так, то подгруппа Фраттини $\Phi(N)$ нетривиальна. Введём обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по $\Phi(N)$. Наша цель — показать, что $\omega(\overline{G}) = \omega(G)$. Прямое включение очевидно. Также очевидно, что в $\overline{G}$ есть элементы порядков 3 и 5. Остаётся показать, что там есть элементы порядка 4. Если это не так, то силовские 2-подгруппы в $\overline{G}$ элементарные абелевы.

Пусть S — одна из этих подгрупп и $\overline{N} < S$. Так как $\overline{N} \trianglelefteq \overline{G}$, имеем $\boldsymbol{C}_{\overline{G}}(\overline{N}) \trianglelefteq \overline{G}$, откуда $\boldsymbol{C}_{\overline{G}}(\overline{N})/\overline{N} \trianglelefteq \overline{G}/\overline{N} \simeq A_5$. Поскольку $\boldsymbol{C}_{\overline{G}}(\overline{N}) \geq S > \overline{N}$, простота группы A_5 влечёт изоморфизм $\boldsymbol{C}_{\overline{G}}(\overline{N})/\overline{N} \simeq A_5$, и следовательно, $\overline{G} = \boldsymbol{C}_{\overline{G}}(\overline{N})$. Но тогда в группе $\overline{G}$ есть элементы порядков 6 и 10; противоречие. Таким образом, $\omega(\overline{G}) = \omega(G)$. Так как G критическая, имеем $\Phi(N) = 1$. Итак, N — элементарная абелева 2-группа.

Группа G действует на N сопряжениями. Поскольку элементы из N действуют на N тривиально, это действие определяется действием на N факторгруппы G/N, т. е. группы A_5.

Обозначим порядок группы N через 2^n. Покажем, что число n кратно четырём. Действительно, элементы порядков 3 и 5 из A_5 действуют на N без неподвижных точек, поэтому, рассуждая аналогично доказательству леммы 2.1.1, получаем, что числа 3 и 5 делят $2^n - 1$. Отсюда $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

Дальнейшие рассуждения удобнее всего вести в терминах теории представлений.

Лемма 3.1.1. *Пусть V — нетривиальный неприводимый A-модуль над полем $GF(2)$, где $A = \langle \rho \rangle$ — циклическая группа порядка 3. Пусть V не содержит тривиальных подмодулей. Тогда* $\dim V = 2$.

Доказательство. С одной стороны, если $\dim V = 1$, то $v^\rho = \lambda v$ для любого $v \in V$. Но $\lambda \neq 0$, значит, $\lambda = 1$, и V — тривиальный модуль. С другой стороны, пусть $\dim V > 2$. Выберем ненулевой вектор v из V. Тогда $v + v^\rho + v^{\rho^2}$ инвариантен относительно A. Следовательно, $v + v^\rho + v^{\rho^2} = 0$. Таким образом, $v^{\rho^2} = v + v^\rho$ и поэтому $\langle v, v^\rho \rangle$ — A-подмодуль размерности 2; противоречие с неприводимостью V. □

Лемма 3.1.2. *В условиях теоремы 2 группа N элементарная абелева порядка* 16*, и действие группы A_5 на N определяется однозначно.*

Доказательство. Группа G критическая, поэтому на N можно смотреть как на неприводимый A_5-модуль над полем $GF(2)$. Действительно, если в N есть собственный A_5-подмодуль N_0, то в G найдется собственная подгруппа G_0, такая, что $N_0 \leq G_0$ и факторгруппа G_0/N_0 изоморфна A_5. В этом случае, рассуждая аналогично доказательству того, что группа N элементарная абелева, получаем, что группы G и G_0 изоспектральны, что противоречит предположению о том, что группа G критическая.

Итак, N — неприводимый A_5-модуль. Пусть ρ и σ — элементы порядков соответственно 3 и 5 из A_5. Поскольку в группе G нет элементов порядков 6 и 10, модуль N не содержит тривиальных $\langle\rho\rangle$- и $\langle\sigma\rangle$-подмодулей.

Рассмотрим в A_5 подгруппу, изоморфную A_4, содержащую ρ. Эта подгруппа равна $K_4\langle\rho\rangle$, где K_4 — четверная группа Клейна. Рассмотрим в N неприводимый K_4-модуль. Покажем, что он одномерный, и действие на нём группы K_4 тривиально. Для этого воспользуемся следующим замечанием: если V — некоторый неприводимый P-модуль, где V и P — p-группы, то $\dim V = 1$ и P действует тривиально на V. Действительно, зададим группу S как полупрямое произведение V на P. Поскольку S — p-группа, $Z = V \cap \boldsymbol{Z}(S) > 1$. Так как $Z \trianglelefteq S$, случай $Z < V$ невозможен, поскольку V — неприводимый модуль. Таким образом, $Z = V$ и поэтому $V \leq \boldsymbol{Z}(S)$. Отсюда следует, что P действует на V тривиально. Поскольку V — неприводимый модуль, имеем $\dim V = 1$.

Итак, рассмотренный выше модуль одномерный, и K_4 действует на нём тривиально. Пусть v — ненулевой вектор из этого модуля. Векторы v и v^ρ линейно независимы, и для любого $g \in K_4$ выполняется $\rho g = g^{\rho^{-1}}\rho$, поэтому $V = \langle v, v^\rho\rangle$ — неприводимый $\langle\rho\rangle$-модуль. Поскольку $A_4 = K_4\langle\rho\rangle$, модуль V также является неприводимым A_5-модулем. Так как $A_5 = A_4 \cup A_4\sigma \cup \cdots \cup A_4\sigma^4$, пространство $V + V^\sigma + \cdots + V^{\sigma^4}$ является A_5-инвариантным, поэтому оно равно N. Таким образом, $n = \dim N \leq 10$.

Можно считать, что $\rho = (123)$, а $\sigma = (12345)$. Пусть v_1, v_2 — базис V, $v_1^\rho = v_2$, $v_2^\rho = v_1 + v_2$. Непосредственно проверяется, что $\sigma\rho = (13)(24)\rho\sigma^2$, $\sigma^2\rho = \rho^{-1}\sigma^3$. Поскольку $(13)(24) \in K_4$, а K_4 действует на V тривиально в силу леммы 1.2.7, векторы $v_1^\sigma + v_2^{\sigma^2} + v_1^{\sigma^3}$ и $v_2^\sigma + v_1^{\sigma^2} + v_2^{\sigma^2} + v_2^{\sigma^3}$ инвариантны относительно ρ, поэтому они нулевые. Действуя на каждый из них элементом σ^{-1}, получим тождества

$$v_1^{\sigma^2} = v_1 + v_2^\sigma,\ v_2^{\sigma^2} = v_2 + v_1^\sigma + v_2^\sigma.$$

Таким образом, каждый вектор из $\{v_i^{\sigma^j} \mid i = 1, 2, j = 0, \ldots, 4\}$ выражается через векторы v_1, v_2, v_1^σ и v_2^σ. Поэтому $n = \dim N \leq 4$. Ранее мы показали, что n кратно четырём, следовательно, $n = 4$. Таким образом, порядок N равен 16. Кроме того, такое построение зависит только от выбора $v \in N$, поэтому оно определено однозначно с точностью до изоморфизма. □

Лемма 3.1.3. *Действие A_5 на группе N определяется как естественное* *действие группы $SL_2(4) \simeq A_5$ на векторном пространстве $GF(4)^2$.*

Доказательство. В лемме 3.1.2 было доказано, что действие группы A_5 на N определено однозначно. Поэтому достаточно проверить, что естественное действие группы $SL_2(4)$ на $GF(4)^2$ обладает нужными нам свойствами, а именно, что при данном действии элементы порядков 3 и 5 не имеют нетривиальных неподвижных точек в N.

Допустим, что некоторый элемент g из $SL_2(4)$ имеет в N нетривиальную неподвижную точку v. В этом случае матрица элемента g в базисе, содержащем вектор v, будет иметь вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что в этом случае порядок g равен 2. □

Итак, мы доказали, что в группе G есть нормальная элементарная абелева подгруппа N порядка 16 и $G/N \simeq A_5$. Также известно действие этой факторгруппы на N. Таким образом, чтобы доказать теорему, остаётся показать, что G является расщепляемым расширением группы N с помощью A_5. Для этого воспользуемся леммой 1.2.4 и покажем, что подгруппа N дополняема в силовской 2-подгруппе из G.

Сначала докажем, что множество $G \setminus N$ содержит элемент порядка 2. Пусть D_0 — группа диэдра порядка 6, содержащаяся в группе A_5, а D — её полный прообраз в группе G, т. е. $D \geq N$ и $D/N = D_0$. В D есть нормальная подгруппа K индекса 2. Пусть S — силовская 3-подгруппа из K. Тогда по лемме 1.2.3 имеем $D = \boldsymbol{N}_D(S)K$. Поскольку $|D : K| = |\boldsymbol{N}_D(S) : K \cap \boldsymbol{N}_D(S)|$, в $\boldsymbol{N}_D(S)$ существует нетривиальный 2-элемент x. Пусть $S = \langle y \rangle$. Тогда $y^x = y^{-1}$, откуда $x^2 = 1$. Если $x \in N$, то $[x, y] \in S \cap N$, и следовательно, $[x, y] = 1$, что невозможно, потому что в G нет элементов порядка 6. Значит, $x \in G \setminus N$.

Пусть T — силовская 2-подгруппа из G, содержащая x. Поскольку T/N — силовская 2-подгруппа в $G/N \simeq A_5$ и $\boldsymbol{N}_{G/N}(T/N) \simeq A_4$, нормализатор $\boldsymbol{N}_G(T)$ содержит элемент z порядка 3. Так как $(xz)^3 \in T$, получаем $(xz)^3 = 1$. Имеем

$$1 = xzxzxz = x \cdot zxz^{-1} \cdot z^{-1}xz = xx^{z^{-1}}x^z.$$

Отсюда $x^z x = x^{z^{-1}}$. Поскольку x — инволюция, $xx^z = x^z x$. Значит, $X = \langle x, x^z \rangle$ — абелева подгруппа порядка 4 из T и $N \cap X = 1$. Поскольку $|T/N| = 4$, имеем $NX = T$. Таким образом, подгруппа N дополняема в силовской 2-подгруппе T. Теорема доказана.

4. Критические группы, изоспектральные группе A_{10}

Рассмотрим группу A_{10}. Известно, что $\mu(A_{10}) = \{8, 9, 10, 12, 15, 21\}$. В [23] доказана нераспознаваемость A_{10} по спектру. В следующей теореме дано полное описание критических групп со спектром, как у A_{10}.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа, критическая относительно множества $\omega(A_{10})$. Тогда G либо изоморфна группе A_{10}, либо является полупрямым произведением группы $A \times B$ на группу H, где A — элементарная абелева группа порядка 7^8, B — элементарная абелева группа порядка 3^{12}, а H — такое расширение группы порядка 2 с помощью S_5, что в H имеется единственная подгруппа порядка 2.*

Более того, $H \simeq \langle a, b \mid a^4 = b^4a^{-2} = (ab)^5 = [a, b]^3 = 1\rangle$, и если рассмотреть A как векторное пространство над полем $GF(7)$, а B — как векторное пространство над полем $GF(3)$, то можно выбрать базисы в A и B так, чтобы действие H на A в выбранном базисе определялось матрицами

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \ [b] = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot \\ -2 & 1 & \cdot & \cdot & -2 & -1 & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

а действие H на B в выбранном базисе определялось матрицами

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 & 2 & \cdot \end{pmatrix}, \ [b] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}.$$

§ 4.1. Предварительные результаты

Лемма 4.1.1 ([32]). *Пусть G — группа, изоспектральная A_{10}, но не изоморфная A_{10}. Тогда G является полупрямым произведением абелевой $\{3, 7\}$-группы N, содержащей элемент порядка 21, на централизатор H в G некоторой инволюции $z \in G$, которая инвертирует N. Более того, H*

является расширением $\langle z\rangle$ с помощью S_5 и силовские 2-подгруппы группы H являются обобщёнными группами кватернионов порядка 16.

§ 4.2. Доказательство теоремы 3

Пусть G — критическая группа, изоспектральная группе A_{10}. Из леммы 4.1.1 следует, что G — это либо A_{10}, либо группа из леммы 4.1.1. Поскольку $21 \in \mu(G)$ и $21 \in \omega(N)$, группа N является прямым произведением элементарной абелевой 7-группы A и элементарной абелевой 3-группы B. До конца этого параграфа зафиксируем A, B и H.

Лемма 4.2.1. *Группа H определена однозначно с точностью до изоморфизма. Более того, $H \simeq H_0 = \langle c, d \mid c^4 = (cd)^5 = [c,d]^3 = 1,\ d^4 = c^2\rangle$.*

Доказательство. Группа S_5 имеет представление $\langle \overline{c}, \overline{d} \mid \overline{c}^2 = \overline{d}^4 = (\overline{c}\overline{d})^5 = [\overline{c}, \overline{d}]^3 = 1\rangle$ (см. [57]). Поскольку $S_5 \simeq H/\langle z\rangle$, где z — единственная инволюция в H, мы можем посчитать отношения между порождающими элементами группы H. Пусть c и d — прообразы $\overline{c}$ и $\overline{d}$. Очевидно, что $H = \langle c, d\rangle$ и $c^4 = 1$, $d^4 = c^2$. Для оставшихся элементов существуют следующие возможности:

1. $(cd)^5 = [c,d]^3 = 1$;
2. $(cd)^5 = c^2$, $[c,d]^3 = 1$;
3. $(cd)^5 = 1$, $[c,d]^3 = c^2$;
4. $(cd)^5 = [c,d]^3 = c^2$.

Вычисления с использованием GAP [40] показывают, что в случаях 3 и 4 порядок группы H равен 120, что невозможно. Также вычисления показывают, что случаи 1 и 2 дают изоморфные группы. Таким образом, отношения между порождающими группы H_0 выполняются для порождающих группы H. Так как порядок H_0 равен 240, то $H \simeq H_0$, т. е. группа H определена единственным образом с точностью до изоморфизма. □

Обозначим через c и d порождающие элементы группы H, для которых выполняются соотношения из леммы 4.2.1, и зафиксируем их до конца параграфа.

Так как $N = A \times B$, действие группы H на группах A и B определяет действие H на N.

Лемма 4.2.2.

1. *Существует единственный с точностью до подобия неприводимый H-мо-*

дуль V над полем $GF(7)$, на котором элемент порядка 3 из H действует без неподвижных точек. Базис V может быть выбран так, чтобы действие H на V определялось следующими матрицами:

$$[c] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \ [d] = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot \\ -2 & 1 & \cdot & \cdot & -2 & -1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\mu(V \leftthreetimes H) = \{7, 8, 10, 12\}$.

2. *Существует единственный с точностью до подобия неприводимый H-модуль W над полем $GF(3)$, такой, что элемент порядка 5 из H имеет в W неподвижную точку. Базис W может быть выбран так, чтобы действие H на W определялось следующими матрицами:*

$$[c] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 & 2 & \cdot \end{pmatrix}, \ [d] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $\mu(W \leftthreetimes H) = \{8, 9, 10, 12, 15\}$.

3. *Группа $(V \times W) \leftthreetimes H$ является критической относительно $\omega(A_{10})$.*

Доказательство. Отметим, что $\mu(H) = \{8, 10, 12\}$.

1. Поскольку 7 не делит порядок H, любое представление над полем характеристики 7 поднимается до комплексного представления (см. [20, с. 566]). Согласно таблице характеров группы H (см. [40]), существует лишь одно неприводимое комплексное представление, такое, что элементы порядка 3 из H действуют на соответствующем модуле без неподвижных точек. Этот характер представлен ниже.

g^G	1A	5A	4A	8A	8B	12A	12B	10A	2A	4B	3A	6A
$\chi(g)$	4	-1	0	0	0	0	0	1	-4	0	-2	2

Рассмотрим комплексное представление с данным характером. В этом случае действие группы H может быть определено следующими матрицами (см. [57]):

$$[c] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \ [d] = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & -i\sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & i\sqrt{2} \\ 1+i\sqrt{2} & \cdot & -1+i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого представления можно получить целочисленное представление, заменив все действительные числа в этих матрицах на скалярные матрицы размерности 2, а число $i\sqrt{2}$ — на матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. В результате получим представление размерности 8. Эти матрицы по модулю 7 дают искомое представление.

$$[c] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad [d] = \begin{pmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot \\ -2 & 1 & \cdot & \cdot & -2 & -1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, вычисления в GAP ([40]) показывают, что ни один нетривиальный элемент из H не имеет в V неподвижных точек. Таким образом, $\mu(V \leftthreetimes H) = \mu(H) \cup \{7\}$.

2. С помощью [57] и [40] проверяется, что в любом неприводимом H-модуле над полем $GF(3)$, не эквивалентном W, элемент порядка 5 из H не имеет неподвижных точек. Кроме того, если φ — линейное преобразование пространства W, соответствующее элементу $[c,d] \in H$, то φ имеет жорданову форму с жордановой клеткой размера 3. Таким образом, $\mu(W \leftthreetimes H) = \mu(H) \cup \{9, 15\}$.

3. Имеем $\mu((V \times W) \leftthreetimes H) = \mu(V \leftthreetimes H) \cup \mu(W \leftthreetimes H) \cup \{21\} = \mu(A_{10})$. Кроме того, модули V и W неприводимые, поэтому данная группа критическая. □

Лемма 4.2.3. *Порядок группы A равен 7^8, и группа A как H-модуль эквивалентна модулю V из леммы 4.2.2.*

Доказательство. Докажем, что в полупрямом произведении $A \leftthreetimes H$ нет элементов порядка 21. Предположим противное и обозначим через ah этот элемент порядка 21. Далее, существует элемент bh порядка 9 в полупрямом произведении $B \leftthreetimes H$. Элементы ah и bh можно рассматривать как элементы группы G. Так как $a(bh) = b(ah) = (bh)a$, порядок элемента abh равен 63; противоречие.

Таким образом, элементы порядка 3 из H действуют на A без неподвижных точек. Рассмотрим неприводимый H-подмодуль A_0 модуля A. Ясно, что он эквивалентен модулю V из леммы 4.2.2. Тогда $\omega(A_0 \leftthreetimes H) = \omega(A \leftthreetimes H)$. Поскольку группа G критическая относительно $\omega(G)$, группа $A \leftthreetimes H$ должна быть также критической относительно своего спектра. Итак, $A_0 = A$. $\square$

Лемма 4.2.4. *Порядок группы B равен 3^{12}, и группа B как H-модуль эквивалентна модулю W из леммы 4.2.2.*

Доказательство. Рассмотрим B как H-модуль. Поскольку $15 \in \omega(G)$, один из неприводимых факторов модуля B должен быть изоморфен модулю W. Пусть $B/B_0 \simeq W$ Тогда по лемме 4.2.2 факторгруппа $(B \leftthreetimes H)/B_0$ имеет тот же спектр, что и $B \leftthreetimes H$. Поскольку группа G критическая относительно $\omega(G)$, группа $B \leftthreetimes H$ критическая относительно $\omega(B \leftthreetimes H)$. Итак, $B_0 = 1$ и $B \simeq W$. $\square$

Теперь теорема 3 следует из лемм 4.2.1–4.2.4.

5. Критические группы, изоспектральные группе J_2

Рассмотрим группу J_2. Известно, что $\mu(J_2) = \{7, 8, 10, 12, 15\}$. Нераспознаваемость группы J_2 доказана в [53]. В следующей теореме дано полное описание групп, критических относительно $\omega(J_2)$.

Теорема 4. *Пусть G — конечная группа, критическая относительно множества $\omega(J_2)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1. $G \simeq J_2$;
2. $G \simeq S_8$;
3. *G является полупрямым произведением элементарной абелевой группы N порядка 2^6 на группу $H \simeq A_8$. Более того, если рассмотреть N как векторное пространство над полем $GF(2)$ и обозначить через a и b прообразы подстановок (123) и (2345678) при изоморфизме H на A_8, то $H = \langle a, b\rangle$ и можно выбрать базис в N так, чтобы действие H на N в этом базисе определялось матрицами*

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \ [b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

§ 5.1. Доказательство теоремы 4

Лемма 5.1.1. *Пусть $H = A_8$. Тогда*

1. *$H = \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$, где $\sigma_1 = (123)$, $\sigma_2 = (2345678)$.*
2. *С точностью до подобия существует единственный неприводимый H-модуль V над полем $GF(2)$, такой, что σ_2 действует на V без неподвижных точек. Размерность модуля V равна 6, и действие H на V при подходящем выборе базиса определяется следующими матрицами:*

$$[\sigma_1] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \ [\sigma_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

3. *Любое расширение V посредством H расщепляется, т. е. является полупрямым произведением $V \leftthreetimes H$.*

4. $\omega(V \rtimes H) = \omega(J_2)$.

5. *Группа* $V \rtimes H$ *критическая относительно* $\omega(J_2)$.

Доказательство. Утверждения 1–3 проверяются с помощью [57] и [40]. Утверждение 4 было доказано в [53].

5. Пусть K — подгруппа группы $V \rtimes H$ и $\omega(K) = \omega(V \rtimes H)$. Тогда K содержит элементы порядков 5 и 7 и, поскольку A_8 порождается любой парой таких элементов (см. [37]), имеем $KV = VH$. Теперь если $K \cap V = 1$, то $K = H$, что невозможно, так как $\omega(H) \neq \omega(V \rtimes H)$. Поэтому $K \cap V > 1$ и, поскольку V — минимальная нормальная подгруппа в $V \rtimes H$, имеем $V \leq K$, откуда $K = KV = VH$. Так как V минимальная нормальная, любая нормальная подгруппа N группы $V \rtimes H$ содержит V. Факторгруппа N/V изоморфна некоторой нормальной подгруппе группы H, поэтому N/V либо тривиальна и тогда $N = V$, либо совпадает с H и тогда $N = VH$. □

В [52] было доказано, что любая группа, изоспектральная J_2, изоморфна либо J_2, либо S_8, либо расширению группы порядка 2^{6t}, где t — некоторое натуральное число, отличное от нуля, с помощью A_8. Отсюда следует, что группы J_2 и S_8 критические. Таким образом, остается рассмотреть третий случай.

В этом случае G — расширение группы N порядка 2^{6t} с помощью A_8, т. е. $G/N = H \simeq A_8$ и G критическая. Пусть M — максимальная G-инвариантная подгруппа группы N. Тогда N/M — неприводимый H-модуль, на котором элементы порядка 7 из H действуют без неподвижных точек. По лемме 5.1.1 модуль N/M эквивалентен модулю V из леммы 5.1.1, следовательно, факторгруппа G/M изоспектральна J_2, поэтому из критичности G следует, что $M = 1$. Таким образом, $N \simeq V$ и, следовательно, G — полупрямое произведение из леммы 5.1.1. Теорема доказана.

§ 5.2. Критические группы, изоспектральные неабелевым простым знакопеременным, спорадическим группам и исключительным группам лиева типа

Доказанные выше теоремы 2–4 завершают изучение групп, критических относительно спектров простых знакопеременных и спорадических групп и исключительных групп лиева типа. Сформулируем общий результат в виде теоремы.

Теорема 5. *Для каждой конечной неабелевой простой знакопеременной, спорадической группы и исключительной группы лиева типа все критические группы с тем же спектром известны; в частности, количество таких попарно не изоморфных групп не превосходит* 3.

Доказательство. Как уже отмечалось во введении к настоящей работе, из [27] следует, что любая группа, изоспектральная группе ${}^3D_4(2)$, имеет секцию, изоморфную ${}^3D_4(2)$, поэтому группа ${}^3D_4(2)$ является единственной с точностью до изоморфизма критической группой с таким спектром. Кроме того, как следует из [13,52] и теоремы A, для любой группы G, изоспектральной неабелевой простой знакопеременной или спорадической группе или исключительной группе лиева типа L, отличной от A_6, A_{10}, J_2 и ${}^3D_4(2)$, выполняется цепочка включений

$$L \leq G \leq \operatorname{Aut} L.$$

Поскольку группы L и G в данном случае изоспектральны, получаем, что любая такая группа L является с точностью до изоморфизма единственной критической группой с таким спектром.

Для оставшихся же групп A_6, A_{10}, J_2 и ${}^3D_4(2)$ желаемые условия выполняются в силу теорем 2–4. □

6. Критические группы, изоспектральные группе $L_3(3)$

Рассмотрим группу $L_3(3)$. Спектр этой группы равен $\{1, 2, 3, 6, 8, 13\}$ (см. [3]). В [24] доказано, что эта группа нераспознаваема по своему спектру. В следующей теореме дано полное описание групп, критических относительно этого множества.

Теорема 6. *Пусть G — конечная группа, критическая относительно множества $\omega(L_3(3))$. Тогда G либо изоморфна группе $L_3(3)$, либо является группой Фробениуса $N \rtimes H$, где N — элементарная абелева группа порядка 13^4, а H — такое расширение группы порядка 2 с помощью S_4, что в H имеется единственная подгруппа порядка 2.*

Более того, $H \simeq \langle a, b \mid a^4 = b^3 = (ab)^8 = 1;\ a^2 = (ab)^4 \rangle$, и если рассмотреть N как векторное пространство над полем $GF(13)$, то можно выбрать базис в N так, чтобы действие H на N в выбранном базисе определялось матрицами

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ [b] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 5 \\ \cdot & \cdot & 5 & \cdot \end{pmatrix}.$$

§ 6.1. Доказательство теоремы 6

Пусть G — критическая группа со спектром, как у группы $L_3(3)$. Число компонент связности графа $GK(G)$ равно 2. Ввиду [61] и [2], из леммы 1.2.1 следует, что G — либо $L_3(3)$, либо группа Фробениуса.

Пусть G — группа Фробениуса с ядром N и дополнением H. По лемме 1.2.2 группа N нильпотентна с полным графом простых чисел и $|\mu(N)| = 1$, группа H разрешима и также имеет полный граф простых чисел. Допустим, что $13 \in \omega(H)$. Тогда $2, 3 \notin \omega(H)$, так как в противном случае в H содержались бы элементы порядков 26 или 39 (в силу полноты $GK(H)$). Таким образом, $2, 3 \in \omega(N)$. Отсюда имеем $\mu(N) = \{6, 8\}$ и $|\mu(N)| = 2$, что противоречит лемме 1.2.2. Следовательно, $13 \in \omega(N)$, $\mu(N) = \{13\}$, $\mu(H) = \{6, 8\}$. Так как порядок группы H чётен, из леммы 1.2.2 следует, что N абелева и в H существует единственная инволюция z.

Рассмотрим подгруппу $\Omega(H)$ группы H. Напомним, что это подгруппа, порождённая всеми элементами простого порядка из H. Так как H действует без неподвижных точек на N, лемма 1.2.6 влечет $\Omega(H) = Z \times K$, где Z — циклическая холлова подгруппа, p^2 не делит $|Z|$ для простых p, а K либо тривиальна, либо изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Группа $SL_2(5)$ содержит элемент порядка 5, поэтому случай $K \simeq SL_2(5)$ невозможен.

Предположим, что $K = 1$. В этом случае $\Omega(H) \simeq C_6$, силовская 3-подгруппа S группы H имеет порядок 3 и является нормальной в H. Поэтому H действует на S сопряжениями и, следовательно, существует гомоморфизм $\varphi : H \to \operatorname{Aut} S$. Отметим, что $\ker\varphi$ совпадает с $\boldsymbol{C}_H(S)$. Так как $\operatorname{Aut} S$ порядка 2, имеем

$$|\boldsymbol{C}_H(S)| = |\ker\varphi| = |H|/2.$$

Пусть T — силовская 2-подгруппа группы $\boldsymbol{C}_H(S)$, а P — силовская 2-подгруппа группы H. Из леммы 1.2.2 следует, что P либо циклическая, либо (обобщённая) группа кватернионов. Если P циклическая, то она порядка 8. В этом случае T имеет порядок 4 и существует элемент порядка 4, который централизует элемент порядка 3. Имеем $12 \in \omega(H)$, что невозможно. Если P — (обобщённая) группа кватернионов, то она порядка 16, а T — порядка 8. Каждая подгруппа порядка 8 группы Q_{16} содержит элемент порядка 4. Опять имеем $12 \in \omega(H)$. Таким образом, случай $K = 1$ также невозможен.

Пусть K изоморфна $SL_2(3)$. Так как $\pi(H) = \pi(SL_2(3))$, холловость группы Z влечёт её тривиальность. Таким образом, $\Omega(H) \simeq SL_2(3)$. Поскольку силовские 2-подгруппы группы $SL_2(3)$ изоморфны Q_8, из леммы 1.2.2 следует, что силовские 2-подгруппы группы H должны быть также изоморфны (обобщённой) группе кватернионов. Так как все 2-группы кватернионов порядка больше, чем 16, содержат элемент порядка 16, получаем, что силовские 2-подгруппы группы H изоморфны Q_{16}, поэтому $|H : \Omega(H)| = 2$.

Введём обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по $\langle z\rangle$. Докажем, что $\overline{H} \simeq S_4$. Так как $PSL_2(3) \simeq A_4$, группа $\overline{H}$ содержит подгруппу индекса 2, изоморфную A_4. Кроме того, $|\overline{H}| = 24$ и $\omega(\overline{H}) = \{1, 2, 3, 4\}$. Теперь желаемый изоморфизм следует из теоремы 1 из [21].

Группа S_4 имеет представление $\langle \overline{x}, \overline{y} \mid \overline{x}^2 = \overline{y}^3 = (\overline{xy})^4 = 1\rangle$. Поскольку z — единственная инволюция в H, должно выполняться

$$H \simeq \langle x, y \mid x^4 = y^3 = (xy)^8 = 1;\ x^2 = (xy)^4\rangle.$$

Используя [40], проверяем, что такая группа существует и единственна, а также удовлетворяет свойствам H. Теперь остаётся определить N и действие на ней группы H, чтобы определить всю группу G.

В H элементы y и $r = y^x$ порождают нормальную подгруппу L, изоморфную $SL_2(3)$, поэтому $L \simeq \langle y, r \mid y^3 = r^3 = (yr)^4 = [(yr)^2, y] = [(yr)^2, r] = 1\rangle$. Мы можем смотреть на N как на векторное пространство над полем $GF(13)$. Так как мультипликативная группа данного поля имеет порядок 12, для каждого элемента $x \in L$ в N существует собственный вектор. Пусть $t = yr$ и v — собственный вектор для t, т. е. $v^t = \lambda v$. Здесь $\lambda^2 = -1$, откуда $\lambda = \pm 5 \pmod{13}$.

Лемма 6.1.1. *Подпространство $V = \langle v, v^y\rangle$ пространства N является L-инвариантным.*

Доказательство. Пусть w — ненулевой вектор из V. Тогда вектор w^{y^2+y+1} y-инвариантен. Так как $13 \cdot 3 \notin \omega(G)$, для y, как для линейного преобразования пространства N, должно выполняться $y^2+y+1 = 0$, откуда $y^2 = -y-1$. Аналогично $r^2 = -r-1$.

Чтобы доказать L-инвариантность V, достаточно показать, что V является y-инвариантным и r-инвариантным. Имеем:

$$(v^y)^y = v^{y^2} = v^{-y-1} = -v^y - v,$$

$$(v^y)^r = v^t = \lambda v,$$

$$v^r = v^{(yr)^4 r} = v^{(yr)^3 yr^2} = v^{(yr)^3 y(-r-1)} = -v^{(yr)^4} - v^{(yr)^3 y} = -v - \lambda^{-1} v^y.$$

□

Поскольку H действует на N неприводимо, из леммы 1.2.7 следует, что $N = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, где V_i — неприводимый L-модуль, $i \le k$. Следовательно, $V_i \simeq V$. Далее, $k \le 2$, так как $|H : L| = 2$. Таким образом, $N = V_1$ или $N = V_1 \oplus V_2$.

Допустим, что $N = V_1$. Тогда H изоморфна подгруппе группы $GL_2(13)$. Пусть S — силовская 2-подгруппа группы H. Тогда

$$S \simeq Q_{16} = \langle c, d \mid c^8 = d^4 = 1;\ c^d = c^{-1};\ d^2 = c^4\rangle$$

и $S' = \langle a\rangle$, где $|a| = 4$. Так как $\det a = 1$ и все собственные значения a различны, имеем $a \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i^{-1} \end{pmatrix}$, где $i^2 = -1$. Поскольку $[c, d] = c^{-2} \in \langle a\rangle$, можно считать, что $a = c^2$. В таком случае $c \sim \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$, $\mu_1, \mu_2 \in GF(13)$, $|\mu_1| = |\mu_2| = 8$. Но 8 не делит порядок $GF(13)^*$. Таким образом, в $GL_2(13)$ нет подгрупп, изоморфных Q_{16}, и следовательно, нет подгрупп, изоморфных H.

Получаем, что $N = V_1 \oplus V_2$. В этом случае N — индуцированный модуль H относительно L. Так как $H = L \cup Lx$ и $A = V_1 \oplus V_1^x$, легко посчитать действие x и y на базисе v, v^y, v^x, v^{yx}. Без ограничения общности полагаем $\lambda = 5$. Теперь непосредственно проверяется, что

$$[x] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \ [y] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 5 \\ \cdot & \cdot & 5 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

7. Группы, изоспектральные группе $U_3(3)$

Рассмотрим группу $U_3(3)$. Известно, что $\mu(U_3(3)) = \{7, 8, 12\}$ (см. [3]). В [23] доказана нераспознаваемость $U_3(3)$ по спектру. В следующей теореме даётся описание групп (в частности, критических), изоспектральных группе $U_3(3)$. Как уже отмечалось ранее, описание критических групп в этом случае не полное.

Теорема 7. *Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе $U_3(3)$. Тогда G является либо группой Фробениуса или удвоенной группой Фробениуса, либо расширением 2-группы N с помощью одной из следующих групп: $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, $U_3(3)$, $\mathrm{Aut}\, U_3(3)$.*

Более того, справедливы следующие утверждения.

1. *Если $G = F \rtimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H, то F — элементарная абелева 7-группа, а H изоморфна либо*

$$H_1 = \langle a, b, s \mid a^8 = b^4 = s^3 = 1;\ a^4 = b^2,\ a^b = a^{-1},\ s^a = s^{-1},\ s^b = s\rangle,$$

   либо подгруппе $H_0 = \langle a, s\rangle$ группы H_1 индекса 2. Группа H_1 является полупрямым произведением $\langle s\rangle$ и обобщённой группы кватернионов $Q = \langle a, b\rangle$ порядка 16. Централизатор s в Q является группой кватернионов порядка 8, порождённой a^2 и b.

   В обоих случаях группа F как H-модуль является прямой суммой H-модулей, изоморфных модулю V размерности 4 над полем $GF(7)$, действие элементов a, b и s на котором в подходящем базисе задаётся матрицами

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ [b] = \begin{pmatrix} 5 & 4 & \cdot & \cdot \\ 4 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & 2 \\ \cdot & \cdot & 2 & 3 \end{pmatrix},\ [s] = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 \end{pmatrix}.$$

   Единственная $\omega(U_3(3))$-критическая группа такого типа изоморфна $V \rtimes H_0$.

2. *Если G — удвоенная группа Фробениуса, то $G = ABC$, где A — нормальная 2-подгруппа, а $H = BC$ является группой Фробениуса порядка 21 или 42.*

   В первом случае $H \simeq \langle a, b \mid a^7 = b^3 = a^b a^5 = 1\rangle$ и порядок любого G-главного фактора V из A равен 2^3. Если рассмотреть V как H-модуль над *полем $GF(2)$, то существует базис в V, в котором действие H на V задаётся матрицами*

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot \end{pmatrix},\ [b] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Во втором случае $H \simeq \langle a, b \mid a^7 = b^6 = a^b a^4 = 1\rangle$ и порядок любого G-главного фактора V из A равен 2^6. Если рассмотреть V как H-модуль над полем $GF(2)$, то существует базис в V, в котором действие H на V задаётся матрицами

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ [b] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

В каждом из двух случаев существует по меньшей мере одна группа, критическая относительно $\omega(U_3(3))$.

3. *Если $G/N \simeq PGL_2(7)$, то N дополняется в G подгруппой H, изоморфной $PGL_2(7)$, и каждый G-главный фактор группы N как H-модуль изоморфен абсолютно неприводимому H-модулю V над полем $GF(2)$. Рассмотрим матрицы над $GF(2)$:*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

   Тогда $\langle a, b, c\rangle \simeq PGL_2(7)$ и соответствующее естественное представление эквивалентно действию H на V. Полупрямое произведение $V \leftthreetimes H$ изоспектрально $U_3(3)$ и с точностью до изоморфизма является единственной группой, критической относительно $\omega(U_3(3))$.

4. *Если $G/N \simeq L_2(7) \simeq GL_3(2)$, то каждый G-главный фактор группы N изоморфен естественному трёхмерному $GL_3(2)$-модулю V или модулю, контраградиентному V. Кроме того, экспонента группы $\boldsymbol{C}_N(s)$ равна 4, где s — элемент порядка 3 из G. Существуют по крайней мере две не изоморфные $\omega(U_3(3))$-критические группы такого типа. Обе являются расширениями прямого произведения трёх циклических групп порядка 4 с помощью $L_2(7)$, однако одно из этих расширений расщепляемое, другое — нерасщепляемое.*

5. *Если $G/N \simeq U_3(3)$ или $G/N \simeq \operatorname{Aut} U_3(3)$, то каждый G-главный фактор группы N изоморфен единственному с точностью до эквивалентности абсолютно неприводимому шестимерному $\operatorname{Aut} U_3(3)$-модулю над*

полем $GF(2)$ (или его ограничению на $U_3(3)$). Существуют примеры расширений N с помощью $U_3(3)$ и $\operatorname{Aut} U_3(3)$, в которых группа N нетривиальна. Группа $U_3(3)$ является единственной с точностью до изоморфизма $\omega(U_3(3))$-критической группой такого типа.

Вступительная часть теоремы доказывается в предложении 7.1.1. Пункты 1–5 теоремы доказываются соответственно в параграфах 7.2–7.6.

§ 7.1. Предварительные результаты

Предложение 7.1.1. *Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе $U_3(3)$. Тогда G является либо группой Фробениуса, либо удвоенной группой Фробениуса, либо расширеним 2-группы N с помощью одной из следующих групп: $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, $U_3(3)$, $\operatorname{Aut} U_3(3)$.*

Доказательство. Поскольку число компонент связности графа $GK(U_3(3))$ равно 2, для группы G выполняется одно из утверждений леммы 1.2.1. Если G не является группой Фробениуса или удвоенной группой Фробениуса, то существует такая неабелева простая группа P, что

$$P \leq G/N \leq \operatorname{Aut} P$$

для некоторой нильпотентной нормальной $\{2,3\}$-группы N. Очевидно, что $\omega(P) \subseteq \omega(G)$ и $7 \in \omega(P)$. Из [61] следует, что P изоморфна $L_2(7)$ или $U_3(3)$. В обоих случаях порядок группы $\operatorname{Out} P$ равен 2. Таким образом, $G/N \simeq H$, где H является одной из следующих групп: $L_2(7)$, $PGL_2(7) \simeq \operatorname{Aut} L_2(7)$, $U_3(3)$, $\operatorname{Aut} U_3(3)$.

Докажем, что N является 2-группой. Действительно, предположим, что силовская 3-подгруппа R группы N нетривиальна. Тогда обозначим через Q силовскую 2-подгруппу группы N и введём обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по Q. Тогда $\overline{N}$ — 3-группа и $\overline{G}/\overline{N} \simeq H$.

Группа H содержит подгруппу K, изоморфную $L_2(7)$. Обозначим через S подгруппу порядка 7 группы K. Тогда порядок нормализатора $\boldsymbol{N}_K(S)$ равен $7 \cdot 3$ (см. [37]). Пусть F — полный прообраз группы $\boldsymbol{N}_K(S)$ в группе $\overline{G}$. По лемме 1.2.8 группа F содержит элемент порядка 9, что противоречит изоспектральности групп G и $U_3(3)$. Таким образом, N — 2-группа. $\square$

§ 7.2. Группы Фробениуса, изоспектральные $U_3(3)$

Пусть $G = F \rtimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H и $\omega(G) = \omega(U_3(3))$. По лемме 1.2.2 группа F нильпотентна, множество $\mu(F)$ одноэлементно. Далее, группа H разрешима, граф $GK(H)$ полный.

Покажем, что F — элементарная абелева 7-группа. Действительно, если 7 делит порядок группы H, то H — 7-группа, а F — $\{2,3\}$-группа. Тогда F содержит элементы порядков 8 и 12. Но тогда из одноэлементности множества $\mu(F)$ следует, что N содержит элемент порядка 24; противоречие. Значит, 7 делит порядок группы F. Поскольку G не содержит элементов порядка 49, а порядок группы H чётен, из леммы 1.2.2 следует, что F элементарная абелева.

Из леммы 1.2.2 также следует, что в H существует единственная инволюция z, силовские 2-подгруппы в H циклические или являются (обобщёнными) группами кватернионов, а силовские 3-подгруппы в H циклические порядка 3. Рассмотрим подгруппу $\Omega(H)$ группы H, порождённую всеми элементами простых порядков из H. Тогда по лемме 1.2.6 группа $\Omega(H)$ является прямым произведением холловых подгрупп Z и K, где Z циклическая и её порядок свободен от квадратов, а K либо тривиальна, либо изоморфна $SL_2(5)$ или $SL_2(3)$. Ясно, что $K \not\simeq SL_2(5)$.

Предположим, что $K \simeq SL_2(3)$. Тогда $Z = 1$ и $\Omega(H) = K$, поэтому индекс H по K равен 2 и порядок H равен 48. Введём обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по $\langle z \rangle$. Тогда порядок $\overline{H}$ равен 24 и в $\overline{H}$ есть подгруппа индекса 2, изоморфная A_4. Поскольку $H \neq K \times \langle z \rangle$, получаем $\overline{H} \simeq S_4$. Но $\mu(S_4) = \{3,4\}$, следовательно, в H нет элементов порядка 12; противоречие. Таким образом, $K = 1$ и $\Omega(H)$ циклическая порядка 6. Поэтому силовские 2-подгруппы группы H являются либо циклическими порядка 8, либо обобщёнными группами кватернионов порядка 16.

Пусть $S \in \mathrm{Syl}_3(H)$. Тогда $S < \Omega(H)$, и из цикличности $\Omega(H)$ следует, что $S \trianglelefteq H$. Таким образом, группа H является полупрямым произведением группы S на силовскую 2-подгруппу группы H.

Рассмотрим случай, когда силовские 2-подгруппы в H изоморфны Q_{16}, и пусть Q — одна из этих силовских подгрупп. Тогда $H = S \rtimes Q$ и $\overline{H} = \overline{S} \rtimes \overline{Q}$, причём $\overline{Q} \simeq D_8$. Пусть $\overline{Q} = \langle \overline{a}, \overline{b} \mid \overline{a}^4 = \overline{b}^2 = 1,\ \overline{a}^{\overline{b}} = \overline{a}^{-1} \rangle$. Поскольку группа $\overline{S}$ циклическая порядка 3, задан гомоморфизм $\varphi : \overline{Q} \to C_2$. Ядро φ имеет порядок 4, но не содержит элементов порядка 4, поскольку элементы порядка 8 из Q действуют на S без неподвижных точек. Таким образом, $\ker\varphi$ изоморфно четверной группе Клейна K_4. Группа $\overline{Q}$ содержит две подгруппы, изоморфные K_4, и они переводятся друг в друга автоморфизмом группы $\overline{Q}$, поэтому можно считать, что $\ker\varphi = \langle \overline{a}^2, \overline{b} \rangle$. С помощью [40] проверяется, что

$$\overline{H} \simeq \langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{s} \mid \overline{a}^4 = \overline{b}^2 = \overline{s}^3 = 1,\ \overline{a}^{\overline{b}} = \overline{a}^{-1},\ \overline{s}^{\overline{a}} = \overline{s}^{-1},\ \overline{s}^{\overline{b}} = \overline{s} \rangle.$$

Поскольку H содержит единственную инволюцию, получаем

$$H \simeq \langle a, b, s \mid a^8 = b^4 = s^3 = 1,\ a^4 = b^2,\ a^b = a^{-1},\ s^a = s^{-1},\ s^b = s \rangle = H_1.$$

Из строения группы H_1 получаем, что $\mu(H_1) = \{8, 12\}$.

Таким образом, с точностью до изоморфизма существует единственная группа H с силовской 2-подгруппой, изоморфной обобщённой группе кватернионов порядка 16, такая, что группа Фробениуса $N \leftthreetimes H$ изоспектральна $U_3(3)$ и $|H| = 48$.

Теперь рассмотрим случай, когда силовские 2-подгруппы в H циклические порядка 8, т. е. $H = S \leftthreetimes \langle c \rangle$, c — элемент порядка 8 из H. Очевидно, должно выполняться $s^c = s^{-1}$, поэтому такая группа единственна с точностью до изоморфизма. Рассмотрим подгруппу $H_0 = \langle a, s \rangle$ индекса 2 группы H_1 из предыдущего случая. Она является полупрямым произведением группы S на группу $\langle a \rangle$ порядка 8. Более того, $\mu(H_0) = \{8, 12\}$.

Итак, если группа H такова, что группа Фробениуса $F \leftthreetimes H$ изоспектральна $U_3(3)$, то H изоморфна либо H_1, либо H_0. Осталось в обоих случаях задать действие группы H на группе F. Напомним, что F — элементарная абелева 7-группа, поэтому на F можно смотреть как на H-модуль над полем $GF(7)$. Поскольку порядки F и H взаимно просты, по лемме 1.2.5 группа F как H-модуль изоморфна прямой сумме неприводимых модулей. Таким образом, достаточно найти все неприводимые H-модули над полем $GF(7)$, на которых группа H действует без нетривиальных неподвижных точек. Отметим, что размерность любого такого H-модуля над полем $GF(7)$ чётна. Действительно, если n — размерность такого модуля, то число $7^n - 1$ должно делиться на 4, поэтому число n чётное.

Рассмотрим сначала случай, когда $H \simeq H_1$. В группе H содержится подгруппа $K = \langle a^2, b, s \rangle$ индекса 2, изоморфная прямому произведению группы кватернионов порядка 8 и циклической группы порядка 3. Для группы K существует представление размерности 2 над полем $GF(7)$, задаваемое матрицами

$$[a^2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ [b] = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ [s] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через W K-модуль, на котором группа K действует в соответствии с данными матрицами. Легко проверить, что K не имеет неподвижных точек на W. Рассуждения, аналогичные приведённым в конце предыдущего абзаца, показывают, что размерность любого K-модуля над полем $GF(7)$, на котором K действует без неподвижных точек, чётна. Следовательно, модуль W неприводим. Рассмотрим H-модуль V размерности 4, индуцированный с модуля W. Непосредственно проверяется, что группа H действует на V в соответствии с матрицами

$$[a] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ [b] = \begin{pmatrix} 5 & 4 & \cdot & \cdot \\ 4 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & 2 \\ \cdot & \cdot & 2 & 3 \end{pmatrix},\ [s] = \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что модуль V неприводим. Непосредственно проверяется, что группа H не имеет неподвижных точек на V, поэтому размерность любого подмодуля модуля V чётна. Покажем, что в V нет подмодулей размерности 2. Действительно, если они есть, то группа H изоморфна некоторой подгруппе группы $GL_2(7)$. Поскольку в $GL_2(7)$ все элементы порядка 4 сопряжены, можно считать, что образом элемента a^2 порядка 4 из H служит матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что единственными элементами порядка 3 из $GL_2(7)$, которые централизуют данную матрицу, являются матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Но они лежат в центре группы $GL_2(7)$, а в группе H элементы порядка 8 не перестановочны с элементами порядка 3. Следовательно, H не может быть изоморфна подгруппе группы $GL_2(7)$.

Таким образом, модуль V неприводим. Поскольку 7 не делит порядок группы H_1, брауэров характер соответствующего представления группы H_1, записанного над алгебраическим замыканием поля порядка 7, совпадает с некоторым обыкновенным характером. В таблице характеров группы H_1 (её можно вычислить, например, с помощью GAP [40]) существует лишь один характер χ, такой, что на соответствующем модуле группа H_1 не имеет неподвижных точек. Степень этого характера равна 4. Отсюда следует, что модуль V абсолютно неприводим и, с точностью до изоморфизма, является единственным неприводимым H_1-модулем над полем $GF(7)$, на котором H_1 действует без неподвижных точек. Итак, группа F как H_1-модуль является прямой суммой H_1-модулей, изоморфных V.

Теперь рассмотрим модуль V как H_0-модуль. По лемме 1.2.5, если он приводим, то является прямой суммой неприводимых модулей. В этом случае V может быть только суммой двух подмодулей размерности 2. Однако, как уже было установлено, в группе $GL_2(7)$ среди элементов порядка 3 элементы порядка 4 централизуют лишь матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, а они централизуют и элементы порядка 8. Отсюда получаем, что V как H_0-модуль также неприводим.

Итак, действие групп H_1 и H_0 на F задано. Остаётся лишь отметить, что единственной с точностью до изоморфизма $\omega(U_3(3))$-критической группой такого типа является группа $V \rtimes H_0$.

§ 7.3. Удвоенные группы Фробениуса, изоспектральные $U_3(3)$

В [28] описана структура таких групп и приведены примеры. Наша цель — доказать, что группы из этих примеров являются критическими относительно $\omega(U_3(3))$.

Рассмотрим первый пример из [28], т. е. $G = AH$, где H — группа Фробениуса порядка 21, A — группа из следующей леммы.

Лемма 7.3.1 ([28, Лемма 4]). *Пусть группа A порождена элементами $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ со следующими соотношениями:*

$$\begin{gathered} x_i^4 = y_i^4 = 1,\ i \in \{1,2,3\}, \\ [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 1,\ i,j \in \{1,2,3\}, \\ [x_i, y_i] = 1,\ i \in \{1,2,3\}, \\ [x_i, y_j][x_j, y_i] = 1,\ 1 \le i < j \le 3, \\ [[x_i, y_j], x_k] = [[x_i, y_j], y_k] = 1,\ i,j,k \in \{1,2,3\}. \end{gathered}$$

Тогда выполняются следующие утверждения.

1. *Ступень нильпотентности группы A равна 2, и A — 2-группа.*
2. *Подгруппы $X = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ и $Y = \langle y_1, y_2, y_3\rangle$ изоморфны прямому произведению трёх циклических групп порядка 4, и $A = \langle X, Y\rangle$.*
3. *Коммутант Z группы A порождается элементами $z_1 = [x_1, y_2]$, $z_2 = [x_1, y_3]$ и $z_3 = [x_2, y_3]$ порядка 4 и изоморфен прямому произведению трёх циклических групп порядка 4.*
4. *Порядок A равен 2^{18}.*
5. *Экспонента A равна 8.*

Докажем, используя лемму 1.2.4, что в этом случае группа G критическая. Предположим, что M — максимальная подгруппа группы G и $\omega(M) = \omega(G)$. Поскольку $\omega(G)$ содержит 3 и 7, имеем $AM = G$, т. е. M изоморфна полупрямому произведению $M_1 \rtimes H$, где M_1 — максимальная H-инвариантная подгруппа группы A.

Введём обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по подгруппе Фраттини $\Phi(A)$ группы A. Тогда $\overline{A}$ — прямая сумма двух неприводимых H-модулей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, а $\overline{M_1}$ является максимальной подгруппой группы $\overline{A}$. Централизатор элемента $s \in H$ порядка 3 в группе $\overline{A}$ содержит ровно 3 ненулевых элемента: $\overline{x_1}$, $\overline{y_1}$ и $\overline{x_1} + \overline{y_1}$. Поэтому $\overline{M_1}$ — одна из следующих групп:

$$\langle \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\rangle,\ \langle \overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}\rangle,\ \langle \overline{x_1} + \overline{y_1}, \overline{x_2} + \overline{y_2}, \overline{x_3} + \overline{y_3}\rangle.$$

С помощью [40] проверяется, что полные прообразы этих групп в A не содержат элементов порядка 8; противоречие. Следовательно, в G нет изоспектральных ей максимальных подгрупп.

Теперь предположим, что S — минимальная нормальная подгруппа группы G, такая, что $\omega(G/S) = \omega(G)$. Тогда S элементарная абелева и является подгруппой группы Z, поэтому $S = \langle z_1^2, z_2^2, z_3^2\rangle$. Но в этом случае группа G/S не содержит элементов порядка 8; противоречие. Таким образом, группа G критическая.

Рассмотрим второй пример из [28], т. е. $G = AH$, где A — группа порядка 2^{18}, а H — группа Фробениуса порядка 42. Воспользуемся построением этой группы, описанным в следующей лемме.

Лемма 7.3.2 ([28, замечание после теоремы 3]). *Пусть W — векторное пространство размерности 12 над полем $GF(2)$, a_1, b и c — линейные преобразования W, матрицы которых в базисе $\{v_1, v_2, \ldots, v_{12}\}$ имеют вид*

$$
[a_1] = \begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}, \quad
[b] = \begin{pmatrix}
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot
\end{pmatrix},
$$

$$
[c] = \begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Пусть $L = \langle a_1, b, c\rangle$. *Тогда*:

1) *порядки* a_1, b *и* c *равны, соответственно,* 2, 7 *и* 6;
2) *подгруппа* $K = \langle b, c\rangle$ *является группой Фробениуса порядка* 42;
3) *подгруппа* $A_1 = \langle a_1^K\rangle$ *является элементарной абелевой группой порядка* 2^6;
4) *группы* L *и* $W \leftthreetimes L$ *являются удвоенными группами Фробениуса и* $\omega(W \leftthreetimes L) = \omega(U_3(3))$.

Зафиксируем обозначения из леммы 7.3.2 до конца параграфа. В этих обозначениях $A = W \leftthreetimes A_1$ и $H = K$. Докажем, что группа G является критической, вновь пользуясь леммой 1.2.4.

Пусть $M < G$ — максимальная подгруппа, изоспектральная G. Сначала покажем, что $AM = G$. Если $AM < G$, то $A \leq M$. Кроме того, M содержит элементы порядков 3 и 7, поэтому индекс G по M равен 2, и можно считать, что $c^2 \in M$ и $c \notin M$. Но тогда в M нет элементов порядка 8; противоречие. Итак, M изоморфна полупрямому произведению $M_1 \leftthreetimes H$, где M_1 — максимальная H-инвариантная подгруппа группы A.

Рассмотрим в A подгруппу $V = \langle v_7, v_8, \ldots, v_{12}\rangle$. Из строения матрицы $[a_1]$ видно, что V нормальна в A и факторгруппа A/V является элементарной абелевой. Поэтому $\Phi(A) \leq V$. Кроме того, из теоремы 1 из [28] следует, что порядок $\Phi(A)$ делится на 2^6, поэтому $\Phi(A)$ совпадает с V.

Пусть $\overline{X}$ обозначает образ X при факторизации по $\Phi(A)$. Тогда $\overline{A}$ является прямой суммой неприводимых H-модулей $\overline{W}$ и $\overline{A_1}$. Для $i \in \{2, 6\}$ положим $a_i = a_{i-1}^b$. Легко проверить, что H действует на базисах $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_6}\}$ и $\{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_6}\}$ одинаково. Централизатор элемента c в группе $\overline{A}$ содержит ровно три ненулевых элемента: $\overline{v_1}$, $\overline{a_1}$ и $\overline{v_1} + \overline{a_1}$. Поэтому $\overline{M_1}$ — одна из следующих групп:

$$\langle \overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_6} \rangle,\ \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_6} \rangle,\ \langle \overline{v_1} + \overline{a_1}, \overline{v_2} + \overline{a_2}, \ldots, \overline{v_6} + \overline{a_6} \rangle.$$

Непосредственно проверяется, что полные прообразы этих групп являются элементарными абелевыми, откуда получаем, что в M нет элементов порядка 8; противоречие. Следовательно, в G нет изоспектральных ей максимальных подгрупп.

Теперь предположим, что S — минимальная нормальная подгруппа группы G, такая, что $\omega(G/S) = \omega(G)$. Тогда $S \leq W$, и из теоремы 1 из [28] следует, что порядок S равен 2^6. Получаем, что $S = \Phi(A)$, откуда следует, что G/S элементарная абелева. Поскольку в этом случае G/S не содержит элементов порядка 8, данное противоречие завершает доказательство этой части теоремы.

§ 7.4. Расширения с помощью $PGL_2(7)$, изоспектральные $U_3(3)$

Отметим, что $\mu(PGL_2(7)) = \{6, 7, 8\}$, $\mu(L_2(7)) = \{3, 4, 7\}$ (см. [37]). Кроме того, положим $H = PGL_2(7)$ и $K \leq H$, $K \simeq L_2(7)$, и зафиксируем эти обозначения до конца параграфа.

Пусть G — группа, изоспектральная $U_3(3)$, содержащая нормальную подгруппу N, для которой $G/N \simeq H$.

Лемма 7.4.1. *Выполняются следующие утверждения.*

1. $H \simeq \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^2 = (ab)^7 = (ac)^2 = (bc)^2 = [a, b]^4 = 1 \rangle$.
2. *Силовские 2-подгруппы группы H изоморфны группе D_{16}, и каждая из них порождается некоторыми инволюциями $x \in K$ и $y \in H \backslash K$.*
3. *С точностью до подобия существует единственный неприводимый H-модуль V над полем $GF(2)$, такой, что элементы порядка 7 из H действуют на V без неподвижных точек. Его размерность равна 6, и действие H на V при подходящем выборе базиса определяется следующими матрицами:*

$$[a] = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix},\ [b] = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},\ [c] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

4. $\omega(V \rtimes H) = \omega(U_3(3))$.

5. *Любое расширение* V *с помощью* H, *изоспектральное* $U_3(3)$, *расщепляется, т. е. является полупрямым произведением* $V \rtimes H$.
6. *Группа* $V \rtimes H$ *критическая относительно* $\omega(U_3(3))$.

Доказательство. Утверждения 1 и 3 проверяются с помощью [40, 57].

2. Из [37] известно, что в K и $H \backslash K$ ровно по одному классу сопряжённых инволюций. Пусть $y \in H \backslash K$ — инволюция, S — силовская 2-подгруппа группы H, содержащая y, а $D \leq S$ — силовская 2-подгруппа группы K. Таким образом, D изоморфна группе D_8 и индекс группы S по D равен 2.

Следовательно, группа S является полупрямым произведением $D \rtimes \langle y \rangle$. Пусть $D \simeq \langle r, s \mid r^2 = s^2 = (rs)^4 = 1 \rangle$. Если $r^y = r$ или $r^y = r^s$, то $\mu(S) = \{4\}$, что невозможно. Поэтому $r^y = s$ или $r^y = s^r$. В первом случае $(ry)^2 = rr^y = rs$, во втором случае $(ry)^2 = rr^y = rrsr = sr = (rs)^{-1}$. Так или иначе, $|ry| = 8$. Таким образом, $S = \langle r, y \rangle \simeq D_{16}$.

4. Поскольку элементы порядка 7 из H действуют на V без неподвижных точек и $\dim V < 8$, множество $\mu(V \rtimes H)$ содержит 7 и 8. Докажем, что $12 \in \mu(V \rtimes H)$. Пусть x — элемент порядка 6 из H, v — произвольный элемент из V. Непосредственно проверяется, что

$$(vx^{-1})^6 = vv^x v^{x^2} v^{x^3} v^{x^4} v^{x^5}.$$

Элемент справа лежит в группе V. Запишем его в аддитивной форме (это можно сделать, поскольку на V можно смотреть как на H-модуль):

$$v + v^x + v^{x^2} + v^{x^3} + v^{x^4} + v^{x^5}.$$

Далее, зафиксируем какой-нибудь базис и перейдём к координатной записи в этом базисе:

$$[v](E + [x] + [x]^2 + [x]^3 + [x]^4 + [x]^5),$$

где $[v]$ — координаты вектора v в выбранном базисе, E — единичная матрица, $[x]$ — матрица преобразования x в выбранном базисе. Можно проверить (например, с помощью [40]), что матрица $E + [x] + [x]^2 + [x]^3 + [x]^4 + [x]^5$ отлична от нуля, следовательно, существует $v_1 \in V$, такой, что

$$[v_1](E + [x] + [x]^2 + [x]^3 + [x]^4 + [x]^5) \neq 0.$$

Таким образом, $(v_1 x^{-1})^6 = v_2 \in V$, где $|v_2| = 2$, поэтому порядок $v_1 x^{-1}$ равен 12.

Наконец, с помощью [40] проверяется, что если y — элемент порядка 8 из H, то матрица $E + [y] + [y]^2 + [y]^3 + [y]^4 + [y]^5 + [y]^6 + [y]^7$ нулевая, откуда следует, что в группе $V \rightthreetimes H$ нет элементов порядка 16.

5. Пусть G — группа, изоспектральная $U_3(3)$, в которой есть нормальная элементарная абелева подгруппа V, для которой $G/V \simeq H$. Пусть T — полный прообраз группы K в G, т. е. индекс G по T равен 2, $V \leq T$. Мы хотим доказать, что G является расщепляемым расширением группы V с помощью $G/V \simeq H$. Для этого воспользуемся леммой 1.2.4, показав, что группа V дополняется в силовской 2-подгруппе группы G.

Пусть S — подгруппа порядка 7 группы G. Докажем, что $V \cap \boldsymbol{N}_G(S) = 1$. Пусть $g \in V$ нормализует S. Тогда $g^{-1}sg \in S$ для любого $s \in S$. С другой стороны, $V \trianglelefteq G$, поэтому $s^{-1}g^{-1}s \in V$. Тогда $s^{-1}g^{-1}sg \in S \cap V = 1$, следовательно, $g^{-1}sg = s$. Если g нетривиален, то $|sg| = 14$, что невозможно.

Отсюда, пользуясь [37], получаем, что $|\boldsymbol{N}_G(S)| = 7 \cdot 6$, а $|\boldsymbol{N}_T(S)| = 7 \cdot 3$, следовательно, в $G \backslash T$ есть инволюция y.

Пусть запись $\overline{X}$ обозначает образ X при факторизации по V. Тогда $\overline{y}$ — инволюция из $H \backslash K$. Поскольку в K и $H \backslash K$ ровно по одному классу сопряжённых инволюций, найдётся инволюция $\overline{r} \in K$, для которой $|\overline{yr}| = 8$ и $\langle \overline{y}, \overline{r} \rangle \simeq D_{16}$.

Теперь покажем, что в $T \backslash V$ также есть инволюция. Возьмём элемент $\overline{k}$ порядка 8 из H. Так как в $16 \notin \omega(U_3(3))$, порядок k также равен 8. Элемент k^4 содержится в T, так как $|G : T| = 2$. Но он не содержится в V, поскольку тогда порядок элемента $\overline{k}$ был бы равен 4.

Обозначим $x = k^4$. Тогда $\overline{x} \in K$, значит, существует элемент $\overline{g} \in K$, такой, что $\overline{x}^{\overline{g}} = \overline{r}$. Пусть g — прообраз $\overline{g}$. Тогда $x^g \in T \backslash V$ — инволюция и $\overline{x^g} = \overline{r}$. Имеем $\langle y, x^g \rangle \simeq D_{16}$ и $\langle y, x^g \rangle \cap V = 1$, поэтому V дополняется в силовской 2-подгруппе группы G.

6. Пусть G_1 — секция в $V \rightthreetimes H$ и $\omega(G_1) = \omega(V \rightthreetimes H)$. Поскольку V — неприводимый H-модуль и K — единственная нормальная подгруппа в H, группа G_1 имеет вид $V \rightthreetimes H_1$, где $H_1 \leq H$ и порядок H_1 делится на 7. В H есть с точностью до сопряжения всего две максимальные подгруппы, содержащие элемент порядка 7. Это K и $\boldsymbol{N}_H(S)$, где S — подгруппа порядка 7 группы H. Если $H_1 = K$, то G_1 не содержит элементов порядка 12; противоречие. Если $G_1 = \boldsymbol{N}_H(S)$, то $|G_1| = 7 \cdot 6$, в этом случае G_1 не содержит элементов по-

рядка 8, что также противоречит предположению, что $\omega(G_1) = \omega(V \leftthreetimes H)$. Поэтому $H_1 = H$ и $G_1 = V \leftthreetimes H$. $\square$

Итак, пусть G — группа, изоспектральная $U_3(3)$, содержащая нормальную 2-подгруппу N, для которой $G/N \simeq PGL_2(7)$. Пусть, кроме того, G критическая. Рассмотрим в N G-главный ряд

$$N > V_1 > V_2 > V_3 > \cdots > V_k > 1.$$

Тогда факторгруппа N/V_1 является неприводимым H-модулем, поэтому из леммы 7.4.1 следует, что N/V_1 изоморфна модулю V из леммы 7.4.1. Следовательно, группа G/V_1 изоморфна полупрямому произведению $V \leftthreetimes H$. Это полупрямое произведение, в свою очередь, изоспектрально $U_3(3)$, поэтому из критичности G следует, что $V_1 = 1$ и $G = V \leftthreetimes H$.

Теперь опустим условие критичности группы G и докажем, что и в общем случае подгруппа N дополняется в группе G. Рассмотрим тот же G-главный ряд. Выше мы доказали, что $G/V_1 \simeq V \leftthreetimes H$, поэтому существует подгруппа H_1 группы G, такая, что $H_1/V_1 \simeq H$. Далее, факторгруппа H_1/V_2 тоже изоморфна $V \leftthreetimes H$, следовательно, существует подгруппа H_2 группы H_1, такая, что $H_2/V_2 \simeq H$. Продолжая этот процесс аналогично, получим подгруппу H_{k+1} группы H_k, изоморфную $PGL_2(7)$. Таким образом, подгруппа N дополняется в G подгруппой H_{k+1}.

§ 7.5. Расширения с помощью $L_2(7)$, изоспектральные $U_3(3)$

Пусть G — конечная группа, изоспектральная $U_3(3)$, содержащая нормальную подгруппу N, для которой $G/N \simeq L_2(7)$. С помощью [57] проверяется, что существует лишь два неприводимых представления группы $L_2(7)$ над полем $GF(2)$, таких, что элементы порядка 7 из $L_2(7)$ на соответствующем модуле не имеют нетривиальных неподвижных точек. Первое представление является естественным представлением для $GL_3(2) \simeq L_2(7)$, второе является контраградиентным к нему.

Пусть s — элемент порядка 3 из G. Поскольку $12 \in \omega(G)$ и $24 \notin \omega(G)$, централизатор элемента s в группе N должен иметь экспоненту 4.

Существует по крайней мере два примера групп такого типа. Обе группы являются совершенными, т. е. совпадают со своими коммутантами. Подробное описание строения этих групп приведено на страницах 177–178 в [47].

Отметим лишь, что обе группы являются расширениями прямого произведения трёх циклических групп порядка 4 с помощью $L_2(7)$, однако одно из этих расширений расщепляемое, другое — нерасщепляемое. С помощью предложения 1.2.9 проверяется (например, используя вычисления в GAP [40]), что эти группы являются критическими относительно $\omega(U_3(3))$.

§ 7.6. Расширения с помощью $U_3(3)$ и $\mathrm{Aut}\, U_3(3)$, изоспектральные $U_3(3)$

Для каждой из групп $U_3(3)$ и $\mathrm{Aut}\, U_3(3)$ существует единственное неприводимое представление над полем $GF(2)$, такое, что элементы порядка 7 на соответствующем модуле не имеют нетривиальных неподвижных точек (см. [57]). В обоих случаях порядок модуля равен 2^6. Обозначим данный $\mathrm{Aut}\, U_3(3)$-модуль как V. Поскольку в $\mathrm{Aut}\, U_3(3)$ есть подгруппа, изоморфная $U_3(3)$, модуль V является также неприводимым модулем для $U_3(3)$. Рассмотрим следующие матрицы над полем $GF(2)$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \ d = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle a, b\rangle \simeq U_3(3)$, $\langle c, d\rangle \simeq \mathrm{Aut}\, U_3(3)$, и действие групп $U_3(3)$ и $\mathrm{Aut}\, U_3(3)$ на V определяется как естественное действие соответствующих групп матриц. С помощью [40] проверяется, что $\omega(V \rtimes U_3(3)) = \omega(V \rtimes \mathrm{Aut}\, U_3(3))) = \omega(U_3(3))$.

Покажем, что группа $U_3(3)$ критическая. Поскольку 7^2 не делит порядок группы $U_3(3)$, достаточно рассмотреть максимальные подгруппы в $U_3(3)$, порядок которых делится на 7. С помощью [37] проверяется, что все такие подгруппы изоморфны группе $L_2(7)$, а $\omega(L_2(7)) \neq \omega(U_3(3))$.

Осталось отметить, что если группа G является расширением N с помощью $U_3(3)$ или $\mathrm{Aut}\, U_3(3)$, то G содержит секцию, изоморфную $U_3(3)$. Поэтому $U_3(3)$ является единственной с точностью до изоморфизма $\omega(U_3(3))$-критической группой такого типа. Теорема доказана.

8. Группы, изоспектральные группам $S_4(q)$

Теорема 8. *Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе $S_4(q)$, где q является степенью простого числа p и $q > 3$. Тогда в G существует нильпотентная нормальная подгруппа K, такая, что $P \leq G/K \leq \operatorname{Aut} P$, где группа P изоморфна $S_4(q)$ или $L_2(q^2)$. Подгруппа K тривиальна, если $P \simeq S_4(q)$, и является p-группой, если $P \simeq L_2(q^2)$. В последнем случае группа K нетривиальна при $p > 2$. Факторгруппа G/K является расширением группы P посредством полевого автоморфизма τ порядка 2^m, $m \geq 0$.*

§ 8.1. Предварительные результаты

В [19] доказано, что если P — конечная простая группа с несвязным графом простых чисел, то $|\mu_j(P)| = 1$ для $2 \leq j \leq s(P)$. В дальнейшем через $n_j = n_j(P)$ мы будем обозначать единственный элемент из $\mu_j(P)$, $j \geq 2$.

Предложение 8.1.1. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом $GK(G)$ и для некоторой нильпотентной нормальной $\pi_1(G)$-подгруппы K группы G факторгруппа G/K проста. Тогда для любой подгруппы H группы G группа $K\boldsymbol{C}_H(K)/K$ тривиальна.*

Доказательство. Положим $G/K = P$. Пусть $K\boldsymbol{C}_H(K)/K > 1$ для некоторой подгруппы H группы G. Тогда $1 < K\boldsymbol{C}_G(K)/K \trianglelefteq P$ и, следовательно, $K\boldsymbol{C}_G(K)/K = P$ и $K\boldsymbol{C}_G(K) = G$. Пусть $g \in G$ — элемент порядка $n_2(G)$. Поскольку K — $\pi_1(G)$-группа, можно считать, что $g \in \boldsymbol{C}_G(K)$. Но тогда компоненты $\pi_1(G)$ и $\pi_2(G)$ связны в $GK(G)$; противоречие. □

§ 8.2. Доказательство теоремы 8

Обозначим через L группу $S_4(q)$, где $q = p^n$, p простое, $n \geq 1$, и зафиксируем эти обозначения до конца доказательства теоремы.

Лемма 8.2.1. *Выполняются следующие утверждения.*

1. *Если $p = 2$, то спектр группы L состоит из всех делителей чисел*

$$4,\ p(q-1),\ p(q+1),\ q^2-1,\ q^2+1.$$

В частности, $s(L) = 2$ *и* $n_2(L) = q^2 + 1$.

2. *Если* $p > 3$ *то спектр группы* L *состоит из всех делителей чисел*

$$p(q-1),\ p(q+1),\ (q^2-1)/2,\ (q^2+1)/2.$$

Если $p = 3$, *то, кроме указанных выше чисел, спектр группы* L *содержит число* 9.

В частности, $s(L) = 2$ *и* $n_2(L) = (q^2+1)/2$.

Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе L. По лемме 8.2.1 граф $GK(G)$ несвязен, поэтому из леммы 1.2.1 и [2] следует, что существует неабелева простая группа P, такая, что $P \leq G/K \leq \operatorname{Aut} P$ для некоторой нильпотентной нормальной $\pi_1(G)$-подгруппы K группы G, $s(P) \geq 2$ и $n_j(P) = n_2(L)$ для некоторого $2 \leq j \leq s(P)$. Обозначим число $n_2(L)$ через m и зафиксируем это обозначение до тех пор, пока об этом не будет сказано иначе.

Сначала покажем, что группа P изоморфна одной из групп $S_4(q)$, $L_2(q^2)$. В силу теорем 1 и 2 из [9] группа P не может быть знакопеременной или спорадической, а также группой Титса ${}^2F_4(2)'$. Кроме того, если P является группой лиева типа в характеристике p, желаемое утверждение следует из теоремы 3 из [9]. Таким образом, в дальнейшем мы можем предполагать, что P — группа лиева типа в характеристике, отличной от p.

Рассмотрим случай $p = 2$. Спектр группы L не содержит чисел $4t$ при $t > 1$, поэтому из [29, лемма 8] и озвученных в предыдущем абзаце сведений следует, что если P не является одной из групп $S_4(q)$, $L_2(q^2)$, то P является группой ${}^2G_2(3^{2l+1})$, $l \geq 1$. В этом случае

$$n_2(P) = 3^{2l+1} + 3^{l+1} + 1,\ n_3(P) = 3^{2l+1} - 3^{l+1} + 1.$$

Ясно, что ни одно из этих чисел не представимо в виде $2^{2n}+1$. Итак, P может быть только группой $S_4(q)$ или $L_2(q^2)$.

Если $p = 3$, то желаемый результат следует из [24, лемма 14]. Таким образом, в дальнейшем мы будем предполагать, что $p \geq 5$. Нам пригодится следующая

Лемма 8.2.2. *Выполняются следующие утверждения.*

1. *Наименьшее общее кратное чисел из* $\omega_1(L)$ *равно* $p(m-1)$.
2. *Пусть* N *— наименьшее общее кратное чисел из* $\omega(P)\backslash\omega_j(P)$, *где* $n_j(P) = m$. *Тогда* $N/n_j(P) < p$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Поскольку

$$\omega(P) \backslash \omega_j(P) \subseteq \omega_1(L),$$

имеем

$$N/n_j(P) = N/m \leq p(m-1)/m < p.$$

$\square$

Все конечные простые группы с несвязным графом простых чисел перечислены в [24, табл. 1a–1c]. Для каждой группы P в этих таблицах приведены числа $n_j(P)$, $j \geq 2$. Мы рассмотрим по отдельности каждую группу из этих таблиц, за исключением упомянутых выше знакопеременных, спорадических групп, а также группы ${}^2F_4(2)'$. Начнём мы с конечных простых групп P, для которых $s(P) = 2$.

Предположим, что $P = L_r(u)$, где r — нечётное простое число и $(r, u) \neq (3, 2), (3, 4)$. Имеем $m = \dfrac{u^r - 1}{(u-1)(r, u-1)}$. В множестве $\omega_1(P)$ содержатся числа $(u^{r-1} - 1)/(r, u-1)$ и $u^{r-2} - 1$ (см. [3]). Их наименьшее общее кратное делится на $\dfrac{(u^{r-1}-1)(u^{r-2}-1)}{(u-1)(r, u-1)}$, поэтому по лемме 8.2.2 имеем

$$\frac{(u^{r-1}-1)(u^{r-2}-1)}{u^r - 1} < p,$$

откуда $u^{r-3} \leq p$. Используя данное неравенство в равенстве $n_2(P) = m$, где $m = (p^{2n}+1)/2$, получаем $r \leq 3 + 4/(2n-1)$, причём данное неравенство строгое при $u > 2$. Таким образом, $r \leq 7$ при $u = 2$ и $r \leq 5$ в остальных случаях. Отметим, что случай $u = 2$ невозможен, поскольку ни одно из чисел $2^r - 1$, $r \leq 7$, не представимо в виде $(q^2+1)/2$. Итак, $u > 2$ и $r \leq 5$.

Допустим, что $r = 5$. В предыдущем абзаце мы получили неравенство $u^2 \leq p$, откуда $u^2 - 1 < p$. Предположим, что $(5, u-1) = 1$. Тогда $m = u^4 + u^3 + u^2 + u + 1$. По лемме 8.2.2 каждый элемент из $\omega_1(P)$ делит $p(m-1)$. Имеем

$$u^2 - 1 \mid p(m-1) = p(u^4 + u^3 + u^2 + u).$$

Если $u > 3$, получаем $p \mid u^2 - 1$, что противоречит неравенству, полученному ранее. В свою очередь, случай $u = 3$ невозможен, поскольку тогда $q^2 = 241$, что невозможно.

Предположим теперь, что $(5, u-1) = 5$. В этом случае $m = (u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)/5$ и, следовтельно,

$$u^2 - 1 \mid p(u^4 + u^3 + u^2 + u - 4).$$

Опять имеем $p \mid u^2 - 1$. Таким образом, случай $r = 5$ невозможен.

Перейдём к случаю $r = 3$. Допустим, что $(3, u-1) = 1$. Тогда $m = u^2 + u + 1$. Каждый элемент из $\omega_1(P)$ делит число $p(m-1)$, которое, в свою очередь, делит $q^2(m-1)$. Имеем

$$u^2 - 1 \mid q^2(m-1) = (2u^2 + 2u + 1)(u^2 + u),$$

откуда $u^2 - 1 \mid 5(u+1)$ и, следовательно, $u - 1 \mid 5$. Таким образом, $u = 3$, откуда $m = 13$ и $q = 5$. В этом случае $P = L_3(3)$ и $L = S_4(5)$. Однако, спектр группы $L_3(3)$ содержит число 8, которого нет в спектре группы $S_4(5)$. Итак, данный случай невозможен.

Наконец, предположим, что $(3, u-1) = 3$. Тогда $m = (u^2 + u + 1)/3$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем

$$u^2 - 1 \mid (2u^2 + 2u - 1)(u^2 + u - 2),$$

и следовательно, $u^2 - 1 \mid u - 1$, что невозможно. Таким образом, P не является группой $L_r(u)$, где r — нечётное простое число и $(r, u) \neq (3, 2), (3, 4)$.

Пусть $P = L_{r+1}(u)$, где r нечётное простое и $u - 1$ делит $r + 1$. Тогда $m = (u^r - 1)/(u - 1)$. В $\omega_1(P)$ содержатся числа $(u^{r+1} - 1)/(u-1)^2$ и $u^{r-1} - 1$. Их наименьшее общее кратное делится на $\dfrac{(u^{r+1} - 1)(u^{r-1} - 1)}{(u-1)^2(u^2 - 1)}$, поэтому по лемме 8.2.2 получаем $u^{r-3} \leq p$, откуда $r \leq 7$. Если $r = 7$, то $u \in \{2, 3, 5, 9\}$. Если $r = 5$, то $u \in \{2, 3, 4, 7\}$. Наконец, если $r = 3$, то $u \in \{2, 3, 5\}$. Из равенства $m = n_2(P)$ следует, что $(r, u) = (3, 3)$. В этом случае $P = L_4(3)$ и $L = S_4(5)$. Однако спектр группы $L_4(3)$ содержит число 9, которого нет в спектре группы $S_4(5)$. Таким образом, данный случай невозможен.

Допустим, что $P = U_r(u)$, где r — нечётное простое число. Тогда $m = \dfrac{u^r + 1}{(u+1)(r, u+1)}$. Множество $\omega_1(P)$ содержит числа $(u^{r-1} - 1)/(r, u+1)$ и $u^{r-2} + 1$. Рассуждая, как раньше, используя лемму 8.2.2, получаем $u^{r-3} < p$ и, следовательно, $r \leq 5$. Отметим, что в этом случае $u > 2$, поскольку ни одно из чисел $(2^r + 1)/3$, $r \leq 5$, не представимо в виде $(q^2 + 1)/2$.

Рассмотрим случай $r = 5$. В прошлом абзаце мы получили неравенство $u^2 < p$, откуда $u^2 - 1 < p$. Допустим, что $(5, u + 1) = 1$. Тогда $m = u^4 - u^3 + u^2 - u + 1$. По лемме 8.2.2 имеем

$$u^2 - 1 \mid p(m - 1) = p(u^4 - u^3 + u^2 - u).$$

Поскольку $u > 2$, получаем $p \mid u^2 - 1$, что противоречит неравенству, полученному ранее. Если $(5, u + 1) = 5$, то $m = (u^4 - u^3 + u^2 - u + 1)/5$, и, следовательно,

$$u^2 - 1 \mid p(u^4 - u^3 + u^2 - u - 4).$$

Вновь получаем $p \mid u^2 - 1$. Итак, случай $r = 5$ невозможен.

Пусть $r = 3$, и допустим, что $(3, u+1) = 1$. Тогда $m = u^2-u+1$. Используя лемму 8.2.2, получаем

$$u^2 - 1 \mid q^2(m - 1) = (2u^2 - 2u + 1)(u^2 - u),$$

и, следовательно, $u^2 - 1 \mid 5(u - 1)$ и $u + 1 \mid 5$, что возможно лишь при $u = 4$. В этом случае $P = U_3(4)$ и $L = S_4(5)$.

Докажем, что данный случай невозможен. Отметим, что в этом случае $\mu(L) = \{12, 13, 20, 30\}$ и $\mu(P) = \{4, 10, 13, 15\}$. Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе $S_4(5)$, и $P \leq G/K \leq \operatorname{Aut} P$ для некоторой нильпотентной нормальной $\{2, 3, 5\}$-подгруппы K группы G. Из [37] следует, что если $P < H \leq \operatorname{Aut} P$, то H содержит элементы порядка 8. Следовательно, $P = G/K$.

Предположим, что $3 \in \pi(K)$. Пусть $K = P \times Q$, где P — силовская 3-подгруппа группы K. Введём обозначение: $\overline{X}$ — образ X при факторизации по Q. Тогда $\overline{K}$ является 3-группой и $\overline{G}/\overline{K} \simeq P$. Пусть a — элемент порядка 13 из P. Тогда нормализатор $N = \boldsymbol{N}_P(\langle a\rangle)$ является группой Фробениуса с ядром порядка 13 и дополнением порядка 3. Пусть F — полный прообраз группы N в $\overline{G}$. Тогда из леммы 1.2.8 следует, что F содержит элемент порядка 9, что противоречит изоспектральности групп G и L.

Таким образом, порядок группы K не делится на 3. Поскольку $12 \in \omega(G)$, получаем, что $2 \in \pi(K)$ и существует элемент $x \in G$ порядка 3, который централизует элемент $y \in K$ порядка 4. Допустим, что некоторый элемент порядка 3 из G централизует элемент порядка 5 из K. Поскольку в P все элементы порядка 3 сопряжены (см. [37]), получаем, что элемент x также централизует некоторый элемент $z \in P$ порядка 5. Поскольку K нильпотентна, получаем, что элемент xyz имеет порядок 60; противоречие.

Следовательно, элемент порядка 30 из G является прообразом элемента порядка 15 из P. Отсюда следует, что существует G-главный фактор W силовской 2-подгруппы группы K, такой, что P фиксирует нетривиальную точку в W. Мы можем смотреть на W как на абсолютно неприводимый P-модуль. Поскольку $\omega(W \leftthreetimes P) \subseteq \omega(G)$, элементы порядка 13 из P не фиксируют нетривиальных точек в W. В [57] дано полное описание абсолютно неприводимых представлений группы P в характеристике 2, и непосредственно проверяется (например, с помощью системы GAP [40]), что не существует абсолютно неприводимых P-модулей W в характеристике 2, таких, что элемент порядка 15 из P фиксирует нетривиальную точку в W, а элементы порядка 13 из P не фиксируют нетривиальных точек в W. Итак, данный случай невозможен, т. е. $P \neq U_3(4)$.

Таким образом, в случае $P = U_r(u)$, где r нечётное простое, остаётся рассмотреть случай $r = 3$ и $(3, u+1) = 3$. В этом случае $m = (u^2 - u + 1)/3$. Рассуждая, как раньше, получаем

$$u^2 - 1 \mid (2u^2 - 2u - 1)(u^2 - u - 2),$$

и следовательно, $u^2 - 1 \mid u + 1$, что невозможно. Итак, P не является группой $U_r(u)$, где r нечётное простое.

Допустим, что $P = U_{r+1}(u)$, где r нечётное простое, $u + 1$ делит $r + 1$ и $(r, u) \neq (3, 3), (5, 2)$. В этом случае $m = (u^r + 1)/(u + 1)$. Множество $\omega_1(P)$ содержит числа $(u^{r+1}-1)/(u+1)^2$ и $u^{r-1}-1$. Как и ранее, из леммы 8.2.2 получаем, что $u^{r-4} < p$, откуда $r \leq 7$. Таким образом, $(r, u) \in \{(5, 5), (7, 3), (7, 7)\}$. Несложно проверить, что ни в одном из этих случаев число $(u^r + 1)/(u + 1)$ не представимо в виде $(q^2 + 1)/2$.

Случай $P = U_4(2)$ невозможен, поскольку $n_2(U_4(2)) = 5$, а $m \geq 13$.

Случай $P = O_{2k+1}(u)$, где $k = 2^l \geq 4$ и u нечётно, невозможен, поскольку в этом случае $n_2(P) = (u^k + 1)/2$, поэтому равенство $n_2(P) = m$ возможно, только когда P — группа лиева типа в характеристике p, что противоречит нашему первоначальному предположению.

Пусть $P = O_{2r+1}(3)$, где r нечётное простое. Тогда $m = (3^r - 1)/2$. В $\omega_1(P)$ содержатся взаимно простые числа $(3^r + 1)/4$ и $3^{r-1} - 1$. По лемме 8.2.2 получаем $3^{r-2} < p$, откуда $r = 3$. В этом случае $p = 5$. Однако спектр группы

$O_7(3)$ содержит число 8, которого нет в спектре группы $S_4(5)$. Таким образом, данный случай невозможен.

Предположим, что $P = S_{2k}(u)$, где $k = 2^l \geq 2$. Тогда $n_2(P) = (u^k+1)/(2, u-1)$. Нам нужно показать, что этот случай возможен только при $k = 2$ и $u = q$. Если u чётно, то имеем $(q^2+1)/2 = 2^l+1$ для некоторого l. Но тогда $(q^2-1)/2 = 2^l$, что невозможно, поскольку число $(q^2-1)/2$ делится на 3. Если u нечётно, то желаемые условия следуют из равенства $m = n_2(P)$.

Пусть $P = S_{2r}(u)$, где r нечётное простое и $u \in \{2, 3\}$. Сперва предположим, что $u = 2$. В этом случае $m = 2^r - 1$. Спектр группы P содержит взаимно простые числа $2^r + 1$ и $2(2^{r-1}+1)$. Используя лемму 8.2.2, получаем $2^r < p$, что невозможно, поскольку $m = 2^r - 1$. Случай $u = 3$ аналогичен случаю $P = O_{2r+1}(3)$: он также возможен лишь при $r = 3$. В этом случае $P = S_6(3)$ и $L = S_4(5)$, что невозможно, поскольку $\omega(P)$ содержит 8.

Допустим, что $P = O^+_{2r}(u)$, где $r \geq 5$ простое и $u \in \{2, 3, 5\}$. В этом случае $m = (u^r-1)/(u-1)$. Пусть сначала $u = 2$. Тогда $\omega_1(P)$ содержит взаимно простые числа $2^{r-1}+1$ и $2^{r-2}+1$. По лемме 8.2.2 получаем $2^{r-3} < p$, что возможно только при $r = 5$. Но число 31 не представимо в виде $(q^2+1)/2$, поэтому данный случай невозможен. Пусть теперь $u = 3$. Тогда $\omega_1(P)$ содержит взаимно простые числа $(3^{r-1}-1)/2$ и $(3^{r-2}-1)/2$. Вновь по лемме 8.2.2 имеем $3^{r-4} < p$, откуда $r \leq 7$. Однако равенство $m = n_2(P)$ невозможно при $r \leq 7$, поэтому данный случай также невозможен. Наконец, пусть $u = 5$. Тогда в $\omega_1(P)$ содержатся числа $(5^{r-1}-1)/2$ и $(5^{r-2}-1)/2$, наибольший общий делитель которых равен 2, поэтому по лемме 8.2.2 получаем $5^{r-4} < p$, откуда вновь имеем $r \leq 7$. Но при $r \leq 7$ равенство $m = n_2(P)$ не выполняется. Итак, P не является группой $O^+_{2r}(u)$, где $r \geq 5$ простое и $u \in \{2, 3, 5\}$.

Пусть $P = O^+_{2r+2}(u)$, где r — нечётное простое число и $u \in \{2, 3\}$. Тогда $m = (u^r-1)/(2, u-1)$. Допустим, что $u = 2$. Тогда $\omega_1(P)$ содержит числа $2^{r+1}-1$ и $2^{r-1}-1$, чей наибольший общий делитель равен 3, поэтому по лемме 8.2.2 получаем $2^r - 1 < 3p + 1$. Из равенства $m = n_2(P)$ следует, что $q^2 < 6p+1$, что возможно лишь при $q = 5$. Однако, $2^r - 1 \neq 13$, таким образом, случай $u = 2$ невозможен. Предположим, что $u = 3$. Тогда $\omega_1(P)$ содержит числа $(3^{r+1}-1)/2$ и $(3^{r-1}-1)/2$, наибольший общий делитель которых равен 4, следовательно, лемма 8.2.2 влечёт $3^r - 1 < 8p + 2$. Из равенства $m = n_2(P)$ заключаем, что $q^2 < 8p + 1$, что возможно лишь при $q \in \{5, 7\}$. Если $q = 5$, то $r = 3$. Это невозможно, поскольку группа $O^+_8(3)$ содержит элементы порядка 8. Наконец, случай $q = 7$ невозможен, поскольку в этом случае $3^r = 51$.

Предположим, что $P = O_{2k}^-(u)$, где $k = 2^l \geq 4$. Тогда $n_2(P) = (u^k + 1)/(2, u + 1)$. Число u не может быть нечётным, поскольку в этом случае P — группа лиева типа в характеристике p. Если u чётно, то равенство $m = n_2(P)$ влечёт $q^2 - 1 = 2^t$ для некоторого t, что невозможно, поскольку число $q^2 - 1$ делится на 3.

Случай $P = O_{2k}^-(2)$, где $k = 2^l + 1 \geq 5$, исключается аналогично, поскольку в этом случае $n_2(P) = 2^{k-1} + 1$.

Допустим, что $P = O_{2r}^-(3)$, где r — простое число, такое, что $r \geq 7$ и $r \neq 2^l + 1$. Тогда $n_2(P) = (3^r + 1)/4$. Спектр группы P содержит взаимно простые числа $(3^{r-1} + 1)/2$ и $(3^{r-2} + 1)/2$. Используя лемму 8.2.2, получаем $3^{r-3} < p$, что невозможно, поскольку $r \geq 7$ и $m = n_2(P)$.

Если $P = O_{2k}^-(3)$, где k — составное число вида $2^l + 1$, то $n_2(P) = (3^{k-1} + 1)/2$, таким образом, этот случай невозможен при $p \geq 5$.

Пусть $P = G_2(u)$, где u не является степенью числа 3 и $u > 2$. Допустим, что $u \equiv 1 \pmod 3$. Тогда $n_2(P) = u^2 - u + 1$. В $\omega_1(P)$ содержатся числа $u^2 + u + 1$ и $u^2 - 1$ (см. [33] или [11]), чей наибольший общий делитель равен 3. По лемме 8.2.2 имеем $u^2 - u + 1 < 3p$. Это возможно только при $q = 5$. В этом случае $u = 4$. Однако группа $G_2(4)$ содержит элементы порядка $7 \notin \omega(S_4(5))$. Итак, этот случай невозможен.

Теперь предположим, что $u \equiv -1 \pmod 3$. Тогда $n_2(P) = u^2 + u + 1$, а в $\omega_1(P)$ содержатся числа $u^2 - u + 1$ и $u^2 - 1$, наибольший общий делитель которых равен 3. По лемме 8.2.2 имеем $(u - 1)^2 < 3p$. Используя равенство $m = n_2(P)$, получаем $(q^2 + 1)/2 < 3(p + \sqrt{3p} + 1)$, что возможно, только если q равно 5 или 7. Если $q = 5$, то $n_2(P) = 13$ и $u = 3$, что противоречит выбору u. Если $q = 7$, то равенство $m = n_2(P)$ невозможно ни для какого u. Таким образом, данный случай невозможен.

Пусть $P = {}^3D_4(u)$. Тогда $n_2(P) = u^4 - u^2 + 1$. Поскольку $m = n_2(P)$, по лемме 8.2.2 каждый элемент из $\omega_1(P)$ делит число

$$q^2(u^4 - u^2) = (2u^4 - 2u^2 + 1)(u^4 - u^2).$$

В P есть элемент порядка $(u^3 + 1)(u - 1)$ (см. [38] или [46]), откуда получаем, что $u^3 + 1 \mid (u + 1)(3u + 1)$, что возможно только при $u \leq 4$. Если $u = 2$, то $q = 5$. В этом случае $P = {}^3D_4(2)$ и $L = S_4(5)$. Этот случай невозможен, поскольку в P есть элементы порядка $9 \notin \omega(L)$. Случай $u = 3$ невозможен, поскольку $q^2 \neq 145$. Наконец, случай $u = 4$ невозможен, поскольку $q^2 \neq 481$.

Допустим, что $P = F_4(u)$, где u нечётно. Тогда $n_2(P) = u^4 - u^2 + 1$. В $\omega_1(P)$ содержатся числа $u^4 + 1$ и $(u^4 - 1)/2$ (см. [50] или [46]), наибольший общий делитель которых равен 2, поэтому лемма 8.2.2 влечёт неравенство $u^4 + u^2 - 1 < 4p$, откуда, конечно, $u^4 - u^2 + 1 < 4p$. В силу равенства $m = n_2(P)$ имеем $q^2 < 8p - 1$, что возможно только при q, равном 5 или 7. Поскольку u нечётно, ни в одном из этих случаев равенство $m = n_2(P)$ не выполняется.

Пусть $P = E_6(u)$. Тогда $n_2(P) = (u^6 + u^3 + 1)/(3, u - 1)$. Множество $\omega_1(P)$ содержит числа $(u^6 - 1)/(3, u - 1)$ и $u^5 - 1$ (см. [5]), и их наименьшее общее кратное делится на $\dfrac{(u^6 - 1)(u^5 - 1)}{(3, u - 1)(u - 1)}$. Используя лемму 8.2.2, получаем неравенство $u^4 < p$, и в силу равенства $m = n_2(P)$ это неравенство возможно лишь при $u = 2$. Это в свою очередь невозможно, поскольку $q^2 \neq 145$.

Предположим, что $P = {}^2E_6(u)$, где $u > 2$. Тогда $n_2(P) = (u^6 - u^3 + 1)/(3, u + 1)$. В $\omega_1(P)$ содержатся числа $(u^6 - 1)/(3, u + 1)$ и $u^5 + 1$ (см. [5]), и их наименьшее общее кратное делится на $\dfrac{(u^6 - 1)(u^5 + 1)}{(3, u + 1)(u + 1)}$. По лемме 8.2.2 имеем $u^4 - u^3 + u^2 \leq p$. Используя равенство $m = n_2(P)$, получаем

$$2(u^6 - u^3 + 1) > q^2 \geq (u^4 - u^3 + u^2)^{2n},$$

что невозможно при $u > 2$.

Итак, простые группы P, для которых $s(P) = 2$, рассмотрены. Переходим к случаю $s(P) = 3$.

Пусть $P = L_2(u)$, где $u > 3$ и является степенью простого числа r. Мы хотим показать, что этот случай возможен только при $u = q^2$. Пусть $u \equiv \varepsilon \pmod 4$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогда $\omega_1(P)$ содержит числа $(u - \varepsilon)/2$, $n_2(P) = r$ и $n_3(P) = (u + \varepsilon)/2$. Допустим, что $m = n_2(P)$. В этом случае $r \geq 13$, поскольку $p \geq 5$. Из леммы 8.2.2 следует, что $(r^{2k} - 1)/4r < p$, где $u = r^k$, откуда $r^{2k-1} < p^2$. Это неравенство возможно только при $n = k = 1$. В этом случае из леммы 8.2.2 получаем, что $(r + 1)/2$ делит $q^2(m - 1) = (2r - 1)(r - 1)$, что возможно только при $r \leq 11$; противоречие. Предположим теперь, что $m = n_3(P)$. Если $u \equiv -1 \pmod 4$, то $m = (u - 1)/2 \geq 13$, откуда $u \geq 27$. Число $(u + 1)/2$ делит $(u - 2)(u - 3)/2$, что возможно только при $u \leq 11$; вновь приходим к противоречию. Остаётся случай $u \equiv 1 \pmod 4$. В этом случае $(u + 1)/2 = (q^2 + 1)/2$ и, следовательно, $u = q^2$.

Допустим, что $P = L_2(u)$, где $u > 2$ и является степенью числа 2. Тогда $n_2(P) = u - 1$, $n_3(P) = u + 1$. Поскольку $m \geq 13$, имеем $u \geq 16$. Если $m = n_2(P)$, то по лемме 8.2.2 число $u + 1$ делит $q^2(m-1) = (u-2)(2u-3)$, что возможно только при $u \leq 14$. Если $m = n_3(P)$, то $u - 1$ делит $u(2u+1)$, что возможно только при $u \leq 4$. В любом случае получаем противоречие.

Случай $P = U_6(2)$ невозможен, поскольку в этом случае $n_2(P) = 7$ и $n_3(P) = 11$, тогда как $m \geq 13$.

Пусть $P = O_{2r}^-(3)$, где $r = 2^l + 1$ простое. Тогда $n_2(P) = (3^{r-1}+1)/2$, $n_3(P) = (3^r + 1)/4$. Случай $m = n_2(P)$ невозможен, поскольку $p \geq 5$. Допустим, что $m = n_3(P)$. Множество $\omega_1(P)$ содержит число $(3^{r-2}+1)/2$, поэтому из леммы 8.2.2 получаем $3^{r-3} < p$, что возможно только при $r \in \{3, 5\}$. Если $r = 3$, то $n_3(P) = 7$, что невозможно, поскольку $m \geq 13$. Если $r = 5$, то $q = 11$. Однако группа $O_{10}^-(3)$ содержит элементы порядка $41 \notin \omega(S_4(11))$, поэтому этот случай невозможен.

Предположим, что $P = G_2(u)$, где u является степенью числа 3. Тогда $n_2(P) = u^2 - u + 1$, $n_3(P) = u^2 + u + 1$. В $\omega_1(P)$ содержится число $u^2 - 1$. Предположим, что $m = n_2(P)$. Тогда лемма 8.2.2 влечёт $u^2 - 1 < p$, откуда $p^{2n-1} < 2$, что невозможно. Теперь допустим, что $m = n_3(P)$. Тогда по лемме 8.2.2 имеем $u < \sqrt{p} + 1$, что возможно только при $q = 5$. В этом случае $u = 3$. Данный случай невозможен, поскольку группа $G_2(3)$ содержит элементы порядка $8 \notin \omega(S_4(5))$.

Предположим, что $P = {}^2G_2(u)$, где u является нечётной степенью числа 3 и $u > 3$. Тогда $n_2(P) = u - \sqrt{3u} + 1$, $n_3(P) = u + \sqrt{3u} + 1$. Множество $\omega_1(P)$ содержит $u - 1$. Допустим, что $m = n_2(P)$. Тогда по лемме 8.2.2 получаем неравенство $u - 1 < p$, откуда $p^{2n-1} < 2$, что невозможно. Если же $m = n_3(P)$, то поскольку $u \geq 27$, лемма 8.2.2 влечёт $(u-1)/2 < p$, откуда $(u/4)^{2n} < 16$. Поскольку $u \geq 27$, данное неравенство невозможно.

Пусть $P = F_4(u)$, где u является степенью числа 2. Тогда $n_2(P) = u^4 + 1$, $n_3(P) = u^4 - u^2 + 1$. Если $m = n_2(P)$, то $m - 1 = u^4$, что невозможно, поскольку $m - 1$ делится на 3. Предположим, что $m = n_3(P)$. В $\omega_1(P)$ содержится число $u^4 - 1$, поэтому из леммы 8.2.2 следует, что $u^4 - u^2 + 1 \leq p + 1$, откуда $q^2 \leq 2p + 1$. Это неравенство не выполняется при $p \geq 5$.

Допустим теперь, что $P = {}^2F_4(u)$, где u является нечётной степенью числа 2 и $u > 2$. Тогда $n_2(P) = u^2 - \sqrt{2u^3} + u - \sqrt{2u} + 1$, $n_3(P) = u^2 + \sqrt{2u^3} + u + \sqrt{2u} + 1$. Множество $\omega_1(P)$ содержит взаимно простые числа $u - \sqrt{2u} + 1$ и $u + \sqrt{2u} + 1$, произведение которых равно u^2+1. Предположим, что $m = n_2(P)$. Тогда по лемме 8.2.2 имеем $u^2+1 < p$, что невозможно ввиду равенства $m = n_2(P)$. Пусть $m = n_3(P)$. Тогда, поскольку $u \geq 8$, используя лемму 8.2.2, получаем $(u^2+1)/4 < p$. Данное неравенство также невозможно в силу равенства $m = n_3(P)$.

Если P является одной из групп $E_7(2)$, $E_7(3)$, то ни одно из равенств $m = n_2(P)$, $m = n_3(P)$ не возможно. Таким образом, простые группы P, для которых $s(P) = 3$, рассмотрены.

Наконец, рассмотрим случай $s(P) > 3$. Допустим, что $P = {}^2B_2(u)$, где u является нечётной степенью числа 2 и $u > 2$. Тогда $s(P) = 4$, $n_2(P) = u-1$, $n_3(P) = u - \sqrt{2u}+1$, $n_4(P) = u+\sqrt{2u}+1$. Используя лемму 8.2.2, получаем $u-1 < p$. Ввиду данного неравенства ни одно из равенств $m = n_2(P)$, $m = n_3(P)$, $m = n_4(P)$ выполняться не может.

Пусть $P = E_8(u)$. Тогда $4 \leq s(P) \leq 5$, $n_2(P) = (u^{10}-u^5+1)/(u^2-u+1)$, $n_3(P) = (u^{10}+u^5+1)/(u^2+u+1)$, $n_4(P) = u^8-u^4+1$. Если $u \equiv 2,3 \pmod 5$, то $s(P) = 4$. Если же $u \equiv 0,1,4 \pmod 5$, то $s(P) = 5$ и дополнительно $n_5(P) = (u^{10}+1)/(u^2+1)$. В любом случае по лемме 8.2.2 имеем $u^7 < p$. Непосредственно проверяется, что ввиду этого неравенства ни одно из равенств $m = n_i(P)$, $i \geq 2$, выполняться не может.

Если P — одна из групп $L_3(4)$, ${}^2E_6(2)$, то ни одно из равенств $m = n_i(P)$, $i \geq 2$, не выполняется. Итак, мы доказали, что группа P действительно может быть изоморфна лишь $S_4(q)$ или $L_2(q^2)$.

Утверждение о том, что если $P = S_4(q)$, то группа K тривиальна, следует из [42, Предл. 1.1]. Покажем, что если $P = L_2(q^2)$, то K является p-группой. Действительно, в этом случае группа P содержит подгруппу Фробениуса $M = FH$, где F элементарная абелева порядка q^2, а H циклическая порядка $(q^2-1)/(2,q-1)$. Предположим, что K не является p-группой, т. е. в $\pi(K)$ есть простое число r, отличное от p. Поскольку K нильпотентна, можно считать, что K — r-группа. Таким образом, порядки K и F взаимно просты. Пусть M_1 — полный прообраз группы M в G. В силу предложения 8.1.1 группа M_1 удовлетворяет условиям леммы 1.2.8, и поэтому G содержит элементы порядка $r \cdot (q^2-1)/(2,q-1)$; противоречие.

Наконец, докажем, что группа G/K является расширением группы P с помощью полевого автоморфизма порядка 2^m, где m — некоторое неотрицательное целое число. Если $P = S_4(q)$, данное утверждение следует из [14, Теорема 1] и [62].

Пусть $P = L_2(q^2)$. Любой внешний автоморфизм группы P является либо полевым автоморфизмом, либо диагональным автоморфизмом порядка $(2, q-1)$, либо произведением последних.

Сначала покажем, что если τ — полевой автоморфизм нечётного простого порядка r группы P, то $\omega(P\langle\tau\rangle) \not\subseteq \omega(S_4(q))$. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 8.2.3 ([17, след. 14]). *Пусть q — степень простого числа, r — натуральное число и τ — полевой автоморфизм порядка r группы $L_n(q^r)$. Тогда*

$$\omega(L_n(q^r)\langle\tau\rangle) = \bigcup_{k|r} \frac{r}{k}\omega(L_n(q^k)).$$

Итак, пусть τ — полевой автоморфизм нечётного простого порядка r группы P и q_0 таково, что $q_0^r = q$. По лемме 8.2.3 имеем

$$\omega(P\langle\tau\rangle) = r\omega(L_2(q_0^2)) \cup \omega(L_2(q^2)).$$

Положим $m_0 = (q_0^2+1)/(2, q_0^2+1)$. Поскольку r нечётно, число m_0 делит m и, следовательно, $m_0 \notin \omega_1(L_2(q_0^2))$. Если $r \notin \omega(S_4(q))$, то в $P\langle\tau\rangle$ есть элемент порядка $r \notin \omega(S_4(q))$. Если $r \in \omega_1(S_4(q))$, то $P\langle\tau\rangle$ содержит элемент порядка $rm_0 \notin \omega(S_4(q))$. Наконец, если $r \in \omega_2(S_4(q))$, то $P\langle\tau\rangle$ содержит элемент порядка $2r \notin \omega(S_4(q))$. Таким образом, $\omega(P\langle\tau\rangle) \not\subseteq \omega(S_4(q))$.

Теперь предположим, что $p \neq 2$, и пусть θ — диагональный автоморфизм группы P, такой, что $\theta^2 \in P$. Группа $P\langle\theta\rangle$ изоморфна группе $PGL_2(q^2)$, поэтому она содержит элементы порядка $q^2 - 1 \notin \omega(S_4(q))$. Итак, остаётся рассмотреть случай, когда группа P расширяется с помощью автоморфизма $\tau\theta$, где τ — полевой автоморфизм. Если порядок τ делится на нечётное простое число r, то существует натуральное число s, такое, что $(\tau\theta)^s$ является по модулю P полевым автоморфизмом порядка r. Таким образом, мы можем предполагать, что порядок τ является степенью числа 2. Положим $|\tau| = 2^l$, $l > 0$, и пусть q_0 таково, что $q_0^{2^l} = q^2$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 3.3 из [43], имеем

$$\omega(P\langle\tau\theta\rangle) = 2^l \cdot \omega(PGL_2(q_0)) \cup \bigcup_{k|2^l,\ k>1} \frac{2^l}{k} \cdot \omega(L_2(q_0^k)).$$

Отметим, что $PGL_2(q_0)$ содержит элементы порядка q_0-1 и q_0+1.

Будем обозначать через $(x)_2$ 2-часть целого числа x, т. е. максимальный делитель числа x, который является степенью числа 2. Пусть $((q^2-1)/2)_2 = 2^m$. Другими словами, число 2^m является наибольшей степенью числа 2, лежащей в спектре $\omega(S_4(q))$. Имеем

$$q^2-1 = q_0^{2^l}-1 = (q_0^2-1)(q_0^2+1)(q_0^4+1)\dots(q_0^{2^{l-1}}+1).$$

Таким образом, $q^2-1 = (q_0^2-1)\cdot a$, где $(a)_2 = 2^{l-1}$, и следовательно, $(q_0^2-1)_2 = 2^{m-l+2}$. Это означает, что 2-часть одного из чисел q_0-1, q_0+1 равна 2^{m-l+1}, откуда мы заключаем, что множество $2^l\cdot\omega(PGL_2(q_0))$ содержит 2^{m+1}. Итак, $\omega(P\langle\tau\theta\rangle) \nsubseteq \omega(S_4(q))$.

Теорема доказана.

§ 8.3. Заключительные замечания

1. Теорема 8 неверна для q равного, 2 или 3. В частности, группа $S_4(2)$ изоспектральна разрешимой группе Фробениуса порядка $2^3\cdot 3\cdot 5^2$ ([34]), а группа $S_4(3)$ изоспектральна разрешимой двойной группе Фробениуса порядка $2^2\cdot 3^{24}\cdot 5$ ([18]).

2. Предположим, что $P = S_4(q)$ (в обозначениях теоремы 8), и пусть τ — полевой автоморфизм порядка $2^m>1$ группы P. Из [14] и [62] следует, что если $p\le 3$, то $\omega(P\langle\tau\rangle)\neq\omega(P)$, а если $p>3$, то $\omega(P\langle\tau\rangle)=\omega(P)$. Отметим, что каждая группа $P\langle\tau\rangle$ содержит секцию, изоморфную P, поэтому группы такого типа не являются критическими. Из [31] следует, что $S_4(q)$ критическая при $p\neq 2$. Если же $p=2$, группа $S_4(q)$ содержит собственную подгруппу H, изоспектральную $S_4(q)$. Эта подгруппа изоморфна $L_2(q^2)\langle\tau\rangle$, где τ — полевой автоморфизм порядка 2 группы $L_2(q^2)$.

Теперь допустим, что $P = L_2(q^2)$. В прошлом абзаце был приведён пример группы $L_2(q^2)\langle\tau\rangle$, изоспектральной $S_4(q)$ при $p=2$. Имеются также примеры групп такого типа, в которых $K>1$. В [29] приведён пример группы, изоспектральной $S_4(q)$, которая является полупрямым произведением $K\leftthreetimes P$, где $q=2^n$ и $|K|=2^{8n}$. В [24] приведён аналогичный пример, где $q=3^{2n}$ и $|K|=3^{28n}$. Также в [24] приведён пример полупрямого произведения $K\leftthreetimes(P\langle\tau\rangle)$, изоспектрального $S_4(q)$, где $q=p^n$, $p>3$, τ — полевой автоморфизм порядка 2 группы P и $|K|=p^{8n}$.

3. Докажем, что при $p = 2$ группа $L_2(q^2)\langle\tau\rangle$ из замечания 2 является критической. Поскольку $\omega(L_2(q^2)) \neq \omega(S_4(q))$, каждая подгруппа H группы $L_2(q^2)\langle\tau\rangle$, изоспектральная $S_4(q)$, является расширением некоторой подгруппы H_1 группы $L_2(q^2)$ с помощью автоморфизма τ. Так как порядок группы $L_2(q^2)\langle\tau\rangle$ равен $2q^2(q^2-1)(q^2+1)$, а H содержит элементы порядков q^2-1 и q^2+1, получаем, что индекс $|L_2(q^2) : H_1|$ является степенью числа 2. Подгрупп такого индекса группа $L_2(q^2)$ не содержит (см., например, [36, табл. 8.1, 8.2]). С другой стороны, если некоторая секция $(L_2(q^2)\langle\tau\rangle)/N$ изоспектральна $S_4(q)$, то группа N должна быть нормальной 2-подгруппой. Ясно, что таких подгрупп в $L_2(q^2)\langle\tau\rangle$ нет. Итак, группа $L_2(q^2)\langle\tau\rangle$ критическая.

4. Вопрос того, каким может быть порядок автоморфизма τ в случае, когда $P = L_2(q^2)$, является открытым. Например, покажем, что если $q = 7$, то не существует расширения 7-группы с помощью P, изоспектрального $S_4(q)$.

Лемма 8.3.1 ([24, лемма 10]). *Пусть F — конечное поле порядка $q = p^n > 3$, где p простое, и $W_i = W_i(q)$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, — пространство однородных полиномов степени i от переменных x_1, x_2 над F. Пусть α — автоморфизм Фробениуса поля F. Для $j = 0, \ldots, n-1$ превратим W_i в $SL_2(q)$-модуль $W_i^j = W_i^j(q)$, полагая*

$$f(x_1, x_2)^A = f(a_{11}^{\alpha^j}x_1 + a_{12}^{\alpha^j}x_2, a_{21}^{\alpha^j}x_1 + a_{22}^{\alpha^j}x_2)$$

для $f(x_1, x_2) \in W_i$ и $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(q)$. В частности, W_0^j — тривиальный одномерный $SL_2(q)$-модуль.

1. *Модули $W(i_0, \ldots, i_{n-1}) = \bigotimes_{j=0}^{n-1} W_{i_j}^j$ образуют полный набор попарно неэквивалентных абсолютно неприводимых $SL_2(q)$-модулей над полем характеристики p. Если q нечётно, то центр группы $SL_2(q)$ действует тривиально на $W(i_0, \ldots, i_{n-1})$ (и следовательно, модуль $W(i_0, \ldots, i_{n-1})$ является $L_2(q)$-модулем) тога и только тогда, когда число $i_0 + \cdots + i_{n-1}$ чётно.*
2. *Если λ, λ^{-1} — собственные значения матрицы $A \in SL_2(q)$, то собственными значениями A на W_1^j являются числа λ^{p^j}, λ^{-p^j}, на W_2^j — числа 1, λ^{2p^j}, λ^{-2p^j}, а на $W(i_0, \ldots, i_{n-1})$ — числа $\lambda_{i_0} \ldots \lambda_{i_{n-1}}$ (где λ_{i_j} — собственное значение на W_i^j).*

Пусть $q = 7$. В этом случае $\mu(S_4(q)) = \{24, 25, 42, 56\}$ и $\mu(P) = \{7, 24, 25\}$. Докажем, что никакое расширение 7-группы K с помощью P не изоспектрально $S_4(7)$. Предположим противное, и пусть G — такое расширение. Рассмотрим G-главный фактор W в K. Мы можем смотреть на W как на абсолютно неприводимый P-модуль. По лемме 8.3.1 этот модуль эквивалентен модулю $W(i_0, i_1)$ из леммы 8.3.1, где $i_0, i_1 = 0, 1, \ldots, 6$ и число $i_0 + i_1$ чётное. Более того, если числа i_0 и i_1 чётные, то по утверждению 2 леммы 8.3.1 существует элемент порядка 5 из P с собственным значением 1 на $W(i_0, i_1)$. Таким образом, мы можем считать, что числа i_0 и i_1 нечётные.

Пусть $a \in P$ — элемент порядка 5, A — его прообраз порядка 5 в $SL_2(49)$. Непосредственно проверяется, что среди модулей $W(i_0, i_1)$, где $i_0, i_1 = 1, 3, 5$, только на $W(1, 1)$ элемент A не фиксирует нетривиальных точек. Таким образом, мы можем предполагать, что каждый G-главный фактор группы K как P-модуль эквивалентен модулю $W(1, 1)$.

Пусть теперь a — элемент порядка 6 из P, A — его прообраз в $SL_2(49)$. Тогда $|A| = 12$. Опять непосредственно проверяется, что A не фиксирует нетривиальных точек в $W(1, 1)$. Отсюда следует, что элементы порядка 6 из G не фиксируют нетривиальных точек в K, откуда следует, что в G нет элементов порядка 42. Таким образом, $\omega(G) \neq \omega(S_4(q))$.

Заключение

В диссертации исследовалось строение конечных групп (в частности, критических), изоспектральных нераспознаваемым неабелевым простым группам. Эта задача является частью более общей проблемы распознаваемости неабелевых простых групп по спектру. Были получены следующие результаты.

1. Доказано, что в общем случае не существует независимой константы, ограничивающей количество неизоморфных конечных групп, критических относительно одного и того же подмножества множества натуральных чисел (теорема 1).

2. Получено полное описание критических групп со спектром, как у знакопеременных групп A_6, A_{10}, спорадической группы J_2 и классической группы лиева типа $L_3(3)$ (теоремы 2, 3, 4 и 6).

3. Описано строение конечных групп (в частности, критических) со спектром, как у проективной специальной линейной группы $U_3(3)$ (теорема 7), а также проективных симплектических групп $S_4(q)$, где q — степень простого числа и $q > 3$ (теорема 8).

Эти результаты решают проблему 2 для неабелевых простых знакопеременных и спорадических групп и исключительных групп лиева типа, а также вносят вклад в решение проблемы 1 для конечных неабелевых простых групп в целом.

Список литературы

[1] Адян С. И. Исследование по проблеме Бернсайда и связанным с ней вопросам. *Тр. МИАН СССР*, 168:171–196, 1984.

[2] Алеева М. Р. О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса. *Матем. заметки*, 73(3):323–339, 2003.

[3] Бутурлакин А. А. Спектры конечных линейных и унитарных групп. *Алгебра и логика*, 47(2):157–173, 2008.

[4] Бутурлакин А. А. Спектры конечных симплектических и ортогональных групп. *Мат. тр.*, 13(2):33–83, 2010.

[5] Бутурлакин А. А. Спектры конечных простых групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$. *Алгебра и логика*, 52(3):284–304, 2013.

[6] Бутурлакин А. А. Спектры конечных простых групп $E_7(q)$. *Сиб. мат. журн.*, 57(5):988–998, 2016.

[7] Бутурлакин А. А. Спектры групп $E_8(q)$. *Алгебра и логика*, 57(1):3–13, 2018.

[8] Васильев А. В. Распознавание конечных групп по спектру. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Новосибирск, 2005.

[9] Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д. О конечных группах, изоспектральных простым симплектическим и ортогональным группам. *Сиб. мат. журн.*, 50(6):1225–1247, 2009.

[10] Васильев А. В., Гречкосеева М. А. Распознаваемость по спектру для простых классических групп в характеристике 2. *Сиб. мат. журн.*, 56(6):1264–1276, 2015.

[11] Васильев А. В., Старолетов А. М. Распознаваемость групп $G_2(q)$ по спектру. *Алгебра и логика*, 52(1):3–21, 2013.

[12] Васильев А. В., Старолетов А. М. Почти распознаваемость по спектру простых исключительных групп лиева типа. *Алгебра и логика*, 53(6):669–692, 2014.

[13] Горшков И. Б. Распознаваемость знакопеременных групп по спектру. *Алгебра и логика*, 52(1):57–63, 2013.

[14] Гречкосеева М. А. О спектрах почти простых групп с симплектическим или ортогональным цоколем. *Сиб. мат. журн.*, 57(4):746–754, 2016.

[15] Гречкосеева М. А. О спектрах почти простых расширений ортогональных групп чётной размерности. *Сиб. мат. журн.*, 2018.

[16] Заварницин А. В. Веса неприводимых $SL_3(q)$-модулей в характеристике определения. *Сиб. мат. журн.*, 45(2):319–328, 2004.

[17] Заварницин А. В. Распознавание простых групп $U_3(q)$ по порядкам элементов. *Алгебра и логика*, 45(2):185–202, 2006.

[18] Заварницин А. В. Разрешимая группа, изоспектральная группе $S_4(3)$. *Сиб. мат. журн.*, 51(1):26–31, 2010.

[19] Кондратьев А. С., Мазуров В. Д. Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов. *Сиб. мат. журн.*, 41(2):359–369, 2000.

[20] Кэртис Ч., Райнер И. *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, volume 668. Наука, Москва, 1969.

[21] Лыткина Д. В. Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4. *Сиб. мат. журн.*, 48(2):353–358, 2007.

[22] Мазуров В. Д. Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов. *Алгебра и логика*, 36(1):37–53, 1997.

[23] Мазуров В. Д. Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов. *Алгебра и логика*, 37(6):651–666, 1998.

[24] Мазуров В. Д. Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов. *Алгебра и логика*, 41(2):166–198, 2002.

[25] Мазуров В. Д. Группы с заданным спектром. *Изв. Урал. гос. ун-та*, 36:119–138, 2005.

[26] Мазуров В. Д. Обобщение теоремы Цассенхауза. *Владикавк. мат. журн.*, 10(1):40–52, 2008.

[27] Мазуров В. Д. Нераспознаваемость конечной простой группы ${}^3D_4(2)$ по спектру. *Алгебра и логика*, 52(5):601–605, 2013.

[28] Мазуров В. Д. Удвоенные группы Фробениуса, изоспектральные простой группе $U_3(3)$. *Сиб. мат. журн.*, 56(6):1384–1390, 2015.

[29] Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Ч. П. Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов. *Алгебра и логика*, 39(5):567–585, 2000.

[30] Мазуров В. Д., Ши В. Дж. Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру. *Алгебра и логика*, 51(2):239–243, 2012.

[31] Маслова Н. В. Конечные простые группы, не являющиеся критическими по спектру. *Тр. ИММ УрО РАН*, 21(1):172–176, 2015.

[32] Старолетов А. М. Группы, изоспектральные знакопеременной группе степени 10. *Сиб. мат. журн.*, 51(3):638–648, 2010.

[33] Aschbacher M. Chevalley groups of type G_2 as the group of a trilinear form. *J. Algebra*, 109:193–259, 1987.

[34] Brandl R., Shi W. J. Finite groups whose element orders are consecutive integers. *J. Algebra*, 143(2):388–400, 1991.

[35] Brandl R., Shi W. J. The characterization of $PSL(2, q)$ by its element orders. *J. Algebra*, 163(1):109–114, 1994.

[36] Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*, volume 407 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[37] Conway J. H., et al. *Atlas of finite groups*. Clarendon Press, Oxford, 1985.

[38] Deriziotis D. I., Michler G. O. Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 303:39—70, 1987.

[39] Feit W., Thompson J. G. Solvability of groups of odd order. *Pacific. J. Math.*, 13:775–1029, 1963.

[40] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.5*, 2014.

[41] Gorenstein D. *Finite groups*, volume 519. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1980.

[42] Grechkoseeva M. A. Element orders in covers of finite simple groups of Lie type. *J. Algebra Appl.*, 14(4):1550056 (16 pages), 2015.

[43] Grechkoseeva M. A. On orders of elements of finite almost simple groups with linear or unitary socle. *J. Group Theory*, 20(6):1191–1222, 2017.

[44] Grechkoseeva M. A., Staroletov A. M. Unrecognizability by spectrum of finite simple orthogonal groups of dimension nine. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 11:921–928, 2014.

[45] Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V. On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups. *J. Group Theory*, 18(5):741–759, 2015.

[46] Grechkoseeva M. A., Zvezdina M. A. On spectra of automorphic extensions of finite simple groups $F_4(q)$ and ${}^3D_4(q)$. *J. Algebra Appl.*, 15(4):1650168 (13 pages), 2016.

[47] Holt D., Plesken W. *Perfect Groups*, volume 377. Clarendon Press, Oxford, 1989.

[48] Huppert B. *Endliche Gruppen*, volume 134 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[49] Isaacs I. M. *Finite group theory*, volume 364. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008.

[50] Lawther R. The action of $F_4(q)$ on cosets of $B_3(q)$. *J. Algebra*, 212:79—-118, 1999.

[51] Lucido M. S., Moghaddamfar A. R. Groups with complete prime graph connected components. *J. Group Theory*, 73(3):373–384, 2004.

[52] Mazurov V. D., Shi W. J. A note to the characterization of sporadic simple groups. *Algebra Colloq.*, 5(3):285–288, 1998.

[53] Praeger C. E., Shi W. J. A characterization of some alternating and symmetric groups. *Commun. Algebra*, 22(5):1507–1530, 1994.

[54] Staroletov A. M. On almost recognizability by spectrum of simple classical groups. *Int. J. Group Theory*, 6(4):7–33, 2017.

[55] Thompson J. G. Normal p-complements for finite groups. *Math. Z.*, 72(2):332–354, 1960.

[56] Williams J. S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 69(2):487–513, 1981.

[57] Wilson R., et al. *Atlas of Finite Group Representations – Version 3*, 2015.

[58] Zassenhaus H. Kennzeichnung endlicher linearean Gruppen als Permutationsgruppen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11:17–40, 1936.

[59] Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11:187–220, 1936.

[60] Zavarnitsine A. V. Exceptional action of the simple groups $L_4(q)$ in the defining characteristic. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 5:68–74, 2008.

[61] Zavarnitsine A. V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 6:1–12, 2009.

[62] Zvezdina M. A. Spectra of automorphic extensions of finite simple symplectic and orthogonal groups over fields of characteristic 2. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 11:823–832, 2014.

Работы автора по теме диссертации

[63] Lytkin Y. V. On groups critical with respect to a set of natural numbers. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 10:666–675, 2013.

[64] Лыткин Ю. В. Группы, критические относительно спектров знакопеременных и спорадических групп. *Сиб. мат. журн.*, 56(1):122–128, 2015.

[65] Лыткин Ю. В. О конечных группах, изоспектральных группе $U_3(3)$. *Сиб. мат. журн.*, 58(4):813–827, 2017.

[66] Lytkin Y. V. On finite groups isospectral to the simple groups $S_4(q)$. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 15:570–584, 2018.

[67] Лыткин Ю. В. О числе неизоморфных групп, критических относительно спектра. *Современные проблемы математики: тезисы Международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург, 27 января – 2 февраля 2013 г.*, Екатеринбург: ИММ УрО РАН:44, 2013.

[68] Лыткин Ю. В. О группах, критических относительно спектра. *Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 12–18 апреля 2013 г.*, Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск:14, 2013.

[69] Lytkin Y. V. On groups, critical with respect to a spectrum. *Second international conference «Mathematics in Armenia: Advances and perspectives». Abtstracts. Tsaghkarzor, Armenia, 24–31 August 2013*, 124, 2013.

[70] Лыткин Ю. В. Критические группы со спектром как у неабелевой простой группы. *Материалы 52-й международной научной студенческой конференции МНСК-2014: Математика. Новосибирск, 11–18 апреля 2014 г.*, Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск:11, 2014.

[71] Lytkin Y. V. Groups critical with respect to the spectrum of a non-abelian simple group. *Алгебра и приложения: труды Международной конференции по аглебре, посвящённой 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина. Нальчик, 6–11 сентября 2014 г.*, Нальчик: издательство КБГУ:132–133, 2014.

[72] Лыткин Ю. В. О группах, критических относительно спектра неабелевой простой группы. *Теория групп и её приложения: труды Международной школы-конференции по теории групп, посвящённой 70-летию В. В.*

Кабанова. Нальчик, 11–14 сентября 2014 г., Нальчик: издательство КБГУ:37, 2014.

[73] Лыткин Ю. В. О группах, изоспектральных группе $U_3(3)$. *Материалы 53-й международной научной студенческой конференции МНСК-2015: Математика. Новосибирск, 11–17 апреля 2015 г.*, Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск:13, 2015.

[74] Лыткин Ю. В. Критические группы, изоспектральные группе $U_3(3)$. *Международная конференция «Мальцевские чтения», посвящённая 75-летию Ю. Л. Ершова: тезисы докладов. Новосибирск, 3–7 мая 2015 г.*, 109, 2015.

[75] Лыткин Ю. В. О конечных группах, изоспектральных простой группе $U_3(3)$. *Материалы XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой 80-летию со дня рождения проф. С. С. Рышкова. Тула, 25–30 мая 2015 г.*, Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого:87–89, 2015.

[76] Lytkin Y. V. Critical groups isospectral to $U_3(3)$. *Groups and their actions: Abstracts. Bedlewo, Poland, 22–26 June 2015*, 14–15, 2015.

[77] Lytkin Y. V. Compositional structure of groups isospectral to $U_3(3)$. *Groups and graphs, algorithms and automata: Abstracts of the International Conference and PhD Summer School. Yekaterinburg, 9–15 August 2015*, Yekaterinburg: UrFU Publishing house:66, 2015.

[78] Lytkin Y. V. Groups critical with respect to the spectrum of $U_3(3)$. *X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Abstracts. Odessa, Ukraine, 20–27 August 2015*, Odessa: TES:70, 2015.

[79] Lytkin Y. V. Critical groups with spectra coinciding with the spectrum of $U_3(3)$. *Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения»: тезисы докладов. Минск, Беларусь, 14–18 сентября 2015 г.*, Институт математики НАН Беларуси:68, 2015.

[80] Лыткин Ю. В. Конечные группы, критические относительно спектра простой группы $U_3(3)$. *XI Школа-конференция по теории групп: тезисы докладов Международной конференции, посвящённой 70-летию С. И. Ольшанского. Красноярск, 27 июля – 2 августа 2016 г.*, Красноярск: Сиб. федер. ун-т:38–40, 2016.

[81] Лыткин Ю. В. О группах, изоспектральных группе $U_3(3)$. *Международная конференция «Мальцевские чтения»: тезисы докладов. Новосибирск, 21–25 ноября 2016 г.*, 94, 2016.

[82] Лыткин Ю. В. О конечных группах, изоспектральных группам $S_4(q)$. *Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». Нальчик, 17–21 мая 2017 г.*, Нальчик: издательство КБГУ:130–131, 2017.

[83] Lytkin Y. V. On finite groups isospectral to $S_4(q)$. *Young algebraists' conference: Abstracts. Lausanne, Switzerland, 5–9 June 2017*, 3, 2017.

[84] Лыткин Ю. В. Группы, изоспектральные группам $S_4(q)$. *Международная конференция «Мальцевские чтения»: тезисы докладов. Новосибирск, 20–24 ноября 2017 г.*, 77, 2017.