Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Когабаев Нурлан Талгатович

ВЫЧИСЛИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор
Гончаров Сергей Савостьянович

Новосибирск — 2017

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена исследованию классических вопросов теории вычислимых моделей в классе проективных плоскостей. Развитие теории вычислимых (конструктивных) моделей началось в 1950-е годы в работах А.И. Мальцева, М.О. Рабина, А Фрёлиха, Дж. Шефердсона и др. авторов. С тех пор теория вычислимых моделей стала одним из наиболее актуальных и активно развивающихся разделов математической логики. Количество публикаций в рамках данного раздела очень велико. Наиболее важную и современную обзорную информацию по теории вычислимых моделей можно найти в [14, 35, 43, 46].

Напомним, что модель конечной сигнатуры называется *вычислимой*, если её носитель и основные предикаты являются вычислимыми множествами, а основные операции — частично вычислимыми функциями. Вычислимая модель, изоморфная данной абстрактной модели $\mathfrak{M}$, называется *вычислимым представлением* $\mathfrak{M}$.

Вполне естественным выглядит тот факт, что исследования по теории вычислимых моделей находят свои приложения в первую очередь в алгебре. Для таких классических категорий алгебраических систем как абелевы группы, линейные порядки, булевы алгебры, поля и др. разработан обширный спектр результатов и методов по изучению вычислимых представлений моделей из данных классов.

Одной из первых фундаментальных проблем теории вычислимых моделей является проблема существования вычислимых представлений:

Проблема 1. *Получить описание структур из данного класса моделей, которые имеют вычислимое представление.*

Для широких классов структур редко удаётся получить полное решение проблемы 1. В подобных ситуациях решение проблемы в рассматриваемом классе сводят к изучению эффективных свойств производных структур или обращаются к изучению проблемы в подклассах. Например, известно, что булева алгебра имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда она порождается вычислимо перечислимым бинарным деревом (см. [10], § 3.3). Для более узких подклассов описание вычислимых представителей часто формулируется в терминах эффективности некоторых инвариантов. Так в [7] доказано, что суператомная булева алгебра вычислимо представима тогда и только тогда, когда её ординальный тип является конструктивным ординалом. Другой пример — это найденный в [30] критерий вычислимой представимости абелевых групп, являющихся прямыми суммами циклических p-групп, порядки которых неограничены. Всякая такая группа имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда характер группы является Σ^0_2-множеством и аппроксимируется некоторой вычислимой предельно монотонной функцией.

Ещё один подход к уточнению проблемы 1 — это переход к изучению автоматных представлений структур. Активное изучение автоматных структур в классических категориях алгебраических систем было инициировано в начале 1990-х годов А. Нероудом и Б.М. Хусаиновым, предложившими в [55] общее определение автоматной модели предикатной сигнатуры. Модель называется *автоматной*, если её носитель и основные предикаты распознаются конечными автоматами над некоторым алфавитом. Особенность предложенного определения состоит в том, что для распознавания n-местного предиката читающие головки n-ленточного автомата должны двигаться вдоль лент *синхронно*. Модель $\mathfrak{A}$ *автоматно представима*, если существует автоматная модель, изоморфная $\mathfrak{A}$. В рамках этого подхода за последние 20 лет были получены полные или частичные решения проблемы автоматной представимости во многих классах систем: линейные порядки, булевы алгебры, деревья, группы, кольца и др.

Обзор основных результатов, полученных в области изучения автоматных моделей, а также существующие открытые вопросы и основные направления исследований в данной области могут быть найдены в [54, 56, 67]. Как оказалось, в большинстве случаев требование существования автоматного представления накладывает существенные ограничения на алгебраическую сложность структуры — значительные семейства вычислимых структур не обладают автоматными представлениями. Так, например, любая абелева группа без кручения, являющаяся p-делимой для бесконечного числа простых p, не имеет автоматных представлений. В частности, не имеет автоматных представлений аддитивная группа рациональных чисел (см. [70]). Тем не менее, стоить заметить, что относительно простое устройство автоматных структур не всегда позволяет снизить сложность алгоритмических проблем на классах систем. В работе [59] для нескольких естественных классов установлено, что проблема изоморфизма автоматных структур имеет такую же сложность как проблема изоморфизма вычислимых структур из того же класса.

В классической теории вычислимости особое внимание уделяется изучению возможности равномерного построения алгоритмов. Говоря о равномерной вычислимости в теории вычислимых моделей, мы естественным образом приходим к определению вычислимого класса структур.

Пусть K — некоторый класс структур, замкнутый относительно изоморфизма, а K^c — множество всех вычислимых структур из K. Напомним, что вычислимая последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ структур из класса K называется *вычислимой нумерацией* K^c (с точностью до вычислимого изоморфизма), если для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M} \in K$ найдётся $n \in \omega$, для которого $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_n$ вычислимо изоморфны. Класс структур K^c называется *вычислимым* (с точностью до вычислимого изоморфизма), если он обладает хотя бы одной вычислимой нумерацией. Данное определение также допускает обобщения на случай относительной вычислимости классов, представители которых можно рассматривать с точностью до некоторой эквивалентности.

Естественным продолжением проблемы 1 является проблема равномерной вычислимости на классах структур:

Проблема 2. *Для данного класса структур определить, существует ли у него вычислимая нумерация.*

Обзор результатов, связанных с проблемой вычислимости классов моделей, можно найти в [41]. Так, например, вычислимыми (с точностью до вычислимого изоморфизма) являются класс вычислимых булевых алгебр [10, § 3.3], класс вычислимых линейных порядков, класс вычислимых абелевых групп конечного ранга Прюфера [18], класс вычислимых конечномерных векторных пространств над $\mathbb{Q}$. Невычислимыми (с точностью до вычислимого изоморфизма) являются класс всех вычислимых абелевых групп [18], класс вычислимых полей [14], класс вычислимых колец, класс вычислимых векторных пространств над $\mathbb{Q}$ [16]. В работе [16] один из подходов к вычислимой классификации для класса моделей K связан с гиперарифметической нумерацией K с точностью до изоморфизма или Δ^0_α-вычислимого изоморфизма; в рамках этого подхода получена серия результатов для таких классов структур как булевы алгебры, линейные порядки, модели эквивалентности и др.

От проблем существования в теории вычислимых моделей перейдём к другой фундаментальной проблеме — к проблеме единственности. Изучение единственности вычислимого представления было начато А.И. Мальцевым, который ввёл понятие автоустойчивой (вычислимо категоричной) модели. Ясно, что для полного решения проблемы единственности необходимо в общем случае изучать вопрос о числе неэквивалентных вычислимых представлений данной структуры.

Напомним, что *вычислимой размерностью* структуры $\mathfrak{M}$ называется максимальное число $\dim(\mathfrak{M})$ попарно не вычислимо изоморфных друг другу вычислимых представлений $\mathfrak{M}$. Если $\dim(\mathfrak{M}) = 1$, то $\mathfrak{M}$ называют *вычислимо категоричной*. В данных терминах проблема числа вычислимых представлений структуры формулируется следующим образом:

Проблема 3. *Получить описание вычислимых размерностей структур из данного класса моделей.*

Решение проблемы 3, в частности, включает в себя получение описания вычислимо категоричных структур из данного класса. Для многих классов структур такое описание формулируется в подходящих алгебраических терминах. Так, в [13] доказано, что вычислимая булева алгебра вычислимо категорична тогда и только тогда, когда множество её атомов конечно. Там же установлено, что вычислимый линейный порядок вычислимо категоричен, если и только если он имеет лишь конечное число пар соседних элементов. Из доказанной в [8] теоремы о неограниченных моделях следует, что абелева группа без кручения вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен. Известно [14, § 2.5], что алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики вычислимо категорично, если и только если его ранг трансцендентности над простым подполем конечен. В [8] получено полное описание вычислимо категоричных абелевых p-групп. В [60, 61] найдено полное описание вычислимо категоричных деревьев.

Отметим, что во всех упомянутых в предыдущем абзаце классах вычислимая размерность вычислимо представимых структур может принимать лишь два значения: 1 или ω. Первый пример вычислимой структуры, обладающей конечной вычислимой размерностью n, где $n \geqslant 2$, был построен в [9]. При этом пример из [9] является вычислимым частичным порядком. Более того, в [9] было доказано, что вычислимую размерность любой структуры произвольной сигнатуры можно реализовать как вычислимую размерность некоторого частичного порядка (а значит и некоторого ориентированного графа). Позже были построены примеры структур с вычислимой размерностью $n \geqslant 2$ в таких классах как 2-ступенно нильпотентные группы [15], решётки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы [52], а также поля [63]. Вопросы реализуемости конечных вычислимых размерностей в счётных структурах и их константных обогащениях также изучались в [31, 39, 57].

С учётом приведённых выше результатов, складывается следующее наблюдение: если в классе моделей K не удаётся получить описание вычислимой категоричности в подходящих структурных терминах, то как правило в K реализуются все возможные вычислимые размерности n, где $1 \leqslant n \leqslant \omega$. Подтверждением этого наблюдения можно считать тот факт, что в классах частичных порядков, 2-ступенно нильпотентных групп, решёток, колец и т.п. вряд ли стоит ожидать получения приемлемого критерия вычислимой категоричности.

Изучение вопросов реализуемости вычислимых размерностей тесно связано с проблемами реализуемости различных видов спектров тьюринговых степеней в счётных структурах и является одним из основных направлений исследований в теории вычислимых моделей.

Пусть $\mathfrak{M}$ — счётная структура вычислимой сигнатуры, $\mathbf{d}$ — произвольная тьюрингова степень. Структура $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимой*, если её носитель является вычислимым подмножеством ω, а её атомная диаграмма $\mathbf{d}$-вычислима. Наименьшая степень $\mathbf{d}$ такая, что $\mathfrak{M}$ является $\mathbf{d}$-вычислимой, называется *степенью структуры* $\mathfrak{M}$. ($\mathbf{d}$-*вычислимым*) *представлением* для $\mathfrak{M}$ называется любая ($\mathbf{d}$-вычислимая) структура с вычислимым носителем, которая изоморфна $\mathfrak{M}$.

Спектром степеней счётной структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$ всех степеней её представлений. *Спектром степеней отношения* S на носителе вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$ всех степеней образов S во всех вычислимых представлениях $\mathfrak{M}$.

$\mathbf{d}$-*вычислимой размерностью* структуры $\mathfrak{M}$ называется число $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ вычислимых представлений $\mathfrak{M}$ с точностью до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма. Если $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M}) = 1$, то $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимо категоричной. Спектром категоричности* вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{CatSp}(\mathfrak{M})$ всех степеней $\mathbf{d}$ таких, что $\mathfrak{M}$ является $\mathbf{d}$-вычислимо категоричной.

Спектром автоморфизмов вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{M})$ степеней всех нетривиальных автоморфизмов $\mathfrak{M}$.

Проблема 4. *Определить, какие совокупности тьюринговых степеней можно реализовать в качестве указанных выше спектров в структурах из данного класса моделей.*

Вопросы реализуемости спектров степеней рассматриваются как в общем случае, так и в конкретных классах систем. Проблема реализуемости спектров степеней счётных структур исследовалась в [21, 45, 58, 65, 68, 74]. Возможные спектры степеней отношений на структурах изучались в [31, 45, 48–51, 57]. Степени категоричности и спектры категоричности структур исследовались в [1, 2, 11, 40, 44, 62]. В работе [29] введено понятие спектра автоморфизмов структуры и изучены вопросы реализуемости различных спектров автоморфизмов.

В работе [52] было доказано, что спектры степеней и эффективные размерности, которые удаётся реализовать в каких-либо структурах, можно также реализовать в классе ориентированных графов. Таким образом, класс ориентированных графов можно назвать *полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей.* В [52] также установлено, что полными относительно спектров степеней и эффективных размерностей являются следующие классы структур: неориентированные графы, частичные порядки, решётки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы, 2-ступенно нильпотентные группы. Недавно было показано, что полными относительно спектров степеней и эффективных размерностей являются также класс полей [63] и класс полимодальных алгебр [36].

К основным проблемам теории вычислимых моделей также относят вопросы классификации алгоритмических проблем по их сложности. Один из подходов классификации вычислимых структур в классе K основан на изучении алгоритмической сложности проблемы изоморфизма в K. Принято считать, что класс K обладает вычислимой классификацией, если проблема изоморфизма в данном классе имеет гиперарифметическую сложность (см. [16]).

Если структура $\mathfrak{M}$ данной сигнатуры σ вычислима, то её атомная диаграмма $D(\mathfrak{M})$ вычислима. В таком случае *вычислимым индексом* структуры $\mathfrak{M}$ называют число e такое, что $D(\mathfrak{M}) = W_e$, где W_e — вычислимо перечислимое множество с клиниевским номером e. Через $\mathfrak{M}_e$ обозначим вычислимую модель с вычислимым индексом e.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизма. *Проблемой изоморфизма* для класса K называется множество $E(K)$ всех пар $\langle a, b\rangle$ индексов вычислимых структур из K, для которых структуры $\mathfrak{M}_a$ и $\mathfrak{M}_b$ изоморфны.

Обобщением проблемы изоморфизма является проблема вложимости структур. Интерес к исследованию проблемы вложимости вычислимых структур из различных классов был вызван желанием сравнить её сложность со сложностью проблемы изоморфизма. В некоторых классах структур проблема вложимости может быть сложнее проблемы изоморфизма, в других классах, наоборот, сложность проблемы вложимости ниже сложности проблемы изоморфизма (см. [22]).

Проблемой вложимости для класса K называется множество $Em(K)$ всех пар $\langle a, b\rangle$ индексов вычислимых структур из K, для которых существует изоморфное вложение структуры $\mathfrak{M}_a$ в структуру $\mathfrak{M}_b$.

Необходимость изучения алгоритмической сложности следующего множества индексов связано с проблемой 3. Как было замечено выше, решение проблемы вычислимой категоричности в классе структур K часто сводится к описанию вычислимо категоричных представителей K в терминах относительно простых инвариантов. Принято считать, что в классе K не существует приемлемой характеризации вычислимой категоричности, если индексное множество вычислимо категоричных моделей из K имеет довольно большую алгоритмическую сложность.

Проблемой вычислимой категоричности для класса K называется множество $I_{cc}(K)$ всех индексов e вычислимых структур из K таких, что структура $\mathfrak{M}_e$ вычислимо категорична.

Таким образом, в вопросах изучения сложности индексных множеств можно сформулировать общую проблему:

Проблема 5. *Найти точные оценки сложности указанных выше алгоритмических проблем для данного класса структур.*

Для получения оценки сложности проблемы традиционно используются классы арифметической, гиперарифметической или аналитической иерархий сложности. Чтобы показать точность полученной оценки, доказывают m-полноту рассматриваемой проблемы в данном классе иерархии.

В [37] найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма для классов векторных пространств над фиксированным вычислимым полем, алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики, вещественно замкнутых полей, всех полей фиксированной характеристики. В [38] найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма для различных классов абелевых p-групп ограниченного ульмового ранга. В [22] изложен сравнительный анализ сложности проблем вложимости и изоморфизма для таких классов структур как векторные пространства над полем $\mathbb{Q}$, архимедовы упорядоченные поля, абелевы группы без кручения конечного ранга, конечно-порождённые свободные группы и др.

Если множество вычислимых индексов структур из класса K гиперарифметическое, то в худшем случае для класса K проблемы $E(K)$ и $Em(K)$ являются Σ^1_1-множествами, а проблема $I_{cc}(K)$ является Π^1_1-множеством.

Максимальная сложность проблемы изоморфизма достигается во многих классических категориях алгебраических систем, при этом проблема изоморфизма оказывается m-полным Σ^1_1-множеством. Так Σ^1_1-полнота проблемы изоморфизма для класса неориентированных графов была установлена в [23, 64]. Доказательства Σ^1_1-полноты проблемы изоморфизма для классов линейных порядков, деревьев, булевых алгебр и абелевых p-групп могут быть найдены в [16]. Из результатов статьи [52] следует Σ^1_1-полнота проблемы изоморфизма для классов колец, дистрибутивных решёток, нильпотентных групп и полугрупп. В [37] доказана Σ^1_1-полнота проблемы изоморфизма для классов полей фиксированной характеристики и вещественно замкнутых полей. В [22] установлено, что проблема вложимости является m-полным Σ^1_1-множеством в таких классах структур как линейные порядки, булевы алгебры, абелевы p-группы, неориентированные графы, поля фиксированной характеристики, 2-ступенно нильпотентные группы.

Проблема вычислимой категоричности также достигает максимально возможной сложности во многих классах структур. В [42] доказано, что проблема вычислимой категоричности в классе деревьев является m-полным Π^1_1-множеством. Отсюда следует, что проблема вычислимой категоричности является m-полным Π^1_1-множеством для многих полных относительно спектров степеней и эффективных размерностей классов структур, о которых говорилось выше. В частности, проблема вычислимой категоричности является m-полным Π^1_1-множеством в классе симметричных иррефлексивных графов [52] и в классе полей [63].

Предметом исследования настоящей диссертации являются проективные плоскости. Понятие проективной плоскости, пришедшее из классической геометрии, в различных модификациях используется во многих разделах современной математики. Традиционный подход к данному классу объектов основывается на определении проективной плоскости как множества точек и прямых с заданным на нём отношением инцидентности [53]. В середине прошлого века при изучении проективных плоскостей некоторые авторы явно или неявно начинают использовать частичную бинарную операцию.

В 1977 году А.И. Ширшов в докладе на XIV Всесоюзной алгебраической конференции предложил концепцию проективной плоскости как частичной алгебраической системы, изложенную затем в работе [33]. Этот алгебраический подход позволил сформулировать ряд вопросов и разработать новые методы, повлекшие за собой работы А.И. Ширшова [32, 33], А.А. Никитина [24–26, 33] и В.В. Вдовина [3–5, 71–73].

В [33] приведены конструкции вполне свободной и свободной проективных плоскостей как частичных алгебраических систем, в которых каждый элемент однозначно представим в виде некоторого неассоциативного слова от порождающих. На основе этих конструкций были изучены вопросы вложения вполне свободных проективных плоскостей в конечно-порождённую вполне свободную проективную плоскость, а также доказано, что всякая не более чем счётная проективная плоскость является гомоморфным образом 4-порождённой вполне свободной проективной плоскости. В [32] показано, что операции в тернаре проективной плоскости выражаются через частичную бинарную операцию, согласованную с отношением инцидентности плоскости.

В [24] установлено, что любая свободно порождённая проективная плоскость может быть гомоморфно отображена на произвольную конечную или счётную проективную плоскость. В [25] показано, что для конечно-порождённых свободно порождённых проективных плоскостей алгоритмически разрешимы проблемы равенства, инцидентности, задача о вхождении элемента в подплоскость, задача о пересечении подплоскостей, и доказывается, что всякая свободно порождённая проективная плоскость аппроксимируется любой конечно-порождённой проективной плоскостью. В [26] доказано, что проблема равенства для проективных плоскостей эквивалентна проблеме инцидентности и проблеме равенства для тернаров, соответствующих этим плоскостям. Проблема равенства для папповых проективных плоскостей разрешима, а для дезарговых — неразрешима [26].

В [3] изучается понятие ядерной эквивалентности, связанное с гоморфизмами проективных плоскостей, найдены некоторые свойства ядерных эквивалентностей, общие для всех плоскостей. В [4] исследуется однозначная определённость гомоморфизмов проективных плоскостей значением на некоторых множествах точек. В [71] изучается вопрос существования простых проективных плоскостей, доказаны некоторые теоремы вложения в простые проективные плоскости, из которых в частности следует, что существует континуум простых 4-порождённых неизоморфных плоскостей. В [72] доказана обобщённая теорема о продолжении гомоморфизмов невырожденных незамкнутых конфигураций до гомоморфизмов свободно порождённых плоскостей, позволяющая единообразно получать примеры гомоморфизмов из [24, 25]. Также в [72] введено понятие проективной плоскости, конечно определённой конечным множеством порождающих и конечной системой соотношений, и получено полное описание таких плоскостей. Доказано, что проблема равенства в любой конечно определённой проективной плоскости разрешима. В [5] показано, что в невырожденной проективной плоскости проблема равенства слов разрешима, если существует эффективный алгоритм, позволяющий распознавать слова, равные некоторому фиксированному слову. Там же установлено, что гомоморфизм свободной проективной плоскости рекурсивен, если рекурсивен прообраз хотя бы одного элемента относительно этого гомоморфизма. В [73] введено понятие плоскости, конструктивно определённой конечным множеством порождающих, конечной системой соотношений и некоторым алгоритмом выбора. Доказано, что всякая конечно определённая плоскость является конструктивно определённой. Построен пример конструктивно определённой плоскости с неразрешимой проблемой равенства, откуда следует, что класс конечно определённых плоскостей является собственным подклассом в классе конструктивно определённых плоскостей.

Из всего вышесказанного видно, что существует не так много результатов, затрагивающих данный класс систем с точки зрения общей теории вычислимых моделей. В классе проективных плоскостей каждая из выделенных выше проблем 1–5 является открытой.

Отметим также, что неразрешимость элементарной теории проективных плоскостей является хорошо известным фактом и установлена А. Тарским в 1949 году [69]. Более того, из результатов [69] вытекает наследственная неразрешимость теории папповых проективных плоскостей, а значит, и наследственная неразрешимость теории дезарговых проективных плоскостей. Однако, естественный вопрос о разрешимости теории класса свободно порождённых проективных плоскостей до сих пор остаётся без ответа. Эту известную открытую проблему мы выделим отдельно:

Проблема 6. *Определить, является ли разрешимой теория класса свободно порождённых проективных плоскостей.*

Подробный обзор результатов о разрешимости и неразрешимости теорий был осуществлен в [19]. Среди классов алгебраических систем, вошедших в данный обзор, присутствуют различные классы групп, полугрупп и решёток, которые можно считать близкими к классу проективных плоскостей. Так, например, элементарная теория абелевых групп разрешима. Неразрешимыми являются элементарные теории групп, полугрупп и коммутативных полугрупп. Кроме этого, класс проективных геометрий (т.е. простых модулярных решёток с относительными дополнениями конечной длины) имеет неразрешимую теорию.

В 2006 году С.С. Гончаровым была поставлена задача развить новое научное направление для решения алгоритмических проблем в теории проективных плоскостей, при этом особый интерес представляли актуальные проблемы теории вычислимых моделей (проблемы 1–5) в известных классах проективных плоскостей и проблема разрешимости теории свободно порождённых проективных плоскостей (проблема 6).

В данной диссертации, основываясь на алгебраическом подходе А.И. Ширшова, мы развиваем теорию вычислимых проективных плоскостей, исследуя выделенные выше проблемы 1–5 в основных подклассах проективных плоскостей, а также находим решение проблемы 6.

Приведём алгебраическое определение проективной плоскости [33].

Проективной плоскостью называется частичная алгебраическая система $\mathfrak{A}=\langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$

с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0\!A = A$, $A^0 \cap {}^0\!A = \varnothing$ и частичной бинарной коммутативной операцией "$\cdot$" (произведение), удовлетворяющей следующим условиям:

(1) Произведение $a \cdot b$ определено тогда и только тогда, когда a, b — различные однотипные элементы из A (элементы a, b называются *однотипными*, если $a, b \in A^0$ или $a, b \in {}^0\!A$);

(2) Если определено произведение $a \cdot b$, то элементы a и $a \cdot b$ — неоднотипные;

(3) Для любых $a, b, c \in A$, для которых определены произведения $a \cdot b$, $a \cdot c$ и $(a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$, выполняется равенство $(a \cdot b) \cdot (a \cdot c) = a$;

(4) Существуют попарно различные $a, b, c, d \in A$ такие, что определены и попарно различны произведения $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot d$, $d \cdot a$.

Для возможности использования методов и понятий теории вычислимых моделей мы переходим от двусортных частичных алгебраических систем к классическим предикатным моделям. Будем рассматривать произвольную проективную плоскость $\langle A, A^0, {}^0\!A, \cdot \rangle$ как модель $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0\!A, P^{\mathfrak{A}} \rangle$ предикатной сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0\!A, P \rangle$, с носителем A, где A^0 и ${}^0\!A$ — одноместные предикатные символы, интерпретируемые в $\mathfrak{A}$ как соответствующие элементы разбиения её носителя, а P — трёхместный предикатный символ, выделяющий график частичной операции, т.е.

$$P^{\mathfrak{A}} = \{ \langle a, b, c \rangle \in A^3 \mid a \cdot b \text{ определено и равно } c \}.$$

Таким образом, проективная плоскость $\mathfrak{A}$ *вычислима*, если A, A^0, ${}^0\!A$ — вычислимые подмножества ω, а отношение $P^{\mathfrak{A}}$ — вычислимое подмножество ω^3.

Конфигурацией называется частичная алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0\!A, I \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0\!A = A$, $A^0 \cap {}^0\!A = \varnothing$ и симметричным бинарным отношением $I \subseteq A^2$ (*отношение инцидентности*), удовлетворяющим следующим условиям:

(1) Если $\langle a, b \rangle \in I$, то элементы a и b — неоднотипные;

(2) Если $\langle a, c \rangle \in I$, $\langle b, c \rangle \in I$, $\langle a, d \rangle \in I$, $\langle b, d \rangle \in I$, то $a = b$ или $c = d$.

С любой конфигурацией $\mathfrak{A}$ можно связать частичную бинарную коммутативную операцию, считая, что для различных однотипных $a, b \in A$ произведение $a \cdot b$ определено и равно c, если и только если $\langle a, c \rangle \in I$ и $\langle b, c \rangle \in I$.

Если конфигурация $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0\!A, I \rangle$ конечна, то число $2 \cdot |A| - \frac{|I|}{2}$ называется *рангом* $\mathfrak{A}$. Если конфигурация $\mathfrak{A}$ счётна, то по определению её *ранг* равен ω.

Говорят, что проективная плоскость $\mathfrak{F}$ *свободно порождена* конфигурацией $\mathfrak{A}$, если существует счётная последовательность конфигураций

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \ldots$$

такая, что $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$ и для любого $i \in \omega$ справедливы свойства: (а) для любых различных однотипных $a, b \in \mathfrak{A}_i$ существует $c \in \mathfrak{A}_{i+1}$ такой, что $a \cdot b = c$; (б) для любого $c \in \mathfrak{A}_{i+1} \setminus \mathfrak{A}_i$ существуют ровно два элемента $a, b \in \mathfrak{A}_i$ такие, что $a \cdot b = c$. При этом *рангом* свободно порождённой плоскости $\mathfrak{F}$ называется ранг исходной конфигурации $\mathfrak{A}$.

Свободная проективная плоскость $\mathfrak{F}_\alpha$, где $2 \leqslant \alpha \leqslant \omega$, свободно порождается *стандартной* конфигурацией с множеством точек $\{b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \alpha\}$, множеством прямых $\{c\}$ и отношением инцидентности $\{\langle a_i, c\rangle, \langle c, a_i\rangle \mid i \in \alpha\}$. Таким образом, свободная плоскость $\mathfrak{F}_n$, где $2 \leqslant n < \omega$, имеет ранг $n+6$. Свободная плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ имеет ранг ω.

Проективная плоскость называется *дезарговой*, если в ней справедливо *условие Дезарга*: для любых однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что определены произведения $a_1{\cdot}a_2$, $b_1{\cdot}b_2$, $c_1{\cdot}c_2$, $(a_1{\cdot}b_1){\cdot}(a_2{\cdot}b_2)$, $(a_1{\cdot}c_1){\cdot}(a_2{\cdot}c_2)$, $(b_1{\cdot}c_1){\cdot}(b_2{\cdot}c_2)$, а тройки $\{a_1, b_1, c_1\}$, $\{a_2, b_2, c_2\}$ образуют невырожденные треугольники, если $a_1{\cdot}a_2$, $b_1{\cdot}b_2$, $c_1{\cdot}c_2$ инцидентны одному и тому же элементу, то $(a_1{\cdot}b_1){\cdot}(a_2{\cdot}b_2)$, $(a_1{\cdot}c_1){\cdot}(a_2{\cdot}c_2)$, $(b_1{\cdot}c_1){\cdot}(b_2{\cdot}c_2)$ тоже инцидентны одному и тому же элементу.

Проективная плоскость называется *папповой*, если в ней справедливо *условие Паппа*: для любых однотипных элементов $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ таких, что $a_1{\cdot}b_1 = a_1{\cdot}c_1 = b_1{\cdot}c_1$, $a_2{\cdot}b_2 = a_2{\cdot}c_2 = b_2{\cdot}c_2$, $a_1{\cdot}b_1 \neq a_2{\cdot}b_2$, а четвёрка $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ образует невырожденный четырёхугольник, если определены произведения $a_3 = (b_1{\cdot}c_2){\cdot}(b_2{\cdot}c_1)$, $b_3 = (a_1{\cdot}c_2){\cdot}(a_2{\cdot}c_1)$, $c_3 = (a_1{\cdot}b_2){\cdot}(a_2{\cdot}b_1)$, то a_3, b_3, c_3 инцидентны одному и тому же элементу.

Отметим, что любая паппова проективная плоскость является дезарговой, и никакая дезаргова проективная плоскость не является свободно порождённой.

Известно [53, гл. VI], что произвольная дезаргова (паппова) проективная плоскость определяется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом (полем) $\mathfrak{K}$ как проективная плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, состоящая из всех одномерных и двухмерных подпространств трёхмерного левого векторного пространства над $\mathfrak{K}$. Ассоциативное тело (поле) $\mathfrak{K}$ называют *координатным телом (полем)* дезарговой (папповой) проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$.

Цели и задачи исследования. Одна из основных целей диссертации — на основе алгебраического подхода А.И. Ширшова развить теорию вычислимых проективных плоскостей и решить указанные выше проблемы 1–5 в следующих основных классах проективных плоскостей: (а) свободные проективные плоскости; (б) свободно порождённые проективные плоскости; (в) папповы проективные плоскости; (г) дезарговы проективные плоскости. Другая важная цель — найти решение проблемы 6.

Для достижения этих целей планируется решить следующие задачи:

1. Получить достаточные признаки существования вычислимых представлений для проективных плоскостей из указанных классов. В частности, получить в тех же классах описание автоматно представимых проективных плоскостей.

2. Для каждого из указанных классов доказать существование или отсутствие вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

3. Получить описание спектра возможных вычислимых размерностей проективных плоскостей из указанных классов. В частности, найти описание вычислимо категоричных проективных плоскостей в подходящих структурных терминах, либо доказать полноту рассматриваемого класса относительно спектров степеней и эффективных размерностей.

4. Для указанных классов найти точные оценки сложности следующих естественных алгоритмических проблем: проблема изоморфизма, проблема вложимости, проблема вычислимой категоричности.

5. Доказать неразрешимость теории класса свободно порождённых плоскостей.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений (опубликовано в [80]).

2. Доказано, что ни один из следующих классов проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости (опубликовано в [75, 79]).

3. Показано, что в классе свободных проективных плоскостей реализуются только две вычислимые размерности: 1 и ω. Доказано, что произвольная свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен (опубликовано в [75]).

4. Доказано, что класс свободно порождённых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Как следствие, получен результат о том, что в классе свободно порождённых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$ (опубликовано в [83]).

5. Доказано, что теория класса свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима (опубликовано в [76]).

6. Доказано, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Установлено, что вычислимая размерность папповой (дезарговой) проективной плоскости совпадает с вычислимой размерностью её координатного поля (тела). В частности, в классе папповых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$ (опубликовано в [77, 81]).

7. Найдены точные оценки сложности проблем изоморфизма, вложимости и вычислимой категоричности в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей. Для класса свободных проективных плоскостей конечного ранга найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма и вложимости (опубликовано в [78, 82, 84]).

Все результаты получены автором диссертации лично. Результат из пункта 1 опубликован в совместной с А.С. Денисенко статье [80].

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. В диссертации создано новое научное направление, связанное с решением алгоритмических проблем в теории проективных плоскостей.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер, её результаты содержат решения соответствующих актуальных алгоритмических проблем в приложении к проективным плоскостям. Отметим, что описание автоматных моделей в классах свободных, дезарговых и папповых проективных плоскостей было ранее получено А.С. Денисенко в [17]. Результат об отсутствии автоматных представлений для свободно порождённых плоскостей дополняет это описание до окончательного. В диссертации предложен новый оригинальный метод эффективной интерпретации симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей, который позволил решить сразу две задачи: задачу описания спектра возможных вычислимых размерностей свободно порождённых плоскостей и задачу о наследственной неразрешимости теории класса свободно порождённых проективных плоскостей. Учитывая результат А. Тарского [69], получаем, что теории всех основных классов проективных плоскостей неразрешимы. Результаты о полноте относительно спектров степеней и эффективных размерностей для классов свободно порождённых и папповых проективных плоскостей ставят эти классы в один ряд с другими эффективно полными классами из [52], что потенциально позволяет получать новые примеры эффективно полных классов. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований по теории вычислимых проективных плоскостей. В диссертации также были получены некоторые структурные результаты и новые методы, относящиеся к свободно порождённым плоскостям, которые могут быть использованы в исследованиях алгебраических свойств проективных плоскостей.

Методы исследований. В работе использованы методы теории вычислимых моделей и алгебраической теории проективных плоскостей. Для представления свободно порождённых проективных плоскостей используется конструкция Ширшова [25, 33], для представления дезарговых (папповых) плоскостей используется их координатизация с помощью ассоциативных тел (полей) [53]. Отсутствие автоматных представлений для свободно порождённых плоскостей доказывается методом оценки функций роста длин слов в локально конечных моделях [55]. Невычислимость классов проективных плоскостей устанавливается с помощью теоремы о неограниченных моделях и её следствий [8]. Полнота классов относительно спектров степеней и эффективных размерностей доказывается с использованием общих методов из [52], при этом мы строим эффективную интерпретацию симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых плоскостей и эффективную интерпретацию полей в папповых плоскостях. Для доказательства неразрешимости теории класса свободно порождённых плоскостей применяется метод относительной элементарной определимости [19].

Апробация результатов. По результатам диссертации сделаны доклады на международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2007, 2012, 2014, 2016 гг.), «Logic Colloquium» (София, Болгария, 2009 г.; Барселона, Испания, 2011 г.; Вена, Австрия, 2014 г.; Хельсинки, Финляндия, 2015 г.; Лидс, Великобритания, 2016 г.), «Computability in Europe» (Афины, Греция, 2008 г.; Кембридж, Великобритания, 2012 г.), «Computability and Models» (Новосибирск, 2007 г.), «Вычислимость и модели» (Усть-Каменогорск, Казахстан, 2009 г.), а также на совместном российско-австрийском семинаре в Исследовательском центре имени Курта Гёделя (Вена, Австрия, 2010 г.). Результаты диссертации докладывались на совместных семинарах ИМ СО РАН и НГУ «Алгебра и логика», «Конструктивные модели», Семинаре имени А.И. Ширшова и на Общеинститутском математическом семинаре ИМ СО РАН.

Публикации. Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в работах [75–95], из них [75–84] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук. Работа [80] написана в соавторстве с А.С. Денисенко. В диссертацию вошёл лишь тот результат из [80], который был получен автором диссертации самостоятельно, остальные результаты из [80] принадлежат А.С. Денисенко.

Обзор содержания диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы. Список литературы приведён в алфавитном порядке и содержит 95 наименований. Объём диссертации — 127 страниц.

Перейдём к описанию глав и параграфов диссертации, выделяя её основные результаты в виде теорем и их следствий.

Глава 1 диссертации является вводной. В ней излагаются необходимые предварительные сведения (определения, обозначения, результаты) из теории вычислимых моделей, теории автоматных моделей и теории проективных плоскостей.

Глава 2 посвящена проблеме существования вычислимых представлений моделей из различных классов проективных плоскостей.

В § 2.1 показывается, что если конфигурация $\mathfrak{A}$ имеет вычислимые множества элементов 1-го и 2-го типов и $\mathbf{d}$-вычислимое отношение инцидентности, то конструкция Ширшова позволяет строить $\mathbf{d}$-вычислимое представление проективной плоскости $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, свободно порождённой конфигурацией $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что любая счётная свободная проективная плоскость имеет вычислимое представление. Изложенная в § 2.1 конструкция будет неоднократно использована в следующих главах.

В § 2.2 излагается основанный на идее координатизации метод относительной элементарной определимости ассоциативных тел (полей) в классе дезарговых (папповых) проективных плоскостей. Используя данный метод в § 2.3, мы доказываем, что дезаргова (паппова) проективная плоскость имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда её координатное тело (поле) имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление. Изложенные в § 2.2 и § 2.3 конструкции будут также применяться в следующих главах.

В § 2.4 изучаются автоматные представления проективных плоскостей. Доказывается, что произвольная свободно порождённая плоскость не имеет автоматных представлений.

Из всех полученных в главе 2 результатов основным мы считаем следующую теорему:

Теорема 2.4.5. *Произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.*

Глава 3 содержит решение проблемы существования вычислимых нумераций типов вычислимого изоморфизма для основных классов проективных плоскостей. Доказывается, что ни один из следующих классов вычислимых проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости.

Для доказательства невычислимости классов свободных, свободно порождённых и произвольных проективных плоскостей мы показываем, что в некотором несущественном обогащении свободная проективная плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ счётного ранга является неограниченной [8].

В § 3.1 определяется некоторое несущественное обогащение $\mathfrak{F}'_\omega$ модели $\mathfrak{F}_\omega$ и его представление в виде вычислимой цепи конечных моделей, которое потребуется для доказательства неограниченности модели $\mathfrak{F}'_\omega$. Также для доказательства неограниченности $\mathfrak{F}'_\omega$ необходимо установить факт существования изоморфных вложений конечных подмоделей $\mathfrak{F}'_\omega$ с рядом дополнительных свойств — описанию подобных вложений посвящён § 3.2.

В § 3.3 окончательно излагается доказательство неограниченности модели $\mathfrak{F}'_\omega$, и в качестве следствий формулируются полное описание вычислимых размерностей свободных проективных плоскостей и результат о невычислимости классов свободных, свободно порождённых и произвольных проективных плоскостей.

Следствие 3.3.2. *Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна* 1 *или* ω. *Свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.*

Следствие 3.3.3. *Пусть* K *— любой из следующих классов моделей:*

(1) класс всех свободных проективных плоскостей,

(2) класс всех свободно порождённых проективных плоскостей,

(3) класс всех проективных плоскостей.

Тогда K^c *не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.*

Для доказательства невычислимости классов папповых и дезарговых плоскостей рассматривается алгебраически замкнутое поле $\mathfrak{K}_\omega$ счётного ранга трансцендентности над $\mathbb{Q}$.

В § 3.4, используя неограниченность поля $\mathfrak{K}_\omega$ (см. [14, следствие 5.1.8]), мы показываем, что для любого вычислимого семейства дезарговых (папповых) проективных плоскостей существует такое вычислимое представление $\mathfrak{A}$ папповой проективной плоскости, определённой полем $\mathfrak{K}_\omega$, что $\mathfrak{A}$ не является вычислимо изоморфным ни одной плоскости из семейства. Отсюда, как следствие, получены результаты об отсутствии вычислимых нумераций для класса всех дезарговых плоскостей и класса всех папповых плоскостей с точностью до вычислимого изоморфизма.

Следствие 3.4.3. *Пусть* K *— любой из следующих классов моделей:*

(1) класс всех папповых проективных плоскостей,

(2) класс всех дезарговых проективных плоскостей.

Тогда K^c *не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.*

В конце § 3.4 приведены результаты А.К. Войтова [6], посвящённые вопросам существования Δ^0_α-вычислимых нумераций классов проективных плоскостей.

Глава 4 посвящена доказательству того, что класс всех свободно порождённых проективных плоскостей и класс всех папповых проективных плоскостей являются эффективно полными относительно определённых видов спектров степеней и вычислимых размерностей. В частности, отсюда будет следовать, что в этих классах реализуются все возможные вычислимые размерности.

Для доказательства эффективной полноты класса свободно порождённых проективных плоскостей определяется подходящая эффективная интерпретация симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых плоскостей бесконечного ранга и применяется достаточный признак эффективной полноты из [52]. В качестве одного из следствий предложенной интерпретации также доказывается наследственная неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей.

В § 4.1 определяется интерпретация счётных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей бесконечного ранга. В § 4.2 устанавливаются некоторые алгебраические свойства определённой в предыдущем параграфе интерпретации графов в свободно порождённых плоскостях.

В § 4.3 приведены алгоритмические свойства построенной интерпретации и доказываются основные результаты о спектрах степеней и эффективных размерностях в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Как следствие, получен результат о том, что для любого натурального $n \geqslant 1$ существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна n. Таким образом, критерий вычислимой категоричности свободных проективных плоскостей, доказанный в следствии 3.3.2, не переносится на случай произвольных свободно порождённых плоскостей.

Теорема 4.3.5. *Для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры $\mathfrak{M}$ существует свободно порождённая проективная плоскость $\mathfrak{F}$ такая, что*

(1) $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{F}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$*;*

(2) $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{F}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ *для всех степеней* $\mathbf{d}$*;*

(3) Для любого элемента $a \in |\mathfrak{M}|$ существует элемент $x \in |\mathfrak{F}|$ такой, что $\dim(\langle \mathfrak{F}, x\rangle) = \dim(\langle \mathfrak{M}, a\rangle)$*;*

(4) Для любого отношения $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ существует отношение $U \subseteq |\mathfrak{F}|$ такое, что $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{F}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$.

Следствие 4.3.7. *Для любого n такого, что $1 \leqslant n \leqslant \omega$, существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна n.*

В § 4.4 используется ослабленная версия предложенной в § 4.1 интерпретации для доказательства относительной элементарной определимости класса конечных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Отсюда следует наследственная неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей.

Теорема 4.4.3. *Теория класса всех свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.*

Для доказательства эффективной полноты класса папповых проективных плоскостей используется доказанный в [63] результат об эффективной полноте класса полей и предложенные в § 2.3 конструкции, позволяющие по заданному представлению $\mathfrak{F}$ координатного поля $\mathfrak{K}$ строить представление $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ соответствующей папповой плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, и, наоборот, в заданном представлении $\mathfrak{A}$ папповой плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ определять представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ для её координатного поля, используя в качестве параметров некоторый невырожденный четырёхуголник $\overline{D}$ в плоскости $\mathfrak{A}$.

В § 4.5 доказывается ряд алгоритмических свойств представления $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ папповой проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ и представления $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ поля $\mathfrak{K}$.

В § 4.6 доказывается, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов. Отсюда, как следствие, получен результат о том, что для любого натурального $n \geqslant 1$ существует вычислимая паппова проективная плоскость вычислимой размерности n.

Теорема 4.6.5. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) Для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры $\mathfrak{M}$ существует паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$.

(2) Для любой вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ существует вычислимо представимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{A}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ *для всех степеней* $\mathbf{d}$.

(3) Для любой вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ и любого отношения $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ существуют вычислимо представимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ и отношение $U \subseteq |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$.

(4) Для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ существует вычислимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{A}) = \mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{M})$.

Следствие 4.6.7. *Для любого n такого, что $1 \leqslant n \leqslant \omega$, существует вычислимая паппова проективная плоскость, вычислимая размерность которой равна n.*

Из пункта (2) теоремы 4.6.5 очевидно следует, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров категоричности.

Глава 5 посвящена получению точных оценок сложности некоторых естественных алгоритмических проблем в определённых классах вычислимых проективных плоскостей. Алгоритмические проблемы, сложность которых мы оцениваем, — это проблема изоморфизма $E(K)$, проблема вложимости $Em(K)$ и проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$. Классы проективных плоскостей, в которых мы оцениваем указанные выше проблемы, — это папповы плоскости, дезарговы плоскости, свободные плоскости конечного ранга, произвольные проективные плоскости.

В § 5.1 доказывается, что в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема изоморфизма достигает максимальной сложности, т.е. является m-полным Σ^1_1-множеством. Для получения этой оценки мы переносим в класс папповых проективных плоскостей доказанный в [37] результат о том, что проблема изоморфизма полей является m-полным Σ^1_1-множеством.

Теорема 5.1.1. *Проблема изоморфизма $E(K)$ является m-полным Σ^1_1-множеством для следующих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости,

(2) дезарговы проективные плоскости,

(3) все проективные плоскости.

Основная цель следующих двух параграфов состоит в получении точной оценки сложности проблемы изоморфизма свободных проективных плоскостей конечного ранга. Для этого сначала в § 5.2 строится серия специальных изоморфных вложения конечных подмоделей $\mathfrak{A}$ свободной плоскости $\mathfrak{F}_n$ в свободную плоскость $\mathfrak{F}_m$, где $m < n$. Затем в § 5.3 доказывается, что проблема изоморфизма в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ^0_3-множеством внутри класса.

Теорема 5.3.2. *Проблема изоморфизма в классе всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ^0_3-множеством внутри класса.*

В § 5.4 исследуется проблема вложимости для тех же классов проективных плоскостей, для которых в предыдущих параграфах были получены оценки сложности проблемы изоморфизма. Доказывается, что для классов папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема вложимости имеет такую же сложность как и проблема изоморфизма, т.е. является m-полным Σ^1_1-множеством.

Теорема 5.4.1. *Проблема вложимости $Em(K)$ является m-полным Σ^1_1-множеством для следущих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости;

(2) дезарговы проективные плоскости;

(3) произвольные проективные плоскости.

Вместе с тем проблема вложимости в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга вычислима внутри класса. Таким образом, в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга сложность проблемы вложимости меньше, чем сложность проблемы изоморфизма.

Теорема 5.4.2. *Проблема вложимости для класса всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является вычислимым множеством внутри класса.*

Наконец, в § 5.5 мы доказываем, что проблема вычислимой категоричности является m-полным Π^1_1-множеством в следующих классах моделей: папповы плоскости, дезарговы плоскости, произвольные проективные плоскости. Для доказательства данного результата мы используем полноту класса папповых проективных плоскостей относительно вычислимых размерностей (см. предыдущую главу), а также результаты работ [42, 52, 63].

Теорема 5.5.1. *Проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$ является m-полным Π^1_1-множеством для следующих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости,

(2) дезарговы проективные плоскости,

(3) все проективные плоскости.

В заключении излагаются итоги выполненного исследования, приводится список основных результатов диссертации.

Изложение работы заканчивается списком литературы.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту академику Сергею Савостьяновичу Гончарову за постановку задач, постоянное внимание к исследованиям автора и неизменную поддержку в работе.

Глава 1. Предварительные сведения

Данная короткая глава является вводной. В ней излагаются некоторые предварительные сведения и фиксируются обозначения, необходимые для изложения материала следующих глав.

Зафиксируем следующие обозначения. Через ω будем обозначать множество натуральных чисел. Область значения функции f обозначается как $\mathrm{range}(f)$. Для обозначения тождественного отображения используется символ id. Через $c(x, y)$ и $c^4(x, y, z, t)$ мы обозначаем канторовские нумерации пар и четвёрок натуральных чисел соответственно.

§ 1.1. Сведения из теории вычислимых моделей

Основные понятия и методы теории вычислимых моделей, которые мы используем, являются общепринятыми и могут быть найдены в [14, 35, 43]. Всю необходимую информацию по общей теории вычислимости можно найти в [27, 28].

Мы будем рассматривать только счётные структуры фиксированных вычислимых сигнатур.

Пусть $\mathfrak{M}$ — счётная структура вычислимой сигнатуры σ. Структуру $\mathfrak{M}$ будем называть *вычислимой*, если её носитель $|\mathfrak{M}|$ является вычислимым подмножеством ω, и её атомная диаграмма $D(\mathfrak{M})$ вычислима. Если структура $\mathfrak{M}$ вычислима, то её *вычислимым индексом* будем называть число e такое, что $D(\mathfrak{M}) = W_e$, где W_e — вычислимо перечислимое множество с клиниевским номером e.

Изоморфизм структуры $\mathfrak{M}$ на некоторую вычислимую структуру называется *вычислимым представлением* $\mathfrak{M}$. Мы часто будем отождествлять вычислимое представление $\mathfrak{M}$ с образом данного изоморфизма.

Если $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — структуры с вычислимыми носителями, то изоморфизм $f : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ называется *вычислимым*, если f является частично вычислимой функцией.

Вычислимой размерностью структуры $\mathfrak{M}$ будем называть число $\dim(\mathfrak{M})$ вычислимых представлений $\mathfrak{M}$ с точностью до вычислимого изоморфизма. Структура $\mathfrak{M}$ называется *вычислимо категоричной*, если $\dim(\mathfrak{M}) = 1$. Таким образом, вычислимая структура $\mathfrak{M}$ вычислимо категорична, если для любой её вычислимой копии $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$ существует вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$.

Пусть α — вычислимый ординал, $\alpha > 0$. Последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ вычислимых структур сигнатуры σ называется *Δ^0_α-вычислимой*, если существует Δ^0_α-вычислимая функция f такая, что $f(n)$ является вычислимым индексом структуры $\mathfrak{M}_n$ для каждого $n \in \omega$. В случае $\alpha = 1$ говорят о *вычислимой* последовательности структур.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизмов, K^c — множество всех вычислимых представителей класса K, и $\sim$ — некоторое отношение эквивалентности, заданное на K^c. Отображение $\nu : \omega \to K^c$ называется *нумерацией класса K^c*

с точностью до $\sim$ (нумерацией $K^c/\sim$), если для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M} \in K^c$ существует $n \in \omega$ такой, что $\mathfrak{M} \sim \nu(n)$.

Нумерация ν класса $K^c/\sim$ называется *фридберговой*, если для любых $m \neq n$ справедливо $\nu(m) \nsim \nu(n)$. Нумерация ν класса $K^c/\sim$ называется Δ^0_α*-вычислимой*, если последовательность структур $\{\nu(n)\}_{n\in\omega}$ является Δ^0_α-вычислимой. Класс K^c называется Δ^0_α*-вычислимым с точностью до* $\sim$, если $K^c/\sim$ обладает хотя бы одной Δ^0_α-вычислимой нумерацией.

В качестве метода доказательства невычислимости классов структур часто используют известную теорему С.С. Гончарова о неограниченных моделях [8]. Напомним формулировку теоремы о неограниченных моделях.

Следуя [8, 14], *представлением* для вычислимой модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ мы называем строго вычислимую последовательность $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in\omega}$ конечных моделей сигнатуры σ_i соответственно (здесь $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \ldots \subseteq \sigma_i \subseteq \ldots$ — строго вычислимая последовательность конечных сигнатур, для которой $\bigcup_{i\in\omega}\sigma_i = \sigma$) такую, что

(1) $|\mathfrak{M}| = \bigcup\limits_{i\in\omega}|\mathfrak{M}_i|$,

(2) $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_{i+1}$ для всех $i \in \omega$,

(3) $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$ для всех $i \in \omega$.

Вычислимая модель $\mathfrak{M}$ называется *неограниченной*, если существует её представление $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in\omega}$ и вычислимая последовательность бескванторных формул $\psi = \{\psi_{ij} \mid i, j \in \omega\}$ такие, что для любого $t_0 \in \omega$ и любой монотонно возрастающей неограниченной вычислимой функции g существуют $t \geqslant t_0$ и изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{M}_t \to \mathfrak{M}_{t+1}$ такие, что $\varphi \restriction \mathfrak{M}_{t_0} = \mathrm{id}$ и для некоторых $i \leqslant t$ и $n_1, \ldots, n_{s_i} \leqslant g(t)$ имеет место

$$\mathfrak{M}_{t+1} \models \bigwedge_{j=0}^{t+1} \psi_{ij}(n_1, \ldots, n_{s_i}),$$

но при этом

$$\mathfrak{M}_{t+1} \models \neg \bigwedge_{j=0}^{t+1} \psi_{ij}(\varphi(n_1), \ldots, \varphi(n_{s_i})).$$

В этом случае будем говорить, что $\mathfrak{M}$ *не ограничена относительно последовательности формул* ψ.

Пусть Φ — произвольное множество формул. Отображение $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ будем называть *вычислимым изоморфным вложением относительно предикатов из* Φ, если φ является вычислимым изоморфным вложением модели $\mathfrak{M}$ в модель $\mathfrak{N}$, сохраняющим не только истинность, но и ложность всех формул, входящих в Φ.

Предложение 1.1.1 (С.С. Гончаров [8])**.** *Если вычислимая модель $\mathfrak{M}$ не ограничена относительно последовательности формул ψ, то*

(i) По любому вычислимому классу S вычислимых моделей сигнатуры модели $\mathfrak{M}$ эффективно строится вычислимое представление $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{M}$ такое, что $\mathfrak{N}$ не вкладывается вычислимо изоморфно относительно предикатов из ψ ни в одну модель из класса S;

(ii) *Существует такое вычислимое семейство $\{\mathfrak{N}_i\}_{i\in\omega}$ вычислимых представлений модели $\mathfrak{M}$, что для любых $i \neq j$ модель $\mathfrak{N}_i$ невложима вычислимо изоморфно относительно предикатов из ψ в модель $\mathfrak{N}_j$.*

Легко видеть, что если модель $\mathfrak{M}$ не ограничена, то $\dim(\mathfrak{M}) = \omega$, и любой класс K вычислимых моделей, содержащий $\mathfrak{M}$, не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

Пусть теперь $\mathbf{d}$ — произвольная тьюрингова степень, а $\mathfrak{M}$ — счётная структура вычислимой сигнатуры σ. Структуру $\mathfrak{M}$ будем называть $\mathbf{d}$-*вычислимой*, если её носитель является вычислимым подмножеством ω, а её атомная диаграмма $\mathbf{d}$-вычислима. Наименьшую степень $\mathbf{d}$ такую, что $\mathfrak{M}$ является $\mathbf{d}$-вычислимой (такая степень всегда существует), будем называть *степенью структуры* $\mathfrak{M}$ и обозначать через $\deg(\mathfrak{M})$.

Изоморфизм структуры $\mathfrak{M}$ на ($\mathbf{d}$-вычислимую) структуру с вычислимым носителем будем называть ($\mathbf{d}$-*вычислимым*) *представлением* $\mathfrak{M}$. Для упрощения терминологии мы часто будем отождествлять представление $\mathfrak{M}$ с образом данного изоморфизма. В частности, говоря о степени представления, мы всегда подразумеваем степень образа, а не степень изоморфизма. Множество $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$ всех степеней представлений структуры $\mathfrak{M}$ будем называть *спектром степеней* $\mathfrak{M}$.

Структура $\mathfrak{M}$ *автоморфно тривиальна*, если существует конечное подмножество $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ такое, что любая перестановка на множестве $|\mathfrak{M}|$, оставляющая элементы S на месте, является автоморфизмом $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — автоморфно нетривиальная счётная структура, то $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$ замкнут вверх (см. [58]).

Если $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — структуры с вычислимыми носителями, то изоморфизм $f : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимым*, если f является частично вычислимой относительно $\mathbf{d}$ функцией.

$\mathbf{d}$-*вычислимой размерностью* структуры $\mathfrak{M}$ будем называть число $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ вычислимых представлений $\mathfrak{M}$ с точностью до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма. Если $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M}) = 1$, то $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимо категоричной. Спектром категоричности* вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{CatSp}(\mathfrak{M})$ всех степеней $\mathbf{d}$ таких, что $\mathfrak{M}$ является $\mathbf{d}$-вычислимо категоричной.

Если S — отношение на носителе $\mathfrak{M}$ и задано представление $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ структуры $\mathfrak{M}$, то образ $f(S)$ будем обозначать через $S(\mathfrak{N})$.

Если S — отношение на носителе вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$, то *спектром степеней отношения* S на $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$ степеней образов S во всех вычислимых представлениях $\mathfrak{M}$.

Спектром автоморфизмов вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{M})$ степеней всех нетривиальных автоморфизмов $\mathfrak{M}$.

Отношение S на носителе структуры $\mathfrak{M}$ называется *относительно наследственно вычислимым*, если для любого представления $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ образ $f(S)$ является $\deg(\mathfrak{N})$-вычислимым.

$\mathbf{d}$-*вычислимым определяющим семейством* для структуры $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-вычислимая последовательность $\exists$-формул $\Phi_0(\overline{a}, x), \Phi_1(\overline{a}, x), \ldots$ такая, что $\overline{a}$ — набор элементов $|\mathfrak{M}|$, каждый $x \in |\mathfrak{M}|$ удовлетворяет в структуре $\mathfrak{M}$ некоторой формуле $\Phi_n(\overline{a}, x)$, и никакие два элемента $|\mathfrak{M}|$ не удовлетворяют одной формуле $\Phi_n(\overline{a}, x)$.

Следуя [52], класс структур K будем называть *полными относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений* (кратко *эффективно полным*), если для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры $\mathfrak{M}$ существует счётная структура $\mathfrak{A} \in K$ такая, что

(1) $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$;

(2) $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{A}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ для любой степени $\mathbf{d}$;

(3) для любого элемента $a \in |\mathfrak{M}|$ существует $x \in |\mathfrak{A}|$ такой, что $\dim(\langle \mathfrak{A}, x \rangle) = \dim(\langle \mathfrak{M}, a \rangle)$;

(4) для любого отношения $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ существует $U \subseteq |\mathfrak{A}|$ такое, что $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$.

В [52] был предложен следующий достаточный признак эффективной полноты класса структур K.

Предложение 1.1.2 (Д.Р.Хиршвельдт, Б.Хусаинов, Р.А.Шор, А.М.Слинько [52]). *Пусть K — класс структур, а C — некоторый класс графов, полный относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений.*

Допустим, для любого автоморфно нетривиального счётного графа $\mathfrak{G} \in C$ с отношением смежности E существуют счётная структура $\mathfrak{M} \in K$, относительно наследственно вычислимые, инвариантные отношения $D(x)$ и $R(x, y)$ на $|\mathfrak{M}|$, и отображение $G \mapsto M_G$ из множества представлений $\mathfrak{G}$ в множество представлений $\mathfrak{M}$ со следующими свойствами:

(P0) Для любого G структура M_G является $\deg(G)$-вычислимой.

(P1) Для любого G существует $\deg(G)$-вычислимая биекция $g_G : D(M_G) \to |G|$ такая, что $\langle x, y \rangle \in R(M_G) \iff \langle g_G(x), g_G(y) \rangle \in E(G)$ для всех $x, y \in D(M_G)$.

(P2) Если $f : D(\mathfrak{M}) \to D(\mathfrak{M})$ — биекция, и $\langle x, y \rangle \in R(\mathfrak{M}) \iff \langle f(x), f(y) \rangle \in R(\mathfrak{M})$ для всех $x, y \in D(\mathfrak{M})$, то f можно расширить до автоморфизма $\mathfrak{M}$.

(P3) Для любого G существует $\deg(G)$-вычислимое определяющее семейство $\exists$-формул для структуры $\langle M_G, b \rangle_{b \in D(M_G)}$.

Тогда класс K является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений.

Можно также исследовать полноту классов структур относительно других видов спектров степеней (например, относительно спектров категоричности или спектров автоморфизмов).

Обозначим через $\mathfrak{M}_e$ вычислимую структуру сигнатуры σ с вычислимым индексом e. (Не любое число e является вычислимым индексом структуры.) Для произвольного класса K структур сигнатуры σ, замкнутого относительно изоморфизма, *индексным множеством* мы называем множество

$$I(K) = \{e \in \omega \mid \mathfrak{M}_e \in K\}.$$

Проблемой изоморфизма для класса K будем называть множество

$$E(K) = \{\langle a, b\rangle \in I(K)^2 \mid \mathfrak{M}_a \cong \mathfrak{M}_b\}.$$

Проблемой вложимости для класса K будем называть множество

$$Em(K) = \{\langle a, b\rangle \in I(K)^2 \mid \text{существует изоморфное вложение } \mathfrak{M}_a \hookrightarrow \mathfrak{M}_b\}.$$

Проблемой вычислимой категоричности для класса K будем называть множество

$$I_{cc}(K) = \{e \in I(K) \mid \mathfrak{M}_e \text{ вычислимо категорична}\}.$$

При рассмотрениия проблем $E(K)$ и $Em(K)$ мы будем отождествлять пары натуральных чисел с их канторовскими номерами. Если множество $I(K)$ гиперарифметично, то в худшем случае множества $E(K)$ и $Em(K)$ лежат в классе Σ^1_1, а множество $I_{cc}(K)$ лежит в классе Π^1_1.

Для получения верхних оценок алгоритмической сложности проблем используются классы арифметической, гиперарифметической или аналитической иерархий сложности [27, 35]. В частности, для определения гиперарифметической сложности множеств удобным инструментом являются *бесконечные вычислимые формулы*. Формальное определение и свойства бесконечных вычислимых Σ_α- и Π_α-формул, где α — вычислимый ординал, можно найти в [35]. Менее формальное определение выглядит следующим образом:

(1) *Вычислимой* Σ_0- или Π_0-*формулой* называется любая конечная бескванторная формула данной вычислимой сигнатуры σ.

(2) *Вычислимой* Σ_α-*формулой* называется любая вычислимо перечислимая дизъюнкция $\bigvee\!\!\!\bigvee_i \exists \overline{u}_i \psi_i(\overline{u}_i, \overline{x})$ формул $\exists \overline{u}_i \psi_i(\overline{u}_i, \overline{x})$, где $\psi_i(\overline{u}_i, \overline{x})$ — вычислимая Π_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$.

(3) *Вычислимой* Π_α-*формулой* называется любая вычислимо перечислимая конъюнкция $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_i \forall \overline{u}_i \psi_i(\overline{u}_i, \overline{x})$ формул $\forall \overline{u}_i \psi_i(\overline{u}_i, \overline{x})$, где $\psi_i(\overline{u}_i, \overline{x})$ — вычислимая Σ_β-формула для некоторого $\beta < \alpha$.

Любое множество, определимое вычислимой Σ_α- или Π_α-формулой в вычислимой структуре, является Σ^0_α- или Π^0_α-множеством соответственно (см. [35]).

Для доказательства точности полученной оценки сложности проблемы традиционно используют m-полноту в каком-либо из классов сложности [27, 35]. В случаях, когда сложность индексного множества $I(K)$ оказывает нежелательно большое влияние на сложность рассматриваемой алгоритмической проблемы, используют понятие сложности *внутри класса* [38].

Пусть Γ — класс сложности и $A \subseteq B$. Говорят, что множество A является Γ-*множеством внутри* B, если существует $R \in \Gamma$, для которого $A = R \cap B$. Говорят, что множество A является *m-полным* Γ-*множеством внутри* B, если A является Γ-множеством внутри B, и для любого $S \in \Gamma$ существует вычислимая функция $f : \omega \to B$ такая, что для всех $n \in \omega$ справедлива эквивалентность: $n \in S$ тогда и только тогда, когда $f(n) \in A$. Далее, говоря о сложности проблемы изоморфизма или вложимости *внутри класса*, мы подразумеваем сложность $E(K)$ или $Em(K)$ внутри $I(K) \times I(K)$.

Приведём необходимые определения и утверждения из теории автоматных моделей. Мы придерживаемся предложенного в [55] определения автоматной модели, в котором используются синхронные многоленточные автоматы над конечными словами. Обзоры основных результатов, полученных в области изучения автоматных моделей, могут быть также найдены в [54, 56, 67].

Пусть Σ — конечный алфавит и $\perp \notin \Sigma$. Обозначим через $\Sigma_\perp$ алфавит $\Sigma \cup \{\perp\}$.

Конволюцией кортежа $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \in (\Sigma^*)^n$ является кортеж $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle_\perp \in (\Sigma_\perp^n)^*$, полученный добавлением наименьшего числа символов $\perp$ к правым концам слов w_i таким образом, чтобы длины всех слов стали одинаковыми.

Конволюция отношения $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ — это отношение $R_\perp \subseteq (\Sigma_\perp^n)^*$, полученное как множество конволюций всех кортежей из R, т.е. $R_\perp = \{w_\perp \mid w \in R\}$.

Отношение $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ является *автоматным над алфавитом* Σ, если его конволюция $R_\perp$ распознается некоторым конечным автоматом над алфавитом $\Sigma_\perp^n$.

Модель $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_s \rangle$ предикатной сигнатуры *автоматна над алфавитом* Σ, если её носитель $A \subseteq \Sigma^*$ и отношения $R_i \subseteq (\Sigma^*)^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, являются автоматными над алфавитом Σ.

Модель $\mathfrak{A}$ *автоматна*, если она автоматна над некоторым алфавитом Σ. Модель $\mathfrak{A}$ *автоматно представима*, если существует автоматная модель $\mathfrak{B}$, изоморфная $\mathfrak{A}$.

Отношение $R \subseteq A^{k+l}$ является *локально конечным*, если для любого кортежа $\overline{a} \in A^k$ существует лишь конечное число кортежей $\overline{b} \in A^l$ таких, что $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle \in R$. Модель $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_s \rangle$ называют *локально конечной*, если каждое из ее основных отношений $R_i \subseteq A^{k_i + l_i}$ локально конечно для некоторых k_i и l_i.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_s \rangle$ — локально конечная модель, G — конечное подмножество A. Индукцией по $n \in \omega$ определим множества $E_n(G)$, положив $E_0(G) = G$ и

$$E_{n+1}(G) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant s} \{b \in A \mid (\exists \overline{b} \in A^{l_i})(\exists \overline{a} \in E_n^{k_i}(G))[b \in \overline{b} \ \&\ \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle \in R_i]\},$$

где k_i и l_i — местности, относительно которых R_i является локально конечным.

Определим теперь для каждого $n \in \omega$ множество

$$L_n(G) = \bigcup_{0 \leqslant m \leqslant n} E_m(G).$$

Таким образом, $L_n(G)$ — это множество элементов модели $\mathfrak{A}$, которые могут быть получены из G не более чем n применениями основных отношений.

Следующее утверждение часто служит инструментом для доказательства неавтоматности локально конечных моделей.

Предложение 1.1.3 (см. [55]). *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_s \rangle$ — локально конечная автоматная модель, G — конечное помножество A. Тогда существует линейная функция $t : \omega \to \omega$ такая, что длина любого слова из $L_n(G)$ не превосходит $t(n)$.*

§ 1.2. Сведения из теории проективных плоскостей

В части основных определений и обозначений, касающихся алгебраической теории проективных плоскостей, будем придерживаться [33, 34]. Более широкий спектр основной информации по проективным плоскостям может быть найден в [53].

Следуя [33], *проективной плоскостью* мы будем называть частичную алгебраическую систему $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и частичной бинарной коммутативной операцией "$\cdot$" (произведение), удовлетворяющей следующим условиям:

(1) Произведение $a \cdot b$ определено тогда и только тогда, когда a, b — различные однотипные элементы из A (элементы a, b называются *однотипными*, если $a, b \in A^0$ или $a, b \in {}^0A$);

(2) Если определено произведение $a \cdot b$, то элементы a и $a \cdot b$ — неоднотипные;

(3) Для любых $a, b, c \in A$, для которых определены произведения $a \cdot b$, $a \cdot c$ и $(a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$, выполняется равенство $(a \cdot b) \cdot (a \cdot c) = a$;

(4) Существуют попарно различные $a, b, c, d \in A$ такие, что определены и попарно различны произведения $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot d$, $d \cdot a$.

В дальнейшем запись $x \cdot y \downarrow$ будет означать, что произведение $x \cdot y$ определено.

Мы будем рассматривать произвольную проективную плоскость $\langle A, A^0, {}^0A, \cdot \rangle$ как модель $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, P^{\mathfrak{A}} \rangle$ предикатной сигнатуры

$$\sigma = \langle A^0, {}^0A, P \rangle,$$

с носителем A, где A^0 и ${}^0A$ — одноместные предикатные символы, интерпретируемые в $\mathfrak{A}$ как соответствующие элементы разбиения её носителя, а P — трёхместный предикатный символ, выделяющий график частичной операции, т.е.

$$P^{\mathfrak{A}} = \{ \langle a, b, c \rangle \in A^3 \mid a \cdot b \downarrow = c \}.$$

Таким образом, проективная плоскость $\mathfrak{A}$ *вычислима*, если A, A^0, ${}^0A$ являются вычислимыми подмножествами ω, а отношение $P^{\mathfrak{A}}$ — вычислимым подмножеством ω^3. Переход к предикатной сигнатуре позволяет использовать методы и понятия теории вычислимых моделей.

Конфигурацией называется частичная алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и симметричным бинарным отношением $I \subseteq A^2$ (*отношение инцидентности*), удовлетворяющим следующим условиям:

(1) Если $\langle a, b \rangle \in I$, то элементы a и b — неоднотипные;

(2) Если $\langle a, c \rangle \in I$, $\langle b, c \rangle \in I$, $\langle a, d \rangle \in I$, $\langle b, d \rangle \in I$, то $a = b$ или $c = d$.

Следуя [53], элементы A^0 будем называть *точками*, а элементы ${}^0A$ — *прямыми*.

С любой конфигурацией $\mathfrak{A}$ можно связать частичную бинарную коммутативную операцию, считая, что для различных однотипных $a, b \in A$ произведение $a \cdot b$ определено и равно c, если и только если $\langle a, c \rangle \in I$ и $\langle b, c \rangle \in I$. Конфигурация $\mathfrak{A}$ называется *замкнутой*, если для любых различных однотипных элементов $a, b \in A$ в $\mathfrak{A}$ определено произведение $a \cdot b$. Таким образом, замкнутая конфигурация $\mathfrak{A}$ является проективной плоскостью тогда и только тогда, когда она содержит *невырожденный четырёхугольник*, т.е. $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию (4) из определения проективной плоскости.

Заметим, что любую проективную плоскость $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$ можно рассматривать как конфигурацию относительно следующего отношения инцидентности $I = \{\langle a, b\rangle \in A^2 \mid \exists x \in A\,(a{\cdot}x = b)\}$. При этом изоморфизмы (изоморфные вложения) проективных плоскостей, рассматриваемых как модели сигнатуры $\langle A^0, {}^0A, P^3\rangle$, совпадают с изоморфизмами (изоморфными вложениями) проективных плоскостей, рассматриваемых как конфигурации в сигнатуре $\langle A^0, {}^0A, I^2\rangle$.

Если конфигурация $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ конечна, то число $2{\cdot}|A| - \frac{|I|}{2}$ будем называть *рангом* $\mathfrak{A}$. Если конфигурация $\mathfrak{A}$ счётна, то по определению считаем, что её *ранг* равен ω.

Говорят, что конфигурация $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I^{\mathfrak{A}}\rangle$ является *подконфигурацией* конфигурации $\mathfrak{B} = \langle B, B^0, {}^0B, I^{\mathfrak{B}}\rangle$, если $A^0 \subseteq B^0$, ${}^0A \subseteq {}^0B$ и $I^{\mathfrak{A}} = I^{\mathfrak{B}} \cap A^2$. Подконфигурация $\mathfrak{A}$ конфигурации $\mathfrak{B}$ является *полной*, если для любых различных однотипных $a, b \in A$ из того, что в $\mathfrak{A}$ не определено произведение $a{\cdot}b$, следует, что в $\mathfrak{B}$ произведение $a{\cdot}b$ тоже не определено. Если $\mathfrak{A}$ — подконфигурация $\mathfrak{B}$, то будем также говорить, что $\mathfrak{B}$ является *расширением* $\mathfrak{A}$ и писать $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Расширение $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ называется *одношаговым*, если для любого $c \in B\backslash A$ найдутся $a, b \in A$ такие, что $a{\cdot}b = c$. Одношаговое расширение $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ называется *полным*, если для любых различных однотипных $a, b \in A$ найдётся $c \in B$ такой, что $a{\cdot}b = c$. Одношаговое расширение $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ называется *свободным*, если для любого $c \in B\backslash A$ найдутся ровно два элемента $a, b \in A$ такие, что $a{\cdot}b = c$.

Говорят, что конфигурация $\mathfrak{B}$ является *свободным замыканием* конфигурации $\mathfrak{A}$ и пишут $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, если существует счётная последовательность конфигураций

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \ldots$$

такая, что для любого $i \in \omega$ расширение $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_{i+1}$ является полным и свободным одношаговым и при этом $\mathfrak{B} = \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{A}_i$. Свободное замыкание $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ определяется по $\mathfrak{A}$ однозначно с точностью до изоморфизма (см. [53], глава XI), при этом *рангом* свободного замыкания $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ мы называем ранг исходной конфигурации $\mathfrak{A}$.

Для любой конфигурации $\mathfrak{A}$ её свободное замыкание $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ является замкнутой конфигурацией. Если $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ является проективной плоскостью, то говорят, что $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ *свободно порождена* конфигурацией $\mathfrak{A}$, а конфигурация $\mathfrak{A}$ в этом случае называется *невырожденной.* В противном случае, т.е. если $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ не удовлетворяет условию (4) из определения проективной плоскости, конфигурацию $\mathfrak{A}$ называют *вырожденной.*

Пусть α — кардинал и $2 \leqslant \alpha \leqslant \omega$. *Свободная* проективная плоскость $\mathfrak{F}_\alpha$ свободно порождается *стандартной* конфигурацией с носителем $\{c, b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \alpha\}$, состоящим из множества точек $\{b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \alpha\}$, где мощность множества $\{a_i \mid i \in \alpha\}$ равна α, одноэлементного множества прямых $\{c\}$, и с отношением инцидентности $\{\langle a_i, c\rangle, \langle c, a_i\rangle \mid i \in \alpha\}$. Таким образом, свободная плоскость $\mathfrak{F}_n$, где $2 \leqslant n < \omega$, имеет ранг $n{+}6$. Свободная плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ имеет ранг ω.

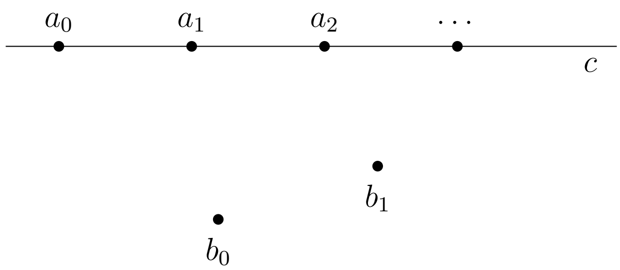

Рис. 1. Стандартная конфигурация

Конфигурация является *закрытой*, если любой её элемент инцидентен не менее трём элементам. *Закрытое ядро* $\mathcal{K}(\mathfrak{A})$ конфигурации $\mathfrak{A}$ определяется следующим образом

$$\mathcal{K}(\mathfrak{A}) = \bigcup\{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — конечная закрытая подконфигурация в } \mathfrak{A}\}.$$

Известно (см. [53], глава XI), что если $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ — свободное замыкание конфигурации $\mathfrak{A}$, то $\mathcal{K}(\mathfrak{A}) = \mathcal{K}(\mathfrak{F}(\mathfrak{A}))$. Кроме этого, если $\mathfrak{A}$ — проективная плоскость, а φ — произвольный автоморфизм плоскости $\mathfrak{A}$, то $\varphi(\mathcal{K}(\mathfrak{A})) = \mathcal{K}(\mathfrak{A})$.

Проективная плоскость называется *дезарговой*, если в ней справедливо *условие Дезарга*: для любых однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что определены произведения $a_1{\cdot}a_2$, $b_1{\cdot}b_2$, $c_1{\cdot}c_2$, $(a_1{\cdot}b_1){\cdot}(a_2{\cdot}b_2)$, $(a_1{\cdot}c_1){\cdot}(a_2{\cdot}c_2)$, $(b_1{\cdot}c_1){\cdot}(b_2{\cdot}c_2)$, а тройки $\{a_1, b_1, c_1\}$, $\{a_2, b_2, c_2\}$ образуют невырожденные треугольники, если $a_1{\cdot}a_2$, $b_1{\cdot}b_2$, $c_1{\cdot}c_2$ инцидентны одному и тому же элементу, то $(a_1{\cdot}b_1){\cdot}(a_2{\cdot}b_2)$, $(a_1{\cdot}c_1){\cdot}(a_2{\cdot}c_2)$, $(b_1{\cdot}c_1){\cdot}(b_2{\cdot}c_2)$ тоже инцидентны одному и тому же элементу.

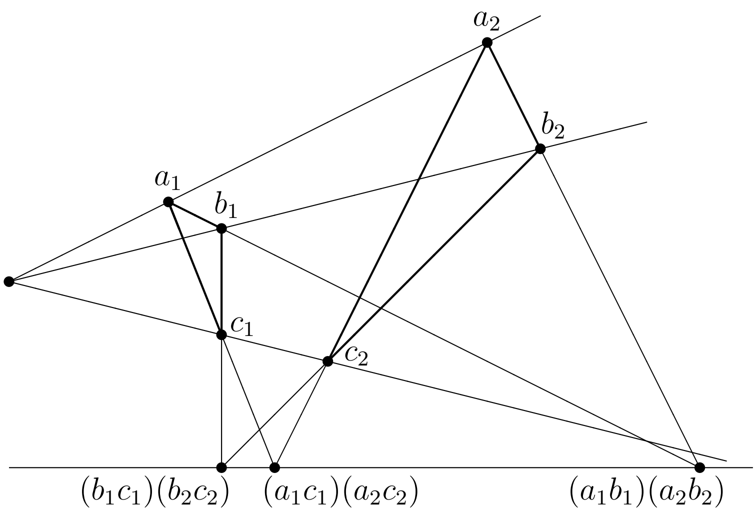

Рис. 2. Условие Дезарга

Проективная плоскость называется *папповой*, если в ней справедливо *условие Паппа*: для любых однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что $a_1{\cdot}b_1 = a_1{\cdot}c_1 = b_1{\cdot}c_1$, $a_2{\cdot}b_2 = a_2{\cdot}c_2 = b_2{\cdot}c_2$, $a_1{\cdot}b_1 \neq a_2{\cdot}b_2$, а четвёрка $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ образует невырожденный четырёхугольник, если определены произведения $a_3 = (b_1{\cdot}c_2){\cdot}(b_2{\cdot}c_1)$, $b_3 = (a_1{\cdot}c_2){\cdot}(a_2{\cdot}c_1)$, $c_3 = (a_1{\cdot}b_2){\cdot}(a_2{\cdot}b_1)$, то a_3, b_3, c_3 инцидентны одному и тому же элементу.

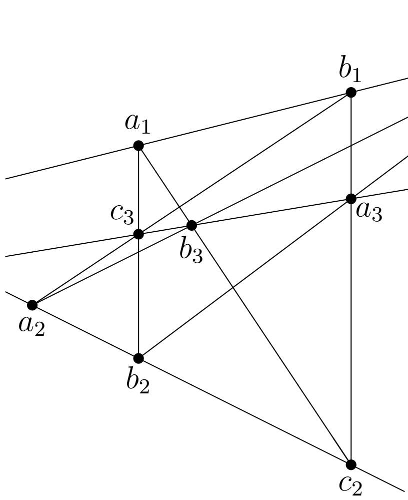

Рис. 3. Условие Паппа

Отметим, что любая паппова проективная плоскость является дезарговой, и никакая дезаргова проективная плоскость не является свободно порождённой.

Для произвольного ассоциативного тела $\mathfrak{K}$ через $V_{\mathfrak{K}}$ обозначим трёхмерное левое векторное пространство над $\mathfrak{K}$, элементы которого мы будем представлять как вектор-строки (a, b, c) или вектор-столбцы $(a, b, c)^{\top}$, где a, b и c — произвольные элементы тела.

Известно (см. [53], глава VI), что произвольная дезаргова проективная плоскость определяется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом $\mathfrak{K}$ как алгебраическая система $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} = \langle P, P^0, {}^0P, \cdot\rangle$, в которой P^0 состоит из всех одномерных подпространств $V_{\mathfrak{K}}$, ${}^0P$ состоит из всех двухмерных подпространств $V_{\mathfrak{K}}$, носитель P является объединением P^0 и ${}^0P$, произведением двух различных одномерных подпространств является единственное двухмерное подпространство, содержащее их, а произведение двух различных двухмерных подпространств определяется как единственное одномерное подпространство, являющееся их пересечением.

В коммутативном случае, т.е. когда тело $\mathfrak{K}$ является полем, мы получаем полное описание папповых проективных плоскостей. Любая паппова проективная плоскость может быть задана как система $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ для некоторого поля $\mathfrak{K}$ (см. [53], глава VI).

Ассоциативное тело (поле) $\mathfrak{K}$ называют *координатным телом (полем)* дезарговой (папповой) проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$.

Пусть e_1, e_2, e_3 — произвольный базис пространства $V_{\mathfrak{K}}$, и $ae_1+be_2+ce_3$ — ненулевой вектор. Следуя [53], одномерное подпространство вида $\{k(ae_1 + be_2 + ce_3) \mid k \in \mathfrak{K}\}$ будем обозначать через $\langle ae_1 + be_2 + ce_3\rangle$, а двухмерное подпространство вида $\{xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid xa + yb + zc = 0\}$ будем обозначать через $\langle ae_1^{\top} + be_2^{\top} + ce_3^{\top}\rangle$. Заметим, что $\langle a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3\rangle = \langle a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3\rangle$ и $\langle a_1e_1^{\top} + b_1e_2^{\top} + c_1e_3^{\top}\rangle = \langle a_2e_1^{\top} + b_2e_2^{\top} + c_2e_3^{\top}\rangle$, если и только если векторы $a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$ и $a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$ коллинеарны.

Инцидентность точки $\langle a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3\rangle$ и прямой $\langle a_2e_1^{\top} + b_2e_2^{\top} + c_2e_3^{\top}\rangle$ определяется соотношением $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. Таким образом, произведением двух различных точек $\langle a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3\rangle$ и $\langle a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3\rangle$ является прямая $\langle a_3e_1^{\top} + b_3e_2^{\top} + c_3e_3^{\top}\rangle$ с условием $a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0$ и $a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0$. Аналогичным образом находится координатное представление для произведения двух различных прямых.

Остовом в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ будем называть упорядоченный набор из четырёх точек такой, что никакие три из них не инцидентны одной прямой. Известно [53], что четвёрка точек a_1, a_2, a_3, a_4 является остовом, тогда и только тогда, когда $a_1 = \langle e_1 \rangle$, $a_2 = \langle e_2 \rangle$, $a_3 = \langle e_3 \rangle$ и $a_4 = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ для некоторого базиса e_1, e_2, e_3 векторного пространства $V_{\mathfrak{K}}$.

Глава 2. Существование вычислимых представлений

Данная глава посвящена проблеме существования вычислимых представлений моделей из различных классов проективных плоскостей.

В § 2.1 показывается, что если конфигурация $\mathfrak{A}$ имеет вычислимые множества элементов 1-го и 2-го типов и $\mathbf{d}$-вычислимое отношение инцидентности, то конструкция Ширшова позволяет строить $\mathbf{d}$-вычислимое представление проективной плоскости $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, свободно порождённой конфигурацией $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что любая счётная свободная проективная плоскость имеет вычислимое представление. Изложенная в § 2.1 конструкция будет неоднократно использована в следующих главах.

В § 2.2 излагается основанный на идее координатизации метод относительной элементарной определимости ассоциативных тел (полей) в классе дезарговых (папповых) проективных плоскостей. Используя данный метод в § 2.3, мы доказываем, что дезаргова (паппова) проективная плоскость имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда её координатное тело (поле) имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление. Изложенные в § 2.2 и § 2.3 конструкции будут также применяться в следующих главах.

В § 2.4 изучаются автоматные представления проективных плоскостей. Доказывается, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений. Отметим, что полное описание автоматных моделей в классах свободных, дезарговых и папповых проективных плоскостей было ранее получено А.С. Денисенко в [17].

§ 2.1. Вычислимые представления свободно порождённых плоскостей

Для изучения свойств свободно порождённых проективных плоскостей удобным инструментом является предложенная в [25, 33] конструкция свободно порождённой проективной плоскости, в которой каждый элемент имеет однозначную запись в виде подходящего неассоциативного слова. Эту конструкцию принято называть *конструкцией Ширшова.*

В данном параграфе, используя конструкцию Ширшова, мы построим эффективные представления для моделей из достаточно большого класса свободно порождённых проективных плоскостей.

Напомним основные определения упомянутой конструкции.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ — невырожденная незамкнутая конфигурация, на элементах которой задан строгий полный порядок $\prec$. Рассматривая элементы множества A как символы алфавита, определим по индукции множество $W(A)$ *неассоциативных слов над алфавитом* A:

(1) если $u \in A$, то $u \in W(A)$;

(2) если $u, v \in W(A)$, то $(uv) \in W(A)$.

Длиной слова $w \in W(A)$ назовём число $|w|$ вхождений элементов A в слово w. *Весом* слова $w \in W(A)$ будем называть число $\|w\| = n_1 + 2n_2$, где n_1 и n_2 — число вхождений в запись слова w символов из A^0 и ${}^0A$ соответственно.

Продолжим порядок $\prec$ на множество $W(A)$ следующим образом: для любых $w_1 \neq w_2$ из $W(A)$ положим $w_1 \succ w_2$ тогда и только тогда, когда:

(1) $\|w_1\| > \|w_2\|$, либо

(2) $\|w_1\| = \|w_2\|$ и $|w_1| > |w_2|$, либо

(3) $\|w_1\| = \|w_2\|$, $|w_1| = |w_2| = 1$ и $w_1 \succ w_2$, либо

(4) $\|w_1\| = \|w_2\|$, $|w_1| = |w_2| > 1$, $w_1 = u_1u_2$, $w_2 = u_3u_4$ и $u_1 \succ u_3$, либо

(5) $\|w_1\| = \|w_2\|$, $|w_1| = |w_2| > 1$, $w_1 = u_1u_2$, $w_2 = u_3u_4$, $u_1 = u_3$ и $u_2 \succ u_4$.

Множество $F^0 \subseteq W(A)$ *правильных слов 1-го типа* и множество ${}^0F \subseteq W(A)$ *правильных слов 2-го типа* определяются по индукции:

Если $w \in A^0$ ($w \in {}^0A$), то w называется *правильным словом 1-го типа (2-го типа).*

Если $w = w_1w_2$, то w называется *правильным словом 1-го типа (2-го типа)* тогда и только тогда, когда выполнены следующие семь условий:

(1) $w_1 \succ w_2$ и w_1, w_2 — правильные слова 2-го типа (1-го типа);

(2) не существует u такого, что $\langle u, w_1\rangle \in I$ и $\langle u, w_2\rangle \in I$;

(3) если $w_1 = w_1'w_1''$, то $\langle w_1', w_2\rangle \notin I$ и $\langle w_1'', w_2\rangle \notin I$;

(4) если $w_2 = w_2'w_2''$, то $\langle w_2', w_1\rangle \notin I$ и $\langle w_2'', w_1\rangle \notin I$;

(5) если $w = (w_3w_4)(w_5w_6)$, то $\{w_3, w_4\} \cap \{w_5, w_6\} = \varnothing$;

(6) если $w = ((w_3w_4)w_5)w_2$ или $w = (w_5(w_3w_4))w_2$, то $w_2 \notin \{w_3, w_4\}$;

(7) если $w = w_1((w_3w_4)w_5)$ или $w = w_1(w_5(w_3w_4))$, то $w_1 \notin \{w_3, w_4\}$.

Если для слов $w_1, w_2 \in W(A)$ одно из слов w_1w_2 или w_2w_1 является правильным, то это правильное слово будем обозначать через $\overline{w_1w_2}$.

На множестве $F = F^0 \cup {}^0F$ определим частичную бинарную коммутативную операцию “$\cdot$” следующим образом. Пусть w_1, w_2 — различные однотипные правильные слова. Тогда

(1) если существует u такое, что $\langle u, w_1\rangle \in I$ и $\langle u, w_2\rangle \in I$, то полагаем $w_1{\cdot}w_2 = w_2{\cdot}w_1 = u$;

(2) если одно из слов w_1w_2 или w_2w_1 является правильным, то полагаем $w_1{\cdot}w_2 = w_2{\cdot}w_1 = \overline{w_1w_2}$;

(3) если $w_1 = w_3w_4$, $w_2 = w_5w_6$ и существует $w \in \{w_3, w_4\} \cap \{w_5, w_6\}$, то полагаем $w_1{\cdot}w_2 = w_2{\cdot}w_1 = w$;

(4) если существуют такие слова w_1', w_1'', что $w_1 = \overline{(\overline{w_1' w_2}) w_1''}$, то полагаем $w_1 \cdot w_2 = w_2 \cdot w_1 = \overline{w_1' w_2}$;

(5) если $w_1 = \overline{w_1' w_1''}$ и пара $\langle w_2, w_1' \rangle \in I$, то полагаем $w_1 \cdot w_2 = w_2 \cdot w_1 = w_1'$;

(6) во всех остальных случаях будем считать, что $w_1 \cdot w_2$ не определено.

Определённая таким образом алгебраическая система $\mathfrak{F} = \langle F, F^0, {}^0F, \cdot \rangle$ с точностью до изоморфизма является проективной плоскостью, свободно порождённой конфигурацией $\mathfrak{A}$.

Если необходимо уточнить, относительно какой конфигурации $\mathfrak{A}$ рассматривается конструкция Ширшова, мы будем говорить о *правильных словах относительно конфигурации* $\mathfrak{A}$. Если в конфигурации $\mathfrak{A}$ отношение индицентности I и одно из множеств A^0 или ${}^0A$ пустые, то правильные относительно конфигурации $\mathfrak{A}$ слова будем называть *правильными относительно множества* A.

Предложение 2.1.1. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ *— невырожденная незамкнутая конфигурация,* $\prec$ *— строгий полный порядок на* A *такие, что множества* A, A^0, ${}^0A$, $\prec$ *вычислимы, а отношение* I *является* $\mathbf{d}$*-вычислимым. Тогда проективная плоскость* $\mathfrak{F}$*, свободно порождённая конфигурацией* $\mathfrak{A}$*, имеет* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление.*

Доказательство. Введём эффективное кодирование $\nu : W(A) \to \omega$ всех неассоциативных слов над алфавитом A, положив:

(1) $\nu(u) = c(0, u)$, если $u \in A$,

(2) $\nu(uv) = c(1, c(\nu(u), \nu(v)))$ для всех $u, v \in W(A)$,

где через $c(\cdot, \cdot)$ обозначена канторовская нумерация пар натуральных чисел.

Таким образом, множество $W(A)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством кодов $\mathrm{range}(\nu)$. Используя схему возвратной рекурсии, нетрудно установить, что $\mathrm{range}(\nu)$ вычислимо.

Продолжим порядок $\prec$ до полного порядка на $W(A)$ в соответствии с конструкцией. В силу вычислимости функций длины и веса, а также в силу возвратной рекурсии, получаем, что порядок $\prec$ на $W(A)$ вычислим, т.е. вычислимо множество пар

$$\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathrm{range}(\nu),\ \nu^{-1}(x) \prec \nu^{-1}(y)\}.$$

Из $\mathbf{d}$-вычислимости отношения инцидентности I, в силу свойств возвратной и совместной рекурсии, следует, что множества ν-кодов правильных слов 1-го и 2-го типов $\mathbf{d}$-вычислимы, т.е. $\mathbf{d}$-вычислимы множества $\nu(F^0)$ и $\nu({}^0F)$. И, наконец, следуя схеме определения операции умножения правильных слов из F, нетрудно установить, что график $P^{\mathfrak{F}}$ этой операции $\mathbf{d}$-вычислим, т.е. $\mathbf{d}$-вычислимо множество троек

$$\nu(P^{\mathfrak{F}}) = \{\langle x, y, z \rangle \mid x, y, z \in \nu(F),\ \nu^{-1}(x) \cdot \nu^{-1}(y) \downarrow = \nu^{-1}(z)\}.$$

Выберем $\mathbf{d}$-вычислимую биективную функцию $\mu : \omega \to \nu(F)$ и определим $\mathbf{d}$-вычислимую предикатную структуру

$$\mathfrak{F}' = \langle \omega, \mu^{-1}(\nu(F^0)), \mu^{-1}(\nu({}^0F)), \mu^{-1}(\nu(P^{\mathfrak{F}})) \rangle.$$

Тогда отображение $\mu^{-1} \circ \nu$ является изоморфизмом модели $\mathfrak{F} = \langle F, F^0, {}^0F, P^{\mathfrak{F}} \rangle$ на $\mathfrak{F}'$. Следовательно, модель $\mathfrak{F}'$ является $\mathbf{d}$-вычислимым представлением проективной плоскости $\mathfrak{F}$. $\square$

Следствие 2.1.2. *Любая счётная свободная проективная плоскость имеет вычислимое представление.*

Доказательство. В силу предыдущего предложения, достаточно показать, что любая не более чем счётная стандартная конфигурация имеет вычислимое представление, на котором задан некоторый вычислимый строгий полный порядок $\prec$. Для стандартных конфигураций конечного ранга данное утверждение очевидно.

Рассмотрим стандартную конфигурацию $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ ранга ω, где $A = \{c, b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \omega\}$, $A^0 = \{b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \omega\}$, ${}^0A = \{c\}$, $I = \{\langle a_i, c\rangle, \langle c, a_i\rangle \mid i \in \omega\}$.

Отождествим элементы A с натуральными числами следующим образом:

$$c = 0,\ b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ a_0 = 3,\ a_1 = 4,\ a_2 = 5,\ \ldots$$

а в качестве $\prec$ возьмём стандартный строгий полный порядок на ω.

Тогда конфигурация $\mathfrak{A}$ вычислима. Ясно, что $\prec$ является вычислимым. $\square$

§ 2.2. Определимость ассоциативных тел в дезарговых плоскостях

Данный параграф не содержит новых результатов, но излагаемый в нём метод интерпретации ассоциативных тел (полей) в дезарговых (папповых) проективных плоскостях потребуется нам для дальнейших целей.

Все известные конструкции, описывающие относительную элементарную определимость координатного тела в дезарговой проективной плоскости, так или иначе основаны на естественной идее координатизации дезарговых плоскостей (см. [53]). Не претендуя на оригинальность, приведем одну из таких конструкций.

Пусть $\mathfrak{K}$ — ассоциативное тело, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ — дезаргова проективная плоскость, координатным телом которой является $\mathfrak{K}$. Напомним, что если $\mathfrak{K}$ — поле, то плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ является папповой. Зафиксируем базис e_1, e_2, e_3 левого векторного пространства $V_{\mathfrak{K}}$. Тогда произвольную точку проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ можно представлять в виде $\langle xe_1 + ye_2 + ze_3 \rangle$, где x, y, z — элементы ассоциативного тела. Следующая лемма необходима для интерпретации тела $\mathfrak{K}$ в плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$.

Лемма 2.2.1. *Для любых $x, y, z, t \in \mathfrak{K}$ в плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ справедливы следующие утверждения:*

(а) Точка $\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle ze_1 + e_2 \rangle \cdot \langle te_1 + e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = yz + t$;

(б) Точка $\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle e_1 + e_2 \rangle \cdot \langle ze_1 + e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда $x = y + z$;

(в) Точка $\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle$ инцидентна прямой $\langle ze_1 + e_2 \rangle \cdot \langle e_3 \rangle$ тогда и только тогда, когда

$x = yz$;

(г) Точка $\langle e_3 - e_2\rangle$ *инцидентна прямой* $\langle xe_1 + e_2\rangle\cdot\langle ye_1 + e_3\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(д) Точка $\langle xe_1 + e_3\rangle$ *инцидентна прямой* $\langle e_2 - e_1\rangle\cdot\langle ye_2 + e_3\rangle$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(е) $(\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle\cdot\langle e_2\rangle)\cdot(\langle e_1\rangle\cdot\langle e_3\rangle) = \langle xe_1 + e_3\rangle$;

(ж) $(\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle\cdot\langle e_1\rangle)\cdot(\langle e_2\rangle\cdot\langle e_3\rangle) = \langle ye_2 + e_3\rangle$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (а) заметим, что точка $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle$ инцидентна прямой $\langle ze_1{+}e_2\rangle\cdot\langle te_1{+}e_3\rangle$ тогда и только тогда, когда вектор $xe_1{+}ye_2{+}e_3$ является линейной комбинацией векторов $ze_1{+}e_2$ и $te_1{+}e_3$. Если $xe_1{+}ye_2{+}e_3 = \alpha(ze_1{+}e_2){+}\beta(te_1{+}e_3)$, то $\alpha = y$, $\beta = 1$ и $x = yz{+}t$. Обратно, если $x = yz{+}t$, то $xe_1{+}ye_2{+}e_3 = y(ze_1{+}e_2){+}(te_1{+}e_3)$, и значит $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle$ инцидентна прямой $\langle ze_1 + e_2\rangle\cdot\langle te_1 + e_3\rangle$.

Утверждения (б)–(г) следуют напрямую из (а). Утверждение (д) доказывается аналогично (а). Справедливость (е) проверяется непосредственным вычислением произведения в левой части. Пункт (ж) получается из (е) заменой e_1 на e_2, и наоборот. □

Введём серию отношений, определимых в модели $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ формулами сигнатуры $\sigma{=}\langle A^0, {}^0\!A, P\rangle$, каждая из которых будет эквивалентна в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ некоторой $\exists$-формуле и некоторой $\forall$-формуле.

Определим формулу

$$I(u, v, w) = (u{\in}A^0)\&(v{\in}A^0)\&(w{\in}A^0)\&(u \neq v)\&(v \neq w)\&\exists s(P(u, v, s)\&P(v, w, s)),$$

эквивалентную в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ следующей $\forall$-формуле

$$(u \in A^0)\&(v \in A^0)\&(w \in A^0)\&(u \neq v)\&(v \neq w)\&\forall s(P(u, v, s) \to P(v, w, s)).$$

Заметим, что $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \models I(u, v, w)$ тогда и только тогда, когда $u \neq v$ и точка u инцидентна прямой $v{\cdot}w$.

Пусть теперь E_1, E_2, E_3, E_4 — произвольный остов в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$. Следовательно, для некоторого базиса e_1, e_2, e_3 пространства $V_{\mathfrak{K}}$ справедливы соотношения $E_1 = \langle e_1\rangle$, $E_2 = \langle e_2\rangle$, $E_3 = \langle e_3\rangle$ и $E_4 = \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle$. Дальнейшие формулы будут зависеть от параметров $\overline{E} = \langle E_1, E_2, E_3, E_4\rangle$.

Определим формулы

$$\Phi_1(u, \overline{E}) = (u \in A^0)\&(u \neq E_1)\&I(u, E_1, E_2);$$
$$\Phi_2(u, \overline{E}) = (u \in A^0)\&(u \neq E_1)\&I(u, E_1, E_3);$$
$$\Phi_3(u, \overline{E}) = (u \in A^0)\&(u \neq E_2)\&I(u, E_2, E_3);$$
$$\Phi_4(u, \overline{E}) = (u \in A^0)\&(u \neq E_1)\&\neg I(u, E_1, E_2).$$

Заметим, что любая точка, инцидентная прямой $\langle e_1\rangle\cdot\langle e_2\rangle$, либо совпадает с $\langle e_1\rangle$, либо единственным образом представима в виде $\langle xe_1 + e_2\rangle$ для некоторого $x \in \mathfrak{K}$. Если же точка не инцидентна $\langle e_1\rangle\cdot\langle e_2\rangle$, то для некоторых $x, y \in \mathfrak{K}$ она единственным образом представима в виде $\langle xe_1+ye_2+e_3\rangle$. Из этих замечаний заключаем, что

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Phi_1(u,\overline{E})\Longleftrightarrow u=\langle xe_1+e_2\rangle,\ x\in\mathfrak{K};$$
$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Phi_2(u,\overline{E})\Longleftrightarrow u=\langle xe_1+e_3\rangle,\ x\in\mathfrak{K};$$
$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Phi_3(u,\overline{E})\Longleftrightarrow u=\langle xe_2+e_3\rangle,\ x\in\mathfrak{K};$$
$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Phi_4(u,\overline{E})\Longleftrightarrow u=\langle xe_1+ye_2+e_3\rangle,\ x,y\in\mathfrak{K}.$$

Для дальнейших определений нам потребуются следующие соотношения

$$\langle e_1+e_2\rangle=(\langle e_1\rangle\cdot\langle e_2\rangle)\cdot(\langle e_3\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle);$$
$$\langle e_2-e_1\rangle=\Big(((\langle e_2\rangle\cdot\langle e_3\rangle)\cdot(\langle e_1\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle))\cdot((\langle e_1\rangle\cdot\langle e_3\rangle)\cdot(\langle e_2\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle))\Big)\cdot(\langle e_1\rangle\cdot\langle e_2\rangle);$$
$$\langle e_3-e_2\rangle=\Big(((\langle e_1\rangle\cdot\langle e_3\rangle)\cdot(\langle e_2\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle))\cdot((\langle e_1\rangle\cdot\langle e_2\rangle)\cdot(\langle e_3\rangle\cdot\langle e_1+e_2+e_3\rangle))\Big)\cdot(\langle e_2\rangle\cdot\langle e_3\rangle).$$

Справедливость этих соотношений устанавливается непосредственным вычислением.

Теперь, используя указанные выше соотношения, введём формулы, выделяющие в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ элементы $\langle e_1+e_2\rangle$, $\langle e_2-e_1\rangle$ и $\langle e_3-e_2\rangle$:

$$\Delta_1(u,\overline{E})=\exists w_1\exists w_2(P(E_1,E_2,w_1)\&P(E_3,E_4,w_2)\&P(w_1,w_2,u)).$$

Формула $\Delta_1(u,\overline{E})$ истинна на элементе u в модели $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, если и только если $u=\langle e_1+e_2\rangle$, и эквивалентна в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ формуле

$$\forall w_1\forall w_2\big((P(E_1,E_2,w_1)\&P(E_3,E_4,w_2))\longrightarrow P(w_1,w_2,u)\big).$$

Далее положим

$$\begin{aligned}\Delta_2(u,\overline{E})=\exists w_1\ldots\exists w_8\big(&P(E_2,E_3,w_1)\&P(E_1,E_4,w_2)\&P(E_1,E_3,w_3)\&P(E_2,E_4,w_4)\&\\&P(w_1,w_2,w_5)\&P(w_3,w_4,w_6)\&P(w_5,w_6,w_7)\&P(E_1,E_2,w_8)\&P(w_7,w_8,u)\big).\end{aligned}$$

Формула $\Delta_2(u,\overline{E})$ истинна на элементе u в модели $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, если и только если $u=\langle e_2-e_1\rangle$, и эквивалентна в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ формуле

$$\begin{aligned}\forall w_1\ldots\forall w_8\Big(\big(&P(E_2,E_3,w_1)\&P(E_1,E_4,w_2)\&P(E_1,E_3,w_3)\&P(E_2,E_4,w_4)\&\\&P(w_1,w_2,w_5)\&P(w_3,w_4,w_6)\&P(w_5,w_6,w_7)\&P(E_1,E_2,w_8)\big)\longrightarrow P(w_7,w_8,u)\Big).\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяется формула $\Delta_3(u,\overline{E})$, истинная на элементе u в модели $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, если и только если $u=\langle e_3-e_2\rangle$.

Далее определим формулы, описывающие условия из пунктов (г)–(ж) леммы 2.2.1:

$$\Psi_1(u,v,\overline{E})=\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_2(v,\overline{E})\&\exists w(\Delta_3(w,\overline{E})\&I(w,u,v));$$
$$\Psi_2(u,v,\overline{E})=\Phi_2(u,\overline{E})\&\Phi_3(v,\overline{E})\&\exists w(\Delta_2(w,\overline{E})\&I(u,w,v));$$
$$\Psi_3(u,v,\overline{E})=\Phi_4(u,\overline{E})\&\Phi_2(v,\overline{E})\&\exists w_1\exists w_2(P(u,E_2,w_1)\&P(E_1,E_3,w_2)\&P(w_1,w_2,v));$$
$$\Psi_4(u,v,\overline{E})=\Phi_4(u,\overline{E})\&\Phi_3(v,\overline{E})\&\exists w_1\exists w_2(P(u,E_1,w_1)\&P(E_2,E_3,w_2)\&P(w_1,w_2,v)).$$

Соответствующие эквивалентные формулы имеют вид:

$$\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_2(v,\overline{E})\&\forall w(\Delta_3(w,\overline{E})\to I(w,u,v));$$
$$\Phi_2(u,\overline{E})\&\Phi_3(v,\overline{E})\&\forall w(\Delta_2(w,\overline{E})\to I(u,w,v));$$
$$\Phi_4(u,\overline{E})\&\Phi_2(v,\overline{E})\&\forall w_1\forall w_2\big((P(u,E_2,w_1)\&P(E_1,E_3,w_2))\to P(w_1,w_2,v)\big);$$
$$\Phi_4(u,\overline{E})\&\Phi_3(v,\overline{E})\&\forall w_1\forall w_2\big((P(u,E_1,w_1)\&P(E_2,E_3,w_2))\to P(w_1,w_2,v)\big).$$

В силу утверждений (г)–(ж) из леммы 2.2.1, справедливы эквивалентности:

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Psi_1(u,v,\overline{E})\iff u=\langle xe_1+e_2\rangle \text{ и } v=\langle xe_1+e_3\rangle \text{ для некоторого } x\in\mathfrak{K};$$
$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Psi_2(u,v,\overline{E})\iff u=\langle xe_1+e_3\rangle \text{ и } v=\langle xe_2+e_3\rangle \text{ для некоторого } x\in\mathfrak{K};$$
$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Psi_3(u,v,\overline{E})\iff u=\langle xe_1+ye_2+e_3\rangle \text{ и } v=\langle xe_1+e_3\rangle \text{ для некоторых } x,y\in\mathfrak{K};$$
$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Psi_4(u,v,\overline{E})\iff u=\langle xe_1+ye_2+e_3\rangle \text{ и } v=\langle ye_2+e_3\rangle \text{ для некоторых } x,y\in\mathfrak{K}.$$

Определим формулу, описывающую операцию сложения в ассоциативном теле $\mathfrak{K}$:

$$\mathcal{X}(u,v,w,\overline{E})=\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_1(v,\overline{E})\&\Phi_1(w,\overline{E})\&\exists w_1\ldots\exists w_6\big(\Psi_1(u,w_1,\overline{E})\&\Psi_1(v,w_2,\overline{E})\&$$
$$\Psi_2(w_2,w_3,\overline{E})\&\Psi_1(w,w_4,\overline{E})\&\Psi_3(w_5,w_1,\overline{E})\&\Psi_4(w_5,w_3,\overline{E})\&\Delta_1(w_6,\overline{E})\&I(w_5,w_6,w_4)\big).$$

Формула $\mathcal{X}(u,v,w,\overline{E})$ эквивалентна в модели $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ формуле

$$\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_1(v,\overline{E})\&\Phi_1(w,\overline{E})\&\forall w_1\ldots\forall w_6\big((\Psi_1(u,w_1,\overline{E})\&\Psi_1(v,w_2,\overline{E})\&\Psi_2(w_2,w_3,\overline{E})\&$$
$$\Psi_1(w,w_4,\overline{E})\&\Psi_3(w_5,w_1,\overline{E})\&\Psi_4(w_5,w_3,\overline{E})\&\Delta_1(w_6,\overline{E}))\longrightarrow I(w_5,w_6,w_4)\big).$$

Тогда, в силу утверждений (б), (г)–(ж) леммы 2.2.1, условие $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\mathcal{X}(u,v,w,\overline{E})$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют $x,y,z\in\mathfrak{K}$ такие, что

$$u=\langle xe_1+e_2\rangle\ \&\ v=\langle ye_1+e_2\rangle\ \&\ w=\langle ze_1+e_2\rangle\ \&\ \mathfrak{K}\models y+z=x.$$

Аналогично определяется формула, описывающая операцию умножения в $\mathfrak{K}$:

$$\Theta(u,v,w,\overline{E})=\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_1(v,\overline{E})\&\Phi_1(w,\overline{E})\&\exists w_1\ldots\exists w_4\big(\Psi_1(u,w_1,\overline{E})\&$$
$$\Psi_1(v,w_2,\overline{E})\&\Psi_2(w_2,w_3,\overline{E})\&\Psi_3(w_4,w_1,\overline{E})\&\Psi_4(w_4,w_3,\overline{E})\&I(w_4,w,E_3)\big).$$

Формула $\Theta(u,v,w,\overline{E})$ эквивалентна в модели $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ формуле

$$\Phi_1(u,\overline{E})\&\Phi_1(v,\overline{E})\&\Phi_1(w,\overline{E})\&\forall w_1\ldots\forall w_4\big((\Psi_1(u,w_1,\overline{E})\&\Psi_1(v,w_2,\overline{E})\&$$
$$\Psi_2(w_2,w_3,\overline{E})\&\Psi_3(w_4,w_1,\overline{E})\&\Psi_4(w_4,w_3,\overline{E}))\longrightarrow I(w_4,w,E_3)\big).$$

Тогда, в силу утверждений (в)–(ж) леммы 2.2.1, условие $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Theta(u,v,w,\overline{E})$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют $x,y,z\in\mathfrak{K}$ такие, что

$$u=\langle xe_1+e_2\rangle\ \&\ v=\langle ye_1+e_2\rangle\ \&\ w=\langle ze_1+e_2\rangle\ \&\ \mathfrak{K}\models y\cdot z=x.$$

Определим в проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ отношения:

$$K_0 = \{u \mid \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \models \Phi_1(u, \overline{E})\},$$
$$S_0 = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{E})\},$$
$$P_0 = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \models \Theta(u, v, w, \overline{E})\}.$$

Из приведённых выше рассуждений следует, что

$$K_0 = \{\langle xe_1 + e_2\rangle \mid x \in \mathfrak{K}\},$$
$$S_0 = \{\langle\langle xe_1 + e_2\rangle, \langle ye_1 + e_2\rangle, \langle ze_1 + e_2\rangle\rangle \mid \mathfrak{K} \models y + z = x\},$$
$$P_0 = \{\langle\langle xe_1 + e_2\rangle, \langle ye_1 + e_2\rangle, \langle ze_1 + e_2\rangle\rangle \mid \mathfrak{K} \models y \cdot z = x\}.$$

Следовательно, исходное ассоциативное тело $\mathfrak{K}$ изоморфно $\mathfrak{K}_0 = \langle K_0, S_0, P_0\rangle$ (в предикатном языке). Заметим, что определение тела $\mathfrak{K}_0$ зависит от выбора остова $\overline{E}$ в плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, но при любом выборе является изоморфной копией координатного тела плоскости.

Рассуждая в общем случае, мы можем рассмотреть произвольную изоморфную копию $\mathfrak{A}$ некоторой дезарговой плоскости и, зафиксировав произвольный остов $\overline{D}$ в $\mathfrak{A}$, определить формульные отношения:

$$D(\mathfrak{A}, \overline{D}) = \{u \mid \mathfrak{A} \models \Phi_1(u, \overline{D})\},$$
$$P_+(\mathfrak{A}, \overline{D}) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{D})\},$$
$$P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D}) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A} \models \Theta(u, v, w, \overline{D})\}.$$

Тогда по-прежнему алгебраическая система $\mathfrak{F} = \langle D(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_+(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D})\rangle$ будет ассоциативным телом, изоморфным (в предикатном языке) координатному телу плоскости $\mathfrak{A}$. При этом по-прежнему каждая из введённых выше формул эквивалентна в $\mathfrak{A}$ некоторой $\exists$-формуле и некоторой $\forall$-формуле.

Заметим также, что в случае, когда $\mathfrak{K}$ является полем, введённые выше формулы устанавливают относительную элементарную определимость класса полей в классе папповых проективных плоскостей. В работе [66] было доказано, что теория полей наследственно неразрешима. Отсюда следует известный результат о наследственной неразрешимости теории папповых проективных плоскостей [69]. Поскольку любая паппова плоскость является дезарговой, заключаем, что теория дезарговых проективных плоскостей также наследственно неразрешима.

§ 2.3. Вычислимые представления папповых и дезарговых плоскостей

Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — не более чем счётное ассоциативное тело. В данном параграфе мы введём две эффективные конструкции, позволяющие по данному представлению $\mathfrak{F}$ ассоциативного тела $\mathfrak{K}$ определять представление $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ дезарговой проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, и наоборот по данному представлению $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ и её остову $\overline{D}$ определять представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ ассоциативного тела $\mathfrak{K}$.

Предложение 2.3.1. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ *дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*.*

Доказательство. Для простоты обозначений будем считать, что натуральные числа 0 и 1 совпадают с нулём и единицей ассоциативного тела $\mathfrak{F} = \langle F, +, \cdot, 0, 1\rangle$ соответственно. Зафиксируем стандартный базис e_1, e_2, e_3 левого векторного пространства $V_{\mathfrak{F}}$. Тогда любой элемент дезарговой плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ представим единственным образом в одном и только одном из следующих шести видов:

(а) $\langle e_1\rangle$,

(б) $\langle xe_1 + e_2\rangle, x \in F$,

(в) $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle, x, y \in F$,

(г) $\langle e_3^\top\rangle$,

(д) $\langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle, z \in F$,

(е) $\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle, y, z \in F$.

При этом имеют место следующие правила умножения элементов вида (а)–(е):

(аб) $\langle e_1\rangle\cdot\langle xe_1 + e_2\rangle = \langle e_3^\top\rangle$,

(ав) $\langle e_1\rangle\cdot\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle = \langle e_2^\top - ye_3^\top\rangle$,

(бб) $\langle xe_1 + e_2\rangle\cdot\langle ye_1 + e_2\rangle = \langle e_3^\top\rangle$, где $x \neq y$,

(бв) $\langle ze_1 + e_2\rangle\cdot\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle = \langle e_1^\top - ze_2^\top + (yz - x)e_3^\top\rangle$,

(вв1) $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle\cdot\langle ze_1 + ye_2 + e_3\rangle = \langle e_2^\top - ye_3^\top\rangle$, где $x \neq z$,

(вв2) $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle\cdot\langle ze_1 + te_2 + e_3\rangle = \langle e_1^\top + (y-t)^{-1}(z-x)e_2^\top + (-x - y(y-t)^{-1}(z-x))e_3^\top\rangle$, где $y \neq t$,

(гд) $\langle e_3^\top\rangle\cdot\langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle = \langle e_1\rangle$,

(ге) $\langle e_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle = \langle -ye_1 + e_2\rangle$,

(дд) $\langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle\cdot\langle e_2^\top + ye_3^\top\rangle = \langle e_1\rangle$, где $z \neq y$,

(де) $\langle e_2^\top + xe_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle = \langle (xy - z)e_1 - xe_2 + e_3\rangle$,

(ее1) $\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top + ye_2^\top + te_3^\top\rangle = \langle -ye_1 + e_2\rangle$, где $z \neq t$,

(ее2) $\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle\cdot\langle e_1^\top + xe_2^\top + te_3^\top\rangle = \langle(-z - (z-t)(x-y)^{-1}y)e_1 + (z-t)(x-y)^{-1}e_2 + e_3\rangle$, где $x \neq y$.

Используя представления элементов в виде (а)–(е), определим вычислимые подмножества ω, положив

$$A^0 = \{c^4(1,1,0,0)\} \cup \{c^4(1,x,1,0) \mid x \in F\} \cup \{c^4(1,x,y,1) \mid x, y \in F\},$$
$${}^0A = \{c^4(2,0,0,1)\} \cup \{c^4(2,0,1,z) \mid z \in F\} \cup \{c^4(2,1,y,z) \mid y, z \in F\},$$
$$A = A^0 \cup {}^0A.$$

При этом считаем, что точки вида (а)–(в) кодируются числами $c^4(1,1,0,0)$, $c^4(1,x,1,0)$, $c^4(1,x,y,1)$ соответственно, а прямые вида (г)–(е) кодируются как $c^4(2,0,0,1)$, $c^4(2,0,1,z)$, $c^4(2,1,y,z)$ соответственно.

Используя данное сопоставление между элементами вида (а)–(е) и их кодами, и учитывая $\mathbf{d}$-вычислимость операций в $\mathfrak{F}$, определим в соответствии с приведёнными выше правилами умножения $\mathbf{d}$-вычислимое отношение $P \subseteq \omega^3$, задающее график операции умножения на элементах A.

Тогда модель $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} = \langle A, A^0, {}^0A, P\rangle$ является $\mathbf{d}$-вычислимой дезарговой проективной плоскостью, изоморфной $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$. $\square$

Предложение 2.3.2. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{A}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*, и* $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4\rangle$ *— произвольный остов в* $\mathfrak{A}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ *ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*.*

Доказательство. Если ассоциативное тело $\mathfrak{K}$ конечно, утверждение очевидно. Если же $\mathfrak{K}$ счётно, то используя формулы Φ_1, $\mathcal{X}$, Θ из §2.2, определим в $\mathfrak{A}$ отношения

$$D(\mathfrak{A},\overline{D}) = \{u \mid \mathfrak{A} \models \Phi_1(u,\overline{D})\},$$
$$P_+(\mathfrak{A},\overline{D}) = \{\langle u,v,w\rangle \mid \mathfrak{A} \models \mathcal{X}(u,v,w,\overline{D})\},$$
$$P_\times(\mathfrak{A},\overline{D}) = \{\langle u,v,w\rangle \mid \mathfrak{A} \models \Theta(u,v,w,\overline{D})\}.$$

Тогда структура $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}} = \langle D(\mathfrak{A},\overline{D}), P_+(\mathfrak{A},\overline{D}), P_\times(\mathfrak{A},\overline{D})\rangle$ будет ассоциативным телом, изоморфным $\mathfrak{K}$.

Поскольку Φ_1, $\mathcal{X}$ и Θ эквивалентны в $\mathfrak{A}$ некоторым $\exists$-формулам и $\forall$-формулам, то отношения $D(\mathfrak{A},\overline{D})$, $P_+(\mathfrak{A},\overline{D})$, $P_\times(\mathfrak{A},\overline{D})$ являются $\mathbf{d}$-вычислимыми. В частности, если проективная плоскость $\mathfrak{A}$ вычислима, то ассоциативное тело $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ тоже вычислимо. Если же $\mathbf{d} > 0$, то тело $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление. Действительно, если выбрать $\mathbf{d}$-вычислимую биективную функцию $\mu : \omega \to D(\mathfrak{A},\overline{D})$, то структура $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{A},\overline{D}} = \langle \omega, \mu^{-1}(P_+(\mathfrak{A},\overline{D})), \mu^{-1}(P_\times(\mathfrak{A},\overline{D})\rangle$ будет $\mathbf{d}$-вычислимым ассоциативным телом, изоморфным телу $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$, а значит и телу $\mathfrak{K}$. $\square$

Следствие 2.3.3. *Дезаргова (паппова) проективная плоскость* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ *имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда ассоциативное тело (поле)* $\mathfrak{K}$ *имеет вычислимое представление.*

§ 2.4. Автоматные представления проективных плоскостей

В работе [17] получено полное решение проблемы существования автоматных представлений для свободных, дезарговых и папповых проективных плоскостей:

Теорема 2.4.1 (А.С. Денисенко [17]). *Никакая свободная проективная плоскость не обладает автоматным представлением.*

Теорема 2.4.2 (А.С. Денисенко [17, 80]). *Произвольная дезаргова (паппова) проективная плоскость автоматно представима тогда и только тогда, когда она конечна.*

В настоящем параграфе мы обобщаем первый из упомянутых результатов на случай произвольных свободно порождённых плоскостей. Оказывается, никакая свободно порождённая проективная плоскость также не имеет автоматных представлений ни над каким алфавитом. Для доказательства данного результата мы используем изложенную в § 2.1 конструкцию Ширшова свободно порождённой плоскости и предложение 1.1.3.

Изложим теперь две конструкции, необходимые для непосредственного доказательства основного результата параграфа.

Конструкция A. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ — невырожденная незамкнутая конфигурация, содержащая в себе полную подконфигурацию $\mathfrak{A}_0 = \langle A_0, A_0^0, {}^0A_0, I_0\rangle$, где $A_0^0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2\}$, ${}^0A_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, $A_0 = A_0^0 \cup {}^0A_0$, а отношение инцидентности I_0 определяется следующей таблицей (для каждой прямой перечислены инцидентные ей точки):

$$\alpha_1 : a_1, a_3, b_2; \quad \alpha_2 : a_2, a_3, b_1; \quad \alpha_3 : a_1, a_4, b_1; \quad \alpha_4 : a_2, a_4, b_2; \quad \alpha_5 : b_1, b_2.$$

Конфигурация $\mathfrak{A}_0$ графически изображена на рисунке 4.

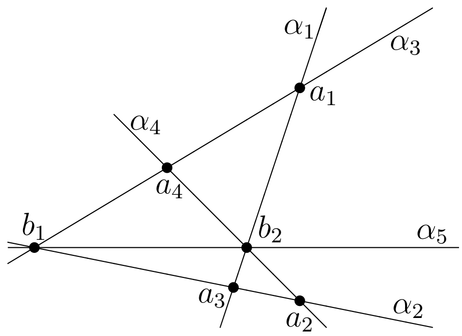

Рис. 4. Конфигурация $\mathfrak{A}_0$

Упорядочим элементы A_0, положив по определению

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_4 \prec \alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \alpha_3 \prec \alpha_4 \prec b_1 \prec b_2 \prec \alpha_5,$$

и определим следующие слова в алфавите A_0:

$$\begin{aligned}
&e_1 = (a_2a_1)\alpha_5, && e_3 = [((a_4a_3)(a_2a_1))b_1]\alpha_1, && e_5 = [((a_4a_3)(a_2a_1))b_2]\alpha_2,\\
&e_2 = (a_4a_3)\alpha_5, && e_4 = [((a_4a_3)(a_2a_1))b_1]\alpha_4, && e_6 = [((a_4a_3)(a_2a_1))b_2]\alpha_3,\\
&g_1 = (e_2a_2)(e_1a_4), && g_3 = (e_6a_2)(e_1a_3), && g_5 = (e_5a_1)(e_4a_3),\\
&g_2 = (e_3a_2)(e_2a_1), && g_4 = (e_4a_1)(e_3a_4), && g_6 = (e_6a_3)(e_5a_4).
\end{aligned}$$

Используя полноту подконфигурации $\mathfrak{A}_0$ в конфигурации $\mathfrak{A}$, непосредственно устанавливается, что слова $e_1, e_2, \ldots, e_6$ и слова $g_1, g_2, \ldots, g_6$ являются правильными относительно конфигурации $\mathfrak{A}$, причем $e_1 \prec e_2 \prec \cdots \prec e_6$ и $g_1 \prec g_2 \prec \cdots \prec g_6$.

Результатом конструкции A будем считать множество $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_6\}$. В условиях конструкции A справедлива следующая

Лемма 2.4.3. *Любое правильное относительно множества G слово является правильным относительно конфигурации $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть w — правильное относительно множества G слово. Допустим, w не является правильным относительно конфигурации $\mathfrak{A}$. Возможен один из следующих четырех случаев:

(1) $w = w_1w_2$ и существует u такое, что $\langle w_1, u\rangle \in I$ и $\langle w_2, u\rangle \in I$. В этом случае $|w| = 2$, но каждое из слов $g_1, \ldots, g_6$ имеет длину не меньше, чем 8. Следовательно данный случай не возможен.

(2) $w = w_1(w_2w_3)$ или $w = (w_2w_3)w_1$, где $\langle w_1, w_2\rangle \in I$ или $\langle w_1, w_3\rangle \in I$. Поскольку w является словом в алфавите A_0, а конфигурация $\mathfrak{A}_0$ полна в $\mathfrak{A}$, заключаем, что $\langle w_1, w_2\rangle \in I_0$ или $\langle w_1, w_3\rangle \in I_0$. Заметим, что любое из слов $g_1, \ldots, g_6$ начинается и заканчивается буквой из набора $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Следовательно, если $w = w_1(w_2w_3)$, то $w_1 = a_i$ для некоторого i, $\langle w_1, w_2\rangle \in I_0$ и $w_2 = \alpha_j$ для некоторого j. Если же $w = (w_2w_3)w_1$, то $w_1 = a_i$ для некоторого i, $\langle w_1, w_3\rangle \in I_0$ и $w_3 = \alpha_j$ для некоторого j. Другими словами, $w = a_i(\alpha_jw_3)$ или $w = (w_2\alpha_j)a_i$, причем $\langle a_i, \alpha_j\rangle \in I_0$. Вариант $w = a_i(\alpha_jw_3)$ не возможен, поскольку у любого из слов $g_1, \ldots, g_6$ первые две буквы содержатся в наборе $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Вариант $w = (w_2\alpha_j)a_i$ также не возможен, поскольку каждое слово g_k $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ имеет суффикс α_ma_n с условием $\langle a_n, \alpha_m\rangle \notin I_0$.

(3) $w = (w_1w_2)(w_3w_4)$ и существует $u \in \{w_1, w_2\} \cap \{w_3, w_4\}$. Поскольку w — правильное относительно G, такой случай возможен лишь тогда, когда не все слова из w_1, w_2, w_3, w_4 являются словами в алфавите G. Это в свою очередь возможно лишь в одном из следующих подслучаев:

(3а) $w = g_i$ для некоторого i. Этот случай не возможен, поскольку каждое g_i является правильным относительно $\mathfrak{A}$.

(3б) $w_1w_2 = g_i$ и $w_3w_4 = g_j$ для некоторых $i \neq j$. Легко видеть из определения $g_1, \ldots, g_6$, что в таком случае $\{w_1, w_2\} \cap \{w_3, w_4\} = \varnothing$.

(3в) $w_1w_2 = g_i$ для некоторого i, а w_3w_4 является словом в алфавите G таким, что $|w_3w_4|_G \geqslant 2$ (через $|v|_G$ мы обозначаем длину слова v относительно алфавита G). В этом случае слова w_3 и w_4 являются правильными относительно G, но при этом одно из них совпадает с собственным префиксом или суффиксом слова g_i, что невозможно.

(3г) $w_3w_4 = g_i$ для некоторого i, а w_1w_2 является словом в алфавите G таким, что $|w_1w_2|_G \geqslant 2$. Данный случай аналогичен пункту (3в).

(4) $w = w_1w_2$ и существуют такие w_3, w_4 и w_5, что $w_1 = (w_3w_4)w_5$ или $w_1 = w_5(w_3w_4)$, причем $w_2 \in \{w_3, w_4\}$. Отсюда так же как и выше заключаем, что не все слова из w_3, w_4, w_5 являются словами в алфавите G. Следовательно возможен один из следующих подслучаев:

(4а) $w = g_i$ для некоторого i. См. пункт (3а).

(4б) $w_1 = g_i$ и $w_2 = g_j$ для некоторых $i \neq j$. Следовательно g_j является собственным подсловом в g_i, что невозможно по определению слов $g_1, \ldots, g_6$.

(4в) $w_2 = g_i$ для некоторого i, а w_1 является словом в алфавите G таким, что $|w_1|_G \geqslant 2$. Учитывая однотипность w_1 и w_2 заключаем, что $|w_1|_G \geqslant 4$. Следовательно, слова w_3, w_4 и w_5 являются правильными над G. Последнее противоречит правильности w над G.

(4г) $w_1 = g_i$ для некоторого i, а w_2 является словом в алфавите G таким, что $|w_2|_G \geqslant 2$.

В этом случае $1 = |w_1|_G > |w_2|_G$, что невозможно.

(4д) w_1 и w_2 являются словами в алфавите G такими, что $|w_1|_G \geqslant 2$ и $|w_2|_G \geqslant 2$. Так как $|w_1|_G \geqslant 2$, то w_3w_4 и w_5 являются словами в алфавите G. Поскольку $|w_2|_G \geqslant 2$, заключаем $|w_3w_4|_G \geqslant 2$. Следовательно w_3 и w_4 являются словами в алфавите G, что невозможно в наших предположениях.

(5) $w = w_1w_2$ и существуют такие w_3, w_4 и w_5, что $w_2 = (w_3w_4)w_5$ или $w_2 = w_5(w_3w_4)$, причем $w_1 \in \{w_3, w_4\}$. Этот случай разбирается аналогично пункту (4). □

Следующая конструкция использовалась в [33] для доказательства теоремы вложения произвольной свободной проективной плоскости конечного ранга в свободную проективную плоскость ранга 8.

Конструкция Б. Пусть $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ — множество однотипных элементов, упорядоченных в соответствии с индексами, т.е. $g_1 \prec g_2 \prec \cdots \prec g_n$, и $n \geqslant 6$.

Для каждого набора натуральных чисел $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ такого, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant n$, определим слово

$$h_G(i_1, i_2, i_3, i_4) = ((g_{i_4}g_{i_3})(g_{i_2}g_{i_1}))((g_{i_4}g_{i_2})(g_{i_3}g_{i_1})).$$

Каждое такое слово $h_G(i_1, i_2, i_3, i_4)$ является правильным относительно множества G. Результатом конструкции Б будем считать множество

$$H = \{h_G(i_1, i_2, i_3, i_4) \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant n\}.$$

Будем считать, что на множестве H задан порядок, индуцированный порядком на G. Заметим, что мощность $|H|$ множества H равна $C_n^4 = (n(n-1)(n-2)(n-3))/24$, и при $n \geqslant 6$ справедливо $|H| > |G|$. Конструкция Б обладает следующим свойством.

Лемма 2.4.4 (см. [33]). *Любое правильное относительно множества H слово является правильным относительно множества G.*

Теорема 2.4.5. *Произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ — невырожденная незамкнутая конфигурация, $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ — проективная плоскость, свободно порождённая конфигурацией $\mathfrak{A}$. По лемме 1 из [24] существует конфигурация $\mathfrak{B}$, свободно эквивалентная $\mathfrak{A}$ и содержащая в себе полную подконфигурацию $\mathfrak{A}_0$ из конструкции А. Поскольку плоскости, свободно порождённые свободно эквивалентными конфигурациями, совпадают, можно считать, что $\mathfrak{A}$ содержит полную подконфигурацию $\mathfrak{A}_0$. В частности, $\mathfrak{A}$ содержит конечное подмножество $A_0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$.

Допустим, $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ имеет автоматное представление над некоторым алфавитом Σ. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ является автоматной над Σ. Ясно, что модель $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ локально конечна. Следовательно, для выбранного выше конечного множества A_0 по предложению 1.1.3 найдутся $a, b \in \omega$ такие, что для любого $n \in \omega$ в случае $|\Sigma| = 1$ имеет место $|L_n(A_0)| \leqslant an + b$, а в случае $|\Sigma| \geqslant 2$ справедливо $|L_n(A_0)| \leqslant |\Sigma|^{an+b}$.

Определим последовательность множеств $L'_n \subseteq L_n(A_0)$, применив сначала конструкцию А, а затем многократно конструкцию Б.

Для $n \leqslant 6$ последовательно положим

$$
\begin{aligned}
L'_0 =& A_0 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\},\\
L'_1 =& \{a_4a_3, a_2a_1\},\\
L'_2 =& \{(a_4a_3)(a_2a_1), (a_4a_3)\alpha_5, (a_2a_1)\alpha_5\},\\
L'_3 =& \{((a_4a_3)(a_2a_1))b_1, ((a_4a_3)(a_2a_1))b_2\},\\
L'_4 =& \{[((a_4a_3)(a_2a_1))b_1]\alpha_1, [((a_4a_3)(a_2a_1))b_1]\alpha_4, [((a_4a_3)(a_2a_1))b_2]\alpha_2,\\
& [((a_4a_3)(a_2a_1))b_2]\alpha_3\},\\
L'_5 =& \{e_1a_3, e_1a_4, e_2a_1, e_2a_2, e_3a_2, e_3a_4, e_4a_1, e_4a_3, e_5a_1, e_5a_4, e_6a_2, e_6a_3\},\\
L'_6 =& \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\},
\end{aligned}
$$

где $e_1, \ldots, e_6$ и $g_1, \ldots, g_6$ — слова из конструкции А. По лемме 2.4.3 каждое правильное относительно множества L'_6 слово является правильным относительно конфигурации $\mathfrak{A}$, и значит принадлежит плоскости $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$.

Пусть теперь для $n = 3t + 6$, где $t \geqslant 0$, уже определено множество L'_n такое, что $L'_n \subseteq L_n(A_0)$, $k = |L'_n| \geqslant 6$, и каждое правильное относительно множества L'_n слово является правильным относительно конфигурации $\mathfrak{A}$.

Обозначим элементы L'_n через $g_1, g_2, \ldots, g_k$ таким образом, что $g_1 \prec g_2 \prec \cdots \prec g_k$. Применяя к $G = L'_n = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ конструкцию Б, определим множества

$$
\begin{aligned}
L'_{n+1} &= \{g_jg_i \mid 1 \leqslant i < j \leqslant k\},\\
L'_{n+2} &= \{(g_{i_4}g_{i_3})(g_{i_2}g_{i_1}), (g_{i_4}g_{i_2})(g_{i_3}g_{i_1}) \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant k\},\\
L'_{n+3} &= \{h_G(i_1, i_2, i_3, i_4) \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant k\},
\end{aligned}
$$

где $h_G(i_1, i_2, i_3, i_4)$ — слова из конструкции Б, применённой к множеству $G = L'_n$.

Заметим, что $|L'_{n+3}| > |L'_n| \geqslant 6$. В силу леммы 2.4.4, каждый элемент L'_{n+3} является правильным словом относительно множества L'_n, и следовательно является правильным относительно конфигурации $\mathfrak{A}$. Таким образом, L'_{n+3} является подмножеством в плоскости $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Следовательно $L'_{n+3} \subseteq L_{n+3}(A_0)$.

Докажем индукцией по $t \geqslant 1$, что для $n = 3t + 6$ имеет место неравенство

$$|L'_n| > 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2^t}.$$

Действительно, для $n = 9$ имеем $|L'_9| = C_6^4 = 15 > 9 = 4{\cdot}(3/2)^2$. Для произвольного $n = 3t + 6$, где $t > 1$, используя справедливое при всех $m \geqslant 6$ неравенство $C_m^4 \geqslant (\frac{m}{2})^2$, а также индукционное предположение, заключаем

$$|L'_{n+3}| = C^4_{|L'_n|} \geqslant \left(\frac{|L'_n|}{2}\right)^2 > \left(\frac{4 \cdot (3/2)^{2^t}}{2}\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2^{t+1}}.$$

Таким образом, учитывая включение $L'_n \subseteq L_n(A_0)$, для всех $t \geqslant 1$ в случае $|\Sigma| = 1$ имеет место неравенство

$$4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2^t} < a(3t+6) + b,$$

а в случае $|\Sigma| \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2^t} < |\Sigma|^{a(3t+6)+b}.$$

В любом случае для достаточно больших t последнее неравенство не является верным. Полученное противоречие окончательно доказывает теорему. $\square$

Глава 3. Равномерная вычислимость в классах проективных плоскостей

Основной целью данной главы является решения проблемы существования вычислимых нумераций типов вычислимого изоморфизма для основных классов проективных плоскостей. Мы докажем, что ни один из следующих классов вычислимых проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости.

Для доказательства невычислимости классов свободных, свободно порождённых и произвольных проективных плоскостей мы показываем, что в некотором несущественном обогащении свободная проективная плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ счётного ранга является неограниченной [8]. Из неограниченности $\mathfrak{F}_\omega$ также следует, что вычислимая размерность $\mathfrak{F}_\omega$ бесконечна. Таким образом, в классе всех свободных проективных плоскостей реализуются только две вычислимые размерности: 1 и ω. При этом произвольная свободная проективная плоскость вычислимо категоричная тогда и только тогда, когда её ранг конечен.

Для доказательства невычислимости классов папповых и дезарговых проективных плоскостей рассматривается алгебраически замкнутое поле $\mathfrak{K}_\omega$ счётного ранга трансцендентности над $\mathbb{Q}$. Используя неограниченность поля $\mathfrak{K}_\omega$ (см. [14, следствие 5.1.8]), мы показываем, что для любого вычислимого семейства дезарговых (папповых) проективных плоскостей существует такое вычислимое представление $\mathfrak{A}$ папповой проективной плоскости, определённой полем $\mathfrak{K}_\omega$, что $\mathfrak{A}$ не является вычислимо изоморфным ни одной плоскости из семейства. Отсюда, как следствие, получены результаты об отсутствии вычислимых нумераций для класса всех дезарговых плоскостей и класса всех папповых плоскостей с точностью до вычислимого изоморфизма.

В § 3.1 определяется некоторое несущественное обогащение $\mathfrak{F}'_\omega$ модели $\mathfrak{F}_\omega$ и его представление в виде вычислимой цепи конечных моделей, которое потребуется для доказательства неограниченности модели $\mathfrak{F}'_\omega$. Также для доказательства неограниченности $\mathfrak{F}'_\omega$ необходимо установить факт существования изоморфных вложений конечных подмоделей $\mathfrak{F}'_\omega$ с рядом дополнительных свойств — описанию подобных вложений посвящён § 3.2.

В § 3.3 окончательно излагается доказательство неограниченности модели $\mathfrak{F}'_\omega$, и в качестве следствий формулируются полное описание вычислимых размерностей свободных проективных плоскостей и результат о невычислимости классов свободных, свободно порождённых и произвольных проективных плоскостей.

В § 3.4 на основе свойства неограниченности алгебраически замкнутого поля счётного ранга трансцендентности доказывается основной результат о невычислимости с точностью до вычислимого изоморфизма для классов папповых и дезарговых проективных плоскостей. В конце данного параграфа приведены результаты А.К. Войтова [6], посвящённые вопросам существования Δ^0_α-вычислимых нумераций классов проективных плоскостей.

§ 3.1. Несущественное обогащение проективных плоскостей

Условие неограниченности модели (см. [8]) может быть справедливым только для структур бесконечной сигнатуры. В данном параграфе мы введём расширение σ' синатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle$ проективных плоскостей такое, что при естественно определённом обогащении любой проективной плоскости до модели сигнатуры σ' множества её вычислимых представлений и её автоморфизмов не изменяются.

Определение. Определим вычислимую последовательность $\{\theta_i\}_{i\in\omega}$ формул сигнатуры σ и строго вычислимую последовательность конечных множеств $\{\Theta_i\}_{i\in\omega}$, состоящих из формул сигнатуры σ, по индукции:

1^0. Полагаем $\theta_0(v_0, v_1) = v_0 \approx v_1$, $\Theta_0 = \{\theta_0\}$.

2^0. Пусть $n \geqslant 1$, множества Θ_i определены для всех $i \leqslant n-1$ и $\alpha_{n-1} = \max\{i \mid \theta_i \in \Theta_{n-1}\}$. Для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ определим множество формул

$$\Theta_n^k = \{\exists u \exists v \big(\theta'(u, v_1, \ldots, v_{k+1}) \,\&\, \theta''(v, v_{k+2}, \ldots, v_{n+1}) \,\&\, P(u, v, v_0)\big) \mid \\ \theta'(v_0, v_1, \ldots, v_{k+1}) \in \Theta_k, \theta''(v_0, v_1, \ldots, v_{n-k}) \in \Theta_{n-k-1}\}.$$

Положим $\Theta_n = \Theta_n^0 \cup \ldots \cup \Theta_n^{n-1}$ и перенумеруем $\Theta_n = \{\theta_{\alpha_{n-1}+1}, \ldots, \theta_{\alpha_n}\}$.

Далее каждой формуле $\theta_i(v_0, \ldots, v_{n+1}) \in \Theta_n$ сопоставим новый $(n+2)$-местный предикатный символ P_i и определим следующие расширения сигнатуры σ:

$$\sigma_i = \sigma \cup \langle P_0, \ldots, P_i\rangle,\ i \in \omega,$$
$$\sigma' = \bigcup_{i\in\omega} \sigma_i.$$

Если теперь $\mathfrak{X} = \langle X, X^0, {}^0X, P^{\mathfrak{X}}\rangle$ — произвольная проективная плоскость, то обогатим её до модели $\mathfrak{X}'$ сигнатуры σ', проинтерпретировав каждый новый символ P_i^{n+2} следующим образом:

$$\mathfrak{X}' \models P_i(x_0, \ldots, x_{n+1}) \iff \mathfrak{X} \models \theta_i(x_0, \ldots, x_{n+1}).$$

Предложение 3.1.1. *Существуют две вычислимые последовательности $\{\varphi_i\}_{i\in\omega}$ и $\{\psi_i\}_{i\in\omega}$ соответственно $\exists$-формул и $\forall$-формул сигнатуры σ такие, что для любой проективной плоскости $\mathfrak{X}$ и любого $(n+2)$-местного предикатного символа $P_i \in \sigma'$ выполняется*

$$\mathfrak{X}' \models \forall v_0 \ldots \forall v_{n+1}((P_i(\overline{v}) \leftrightarrow \varphi_i(\overline{v})) \,\&\, (P_i(\overline{v}) \leftrightarrow \psi_i(\overline{v}))).$$

Таким образом, согласно определению из [8] модель $\mathfrak{X}'$ является несущественным обогащением модели $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Искомые φ_i и ψ_i строятся индукцией по $i \in \omega$. Для $i = 0$ полагаем $\varphi_0 = \psi_0 = \theta_0$. Для произвольного $i > 0$ из определения $\theta_i \in \Theta_n$ получаем:

$$\theta_i(v_0, \ldots, v_{n+1}) = \exists u \exists v \big(\theta_j(u, v_1, \ldots, v_{k+1}) \,\&\, \theta_l(v, v_{k+2}, \ldots, v_{n+1}) \,\&\, P(u, v, v_0)\big),$$

для некоторых $\theta_j \in \Theta_k, \theta_l \in \Theta_{n-k-1}$.

В силу индукционного предположения, для θ_j и θ_l найдутся необходимые $\exists$-формулы φ_j, φ_l и $\forall$-формулы ψ_j, ψ_l. Тогда для θ_i искомыми формулами с точностью до эквивалентности формул будут

$$\varphi_i(v_0, \ldots, v_{n+1}) = \exists u \exists v \big(\varphi_j(u, v_1, \ldots, v_{k+1}) \;\&\; \varphi_l(v, v_{k+2}, \ldots, v_{n+1}) \;\&\; P(u, v, v_0)\big),$$
$$\psi_i(v_0, \ldots, v_{n+1}) = \forall u \forall v \big((\varphi_j(u, v_1, \ldots, v_{k+1}) \;\&\; \varphi_l(v, v_{k+2}, \ldots, v_{n+1})) \to P(u, v, v_0)\big).$$

□

Пусть $\mathfrak{F}_\omega = \langle F, F^0, {}^0F, P^{\mathfrak{F}_\omega}\rangle$ — свободная плоскость ранга ω. Напомним, что $\mathfrak{F}_\omega$ свободно порождена стандартной конфигурацией $\langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$, где $A = \{c, b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \omega\}$, $A^0 = \{b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \omega\}$, ${}^0A = \{c\}$, $I = \{\langle a_i, c\rangle, \langle c, a_i\rangle \mid i \in \omega\}$.

Отождествим плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ с её вычислимым представлением, построенным в следствии 2.1.2. Данное вычислимое представление наследует свойства конструкции Ширшова: для любого правильного слова $w \in \mathfrak{F}_\omega$ можно эффективно найти все его подслова, порождающие элементы $c, b_0, b_1, a_0, a_1, \ldots$ образуют вычислимое подмножество в $\mathfrak{F}_\omega$, на правильных словах задан вычислимый строгий полный порядок $\prec$.

Определим несущественное обогащение $\mathfrak{F}'_\omega = \langle F, F^0, {}^0F, P^{\mathfrak{F}_\omega}, P_i^{\mathfrak{F}'_\omega}\rangle_{i\in\omega}$ модели $\mathfrak{F}_\omega$ так же, как это было сделано выше. В силу предложения 3.1.1 модель $\mathfrak{F}'_\omega$ тоже вычислима.

Для доказательства неограниченности вычислимой модели $\mathfrak{F}'_\omega$, рассматриваемой в расширенной сигнатуре σ', нам также необходимо ввести её представление (в виде строго вычислимой последоватеьности конечных моделей) — мы будем использовать его как предварительное представление.

Предложение 3.1.2. *Существует представление $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in\omega}$ для вычислимой модели $\mathfrak{F}'_\omega$ сигнатуры σ' такое, что выполняются условия:*

(1) $c, b_0, b_1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{A}_0$,

(2) для любого $t \in \omega$ и любого слова $w \in \mathfrak{A}_t$, если u — подслово w, то $u \in \mathfrak{A}_t$.

Доказательство. В качестве строго вычислимой последовательности сигнатур $\{\sigma_t\}_{t\in\omega}$ возьмём возрастающую цепь сигнатур, определённую выше. Будем по шагам строить последовательность конечных моделей $\mathfrak{A}_t$ сигнатуры σ_t следующим образом.

Шаг 0. Полагаем $A_0 = \{c, b_0, b_1, a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $P^0 = P^{\mathfrak{F}_\omega}{\restriction}A_0$, $P_0^0 = P_0^{\mathfrak{F}'_\omega}{\restriction}A_0$. Тогда конечная модель

$$\mathfrak{A}_0 = \langle A_0, A_0 \cap F^0, A_0 \cap {}^0F, P^0, P_0^0\rangle,$$

где $P^{\mathfrak{A}_0} = P^0, P_0^{\mathfrak{A}_0} = P_0^0$, является первой моделью из конструируемого представления.

Шаг $t+1$. Пусть модель $\mathfrak{A}_t = \langle A_t, A_t \cap F^0, A_t \cap {}^0F, P^t, P_i^t\rangle_{i\leqslant t}$ уже построена. Выберем наименьший элемент $w \in \mathfrak{F}_\omega$, не принадлежащий A_t. Рассматривая w как правильное слово, найдём эффективно все подслова $w_0, \ldots, w_s$ слова w. Полагаем $A_{t+1} = A_t \cup \{w_0, \ldots, w_s\}$, $P^{t+1} = P^{\mathfrak{F}_\omega}{\restriction}A_{t+1}$, $P_i^{t+1} = P_i^{\mathfrak{F}'_\omega}{\restriction}A_{t+1}$ для всех $i \leqslant t+1$. Тогда искомая модель сигнатуры σ_{t+1} имеет вид:

$$\mathfrak{A}_{t+1} = \langle A_{t+1}, A_{t+1} \cap F^0, A_{t+1} \cap {}^0F, P^{t+1}, P_i^{t+1}\rangle_{i\leqslant t+1}.$$

□

Введённое представление обладает следующим свойством, которым мы воспользуемся в дальнейшем при доказательстве существования изоморфных вложений.

Предложение 3.1.3. *Для любого $t \in \omega$ сущетвует $s > t$ такой, что для любого предикатного символа $P_i \in \sigma_t$ местности $n+2$ и любых $w_0, w_1, \ldots, w_{n+1} \in F$ выполняется*

$$\big(\mathfrak{F}'_\omega \models P_i(w_0, w_1, \ldots, w_{n+1}) \ \&\ w_1 \in \mathfrak{A}_t \ \&\ \ldots\ \&\ w_{n+1} \in \mathfrak{A}_t\big) \longrightarrow w_0 \in \mathfrak{A}_s.$$

Доказательство. Для любого $P_i^{n+2} \in \sigma_t$ определим конечное множество

$$X_i = \{w_0 \in F \mid \mathfrak{F}'_\omega \models P_i(w_0, w_1, \ldots, w_{n+1}), w_1 \in \mathfrak{A}_t, \ldots, w_{n+1} \in \mathfrak{A}_t\},$$

и затем выберем достаточно большое $s > t$ такое, что носитель модели $\mathfrak{A}_s$ содержит подмножество $\bigcup_{i \leqslant t} X_i$. Данное s будет искомым. □

§ 3.2. Вложения конечных подмоделей свободной плоскости $\mathfrak{F}_\omega$

Для доказательства неограниченности модели $\mathfrak{F}'_\omega$ нам потребуется убедиться в существовании специальных вложений конечных подмоделей модели $\mathfrak{F}_\omega$. В этом параграфе мы опишем в явном виде серию подобных вложений.

Для произвольных неассоциативных слов $x, y \in W(A)$ над алфавитом $A = \{c, b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \omega\}$ обозначим через $\theta(x, y)$ неассоциативное слово

$$\theta(x, y) = \big[\big((xb_1)(yb_0)\big)\big((xb_0)(yb_1)\big)\big]c.$$

Далее определим по индукции конечные подмножества $D_i \subseteq W(A)$, где $i \in \omega$, следующим образом:

$$D_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}, \quad D_{i+1} = \{\theta(x, y) \mid x, y \in D_i, x \succ y\}.$$

Пусть k_i — количество элементов в множестве D_i. Упорядочим слова из D_i в порядке возрастания, обозначив их следующим образом:

$$D_i = \{d_1^i \prec d_2^i \prec \ldots \prec d_{k_i}^i\}.$$

Таким образом, для любого $d_j^{i+1} \in D_{i+1}$ существуют $d_s^i, d_t^i \in D_i$ такие, что $d_s^i \succ d_t^i$, $s > t$, $s, t \in \{1, \ldots, k_i\}$ и

$$d_j^{i+1} = \theta(d_s^i, d_t^i) = \big[\big((d_s^i b_1)(d_t^i b_0)\big)\big((d_t^i b_0)(d_t^i b_1)\big)\big]c.$$

Введём обозначения $e_j^{i+1} = (d_s^i b_1)(d_t^i b_0)$, $f_j^{i+1} = (d_t^i b_0)(d_t^i b_1)$. В частности, имеет место $d_j^{i+1} = (e_j^{i+1} f_j^{i+1})c$. Нетрудно непосредственно убедиться в том, что слова из множеств D_i, $i \in \omega$, являются правильными и, значит, принадлежат свободной проективной плоскости $\mathfrak{F}_\omega$.

Для $X \subseteq \{c, b_0, b_1, a_0, a_1, \ldots\}$ обозначим через $\mathrm{gr}(X)$ множество всех правильных слов, содержащих только вхождения символов из X. Введём основное определение данного параграфа.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{B}$ — конечные подмодели модели $\mathfrak{F}_\omega = \langle F, F^0, {}^0F, P^{\mathfrak{F}_\omega}\rangle$, и пусть i, k, m, t — натуральные числа такие, что выполняются условия:

(а) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{gr}(\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\})$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathrm{gr}(\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{k+m}\})$;

(б) $k \geqslant 3, m \geqslant 1, k_i \geqslant m, i \geqslant 1$;

(в) $\forall j \leqslant k_i\ (e^i_j \notin \mathfrak{B}\ \&\ f^i_j \notin \mathfrak{B})$;

(г) $\forall w \in \mathfrak{B}\ \forall u \in F\ ((u$ – подслово в $w) \to u \in \mathfrak{B})$;

(д) $\forall P^{n+2}_s \in \sigma_t\ \forall w_0, w_1 \ldots, w_{n+1} \in F\ ((\mathfrak{F}_\omega \models P_s(w_0, w_1, \ldots, w_{n+1})\ \&\ w_1 \in \mathfrak{C}\ \&\ \ldots\ \&\ w_{n+1} \in \mathfrak{C}) \to w_0 \in \mathfrak{B})$.

Определим отображение $\varphi : \mathfrak{B} \to W(A)$ по правилу

$$\varphi(w) = \begin{cases} w, & \text{если } w \in \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\}, \\ d^i_j, & \text{если } w = a_{k+j}, 1 \leqslant j \leqslant m, \\ \varphi(w_1)\varphi(w_2), & \text{если } w = w_1 w_2 \text{ и } \varphi(w_1) \succ \varphi(w_2), \\ \varphi(w_2)\varphi(w_1), & \text{если } w = w_1 w_2 \text{ и } \varphi(w_1) \prec \varphi(w_2). \end{cases}$$

для каждого правильного слова $w \in \mathfrak{B}$. (Отметим, что запись $\varphi(w_1)\varphi(w_2)$ следует понимать как конкатенацию слов $\varphi(w_1)$ и $\varphi(w_2)$.)

Заметим, что из условий (в) и (г) вытекает, что для любого $w \in \mathfrak{B}$ и любого $j \in \{1, \ldots, m\}$ имеет место $\varphi(w) \neq e^i_j f^i_j$, $\varphi(w) \neq e^i_j$, $\varphi(w) \neq f^i_j$. Данное свойство будет неоднократно использовано при доказательстве следующих ниже утверждений.

Лемма 3.2.1. *Справедливы следующие два утверждения:*

(1) Для любого $w \in \mathfrak{B}$ слово $\varphi(w)$ является правильным.

(2) Для любых $u, v \in \mathfrak{B}$ если $u \neq v$, то $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Доказательство. Будем доказывать утверждения (1) и (2) одновременной индукцией по длине слова. Для слов длины 1 справедливость обоих утверждений очевидно следует из определения φ.

Допустим, уже доказано, что для всех w таких, что $|w| < l$, слово $\varphi(w)$ — правильное, и для любых u, v таких, что $|u| < l$ и $|v| < l$, выполняется $(u \neq v \to \varphi(u) \neq \varphi(v))$.

Рассмотрим произвольное слово $w \in \mathfrak{B}$ такое, что $|w| = l > 1$, и докажем, что оно правильное, т.е. для него выполняются условия (1)–(7) из конструкции Ширшова (см. § 2.1). Разберём каждое из этих условий.

(1) Так как $|w| > 1$, то $w = w_1 w_2$ для некоторых слов w_1, w_2, причем в силу условия (г), $w_1, w_2 \in \mathfrak{B}$. Следовательно, $\varphi(w) = \varphi(w_1)\varphi(w_2)$ или $\varphi(w) = \varphi(w_2)\varphi(w_1)$. Кроме этого, по индукции $\varphi(w_1)$ и $\varphi(w_2)$ — правильные. Таким образом, условие (1) выполнено.

(2) Допустим, существует u такое, что $\langle u, \varphi(w_1)\rangle \in I$ и $\langle u, \varphi(w_2)\rangle \in I$. Следовательно, $\varphi(w_1), \varphi(w_2)$ являются буквами из A. Последнее возможно лишь в случае $\varphi(w_1) = w_1, \varphi(w_2) = w_2$. Отсюда заключаем, что $\langle u, w_1\rangle \in I$ и $\langle u, w_1\rangle \in I$, что противоречит правильности слова w.

(3) Допустим, $\varphi(w_1) = w'_3 w'_4$ и $(\langle w'_3, \varphi(w_2)\rangle \in I$ или $\langle w'_4, \varphi(w_2)\rangle \in I)$. Отсюда, в частности, заключаем, что $\varphi(w_2)$ — буква, и хотя бы одно из слов w'_3 или w'_4 является буквой. Далее возможны случаи:

(3.1) Пусть $w_1 = a_{k+j}$, где $1 \leqslant j \leqslant m$. Следовательно, $\varphi(w_1) = (e^i_j f^i_j)c$, и значит $w'_3 = e^i_j f^i_j$, $w'_4 = c$. Отсюда получаем, что $\varphi(w_2) = a_s$ для некоторого $s \leqslant k$. Таким образом, $w_2 = a_s$ и слово $w = a_{k+j} a_s$ — неправильное.

(3.2) Пусть $w_1 \neq a_{k+j}$, где $1 \leqslant j \leqslant m$. Ясно, что в этом случае w_1 не может быть буквой. Следовательно, $w_1 = w_3 w_4$ для некоторых w_3, w_4. Отсюда заключаем, что $\varphi(w_1) = \overline{\varphi(w_3)\varphi(w_4)}$ и $\{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\} = \{w'_3, w'_4\}$. Таким образом, $\varphi(w_3)$ или $\varphi(w_4)$ является буквой, откуда заключаем, что $\varphi(w_3) = w_3$ или $\varphi(w_4) = w_4$. Кроме этого, $\varphi(w_2) = w_2$. Следовательно, $\langle w_3, w_2\rangle \in I$ или $\langle w_4, w_2\rangle \in I$, что противоречит правильности слова w.

(4) Аналогично рассуждениям из пункта (3) доказывается, что если $\varphi(w_2) = w'_3 w'_4$, то $\langle w'_3, \varphi(w_1)\rangle \notin I$ и $\langle w'_4, \varphi(w_1)\rangle \notin I$.

(5) Допустим, $\varphi(w) = (w'_3 w'_4)(w'_5 w'_6)$ и существует $w' \in \{w'_3, w'_4\} \cap \{w'_5, w'_6\}$. Так как $w = w_1 w_2$, то $\{\varphi(w_1), \varphi(w_2)\} = \{w'_3 w'_4, w'_5 w'_6\}$. Далее рассмотрим случаи:

(5.1) Пусть $|w_1| = |w_2| = 1$. Следовательно, $w = a_s b_i$ или $w = b_1 b_0$. В любом случае получаем $\varphi(w_2) = w_2$, что противоречит условию $|\varphi(w_2)| \geqslant 2$. Этот случай невозможен.

(5.2) Пусть $|w_1| = 1, |w_2| > 1$. Следовательно, $w_1 = a_{k+j}$, $w_2 = w_5 w_6$ для некоторых $j \in \{1, \ldots, m\}, w_5, w_6$. Отсюда следует, что $\varphi(w_1) = (e^i_j f^i_j)c$, $\varphi(w_2) = \overline{\varphi(w_5)\varphi(w_6)}$. Поскольку $w' \in \{e^i_j f^i_j, c\} \cap \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$, то возможны два подслучая: (а) $c \in \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$, или (б) $e^i_j f^i_j \in \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$.

Если выполнено (а), то $c = \varphi(w_6)$, и значит $w_6 = c$. Тогда $w = a_{k+j}(w_5 c)$ будет неправильным словом.

Если же выполнено (б), то $\varphi(w_5) = e^i_j f^i_j$ или $\varphi(w_6) = e^i_j f^i_j$, что невозможно для нашего отображения φ.

(5.3) Пусть $|w_1| > 1, |w_2| = 1$. Этот случай разбирается аналогично предыдущему.

(5.4) Пусть $|w_1|>1, |w_2|>1$. Тогда $w_1{=}w_3 w_4$, $w_2{=}w_5 w_6$ для некоторых $w_3, w_4, w_5, w_6 \in \mathfrak{B}$. Отсюда заключаем, что $w' \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\} \cap \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Таким образом, получаем: $\varphi(w_3) = \varphi(w_5)$, или $\varphi(w_3) = \varphi(w_6)$, или $\varphi(w_4) = \varphi(w_5)$, или $\varphi(w_4) = \varphi(w_6)$.

Рассмотрим, например, подслучай $\varphi(w_3) = \varphi(w_5)$. Из того, что $|w_3| < l$ и $|w_5| < l$, в силу индукционного предположения, заключаем, что $w_3 = w_5$. Но тогда $\{w_3, w_4\} \cap \{w_5, w_6\} \neq \varnothing$, что противоречит правильности слова w.

(6) Допустим, $\varphi(w) = ((w'_3 w'_4)w'_5)w'_6$ или $\varphi(w) = (w'_5(w'_3 w'_4))w'_6$, и при этом $w'_6 \in \{w'_3, w'_4\}$. Из определения φ следует, что тогда $w \notin \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\}$, а из вида слов d^i_j вытекает, что $w \notin \{a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\}$. Следовательно, найдутся слова w_1 и w_2 такие, что $w = w_1 w_2$.

Для определённости будем считать, что $\varphi(w_1) = \overline{(w'_3 w'_4)w'_5}$ и $\varphi(w_2) = w'_6$. Другой вариант, т.е. когда $\varphi(w_1) = w'_6$ и $\varphi(w_2) = \overline{(w'_3 w'_4)w'_5}$, рассматривается аналогично. Далее возможны случаи:

(6.1) Пусть $|w_1| = 1$. Поскольку $|\varphi(w_1)| \geqslant 3$, заключаем, что w_1 должно иметь вид $w_1 = a_{k+j}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$. Следовательно, $\varphi(w) = ((e^i_j f^i_j)c)\varphi(w_2)$ и при этом $\varphi(w_2) \in \{e^i_j, f^i_j\}$. Отсюда следует, что $\varphi(w_2) = e^i_j$ или $\varphi(w_2) = f^i_j$, что невозможно для отображения φ.

(6.2) Пусть $|w_1| = 2$. Так как $|\varphi(w_1)| \geqslant 3$, то w_1 обязано иметь вид $w_1 = a_{k+j}b_s$ для некоторых $j \in \{1, \ldots, m\}$ и $s \in \{0, 1\}$. Следовательно, $\varphi(w_1) = ((e^i_j f^i_j)c)b_s$ и значит $\varphi(w_2) \in \{e^i_j f^i_j, c\}$. Вариант $\varphi(w_2) = e^i_j f^i_j$ невозможен для нашего отображения φ. Вариант $\varphi(w_2) = c$ также исключён, так как иначе $w_2 = c$ и слово $w = (a_{k+j}b_s)c$ окажется неправильным.

(6.3) Пусть $|w_1| \geqslant 3$. Следовательно, $w_1 = (w_3w_4)w_5$ или $w_1 = w_5(w_3w_4)$ для некоторых $w_3, w_4, w_5 \in \mathfrak{B}$. Далее возможны два подслучая: (а) $\varphi(w_3w_4) = w'_3w'_4$, $\varphi(w_5) = w'_5$; или (б) $\varphi(w_3w_4) = w'_5$, $\varphi(w_5) = w'_3w'_4$.

Если выполнено (а), то $\varphi(w_2) \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\}$, и значит $\varphi(w_2) = \varphi(w_3)$ или $\varphi(w_2) = \varphi(w_4)$. Отсюда, в силу индукционного предположения заключаем, что $w_2 \in \{w_3, w_4\}$. Следовательно, слово $w = \overline{((w_3w_4)w_5)}w_2$ является неправильным.

Если же выполнено (б), то из условия $|\varphi(w_5)| \geqslant 2$ заключаем, что либо $w_5 = a_{k+j}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$, либо $w_5 = w_7w_8$ для некоторых $w_7, w_8 \in \mathfrak{B}$. Если $w_5 = a_{k+j}$, то $\varphi(w_5) = (e^i_j f^i_j)c$ и значит $\varphi(w_2) \in \{e^i_j f^i_j, c\}$. Поскольку $\varphi(w_2) \neq e^i_j f^i_j$, остаётся только вариант $\varphi(w_2) = c$, но тогда $w_2 = c$ и слово $w = \overline{((w_3w_4)a_{k+j})}c$ будет неправильным. Если же $w_5 = w_7w_8$, то $\varphi(w_2) \in \{\varphi(w_7), \varphi(w_8)\}$. Отсюда, в силу индукционного предположения заключаем, что $w_2 \in \{w_7, w_8\}$. Следовательно, слово $w = \overline{((w_3w_4)(w_7w_8))}w_2$ является неправильным.

(7) Аналогично рассуждениям из пункта (6) доказывается, что если $\varphi(w) = w'_6((w'_3w'_4)w'_5)$ или $\varphi(w) = w'_6(w'_5(w'_3w'_4))$, то $w'_6 \notin \{w'_3, w'_4\}$.

Теперь докажем, что для любых слов $u, v \in \mathfrak{B}$ таких, что $|u| < l+1$ и $|v| < l+1$, выполняется $(u \neq v \to \varphi(u) \neq \varphi(v))$. Рассмотрим случаи:

(1) Пусть $|u| < l$, $|v| < l$. В этом случае утверждение следует из индукционного предположения.

(2) Пусть $|u| = l$, $|v| = 1$. Следовательно, $u = u_1u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in \mathfrak{B}$ и $v \in \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{k+m}\}$. Поскольку φ тождественно на элементах из $\{c, b_0, b_1, a_0, \ \ldots, a_k\}$, то нетривиальным здесь является только случай, когда $v = a_{k+j}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда если $\varphi(u) = \varphi(v)$, то $\varphi(u_1) = e^i_j f^i_j$ или $\varphi(u_2) = e^i_j f^i_j$, что невозможно для отображения φ.

(3) Пусть $|u| = l$, $|v| > 1$. Следовательно, $u = u_1u_2$, $v = v_1v_2$ для некоторых $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{B}$, причём $u_1 \succ u_2$, $v_1 \succ v_2$. Далее, если предположить, что $\varphi(u) = \varphi(v)$, то получаем два возможных подслучая: (а) $\varphi(u_1) = \varphi(v_1)$, $\varphi(u_2) = \varphi(v_2)$; или (б) $\varphi(u_1) = \varphi(v_2)$, $\varphi(u_2) = \varphi(v_1)$.

Если выполнено (а), то по индукционному предположению заключаем, что $u_1 = v_1$ и $u_2 = v_2$. Таким образом, $u = v$.

Если же имеет место (б), то в силу индукционнго предположения, получаем $u_1 = v_2$ и $u_2 = v_1$. Но тогда $u_1 \succ u_2 = v_1 \succ v_2 = u_1$, что противоречит определению порядка $\prec$. $\square$

Лемма 3.2.2. *Для любых $w_1, w_2, u \in \mathfrak{B}$ утверждение $w_1 \cdot w_2 \downarrow= u$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \varphi(u)$.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть $w_1 \cdot w_2 \downarrow= u$. Следовательно, для слов w_1 и w_2 выполняется одно из пяти условий, сформулированных в определении операции умножения в $\mathfrak{F}_\omega$ (см. § 2.1). Рассмотрим каждое из этих условий.

(1) Допустим, $w_1 = a_s$ и $w_2 = a_t$ для некоторых $s, t \leqslant k+m$. Таким образом, $u = w_1 \cdot w_2 = c$. Тогда $\varphi(w_1) = a_s$ или $\varphi(w_1) = d^i_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, m\}$, и $\varphi(w_2) = a_t$ или $\varphi(w_2) = d^i_p$ для некоторого $p \in \{1, \dots, m\}$. Кроме этого, $\varphi(c) = c$. Нетрудно убедиться непосредственно, что в любом случае $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= c$.

(2) Допустим, $w_1 w_2$ или $w_2 w_1$ — правильное. Так как $u = w_1 \cdot w_2 = \overline{w_1 w_2}$, то $\overline{w_1 w_2} \in \mathfrak{B}$ и значит определено $\varphi(\overline{w_1 w_2})$. По лемме 3.2.1 слово $\varphi(\overline{w_1 w_2})$ является правильным. Следовательно, $\varphi(\overline{w_1 w_2}) = \overline{\varphi(w_1)\varphi(w_2)}$, откуда заключаем, что $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \overline{\varphi(w_1)\varphi(w_2)}$.

(3) Допустим, $w_1 = w_3 w_4$, $w_2 = w_5 w_6$ и существует $w \in \{w_3, w_4\} \cap \{w_5, w_6\}$. Тогда $u = w_1 \cdot w_2 = w$. Согласно определению φ получаем $\varphi(w_1) = \overline{\varphi(w_3)\varphi(w_4)}$ и $\varphi(w_2) = \overline{\varphi(w_5)\varphi(w_6)}$, при этом имеет место $\varphi(w) \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\} \cap \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Значит $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \varphi(w)$.

(4) Допустим, $w_1 = \overline{(\overline{w_3 w_2}) w_4}$. Тогда $w_1 \cdot w_2 = \overline{w_3 w_2}$. Следовательно, имеет место $\varphi(w_1) = \overline{(\overline{\varphi(w_3)\varphi(w_2)})\varphi(w_4)}$, и значит $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \overline{\varphi(w_3)\varphi(w_2)} = \varphi(\overline{w_3 w_2})$.

(5) Допустим, $w_1 = \overline{w_3 w_4}$, $\langle w_3, w_2 \rangle \in I$, и значит $w_1 \cdot w_2 = w_3$. Возможны два подслучая: (а) $w_3 = c$ и $w_2 = a_s$ для некоторого $s \leqslant k + m$; или (б) $w_3 = a_s$ и $w_2 = c$ для некоторого $s \leqslant k + m$.

В подслучае (а), если $s \leqslant k$, то $\varphi(a_s) = a_s$, и тогда $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = (\varphi(w_4)c) \cdot a_s = c = \varphi(c)$. Если же $s \geqslant k + 1$, то $\varphi(a_s) = (e^i_j f^i_j)c$ для некоторого j, и значит $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = (\varphi(w_4)c) \cdot ((e^i_j f^i_j)c) = c = \varphi(c)$.

В подслучае (б), если $s \leqslant k$, то $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = (\overline{a_s \varphi(w_4)}) \cdot c = a_s = \varphi(a_s)$. Если же $s \geqslant k+1$, то для некоторого j получаем $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = (\overline{((e^i_j f^i_j)c)\varphi(w_4)}) \cdot c = (e^i_j f^i_j)c = \varphi(a_s)$.

Теперь докажем достаточность. Пусть $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \varphi(u)$. Следовательно, согласно определению операции умножения в $\mathfrak{F}_\omega$, имеет место один из следующих пяти случаев.

(1) Допустим, $\varphi(w_1) = a_s$ и $\varphi(w_2) = a_t$ для некоторых s, t. Таким образом, $\varphi(u) = \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = c$. Заметим, что в этом случае $s, t \leqslant k$. Тогда $w_1 = a_s$, $w_2 = a_t$, $u = c$ и очевидно $w_1 \cdot w_2 \downarrow= c$.

(2) Допустим, $\varphi(w_1)\varphi(w_2)$ или $\varphi(w_1)\varphi(w_2)$ является правильным словом. Тогда $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = \overline{\varphi(w_1)\varphi(w_2)}$. Рассмотрим подслучаи:

(2.1) Пусть $u \in \{c, b_0, b_1, a_0, \dots, a_k\}$. Следовательно, $\varphi(u) = u$ и $|\varphi(u)| = 1$, что невозможно, поскольку $|\varphi(w_1)\varphi(w_2)| \geqslant 2$.

(2.2) Пусть $u = a_{k+j}$ для некоторого $j \in \{1, \dots, m\}$. Тогда $\overline{\varphi(w_1)\varphi(w_2)} = \varphi(u) = (e^i_j f^i_j)c$. Отсюда заключаем, что либо $\varphi(w_1) = e^i_j f^i_j$, либо $\varphi(w_2) = e^i_j f^i_j$, что невозможно для нашего отображения φ.

(2.3) Пусть $u = u_1 u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in \mathfrak{B}$. Тогда $\varphi(u) = \overline{\varphi(u_1)\varphi(u_2)}$ и $\{\varphi(u_1), \varphi(u_2)\} = \{\varphi(w_1), \varphi(w_2)\}$. В силу инъективности φ имеем $\{u_1, u_2\}=\{w_1, w_2\}$. Отсюда следует, что одно из слов $w_1 w_2$ или $w_2 w_1$ является правильным и, значит, $w_1 \cdot w_2 \downarrow= \overline{w_1 w_2} = u_1 u_2 = u$.

(3) Допустим, $\varphi(w_1) = w_3'w_4'$, $\varphi(w_2) = w_5'w_6'$ и существует $w' \in \{w_3', w_4'\} \cap \{w_5', w_6'\}$. Тогда $\varphi(u) = w'$. Поскольку здесь $|\varphi(w_1)| \geqslant 2$ и $|\varphi(w_2)| \geqslant 2$, а на элементах из $\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\}$ отображение φ тождественно, то случай, когда w_1 или w_2 принадлежит $\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\}$ исключен. Остаются следующие подслучаи:

(3.1) Пусть $w_1 = a_{k+j}$, $w_2 = a_{k+p}$ для некоторых $j, p \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = ((e_j^i f_j^i)c) \cdot ((e_p^i f_p^i)c) = c$. Следовательно, $u = c$. Таким образом, $w_1 \cdot w_2 = a_{k+j} \cdot a_{k+p} = c$.

(3.2) Пусть $w_1 = a_{k+j}$, $w_2 = w_5 w_6$ для некоторых $j \in \{1, \ldots, m\}$ и $w_5, w_6 \in \mathfrak{B}$. Тогда $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = ((e_j^i f_j^i)c) \cdot \overline{\varphi(w_5)\varphi(w_6)}$. Следовательно, $c \in \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$ или $e_j^i f_j^i \in \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Поскольку условие $e_j^i f_j^i \in \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$ невозможно для отображения φ, заключаем, что $c \in \{w_5, w_6\}$, причем $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = c$. Таким образом, для $s = 5$ или $s = 6$ получаем $w_1 \cdot w_2 = a_{k+j} \cdot \overline{w_s c} = c$.

(3.3) Пусть $w_1 = w_3 w_4$, $w_2 = a_{k+j}$ для некоторых $j \in \{1, \ldots, m\}$ и $w_3, w_4 \in \mathfrak{B}$. Этот случай разбирается аналогично предыдущему.

(3.4) Пусть $w_1 = w_3 w_4$, $w_2 = w_5 w_6$ для некоторых $w_3, w_4, w_5, w_6 \in \mathfrak{B}$. Следовательно, $\varphi(u) \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\} \cap \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Отсюда, в силу инъективности φ, заключаем, что $u \in \{w_3, w_4\} \cap \{w_5, w_6\}$. Тогда $w_1 \cdot w_2 \downarrow= u$.

(4) Допустим, $\varphi(w_1) = \overline{(\overline{w_3'\varphi(w_2)})w_4'}$ для некоторых w_3' и w_4'. Тогда $\varphi(u) = \overline{w_3'\varphi(w_2)}$. Поскольку здесь $|\varphi(w_1)| \geqslant 3$, а отображение φ тождественно на элементах из $\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\}$, то $w_1 \notin \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\}$. Остаются следующие подслучаи:

(4.1) Пусть $w_1 = a_{k+j}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда $\varphi(w_1) = (e_j^i f_j^i)c$. Следовательно, $\varphi(w_2) \in \{e_j^i, f_j^i\}$, что невозможно для отображения φ.

(4.2) Пусть $|w_1| = 2$. Следовательно, для некоторых $w_3, w_4 \in \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{k+m}\}$ имеем $w_1 = w_3 w_4$. Поскольку слово w_1 — правильное, оно имеет вид $w_1 = a_p b_s$ или $w_1 = b_1 b_0$. С другой стороны, $|\varphi(w_1)| \geqslant 3$, поэтому возможен лишь вид $w_1 = a_{k+j} b_s$ для некоторых $j \in \{1, \ldots, m\}$ и $s \in \{0, 1\}$. Отсюда получаем $\varphi(w_1) = ((e_j^i f_j^i)c)b_s$ и $\overline{w_3'\varphi(w_2)} = (e_j^i f_j^i)c$. Следовательно, $\varphi(w_2) \in \{e_j^i f_j^i, c\}$. В силу невозможности равенства $\varphi(w_2) = (e_j^i f_j^i)c$, заключаем, что $\varphi(w_2) = c$. Таким образом, $w_1 \cdot w_2 \downarrow= (a_{k+j} b_s) \cdot c = a_{k+j} = u$.

(4.3) Пусть $|w_1| \geqslant 3$. Следовательно, $w_1 = \overline{(\overline{w_3 w_4})w_5}$ для некоторых w_3, w_4, w_5. Тогда $\varphi(w_1) = \overline{(\overline{\varphi(w_3)\varphi(w_4)})\varphi(w_5)}$, и возможны варианты: (а) $\varphi(w_2) \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\}$, или (б) $\varphi(w_5) = \overline{w_3'\varphi(w_2)}$.

Если имеет место (а), то $\varphi(u) = \overline{\varphi(w_3)\varphi(w_4)}$, и в силу инъективности φ, заключаем, что $w_2 \in \{w_3, w_4\}$. Таким образом, $w_1 \cdot w_2 \downarrow= \overline{(\overline{w_3 w_4})w_5} \cdot w_2 = \overline{w_3 w_4} = u$.

Если же выполнено (б), то $\varphi(\overline{w_3 w_4}) = w_4'$. Так как $|\overline{w_3'\varphi(w_2)}| \geqslant 2$, то либо $w_5 = a_{k+j}$ для некоторого j, либо $w_5 = w_6 w_7$ для некоторых слов w_6, w_7. Если $w_5 = a_{k+j}$, то $\varphi(w_5) = (e_j^i f_j^i)c$, и значит $\varphi(w_2)$ обязано совпасть с c. Тогда получаем $w_1 \cdot w_2 \downarrow= \overline{(\overline{w_3 w_4})a_{k+j}} \cdot c = a_{k+j} = u$. Если же здесь $w_5 = w_6 w_7$, то $\varphi(w_2) \in \{\varphi(w_6), \varphi(w_7)\}$, и значит, в силу инъективности φ, имеем $w_2 \in \{w_6, w_7\}$. Тогда $w_1 \cdot w_2 \downarrow= (\overline{(\overline{w_3 w_4})(\overline{w_6 w_7})}) \cdot w_2 = \overline{w_6 w_7} = u$.

(5) Допустим, $\varphi(w_1) = \overline{w_3'w_4'}$, причем $\langle w_3', \varphi(w_2)\rangle \in I$. Тогда $\varphi(u) = w_3'$. Возможны два подслучая: (а) $w_3' = a_s$ и $\varphi(w_2) = c$; или (б) $w_3' = c$ и $\varphi(w_2) = a_s$.

В подслучае (а), учитывая оценку $|\overline{w_3'w_4'}| \geqslant 2$, получаем, что слово $w_1 \notin \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\}$.

Более того, так как слово вида $(e^i_j f^i_j)c$ не может совпадать со словом вида $\overline{a_s w_4'}$, заключаем, что $w_1 \notin \{a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\}$. Значит $|w_1| \geqslant 2$ и существует представление в виде $w_1 = \overline{a_s w_4}$ для некоторого $w_4 \in \mathfrak{B}$. Тогда $w_1 \cdot w_2 \downarrow= (\overline{a_s w_4}) \cdot c = a_s = u$.

В подслучае (б) получаем, что либо $w_1 = a_{k+j}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, m\}$, либо $|w_1| \geqslant 2$. Если $w_1 = a_{k+j}$, то $w_1 \cdot w_2 = a_{k+j} \cdot a_s$ определено, поскольку $s \leqslant k$, и равно c. Если же $|w_1| \geqslant 2$, то найдётся представление $w_1 = w_3 w_4$, и следовательно $c \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\}$. Отсюда, в силу инъективности φ и минимальности c, заключаем, что $c = w_4$. Тогда окончательно получаем $w_1 \cdot w_2 = (w_3 c) \cdot a_s = c$. □

Предложение 3.2.3. *Отображение $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{F}_\omega$ является изоморфным вложением модели $\mathfrak{B}$ сигнатуры σ в модель $\mathfrak{F}_\omega$ сигнатуры σ таким, что $\varphi{\restriction}\mathfrak{A} = \mathrm{id}$.*

Доказательство. Следует из леммы 3.2.1 и леммы 3.2.2. □

Заметим, что до настоящего момента мы ни разу не использовали условие (д) из определения отображения φ. Ниже оно будет существенно использовано.

Лемма 3.2.4. *Для любых $P_i^{n+2} \in \sigma_t$, $w \in \mathfrak{F}_\omega$ и $w_1, \ldots, w_{n+1} \in \mathfrak{C}$ таких, что $\mathfrak{F}_\omega \models P_i(w, \varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_{n+1}))$, найдётся $w_0 \in \mathfrak{B}$, для которого $\varphi(w_0) = w$ и $\mathfrak{F}_\omega \models P_i(w_0, w_1, \ldots, w_{n+1})$.*

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по i. Для $i = 0$ утверждение следует из вида формулы $\theta_0(v_0, v_1)$.

Пусть $i > 0$ и $\mathfrak{F}_\omega \models P_i(w, \varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_{n+1}))$. Следовательно, по определению формулы θ_i для некоторых $j, l < i$ имеет место

$$\mathfrak{F}_\omega \models \exists u \exists v \big(P_j(u, \varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_{k+1})) \mathbin{\&} P_l(v, \varphi(w_{k+2}), \ldots, \varphi(w_{n+1})) \mathbin{\&} P(u, v, w)\big).$$

В силу индукционного предположения, существуют $x, y \in \mathfrak{B}$ такие, что $\varphi(x) = u$, $\varphi(y) = v$, $\mathfrak{F}_\omega \models P_j(x, w_1, \ldots, w_{k+1})$ и $\mathfrak{F}_\omega \models P_l(y, w_{k+2}, \ldots, w_{n+1})$. Кроме этого имеет место $u \cdot v \downarrow= w$. Следовательно, в $\mathfrak{F}_\omega$ определено произведение $w_0 = x \cdot y$. Таким образом, имеем:

$$\mathfrak{F}_\omega \models P_j(x, w_1, \ldots, w_{k+1}) \mathbin{\&} P_l(y, w_{k+2}, \ldots, w_{n+1}) \mathbin{\&} P(x, y, w_0).$$

Откуда следует, что $\mathfrak{F}_\omega \models P_i(w_0, w_1, \ldots, w_{n+1})$. Используя условие (д) из определения φ, получаем, что $w_0 \in \mathfrak{B}$. Наконец, по лемме 3.2.2 имеем $w = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(w_0)$. □

В заключение данного параграфа покажем, что сужение отображения φ до модели $\mathfrak{C}$ обладает более сильными свойствами: оно является изоморфным вложением в категории моделей сигнатуры σ_t.

Предложение 3.2.5. *Сужение $\varphi{\restriction}\mathfrak{C} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{F}_\omega$ отображения φ до модели $\mathfrak{C}$ является изоморфным вложением $\mathfrak{C}$ в модель $\mathfrak{F}_\omega$ таким, что $\varphi{\restriction}\mathfrak{A} = \mathrm{id}$ и для любого символа $P_i^{n+2} \in \sigma_t$ и любых $w_0, \ldots, w_{n+1} \in \mathfrak{C}$ справедлива эквивалентность*

$$\mathfrak{C} \models P_i(w_0, \ldots, w_{n+1}) \iff \mathfrak{F}_\omega \models P_i(\varphi(w_0), \ldots, \varphi(w_{n+1})).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого $(n+2)$-местного предикатного символа $P_i \in \sigma_t$ и любых $w_0 \in \mathfrak{B}, w_1 \ldots, w_{n+1} \in \mathfrak{C}$ выполняется эквивалентность

$$\mathfrak{B} \models P_i(w_0, \ldots, w_{n+1}) \iff \mathfrak{F}_\omega \models P_i(\varphi(w_0), \ldots, \varphi(w_{n+1})).$$

Доказательство этого утверждения проведём индукцией по i. Для $i = 0$ утверждение следует из леммы 3.2.2. Для $i > 0$, в силу определения формулы θ_i, для некоторых индексов $j, l < i$ справедлива эквивалентность формул

$$P_i(v_0, \ldots, v_{n+1}) \equiv \exists u \exists v \big(P_j(u, v_1, \ldots, v_{k+1}) \ \&\ P_l(v, v_{k+2}, \ldots, v_{n+1}) \ \&\ P(u, v, v_0)\big).$$

Поэтому утверждение $\mathfrak{B} \models P_i(w_0, \ldots, w_{n+1})$ равносильно следующему условию

(1) Существуют $u, v \in \mathfrak{F}_\omega$ такие, что выполняется $\mathfrak{F}_\omega \models P_j(u, w_1, \ldots, w_{k+1})$, $\mathfrak{F}_\omega \models P_l(v, w_{k+2}, \ldots, w_{n+1})$ и $\mathfrak{F}_\omega \models P(u, v, w_0)$.

Так как $P_j \in \sigma_t$ и $P_l \in \sigma_t$, то в силу условия (д) из определения φ, заключаем, что (1) эквивалентно следующему утверждению

(2) Существуют $u, v \in \mathfrak{B}$ такие, что выполняется $\mathfrak{F}_\omega \models P_j(u, w_1, \ldots, w_{k+1})$, $\mathfrak{F}_\omega \models P_l(v, w_{k+2}, \ldots, w_{n+1})$ и $\mathfrak{F}_\omega \models P(u, v, w_0)$.

Далее, используя индукционное предположение для j, l и лемму 3.2.2, переходим к эквивалентному условию

(3) Существуют $u, v \in \mathfrak{B}$ такие, что $\mathfrak{F}_\omega \models P_j(\varphi(u), \varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_{k+1}))$, $\mathfrak{F}_\omega \models P_l(\varphi(v), \varphi(w_{k+2}), \ldots, \varphi(w_{n+1}))$ и $\mathfrak{F}_\omega \models P(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w_0))$.

Последнее условие, в силу леммы 3.2.4, эквивалентно $\mathfrak{F}_\omega \models P_i(\varphi(w_0), \ldots, \varphi(w_{n+1}))$. □

§ 3.3. Неограниченность модели $\mathfrak{F}'_\omega$ и её следствия

В этом параграфе мы наконец докажем утверждение о неограниченности модели $\mathfrak{F}'_\omega$, из которого будут следовать несколько основных результатов.

Теорема 3.3.1. *Модель $\mathfrak{F}'_\omega$ сигнатуры σ' является неограниченной.*

Доказательство. Сначала опишем необходимое для доказательства неограниченности представление для модели $\mathfrak{F}'_\omega$. Пусть $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in\omega}$ — представление, построенное в предложении 3.1.2.

Определим вспомогательную вычислимую функцию $g : \omega \to \omega$ следующим образом: $g(0) = 0$, $g(t+1) = t'$, где t' — минимальное такое, что $t' > g(t)$ и для любого $x \in \mathfrak{A}_{g(t)}$ и любого $l < t$ выполняется одно из двух следующих условий:

(A) Существует предикатный символ $P_q \in \sigma_{t'}$ местности $r+1$ и существует кортеж $\langle y_1, \ldots, y_r\rangle \in \mathfrak{A}_{g(l)}$ такие, что

$$\mathfrak{F}'_\omega \models P_q(x, y_1, \ldots, y_r).$$

(Б) Существует изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{A}_{g(t)} \to \mathfrak{A}_{t'}$ (то есть вложение в категории моделей сигнатуры $\sigma_{g(t)}$) такое, что $\varphi \restriction \mathfrak{A}_{g(l)} = \mathrm{id}$ и существует предикатный символ $P_q \in \sigma_{t'}$ местности $r+1$, для которого найдётся кортеж $\langle y_1, \ldots, y_r \rangle \in \mathfrak{A}_{g(l)}$ такой, что

$$\mathfrak{F}'_\omega \models P_q(\varphi(x), y_1, \ldots, y_r).$$

Докажем, что для любого t и любых $x \in \mathfrak{A}_{g(t)}$ и $l < t$ найдётся t' такой, что выполняется условие (А) или (Б).

Если $x \in \mathrm{gr}(\mathfrak{A}_{g(l)})$, то есть x принадлежит подплоскости, порожденной $\mathfrak{A}_{g(l)}$, то существуют $(r+1)$-местный символ $P_q \in \sigma'$ и кортеж $\langle y_1, \ldots, y_r \rangle \in \mathfrak{A}_{g(l)}$ такие, что $\mathfrak{F}'_\omega \models P_q(x, y_1, \ldots, y_r)$. Тогда для любого $t' \geqslant q$ выполняется условие (А).

Если же $x \notin \mathrm{gr}(\mathfrak{A}_{g(l)})$, то для некоторых $k \geqslant 3$ и $m' \geqslant 1$ имеют место включения $\mathfrak{A}_{g(l)} \subseteq \mathrm{gr}(\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k\})$ и $\mathfrak{A}_{g(t)} \subseteq \mathrm{gr}(\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m'}\})$, причём в правильном неассоциативном слове x есть хотя бы одно вхождение символа из $\{a_{k+1}, \ldots, a_{k+m'}\}$.

Далее, в силу предложения 3.1.3, существует $s > g(t)$ такой, что для любого символа $P_i \in \sigma_{g(t)}$ местности $n+2$ и любых $w_0, w_1, \ldots, w_{n+1} \in \mathfrak{F}_\omega$ выполняется

$$\big(\mathfrak{F}'_\omega \models P_i(w_0, \ldots, w_{n+1}) \;\&\; w_1 \in \mathfrak{A}_{g(t)} \;\&\; \ldots \;\&\; w_{n+1} \in \mathfrak{A}_{g(t)}\big) \longrightarrow w_0 \in \mathfrak{A}_s.$$

Выберем $m \geqslant m'$ такое, что $\mathfrak{A}_s \subseteq \mathrm{gr}(\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{k+m}\})$.

Затем, исходя из того, что $k_i \to \infty$ при $i \to \infty$, а также $|e^i_j| \to \infty$ и $|f^i_j| \to \infty$ при $i \to \infty$, выберем такое $i \in \omega$, что $k_i \geqslant m$ и для каждого $j \leqslant k_i$ слова e^i_j и f^i_j не принадлежат $\mathfrak{A}_s$.

Тогда для моделей $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{g(l)}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_{g(t)}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_s$ выполняются условия (а)–(д) из определения отображения φ. Следовательно, по предложению 3.2.5 существует изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{A}_{g(t)} \to \mathfrak{F}'_\omega$ такое, что $\varphi \restriction \mathfrak{A}_{g(l)} = \mathrm{id}$ и $\varphi(x) \in \mathrm{gr}(\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_3\})$ по построению. Значит найдутся символ $P_q \in \sigma'$ и кортеж $\langle y_1, \ldots, y_r \rangle \in \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_3\} \subseteq \mathfrak{A}_{g(l)}$ такие, что $\mathfrak{F}'_\omega \models P_q(\varphi(x), y_1, \ldots, y_r)$. Выберем достаточно большой $t' > g(t)$ так, чтобы $\mathrm{range}(\varphi) \subseteq \mathfrak{A}_{t'}$ и чтобы предикатный символ P_q уже попал в сигнатуру $\sigma_{t'}$. Тогда для данного t' выполнено условие (Б).

Итак, с помощью вычислимой функции $g : \omega \to \omega$ определим новое представление $\{\mathfrak{A}_{g(t)}\}_{t \in \omega}$ для модели $\mathfrak{F}'_\omega$, относительно которого мы будем доказывать неограниченность.

Теперь приступим к определению вычислимой последовательности бескванторных формул ψ_{ij} сигнатуры σ'.

Пусть $i \in \omega$, $q \in \omega$. Обозначим через $|\mathfrak{A}_{g(i)}|$ количество элементов в модели $\mathfrak{A}_{g(i)}$ и зафиксируем кортеж переменных $\langle v_1, \ldots, v_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|} \rangle$. Определим конечное множество бескванторных формул, зависящих от свободных переменных $v_1, \ldots, v_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|}$:

$$\pi^i_q = \{P_q(v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}) \mid \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|}\}\},$$

где $r+1$ — местность предикатного символа $P_q \in \sigma'$. Другими словами, π^i_q — это множество всех формул, полученных из формулы $P_q(v_0, v_1, \ldots, v_r)$ путем всевозможных подстановок вместо $v_1, \ldots, v_r$ переменных $v_1, \ldots, v_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|}$ (возможно с повторением и выбрасыванием некоторых переменных). Положим

$$\psi_{ij} = \bigwedge_{q \leqslant g(j)} \bigwedge_{\psi \in \pi_q^i} \neg\psi(v_0, v_1, \ldots, v_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|}).$$

Нетрудно убедиться в том, что последовательность $\{\psi_{ij}\}_{i,j\in\omega}$ вычислима.

Покажем, наконец, что модель $\mathfrak{F}'_\omega$ не ограничена относительно последовательности формул ψ_{ij} и представления $\{\mathfrak{A}_{g(t)}\}_{t\in\omega}$.

Пусть $t_0 \in \omega$, $f : \omega \to \omega$ — монотонно возрастающая неограниченная вычислимая функция. Возьмём $l = t_0$ и рассмотрим множество

$$T = \{t > t_0 \mid f(t) > \max\{y \mid y \in \mathfrak{A}_{g(l)}\}\}.$$

(Здесь максимум вычисляется относительно стандартного порядка на ω.) Заметим, что для любого $x \in \mathfrak{F}_\omega$ найдётся $t_1 \in T$ такой, что для любого $t \geqslant t_1$ одновременно выполняются свойства: $x \leqslant f(t)$ и $x \in \mathfrak{A}_{g(t)}$.

Допустим, что для любого шага $t \in T$ и любого $x \in \mathfrak{A}_{g(t)}$ такого, что $x \leqslant f(t)$, и выбранного $l = t_0$ выполняется условие (А). Тогда для любого $x \in \mathfrak{F}_\omega$, как мы заметили выше, найдётся шаг $t \in T$ такой, что $x \in \mathfrak{A}_{g(t)}$ и $x \leqslant f(t)$, и значит, в силу предположения, для этого x на шаге t выполняется пункт (А). Следовательно, этот x выражается через элементы $\mathfrak{A}_{g(l)}$. Однако, $\mathfrak{A}_{g(l)}$ — конечная модель. Значит, $\mathfrak{F}_\omega$ имеет конечный ранг, что невозможно.

Таким образом, существует $t \in T$ и существует $x \in \mathfrak{A}_{g(t)}$ такой, что $x \leqslant f(t)$, для которого при $l = t_0$ выполняется условие (Б) и не выполняется условие (А). Следовательно, существует изоморфное вложение

$$\varphi : \mathfrak{A}_{g(t)} \to \mathfrak{A}_{g(t+1)}$$

такое, что $\varphi \restriction \mathfrak{A}_{g(l)} = \mathrm{id}$ и существует символ $P_q \in \sigma_{g(t+1)}$ местности $r+1$ такой, что для некоторого кортежа $\langle y_1, \ldots, y_r\rangle \in \mathfrak{A}_{g(l)}$ выполняется

$$\mathfrak{F}'_\omega \models P_q(\varphi(x), y_1, \ldots, y_r).$$

Проверим, что выполняются все остальные условия из определения неограниченности. В качестве $i \leqslant t$ мы выбираем $i = l = t_0 < t$. В качестве элементов $n_0, n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(l)}|}$ мы берём $n_0 = x$ и все элементы множества $\{n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(l)}|}\} = \mathfrak{A}_{g(l)}$. По построению $x \leqslant f(t)$, и $n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(l)}|} < f(t)$, в силу выбора $t \in T$. Кроме этого, ясно, что $\{y_1, \ldots, y_r\} \subseteq \{n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(l)}|}\}$. Это означает, что для некоторой формулы $\psi \in \pi_q^i$ выполняется

$$\mathfrak{A}_{g(t+1)} \models \psi(\varphi(n_0), n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(l)}|}).$$

Следовательно, так как $q \leqslant g(t+1)$, то для $j = t+1$ получаем

$$\mathfrak{A}_{g(t+1)} \models \neg\psi_{ij}(\varphi(n_0), n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(l)}|}).$$

Отсюда вытекает, что для нашего $i = l$ имеет место

$$\mathfrak{A}_{g(t+1)} \models \neg \bigwedge_{j=0}^{t+1} \psi_{ij}(\varphi(n_0), n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|}).$$

Осталось установить, что $\mathfrak{A}_{g(t+1)} \models \bigwedge_{j=0}^{t+1} \psi_{ij}(n_0, n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|})$. Действительно, для выбранных выше $t \in T$, $x \leqslant f(t)$ и $l = t_0$ не выполняется условие (A). Следовательно, для любого предикатного символа $P_{q'} \in \sigma_{g(t+1)}$ местности $r' + 1$ и любого кортежа $\langle y'_1, \ldots, y'_{r'} \rangle \in \mathfrak{A}_{g(l)}$ имеет место

$$\mathfrak{F}'_\omega \models \neg P_{q'}(x, y'_1, \ldots, y'_{r'}).$$

Но тогда для нашего $i = l$ и любой формулы $\psi \in \pi^i_{q'}$, где q' — произвольный индекс такой, что $P_{q'} \in \sigma_{g(t+1)}$, выполняется

$$\mathfrak{A}_{g(t+1)} \models \neg\psi(n_0, n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|}).$$

Откуда окончательно получаем, что $\mathfrak{A}_{g(t+1)} \models \psi_{ij}(n_0, n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|})$ для любых $j \leqslant t + 1$, и тем более имеет место

$$\mathfrak{A}_{g(t+1)} \models \bigwedge_{j=0}^{t+1} \psi_{ij}(n_0, n_1, \ldots, n_{|\mathfrak{A}_{g(i)}|}).$$

□

Следствие 3.3.2. *Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна* 1 *или* ω. *Свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.*

Доказательство. Любая свободная проективная плоскость $\mathfrak{F}_n$ конечного ранга вычислимо категорична, поскольку является конечно порождённой системой. Из предложения 3.1.1 и предложения 1.1.1 (пункт (ii)) следует, что свободная проективная плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ счётного ранга имеет бесконечную вычислимую размерность. □

Следствие 3.3.3. *Пусть K — любой из следующих классов моделей:*

(1) класс всех свободных проективных плоскостей,

(2) класс всех свободно порождённых проективных плоскостей,

(3) класс всех проективных плоскостей.

Тогда K^c не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

Доказательство. Любой класс K из формулировки утверждения содержит $\mathfrak{F}_\omega$. Из предложения 3.1.1 и предложения 1.1.1 (пункт (i)) вытекает, что любой класс, содержащий свободную плоскость $\mathfrak{F}_\omega$, не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма. □

§ 3.4. Невычислимость классов папповых и дезарговых плоскостей

В настоящем параграфе мы докажем, что никакое вычислимое семейство дезарговых проективных плоскостей не покрывает все типы вычислимого изоморфизма проективной плоскости, определённой алгебраически замкнутым полем счётного ранга трансцендентности. Отсюда, как следствие, получены результаты об отсутствии вычислимых нумераций с точностью до вычислимого изоморфизма для класса всех дезарговых плоскостей и класса всех папповых плоскостей.

Напомним, что в § 2.2 была предложена конструкция, которая по любой дезарговой проективной плоскости $\mathfrak{A}$ и любому остову $\overline{D}$ в $\mathfrak{A}$ позволяет формульно определять в плоскости ассоциативное тело $\mathfrak{F} = \langle D(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_+(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D})\rangle$, изоморфное (в предикатном языке) координатному телу плоскости $\mathfrak{A}$. Будем в таком случае называть модель $\mathfrak{F}$ *телом, определённым с помощью конструкции из § 2.2 в плоскости* $\mathfrak{A}$ *на остове* $\overline{D}$.

Остов $\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$ в вычислимой дезарговой проективной плоскости $\mathfrak{A}$ с минимальным канторовским номером $c^4(a_1, a_2, a_3, a_4)$ будем называть *минимальным остовом в* $\mathfrak{A}$.

Нам потребуется равномерная версия предложения 2.3.2 для случая нулевой тьюринговой степени.

Предложение 3.4.1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— вычислимая дезаргова проективная плоскость,* $\overline{E} = \langle E_1, E_2, E_3, E_4\rangle$ *— минимальный остов в* $\mathfrak{A}$*,* $\mathfrak{F}$ *— ассоциативное тело, определённое с помощью конструкции из § 2.2 в плоскости* $\mathfrak{A}$ *на остове* $\overline{E}$*. Тогда тело* $\mathfrak{F}$ *вычислимо и, более того, существует одноместная частично вычислимая функция* α *такая, что если* n *— индекс плоскости* $\mathfrak{A}$*, то* $\alpha(n)$ *— индекс тела* $\mathfrak{F}$*.*

Доказательство. Поскольку каждая формула из § 2.2 эквивалентна в плоскости некоторой $\exists$-формуле и некоторой $\forall$-формуле, заключаем, что все отношения, определимые в $\mathfrak{A}$ с помощью этих формул, являются вычислимыми. В частности, вычислимыми являются множества

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{A}, \overline{E}) &= \{u \in \omega \mid \mathfrak{A} \models \Phi_1(u, \overline{E})\}, \\ P_+(\mathfrak{A}, \overline{E}) &= \{\langle u, v, w\rangle \in \omega^3 \mid \mathfrak{A} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{E})\}, \\ P_\times(\mathfrak{A}, \overline{E}) &= \{\langle u, v, w\rangle \in \omega^3 \mid \mathfrak{A} \models \Theta(u, v, w, \overline{E})\}. \end{aligned}$$

Следовательно, ассоциативное тело $\mathfrak{F} = \langle D(\mathfrak{A}, \overline{E}), P_+(\mathfrak{A}, \overline{E}), P_\times(\mathfrak{A}, \overline{E})\rangle$ является вычислимым.

Определим следующую формулу сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle$

$$Fr(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1 \in A^0)\&(v_2 \in A^0)\&(v_3 \in A^0)\&(v_4 \in A^0)\& \bigwedge_{i<j}(v_i \neq v_j)\& \\ \bigwedge_{i<j<k} \exists v_5 \exists v_6 \big((v_5 \neq v_6)\&P(v_i, v_j, v_5)\&P(v_i, v_k, v_6)\big).$$

Формула $Fr(v_1, v_2, v_3, v_4)$ выделяет в модели $\mathfrak{A}$ наборы $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$, являющиеся остовами плоскости, и эквивалентна в $\mathfrak{A}$ следующей $\forall$-формуле

$$(v_1 \in A^0)\&(v_2 \in A^0)\&(v_3 \in A^0)\&(v_4 \in A^0)\& \bigwedge_{i<j}(v_i \neq v_j)\& \\ \bigwedge_{i<j<k} \forall v_5 \forall v_6 \big((P(v_i, v_j, v_5)\&P(v_i, v_k, v_6)) \longrightarrow v_5 \neq v_6\big).$$

Таким образом, формула $Fr(v_1, v_2, v_3, v_4)$ задаёт вычислимое отношение на $\mathfrak{A}$, и, следовательно, минимальный остов $\overline{E}$ плоскости $\mathfrak{A}$ находится эффективно по индексу $\mathfrak{A}$. Кроме этого, все формульные отношения из конструкции § 2.2 равномерно эффективно зависят от индекса плоскости $\mathfrak{A}$ и остова $\overline{E}$. Отсюда заключаем, что индекс тела $\mathfrak{F}$ находится эффективно по индексу плоскости $\mathfrak{A}$, т.е. существует частично вычислимая одноместная функция α такая, что $\alpha(n)$ является индексом тела $\mathfrak{F}$, если n — индекс плоскости $\mathfrak{A}$. □

Обозначим через $\mathfrak{K}_\omega$ алгебраически замкнутое поле счётного ранга трансцендентности над $\mathbb{Q}$. Известно (см. [14], следствие 5.1.8), что поле $\mathfrak{K}_\omega$ является не ограниченным. Из неограниченности $\mathfrak{K}_\omega$ следует, что по любому вычислимому семейству S моделей сигнатуры $\langle P_+^3, P_\times^3\rangle$ эффективно строится вычислимое представление $\mathfrak{F}$ поля $\mathfrak{K}_\omega$ такое, что $\mathfrak{F}$ не является вычислимо изоморфным ни одной модели из S. Покажем, что паппова проективная плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$, определённая полем $\mathfrak{K}_\omega$, наследует описанное свойство $\mathfrak{K}_\omega$.

Теорема 3.4.2. *Пусть $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ — вычислимая последовательность дезарговых проективных плоскостей. Тогда существует вычислимое представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$ такое, что $\mathfrak{A}$ не является вычислимо изоморфным ни одной плоскости из $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$.*

Доказательство. В силу вычислимости последовательности $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$, заключаем, что функция β, сопоставляющая натуральному n индекс плоскости $\mathfrak{A}_n$, является вычислимой.

Для каждого $n \in \omega$ обозначим через $\overline{E}_n = \langle E_n^1, E_n^2, E_n^3, E_n^4\rangle$ минимальный остов в $\mathfrak{A}_n$ и определим $\mathfrak{F}_n$ — ассоциативное тело, определённое с помощью конструкции из § 2.2 в плоскости $\mathfrak{A}_n$ на остове $\overline{E}_n$. Тогда в силу предложения 3.4.1, каждое тело $\mathfrak{F}_n$ вычислимо, и его индекс вычисляется как $\alpha(\beta(n))$. Следовательно, последовательность ассоциативных тел $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\in\omega}$ вычислима.

Т.к. модель $\mathfrak{K}_\omega$ не ограничена, найдется вычислимое представление $\mathfrak{F}$ поля $\mathfrak{K}_\omega$ такое, что $\mathfrak{F}$ не является вычислимо изоморфным $\mathfrak{F}_n$ ни для какого $n \in \omega$. Для данного вычислимого поля $\mathfrak{F}$ определим вычислимое представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ в соответствии с предложением 2.3.1. Ясно, что $\mathfrak{A}$ является также вычислимым представлением для $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$.

Используя конструкцию из доказательства предложения 2.3.1, зафиксируем естественный изоморфизм $\nu : \mathfrak{A} \to \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$, определённый по следующей схеме:

$$
\begin{aligned}
&\nu(c^4(1,1,0,0)) = \langle e_1\rangle,\\
&\nu(c^4(1,x,1,0)) = \langle xe_1 + e_2\rangle, x \in \mathfrak{F},\\
&\nu(c^4(1,x,y,1)) = \langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle, x, y \in \mathfrak{F},\\
&\nu(c^4(2,0,0,1)) = \langle e_3^\top\rangle,\\
&\nu(c^4(2,0,1,z)) = \langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle, z \in \mathfrak{F},\\
&\nu(c^4(2,1,y,z)) = \langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle, y, z \in \mathfrak{F},
\end{aligned}
$$

где e_1, e_2, e_3 — базис векторного пространства $V_{\mathfrak{F}}$.

Допустим, для некоторого $n \in \omega$ существует вычислимый изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_n$. Для $1 \leqslant i \leqslant 4$ введём обозначение $D_i = \varphi^{-1}(E_n^i)$. Тогда четвёрка $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4\rangle$

является остовом в $\mathfrak{A}$. Следовательно, четвёрка $\langle \nu(D_1), \nu(D_2), \nu(D_3), \nu(D_4)\rangle$ является остовом в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, существует базис d_1, d_2, d_3 пространства $V_{\mathfrak{F}}$ такой, что $\nu(D_1) = \langle d_1\rangle$, $\nu(D_2) = \langle d_2\rangle$, $\nu(D_3) = \langle d_3\rangle$ и $\nu(D_4) = \langle d_1 + d_2 + d_3\rangle$. Поскольку элементы e_1, e_2, e_3 также образуют базис $V_{\mathfrak{F}}$, найдутся α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 в $\mathfrak{F}$ с условием

$$\begin{aligned} d_1 &= \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3, \\ d_2 &= \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3, \end{aligned}$$

В частности, заметим, что в плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ элемент $\langle x d_1 + d_2\rangle$ совпадает с элементом $\langle (x\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + (x\beta_1 + \beta_2)e_2 + (x\gamma_1 + \gamma_2)e_3\rangle$, где $x \in \mathfrak{F}$.

Определим отображение $\psi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_n$, для каждого $x \in \mathfrak{F}$ положив

$$\psi(x) = \varphi(\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2\rangle)).$$

Отображение $x \longmapsto \nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2\rangle)$ является вычислимым, т.к. может быть задано по следующей кусочной схеме

$$\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2\rangle) =$$
$$= \begin{cases} c^4(1,1,0,0), \text{если } x\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \text{ и } x\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ c^4(1, (x\beta_1+\beta_2)^{-1}(x\alpha_1 + \alpha_2), 1, 0), \text{если } x\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \text{ и } x\beta_1 + \beta_2 \neq 0, \\ c^4(1, (x\gamma_1+\gamma_2)^{-1}(x\alpha_1 + \alpha_2), (x\gamma_1+\gamma_2)^{-1}(x\beta_1 + \beta_2), 1), \text{если } x\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция ψ вычислима.

Докажем, что область значений ψ действительно содержится в $\mathfrak{F}_n$. Если $x \in \mathfrak{F}$, то имеет место

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_1(\langle x d_1 + d_2\rangle, \langle d_1\rangle, \langle d_2\rangle, \langle d_3\rangle, \langle d_1 + d_2 + d_3\rangle).$$

Поскольку $\nu^{-1} : \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}$ является изоморфизмом плоскостей, заключаем

$$\mathfrak{A} \models \Phi_1(\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2\rangle), \overline{D}).$$

Аналогично, используя изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_n$, получаем

$$\mathfrak{A}_n \models \Phi_1(\varphi(\nu^{-1}(\langle x d_1 + d_2\rangle)), \overline{E}_n).$$

Значит $\psi(x) \in \mathfrak{F}_n$.

Для доказательства сюръективности ψ рассмотрим произвольный $a \in \mathfrak{F}_n$. Тогда $\mathfrak{A}_n \models \Phi_1(a, \overline{E}_n)$, откуда заключаем

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_1(\nu(\varphi^{-1}(a)), \langle d_1\rangle, \langle d_2\rangle, \langle d_3\rangle, \langle d_1 + d_2 + d_3\rangle).$$

Поскольку формула Φ_1 определяет носитель координатного тела в плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ относительно остова $\langle d_1\rangle$, $\langle d_2\rangle$, $\langle d_3\rangle$, $\langle d_1 + d_2 + d_3\rangle$, заключаем, что найдется $x \in \mathfrak{F}$ такой, что $\nu(\varphi^{-1}(a)) = \langle x d_1 + d_2\rangle$. Ясно, что $\psi(x) = a$.

Инъективность ψ следует из инъективности φ, ν и отображения $x \longmapsto \langle x d_1 + d_2\rangle$.

Следующая цепочка эквивалентностей показывает, что ψ сохраняет операцию сложения в теле:

$$\mathfrak{F} \models y + z = x \iff$$
$$\iff \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \models \mathcal{X}(\langle xd_1 + d_2\rangle, \langle yd_1 + d_2\rangle, \langle zd_1 + d_2\rangle, \langle d_1\rangle, \langle d_2\rangle, \langle d_3\rangle, \langle d_1 + d_2 + d_3\rangle) \iff$$
$$\iff \mathfrak{A} \models \mathcal{X}(\nu^{-1}(\langle xd_1 + d_2\rangle), \nu^{-1}(\langle yd_1 + d_2\rangle), \nu^{-1}(\langle zd_1 + d_2\rangle), \overline{D}) \iff$$
$$\iff \mathfrak{A}_n \models \mathcal{X}(\psi(x), \psi(y), \psi(z), \overline{E}_n) \iff \mathfrak{F}_n \models \psi(y) + \psi(z) = \psi(x).$$

Аналогично доказывается, что ψ сохраняет операцию умножения.

Таким образом, установлено, что ψ является вычислимым изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ на поле $\mathfrak{F}_n$, что противоречит выбору вычислимого представления $\mathfrak{F}$. □

Из доказанной теоремы вытекает, что любой класс дезарговых проективных плоскостей, содержащий плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$, не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма. Отсюда получаем основной результат настоящего параграфа:

Следствие 3.4.3. *Пусть K — любой из следующих классов моделей:*

(1) класс всех папповых проективных плоскостей,

(2) класс всех дезарговых проективных плоскостей.

Тогда K^c не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

В заключение отметим, что А.К. Войтов в работе [6] исследовал вопросы существования Δ^0_α-вычислимых нумераций для различных классов проективных плоскостей, и им были получены следующие результаты:

Теорема 3.4.4 (А.К. Войтов [6])**.** *Пусть K — любой из следующих классов:*

(1) класс всех папповых проективных плоскостей,

(2) класс всех дезарговых проективных плоскостей.

Тогда K^c имеет Δ^0_3-вычислимую нумерацию с точностью до вычислимого изоморфизма, но не имеет Δ^0_2-вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

Теорема 3.4.5 (А.К. Войтов [6])**.** *Пусть $\alpha > 1$ — произвольный вычислимый ординал, а K — любой из следующих классов моделей:*

(1) класс всех папповых проективных плоскостей,

(2) класс всех дезарговых проективных плоскостей,

(3) класс всех проективных плоскостей.

Тогда K^c имеет $\Delta^0_{\alpha+3}$-вычислимую фридбергову нумерацию с точностью до Δ^0_α-изоморфизма, но не имеет $\Delta^0_{\alpha+2}$-вычислимой фридберговой нумерации с точностью до Δ^0_α-изоморфизма.

Глава 4. Эффективная полнота классов проективных плоскостей

В настоящей главе мы докажем, что класс всех свободно порождённых проективных плоскостей и класс всех папповых проективных плоскостей являются эффективно полными относительно определённых видов спектров степеней и вычислимых размерностей. В частности, отсюда будет следовать, что в этих классах реализуются все возможные вычислимые размерности.

Для доказательства эффективной полноты класса свободно порождённых проективных плоскостей мы применим предложение 1.1.2, определив подходящую эффективную интерпретацию симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых плоскостей бесконечного ранга. В качестве одного из следствий предложенной интерпретации мы также докажем наследственную неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей.

Для доказательства эффективной полноты класса папповых проективных плоскостей мы используем доказанный в [63] результат об эффективной полноте класса полей и предложенные в § 2.3 конструкции, позволяющие по заданному представлению координатного поля строить представление соответствующей папповой плоскости и, наоборот, в заданном представлении папповой плоскости определять представление для её координатного поля.

В § 4.1 определяется интерпретация счётных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей бесконечного ранга.

В § 4.2 устанавливаются некоторые алгебраические свойства определённой в предыдущем параграфе интерпретации графов в свободно порождённых плоскостях.

В § 4.3 приведены алгоритмические свойства построенной интерпретации и доказываются основные результаты о спектрах степеней и эффективных размерностях в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Как следствие, мы получаем результат о том, что для любого натурального $n \geqslant 1$ существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна n. Таким образом, критерий вычислимой категоричности свободных проективных плоскостей, доказанный в следствии 3.3.2, не переносится на случай произвольных свободно порождённых плоскостей.

В § 4.4 мы используем ослабленную версию предложенной в § 4.1 интерпретации для доказательства относительной элементарной определимости класса конечных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Отсюда следует наследственная неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей.

В § 4.5 мы установим ряд алгоритмических свойств представления $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ папповой проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ и представления $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ поля $\mathfrak{K}$, изложенных в предложениях 2.3.1 и 2.3.2 соответственно.

В § 4.6 доказывается, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов. Отсюда, как следствие, получен результат о том, что для любого натурального $n \geqslant 1$ существует вычислимая паппова проективная плоскость вычислимой размерности n.

§ 4.1. Интерпретация графов в свободно порождённых плоскостях

Для применения достаточного признака эффективной полноты из предложения 1.1.2 мы определим интерпретацию счётных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей.

Пусть $\mathfrak{G} = \langle G, E\rangle$ — счётный симметричный иррефлексивный граф, т.е. E является симметричным и иррефлексивным бинарным отношением на множестве G. Можно считать, что $G = \omega$. Мы также будем предполагать, что $\mathfrak{G}$ содержит бесконечное подмножество попарно не смежных рёбер.

Определим по $\mathfrak{G}$ невырожденную незамкнутую конфигурацию $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$, положив

$$A^0 = \{a, b, c_i, d_i, e_i, f_i, o, x_i \mid i \in G\} \cup \{g_{ij}, h_{ij}, p_{ij} \mid i, j \in G, i < j\},$$
$${}^0A = \{\alpha, \beta, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i, \zeta_i, \theta \mid i \in G\} \cup \{\eta_{ij}, \xi_{ij}, \pi_{ij}, \rho_{ij} \mid i, j \in G, i < j\},$$
$$A = A^0 \cup {}^0A.$$

Пара $\langle u, v\rangle$ принадлежит отношению инцидентности I тогда и только тогда, когда $\langle u, v\rangle$ или $\langle v, u\rangle$ совпадает с одной из пар, перечисленных в следующем списке:

(а) $\langle \alpha, c_i\rangle, \langle \alpha, d_i\rangle$, где $i \in G$;

(б) $\langle \beta, e_i\rangle, \langle \beta, f_i\rangle$, где $i \in G$;

(в) $\langle \gamma_i, a\rangle, \langle \gamma_i, c_i\rangle, \langle \gamma_i, e_i\rangle, \langle \gamma_i, x_i\rangle$, где $i \in G$;

(г) $\langle \gamma_i, g_{ij}\rangle, \langle \gamma_j, h_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(д) $\langle \delta_i, b\rangle, \langle \delta_i, d_i\rangle, \langle \delta_i, f_i\rangle, \langle \delta_i, x_i\rangle$, где $i \in G$;

(е) $\langle \delta_i, h_{ij}\rangle, \langle \delta_j, g_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(ж) $\langle \varepsilon_i, c_i\rangle, \langle \varepsilon_i, f_i\rangle, \langle \varepsilon_i, o\rangle$, где $i \in G$;

(з) $\langle \zeta_i, d_i\rangle, \langle \zeta_i, e_i\rangle, \langle \zeta_i, o\rangle$, где $i \in G$;

(и) $\langle \eta_{ij}, g_{ij}\rangle, \langle \eta_{ij}, h_{ij}\rangle, \langle \eta_{ij}, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(к) $\langle \xi_{ij}, x_i\rangle, \langle \xi_{ij}, x_j\rangle, \langle \xi_{ij}, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(л) $\langle \theta, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$ и $\langle i, j\rangle \in E$;

(м) $\langle \pi_{ij}, c_i\rangle, \langle \pi_{ij}, e_j\rangle, \langle \pi_{ij}, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(н) $\langle \rho_{ij}, e_i\rangle, \langle \rho_{ij}, c_j\rangle, \langle \rho_{ij}, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$.

Фрагменты данной конфигурации графически проиллюстрированы на рисунках ниже.

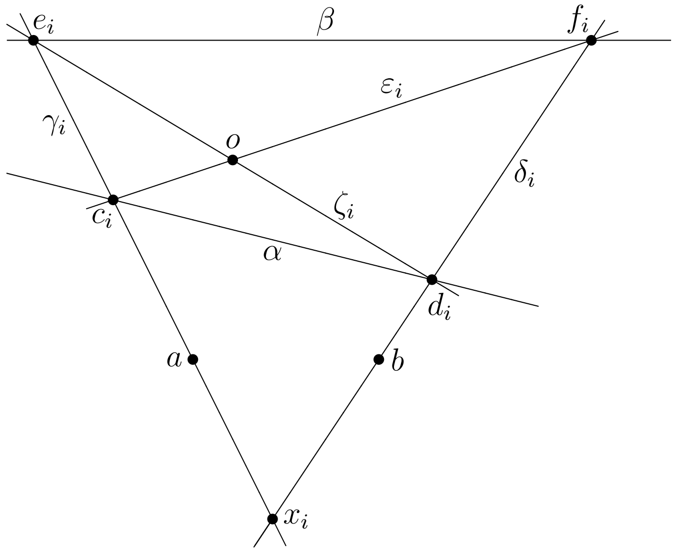

Рис. 5

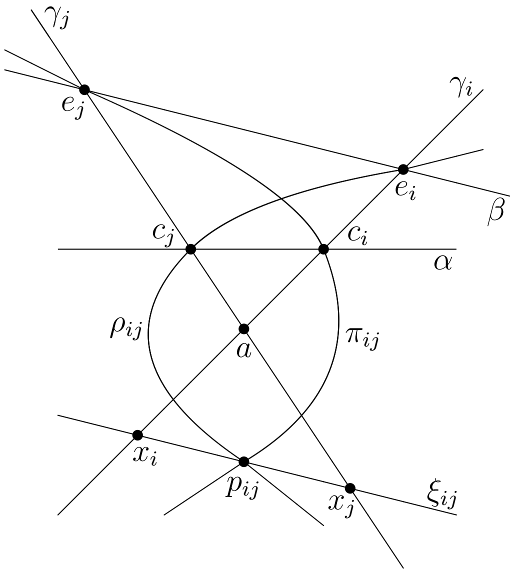

Рис. 6

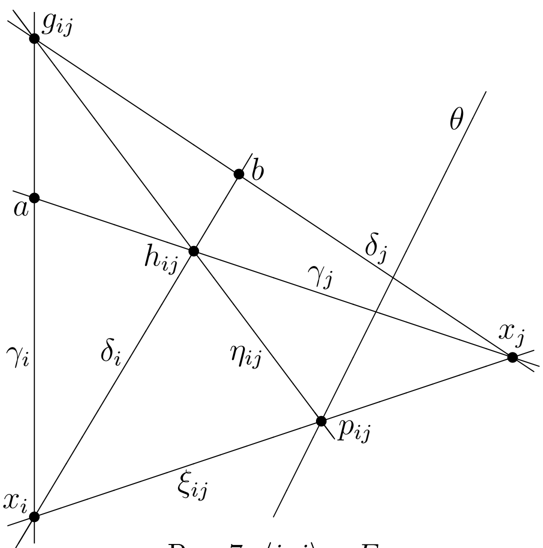

Рис. 7: $\langle i, j \rangle \in E$

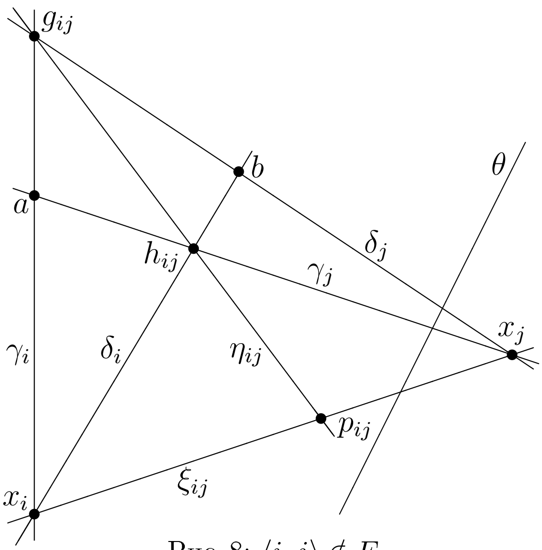

Рис. 8: $\langle i, j\rangle \notin E$

Определим строгий полный порядок $\prec$ на элементах множества A следующим образом. Положим

$$B_{-1} = \{o \prec a \prec b \prec \alpha \prec \beta \prec \theta\},$$

$$B_i = \{c_i \prec d_i \prec e_i \prec f_i \prec g_{jk} \prec h_{jk} \prec p_{jk} \prec x_i$$
$$\prec \gamma_i \prec \delta_i \prec \varepsilon_i \prec \zeta_i \prec \eta_{jk} \prec \xi_{jk} \prec \pi_{jk} \prec \rho_{jk}\},$$

где $i, j, k \in \omega$, $j < k$ и пара $\langle j, k\rangle$ имеет номер i в некотором фиксированном эффективном перечислении множества пар $\{\langle m, n\rangle \mid m < n\}$. Тогда для произвольных $u, v \in A$ полагаем

$$u \prec v \Longleftrightarrow (u \in B_i \ \&\ v \in B_j \ \&\ i < j) \vee (u \in B_i \ \&\ v \in B_i \ \&\ u \prec v).$$

Применяя конструкцию Ширшова (см. § 2.1) к конфигурации $\mathfrak{A}$ и заданному выше порядку $\prec$, определим проективную плоскость $\mathfrak{F} = \langle F, F^0, {}^0F, \cdot\rangle$, свободно порождённую конфигурацией $\mathfrak{A}$. Отметим, что ранг плоскости $\mathfrak{F}$ бесконечен.

§ 4.2. Алгебраические свойства интерпретации

В данном параграфе мы изучим некоторые структурные свойства определённых выше конфигурации $\mathfrak{A}$ и проективной плоскости $\mathfrak{F}$.

Напомним, что закрытое ядро $\mathcal{K}(\mathfrak{A})$ конфигурации $\mathfrak{A}$ определяется следующим образом

$$\mathcal{K}(\mathfrak{A}) = \bigcup\{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \text{ — конечная закрытая подконфигурация в } \mathfrak{A}\}.$$

Докажем, что любой элемент конфигурации $\mathfrak{A}$ попадает в её закрытое ядро.

Лемма 4.2.1. *$\mathcal{K}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Для произвольных $i, j, k \in \omega$, где $i < j < k$, рассмотрим в $\mathfrak{A}$ конечную подконфигурацию $\mathfrak{B} = \langle B, B^0, {}^0B, I^{\mathfrak{B}} \rangle$, где

$$B^0 = \{a, b, c_s, d_s, e_s, f_s, o, x_s \mid s \in \{i, j, k\}\} \cup \{g_{st}, h_{st}, p_{st} \mid \langle s, t\rangle \in \{\langle i, j\rangle, \langle i, k\rangle, \langle j, k\rangle\}\},$$
$${}^0B = \{\alpha, \beta, \gamma_s, \delta_s, \varepsilon_s, \zeta_s \mid s \in \{i, j, k\}\} \cup \{\eta_{st}, \xi_{st}, \pi_{st}, \rho_{st} \mid \langle s, t\rangle \in \{\langle i, j\rangle, \langle i, k\rangle, \langle j, k\rangle\}\},$$
$$B = B^0 \cup {}^0B, \quad I^{\mathfrak{B}} = I \cap B^2.$$

Каждый элемент, принадлежащий множеству

$$\{a, b, d_s, f_s, \varepsilon_s, \zeta_s \mid s \in \{i, j, k\}\} \cup \{g_{st}, h_{st}, \eta_{st}, \xi_{st}, \pi_{st}, \rho_{st} \mid \langle s, t\rangle \in \{\langle i, j\rangle, \langle i, k\rangle, \langle j, k\rangle\}\}$$

инцидентен ровно трём элементам конфигурации $\mathfrak{B}$.

Элементы x_s, где $s \in \{i, j, k\}$, и элементы p_{st}, где $\langle s, t\rangle \in \{\langle i, j\rangle, \langle i, k\rangle, \langle j, k\rangle\}$, инцидентны ровно четырём элементам конфигурации $\mathfrak{B}$. Элементы c_s и e_s, где $s \in \{i, j, k\}$, инцидентны в точности пяти элементам конфигурации $\mathfrak{B}$. Наконец, элементы o, α, β, γ_s, δ_s, где $s \in \{i, j, k\}$, инцидентны в точности шести элементам конфигурации $\mathfrak{B}$.

Таким образом, $\mathfrak{B}$ — закрытая подконфигурация $\mathfrak{A}$. Следовательно, в силу произвольности выбора индексов i, j, k, заключаем, что $A \setminus \{\theta\} \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{A})$.

Выберем теперь некоторые индексы $i < j < k < l < m < n$ такие, что $\langle i, j\rangle \in E$, $\langle k, l\rangle \in E$ и $\langle m, n\rangle \in E$. Такие индексы существуют, поскольку граф $\mathfrak{G}$ содержит бесконечное подмножество попарно не смежных рёбер. Рассмотрим в $\mathfrak{A}$ конечную подконфигурацию $\mathfrak{C} = \langle C, C^0, {}^0C, I^{\mathfrak{C}} \rangle$, где

$$C^0 = \{a, b, c_s, d_s, e_s, f_s, o, x_s \mid s \in \{i, j, k, l, m, n\}\} \cup \{g_{st}, h_{st}, p_{st} \mid s, t \in \{i, j, k, l, m, n\}, s < t\},$$
$${}^0C = \{\alpha, \beta, \gamma_s, \delta_s, \varepsilon_s, \zeta_s, \theta \mid s \in \{i, j, k, l, m, n\}\} \cup \{\eta_{st}, \xi_{st}, \pi_{st}, \rho_{st} \mid s, t \in \{i, j, k, l, m, n\}, s < t\},$$
$$C = C^0 \cup {}^0C, \quad I^{\mathfrak{C}} = I \cap C^2.$$

Несложно проверить непосредственно, что любой элемент конфигурации $\mathfrak{C}$ инцидентен не менее чем трём элементам $\mathfrak{C}$. Отметим лишь, что если $s < t$ и $\langle s, t\rangle \notin E$, то точка p_{st} индицентна только четырём прямым η_{st}, ξ_{st}, π_{st}, ρ_{st}. Если же $s < t$ и $\langle s, t\rangle \in E$, то p_{st} индицентна пяти прямым $\eta_{st}, \xi_{st}, \pi_{st}, \rho_{st}$ и θ. В частности, в силу выбора индексов i, j, k, l, m, n, точки p_{ij}, p_{kl}, p_{mn} инцидентны прямой θ.

Таким образом, $\mathfrak{C}$ — закрытая подконфигурация $\mathfrak{A}$. Следовательно $\theta \in \mathcal{K}(\mathfrak{A})$. Отсюда окончательно заключаем, что $\mathcal{K}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. $\square$

Следующая лемма описывает поведение элементов конфигурации $\mathfrak{A}$ под действием автоморфизмов проективной плоскости $\mathfrak{F}$.

Лемма 4.2.2. *Пусть $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ — произвольный автоморфизм проективной плоскости $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие свойства:*

(а) Для любых $i < j$ существуют $k < l$ такие, что $\varphi(p_{ij}) = p_{kl}$.

(б) $\varphi(\theta) = \theta$.

(в) $\varphi(\alpha) = \alpha$ и $\varphi(\beta) = \beta$, либо $\varphi(\alpha) = \beta$ и $\varphi(\beta) = \alpha$.

(г) Для любого i существует j такой, что $\varphi(\gamma_i) = \gamma_j$ и $\varphi(\delta_i) = \delta_j$.

(д) $\varphi(a) = a$ и $\varphi(b) = b$.

(е) Для любого i существует j такой, что $\varphi(x_i) = x_j$.

(ж) Если $\varphi(\alpha) = \alpha$, то для любого i существует j такой, что $\varphi(c_i) = c_j$, $\varphi(e_i) = e_j$, $\varphi(d_i) = d_j$ и $\varphi(f_i) = f_j$. Если же $\varphi(\alpha) = \beta$, то для любого i существует j такой, что $\varphi(c_i) = e_j$, $\varphi(e_i) = c_j$, $\varphi(d_i) = f_j$ и $\varphi(f_i) = d_j$.

(з) Если $\varphi(\alpha) = \alpha$, то для любого i существует j такой, что $\varphi(\varepsilon_i) = \varepsilon_j$ и $\varphi(\zeta_i) = \zeta_j$. Если же $\varphi(\alpha) = \beta$, то для любого i существует j такой, что $\varphi(\varepsilon_i) = \zeta_j$ и $\varphi(\zeta_i) = \varepsilon_j$.

(и) $\varphi(o) = o$.

(к) Для любых $i < j$ существуют $k < l$ такие, что $\varphi(g_{ij}) = g_{kl}$ или $\varphi(g_{ij}) = h_{kl}$.

(л) Для любых $i < j$ существуют $k < l$ такие, что $\varphi(h_{ij}) = h_{kl}$ или $\varphi(h_{ij}) = g_{kl}$.

(м) Для любых $i < j$ существуют $k < l$ такие, что $\varphi(\eta_{ij}) = \eta_{kl}$.

(н) Для любых $i < j$ существуют $k < l$ такие, что $\varphi(\xi_{ij}) = \xi_{kl}$.

(о) Для любых $i < j$ существуют $k < l$ такие, что $\varphi(\pi_{ij}) = \pi_{kl}$ или $\varphi(\pi_{ij}) = \rho_{kl}$.

(п) Для любых $i < j$ существуют $k < l$ такие, что $\varphi(\rho_{ij}) = \rho_{kl}$ или $\varphi(\rho_{ij}) = \pi_{kl}$.

Доказательство. Для произвольного автоморфизма φ проективной плоскости $\mathfrak{F}$ справедливо тождество $\varphi(\mathcal{K}(\mathfrak{F})) = \mathcal{K}(\mathfrak{F})$. Поскольку $\mathfrak{F}$ свободно порождена конфигурацией $\mathfrak{A}$, заключаем, что $\mathcal{K}(\mathfrak{F}) = \mathcal{K}(\mathfrak{A})$. Отсюда, в силу леммы 4.2.1, следует, что $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Таким образом, сужение $\varphi\restriction\mathfrak{A}$ является автоморфизмом конфигурации $\mathfrak{A}$.

(а) Заметим, что точки p_{ij}, $i < j$, являются единственными элементами первого типа, которые инцидентны четырём или пяти прямым из $\mathfrak{A}$. Следовательно, автоморфизм φ может отображать p_{ij} только в некоторое p_{kl}.

(б) Элемент θ является единственной прямой в $\mathfrak{A}$, которая инцидентна бесконечному множеству точек вида p_{ij}. Отсюда и из пункта (а) следует, что $\varphi(\theta) = \theta$.

(в) Прямой α инцидентно бесконечное множество точек из $\mathfrak{A}$. Кроме α, таким же свойством обладают прямые β, θ, γ_i, δ_i, где $i \in \omega$. Допустим, $\varphi(\alpha) = \gamma_i$ для некоторого i. Тогда, в силу пункта (б), для элемента β возможны следующие случаи: $\varphi(\beta) = \alpha$, или $\varphi(\beta) = \beta$, или $\varphi(\beta) = \gamma_j$ для некоторого j, или $\varphi(\beta) = \delta_k$ для некоторого k. В любом случае в конфигурации $\mathfrak{A}$ определено произведение $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)$. Однако произведение $\alpha\cdot\beta$ в $\mathfrak{A}$ не определено. Следовательно, $\varphi(\alpha) \neq \gamma_i$ ни для какого $i \in \omega$. Аналогично рассуждая, заключаем, что $\varphi(\alpha) \neq \delta_i$ ни для какого $i \in \omega$. Следовательно, $\varphi(\alpha) = \alpha$ или $\varphi(\alpha) = \beta$. Утверждение о том, что $\varphi(\beta) \in \{\alpha, \beta\}$, доказывается аналогично.

(г) Рассмотрим прямую γ_i, $i \in \omega$. В силу рассуждений в пунктах (б) и (в), возможны два случая: $\varphi(\gamma_i) = \gamma_j$ или $\varphi(\gamma_i) = \delta_j$ для некоторого j. Если $\varphi(\gamma_i) = \delta_j$, то из равенства $\gamma_i\cdot\alpha = c_i$ заключаем, что $\delta_j\cdot\varphi(\alpha) = \varphi(c_i)$. В силу пункта (б), $\varphi(\alpha) \in \{\alpha, \beta\}$ и значит $\delta_j\cdot\varphi(\alpha) = d_j$ или $\delta_j\cdot\varphi(\alpha) = f_j$. Следовательно $\varphi(c_i) \in \{d_j, f_j\}$. Однако, c_i инцидентна бесконечному множеству прямых из $\mathfrak{A}$, а каждая из точек d_j и f_j инцидентна только трём прямым. Следовательно $\varphi(\gamma_i) \neq \delta_j$. Таким образом, заключаем, что $\varphi(\gamma_i) = \gamma_j$. Аналогичными рассуждениями можно также показать, что $\varphi(\delta_i) = \delta_k$ для некоторого k.

Допустим, $j \neq k$. Тогда $\varphi(x_i) = \varphi(\gamma_i\cdot\delta_i) = \gamma_j\cdot\delta_k$. Следовательно, $\varphi(x_i) = g_{jk}$, если $j < k$, и $\varphi(x_i) = h_{kj}$, если $k < j$. Однако, x_i инцидентна бесконечному множеству прямых из $\mathfrak{A}$, а каждая из точек g_{jk} и h_{kj} инцидентна только трём прямым. Таким образом, $j = k$.

(д) Все прямые γ_i, $i \in \omega$, пересекаются в точке a, а все прямые δ_i, $i \in \omega$, — в точке b. Отсюда, учитывая пункт (г), заключаем, что $\varphi(a) = a$ и $\varphi(b) = b$.

(е) В силу пункта (г) для некоторого j имеет место $\varphi(x_i) = \varphi(\gamma_i{\cdot}\delta_i) = \gamma_j{\cdot}\delta_j = x_j$.

(ж) Пусть $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(\gamma_i) = \gamma_j$ и $\varphi(\delta_i) = \delta_j$. Тогда $\varphi(c_i) = \varphi(\gamma_i{\cdot}\alpha) = \gamma_j{\cdot}\alpha = c_j$, $\varphi(e_i) = \varphi(\gamma_i{\cdot}\beta) = \gamma_j{\cdot}\beta = e_j$, $\varphi(d_i) = \varphi(\delta_i{\cdot}\alpha) = \delta_j{\cdot}\alpha = d_j$, $\varphi(f_i) = \varphi(\delta_i{\cdot}\beta) = \delta_j{\cdot}\beta = f_j$. Случай $\varphi(\alpha) = \beta$ рассматривается аналогично.

(з) Пусть $\varphi(\alpha) = \alpha$. Тогда в силу пункта (ж) для некоторого j получаем: $\varphi(\varepsilon_i) = \varphi(c_i{\cdot}f_i) = c_j{\cdot}f_j = \varepsilon_j$, $\varphi(\zeta_i) = \varphi(d_i{\cdot}e_i) = d_j{\cdot}e_j = \zeta_j$. Случай $\varphi(\alpha) = \beta$ рассматривается аналогично.

(и) Элемент o является точкой пересечения всех прямых ε_i, ζ_i, $i \in \omega$. Отсюда в силу пункта (з) заключаем, что $\varphi(o) = o$.

(к) В силу пунктов (г) и (е), для индексов $i < j$ найдутся такие k и l, что $\varphi(\gamma_i) = \gamma_k$, $\varphi(\delta_i) = \delta_k$, $\varphi(\gamma_j) = \gamma_l$ и $\varphi(\delta_j) = \delta_l$. Тогда $\varphi(g_{ij}) = \varphi(\gamma_i{\cdot}\delta_j) = \gamma_k{\cdot}\delta_l$. Следовательно, если $k < l$, то $\varphi(g_{ij}) = g_{kl}$. Если же $l < k$, то $\varphi(g_{ij}) = h_{lk}$.

(л) Доказывается аналогично (к).

(м) Продолжая рассуждения пунктов (к) и (л), получаем: $\varphi(\eta_{ij}) = \varphi(g_{ij}{\cdot}h_{ij})$. Следовательно, если $k < l$, то $\varphi(\eta_{ij}) = g_{kl}{\cdot}h_{kl} = \eta_{kl}$. Если же $l < k$, то $\varphi(\eta_{ij}) = h_{lk}{\cdot}g_{lk} = \eta_{lk}$.

(н) Пусть $\varphi(x_i) = x_k$, $\varphi(x_j) = x_l$. Тогда $\varphi(\xi_{ij}) = \varphi(x_i{\cdot}x_j) = x_k{\cdot}x_l$. Следовательно, $\varphi(\xi_{ij}) = \xi_{kl}$, если $k < l$, и $\varphi(\xi_{ij}) = \xi_{lk}$, если $l < k$.

(о) В силу пункта (ж), для индексов $i < j$ найдутся такие k и l, что $\varphi(c_i) = c_k$ и $\varphi(e_j) = e_l$, или $\varphi(c_i) = e_k$ и $\varphi(e_j) = c_l$. Следовательно, так как $\varphi(\pi_{ij}) = \varphi(c_i{\cdot}e_j)$, то $\varphi(\pi_{ij}) = c_k{\cdot}e_l$ или $\varphi(\pi_{ij}) = e_k{\cdot}c_l$. Тогда если $k < l$, то $\varphi(\pi_{ij}) = \pi_{kl}$ или $\varphi(\pi_{ij}) = \rho_{kl}$. Если же $l < k$, то $\varphi(\pi_{ij}) = \rho_{lk}$ или $\varphi(\pi_{ij}) = \pi_{lk}$.

(п) Доказывается аналогично (о). □

Определим в проективной плоскости $\mathfrak{F}$ следующие отношения

$$D(\mathfrak{F}) = \{x_i \mid i \in \omega\}, \quad R(\mathfrak{F}) = \{\langle x_i, x_j\rangle \mid i, j \in \omega, \langle i, j\rangle \in E\}.$$

Предложение 4.2.3. *Отношения $D(\mathfrak{F})$ и $R(\mathfrak{F})$ инвариантны.*

Доказательство. Пусть φ — произвольный автоморфизм плоскости $\mathfrak{F}$. Как было замечено выше, тогда $\varphi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$.

Из пункта (е) леммы 4.2.2 следует, что $\varphi(D(\mathfrak{F})) \subseteq D(\mathfrak{F})$. Из пунктов (а), (д), (ж), (и)–(л) леммы 4.2.2 вытекает, что для любого $i \in \omega$ имеет место $\varphi^{-1}(x_i) \notin A^0 \setminus D(\mathfrak{F})$. Следовательно $D(\mathfrak{F}) \subseteq \varphi(D(\mathfrak{F}))$, и значит отношение $D(\mathfrak{F})$ инвариантно.

Докажем, что $\varphi(R(\mathfrak{F})) \subseteq R(\mathfrak{F})$. Пусть $\langle x_i, x_j\rangle \in R(\mathfrak{F})$, то есть $\langle i, j\rangle \in E$. По лемме 4.2.2 найдутся k и l такие, что $\varphi(x_i) = x_k$ и $\varphi(x_j) = x_l$. В силу симметричности E, можно считать, что $i < j$ и $k < l$. Тогда $\varphi(p_{ij}) = p_{kl}$ и $\varphi(\xi_{ij}) = \xi_{kl}$. Поскольку $\langle i, j\rangle \in E$, заключаем, что $\xi_{ij}{\cdot}\theta = p_{ij}$. Следовательно $\xi_{kl}{\cdot}\theta = p_{kl}$. Таким образом, $\langle k, l\rangle \in E$ и значит $\langle x_k, x_l\rangle \in R(\mathfrak{F})$.

Докажем теперь, что $R(\mathfrak{F}) \subseteq \varphi(R(\mathfrak{F}))$. Пусть $\langle x_k, x_l\rangle \in R(\mathfrak{F})$, то есть $\langle k, l\rangle \in E$. Т.к. $D(\mathfrak{F})$ инвариантно, то найдутся i и j такие, что $x_k = \varphi(x_i)$ и $x_l = \varphi(x_j)$. Можно считать, что $i < j$ и $k < l$. Тогда $\varphi(p_{ij}) = p_{kl}$ и $\varphi(\xi_{ij}) = \xi_{kl}$. Из того, что $\langle k, l\rangle \in E$, следует тождество $\xi_{kl}{\cdot}\theta = p_{kl}$. Тогда $\xi_{ij}{\cdot}\theta = p_{ij}$, и значит $\langle i, j\rangle \in E$. Таким образом $\langle x_i, x_j\rangle \in R(\mathfrak{F})$. □

Предложение 4.2.4. *Пусть $\varphi : D(\mathfrak{F}) \to D(\mathfrak{F})$ — такая биекция, что для любых $u, v \in D(\mathfrak{F})$ справедлива эквивалентность: $\langle u, v\rangle \in R(\mathfrak{F}) \iff \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle \in R(\mathfrak{F})$. Тогда φ можно расширить до автоморфизма проективной плоскости $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Поскольку проективная плоскость $\mathfrak{F}$ свободно порождена конфигурацией $\mathfrak{A}$ и $D(\mathfrak{F}) \subseteq A$, достаточно расширить φ до автоморфизма $\overline{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ конфигурации $\mathfrak{A}$. Для каждого $u \in A$ определим значение $\overline{\varphi}(u)$ следующим образом.

Полагаем $\overline{\varphi}(u) = u$ для $u \in \{a, b, o, \alpha, \beta, \theta\}$, и $\overline{\varphi}(x_i) = \varphi(x_i)$ для каждого $i \in \omega$.

Для произвольного $i \in \omega$, если $\varphi(x_i) = x_j$, то определяем $\overline{\varphi}(c_i) = c_j$, $\overline{\varphi}(d_i) = d_j$, $\overline{\varphi}(e_i) = e_j$, $\overline{\varphi}(f_i) = f_j$, $\overline{\varphi}(\gamma_i) = \gamma_j$, $\overline{\varphi}(\delta_i) = \delta_j$, $\overline{\varphi}(\varepsilon_i) = \varepsilon_j$ и $\overline{\varphi}(\zeta_i) = \zeta_j$.

Наконец, для произвольных $i < j$, если $\varphi(x_i) = x_k$ и $\varphi(x_j) = x_l$, то полагаем

$$\overline{\varphi}(g_{ij}) = \begin{cases} g_{kl}, & \text{если } k < l,\\ h_{lk}, & \text{если } k > l.\end{cases} \qquad \overline{\varphi}(h_{ij}) = \begin{cases} h_{kl}, & \text{если } k < l,\\ g_{lk}, & \text{если } k > l.\end{cases}$$

$$\overline{\varphi}(p_{ij}) = \begin{cases} p_{kl}, & \text{если } k < l,\\ p_{lk}, & \text{если } k > l.\end{cases} \qquad \overline{\varphi}(\eta_{ij}) = \begin{cases} \eta_{kl}, & \text{если } k < l,\\ \eta_{lk}, & \text{если } k > l.\end{cases}$$

$$\overline{\varphi}(\pi_{ij}) = \begin{cases} \pi_{kl}, & \text{если } k < l,\\ \rho_{lk}, & \text{если } k > l.\end{cases} \qquad \overline{\varphi}(\rho_{ij}) = \begin{cases} \rho_{kl}, & \text{если } k < l,\\ \pi_{lk}, & \text{если } k > l.\end{cases}$$

$$\overline{\varphi}(\xi_{ij}) = \begin{cases} \xi_{kl}, & \text{если } k < l,\\ \xi_{lk}, & \text{если } k > l.\end{cases}$$

Из определения $\overline{\varphi}$ видно, что отображение $\overline{\varphi} : A \to A$ является биекцией, сохраняющей типы элементов конфигурации.

Рассматривая пункты (а)–(н) из определения отношения инцидентности I, докажем, что для любых $u, v \in A$ имеет место эквивалентность

$$\langle u, v\rangle \in I \iff \langle \overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}(v)\rangle \in I.$$

Допустим, например, $u = \alpha$, $v = c_i$ (см. пункт (а)). Тогда $\overline{\varphi}(u) = \alpha$, $\overline{\varphi}(v) = c_j$ для некоторого j. Следовательно $\langle \overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}(v)\rangle \in I$. Если же $\overline{\varphi}(u) = \alpha$, $\overline{\varphi}(v) = c_j$, то $u = \alpha$, $v = c_i$ для некоторого i, и значит $\langle u, v\rangle \in I$.

Допустим, $u = \gamma_i$, $v = c_i$ (см. пункт (в)). Тогда $\overline{\varphi}(u) = \gamma_j$, $\overline{\varphi}(v) = c_j$ для некоторого j такого, что $\varphi(x_i) = x_j$. Следовательно $\langle \overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}(v)\rangle \in I$. Если же $\overline{\varphi}(u) = \gamma_j$, $\overline{\varphi}(v) = c_j$, то $u = \gamma_i$, $v = c_i$ для некоторого i с условием $\varphi(x_i) = x_j$. Тогда $\langle u, v\rangle \in I$.

Допустим, $u = \gamma_i$, $v = g_{ij}$ (см. пункт (г)). Пусть также $\varphi(x_i) = x_k$, $\varphi(x_j) = x_l$. Тогда $\overline{\varphi}(u) = \gamma_k$, и если $k < l$, то $\overline{\varphi}(v) = g_{kl}$, а если $k > l$, то $\overline{\varphi}(v) = h_{lk}$. В любом случае $\langle \overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}(v)\rangle \in I$.

Если же $\overline{\varphi}(u) = \gamma_k$, $\overline{\varphi}(v) = g_{kl}$, то пусть $\varphi^{-1}(x_k) = x_i$ и $\varphi^{-1}(x_l) = x_j$. Тогда $u = \gamma_i$, и если $i < j$, то $v = g_{ij}$, а если $i > j$, то $v = h_{ji}$. Следовательно $\langle u, v\rangle \in I$.

Пусть теперь $u = \theta$, $v = p_{ij}$ и $\langle i, j\rangle \in E$ (см. пункт (л)). Следовательно $\langle x_i, x_j\rangle \in R(\mathfrak{F})$, и значит $\langle \varphi(x_i), \varphi(x_j)\rangle \in R(\mathfrak{F})$. Обозначим $x_k = \varphi(x_i)$, $x_l = \varphi(x_j)$. Тогда $\overline{\varphi}(u) = \theta$, и если $k < l$, то $\overline{\varphi}(v) = p_{kl}$, а если $k > l$, то $\overline{\varphi}(v) = p_{lk}$. Так как $\langle x_k, x_l\rangle \in R(\mathfrak{F})$, заключаем, что $\langle k, l\rangle \in E$. В любом случае, в силу симметричности E, отсюда следует, что $\langle \overline{\varphi}(u), \overline{\varphi}(v)\rangle \in I$. Если теперь $\overline{\varphi}(u) = \theta$, $\overline{\varphi}(v) = p_{kl}$ и $\langle k, l\rangle \in E$, то $\langle x_k, x_l\rangle \in R(\mathfrak{F})$. Следовательно, если обозначить $x_i = \varphi^{-1}(x_k)$, $x_j = \varphi^{-1}(x_l)$, то $\langle x_i, x_j\rangle \in R(\mathfrak{F})$ и значит $\langle i, j\rangle \in E$. Кроме этого, $u = \theta$, и если $i < j$, то $v = p_{ij}$, а если $i > j$, то $v = p_{ji}$. В любом случае, в силу симметричности E заключаем, что $\langle u, v\rangle \in I$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Для произвольных правильных слов $u, v, w \in F^0$ определим следующие частичные термы в проективной плоскости $\mathfrak{F}$:

$$S(w) = \Big(\big((w{\cdot}b){\cdot}\beta\big){\cdot}\big((w{\cdot}a){\cdot}\alpha\big)\Big){\cdot}\Big(\big((w{\cdot}b){\cdot}\alpha\big){\cdot}\big((w{\cdot}a){\cdot}\beta\big)\Big),$$
$$T(u, v) = \Big(\big((u{\cdot}b){\cdot}(v{\cdot}a)\big){\cdot}\big((u{\cdot}a){\cdot}(v{\cdot}b)\big)\Big){\cdot}(u{\cdot}v).$$

Лемма 4.2.5. *Пусть w — произвольное правильное слово 1-го типа. Значение $S(w)$ определено в $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $w \neq a$, $w \neq b$, $w \neq \beta\alpha$ и $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$.*

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что если $w = a$, или $w = b$, или $w = \beta\alpha$, или $w{\cdot}a = w{\cdot}b$, то $S(w)$ не определено.

Пусть $w \neq a$, $w \neq b$, $w \neq \beta\alpha$ и $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$. Следовательно, $w{\cdot}a$, $w{\cdot}b$ определены, и непосредственно из определения I вытекает, что $w{\cdot}a \neq \alpha$, $w{\cdot}a \neq \beta$, $w{\cdot}b \neq \alpha$ и $w{\cdot}b \neq \beta$. Следовательно, определены $(w{\cdot}a){\cdot}\alpha$, $(w{\cdot}a){\cdot}\beta$, $(w{\cdot}b){\cdot}\alpha$ и $(w{\cdot}b){\cdot}\beta$.

Допустим, $(w{\cdot}b){\cdot}\beta = (w{\cdot}a){\cdot}\alpha$. Тогда $(w{\cdot}b){\cdot}\beta = (w{\cdot}a){\cdot}\alpha = \beta\alpha$. Отсюда заключаем, что $(\beta\alpha){\cdot}a = ((w{\cdot}a){\cdot}\alpha){\cdot}a = w{\cdot}a$ и $(\beta\alpha){\cdot}b = ((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}b = w{\cdot}b$. Так как $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$, то определено $\beta\alpha = ((\beta\alpha){\cdot}a){\cdot}((\beta\alpha){\cdot}b) = (w{\cdot}a){\cdot}(w{\cdot}b) = w$, что невозможно.

Таким образом, $(w{\cdot}b){\cdot}\beta \neq (w{\cdot}a){\cdot}\alpha$. Аналогично доказывается, что $(w{\cdot}b){\cdot}\alpha \neq (w{\cdot}a){\cdot}\beta$. Следовательно, определены $((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\alpha)$ и $((w{\cdot}b){\cdot}\alpha){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\beta)$.

Допустим, $((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\alpha) = ((w{\cdot}b){\cdot}\alpha){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\beta)$.

Докажем, что $((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\alpha) \neq \alpha$. Если это не так, то умножив обе части тождества $((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\alpha) = \alpha$ на β, получим $(w{\cdot}b){\cdot}\beta = \beta\alpha$. С другой стороны, умножив обе части тождества $((w{\cdot}b){\cdot}\alpha){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\beta) = \alpha$ на β, получим $(w{\cdot}a){\cdot}\beta = \beta\alpha$. Поскольку $w \neq \beta\alpha$, заключаем, что $w{\cdot}b = (\beta\alpha){\cdot}w$ и $w{\cdot}a = (\beta\alpha){\cdot}w$. Следовательно, $w{\cdot}a = w{\cdot}b$, что невозможно.

Аналогично доказывается, что $((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\alpha) \neq \beta$.

Умножив теперь обе части тождества $((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\alpha) = ((w{\cdot}b){\cdot}\alpha){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\beta)$ на α, получим $(w{\cdot}a){\cdot}\alpha = (w{\cdot}b){\cdot}\alpha$, а умножив обе части того же тождества на β, получим $(w{\cdot}b){\cdot}\beta = (w{\cdot}a){\cdot}\beta$. Так как $(w{\cdot}b){\cdot}\beta \neq (w{\cdot}a){\cdot}\alpha = (w{\cdot}b){\cdot}\alpha$, то определено $((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}((w{\cdot}b){\cdot}\alpha) = w{\cdot}b$. Аналогично вычисляем $((w{\cdot}a){\cdot}\alpha){\cdot}((w{\cdot}a){\cdot}\beta) = w{\cdot}a$. Следовательно, $w{\cdot}a = w{\cdot}b$, что невозможно. Таким образом, $S(w)$ определено. □

Лемма 4.2.6. *Пусть w — произвольное правильное слово 1-го типа такое, что $\langle w, \alpha \rangle \in I$, или $\langle w, \beta \rangle \in I$, или $w = u{\cdot}\alpha$ для некоторого u, или $w = u{\cdot}\beta$ для некоторого u. Тогда если $S(w)$ определено, то $S(w) = w$.*

Доказательство. Утверждение леммы проверяется непосредственно. □

Предложение 4.2.7. *Пусть w — произвольное правильное слово 1-го типа, $w \neq a$, $w \neq b$, $w \neq \beta\alpha$ и $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$. Тогда $S(w) = o$, если и только если $w = x_i$ для некоторого $i \in \omega$.*

Доказательство. Для удобства изложения доказательства будем называть неассоциативное слово w *несократимым*, если существует правильное слово $\overline{w}$, которое может быть получено из w конечным числом замен подслова вида uv на слово vu. Заметим, что в этом случае длины w и $\overline{w}$ совпадают, а слова w, $\overline{w}$ имеют одинаковые значения в плоскости $\mathfrak{F}$.

Проведём доказательство предложения, рассматривая всевозможные случаи.

С л у ч а й 1: $|w| = 1$. Если $w \in \{c_i, d_i, e_i, f_i \mid i \in \omega\}$, то по лемме 4.2.6 заключаем, что $S(w) = w \neq o$. Если $w = g_{ij}$ или $w = h_{ij}$ для $i < j$, то непосредственными вычислениями получаем, что $S(g_{ij}) = (f_j c_i)(d_j e_i)$ и $S(h_{ij}) = (e_j d_i)(c_j f_i)$, причем слова $(f_j c_i)(d_j e_i)$ и $(e_j d_i)(c_j f_i)$ являются несократимыми и отличны от o. Если $w = o$ или $w = p_{ij}$ для $i < j$, то $S(w)$ является несократимым словом (длины 12) отличным от o. Наконец, если $w = x_i$ для некоторого i, то $S(w) = o$.

С л у ч а й 2: $|w| = 2$. Поскольку w является правильным словом 1-го типа, возможны лишь следующие случаи.

Если $w = u\alpha$ или $w = u\beta$ для некоторого символа u, то по лемме 4.2.6 заключаем, что $S(w) = w \neq o$.

Если $w \in \{\gamma_i\varepsilon_j, \gamma_i\zeta_j, \gamma_i\eta_{jk}, \gamma_i\xi_{jk}, \gamma_i\theta, \gamma_i\pi_{jk}, \gamma_i\rho_{jk} \mid i \neq j, i \neq k, j < k\}$, то несложно вычислить значение $S(w) = \big(((wb)\beta)c_i\big)\big(((wb)\alpha)e_i\big)$, которое является несократимым словом (длины 10), отличным от o.

Если $w \in \{\delta_i\varepsilon_j, \delta_i\zeta_j, \delta_i\eta_{jk}, \delta_i\xi_{jk}, \delta_i\theta \mid i \neq j, i \neq k, j < k\} \cup \{\delta_i\pi_{jk}, \delta_i\rho_{jk} \mid i \in \omega, j < k\}$, то аналогично предыдущему случаю получаем, что $S(w) \neq o$.

В остальных случаях, то есть когда w совпадает с одним из следующих слов:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_i\eta_{jk}, \varepsilon_i\xi_{jk}, \varepsilon_i\theta, \zeta_i\eta_{jk}, \zeta_i\xi_{jk}, \zeta_i\theta, \text{ где } j < k,\\
&\varepsilon_i\pi_{jk}, \zeta_i\rho_{jk}, \text{ где } i \neq j, j < k,\\
&\varepsilon_i\rho_{jk}, \zeta_i\pi_{jk}, \text{ где } i \neq k, j < k,\\
&\eta_{ij}\eta_{kl}, \eta_{ij}\xi_{kl}, \eta_{ij}\pi_{kl}, \eta_{ij}\rho_{kl}, \xi_{ij}\pi_{kl}, \xi_{ij}\rho_{kl}, \text{ где } i < j, k < l, \langle i, j \rangle \neq \langle k, l \rangle,\\
&\xi_{ij}\xi_{kl}, \text{ где } i < j, k < l, \{i, j\} \cap \{k, l\} = \varnothing,\\
&\eta_{ij}\theta, \xi_{ij}\theta, \pi_{ij}\theta, \rho_{ij}\theta, \text{ где } i < j, \langle i, j \rangle \notin E,\\
&\pi_{ij}\pi_{kl}, \rho_{ij}\rho_{kl}, \text{ где } i < j, k < l, i \neq k, j \neq l,\\
&\pi_{ij}\rho_{kl}, \text{ где } i < j, k < l, i \neq l, j \neq k,
\end{aligned}
$$

слово $S(w)$ является несократимым словом (длины 16) отличным от o.

Других правильных слов длины 2 нет.

С л у ч а й 3: $|w| \geqslant 3$. Следовательно, w представимо в виде правильного слова $\overline{(w_1 w_2) w_3}$. Далеем рассмотрим всевозможные случаи.

С л у ч а й 3.1: $w_3 = \gamma_i$ для некоторого $i \in \omega$. В этом случае получаем

$$S(w) = \big[\big((w{\cdot}b){\cdot}\beta\big){\cdot}c_i\big]{\cdot}\big[\big((w{\cdot}b){\cdot}\alpha\big){\cdot}e_i\big].$$

Далее возможен один из следующих случаев (а)–(з).

(а) $w_1 w_2 = w_1 b$ и $\langle w_1, \alpha\rangle \in I$;

(б) $w_1 w_2 = w_1 b$ и $\langle w_1, \beta\rangle \in I$;

(в) $w_1 w_2 = w_1 b$, $|w_1| = 1$, $\langle w_1, \alpha\rangle \notin I$, $\langle w_1, \beta\rangle \notin I$;

(г) $w_1 w_2 = (uv)b$, $u = \alpha$, $v \neq \beta$;

(д) $w_1 w_2 = (uv)b$, $u = \beta$, $v \neq \alpha$;

(е) $w_1 w_2 = (\beta\alpha)b$;

(ж) $w_1 w_2 = (uv)b$, $u \notin \{\alpha, \beta\}$, $v \notin \{\alpha, \beta\}$;

(з) $b \notin \{w_1, w_2\}$.

Разберём каждый из пунктов (а)–(з) отдельно.

Если выполнено (а), то $w_1 = c_j$ или $w_1 = d_j$ для некоторого $j \in \omega$, а поскольку $\overline{(w_1 w_2)\gamma_i}$ — правильное, то $w_1 \neq c_i$. Кроме этого, поскольку $w_1 b$ — правильное, заключаем $w_1 \neq d_j$ ни для какого j. Остаётся вариант $w_1 = c_j$, где $j \neq i$. Тогда

$$S(w) = \big[((c_j b)\beta)c_i\big]{\cdot}(c_j e_i) = \begin{cases} \big[((c_j b)\beta)c_i\big]\rho_{ij}, & \text{если } i < j, \\ \big[((c_j b)\beta)c_i\big]\pi_{ji}, & \text{если } i > j, \end{cases}$$

и следовательно $S(w)$ — это несократимое слово (длины 5) отличное от o.

Пункт (б) разбирается аналогично пункту (а).

Если выполнено (в), то $w{\cdot}b = w_1 b$ и слова $(w_1 b)\alpha$, $(w_1 b)\beta$ будут несократимыми. Следовательно, $S(w) = \big[((w_1 b)\beta)c_i\big]\big[((w_1 b)\alpha)e_i\big]$ — несократимое слово, отличное от o.

Если выполнено (г), то $S(w) = \big[\big(((uv)b)\beta\big)c_i\big]{\cdot}\big[(uv)e_i\big]$. Заметим, что здесь $\big(((uv)b)\beta\big)c_i$ является правильным словом. Далее возможны два варианта для подслова $(uv)e_i$. Если $v = \overline{e_i v'}$, то $(uv)e_i = \overline{e_i v'}$ — правильное, и следовательно $S(w) = \big[\big(((uv)b)\beta\big)c_i\big](\overline{e_i v'})$ является несократимым словом, которое не совпадает с o. Если же $v \neq \overline{e_i v'}$, то $(uv)e_i$ — правильное, и следовательно $S(w) = \big[\big(((uv)b)\beta\big)c_i\big]\big[(uv)e_i\big]$ — несократимое слово, не равное o.

Пункт (д) разбирается аналогично пункту (г).

Если выполнено (е), то $S(w) = [(\beta\alpha)c_i]{\cdot}[(\beta\alpha)e_i] = \beta\alpha \neq o$.

Если выполнено (ж), то $w{\cdot}b = (uv)b$ — правильное. Следовательно, значения $(w{\cdot}b){\cdot}\alpha$ и $(w{\cdot}b){\cdot}\beta$ совпадают с правильными словами $((uv)b)\alpha$ и $((uv)b)\beta$ соотвественно. Тогда слово

$((w{\cdot}b){\cdot}\beta){\cdot}c_i = \big(((uv)b)\beta\big)c_i$ — правильное и $((w{\cdot}b){\cdot}\alpha){\cdot}e_i = \big(((uv)b)\alpha\big)e_i$ — правильное. Отсюда заключаем, что $S(w) = \big[\big(((uv)b)\beta\big)c_i\big]\big[\big(((uv)b)\alpha\big)e_i\big]$ — несократимое слово, отличное от o.

Если выполнено (з), то слово wb является правильным. Следовательно, слова $(wb)\alpha$ и $(wb)\beta$ также являются правильными. Тогда $S(w) = \big[((wb)\beta)c_i\big]\big[((wb)\alpha)e_i\big]$ несократимо и отлично от o.

С л у ч а й 3.2: $w_3 = \delta_i$ для некоторого $i \in \omega$. Этот случай разбирается аналогично случаю 3.1.

С л у ч а й 3.3: $w_3 \notin \{\gamma_i, \delta_i \mid i \in \omega\}$, $a \in \{w_1, w_2\}$ и $b \notin \{w_1, w_2\}$. В этом случае $w{\cdot}a = w_1w_2$, а слово wb — правильное. Отсюда получаем

$$S(w) = \big[\big((wb){\cdot}\beta\big){\cdot}\big((w_1w_2){\cdot}\alpha\big)\big]{\cdot}\big[\big((wb){\cdot}\alpha\big){\cdot}\big((w_1w_2){\cdot}\beta\big)\big].$$

Далее возможен один из следующих случаев (а)–(г).

(а) $w_3 = \alpha$ или $w_3 = \beta$;

(б) $w_3 \notin \{\alpha, \beta\}$; и $\langle w_1, \alpha\rangle \in I$, или $\langle w_2, \alpha\rangle \in I$, или $\langle w_1, \beta\rangle \in I$, или $\langle w_2, \beta\rangle \in I$;

(в) $w_3 \notin \{\alpha, \beta\}$, $\langle w_1, \alpha\rangle \notin I$, $\langle w_2, \alpha\rangle \notin I$, $\langle w_1, \beta\rangle \notin I$, $\langle w_2, \beta\rangle \notin I$; и $w_1w_2 = (w_4\alpha)a$ или $w_1w_2 = (w_4\beta)a$;

(г) $w_3 \notin \{\alpha, \beta\}$, $\langle w_1, \alpha\rangle \notin I$, $\langle w_2, \alpha\rangle \notin I$, $\langle w_1, \beta\rangle \notin I$, $\langle w_2, \beta\rangle \notin I$, $w_1w_2 \neq (w_4\alpha)a$ и $w_1w_2 \neq (w_4\beta)a$.

Разберём каждый из пунктов (а)–(г) по отдельности.

Если выполнено (а), то по лемме 4.2.6 получаем $S(w) = w \neq o$.

Пусть выполнено (б) и $\langle w_1, \alpha\rangle \in I$ (другие варианты рассматриваются аналогично). Тогда $w_1 = d_i$, $w_2 = a$ для некоторого i. Следовательно, $(wb)\alpha$ и $(wb)\beta$ — правильные. Кроме этого, $(w_1w_2){\cdot}\alpha = d_i$ и $(w_1w_2){\cdot}\beta = (d_ia)\beta$ — правильное слово. Таким образом, $S(w) = \big[((wb)\beta)d_i\big]\big[((wb)\alpha)((d_ia)\beta)\big]$ — несократимое слово, отличное от o.

Пусть выполнено (в) и $w_1w_2 = (w_4\alpha)a$ (случай $w_1w_2 = (w_4\beta)a$ рассматривается аналогично). Следовательно, слова $(wb)\alpha$ и $(wb)\beta$ — правильные. Кроме этого, $(w_1w_2){\cdot}\alpha = w_4\alpha$ — правильное слово, а для значения $(w_1w_2){\cdot}\beta$ возможны два варианта. Если $w_4 \neq \beta$, то $((w_4\alpha)a)\beta$ — правильное слово и значение $S(w) = \big[((wb)\beta)(w_4\alpha)\big]\big[((wb)\alpha)(((w_4\alpha)a)\beta)\big]$ является несократимым словом, отличным от o. Если же $w_4 = \beta$, то $S(w) = \big[((wb)\beta){\cdot}(\beta\alpha)\big] \cdot \big[((wb)\alpha){\cdot}(\beta\alpha)\big] = \beta\alpha \neq o$.

Если выполнено (г), то $(wb)\alpha$, $(wb)\beta$, $(w_1w_2)\alpha$, $(w_1w_2)\beta$ — правильные слова. Тогда $S(w) = \big[\big((wb)\beta\big)\big((w_1w_2)\alpha\big)\big]\big[\big((wb)\alpha\big)\big((w_1w_2)\beta\big)\big]$ — несократимое и значит $S(w) \neq o$.

С л у ч а й 3.4: $w_3 \notin \{\gamma_i, \delta_i \mid i \in \omega\}$, $b \in \{w_1, w_2\}$ и $a \notin \{w_1, w_2\}$. Этот случай разбирается так же как случай 3.3.

С л у ч а й 3.5: $w_3 \notin \{\gamma_i, \delta_i \mid i \in \omega\}$ и $w_1w_2 = ba$. В этом случае $w{\cdot}a = ba = w{\cdot}b$, что исключено в условиях предложения. Данный случай невозможен.

С л у ч а й 3.6: $w_3 \notin \{\gamma_i, \delta_i \mid i \in \omega\}$, $w_1 \notin \{a, b\}$, $w_2 \notin \{a, b\}$. В этом случае слова wa и wb — правильные. Далее возможны два варианта:

(а) $w_3 = \alpha$ или $w_3 = \beta$;

(б) $w_3 \neq \alpha$ и $w_3 \neq \beta$.

Если выполнено (а), то в силу леммы 4.2.6, получаем $S(w) = w \neq o$. Если же выполнено (б), то слова $(wa)\alpha$, $(wa)\beta$, $(wb)\alpha$, $(wb)\beta$ являются правильными. Тогда $S(w) = \big[\big((wb)\beta\big)\big((wa)\alpha\big)\big]\big[\big((wb)\alpha\big)\big((wa)\beta\big)\big]$ — несократимое и следовательно $S(w) \neq o$. □

Предложение 4.2.8. *Пусть u, v — произвольные правильные слова 1-го типа такие, что $u \neq v$, $S(u)$ и $S(v)$ определены, $S(u) = o$ и $S(v) = o$. Тогда $T(u,v) = (u{\cdot}v){\cdot}\theta$, если и только если $u = x_i$, $v = x_j$ для некоторых $i, j \in \omega$ таких, что $\langle i, j\rangle \in E$.*

Доказательство. В силу предложения 4.2.7 для некоторых $i \neq j$ получаем, что $u = x_i$, $v = x_j$. Поскольку $T(u,v) = T(v,u)$ и $u{\cdot}v = v{\cdot}u$, можно считать, что $i < j$. В таком случае $T(u,v) = T(x_i, x_j) = p_{ij}$.

Если $\langle i, j\rangle \in E$, то $\langle p_{ij}, \theta\rangle \in I$. Следовательно, $(x_i{\cdot}x_j){\cdot}\theta = \xi_{ij}{\cdot}\theta = p_{ij}$.

Если же $\langle i, j\rangle \notin E$, то $\langle p_{ij}, \theta\rangle \notin I$. Тогда $(x_i{\cdot}x_j){\cdot}\theta = \xi_{ij}\theta$ — правильное слово длины 2. Следовательно, $T(u,v) \neq (u{\cdot}v){\cdot}\theta$. □

§ 4.3. Эффективная полнота класса свободно порождённых плоскостей

В данном параграфе мы докажем основные результаты о спектрах степеней и эффективных размерностях в классе свободно порождённых проективных плоскостей.

Пусть $\mathfrak{G}' = \langle G', E'\rangle$ — произвольное представление графа $\mathfrak{G}$. Можно считать, что $G' = \omega$. Определим представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ проективной плоскости $\mathfrak{F}$ следующим образом.

Разобъём множество ω на конечные подмножества $B'_{-1}, B'_0, B'_1, \ldots$ и одновременно введём обозначения для элементов B'_i, $i \in \omega \cup \{-1\}$:

$$B'_{-1} = \{0,1,2,3,4,5\} = \{o' < a' < b' < \alpha' < \beta' < \theta'\},$$
$$B'_i = \{16i{+}6, \ldots, 16i{+}21\} = \{c'_i < d'_i < e'_i < f'_i < g'_{jk} < h'_{jk} < p'_{jk} < x'_i$$
$$< \gamma'_i < \delta'_i < \varepsilon'_i < \zeta'_i < \eta'_{jk} < \xi'_{jk} < \pi'_{jk} < \rho'_{jk}\},$$

где $i, j, k \in \omega$, $j < k$ и пара $\langle j, k\rangle$ имеет номер i в некотором фиксированном эффективном перечислении множества пар $\{\langle m, n\rangle \mid m < n\}$.

Определим далее $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимую конфигурацию $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'} = \langle A', A'^0, {}^0A', I'\rangle$, где

$$A'^0 = \{a', b', c'_i, d'_i, e'_i, f'_i, o', x'_i \mid i \in G'\} \cup \{g'_{ij}, h'_{ij}, p'_{ij} \mid i, j \in G', i < j\},$$
$${}^0A' = \{\alpha', \beta', \gamma'_i, \delta'_i, \varepsilon'_i, \zeta'_i, \theta' \mid i \in G'\} \cup \{\eta'_{ij}, \xi'_{ij}, \pi'_{ij}, \rho'_{ij} \mid i, j \in G', i < j\},$$
$$A' = \omega = A'^0 \cup {}^0A',$$

а отношение инцидентности I' на A' определяется так же как в § 4.1 с заменой всех элементов на их штрихованные аналоги. В частности, в пункте (л) данного определения мы полагаем $\langle \theta', p'_{ij}\rangle \in I'$, где $i, j \in G', i < j$ и $\langle i, j\rangle \in E'$.

По предложению 2.1.1 проективная плоскость, свободно порождённая конфигурацией $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$, имеет $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимое представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$. Напомним кратко определение данного представления.

Так же как и в доказательстве предложения 2.1.1 введём эффективное кодирование $\nu : W(A') \to \omega$ всех неассоциативных слов над алфавитом A'.

Применим к конфигурации $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$ с естественным порядком $<$ на $A' = \omega$ конструкцию Ширшова. Пусть F', F'^0, ${}^0F'$ — множества всех правильных слов, правильных слов 1-го типа и правильных слов 2-го над A' соответственно, а P' — график операции умножения правильных слов из F'. Тогда структура $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'} = \langle F', F'^0, {}^0F', P' \rangle$ является проективной плоскостью, свободно порождённой конфигурацией $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$.

В силу $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимости отношения I' заключаем, что $\nu(F')$, $\nu(F'^0)$, $\nu({}^0F')$ являются $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимыми подмножествами ω, а $\nu(P')$ является $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимым подмножеством ω^3.

Выберем $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимую биективную функцию $\mu : \omega \to \nu(F')$ и положим

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'} = \langle \omega, \mu^{-1}(\nu(F'^0)), \mu^{-1}(\nu({}^0F')), \mu^{-1}(\nu(P')) \rangle.$$

Тогда отображение $\mu^{-1} \circ \nu$ является изоморфизмом $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$ на $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$. Следовательно, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ является $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимой структурой, изоморфной плоскости $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$.

Предложение 4.3.1. *$\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ является $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимым представлением проективной плоскости $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимость структуры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ установлена выше. Докажем, что $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ изоморфна плоскости $\mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{G}'$ — представление графа $\mathfrak{G}$, существует изоморфизм $g : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$. Определим отображение $\varphi : A \to A'$ из конфигурации $\mathfrak{A}$ на конфигурацию $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$ следующим образом.

Положим $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$, $\varphi(o) = o'$, $\varphi(\alpha) = \alpha'$, $\varphi(\beta) = \beta'$, $\varphi(\theta) = \theta'$.

Для произвольного $i \in \omega$ определим $\varphi(c_i) = c'_{g(i)}$, $\varphi(d_i) = d'_{g(i)}$, $\varphi(e_i) = e'_{g(i)}$, $\varphi(f_i) = f'_{g(i)}$, $\varphi(x_i) = x'_{g(i)}$, $\varphi(\gamma_i) = \gamma'_{g(i)}$, $\varphi(\delta_i) = \delta'_{g(i)}$, $\varphi(\varepsilon_i) = \varepsilon'_{g(i)}$ и $\varphi(\zeta_i) = \zeta'_{g(i)}$.

Наконец, для произвольных $i < j$ по определению полагаем

$$\varphi(g_{ij}) = \begin{cases} g'_{g(i)g(j)}, & \text{если } g(i) < g(j), \\ h'_{g(j)g(j)}, & \text{если } g(i) > g(j). \end{cases} \qquad \varphi(h_{ij}) = \begin{cases} h'_{g(i)g(j)}, & \text{если } g(i) < g(j), \\ g'_{g(j)g(i)}, & \text{если } g(i) > g(j). \end{cases}$$

$$\varphi(p_{ij}) = \begin{cases} p'_{g(i)g(j)}, & \text{если } g(i) < g(j), \\ p'_{g(j)g(i)}, & \text{если } g(i) > g(j). \end{cases} \qquad \varphi(\eta_{ij}) = \begin{cases} \eta'_{g(i)g(j)}, & \text{если } g(i) < g(j), \\ \eta'_{g(j)g(i)}, & \text{если } g(i) > g(j). \end{cases}$$

$$\varphi(\pi_{ij}) = \begin{cases} \pi'_{g(i)g(j)}, & \text{если } g(i) < g(j), \\ \rho'_{g(j)g(i)}, & \text{если } g(i) > g(j). \end{cases} \qquad \varphi(\rho_{ij}) = \begin{cases} \rho'_{g(i)g(j)}, & \text{если } g(i) < g(j), \\ \pi'_{g(j)g(i)}, & \text{если } g(i) > g(j). \end{cases}$$

$$\varphi(\xi_{ij}) = \begin{cases} \xi'_{g(i)g(j)}, & \text{если } g(i) < g(j), \\ \xi'_{g(j)g(i)}, & \text{если } g(i) > g(j). \end{cases}$$

Из определения φ видно, что отображение $\varphi : A \to A'$ является биекцией, сохраняющей типы элементов конфигураций.

Так же как в доказательстве предложения 4.2.4, рассматривая пункты (а)–(н) из определения отношений инцидентности I и I', можно доказать, что для любых $u, v \in A$ имеет место эквивалентность

$$\langle u, v\rangle \in I \iff \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle \in I'.$$

Рассмотрим, например, пункт (л). Пусть $u = \theta$, $v = p_{ij}$ и $\langle i, j\rangle \in E$. Следовательно $\langle g(i), g(j)\rangle \in E'$. Тогда $\varphi(u) = \theta'$, и если $g(i) < g(j)$, то $\varphi(v) = p'_{g(i)g(j)}$, а если $g(i) > g(j)$, то $\varphi(v) = p'_{g(j)g(i)}$. В любом случае, в силу симметричности E', отсюда следует, что $\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle \in I'$. Пусть теперь $\varphi(u) = \theta'$, $\varphi(v) = p'_{kl}$ и $\langle k, l\rangle \in E'$. Следовательно, если обозначить $i = g^{-1}(k)$, $j = g^{-1}(l)$, то $\langle i, j\rangle \in E$. Кроме этого, $u = \theta$, и если $i < j$, то $v = p_{ij}$, а если $i > j$, то $v = p_{ji}$. В любом случае, в силу симметричности E заключаем, что $\langle u, v\rangle \in I$.

Остальные пункты рассматриваются аналогично.

Таким образом, $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$ является изоморфизмом конфигураций. Поскольку плоскость $\mathfrak{F}$ свободна порождена конфигурацией $\mathfrak{A}$, а плоскость $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$ в свою очередь свободно порождена конфигурацией $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$, то φ естественным образом продолжается до изоморфизма $\overline{\varphi} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$ плоскости $\mathfrak{F}$ на плоскость $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$. Тогда отображение $f = \mu^{-1} \circ \nu \circ \overline{\varphi}$ является искомым изоморфизмом плоскости $\mathfrak{F}$ на плоскость $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$. □

Предложение 4.3.2. *Отношения $D(\mathfrak{F})$ и $R(\mathfrak{F})$ относительно наследственно вычислимы.*

Доказательство. Введём следующие формулы сигнатуры σ, содержащие в качестве параметров элементы a, b, o, α, β, θ.

$$\begin{aligned}\Phi_1(w, a, b, o, \alpha, \beta, \theta) =& (w \in F^0) \mathbin{\&} (w \neq a) \mathbin{\&} (w \neq b) \mathbin{\&} \exists u\big(P(\beta, \alpha, u) \mathbin{\&} w \neq u\big)\\ & \mathbin{\&} \exists u \exists v \exists u_1 \exists u_2 \exists v_1 \exists v_2 \exists w_1 \exists w_2 \big(P(w, a, u) \mathbin{\&} P(w, b, v) \mathbin{\&} u \neq v\\ & \mathbin{\&} P(u, \alpha, u_1) \mathbin{\&} P(u, \beta, u_2) \mathbin{\&} P(v, \alpha, v_1) \mathbin{\&} P(v, \beta, v_2)\\ & \mathbin{\&} P(v_2, u_1, w_1) \mathbin{\&} P(v_1, u_2, w_2) \mathbin{\&} P(w_1, w_2, o)\big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_1(u, v, a, b, o, \alpha, \beta, \theta) =& (u \in F^0) \mathbin{\&} (v \in F^0) \mathbin{\&} (u \neq v) \mathbin{\&} \Phi_1(u, a, b, o, \alpha, \beta, \theta)\\ & \mathbin{\&} \Phi_1(v, a, b, o, \alpha, \beta, \theta) \mathbin{\&} \exists u_1 \exists u_2 \exists v_1 \exists v_2 \exists w_1 \ldots \exists w_5 \big(P(u, a, u_1)\\ & \mathbin{\&} P(u, b, u_2) \mathbin{\&} P(v, a, v_1) \mathbin{\&} P(v, b, v_2) \mathbin{\&} P(u_2, v_1, w_1)\\ & \mathbin{\&} P(u_1, v_2, w_2) \mathbin{\&} P(w_1, w_2, w_3) \mathbin{\&} P(u, v, w_4) \mathbin{\&} P(w_3, w_4, w_5)\\ & \mathbin{\&} P(w_4, \theta, w_5)\big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(w, a, b, o, \alpha, \beta, \theta) =& (w \in F^0) \mathbin{\&} (w \neq a) \mathbin{\&} (w \neq b) \mathbin{\&} \forall u\big(P(\beta, \alpha, u) \to w \neq u\big)\\ & \mathbin{\&} \forall u \forall v \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2 \forall w_1 \forall w_2 \Big(\big(P(w, a, u) \mathbin{\&} P(w, b, v)\big) \longrightarrow\\ & \Big(u \neq v \mathbin{\&} \big(\big(P(u, \alpha, u_1) \mathbin{\&} P(u, \beta, u_2) \mathbin{\&} P(v, \alpha, v_1) \mathbin{\&} P(v, \beta, v_2)\\ & \mathbin{\&} P(v_2, u_1, w_1) \mathbin{\&} P(v_1, u_2, w_2)\big) \longrightarrow P(w_1, w_2, o)\big)\Big)\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(u,v,a,b,o,\alpha,\beta,\theta) =&(u\in F^0)\ \&\ (v\in F^0)\ \&\ (u\neq v)\ \&\ \Phi_2(u,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)\\ &\&\ \Phi_2(v,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)\ \&\ \forall u_1\forall u_2\forall v_1\forall v_2\forall w_1\ldots\forall w_5\Big(\big(P(u,a,u_1)\\ &\&\ P(u,b,u_2)\ \&\ P(v,a,v_1)\ \&\ P(v,b,v_2)\ \&\ P(u_2,v_1,w_1)\\ &\&\ P(u_1,v_2,w_2)\ \&\ P(w_1,w_2,w_3)\ \&\ P(u,v,w_4)\ \&\ P(w_3,w_4,w_5)\big)\\ &\longrightarrow P(w_4,\theta,w_5)\Big).\end{aligned}$$

В $\mathfrak{F}$ формула $\Phi_1(w,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)$ эквивалентна формуле $\Phi_2(w,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)$, а формула $\Psi_1(u,v,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)$ — формуле $\Psi_2(u,v,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)$.

Заметим также, что $\mathfrak{F}\models\Phi_1(w,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)$ тогда и только тогда, когда $w\in F^0$, значение $S(w)$ определено в $\mathfrak{F}$ и $S(w)=o$. Кроме этого, $\mathfrak{F}\models\Psi_1(u,v,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)$ тогда и только тогда, когда $u,v\in F^0$, значения $S(u)$, $S(v)$ определены в $\mathfrak{F}$, $S(u)=S(v)=o$, $u\neq v$ и $T(u,v)=(u{\cdot}v){\cdot}\theta$.

Отсюда, в силу предложений 4.2.7 и 4.2.8, заключаем, что

$$\begin{aligned}D(\mathfrak{F})&=\{w\in F\mid \mathfrak{F}\models\Phi_1(w,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)\},\\ R(\mathfrak{F})&=\{\langle u,v\rangle\in F^2\mid \mathfrak{F}\models\Psi_1(u,v,a,b,o,\alpha,\beta,\theta)\}.\end{aligned}$$

Пусть теперь $f:\mathfrak{F}\to\mathfrak{M}$ — произвольный изоморфизм $\mathfrak{F}$ на некоторую проективную плоскость $\mathfrak{M}$ с вычислимым носителем. Тогда образы $f(D(\mathfrak{F}))$ и $f(R(\mathfrak{F}))$ определимы в плоскости $\mathfrak{M}$ с помощью $\exists$-формул Φ_1 и Ψ_1 ($\forall$-формул Φ_2 и Ψ_2) соответственно с параметрами $f(a)$, $f(b)$, $f(o)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\theta)$. Следовательно, отношения $f(D(\mathfrak{F}))$ и $f(R(\mathfrak{F}))$ являются $\deg(\mathfrak{M})$-вычислимыми. Что и требовалось. □

Предложение 4.3.3. *Для любого представления $\mathfrak{G}'$ графа $\mathfrak{G}$ существует $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимая биекция $g_{\mathfrak{G}'}:D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'})\to G'$ такая, что для всех $u,v\in D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'})$ справедлива эквивалентность*

$$\langle u,v\rangle\in R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'})\Longleftrightarrow\langle g_{\mathfrak{G}'}(u),g_{\mathfrak{G}'}(v)\rangle\in E'.$$

Доказательство. Пусть $f:\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ — изоморфизм, определённый в предложении 4.3.1, то есть $f=\mu^{-1}\circ\nu\circ\overline{\varphi}$, где $\overline{\varphi}$ — изоморфизм плоскости $\mathfrak{F}$ на плоскость $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$ такой, что $\overline{\varphi}{\restriction}A=\varphi$ является изоморфизмом конфигурации $\mathfrak{A}$ на конфигурацию $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$. Из определения φ следует, что

$$\begin{aligned}D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'})&=f(D(\mathfrak{F}))=\{\mu^{-1}\circ\nu(x'_i)\mid i\in G'\},\\ R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'})&=f(R(\mathfrak{F}))=\{\langle\mu^{-1}\circ\nu(x'_i),\mu^{-1}\circ\nu(x'_j)\rangle\mid i,j\in G',\langle i,j\rangle\in E'\}.\end{aligned}$$

Для каждого $i\in G'=\omega$ положим $g_{\mathfrak{G}'}(\mu^{-1}\circ\nu(x'_i))=i$. Тогда отображение $g_{\mathfrak{G}'}:D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'})\to G'$ является биекцией такой, что для любых $u=\mu^{-1}\circ\nu(x'_i)$ и $v=\mu^{-1}\circ\nu(x'_j)$ выполняется

$$\langle u,v\rangle\in R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'})\Longleftrightarrow\langle i,j\rangle\in E'\Longleftrightarrow\langle g_{\mathfrak{G}'}(u),g_{\mathfrak{G}'}(v)\rangle\in E'.$$

Наконец, из $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимости множества $\{\mu^{-1}\circ\nu(x'_i)\mid i\in\omega\}$ и функции μ следует, что отображение $g_{\mathfrak{G}'}$ тоже является $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимым. □

Обозначим через $\overline{a}''$ набор параметров $\langle a'', b'', o'', \alpha'', \beta'', \theta''\rangle$, где $a'' = \mu^{-1} \circ \nu(a')$, $b'' = \mu^{-1} \circ \nu(b')$, $o'' = \mu^{-1} \circ \nu(o')$, $\alpha'' = \mu^{-1} \circ \nu(\alpha')$, $\beta'' = \mu^{-1} \circ \nu(\beta')$, $\theta'' = \mu^{-1} \circ \nu(\theta')$. Также введём обозначение $x''_i = \mu^{-1} \circ \nu(x'_i)$, где $i \in \omega$. Таким образом, $D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}) = \{x''_i \mid i \in \omega\}$.

Предложение 4.3.4. *Для любого представления* $\mathfrak{G}'$ *графа* $\mathfrak{G}$ *существует* $\deg(\mathfrak{G}')$*-вычислимое определяющее семейство формул для* $\langle \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}, x''_i\rangle_{i\in\omega}$*, т.е. существует* $\deg(\mathfrak{G}')$*-вычислимое семейство* $\exists$*-формул*

$$\Phi_0(\overline{a}'', \overline{x}''_0, u), \Phi_1(\overline{a}'', \overline{x}''_1, u), \ldots, \Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u), \ldots,$$

где каждый $\overline{x}''_n$ *является кортежем элементов* $D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'})$*, каждый* $u \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ *удовлетворяет в структуре* $\langle \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}, x''_i\rangle_{i\in\omega}$ *некоторой формуле* $\Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u)$*, и никакие два элемента* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ *не удовлетворяют одной формуле* $\Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u)$*.*

Доказательство. Пусть $w \in F'$, т.е. w — произвольное правильное слово над конфигурацией $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$. Определим $\exists$-формулу $\Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, u)$, где $\overline{a}' = \langle a', b', o', \alpha', \beta', \theta'\rangle$, а $\overline{x}'_w$ — некоторый набор элементов из $\{x'_i \mid i \in \omega\}$, такую что для любого $u \in \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$ имеет место эквивалентность

$$\langle \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}, x'_i\rangle_{i\in\omega} \models \Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, u) \iff u = w. \qquad (*)$$

Сначала определим $\Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, u)$ для всех $w \in A'$.

Для $w \in \{a', b', o', \alpha', \beta', \theta'\}$ полагаем $\Phi_w = (u = w)$, считая при этом кортеж $\overline{x}'_w$ пустым. Ясно, что для таких w справедлива эквивалентность $(*)$.

Для $w = x'_i$, $i \in \omega$, положим $\Phi_{x'_i} = (u = x'_i)$ с параметром $\overline{x}'_w = x'_i$. Очевидно, что свойство $(*)$ верно.

Для $w \in \{\gamma'_i, \delta'_i \mid i \in \omega\}$ определим $\Phi_{\gamma'_i} = P(x'_i, a', u)$, $\Phi_{\delta'_i} = P(x'_i, b', u)$ с параметром $\overline{x}'_w = x'_i$. Справедливость свойства $(*)$ следует из того, что $\gamma'_i = x'_i{\cdot}a'$ и $\delta'_i = x'_i{\cdot}b'$ в конфигурации $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$.

Для $w \in \{c'_i, d'_i, e'_i, f'_i \mid i \in \omega\}$ определим параметр $\overline{x}'_w = x'_i$ и положим

$$\begin{aligned}
\Phi_{c'_i} &= \exists v(\Phi_{\gamma'_i}(\overline{a}', x'_i, v) \mathbin{\&} P(v, \alpha', u)),\\
\Phi_{d'_i} &= \exists v(\Phi_{\delta'_i}(\overline{a}', x'_i, v) \mathbin{\&} P(v, \alpha', u)),\\
\Phi_{e'_i} &= \exists v(\Phi_{\gamma'_i}(\overline{a}', x'_i, v) \mathbin{\&} P(v, \beta', u)),\\
\Phi_{f'_i} &= \exists v(\Phi_{\delta'_i}(\overline{a}', x'_i, v) \mathbin{\&} P(v, \beta', u)).
\end{aligned}$$

Справедливость $(*)$ следует из тождеств $c'_i = \gamma'_i{\cdot}\alpha'$, $d'_i = \delta'_i{\cdot}\alpha'$, $e'_i = \gamma'_i{\cdot}\beta'$ и $f'_i = \delta'_i{\cdot}\beta'$.

Для $w \in \{\varepsilon'_i, \zeta'_i \mid i \in \omega\}$ определим параметр $\overline{x}'_w = x'_i$ и положим

$$\begin{aligned}
\Phi_{\varepsilon'_i} &= \exists v_1 \exists v_2(\Phi_{c'_i}(\overline{a}', x'_i, v_1) \mathbin{\&} \Phi_{f'_i}(\overline{a}', x'_i, v_2) \mathbin{\&} P(v_1, v_2, u)),\\
\Phi_{\zeta'_i} &= \exists v_1 \exists v_2(\Phi_{d'_i}(\overline{a}', x'_i, v_1) \mathbin{\&} \Phi_{e'_i}(\overline{a}', x'_i, v_2) \mathbin{\&} P(v_1, v_2, u)).
\end{aligned}$$

Из тождеств $\varepsilon'_i = c'_i{\cdot}f'_i$ и $\zeta'_i = d'_i{\cdot}e'_i$ вытекает справедливость $(*)$.

Для $w \in \{g'_{ij}, h'_{ij} \mid i, j \in \omega, i < j\}$ полагаем

$$\begin{aligned}
\Phi_{g'_{ij}} &= \exists v_1 \exists v_2(\Phi_{\gamma'_i}(\overline{a}', x'_i, v_1) \mathbin{\&} \Phi_{\delta'_j}(\overline{a}', x'_j, v_2) \mathbin{\&} P(v_1, v_2, u)),\\
\Phi_{h'_{ij}} &= \exists v_1 \exists v_2(\Phi_{\delta'_i}(\overline{a}', x'_i, v_1) \mathbin{\&} \Phi_{\gamma'_j}(\overline{a}', x'_j, v_2) \mathbin{\&} P(v_1, v_2, u)),
\end{aligned}$$

при этом набор параметров $\overline{x}'_w = \langle x'_i, x'_j\rangle$. Справедливость $(*)$ в данном случае следует из тождеств $g'_{ij} = \gamma'_i{\cdot}\delta'_j$, $h'_{ij} = \delta'_i{\cdot}\gamma'_j$.

Для $w = \eta'_{ij}$, где $i < j$, определим набор параметров $\overline{x}'_w = \langle x'_i, x'_j\rangle$ и формулу

$$\Phi_{\eta'_{ij}} = \exists v_1 \exists v_2 (\Phi_{g'_{ij}}(\overline{a}', x'_i, x'_j, v_1)\ \&\ \Phi_{h'_{ij}}(\overline{a}', x'_i, x'_j, v_2)\ \&\ P(v_1, v_2, u)).$$

Тождество $\eta'_{ij} = g'_{ij}{\cdot}h'_{ij}$ влечёт справедливость эквивалентности $(*)$.

Для $w = \xi'_{ij}$, учитывая тождество $\xi'_{ij} = x'_i{\cdot}x'_j$, положим $\Phi_{\xi'_{ij}} = P(x'_i, x'_j, u)$ с набором параметров $\overline{x}'_w = \langle x'_i, x'_j\rangle$.

Для $w = p'_{ij}$, где $i < j$, учитывая тождество $p'_{ij} = \eta'_{ij}{\cdot}\xi'_{ij}$, положим

$$\Phi_{p'_{ij}} = \exists v_1 \exists v_2 (\Phi_{\eta'_{ij}}(\overline{a}', x'_i, x'_j, v_1)\ \&\ \Phi_{\xi'_{ij}}(\overline{a}', x'_i, x'_j, v_2)\ \&\ P(v_1, v_2, u)),$$

при этом набор параметров $\overline{x}'_w = \langle x'_i, x'_j\rangle$.

Для $w \in \{\pi'_{ij}, \rho'_{ij} \mid i, j \in \omega, i < j\}$ и для набора параметров $\overline{x}'_w = \langle x'_i, x'_j\rangle$ положим

$$\Phi_{\pi'_{ij}} = \exists v_1 \exists v_2 (\Phi_{c'_i}(\overline{a}', x'_i, v_1)\ \&\ \Phi_{e'_j}(\overline{a}', x'_j, v_2)\ \&\ P(v_1, v_2, u)),$$
$$\Phi_{\rho'_i} = \exists v_1 \exists v_2 (\Phi_{e'_i}(\overline{a}', x'_i, v_1)\ \&\ \Phi_{c'_j}(\overline{a}', x'_j, v_2)\ \&\ P(v_1, v_2, u)).$$

Справедливость $(*)$ в данном случае следует из тождеств $\pi'_{ij} = c'_i{\cdot}e'_j$, $\rho'_{ij} = e'_i{\cdot}c'_j$.

Далее определим $\Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, u)$ индукцией по длине правильного слова w. Если $w = w_1 w_2$ — правильное слово над $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$ длины, большей чем 1, то полагаем

$$\Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, u) = \exists v_1 \exists v_2 (\Phi_{w_1}(\overline{a}', \overline{x}'_{w_1}, v_1)\ \&\ \Phi_{w_2}(\overline{a}', \overline{x}'_{w_2}, v_2)\ \&\ P(v_1, v_2, u)),$$

где набор параметров $\overline{x}'_w = \overline{x}'_{w_1} \cup \overline{x}'_{w_2}$.

Используя единственность представления элементов $w \in \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$ в виде правильного слова, нетрудно по индукции убедиться в справедливости эквивалентности $(*)$ для всех $w \in F'$. Следовательно, каждый $w \in \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$ удовлетворяет в структуре $\langle \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}, x'_i\rangle_{i\in\omega}$ формуле $\Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, u)$, и никакие два элемента $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$ не удовлетворяют одной формуле $\Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, u)$.

Пусть теперь $n \in \omega$ — произвольный элемент плоскости $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ (напомним, что носитель $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ совпадает с ω). Следовательно, $w = \nu^{-1} \circ \mu(n)$ является правильным словом над $\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}'}$. Положим $\overline{x}''_n = \nu^{-1} \circ \mu(\overline{x}'_w)$ и определим формулу

$$\Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u) = \left[\Phi_w\right]^{\overline{a}', \overline{x}'_w}_{\overline{a}'', \overline{x}''_n}$$

т.е. $\Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u)$ получена из $\Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, u)$ заменой $\overline{a}'$ и $\overline{x}'_w$ на $\overline{a}''$ и $\overline{x}''_n$ соответственно.

Так как $\nu^{-1} \circ \mu$ является изоморфизмом $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ на $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}$, то для $n \in \omega$, $w = \nu^{-1} \circ \mu(n)$ и произвольного $u \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ получаем:

$$\langle \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}, x''_i\rangle_{i\in\omega} \models \Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u) \iff \langle \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}'}, x'_i\rangle_{i\in\omega} \models \Phi_w(\overline{a}', \overline{x}'_w, \nu^{-1} \circ \mu(u)) \iff u = n.$$

Следовательно, каждый $u \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ удовлетворяет в структуре $\langle \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}, x''_i\rangle_{i\in\omega}$ некоторой формуле $\Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u)$, и никакие два различных элемента $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}'}$ не удовлетворяют одной формуле $\Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u)$.

Наконец, в силу $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимости функции μ и множества $\nu(F')$, а также в силу эффективности определения формулы Φ_w по правильному слову w, заключаем, что семейство формул $\{\Phi_n(\overline{a}'', \overline{x}''_n, u) \mid n \in \omega\}$ является $\deg(\mathfrak{G}')$-вычислимым. □

Используя достаточный признак из предложения 1.1.2, докажем основной результат о полноте класса свободно порождённых проективных плоскостей относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений.

Теорема 4.3.5. *Для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры $\mathfrak{M}$ существует свободно порождённая проективная плоскость $\mathfrak{F}$ такая, что*

(1) $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{F}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$*;*

(2) $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{F}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ *для всех степеней* $\mathbf{d}$*;*

(3) Для любого элемента $a \in |\mathfrak{M}|$ существует элемент $x \in |\mathfrak{F}|$ такой, что $\dim(\langle\mathfrak{F}, x\rangle) = \dim(\langle\mathfrak{M}, a\rangle)$*;*

(4) Для любого отношения $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ существует отношение $U \subseteq |\mathfrak{F}|$ такое, что $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{F}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$*.*

Доказательство. В [52] (см. теорема 3.1) доказано, что класс симметричных иррефлексивных графов является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений. Можно заметить, что при доказательстве данного результата строится симметричный иррефлексивный граф, содержащий бесконечное подмножество попарно не смежных рёбер. Поэтому класс симметричных иррефлексивных графов, обладающих таким свойством, также является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений.

Таким образом, справедливость утверждения теоремы следует из предложений 4.2.3–4.2.4, 4.3.1–4.3.4. □

Из пункта (2) доказанной теоремы получаем следующие следствия.

Следствие 4.3.6. *Для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость $\mathfrak{F}$ такая, что* $\mathrm{CatSp}(\mathfrak{F}) = \mathrm{CatSp}(\mathfrak{M})$*.*

Следствие 4.3.7. *Для любого n такого, что $1 \leqslant n \leqslant \omega$, существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна n.*

Напомним, что в следствии 3.3.2 было установлено, что произвольная счётная свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен. При этом свободная проективная плоскость бесконечного ранга имеет бесконечную вычислимую размерность. Таким образом, описание вычислимых размерностей свободных плоскостей не переносится на случай произвольных свободно порождённых плоскостей.

§ 4.4. Неразрешимость теории класса свободно порождённых плоскостей

Известно (см. [69]), что теория папповых проективных плоскостей наследственно неразрешима. Отсюда очевидно следует, что теория дезарговых проективных плоскостей также наследственно неразрешима.

В настоящем параграфе мы докажем, что класс всех свободно порождённых проективных плоскостей тоже имеет наследственно неразрешимую теорию. Для этого мы используем предложенную в § 4.1 интерпретацию симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей, модифициров её для случая конечных графов. Таким образом, мы установим относительную элементарную определимость класса конечных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Отсюда будет следовать основной результат данного параграфа.

Пусть $\mathfrak{G} = \langle G, E\rangle$ — конечный симметричный иррефлексивный граф. Можно считать, что G является начальным сегментом в ω. (Здесь мы очевидно не предполагаем, что $\mathfrak{G}$ содержит бесконечное подмножество попарно не смежных рёбер.)

Определим по $\mathfrak{G}$ невырожденную незамкнутую конфигурацию $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$, положив

$$A^0 = \{a, b, c_i, d_i, e_i, f_i, o, x_i \mid i \in G\} \cup \{g_{ij}, h_{ij}, p_{ij} \mid i, j \in G, i < j\},$$
$${}^0A = \{\alpha, \beta, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i, \zeta_i, \theta \mid i \in G\} \cup \{\eta_{ij}, \xi_{ij}, \pi_{ij}, \rho_{ij} \mid i, j \in G, i < j\},$$
$$A = A^0 \cup {}^0A.$$

Пара $\langle u, v\rangle$ принадлежит отношению инцидентности I тогда и только тогда, когда $\langle u, v\rangle$ или $\langle v, u\rangle$ совпадает с одной из пар, перечисленных в следующем списке:

(а) $\langle \alpha, c_i\rangle, \langle \alpha, d_i\rangle$, где $i \in G$;

(б) $\langle \beta, e_i\rangle, \langle \beta, f_i\rangle$, где $i \in G$;

(в) $\langle \gamma_i, a\rangle, \langle \gamma_i, c_i\rangle, \langle \gamma_i, e_i\rangle, \langle \gamma_i, x_i\rangle$, где $i \in G$;

(г) $\langle \gamma_i, g_{ij}\rangle, \langle \gamma_j, h_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(д) $\langle \delta_i, b\rangle, \langle \delta_i, d_i\rangle, \langle \delta_i, f_i\rangle, \langle \delta_i, x_i\rangle$, где $i \in G$;

(е) $\langle \delta_i, h_{ij}\rangle, \langle \delta_j, g_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(ж) $\langle \varepsilon_i, c_i\rangle, \langle \varepsilon_i, f_i\rangle, \langle \varepsilon_i, o\rangle$, где $i \in G$;

(з) $\langle \zeta_i, d_i\rangle, \langle \zeta_i, e_i\rangle, \langle \zeta_i, o\rangle$, где $i \in G$;

(и) $\langle \eta_{ij}, g_{ij}\rangle, \langle \eta_{ij}, h_{ij}\rangle, \langle \eta_{ij}, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(к) $\langle \xi_{ij}, x_i\rangle, \langle \xi_{ij}, x_j\rangle, \langle \xi_{ij}, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(л) $\langle \theta, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$ и $\langle i, j\rangle \in E$;

(м) $\langle \pi_{ij}, c_i\rangle, \langle \pi_{ij}, e_j\rangle, \langle \pi_{ij}, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$;

(н) $\langle \rho_{ij}, e_i\rangle, \langle \rho_{ij}, c_j\rangle, \langle \rho_{ij}, p_{ij}\rangle$, где $i, j \in G, i < j$.

Отметим, что определение конфигурации $\mathfrak{A}$ дословно повторяет определение из § 4.1. Однако, здесь ранг конфигурации конечен.

Так же как и в § 4.1 определим строгий полный порядок $\prec$ на элементах множества A

следующим образом. Положим

$$\begin{gathered}B_{-1} = \{o \prec a \prec b \prec \alpha \prec \beta \prec \theta\},\\ B_i = \{c_i \prec d_i \prec e_i \prec f_i \prec g_{jk} \prec h_{jk} \prec p_{jk} \prec x_i\\ \prec \gamma_i \prec \delta_i \prec \varepsilon_i \prec \zeta_i \prec \eta_{jk} \prec \xi_{jk} \prec \pi_{jk} \prec \rho_{jk}\},\end{gathered}$$

где $i, j, k \in \omega$, $j < k$ и пара $\langle j, k\rangle$ имеет номер i в некотором фиксированном перечислении множества пар $\{\langle m, n\rangle \mid m < n\}$. Тогда для произвольных $u, v \in A$ полагаем

$$u \prec v \Longleftrightarrow (u \in B_i \ \&\ v \in B_j \ \&\ i < j) \vee (u \in B_i \ \&\ v \in B_i \ \&\ u \prec v).$$

Применяя конструкцию Ширшова (см. § 2.1) к конфигурации $\mathfrak{A}$ и заданному выше порядку $\prec$, определим проективную плоскость $\mathfrak{F} = \langle F, F^0, {}^0F, \cdot\rangle$, свободно порождённую конфигурацией $\mathfrak{A}$. Отметим, что здесь ранг плоскости $\mathfrak{F}$ конечен.

Для произвольных правильных слов $u, v, w \in F^0$ определим следующие частичные термы в проективной плоскости $\mathfrak{F}$:

$$\begin{gathered}S(w) = \Big(\big((w{\cdot}b){\cdot}\beta\big){\cdot}\big((w{\cdot}a){\cdot}\alpha\big)\Big){\cdot}\Big(\big((w{\cdot}b){\cdot}\alpha\big){\cdot}\big((w{\cdot}a){\cdot}\beta\big)\Big),\\ T(u, v) = \Big(\big((u{\cdot}b){\cdot}(v{\cdot}a)\big){\cdot}\big((u{\cdot}a){\cdot}(v{\cdot}b)\big)\Big){\cdot}(u{\cdot}v).\end{gathered}$$

Доказательства предложений 4.2.7 и 4.2.8 остаются справедливыми и для случая конечного графа $\mathfrak{G}$. Поэтому имеют место следующие утверждения.

Предложение 4.4.1. *Пусть w — произвольное правильное слово 1-го типа, $w \neq a$, $w \neq b$, $w \neq \beta\alpha$ и $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$. Тогда $S(w) = o$, если и только если $w = x_i$ для некоторого $i \in G$.*

Предложение 4.4.2. *Пусть u, v — произвольные правильные слова 1-го типа такие, что $u \neq v$, $S(u)$ и $S(v)$ определены, $S(u) = o$ и $S(v) = o$. Тогда $T(u, v) = (u{\cdot}v){\cdot}\theta$, если и только если $u = x_i$, $v = x_j$ для некоторых $i, j \in G$ таких, что $\langle i, j\rangle \in E$.*

Один из основных методов доказательства наследственной неразрешимости элементарных теорий заключается в относительной элементарной определимости одного класса алгебраических систем в некотором другом классе, что позволяет переносить свойства неразрешимости теории первого класса на теорию второго класса (см. [20], §40).

В качестве эталонного класса мы используем класс всех конечных симметричных иррефлексивных графов. Наследственная неразрешимость теории этого класса является хорошо известным фактом [19, 20].

Рассматривая проективные плоскости как модели предикатной сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle$, докажем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 4.4.3. *Теория класса всех свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.*

Доказательство. Достаточно показать, что класс конечных симметричных иррефлексивных графов относительно элементарно определим в классе свободно порождённых проективных плоскостей.

Пусть $\mathfrak{G} = \langle G, E\rangle$ — произвольный конечный симметричный иррефлексивный граф. Определим по данному $\mathfrak{G}$ свободно порождённую проективную плоскость $\mathfrak{F} = \langle F, F^0, {}^0F, \cdot\rangle$ также как это было сделано выше. Далее перейдём от полученной частичной алгебраической системы к предикатной модели $\mathfrak{F} = \langle F, F^0, {}^0F, P\rangle$, заменив частичную операцию на её график

$$P = \{\langle u, v, w\rangle \mid u, v, w \in F, u{\cdot}v \downarrow= w\}.$$

Введём следующие формулы сигнатуры σ, содержащие в качестве параметров элементы a, b, o, α, β, θ.

$$\begin{aligned}\Phi(w) =& (w \in F^0) \mathbin{\&} (w \neq a) \mathbin{\&} (w \neq b) \mathbin{\&} \exists u\big(P(\beta, \alpha, u) \mathbin{\&} w \neq u\big) \mathbin{\&}\\ & \exists u\exists v\exists u_1\exists u_2\exists v_1\exists v_2\exists w_1\exists w_2\big(P(w, a, u) \mathbin{\&} P(w, b, v) \mathbin{\&} u \neq v \mathbin{\&}\\ & P(u, \alpha, u_1) \mathbin{\&} P(u, \beta, u_2) \mathbin{\&} P(v, \alpha, v_1) \mathbin{\&} P(v, \beta, v_2) \mathbin{\&}\\ & P(v_2, u_1, w_1) \mathbin{\&} P(v_1, u_2, w_2) \mathbin{\&} P(w_1, w_2, o)\big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(u, v) =& (u \in F^0) \mathbin{\&} (v \in F^0) \mathbin{\&} (u \neq v) \mathbin{\&} \Phi(u) \mathbin{\&} \Phi(v) \mathbin{\&}\\ & \exists u_1\exists u_2\exists v_1\exists v_2\exists w_1\exists w_2\exists w_3\exists w_4\exists w_5\big(P(u, a, u_1) \mathbin{\&} P(u, b, u_2) \mathbin{\&}\\ & P(v, a, v_1) \mathbin{\&} P(v, b, v_2) \mathbin{\&} P(u_2, v_1, w_1) \mathbin{\&} P(u_1, v_2, w_2) \mathbin{\&}\\ & P(w_1, w_2, w_3) \mathbin{\&} P(u, v, w_4) \mathbin{\&} P(w_3, w_4, w_5) \mathbin{\&} P(w_4, \theta, w_5)\big).\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathfrak{F} \models \Phi(w)$ тогда и только тогда, когда $w \in F^0$, значение $S(w)$ определено в $\mathfrak{F}$ и $S(w) = o$. Кроме этого, $\mathfrak{F} \models \Psi(u, v)$ тогда и только тогда, когда $u, v \in F^0$, значения $S(u)$, $S(v)$ определены в $\mathfrak{F}$, $S(u) = S(v) = o$, $u \neq v$ и $T(u, v) = (u{\cdot}v){\cdot}\theta$.

Далее определим в проективной плоскости $\mathfrak{F}$ подмножества

$$G_0 = \{w \in F \mid \mathfrak{F} \models \Phi(w)\},$$
$$E_0 = \{\langle u, v\rangle \in F^2 \mid \mathfrak{F} \models \Psi(u, v)\}.$$

В силу предложения 4.4.1 заключаем, что $G_0 = \{x_i \mid i \in G\}$, а из предложения 4.4.2 следует, что $E_0 = \{\langle x_i, x_j\rangle \mid i, j \in G, \langle i, j\rangle \in E\}$.

Очевидно граф $\mathfrak{G} = \langle G, E\rangle$ изоморфен графу $\mathfrak{G}_0 = \langle G_0, E_0\rangle$. Что и требовалось. □

§ 4.5. Алгоритмические свойства кодирования полей в папповых плоскостях

Напомним, что в § 2.3 были определены две конструкции, позволяющие по данному полю $\mathfrak{F}$ определять паппову проективную плоскость $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, и наоборот, по данной папповой плоскости $\mathfrak{A}$ и её остову $\overline{D}$ определять поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$. Вторая из этих двух конструкций использует введённые в § 2.2 отношения $D(\mathfrak{A}, \overline{D})$, $P_+(\mathfrak{A}, \overline{D})$, $P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D})$. Данные отношения не инвариантны, поскольку используют элементы остова $\overline{D}$ в качестве параметров. Отсутствие инвариантности не позволяет нам использовать достаточный признак эффективной полноты класса, сформулированный в предложении 1.1.2. Тем не менее мы сможем обойти эту сложность, показав, что для любого автоморфизма h вычислимой папповой плоскости $\mathfrak{A}$ существует вычислимый автоморфизм g плоскости $\mathfrak{A}$ такой, что $g(\overline{D}) = h(\overline{D})$ (см. лемму 4.5.5 ниже).

Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольное счётное поле, и $\mathfrak{F} = \langle F, +, \cdot, 0, 1\rangle$ — представление поля $\mathfrak{K}$ с вычислимым носителем F. Рассмотрим паппову проективную плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ и определим в соответствии с предложением 2.3.1 $\deg(\mathfrak{F})$-вычислимое представление $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} = \langle A, A^0, {}^0A, P\rangle$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$.

Напомним, что вычислимый носитель проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ определяется следующим образом:

$$A^0 = \{c^4(1,1,0,0)\} \cup \{c^4(1,x,1,0) \mid x \in F\} \cup \{c^4(1,x,y,1) \mid x,y \in F\},$$
$${}^0A = \{c^4(2,0,0,1)\} \cup \{c^4(2,0,1,z) \mid z \in F\} \cup \{c^4(2,1,y,z) \mid y,z \in F\},$$
$$A = A^0 \cup {}^0A,$$

а $\deg(\mathfrak{F})$-вычислимое отношение $P \subseteq \omega^3$ определяется в соответствии с правилами умножения (аб)–(ее2), приведёнными в предложении 2.3.1.

Зафиксируем в построенной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ остов $\overline{E} = \langle E_1, E_2, E_3, E_4\rangle$, который мы будем называть *стандартным остовом в* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, положив $E_1 = c^4(1,1,0,0)$, $E_2 = c^4(1,0,1,0)$, $E_3 = c^4(1,0,0,1)$, $E_4 = c^4(1,1,1,1)$. Пусть $\nu : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ — естественный изоморфизм, задаваемый по правилам $\nu(c^4(1,x,y,z)) = \langle xe_1 + ye_2 + ze_3\rangle$, $\nu(c^4(2,x,y,z)) = \langle xe_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle$. Ясно, что ν отображает остов $\overline{E}$ в остов $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_3\rangle$, $\langle e_1+e_2+e_3\rangle$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$. (Напомним, что здесь через e_1, e_2, e_3 обозначен стандартный базис векторного пространства $V_{\mathfrak{F}}$.)

Рассмотрим в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ отношение

$$D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}) = \{u \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_1(u, \overline{E})\},$$

где Φ_1 — формула из § 2.2, и определим $\deg(\mathfrak{F})$-вычислимое биективное отображение

$$g_{\mathfrak{F}} : D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}) \longrightarrow F,$$

следующим образом. Если $u \in D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E})$, то $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \models \Phi_1(\nu(u), \nu(\overline{E}))$, и значит $\nu(u) = \langle xe_1 + e_2\rangle$ для некоторого $x \in F$. Следовательно $u = c^4(1,x,1,0)$, и мы полагаем $g_{\mathcal{F}}(u) = x$.

Лемма 4.5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ — представления поля $\mathfrak{K}$ и $h : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ — изоморфизм полей. Тогда существует* $\deg(h)$-*вычислимый изоморфизм плоскостей $f : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'}$ такой, что $f{\restriction}D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}) = g_{\mathfrak{F}'}^{-1} \circ h \circ g_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Определим для каждого $u \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ значение $f(u)$ по следующей схеме

$$f(u) = \begin{cases} c^4(1, h(x), h(y), h(z)), \text{если } u = c^4(1,x,y,z), \\ c^4(2, h(x), h(y), h(z)), \text{если } u = c^4(2,x,y,z). \end{cases}$$

Легко видеть, что f является $\deg(h)$-вычислимым изоморфизмом $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ на $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'}$, и для любого $u \in D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E})$, если $u = c^4(1,x,1,0)$, то $g_{\mathfrak{F}'}^{-1} \circ h \circ g_{\mathfrak{F}}(u) = g_{\mathfrak{F}'}^{-1} \circ h(x) = c^4(1, h(x), 1, 0) = f(u)$. $\square$

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — произвольное представление папповой проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, и $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4\rangle$ — произвольный остов в $\mathfrak{A}$. В соответствии с предложением 2.3.2 определим в $\mathfrak{A}$ следующие $\deg(\mathfrak{A})$-вычислимые отношения

$$D(\mathfrak{A}, \overline{D}) = \{u \mid \mathfrak{A} \models \Phi_1(u, \overline{D})\},$$
$$P_+(\mathfrak{A}, \overline{D}) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{D})\},$$
$$P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D}) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A} \models \Theta(u, v, w, \overline{D})\},$$

где Φ_1, $\mathcal{X}$, Θ — формулы из § 2.2.

Тогда структура $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}} = \langle D(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_+(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D})\rangle$ будет полем, изоморфным полю $\mathfrak{K}$. Если проективная плоскость $\mathfrak{A}$ вычислима, то поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ тоже вычислимо. Если же $\deg(\mathfrak{A}) > 0$, то в силу предложения 2.3.2 поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ имеет $\deg(\mathfrak{A})$-вычислимое представление, которое мы обозначим через $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{A},\overline{D}}$. Ясно, что $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ будет $\deg(\mathfrak{A})$-вычислимым представлением и для поля $\mathfrak{K}$.

Лемма 4.5.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимое представление поля $\mathfrak{K}$, $\overline{E}$ — стандартный остов в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$. Тогда $g_{\mathfrak{F}}$ является вычислимым изоморфизмом поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}},\overline{E}}$ на поле $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Из вычислимости $\mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ и $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}},\overline{E}}$ тоже вычислимы. Следовательно, отображение $g_{\mathfrak{F}} : D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}) \longrightarrow F$ является вычислимой биекцией. Докажем, что для любых $u, v, w \in D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E})$ имеет место

$$\langle u, v, w\rangle \in P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}) \Longleftrightarrow g_{\mathfrak{F}}(u) = g_{\mathfrak{F}}(v) + g_{\mathfrak{F}}(w),$$
$$\langle u, v, w\rangle \in P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}) \Longleftrightarrow g_{\mathfrak{F}}(u) = g_{\mathfrak{F}}(v) \cdot g_{\mathfrak{F}}(w).$$

Действительно, условие $\langle u, v, w\rangle \in P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E})$ эквивалентно $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{E})$, что в свою очередь эквивалентно существованию $x, y, z \in F$ таких, что $\nu(u) = \langle xe_1 + e_2\rangle$, $\nu(v) = \langle ye_1 + e_2\rangle$, $\nu(w) = \langle ze_1 + e_2\rangle$ и $\mathfrak{F} \models y + z = x$. Последнее условие эквивалентно $\mathfrak{F} \models g_{\mathfrak{F}}(v) + g_{\mathfrak{F}}(w) = g_{\mathfrak{F}}(u)$.

Аналогичным образом доказывается условие для отношения $P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E})$. Таким образом, $g_{\mathfrak{F}}$ — вычислимый изоморфизм поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}},\overline{E}}$ на поле $\mathfrak{F}$. □

Лемма 4.5.3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимое представление плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, $\overline{D}$ — произвольный остов в $\mathfrak{A}$, $\overline{E}$ — стандартный остов в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$. Тогда существует вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ такой, что $f(\overline{D}) = \overline{E}$ и $f{\restriction}D(\mathfrak{A}, \overline{D}) = g^{-1}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$.*

Доказательство. Из вычислимости $\mathfrak{A}$ следует, что $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ тоже вычислимы. Следовательно, отображение

$$g_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}} : D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}, \overline{E}) \longrightarrow D(\mathfrak{A}, \overline{D})$$

тоже вычислимо, а обратное к нему отображение действует следующим образом. Если $x \in D(\mathfrak{A}, \overline{D})$, то x является элементом поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$. Следовательно элемент $u = c^4(1, x, 1, 0)$ является элементом плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$. Тогда $g^{-1}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}(x) = u$ и при этом $u \in D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}, \overline{E})$.

Поскольку $\mathfrak{A}$ — представление плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, существует изоморфизм $\alpha : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}$, и найдется базис d_1, d_2, d_3 векторного пространства $V_{\mathfrak{K}}$ такой, что $\alpha(\langle d_1\rangle) = D_1$, $\alpha(\langle d_2\rangle) = D_2$, $\alpha(\langle d_3\rangle) = D_3$ и $\alpha(\langle d_1 + d_2 + d_3\rangle) = D_4$.

Любой элемент $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ единственным образом представим в одном из следующих шести видов:

(а) $\langle d_1\rangle$,

(б) $\langle xd_1+d_2\rangle, x\in\mathfrak{K}$,

(в) $\langle xd_1+yd_2+d_3\rangle, x,y\in\mathfrak{K}$,

(г) $\langle d_3^{\top}\rangle$,

(д) $\langle d_2^{\top}+zd_3^{\top}\rangle, z\in\mathfrak{K}$,

(е) $\langle d_1^{\top}+yd_2^{\top}+zd_3^{\top}\rangle, y,z\in\mathfrak{K}$.

Определим формулы сигнатуры $\sigma=\langle A^0,{}^0A,P\rangle$, зависящие от набора параметров $\overline{d}=\langle\langle d_1\rangle,\langle d_2\rangle,\langle d_3\rangle,\langle d_1+d_2+d_3\rangle\rangle$.

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\text{а}}(u,\overline{d})=(u=\langle d_1\rangle),\\
&\Phi_{\text{б}}(u,\overline{d})=(u\in A^0)\ \&\ (u\neq\langle d_1\rangle)\ \&\ \exists v\big(P(\langle d_1\rangle,\langle d_2\rangle,v)\ \&\ P(u,\langle d_1\rangle,v)\big),\\
&\Phi_{\text{в}}(u,\overline{d})=(u\in A^0)\ \&\ (u\neq\langle d_1\rangle)\ \&\ \exists v\big(P(\langle d_1\rangle,\langle d_2\rangle,v)\ \&\ \neg P(u,\langle d_1\rangle,v)\big),\\
&\Phi_{\text{г}}(u,\overline{d})=P(\langle d_1\rangle,\langle d_2\rangle,u),\\
&\Phi_{\text{д}}(u,\overline{d})=(u\in{}^0A)\ \&\ \exists v\big(P(\langle d_1\rangle,\langle d_2\rangle,v)\ \&\ (u\neq v)\ \&\ P(u,v,\langle d_1\rangle)\big),\\
&\Phi_{\text{е}}(u,\overline{d})=(u\in{}^0A)\ \&\ \exists v\big(P(\langle d_1\rangle,\langle d_2\rangle,v)\ \&\ (u\neq v)\ \&\ \neg P(u,v,\langle d_1\rangle)\big).
\end{aligned}$$

Заметим, что элемент $u\in\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ удовлетворяет в модели $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ одной из формул $\Phi_{\text{а}}(u,\overline{d})$, …, $\Phi_{\text{е}}(u,\overline{d})$ тогда и только тогда, когда u является элементом вида (а)–(е) соответственно.

Так как α — изоморфизм, отображающий остов $\overline{d}$ в остов $\overline{D}$, то формульные множества $\Phi_{\text{а}}(\mathfrak{A},\overline{D}),\dots,\Phi_{\text{е}}(\mathfrak{A},\overline{D})$ разбивают носитель плоскости $\mathfrak{A}$ на шесть непересекающихся частей, и если элемент $u\in\mathfrak{A}$ удовлетворяет в модели $\mathfrak{A}$ одной из формул $\Phi_{\text{а}}(u,\overline{D}),\dots,\Phi_{\text{е}}(u,\overline{D})$, то $\alpha^{-1}(u)$ является элементом вида (а)–(е) соответственно. Кроме этого, легко видеть, что множества $\Phi_{\text{а}}(\mathfrak{A},\overline{D}),\dots,\Phi_{\text{е}}(\mathfrak{A},\overline{D})$ вычислимы.

Определим отображение $f:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$, рассмотрев следующие шесть случаев.

(а) Если $\mathfrak{A}\models\Phi_{\text{а}}(u,\overline{D})$, то $u=D_1$. Положим $f(u)=E_1=c^4(1,1,0,0)$.

(б) Если $\mathfrak{A}\models\Phi_{\text{б}}(u,\overline{D})$, то $u\in D(\mathfrak{A},\overline{D})$. Положим $f(u)=g^{-1}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}(u)=c^4(1,u,1,0)$.

Найдём значение $f(D_2)$. Заметим, что D_2 является нулём поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$. Поэтому, так как $g^{-1}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ изоморфно отображает поле $\mathfrak{G}=\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ на поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}},\overline{E}}$, заключаем, что $f(D_2)=g^{-1}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}(D_2)$ является нулём поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}},\overline{E}}$. Следовательно $f(D_2)=c^4(1,0,1,0)=E_2$.

(в) Если $\mathfrak{A}\models\Phi_{\text{в}}(u,\overline{D})$, то $\alpha^{-1}(u)=\langle xd_1+yd_2+d_3\rangle$ для некоторых $x,y\in\mathfrak{K}$. Используя формулы Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 из § 2.2, определим формулу

$$\Psi_{\text{в}}(u',v',w',\overline{d})=\exists v_1\exists w_1\exists w_2\big(\Psi_1(v',v_1,\overline{d})\ \&\ \Psi_1(w',w_1,\overline{d})\ \&\\ \Psi_2(w_1,w_2,\overline{d})\ \&\ \Psi_3(u',v_1,\overline{d})\ \&\ \Psi_4(u',w_2,\overline{d})\big).$$

В силу леммы 2.2.1, условие $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}\models\Psi_{\text{в}}(u',v',w',\overline{d})$ равносильно тому, что $u'=\langle xd_1+yd_2+d_3\rangle$, $v'=\langle xd_1+d_2\rangle$, $w'=\langle yd_1+d_2\rangle$ для некоторых x,y. Поэтому для данного $u\in\Phi_{\text{в}}(\mathfrak{A},\overline{D})$ существуют единственные $v,w\in D(\mathfrak{A},\overline{D})$ такие, что $\mathfrak{A}\models\Psi_{\text{в}}(u,v,w,\overline{D})$. Более того, поскольку формула $\Psi_{\text{в}}$ имеет эквивалентные $\exists$-форму и $\forall$-форму, такие v,w находятся эффективно.

Положим $f(u)=c^4(1,v,w,1)$. Элементы $f(v)=c^4(1,v,1,0)$ и $f(w)=c^4(1,w,1,0)$ удовлетворяют свойству $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}\models\Psi_{\text{в}}(f(u),f(v),f(w),\overline{E})$.

Найдём значение $f(D_3)$. Согласно определению $f(D_3) = c^4(1, v, w, 1)$, где v и w такие, что $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{в}}(D_3, v, w, \overline{D})$. Следовательно, $v = w = D_2$, т.е. u и v совпадают с нулём поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$. Следовательно $f(D_3) = c^4(1, 0, 0, 1) = E_3$.

Найдём значение $f(D_4)$. Согласно определению $f(D_4) = c^4(1, v, w, 1)$, где v и w такие, что $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{в}}(D_4, v, w, \overline{D})$. Так как $D_4 = \alpha(\langle d_1 + d_2 + d_3\rangle)$, то $v = w = \alpha(\langle d_1 + d_2\rangle)$. Заметим, что $\alpha(\langle d_1 + d_2\rangle)$ является единицей поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$. Следовательно, $f(D_4) = c^4(1, 1, 1, 1) = E_4$.

(г) Если $\mathcal{A} \models \Phi_{\text{г}}(u, \overline{D})$, то $u = D_1 \cdot D_2$. Положим $f(u) = E_1 \cdot E_2 = c^4(2, 0, 0, 1)$.

(д) Если $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{д}}(u, \overline{D})$, то $\alpha^{-1}(u) = \langle d_2^\top + z d_3^\top\rangle$ для некоторого $z \in \mathfrak{K}$. Заметим, что $\langle d_2^\top + z d_3^\top\rangle = \langle d_1\rangle \cdot \langle -z d_2 + d_3\rangle$. Определим формулу

$$\Psi_{\text{д}}(u', v', \overline{d}) = \exists v_1 \exists v_2 \big(\Psi_1(v', v_1, \overline{d}) \ \&\ \Psi_2(v_1, v_2, \overline{d}) \ \&\ P(\langle d_1\rangle, v_2, u')\big).$$

Тогда $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \models \Psi_{\text{д}}(u', v', \overline{d})$ равносильно тому, что $u' = \langle d_2^\top + z d_3^\top\rangle$, $v' = \langle -z d_1 + d_2\rangle$ для некоторого z. Следовательно, для данного $u \in \Phi_{\text{д}}(\mathfrak{A}, \overline{D})$ можно эффективно найти единственный $v \in D(\mathfrak{A}, \overline{D})$ с условием $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{д}}(u, v, \overline{D})$. Затем найдём в поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ по элементу v противоположный к нему $-v$.

Положим $f(u) = c^4(2, 0, 1, -v)$. Отметим, что элементы $f(v) = c^4(1, v, 1, 0)$ и $f(u)$ при этом удовлетворяют свойству $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}} \models \Psi_{\text{д}}(f(u), f(v), \overline{E})$.

(е) Если $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{е}}(u, \overline{D})$, то $\alpha^{-1}(u) = \langle d_1^\top + y d_2^\top + z d_3^\top\rangle$ для некоторых $y, z \in \mathfrak{K}$. Заметим, что $\langle d_1^\top + y d_2^\top + z d_3^\top\rangle = \langle -y d_1 + d_2\rangle \cdot \langle -z d_1 + d_3\rangle$. Определим формулу

$$\Psi_{\text{е}}(u', v', w', \overline{d}) = \Phi_1(v', \overline{d}) \ \&\ \exists w_1 \big(\Psi_1(w', w_1, \overline{d}) \ \&\ P(v', w_1, u')\big).$$

Тогда $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \models \Psi_{\text{е}}(u', v', w', \overline{d})$ равносильно тому, что $u' = \langle d_1^\top + y d_2^\top + z d_3^\top\rangle$, $v' = \langle -y d_1 + d_2\rangle$, $w' = \langle -z d_1 + d_2\rangle$ для некоторых y, z. Следовательно, для данного $u \in \Phi_{\text{е}}(\mathfrak{A}, \overline{D})$ можно эффективно найти единственную пару $v, w \in D(\mathfrak{A}, \overline{D})$ с условием $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{е}}(u, v, w, \overline{D})$. Затем найдём в поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ элементы $-v, -w$ противоположные к v, w.

Положим $f(u) = c^4(2, 1, -v, -w)$. Отметим, что элементы $f(v) = c^4(1, v, 1, 0)$ и $f(w) = c^4(1, w, 1, 0)$ удовлетворяют свойству $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}} \models \Psi_{\text{е}}(f(u), f(v), f(w), \overline{E})$.

Таким образом, мы определили вычислимое отображение $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ такое, что $f(\overline{D}) = \overline{E}$ и $f{\restriction} D(\mathfrak{A}, \overline{D}) = g^{-1}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$. Легко видеть по построению, что f — биекция.

Для окончания доказательства леммы осталось убедиться в том, что f сохраняет график операции умножения в проективных плоскостях. Для этого воспользуемся правилами умножения (аб)–(ее2).

Рассмотрим, например, случай (бв). Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{б}}(a, \overline{D}) \ \&\ \Phi_{\text{в}}(b, \overline{D}) \ \&\ \Phi_{\text{е}}(c, \overline{D})$. Тогда, в силу определения функции f, имеет место $f(a) = c^4(1, a, 1, 0)$ и для некоторых $b', b'', c', c'' \in D(\mathfrak{A}, \overline{D})$ справедливо $f(b) = c^4(1, b', b'', 1)$ и $f(c) = c^4(2, 1, -c', -c'')$. Кроме этого, справедливы следующие соотношения

$$\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{в}}(b, b', b'', \overline{D}); \qquad \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}} \models \Psi_{\text{в}}(f(b), f(b'), f(b''), \overline{E});$$
$$\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{е}}(c, c', c'', \overline{D}); \qquad \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}} \models \Psi_{\text{е}}(f(c), f(c'), f(c''), \overline{E}).$$

Отсюда, используя тот факт, что $g^{-1}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ является изоморфизмом поля $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ на поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}},\overline{E}}$, получаем следующую цепочку эквивалентностых утверждений:

$$\mathfrak{A} \models P(a,b,c) \iff \mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}} \models (a = c')\ \&\ (b' - ab'' = c'') \iff$$
$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{G}},\overline{E}} \models \big(f(a) = f(c')\big)\ \&\ \big(f(b') - f(a)\cdot f(b'') = f(c'')\big) \iff$$
$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}} \models P(f(a), f(b), f(c)).$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 4.5.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимое представление поля $\mathfrak{K}$, $h : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ — автоморфизм проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$. Тогда существует вычислимый автоморфизм $g : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ такой, что $g(\overline{E}) = h(\overline{E})$, где $\overline{E}$ — стандартный остов в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Рассмотрим естественный изоморфизм $\nu : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$, отображающий остов $\overline{E}$ в остов $\langle e_1\rangle$, $\langle e_2\rangle$, $\langle e_3\rangle$, $\langle e_1+e_2+e_3\rangle$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$, где e_1, e_2, e_3 — стандартный базис в $V_{\mathfrak{F}}$. Обозначим $D_1 = \nu\circ h\circ\nu^{-1}(\langle e_1\rangle)$, $D_2 = \nu\circ h\circ\nu^{-1}(\langle e_2\rangle)$, $D_3 = \nu\circ h\circ\nu^{-1}(\langle e_3\rangle)$, $D_4 = \nu\circ h\circ\nu^{-1}(\langle e_1+ e_2+e_3\rangle)$. Тогда четвёрка D_1, D_2, D_3, D_4 является остовом в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, найдётся базис d_1, d_2, d_3 пространства $V_{\mathfrak{F}}$ такой, что $D_1 = \langle d_1\rangle$, $D_2 = \langle d_2\rangle$, $D_3 = \langle d_3\rangle$, $D_4 = \langle d_1+d_2+d_3\rangle$. Отсюда следует, что существует невырожденная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

такая, что $a_{ij} \in \mathfrak{F}$ для всех i, j, и в пространстве $V_{\mathfrak{F}}$ справедливы соотношения

$$d_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,$$
$$d_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3,$$
$$d_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3.$$

В силу фундаментальной теоремы проективной геометрии (см. [53], § 2.4) невырожденное линейное преобразование пространства $V_{\mathfrak{F}}$, задаваемое матрицей A, индуцирует автоморфизм g' проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$.

Автоморфизм $g' : \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ определяется следующим образом. Для произвольного одномерного подпространства $u = \langle xe_1 + ye_2 + ze_3\rangle$ в $V_{\mathfrak{F}}$ значение $g'(u)$ определяется по формуле

$$g'(u) = \langle (xa_{11} + ya_{21} + za_{31})e_1 + (xa_{12} + ya_{22} + za_{32})e_2 + (xa_{13} + ya_{23} + za_{33})e_3\rangle.$$

Для произвольного двухмерного подпространства w в $V_{\mathfrak{F}}$ существуют одномерные пространства u, v такие, что $u \neq v$ и $w = u \cdot v$. Тогда значение $g'(w)$ определяется как

$$g'(w) = g'(u) \cdot g'(v).$$

Определим автоморфизм $g : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, положив $g = \nu^{-1} \circ g' \circ \nu$. Тогда $g(\overline{E}) = \nu^{-1} \circ g' \circ \nu(\overline{E}) = \nu^{-1} \circ g'(\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_3\rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle) = \nu^{-1}(\langle d_1\rangle, \langle d_2\rangle, \langle d_3\rangle, \langle d_1 + d_2 + d_3\rangle) = h \circ \nu^{-1}(\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_3\rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle) = h(\overline{E})$.

Наконец, покажем, что автоморфизм g вычислим.

Если $u \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ — элемент первого типа, то $u = c^4(1, x, y, z)$ и мы можем эффективно вычислить $x, y, z \in F$. Согласно определению g' имеем:

$$g' \circ \nu(u) = \langle (xa_{11} + ya_{21} + za_{31})e_1 + (xa_{12} + ya_{22} + za_{32})e_2 + (xa_{13} + ya_{23} + za_{33})e_3 \rangle,$$

при этом мы можем эффективно вычислить в поле $\mathfrak{F}$ значения

$$x' = xa_{11} + ya_{21} + za_{31},$$
$$y' = xa_{12} + ya_{22} + za_{32},$$
$$z' = xa_{13} + ya_{23} + za_{33}.$$

Тогда если $z' = 0$ и $y' = 0$, то $g(u) = c^4(1, 1, 0, 0)$. Если $z' = 0$ и $y' \neq 0$, то $g(u) = c^4(1, x'/y', 1, 0)$. Если же $z' \neq 0$, то $g(u) = c^4(1, x'/z', y'/z', 1)$.

Если $w \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ — элемент второго типа, то мы можем эффективно найти в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ такие u, v, что $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models w = u \cdot v$. Затем, используя алгоритм вычисления значений g для элементов первого типа, найдем $g(u)$ и $g(v)$, и наконец вычислим в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ значение $g(w) = g(u) \cdot g(v)$. □

Лемма 4.5.5. *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимое представление проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, $\overline{D}$ — произвольный остов в $\mathfrak{A}$, $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ — автоморфизм плоскости $\mathfrak{A}$. Тогда существует вычислимый автоморфизм $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ такой, что $g(\overline{D}) = h(\overline{D})$.*

Доказательство. По лемме 4.5.3 существует вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ такой, что $f \restriction D(\mathfrak{A}, \overline{D}) = g^{-1}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ и $f(\overline{D}) = \overline{E}$, где $\overline{E}$ — стандартный остов в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$. Определим автоморфизм

$$h' = f \circ h \circ f^{-1} : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}.$$

По лемме 4.5.4 существует вычислимый автоморфизм $g' : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ такой, что $g'(\overline{E}) = h'(\overline{E})$.

Определим автоморфизм $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, положив $g = f^{-1} \circ g' \circ f$. Тогда g вычислим и $g(\overline{D}) = h(\overline{D})$. □

Напомним, что вычислимым представлением проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ мы формально называем изоморфизм $\alpha : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A}$ является вычислимой структурой.

Лемма 4.5.6. *Пусть $\alpha : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}$ и $\alpha' : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}'$ — вычислимые представления проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ — изоморфизм, $\overline{e}$ — стандартный остов в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$. Тогда существуют остов $\overline{D} = \alpha(\overline{e})$ в $\mathfrak{A}$, остов $\overline{D}' = \alpha'(\overline{e})$ в $\mathfrak{A}'$ и вычислимый автоморфизм $g : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}'$ такие, что $(g \circ f) \restriction D(\mathfrak{A}, \overline{D})$ является $\deg(f)$-вычислимым изоморфизмом $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ на $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}',\overline{D}'}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{e} = \langle \langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle \rangle$, где e_1, e_2, e_3 — стандартный базис пространства $V_{\mathfrak{K}}$. Введём обозначения

$$D_1 = \alpha(\langle e_1 \rangle),\ D_2 = \alpha(\langle e_2 \rangle),\ D_3 = \alpha(\langle e_3 \rangle),\ D_4 = \alpha(\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle),$$
$$D'_1 = \alpha'(\langle e_1 \rangle),\ D'_2 = \alpha'(\langle e_2 \rangle),\ D'_3 = \alpha'(\langle e_3 \rangle),\ D'_4 = \alpha'(\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle).$$

Тогда четвёрки $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4\rangle$ и $\overline{D}' = \langle D_1', D_2', D_3', D_4'\rangle$ являются остовами в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ соответственно.

Определим автоморфизм $h : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}'$, положив $h = f \circ \alpha \circ (\alpha')^{-1}$. Легко видеть, что $f^{-1} \circ h(\overline{D}') = \overline{D}$. Ясно также, что $\overline{D}'' = h(\overline{D}')$ тоже является остовом в $\mathfrak{A}'$.

По лемме 4.5.5 для автоморфизма $h^{-1} : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}'$ существует вычислимый автоморфизм $g : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}'$ такой, что $g(\overline{D}'') = h^{-1}(\overline{D}'') = \overline{D}'$.

Тогда $g \circ f(\overline{D}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ h(\overline{D}') = g \circ h(\overline{D}') = \overline{D}'$. Отсюда следует, что $g \circ f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ является изоморфизмом, переводящим остов $\overline{D}$ в остов $\overline{D}'$. Следовательно, имеют место равенства

$$g \circ f\big(D(\mathfrak{A}, \overline{D})\big) = D(\mathfrak{A}', \overline{D}'),$$
$$g \circ f\big(P_+(\mathfrak{A}, \overline{D})\big) = P_+(\mathfrak{A}', \overline{D}'),$$
$$g \circ f\big(P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D})\big) = P_\times(\mathfrak{A}', \overline{D}').$$

Таким образом, $(g \circ f)\restriction D(\mathfrak{A}, \overline{D})$ является изоморфизмом поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ на поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}',\overline{D}'}$. Поскольку g вычислим, заключаем, что $(g \circ f)\restriction D(\mathfrak{A}, \overline{D})$ является $\deg(f)$-вычислимым. □

§ 4.6. Эффективная полнота класса папповых проективных плоскостей

В данном параграфе мы докажем основные результаты о спектрах степеней и эффективных размерностях в классе папповых проективных плоскостей.

Предложение 4.6.1. *Пусть $\mathfrak{K}$ — счётное поле. Тогда паппова проективная плоскость $\mathfrak{P}_\mathfrak{K}$ автоморфна нетривиальна и* $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{K})$.

Доказательство. Известно, что любое бесконечное поле (произвольной характеристики) автоморфно нетривиально. Докажем, что плоскость $\mathfrak{P}_\mathfrak{K}$ тоже автоморфна нетривиальна. Допустим, напротив, существует конечное подмножество $S \subseteq |\mathfrak{P}_\mathfrak{K}|$ такое, что любая перестановка p на множестве $|\mathfrak{P}_\mathfrak{K}|$ с условием $p\restriction S = \mathrm{id}$, является автоморфизмом $\mathfrak{P}_\mathfrak{K}$. Можно считать, что элементы остова $\overline{e} = \langle\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_3\rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle\rangle$ принадлежат S.

Рассмотрим естественный изоморфизм $\beta : |\mathfrak{K}| \to D(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e})$ исходного поля $\mathfrak{K}$ на поле $\mathfrak{K}_0 = \langle D(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e}), P_+(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e}), P_\times(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e})\rangle$, задаваемый по правилу $\beta(k) = \langle ke_1 + e_2\rangle$. Положим $S_0 = \beta^{-1}(S \cap D(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e}))$. Тогда S_0 — конечное подмножество $|\mathfrak{K}|$.

Пусть $f : |\mathfrak{K}| \to |\mathfrak{K}|$ — произвольная перестановка такая, что $f\restriction S_0 = \mathrm{id}$. Тогда перестановка

$$\beta \circ f \circ \beta^{-1} : D(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e}) \longrightarrow D(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e})$$

обладает свойством $\beta \circ f \circ \beta^{-1}\restriction(S \cap D(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e})) = \mathrm{id}$.

Определим перестановку $p : |\mathfrak{P}_\mathfrak{K}| \to |\mathfrak{P}_\mathfrak{K}|$, положив

$$p(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin D(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e}), \\ \beta \circ f \circ \beta^{-1}(x), & \text{если } x \in D(\mathfrak{P}_\mathfrak{K}, \overline{e}). \end{cases}$$

Тогда $p{\restriction}S = \mathrm{id}$. Следовательно p — автоморфизм $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$. Поскольку $p(\overline{e}) = \overline{e}$, заключаем, что отображение $p' = p{\restriction}D(\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}, \overline{e})$ является автоморфизмом поля $\mathfrak{K}_0$. Следовательно, $f = \beta^{-1}{\circ}p'{\circ}\beta$ является автоморфизмом поля $\mathfrak{K}$, что противоречит его автоморфной нетривиальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ — представление $\mathfrak{K}$. Тогда $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ является $\deg(\mathfrak{F})$-вычислимым представлением $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$. Следовательно $\deg(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}) \leqslant \deg(\mathfrak{F})$. Поскольку спектр степеней автоморфно нетривиальной структуры замкнут вверх, существует представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ такое, что $\deg(\mathfrak{A}) = \deg(\mathfrak{F})$. Следовательно $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathrm{DgSp}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}})$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — представление плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, и $\overline{D}$ — произвольный остов в $\mathfrak{A}$. Тогда поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ изоморфно $\mathfrak{K}$ и, как было замечено в § 4.5, поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ имеет $\deg(\mathfrak{A})$-вычислимое представление $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{A},\overline{D}}$. Следовательно $\deg(\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{A},\overline{D}}) \leqslant \deg(\mathfrak{A})$. В силу замкнутости спектра вверх, существует представление $\mathfrak{F}$ поля $\mathfrak{K}$ такое, что $\deg(\mathfrak{F}) = \deg(\mathfrak{A})$. Следовательно $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}) \subseteq \mathrm{DgSp}(\mathfrak{K})$. □

Предложение 4.6.2. *Пусть поле $\mathfrak{K}$ вычислимо представимо, $\mathbf{d}$ — произвольная тьюрингова степень. Тогда* $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{K})$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{K}$ вычислимо представимо, плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ тоже вычислимо представима.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — вычислимые представления $\mathfrak{K}$, которые не являются $\mathbf{d}$-вычислимо изоморфными. Обозначим через $\overline{E}$ стандартный остов в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, а через $\overline{E}'$ стандартный остов в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'}$. Если бы существовал $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}},\overline{E}} \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'},\overline{E}'}$, то в силу леммы 4.5.2 отображение $g_{\mathfrak{F}'} \circ f \circ g_{\mathfrak{F}}^{-1}$ было бы $\mathbf{d}$-вычислимым изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{F}'$. Следовательно, поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}},\overline{E}}$ и $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'},\overline{E}'}$ не являются $\mathbf{d}$-вычислимо изоморфными.

Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — вычислимые представления $\mathfrak{K}$, существуют изоморфизмы $\beta : \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}$ и $\beta' : \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}'$. Определим естественные изоморфизмы $\alpha : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ и $\alpha' : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'}$, положив

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\langle e_1 \rangle) = c^4(1,1,0,0),\\
&\alpha(\langle xe_1 + e_2 \rangle) = c^4(1, \beta(x), 1, 0), \text{ где } x \in \mathfrak{K},\\
&\alpha(\langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle) = c^4(1, \beta(x), \beta(y), 1), \text{ где } x, y \in \mathfrak{K},\\
&\alpha(\langle e_3^\top \rangle) = c^4(2,0,0,1),\\
&\alpha(\langle e_2^\top + ze_3^\top \rangle) = c^4(2,0,1,\beta(z)), \text{ где } z \in \mathfrak{K},\\
&\alpha(\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top \rangle) = c^4(2,1,\beta(y),\beta(z)), \text{ где } y, z \in \mathfrak{K}.
\end{aligned}
$$

Отображение α' определяется аналогично с заменой β на β'. Заметим, что изоморфизм α отображает стандартный остов $\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ в остов $\overline{E}$, а изоморфизм α' — в остов $\overline{E}'$.

Допустим, существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'}$. Тогда по лемме 4.5.6 для изоморфизма f и определенных выше изоморфизмов α и α' найдется автоморфизм $g : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'}$ такой, что $(g{\circ}f){\restriction}D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E})$ является $\mathbf{d}$-вычислимым изоморфизмом $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}},\overline{E}}$ на $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'},\overline{E}'}$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}'}$ не являются $\mathbf{d}$-вычислимо изоморфными. Таким образом $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{K}) \leqslant \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}})$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — вычислимые представления $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, не являющиеся $\mathbf{d}$-вычислимо изоморфными. Выберем произвольные остовы $\overline{D}$ и $\overline{D}'$ в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ соответственно. Тогда по лемме 4.5.3 плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}',\overline{D}'}}$ не являются $\mathbf{d}$-вычислимо изоморфными. Отсюда, в силу леммы 4.5.1, заключаем, что поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ и $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}',\overline{D}'}$ тоже не являются $\mathbf{d}$-вычислимо изоморфными. Таким образом $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}) \leqslant \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{K})$. □

Предложение 4.6.3. *Пусть поле $\mathfrak{K}$ вычислимо представимо, и S — подмножество $|\mathfrak{K}|$. Тогда существует подмножество $U \subseteq |\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}|$ такое, что $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{K}}(S)$.*

Доказательство. Пусть $S \subseteq |\mathfrak{K}|$, и $\overline{e} = \langle\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_3\rangle, \langle e_1+e_2+e_3\rangle\rangle$ — стандартный остов в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$. Определим на множестве $|\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}|$ отношение

$$U = \{\langle se_1 + e_2\rangle \mid s \in S\} \subseteq D(\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}, \overline{e}).$$

Если $\beta : \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}$ — вычислимое представление поля $\mathfrak{K}$, то определим естественный изоморфизм $\alpha : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ так же как это было сделано в доказательстве предложения 4.6.2. Заметим, что $\alpha(U) = g_{\mathfrak{F}}^{-1} \circ \beta(S)$. Поскольку $g_{\mathfrak{F}}$ вычислимо, $\deg(\beta(S)) = \deg(\alpha(U)) \in \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}}(U)$. Таким образом $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{K}}(S) \subseteq \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}}(U)$.

Пусть теперь $k : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{A}$ — вычислимое представление $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$. Определим остов $\overline{D} = k(\overline{e})$. Докажем, что существует изоморфизм $m : \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ такой, что $S = m^{-1} \circ k(U)$. Действительно, пусть $\mathfrak{F}$, β и α такие же как выше. Тогда $S = \beta^{-1} \circ g_{\mathfrak{F}} \circ \alpha(U)$. Положим $m = k \circ \alpha^{-1} \circ g_{\mathfrak{F}}^{-1} \circ \beta$. Отображение m действует по следующей схеме

$$\mathfrak{K} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{F} \xrightarrow{g_{\mathfrak{F}}^{-1}} \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}},\overline{E}} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \mathfrak{F}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}},\overline{e}} \xrightarrow{k} \mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}.$$

Следовательно, отображение $m : \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ является изоморфизмом, и справедливы следующие тождества

$$m^{-1} \circ k(U) = \beta^{-1} \circ g_{\mathfrak{F}} \circ \alpha \circ k^{-1} \circ k(U) = \beta^{-1} \circ g_{\mathfrak{F}} \circ \alpha(U) = S.$$

Отсюда следует, что $\deg(k(U)) = \deg(m(S)) \in \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{K}}(S)$. Таким образом, справедливо включение $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}}(U) \subseteq \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{K}}(S)$. □

Предложение 4.6.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимое поле. Тогда имеет место тождество* $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{F}) = \mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}})$.

Доказательство. Поскольку поле $\mathfrak{F}$ вычислимо, плоскость $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ тоже вычислима.

Пусть $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ — нетривиальный автоморфизм. По лемме 4.5.1 существует $\deg(f)$-вычислимый автоморфизм $g : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ такой, что $g{\restriction}D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}) = g_{\mathfrak{F}}^{-1} \circ f \circ g_{\mathfrak{F}}$.

Имеет место эквивалентность

$$\langle u, v\rangle \in g \Longleftrightarrow \exists i\big((i = 1 \vee i = 2) \,\&\, u = c^4(i, x, y, z) \,\&\, v = c^4(i, x', y', z') \,\&$$
$$\langle x, x'\rangle \in f \,\&\, \langle y, y'\rangle \in f \,\&\, \langle z, z'\rangle \in f\big),$$

откуда заключаем, что $\deg(g) \leqslant \deg(f)$. С другой стороны, справедлива эквивалентность

$$\langle x, y\rangle \in f \Longleftrightarrow \langle g_{\mathfrak{F}}^{-1}(x), g_{\mathfrak{F}}^{-1}(y)\rangle \in g.$$

Следовательно $\deg(f) \leqslant \deg(g)$, и значит $\deg(f) = \deg(g)$. Кроме этого, если $g = \mathrm{id}$, то $f = g_{\mathfrak{F}} \circ g_{\mathfrak{F}}^{-1} = \mathrm{id}$. Таким образом, g — нетривиальный и $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{F}) \subseteq \mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}})$.

Пусть $g : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ — нетривиальный автоморфизм. По лемме 4.5.6 существует вычислимый автоморфизм $h : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ такой, что $k = (h \circ g)\restriction D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E})$ является $\deg(g)$-вычислимым автоморфизмом $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}}$, где $\overline{E}$ — стандартный остов в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, и при этом $h \circ g(\overline{E}) = \overline{E}$.

Определим автоморфизм $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, положив $f = g_{\mathfrak{F}} \circ k \circ g_{\mathfrak{F}}^{-1}$. Так как $g_{\mathfrak{F}}$ вычислимо, то $\deg(f) \leqslant \deg(g)$. Поскольку $k = g_{\mathfrak{F}}^{-1} \circ f \circ g_{\mathfrak{F}}$, заключаем, что k является $\deg(f)$-вычислимым автоморфизмом.

Докажем, что автоморфизм $h \circ g : \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \to \mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ является $\deg(k)$-вычислимым. Напомним, что любой элемент $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ представим единственным образом в одном из следующих шести видов:

(а) $c^4(1,1,0,0)$,

(б) $c^4(1,x,1,0)$, где $x \in \mathfrak{F}$,

(в) $c^4(1,x,y,1)$, где $x, y \in \mathfrak{F}$,

(г) $c^4(2,0,0,1)$,

(д) $c^4(2,0,1,z)$, где $z \in \mathfrak{F}$,

(е) $c^4(2,1,y,z)$, где $y, z \in \mathfrak{F}$.

Достаточно показать, что в каждом из случаев (а)–(е) значение $h \circ g(u)$ можно вычислить с помощью некоторых вычислимых функций и функции k.

(а) Если $u = c^4(1,1,0,0) = E_1$, то очевидно $h \circ g(u) = u$.

(б) Если $u = c^4(1,x,1,0)$, то $u \in D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E})$, и следовательно $h \circ g(u) = k(u)$.

(в) Если $u = c^4(1,x,y,1)$, то для $v = c^4(1,x,1,0)$ и $w = c^4(1,y,1,0)$ имеет место

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Psi_{\text{в}}(u, v, w, \overline{E}),$$

где $\Psi_{\text{в}}$ — формула из доказательства леммы 4.5.3. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Psi_{\text{в}}(h \circ g(u), h \circ g(v), h \circ g(w), h \circ g(\overline{E})).$$

Следовательно, в силу того, что $h \circ g(\overline{E}) = \overline{E}$ и $(h \circ g)\restriction D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}, \overline{E}) = k$, получаем

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Psi_{\text{в}}(h \circ g(u), k(v), k(w), \overline{E}).$$

Ясно, что значения v и w вычисляются эффективно по u. Тогда значение $h \circ g(u)$ находится следующим образом

$$h \circ g(u) = c^4\big(1, c_2^4(k(v)), c_2^4(k(w)), 1\big),$$

где c_2^4 — канторовская функция со свойством $c_2^4(c^4(n_1, n_2, n_3, n_4)) = n_2$.

(г) Если $u = c^4(2,0,0,1)$, то $u = E_1 \cdot E_2$ в плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, так как $h \circ g$ — автоморфизм $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$, получаем $h \circ g(u) = h \circ g(E_1 \cdot E_2) = E_1 \cdot E_2 = u$.

(д) Если $u = c^4(2,0,1,z)$, то положив $v = c^4(1,-z,1,0)$, мы получим $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Psi_{\text{д}}(u, v, \overline{E})$, где $\Psi_{\text{д}}$ — формула из доказательства леммы 4.5.3. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Psi_{\text{д}}(h \circ g(u), h \circ g(v), h \circ g(\overline{E})),$$

Откуда в свою очередь получаем

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}} \models \Psi_{\text{д}}(h \circ g(u), k(v), \overline{E}).$$

Тогда значение $h \circ g(u)$ находится следующим образом

$$h \circ g(u) = c^4\big(2, 0, 1, -c_2^4(k(v))\big).$$

(е) Данный случай рассматривается аналогично с использованием формулы Ψ_{e} из доказательства леммы 4.5.3.

Итак, $h \circ g$ является $\deg(k)$-вычислимым. Отсюда заключаем, что

$$\deg(g) = \deg(h \circ g) \leqslant \deg(k) \leqslant \deg(f).$$

Следовательно $\deg(f) = \deg(g)$. Кроме этого, если $f = \mathrm{id}$, то $k = \mathrm{id}$, и из рассуждений в пунктах (а)–(е) следует, что $g = \mathrm{id}$, что невозможно. Значит f — нетривиальный. Таким образом $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}) \subseteq \mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{F})$. □

Теорема 4.6.5. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) Для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры $\mathfrak{M}$ существует паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$.

(2) Для любой вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ существует вычислимо представимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{A}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ *для всех степеней* $\mathbf{d}$.

(3) Для любой вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ и любого отношения $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ существуют вычислимо представимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ и отношение $U \subseteq |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$.

(4) Для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ существует вычислимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{A}) = \mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Следует из предложений 4.6.1–4.6.4 и аналогичной теоремы для полей, доказанной в [63]. □

Из пункта (2) доказанной теоремы получаем следующие следствия.

Следствие 4.6.6. *Для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ существует вычислимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что* $\mathrm{CatSp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{CatSp}(\mathfrak{M})$.

Следствие 4.6.7. *Для любого n такого, что $1 \leqslant n \leqslant \omega$, существует вычислимая паппова проективная плоскость, вычислимая размерность которой равна n.*

Глава 5. Сложность алгоритмических проблем в классах проективных плоскостей

Настоящая глава посвящена получению точных оценок сложности некоторых естественных алгоритмических проблем в определённых классах вычислимых проективных плоскостей. Алгоритмические проблемы, сложность которых мы оцениваем, — это проблема изоморфизма $E(K)$, проблема вложимости $Em(K)$ и проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$. Классы проективных плоскостей, в которых мы оцениваем указанные выше проблемы, — это папповы плоскости, дезарговы плоскости, свободные плоскости конечного ранга, произвольные проективные плоскости.

В § 5.1 мы доказываем, что в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема изоморфизма достигает максимальной сложности, т.е. является m-полным Σ^1_1-множеством. Для получения этой оценки мы переносим в класс папповых проективных плоскостей доказанный в [37] результат о том, что проблема изоморфизма полей является m-полным Σ^1_1-множеством.

Основная цель следующих двух параграфов состоит в получении точной оценки сложности проблемы изоморфизма свободных проективных плоскостей конечного ранга. Для этого мы сначала в § 5.2 построим серию специальных изоморфных вложения конечных подмоделей $\mathfrak{A}$ свободной плоскости $\mathfrak{F}_n$ в свободную плоскость $\mathfrak{F}_m$, где $m < n$. Затем в § 5.3 мы установим, что проблема изоморфизма в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ^0_3-множеством внутри класса.

В § 5.4 исследуется проблема вложимости для тех же классов проективных плоскостей, для которых в предыдущих параграфах были получены оценки сложности проблемы изоморфизма. Доказывается, что для классов папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема вложимости имеет такую же сложность как и проблема изоморфизма, т.е. является m-полным Σ^1_1-множеством. Вместе с тем проблема вложимости в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга вычислима внутри класса. Таким образом, в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга сложность проблемы вложимости меньше, чем сложность проблемы изоморфизма.

Наконец, в § 5.5 мы доказываем, что проблема вычислимой категоричности является m-полным Π^1_1-множеством в следующих классах моделей: папповы плоскости, дезарговы плоскости, произвольные проективные плоскости. Для доказательства данного результата мы используем полноту класса папповых проективных плоскостей относительно вычислимых размерностей (см. предыдущую главу), а также результаты работ [42, 52, 63].

§ 5.1. Сложность проблемы изоморфизма папповых плоскостей

В данном параграфе мы исследуем сложность проблемы изоморфизма

$$E(K) = \{\langle a, b\rangle \in I(K)^2 \mid \mathfrak{M}_a \cong \mathfrak{M}_b\}$$

для следующих классов K: папповы проективные плоскости, дезарговы проективные плоскости, произвольные проективные плоскости. (Здесь через $\mathfrak{M}_e$ обозначена вычислимая модель сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P^3 \rangle$ с вычислимым индексом e.)

Напомним, что в общем случае, если индексное множество $I(K)$ класса структур K гиперарифметическое, то множество $E(K)$ является Σ_1^1-множеством. Во введении были перечислены примеры классов структур, в которых проблема изоморфизма достигает максимальной сложности, т.е. $E(K)$ оказывается m-полным Σ_1^1-множеством. В частности, проблема изоморфизма является m-полным Σ_1^1-множеством в классе полей фиксированной характеристики и в классе вещественно замкнутых полей [37].

Обозначим через K_F класс всех полей. Из доказательства результатов работы [37] видно, что $E(K_F)$ является m-полным Σ_1^1-множеством внутри класса K_F. Мы будем использовать этот факт для доказательства основного результата настоящего параграфа.

Теорема 5.1.1. *Проблема изоморфизма $E(K)$ является m-полным Σ_1^1-множеством для следующих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости,

(2) дезарговы проективные плоскости,

(3) все проективные плоскости.

Доказательство. Для оценки сложности множеств $I(K)$ для классов K из пунктов (1)–(3) заметим, что утверждение о том, что e является индексом некоторой вычислимой модели сигнатуры σ, записывается Π_2^0-формулой. Аксиомы проективных плоскостей можно записать одним Π_2^0-предложением сигнатуры σ. Условие Паппа и условие Дезарга, которые выделяют в классе всех проективных плоскостей соответственно подклассы папповых и дезарговых плоскостей, выражаются Π_2^0-предложениями. Таким образом, во всех трёх случаях $I(K)$ является Π_2^0-множеством, и значит проблема изоморфизма для каждого класса из пунктов (1)–(3) является Σ_1^1-множеством.

Обозначим через K_{PP} — класс всех папповых проективных плоскостей. Мы докажем, что $E(K_{PP})$ является m-полным Σ_1^1-множеством. Для этого достаточно показать, что для любого множества $S \in \Sigma_1^1$ существует вычислимая функция $f : \omega \longrightarrow I(K_{PP}) \times I(K_{PP})$ такая, что для любого $n \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$n \in S \Longleftrightarrow f(n) \in E(K_{PP}).$$

Отсюда будет вытекать справедливость утверждения (1). Более того, поскольку значениями функции f являются пары вычислимых индексов папповых проективных плоскостей, отсюда будет следовать и справедливость утверждений (2) и (3).

В [37] установлено, что $E(K_F)$ является m-полным Σ_1^1-множеством. Следовательно, для произвольного Σ_1^1-множества S существует вычислимая функция h такая, что для любого $n \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$n \in S \Longleftrightarrow h(n) \in E(K_F),$$

причём из доказательства данного результата видно, что вычислимая функция h имеет вид $h : \omega \longrightarrow I(K_F) \times I(K_F)$. Следовательно, найдутся вычислимые функции h_1 и h_2 такие, что $h_1 : \omega \to I(K_F)$, $h_2 : \omega \to I(K_F)$ и $h(n) = \langle h_1(n), h_2(n)\rangle$.

Для каждого натурального n и обозначим через $\mathfrak{K}_n^1$ и $\mathfrak{K}_n^2$ вычислимые поля с вычислимыми индексами $h_1(n)$ и $h_2(n)$ соответственно. В частности, $n \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}_n^1 \cong \mathfrak{K}_n^2$.

Рассмотрим для каждого $n \in \omega$ папповы проективные плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n^1}$ и $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n^2}$, определённые координатными полями $\mathfrak{K}_n^1$ и $\mathfrak{K}_n^2$ соответственно. В силу предложения 2.3.1 существуют вычислимые представления $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}$ для плоскостей $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n^1}$ и $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n^2}$ соответственно. Конструкция из доказательства предложения 2.3.1 равномерно эффективным образом зависит от индекса ассоциативного тела (поля), поэтому существует пара частично вычислимых функций $g_1 : \mathrm{range}(h_1) \longrightarrow I(K_{PP})$ и $g_2 : \mathrm{range}(h_2) \longrightarrow I(K_{PP})$ таких, что $g_i(h_i(n))$ является вычислимым индексом плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^i}$, $i \in \{1, 2\}$, $n \in \omega$.

Докажем, что вычислимая функция $f(n) = \langle g_1(h_1(n)), g_2(h_2(n))\rangle$ является искомой сводящей функцией, т.е. для каждого $n \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$\mathfrak{K}_n^1 \cong \mathfrak{K}_n^2 \Longleftrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1} \cong \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}.$$

Если поля $\mathfrak{K}_n^1$ и $\mathfrak{K}_n^2$ изоморфны, то очевидно проективные плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}$ тоже изоморфны.

С другой стороны, если $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1} \cong \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}$, то существует изоморфизм $\psi : \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}$. Зафиксируем остов $\overline{a} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$ в проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}$. Тогда упорядоченная четвёрка $\overline{b} = \langle \psi(a_1), \psi(a_2), \psi(a_3), \psi(a_4)\rangle$ является остовом в проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}$.

Используя формулы $\Phi_1, \mathcal{X}, \Theta$ из § 2.2, определим в проективных плоскостях $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}$ отношения

$$\begin{aligned}
&D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}, \overline{a}) = \{u \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1} \models \Phi_1(u, \overline{a})\},\\
&P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}, \overline{a}) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{a})\},\\
&P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}, \overline{a}) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1} \models \Theta(u, v, w, \overline{a})\},\\
&D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}, \overline{b}) = \{u \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2} \models \Phi_1(u, \overline{b})\},\\
&P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}, \overline{b}) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{b})\},\\
&P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}, \overline{b}) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2} \models \Theta(u, v, w, \overline{b})\}.
\end{aligned}$$

Тогда алгебраическая система $\mathfrak{K}_n^3 = \langle D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}, \overline{a}), P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}, \overline{a}), P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}, \overline{a})\rangle$ является полем, изоморфным (в предикатном языке) координатному полю плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}$, а значит изоморфным полю $\mathfrak{K}_n^1$. По тем же причинам алгебраическая система $\mathfrak{K}_n^4 = \langle D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}, \overline{b}), P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}, \overline{b}), P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^2}, \overline{b})\rangle$ является полем, изоморфным полю $\mathfrak{K}_n^2$.

Сужение отображения ψ на $D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n^1}, \overline{a})$ осуществляет изоморфизм поля $\mathfrak{K}_n^3$ на поле $\mathfrak{K}_n^4$ (в предикатном языке). Следовательно, поля $\mathfrak{K}_n^1$ и $\mathfrak{K}_n^2$ изоморфны. □

В заключение параграфа отметим, что А.К. Войтовым в работе [6] были получены следующие результаты:

Теорема 5.1.2 (А.К. Войтов [6]). *Пусть K — любой из следующих классов:*

(1) класс всех папповых проективных плоскостей,

(2) класс всех дезарговых проективных плоскостей,

(3) класс всех проективных плоскостей.

Тогда индексное множество $I(K)$ является m-полным Π^0_2-множеством.

Теорема 5.1.3 (А.К. Войтов [6]). *Пусть $\alpha > 1$ — произвольный вычислимый ординал, а K — любой из следующих классов моделей:*

(1) класс всех папповых проективных плоскостей,

(2) класс всех дезарговых проективных плоскостей,

(3) класс всех проективных плоскостей.

Тогда проблема Δ^0_α-изоморфизма в классе K является m-полным $\Sigma^0_{\alpha+2}$-множеством.

§ 5.2. Вложения конечных подмоделей свободной плоскости $\mathfrak{F}_n$

Рассмотрим теперь класс всех свободных проективных плоскостей конечного ранга. Напомним, что проективная плоскость $\mathfrak{F}_n$, где $n \in \omega$, $n \geqslant 2$, порождается стандартной конфигурацией $\langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ ранга $n+6$, где $A = \{c, b_0, b_1, a_0, \dots, a_{n-1}\}$, $A^0 = \{b_0, b_1, a_0, \dots, a_{n-1}\}$, ${}^0A = \{c\}$, $I = \{\langle a_i, c\rangle, \langle c, a_i\rangle \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$.

Будем отождествлять $\mathfrak{F}_n$ с её вычислимым представлением, построенным с помощью конструкции Ширшова в следствии 2.1.2. Отметим, что данные вычислимые представления рассматриваются как модели сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P^3\rangle$ и строятся равномерно по n.

Таким образом, любой элемент $w \in \mathfrak{F}_n$ является правильным словом относительно стандартной конфигурации ранга $n+6$, при этом по слову w можно эффективно найти все его подслова. Напомним также, что на элементах стандартной конфигурации задан вычислимый строгий полный порядок

$$c \prec b_0 \prec b_1 \prec a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_{n-1},$$

который естественным образом продолжается до вычислимого строгого полного порядка $\prec$ на множестве $W(\{c, b_0, b_1, a_0, \dots, a_{n-1}\})$, состоящем из всех неассоциативных слов над алфавитом $\{c, b_0, b_1, a_0, \dots, a_{n-1}\}$.

Мы также можем считать, что $\mathfrak{F}_n$ является подмоделью в $\mathfrak{F}_m$ для любого натурального $m > n$. Для дальнейших целей нам потребуются специальные изоморфные вложения конечных подмоделей $\mathfrak{A}$ свободной плоскости $\mathfrak{F}_n$ в свободную плоскость $\mathfrak{F}_m$, где $m < n$. В данном параграфе мы приведём эффективный способ построения таких вложений по заданным $\mathfrak{A}$, n и m.

Определим следующую последовательность $\{d_i\}_{i\in\omega}$ неассоциативных слов над алфавитом $\{c, b_0, b_1, a_0, a_1\}$:

$$d_0 = \big[\big((a_1b_1)(a_0b_0)\big)\big((a_1b_0)(a_0b_1)\big)\big]c,$$
$$d_{i+1} = \big[\big((d_ib_1)(a_0b_0)\big)\big((d_ib_0)(a_0b_1)\big)\big]c.$$

Нетрудно убедиться непосредственно, что для любого $i \in \omega$ слово d_i является правильным. Введём также обозначения $e_0 = (a_1b_1)(a_0b_0)$, $f_0 = (a_1b_0)(a_0b_1)$, $e_{i+1} = (d_ib_1)(a_0b_0)$, $f_{i+1} = (d_ib_0)(a_0b_1)$. В частности, для всех $i \in \omega$ имеем $d_i = (e_if_i)c$.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная подмодель модели $\mathfrak{F}_{n+1}$, где $n \geqslant 2$, и пусть i — натуральное число такие, что выполняются условия:

(а) Модель $\mathfrak{A}$ замкнута относительно взятия подслов в $\mathfrak{F}_{n+1}$, т.е. для любых $w \in \mathfrak{A}$ и $u \in \mathfrak{F}_{n+1}$ из того, что u — подслово в w, следует, что $u \in \mathfrak{A}$;

(б) $e_i \notin \mathfrak{A}$ и $f_i \notin \mathfrak{A}$.

Определим отображение $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow W(\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}\})$ по следующей схеме

$$\varphi(w) = \begin{cases} w, & \text{если } w \in \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}\}, \\ d_i, & \text{если } w = a_n, \\ \varphi(w_1)\varphi(w_2), & \text{если } w = w_1w_2 \text{ и } \varphi(w_1) \succ \varphi(w_2), \\ \varphi(w_2)\varphi(w_1), & \text{если } w = w_1w_2 \text{ и } \varphi(w_1) \prec \varphi(w_2), \end{cases}$$

для каждого правильного слова $w \in \mathfrak{A}$. (Здесь запись $\varphi(w_1)\varphi(w_2)$ следует понимать как конкатенацию слов $\varphi(w_1)$ и $\varphi(w_2)$.)

Заметим, что из условий (а) и (б) вытекает, что для любого $w \in \mathfrak{A}$ имеет место: $\varphi(w) \neq e_if_i$, $\varphi(w) \neq e_i$, $\varphi(w) \neq f_i$.

Доказательства следующих двух лемм во многом повторяют рассуждения из леммы 3.2.1 и леммы 3.2.2.

Лемма 5.2.1. *Справедливы следующие два утверждения:*

(1) Для любого $w \in \mathfrak{A}$ слово $\varphi(w)$ является правильным.

(2) Для любых $u, v \in \mathfrak{A}$ если $u \neq v$, то $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Доказательство. Будем доказывать утверждения (1) и (2) одновременной индукцией по длине слова. Для слов длины 1 справедливость обоих утверждений очевидно следует из определения φ.

Допустим, уже доказано, что для всех w таких, что $|w| < l$, слово $\varphi(w)$ — правильное, и для любых u, v таких, что $|u| < l$ и $|v| < l$, выполняется $(u \neq v \to \varphi(u) \neq \varphi(v))$.

Рассмотрим произвольное слово $w \in \mathfrak{A}$ такое, что $|w| = l > 1$, и докажем, что оно правильное, т.е. для него выполняются условия (1)–(7) из конструкции Ширшова (см. § 2.1). Разберём каждое из этих условий.

(1) Так как $|w| > 1$, то $w = w_1w_2$ для некоторых слов w_1, w_2, причем в силу условия (а) имеем $w_1, w_2 \in \mathfrak{A}$. Следовательно, $\varphi(w) = \varphi(w_1)\varphi(w_2)$ или $\varphi(w) = \varphi(w_2)\varphi(w_1)$. Кроме этого, по индукции $\varphi(w_1)$ и $\varphi(w_2)$ — правильные. Таким образом, условие (1) выполнено.

(2) Допустим, существует u такое, что $\langle u, \varphi(w_1)\rangle \in I$ и $\langle u, \varphi(w_2)\rangle \in I$. Следовательно, $\varphi(w_1)$, $\varphi(w_2)$ являются буквами. Последнее возможно лишь в случае $\varphi(w_1) = w_1$, $\varphi(w_2) = w_2$. Отсюда заключаем, что $\langle u, w_1\rangle \in I$ и $\langle u, w_1\rangle \in I$, что противоречит правильности слова w.

(3) Допустим, $\varphi(w_1) = w_3'w_4'$ и $(\langle w_3', \varphi(w_2)\rangle \in I$ или $\langle w_4', \varphi(w_2)\rangle \in I)$. Отсюда, в частности, заключаем, что $\varphi(w_2)$ — буква, и хотя бы одно из слов w_3' или w_4' является буквой. Далее возможны два случая:

(3.1) Пусть $w_1 = a_n$. Следовательно, $\varphi(w_1) = (e_if_i)c$, и значит $w_3' = e_if_i$, $w_4' = c$. Отсюда получаем, что $\varphi(w_2) = a_s$ для некоторого $s \leqslant n-1$. Таким образом, $w_2 = a_s$ и слово $w = a_na_s$ — неправильное.

(3.2) Пусть $w_1 \neq a_n$. Ясно, что в этом случае w_1 не может быть буквой. Следовательно, $w_1{=}w_3w_4$ для некоторых w_3, w_4. Отсюда заключаем, что $\varphi(w_1) = \overline{\varphi(w_3)\varphi(w_4)}$ и $\{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\}$ $= \{w_3', w_4'\}$. Таким образом, $\varphi(w_3)$ или $\varphi(w_4)$ является буквой, откуда заключаем, что $\varphi(w_3) = w_3$ или $\varphi(w_4) = w_4$. Кроме этого, $\varphi(w_2) = w_2$. Следовательно, $\langle w_3, w_2\rangle \in I$ или $\langle w_4, w_2\rangle \in I$, что противоречит правильности слова w.

(4) Аналогично рассуждениям из пункта (3) доказывается, что если $\varphi(w_2) = w_3'w_4'$, то $\langle w_3', \varphi(w_1)\rangle \notin I$ и $\langle w_4', \varphi(w_1)\rangle \notin I$.

(5) Допустим, $\varphi(w) = (w_3'w_4')(w_5'w_6')$ и существует $w' \in \{w_3', w_4'\} \cap \{w_5', w_6'\}$. Так как $w = w_1w_2$, то $\{\varphi(w_1), \varphi(w_2)\} = \{w_3'w_4', w_5'w_6'\}$. Далее возможны четыре случая:

(5.1) Пусть $|w_1| = |w_2| = 1$. Следовательно, $w = a_sb_i$ или $w = b_1b_0$. В любом случае получаем $\varphi(w_2) = w_2$, что противоречит условию $|\varphi(w_2)| \geqslant 2$. Этот случай невозможен.

(5.2) Пусть $|w_1| = 1, |w_2| > 1$. Следовательно, $w_1 = a_n$, $w_2 = w_5w_6$ для некоторых w_5, w_6. Отсюда следует, что $\varphi(w_1) = (e_if_i)c$, $\varphi(w_2) = \overline{\varphi(w_5)\varphi(w_6)}$. Поскольку $w' \in \{e_if_i, c\} \cap \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$, то возможны два подслучая: (а) $c{\in}\{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$, или (б) $e_if_i{\in}\{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Если выполнено (а), то $c = \varphi(w_6)$, и значит $w_6 = c$. Тогда $w = a_n(w_5c)$ будет неправильным словом. Если же выполнено (б), то $\varphi(w_5) = e_if_i$ или $\varphi(w_6) = e_if_i$, что невозможно для нашего отображения φ.

(5.3) Случай $|w_1| > 1, |w_2| = 1$ разбирается аналогично предыдущему.

(5.4) Пусть $|w_1| > 1, |w_2| > 1$. Следовательно, $w_1{=}w_3w_4$, $w_2{=}w_5w_6$ для некоторых слов $w_3, w_4, w_5, w_6 \in \mathfrak{A}$. Отсюда следует, что $w' \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\} \cap \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Таким образом, получаем: $\varphi(w_3) = \varphi(w_5)$, или $\varphi(w_3) = \varphi(w_6)$, или $\varphi(w_4) = \varphi(w_5)$, или $\varphi(w_4) = \varphi(w_6)$. Рассмотрим, например, вариант $\varphi(w_3) = \varphi(w_5)$. Из того, что $|w_3| < l$ и $|w_5| < l$, в силу индукционного предположения, заключаем, что $w_3 = w_5$. Но тогда $\{w_3, w_4\} \cap \{w_5, w_6\} \neq \varnothing$, что противоречит правильности слова w.

(6) Допустим, $\varphi(w) = ((w_3'w_4')w_5')w_6'$ или $\varphi(w) = (w_5'(w_3'w_4'))w_6'$, и при этом $w_6' \in \{w_3', w_4'\}$. Из определения φ следует, что тогда $w \notin \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, а из вида слова d_i вытекает, что $w \neq a_n$. Следовательно, найдутся слова w_1 и w_2 такие, что $w = w_1w_2$. Для определённости будем считать, что $\varphi(w_1) = \overline{(w_3'w_4')w_5'}$ и $\varphi(w_2) = w_6'$. Другой вариант, т.е. когда $\varphi(w_1) = w_6'$ и $\varphi(w_2) = \overline{(w_3'w_4')w_5'}$, рассматривается аналогично. Далее возможны три случая:

(6.1) Пусть $|w_1| = 1$. Поскольку $|\varphi(w_1)| \geqslant 3$, заключаем, что $w_1 = a_n$. Следовательно, $\varphi(w) = ((e_if_i)c)\varphi(w_2)$, и значит $\varphi(w_2) = e_i$ или $\varphi(w_2) = f_i$, что невозможно для отображения

φ.

(6.2) Пусть $|w_1| = 2$. Так как $|\varphi(w_1)| \geqslant 3$, то w_1 обязано иметь вид $w_1 = a_n b_s$ для некоторого $s \in \{0, 1\}$. Следовательно, $\varphi(w_1) = ((e_i f_i)c)b_s$ и значит $\varphi(w_2) \in \{e_i f_i, c\}$. Вариант $\varphi(w_2) = e_i f_i$ невозможен для отображения φ. Вариант $\varphi(w_2) = c$ также исключён, так как иначе $w_2 = c$ и слово $w = (a_n b_s)c$ окажется неправильным.

(6.3) Пусть $|w_1| \geqslant 3$. Следовательно, $w_1 = (w_3 w_4)w_5$ или $w_1 = w_5(w_3 w_4)$ для некоторых $w_3, w_4, w_5 \in \mathfrak{A}$. Далее возможны два варината: (а) $\varphi(w_3 w_4) = w_3' w_4'$, $\varphi(w_5) = w_5'$; или (б) $\varphi(w_3 w_4) = w_5'$, $\varphi(w_5) = w_3' w_4'$. Если выполнено (а), то $\varphi(w_2) \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\}$, и значит $\varphi(w_2) = \varphi(w_3)$ или $\varphi(w_2) = \varphi(w_4)$. Отсюда, в силу индукционного предположения заключаем, что $w_2 \in \{w_3, w_4\}$. Следовательно, слово $w = \overline{((w_3 w_4)w_5)}w_2$ является неправильным. Если же выполнено (б), то из условия $|\varphi(w_5)| \geqslant 2$ заключаем, что либо $w_5 = a_n$, либо $w_5 = w_7 w_8$ для некоторых $w_7, w_8 \in \mathfrak{A}$. Если $w_5 = a_n$, то $\varphi(w_5) = (e_i f_i)c$ и значит $\varphi(w_2) \in \{e_i f_i, c\}$. Поскольку $\varphi(w_2) \neq e_i f_i$, остаётся только вариант $\varphi(w_2) = c$, но тогда $w_2 = c$ и слово $w = \overline{((w_3 w_4)a_n)}c$ будет неправильным. Если же $w_5 = w_7 w_8$, то $\varphi(w_2) \in \{\varphi(w_7), \varphi(w_8)\}$. Отсюда, в силу индукционного предположения заключаем, что $w_2 \in \{w_7, w_8\}$. Следовательно, слово $w = \overline{((w_3 w_4)(w_7 w_8))}w_2$ является неправильным.

(7) Аналогично рассуждениям из пункта (6) доказывается, что если $\varphi(w) = w_6'((w_3' w_4')w_5')$ или $\varphi(w) = w_6'(w_5'(w_3' w_4'))$, то $w_6' \notin \{w_3', w_4'\}$.

Теперь докажем, что для любых слов $u, v \in \mathfrak{A}$ таких, что $|u| < l + 1$ и $|v| < l + 1$, выполняется $(u \neq v \to \varphi(u) \neq \varphi(v))$. Рассмотрим три случая:

(1) $|u| < l$, $|v| < l$. В этом случае утверждение следует из индукционного предположения.

(2) $|u| = l$, $|v| = 1$. Тогда $u = u_1 u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in \mathfrak{A}$ и $v \in \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_n\}$. Поскольку φ тождественно на элементах из $\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, то нетривиальным здесь является только случай, когда $v = a_n$. Тогда если $\varphi(u) = \varphi(v)$, то $\varphi(u_1) = e_i f_i$ или $\varphi(u_2) = e_i f_i$, что невозможно для отображения φ.

(3) $|u| = l$, $|v| > 1$. Следовательно, $u = u_1 u_2$, $v = v_1 v_2$ для некоторых u_1, u_2, v_1, v_2, причём $u_1 \succ u_2$, $v_1 \succ v_2$. Далее, если предположить, что $\varphi(u) = \varphi(v)$, то получаем два возможных подслучая: (а) $\varphi(u_1) = \varphi(v_1)$, $\varphi(u_2) = \varphi(v_2)$; или (б) $\varphi(u_1) = \varphi(v_2)$, $\varphi(u_2) = \varphi(v_1)$. Если выполнено (а), то по индукционному предположению заключаем, что $u_1 = v_1$ и $u_2 = v_2$. Таким образом, $u = v$. Если же имеет место (б), то в силу индукционнго предположения, получаем $u_1 = v_2$ и $u_2 = v_1$. Но тогда $u_1 \succ u_2 = v_1 \succ v_2 = u_1$, что противоречит определению порядка $\prec$. □

Лемма 5.2.2. *Для любых $w_1, w_2, u \in \mathfrak{A}$ утверждение $w_1 \cdot w_2 \downarrow= u$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \varphi(u)$.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть $w_1 \cdot w_2 \downarrow= u$. Следовательно, для слов w_1 и w_2 выполняется одно из пяти условий из определения операции умножения в $\mathfrak{F}_{n+1}$ (см. § 2.1). Рассмотрим каждое из этих условий.

(1) Допустим, $w_1 = a_s$ и $w_2 = a_t$ для некоторых $s, t \leqslant n$. Таким образом, $u = w_1 \cdot w_2 = c$. Тогда $\varphi(w_1) = a_s$ или $\varphi(w_1) = d_i$, а $\varphi(w_2) = a_t$ или $\varphi(w_2) = d_i$. Кроме этого, $\varphi(c) = c$.

Нетрудно убедиться непосредственно, что в любом случае $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= c$.

(2) Допустим, w_1w_2 или w_2w_1 — правильное. Так как $u = w_1 \cdot w_2 = \overline{w_1w_2}$, то $\overline{w_1w_2} \in \mathfrak{A}$ и значит определено $\varphi(\overline{w_1w_2})$. По лемме 5.2.1 слово $\varphi(\overline{w_1w_2})$ является правильным. Следовательно, $\varphi(\overline{w_1w_2}) = \overline{\varphi(w_1)\varphi(w_2)}$, откуда заключаем, что $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \overline{\varphi(w_1)\varphi(w_2)}$.

(3) Допустим, $w_1 = w_3w_4$, $w_2 = w_5w_6$ и существует $w \in \{w_3, w_4\} \cap \{w_5, w_6\}$. Тогда $u = w_1 \cdot w_2 = w$. Согласно определению φ получаем $\varphi(w_1) = \overline{\varphi(w_3)\varphi(w_4)}$ и $\varphi(w_2) = \overline{\varphi(w_5)\varphi(w_6)}$, при этом имеет место $\varphi(w) \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\} \cap \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Значит $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \varphi(w)$.

(4) Допустим, $w_1 = \overline{(\overline{w_3w_2})w_4}$. Тогда $w_1 \cdot w_2 = \overline{w_3w_2}$. Следовательно, имеем $\varphi(w_1) = \overline{(\overline{\varphi(w_3)\varphi(w_2)})\varphi(w_4)}$, и значит $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \overline{\varphi(w_3)\varphi(w_2)} = \varphi(\overline{w_3w_2})$.

(5) Допустим, $w_1 = \overline{w_3w_4}$, $\langle w_3, w_2 \rangle \in I$, и значит $w_1 \cdot w_2 = w_3$. Возможны два варианта: (а) $w_3 = c$ и $w_2 = a_s$ для некоторого $s \leqslant n$; или (б) $w_3 = a_s$ и $w_2 = c$ для некоторого $s \leqslant n$.

Пусть выполняется (а). Если $s \leqslant n-1$, то $\varphi(a_s) = a_s$, и тогда $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = (\varphi(w_4)c) \cdot a_s = c = \varphi(c)$. Если же $s = n$, то $\varphi(a_s) = (e_if_i)c$ и значит $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = (\varphi(w_4)c) \cdot ((e_if_i)c) = c = \varphi(c)$.

Пусть выполняется (б). Если $s \leqslant n-1$, то $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = (\overline{a_s\varphi(w_4)}) \cdot c = a_s = \varphi(a_s)$. Если же $s = n$, то $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = (\overline{((e_if_i)c)\varphi(w_4)}) \cdot c = (e_if_i)c = \varphi(a_s)$.

Теперь докажем достаточность. Пусть $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \downarrow= \varphi(u)$. Следовательно, согласно определению операции умножения в $\mathfrak{F}_n$, имеет место один из следующих пяти случаев.

(1) Допустим, $\varphi(w_1) = a_s$ и $\varphi(w_2) = a_t$ для некоторых $s, t \leqslant n-1$. Таким образом, $\varphi(u) = \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = c$. Заметим, что в этом случае $w_1 = a_s$, $w_2 = a_t$, $u = c$ и очевидно $w_1 \cdot w_2 \downarrow= c$.

(2) Допустим, $\varphi(w_1)\varphi(w_2)$ или $\varphi(w_1)\varphi(w_2)$ является правильным словом. Тогда $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = \overline{\varphi(w_1)\varphi(w_2)}$. Возможны три подслучая:

(2.1) Пусть $u \in \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Следовательно, $\varphi(u) = u$ и $|\varphi(u)| = 1$, что невозможно, поскольку $|\varphi(w_1)\varphi(w_2)| \geqslant 2$.

(2.2) Пусть $u = a_n$. Тогда $\overline{\varphi(w_1)\varphi(w_2)} = \varphi(u) = (e_if_i)c$. Отсюда заключаем, что либо $\varphi(w_1) = e_if_i$, либо $\varphi(w_2) = e_if_i$, что невозможно для отображения φ.

(2.3) Пусть $u = u_1u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in \mathfrak{A}$. Тогда $\varphi(u) = \overline{\varphi(u_1)\varphi(u_2)}$ и $\{\varphi(u_1), \varphi(u_2)\} = \{\varphi(w_1), \varphi(w_2)\}$. В силу инъективности φ имеем $\{u_1, u_2\}$=$\{w_1, w_2\}$. Отсюда следует, что одно из слов w_1w_2 или w_2w_1 является правильным и, значит, $w_1 \cdot w_2 \downarrow= \overline{w_1w_2} = u_1u_2 = u$.

(3) Допустим, $\varphi(w_1) = w'_3w'_4$, $\varphi(w_2) = w'_5w'_6$ и существует $w' \in \{w'_3, w'_4\} \cap \{w'_5, w'_6\}$. Тогда $\varphi(u) = w'$. Поскольку здесь $|\varphi(w_1)| \geqslant 2$ и $|\varphi(w_2)| \geqslant 2$, а на элементах из $\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ отображение φ тождественно, то случай, когда w_1 или w_2 принадлежит $\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ исключён. Остаются следующие три подслучая:

(3.1) Пусть $w_1 = a_n$, $w_2 = w_5w_6$ для некоторых $w_5, w_6 \in \mathfrak{A}$. Тогда $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = ((e_if_i)c) \cdot \overline{\varphi(w_5)\varphi(w_6)}$. Следовательно, $c \in \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$ или $e_if_i \in \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Поскольку условие $e_if_i \in \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$ невозможно для отображения φ, заключаем, что $c \in \{w_5, w_6\}$, причём $\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = c$. Таким образом, для $s = 5$ или $s = 6$ получаем $w_1 \cdot w_2 = a_n \cdot \overline{w_sc} = c$.

(3.2) Пусть $w_1 = w_3w_4$, $w_2 = a_n$ для некоторых $w_3, w_4 \in \mathfrak{A}$. Этот случай разбирается аналогично предыдущему.

(3.3) Пусть $w_1 = w_3w_4$, $w_2 = w_5w_6$ для некоторых $w_3, w_4, w_5, w_6 \in \mathfrak{A}$. Следовательно, $\varphi(u) \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\} \cap \{\varphi(w_5), \varphi(w_6)\}$. Отсюда, в силу инъективности φ, заключаем, что $u \in \{w_3, w_4\} \cap \{w_5, w_6\}$. Тогда $w_1 \cdot w_2 \downarrow= u$.

(4) Допустим, $\varphi(w_1) = \overline{(\overline{w_3'\varphi(w_2)})w_4'}$ для некоторых w_3' и w_4'. Тогда $\varphi(u) = \overline{w_3'\varphi(w_2)}$. Поскольку здесь $|\varphi(w_1)| \geqslant 3$, то $w_1 \notin \{c, b_0, b_1, a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Остаются следующие три подслучая:

(4.1) Пусть $w_1 = a_n$. Тогда $\varphi(w_1) = (e_if_i)c$. Следовательно, $\varphi(w_2) \in \{e_i, f_i\}$, что невозможно для отображения φ.

(4.2) Пусть $|w_1| = 2$. Следовательно, для некоторых $w_3, w_4 \in \{c, b_0, b_1, a_0, \dots, a_n\}$ имеем $w_1 = w_3w_4$. Поскольку слово w_1 — правильное, оно имеет вид $w_1 = a_pb_s$ или $w_1 = b_1b_0$. С другой стороны, $|\varphi(w_1)| \geqslant 3$, поэтому возможен лишь вид $w_1 = a_nb_s$ для некоторого $s \in \{0, 1\}$. Отсюда получаем $\varphi(w_1) = ((e_if_i)c)b_s$ и $\overline{w_3'\varphi(w_2)} = (e_if_i)c$. Следовательно, $\varphi(w_2) \in \{e_if_i, c\}$. В силу невозможности равенства $\varphi(w_2) = (e_if_i)c$, заключаем, что $\varphi(w_2) = c$. Таким образом, $w_1 \cdot w_2 \downarrow= (a_nb_s) \cdot c = a_n = u$.

(4.3) Пусть $|w_1| \geqslant 3$. Следовательно, $w_1 = \overline{(\overline{w_3w_4})w_5}$ для некоторых w_3, w_4, w_5. Тогда $\varphi(w_1) = \overline{(\overline{\varphi(w_3)\varphi(w_4)})\varphi(w_5)}$, и возможны варианты: (а) $\varphi(w_2) \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\}$, или (б) $\varphi(w_5) = \overline{w_3'\varphi(w_2)}$.

Если выполняется (а), то $\varphi(u) = \overline{\varphi(w_3)\varphi(w_4)}$, и в силу инъективности φ, заключаем, что $w_2 \in \{w_3, w_4\}$. Таким образом, $w_1 \cdot w_2 \downarrow= \overline{(\overline{w_3w_4})w_5} \cdot w_2 = \overline{w_3w_4} = u$.

Если же выполняется (б), то $\varphi(\overline{w_3w_4}) = w_4'$. Так как $|\overline{w_3'\varphi(w_2)}| \geqslant 2$, то либо $w_5 = a_n$, либо $w_5 = w_6w_7$ для некоторых слов w_6, w_7. Если $w_5 = a_n$, то $\varphi(w_5) = (e_if_i)c$, и значит $\varphi(w_2)$ обязано совпасть с c. Тогда $w_1 \cdot w_2 \downarrow= \overline{(\overline{w_3w_4})a_n} \cdot c = a_n = u$. Если же здесь $w_5 = w_6w_7$, то $\varphi(w_2) \in \{\varphi(w_6), \varphi(w_7)\}$, и значит, в силу инъективности φ, имеем $w_2 \in \{w_6, w_7\}$. Тогда $w_1 \cdot w_2 \downarrow= (\overline{(\overline{w_3w_4})(\overline{w_6w_7})}) \cdot w_2 = \overline{w_6w_7} = u$.

(5) Допустим, $\varphi(w_1) = \overline{w_3'w_4'}$, причём $\langle w_3', \varphi(w_2)\rangle \in I$. Тогда $\varphi(u) = w_3'$. Возможны два варианта: (а) $w_3' = a_s$ и $\varphi(w_2) = c$; или (б) $w_3' = c$ и $\varphi(w_2) = a_s$.

Пусть имеет место (а). Поскольку $|\overline{w_3'w_4'}| \geqslant 2$, заключаем, что $w_1 \notin \{c, b_0, b_1, a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Более того, так как слово вида $(e_if_i)c$ не может совпадать со словом вида $\overline{a_sw_4'}$, заключаем, что $w_1 \neq a_n$. Значит $|w_1| \geqslant 2$ и существует представление $w_1 = \overline{a_sw_4}$ для некоторого $w_4 \in \mathfrak{A}$. Тогда $w_1 \cdot w_2 \downarrow= (\overline{a_sw_4}) \cdot c = a_s = u$.

Пусть теперь имеет место (б). Следовательно, либо $w_1 = a_n$, либо $|w_1| \geqslant 2$. Если $w_1 = a_n$, то $w_1 \cdot w_2 = a_n \cdot a_s$ определено, поскольку $s \leqslant n$, и равно c. Если же $|w_1| \geqslant 2$, то найдётся представление $w_1 = w_3w_4$, и следовательно $c \in \{\varphi(w_3), \varphi(w_4)\}$. Отсюда, в силу инъективности φ и минимальности c относительно порядка $\prec$, заключаем, что $c = w_4$. Тогда окончательно получаем $w_1 \cdot w_2 = (w_3c) \cdot a_s = c$. $\square$

Из леммы 5.2.1 и леммы 5.2.2 следует, что определённое нами отображение φ обладает следующим свойством:

Предложение 5.2.3. *Отображение $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{F}_n$ является изоморфным вложением модели $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ в модель $\mathfrak{F}_n$ таким, что φ тождественно на элементах $\mathfrak{F}_n$.*

Заметим, что изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{F}_n$ из предложения 5.2.3 определяется эффективно по конечной модели $\mathfrak{A}$ и натуральному n. Итерируя данную эффективную конструкцию несколько раз, докажем следующее

Предложение 5.2.4. *Пусть $n > m > 1$ и $\mathfrak{A}$ — конечная подмодель модели $\mathfrak{F}_n$ такая, что $\mathfrak{A}$ замкнута относительно взятия подслов в $\mathfrak{F}_n$. Тогда существует изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{F}_m$ такое, что $\varphi \restriction \mathfrak{F}_m = \mathrm{id}$, причём отображение φ находится эффективно по n, m и $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Обозначим $k = n - m$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$. Заметим, что последовательность слов $\{d_i\}_{i\in\omega}$ вычислима, и $|d_i| \to \infty$ при $i \to \infty$. Поэтому мы можем эффективно найти $i_1 \in \omega$ такое, что $e_{i_1} \notin \mathfrak{A}_1$ и $f_{i_1} \notin \mathfrak{A}_1$. Тогда предложение 5.2.3 позволяет нам эффективно найти изоморфное вложение $\varphi_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{F}_{n-1}$ такое, что φ_1 тождественно на элементах $\mathfrak{F}_{n-1}$.

Пусть для $j < k$ уже определено изоморфное вложение $\varphi_j : \mathfrak{A}_j \to \mathfrak{F}_{n-j}$ такое, что φ_j тождественно на элементах $\mathfrak{F}_{n-j}$, при этом для определения φ_j использовано слово d_{i_j} с условием $e_{i_j} \notin \mathfrak{A}_j$, $f_{i_j} \notin \mathfrak{A}_j$.

Рассмотрим теперь $\mathrm{range}(\varphi_j) \subseteq \mathfrak{F}_{n-j}$. В силу конечности φ_j найдём эффективно наименьшую подмодель $\mathfrak{A}_{j+1}$ в $\mathfrak{F}_{n-j}$ такую, что $\mathrm{range}(\varphi_j) \subseteq \mathfrak{A}_{j+1}$ и $\mathfrak{A}_{j+1}$ замкнута относительно взятия подслов в $\mathfrak{F}_{n-j}$. Ясно, что $\mathfrak{A}_{j+1}$ конечна. Далее найдём эффективно $i_{j+1} > i_j$ такое, что $e_{i_{j+1}} \notin \mathfrak{A}_{j+1}$ и $f_{i_{j+1}} \notin \mathfrak{A}_{j+1}$. Снова используя предложение 5.2.3 найдём изоморфное вложение $\varphi_{j+1} : \mathfrak{A}_{j+1} \to \mathfrak{F}_{n-j-1}$ такое, что φ_{j+1} тождественно на элементах $\mathfrak{F}_{n-j-1}$.

Таким образом, определён набор изоморфных вложений $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Тогда их композиция $\varphi = \varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_1$ является искомым изоморфным вложением вида $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{F}_m$ с условием $\varphi \restriction \mathfrak{F}_m = \mathrm{id}$. □

§ 5.3. Сложность проблемы изоморфизма свободных плоскостей конечного ранга

Обозначим через K_{FP} класс всех свободных проективных плоскостей конечного ранга. В настоящем параграфе мы рассматриваем проблему изоморфизма в классе K_{FP}, т.е. множество

$$E(K_{FP}) = \{\langle a, b\rangle \in I(K_{FP})^2 \mid \mathfrak{M}_a \cong \mathfrak{M}_b\},$$

где через $\mathfrak{M}_e$ обозначена вычислимая модель сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0\!A, P^3\rangle$ с вычислимым индексом e.

Мы докажем, что проблема изоморфизма в классе всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ^0_3-множеством внутри класса, т.е. $E(K_{FP})$ является m-полным Δ^0_3-множеством внутри $I(K_{FP}) \times I(K_{FP})$.

Предложение 5.3.1. *Проблема изоморфизма в классе всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является Δ^0_3-множеством внутри класса.*

Доказательство. Индукцией по сложности произвольного правильного слова $w \in \mathfrak{F}_n$ определим $\exists$-формулу $\Psi_w(x, c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1})$ сигнатуры σ, содержащую в качестве параметров порождающие элементы $c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}$.

Если $w \in \{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, положим $\Psi_w(x, c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}) = (x = w)$.

Если $w = uv$ и формулы $\Psi_u(x, c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1})$ и $\Psi_v(x, c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1})$ уже определены, то положим

$$\Psi_w(x, c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}) = \exists y \exists z \big(\Psi_u(y, c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}) \,\&\, \Psi_v(z, c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}) \,\&\, P(y, z, x)\big).$$

Отметим, что для любого $x \in \mathfrak{F}_n$ справедлива эквивалентность:

$$\mathfrak{F}_n \models \Psi_w(x, c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{n-1}) \Longleftrightarrow x = w.$$

Для каждого $n \geqslant 2$ определим следующее (зависящее от n) бесконечное вычислимое Σ_3-предложение сигнатуры σ:

$$\begin{aligned}\Phi_n = \exists x_0 \ldots \exists x_{n+2} \Big(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \,\&\, x_0 \in {}^0A \,\&\, \bigwedge_{i=1}^{n+2} x_i \in A^0 \,\&\, \neg I(x_1, x_0) \,\&\, \\ \&\, \neg I(x_2, x_0) \,\&\, \bigwedge_{i=3}^{n+2} I(x_i, x_0) \,\&\, \forall y \bigvee\!\!\!\bigvee_{w \in \mathfrak{F}_n} \Psi_w(y, x_0, x_1, \ldots, x_{n+2}) \,\&\, \\ \&\, \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\substack{u, v \in \mathfrak{F}_n \\ u \neq v}} \forall y \forall z \big((\Psi_u(y, x_0, x_1, \ldots, x_{n+2}) \,\&\, \Psi_v(z, x_0, x_1, \ldots, x_{n+2})) \longrightarrow y \neq z \big) \Big),\end{aligned}$$

где $I(x, y) = \exists z P(x, z, y)$ — формула, выделяющая пары инцидентных элементов в проективной плоскости.

Для произвольной проективной плоскости $\mathfrak{A}$ справедлива эквивалентность

$$\mathfrak{A} \models \Phi_n \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{F}_n.$$

В частности, если $\mathfrak{A}$ — проективная плоскость, получаем

$$\mathfrak{A} \in K_{FP} \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \bigvee\!\!\!\bigvee_{n \geqslant 2} \Phi_n,$$

откуда следует, что $I(K_{FP})$ является Σ^0_3-множеством.

Следовательно, множество всех пар $\langle a, n \rangle$ таких, что структура $\mathfrak{M}_a$ — проективная плоскость с условием $\mathfrak{M}_a \models \Phi_n$, является Σ^0_3-множеством, и значит отображение

$$f(a) = \begin{cases} n, & \text{если } a \in I(K_{FP}) \text{ и } \mathfrak{M}_a \models \Phi_n, \\ \text{не определено}, & \text{иначе}, \end{cases}$$

является Δ^0_3-функцией (т.е. частичной вычислимой относительно $\mathbf{0}''$ функцией).

Опишем эффективную относительно $\mathbf{0}''$ процедуру, которая по индексам структур из K_{FP} определяет, существует ли между ними изоморфизм. Для произвольной пары $\langle a, b \rangle \in$

$I(K_{FP})^2$ с помощью Δ^0_3-функции f найдём $m = f(a)$ и $n = f(b)$. Следовательно, $\mathfrak{M}_a \cong \mathfrak{F}_m$ и $\mathfrak{M}_b \cong \mathfrak{F}_n$. Если $f(a) = f(b)$, то $\langle a, b\rangle \in E(K_{FP})$. Если же $f(a) \neq f(b)$, то $\langle a, b\rangle \notin E(K_{FP})$.

Таким образом, $E(K_{FP})$ является Δ^0_3-множеством внутри $I(K_{FP}) \times I(K_{FP})$. □

Теорема 5.3.2. *Проблема изоморфизма в классе всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ^0_3-множеством внутри класса.*

Доказательство. В силу предложения 5.3.1 проблема изоморфизма $E(K_{FP})$ является Δ^0_3-множеством внутри $I(K_{FP})\times I(K_{FP})$. Докажем, что $E(K_{FP})$ является m-полным Δ^0_3-множеством внутри $I(K_{FP}) \times I(K_{FP})$.

Пусть $S \in \Delta^0_3$, т.е. $S \leqslant_T \mathbf{0}''$. В силу леммы о пределе (см. [28], Глава III) существует Δ^0_2-функция $f : \omega\times\omega \to \{0, 1\}$ такая, что $\chi_S(n) = \lim_s f(n, s)$ для всех $n \in \omega$. Определим для фиксированного $n \in \omega$ две Δ^0_2-функции $g : \omega \to \omega$ и $h : \omega \to \omega$ такие, что для каждого $s \geqslant 0$ справедливы свойства:

(а) если $f(n, s) = 1$, то $g(s) = k$ и $h(s) = k$ для некоторого $k \geqslant 2$;

(б) если $f(n, s) = 0$, то $g(s) = k$ и $h(s) = k + 1$ для некоторого $k \geqslant 2$.

Определение g и h является равномерным по n и выглядит следующим образом. Если $f(n, 0) = 0$, то полагаем $g(0) = h(0) = 2$. Если же $f(n, 0) = 1$, то полагаем $g(0) = 2$, $h(0) = 3$. Предположим теперь, что $g(s)$ и $h(s)$ уже определены. Если $f(n, s+1) = f(n, s)$, то полагаем $g(s + 1) = g(s)$, $h(s + 1) = h(s)$. Если $f(n, s) = 1$ и $f(n, s + 1) = 0$, то для некоторого k имеем $g(s) = h(s) = k$. Тогда положим $g(s + 1) = k$, $h(s + 1) = k + 1$. Если же $f(n, s) = 0$ и $f(n, s + 1) = 1$, то для некоторого k имеем $g(s) = k$, $h(s) = k + 1$. В этом случае полагаем $g(s + 1) = h(s + 1) = k + 1$.

Заметим, что существуют $\lim_s g(s)$ и $\lim_s h(s)$, причём $n \in S$ тогда и только тогда, когда $\lim_s g(s) = \lim_s h(s)$. Кроме этого, функции $g(s)$ и $h(s)$ неубывающие по s, и для любого s справедливо $g(s) \geqslant 2$ и $h(s) \geqslant 2$.

Вновь используя лемму о пределе, из того, что $g \leqslant_T \mathbf{0}'$ ($h \leqslant_T \mathbf{0}'$), заключаем, что существует равномерно вычислимая последовательность $\{g_t(s)\}_{t\in\omega}$ ($\{h_t(s)\}_{t\in\omega}$) всюду определённых функций такая, что $g(s) = \lim_t g_t(s)$ ($h(s) = \lim_t h_t(s)$). Так как $g(0) = 2$ и g неубывающая, можно считать, что $g_t(0) = 2$ для любого $t \in \omega$ (иначе можно добавить значение $g(-1) = 2$ и положить $g_t(-1) = 2$ для всех $t \in \omega$).

Построим равномерно вычислимую последовательность пар $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ свободных проективных плоскостей конечных рангов такую, что если $\lim_s g(s) = k_1$ и $\lim_s h(s) = k_2$, то $\mathfrak{A}_n \cong \mathfrak{F}_{k_1}$ и $\mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{F}_{k_2}$. Тогда для любого $n \in \omega$ будет справедлива эквивалентность: $n \in S$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_n \cong \mathfrak{B}_n$.

Носителем каждой структуры $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_n$ будет ω. Построения $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}_n$ не зависят в явном виде друг от друга, поэтому опишем только построение $\mathfrak{A}_n$. Конструкция для $\mathfrak{B}_n$ описывается аналогично с использованием $h_t(s)$ вместо $g_t(s)$.

Для определения $\mathfrak{A}_n$ будем по шагам строить строго вычислимую возрастающую последовательность

$$\mathfrak{A}^0_n \subset \mathfrak{A}^1_n \subset \ldots \subset \mathfrak{A}^t_n \subset \ldots$$

конечных моделей сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P^3 \rangle$, а также строго вычислимые неубывающие последовательности

$$P_n^0 \subseteq P_n^1 \subseteq \ldots \subseteq P_n^t \subseteq \ldots,$$
$$\overline{P}_n^0 \subseteq \overline{P}_n^1 \subseteq \ldots \subseteq \overline{P}_n^t \subseteq \ldots$$

конечных 3-местных предикатов такие, что $\mathfrak{A}_n^t = \langle A_n^t, A_n^{0t}, {}^0A_n^t, P_n^t \rangle$, $P_n^t \cup \overline{P}_n^t = (A_n^t)^3$, $P_n^t \cap \overline{P}_n^t = \varnothing$ для всех $t \in \omega$.

Кроме этого, будем строить строго вычислимую последовательность $\{\varphi^t\}_{t\in\omega}$ конечных изоморфных вложений $\varphi^t : \mathfrak{A}_n^t \hookrightarrow \mathfrak{F}_{k_t}$, где $k_t \geqslant 2$ — некоторое текущее значение, которое с ростом t изменяется немонотонно. Таким образом, на каждом шаге t с каждым элементом $x \in \mathfrak{A}_n^t$ будет ассоциировано текущее правильное слово $w = \varphi^t(x)$, записанное в алфавите $\{c, b_0, b_1, a_0, \ldots, a_{k_t-1}\}$. Мы также будем требовать, чтобы $\mathrm{range}(\varphi^t)$ был замкнут относительно взятия подслов в $\mathfrak{F}_{k_t}$.

<u>Шаг 0.</u> Полагаем $A_n^0 = \{0,1,2,3,4\}$, $A_n^{00} = \{1,2,3,4\}$, ${}^0A_n^0 = \{0\}$, $P_n^0 = \{\langle 3,4,0\rangle, \langle 4,3,0\rangle\}$, $\overline{P}_n^0 = (A_n^0)^3 \setminus P_n^0$, $\varphi^0(0) = c$, $\varphi^0(1) = b_0$, $\varphi^0(2) = b_1$, $\varphi^0(3) = a_0$ и $\varphi^0(4) = a_1$.

Таким образом, $k_0 = 2$ и $\varphi^0 : \mathfrak{A}_n^0 \hookrightarrow \mathfrak{F}_2$. Также рассмотрим $g_0(0) = 2$ и введём обозначение $\mathrm{guess}_0 = \langle g_0(0) \rangle$.

<u>Шаг $t+1$.</u> Пусть к концу шага t уже определены модель $\mathfrak{A}_n^t$, число k_t и вложение $\varphi^t : \mathfrak{A}_n^t \hookrightarrow \mathfrak{F}_{k_t}$, причём $\mathrm{range}(\varphi^t)$ замкнут относительно взятия подслов. Пусть также определён набор $\mathrm{guess}_t = \langle g_t(0), \ldots, g_t(l) \rangle$ длины $l+1$, обладающий свойством $g_t(0) \leqslant \cdots \leqslant g_t(l) = k_t$.

Рассмотрим следующие четыре случая, в каждом из которых мы определим k_{t+1} и набор guess_{t+1}:

(1) Для любого $s \leqslant l$ выполняется $g_{t+1}(s) = g_t(s)$ и $g_{t+1}(l) > g_{t+1}(l+1)$. Тогда полагаем $k_{t+1} = k_t$ и $\mathrm{guess}_{t+1} = \mathrm{guess}_t = \langle g_t(0), \ldots, g_t(l) \rangle$.

(2) Для любого $s \leqslant l$ выполняется $g_{t+1}(s) = g_t(s)$ и $g_{t+1}(l) \leqslant g_{t+1}(l+1)$. Тогда полагаем $k_{t+1} = g_{t+1}(l+1)$ и $\mathrm{guess}_{t+1} = \langle g_{t+1}(0), \ldots, g_{t+1}(l), g_{t+1}(l+1) \rangle$.

(3) Существует $s \leqslant l$ такой, что $g_t(0) = g_{t+1}(0), \ldots, g_t(s-1) = g_{t+1}(s-1)$ и $g_t(s) < g_{t+1}(s)$. Заметим, что в силу нашего допущения о $g_t(0)$, такое s всегда не меньше чем 1. Тогда полагаем $k_{t+1} = g_{t+1}(s)$ и $\mathrm{guess}_{t+1} = \langle g_{t+1}(0), \ldots, g_{t+1}(s) \rangle$.

(4) Существует $s \leqslant l$ такой, что $g_t(0) = g_{t+1}(0), \ldots, g_t(s-1) = g_{t+1}(s-1)$ и $g_t(s) > g_{t+1}(s)$. Тогда полагаем $k_{t+1} = g_{t+1}(s-1)$ и $\mathrm{guess}_{t+1} = \langle g_{t+1}(0), \ldots, g_{t+1}(s-1) \rangle$.

В зависимости от того, увеличилось или уменьшилось значение k_t, рассмотрим следующие случаи (а), (б) или (в), в каждом из которых определим некоторую промежуточную модель $\mathfrak{A}' = \langle A', A^{0\prime}, {}^0A', P' \rangle$ и вложение $\varphi' : \mathfrak{A}' \hookrightarrow \mathfrak{F}_{k_{t+1}}$:

(а) Пусть $k_{t+1} = k_t$. Тогда положим $A' = A_n^t$, $A^{0\prime} = A_n^{0t}$, ${}^0A' = {}^0A_n^t$, $P' = P_n^t$, $\overline{P}' = \overline{P}_n^t$, $\varphi' = \varphi^t$. В частности $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_n^t$.

(б) Пусть $k_{t+1} > k_t$. Обозначим $m = k_{t+1} - k_t$. Поскольку в этом случае $\mathfrak{F}_{k_t} \subseteq \mathfrak{F}_{k_{t+1}}$, можно считать, что вложение φ^t действует в $\mathfrak{F}_{k_{t+1}}$. Пусть $n_0, \ldots, n_{m-1}$ — наименьшие натуральные числа, не принадлежащие A_n^t. Полагаем

$$A' = A_n^t \cup \{n_0, \ldots, n_{m-1}\},$$

$$A^{0'} = A_n^{0t} \cup \{n_0, \ldots, n_{m-1}\}, \quad {}^0A' = {}^0A_n^t,$$

$$P' = \{\langle x, y, z\rangle \in (A')^3 \mid \langle \varphi'(x), \varphi'(y), \varphi'(z)\rangle \in P^{\mathfrak{F}_{k_{t+1}}}\},$$

$$\overline{P}' = \{\langle x, y, z\rangle \in (A')^3 \mid \langle \varphi'(x), \varphi'(y), \varphi'(z)\rangle \notin P^{\mathfrak{F}_{k_{t+1}}}\},$$

$$\varphi' = \varphi^t \cup \{\langle n_0, a_{k_t}\rangle, \ldots, \langle n_{m-1}, a_{k_t+m-1}\rangle\}.$$

(в) Пусть $k_{t+1} < k_t$. Полагаем $A' = A_n^t$, $A^{0'} = A_n^{0t}$, ${}^0A' = {}^0A_n^t$, $P' = P_n^t$, $\overline{P}' = \overline{P}_n^t$, т.е. $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_n^t$. Рассмотрим конечную модель $\mathfrak{A} = \mathrm{range}(\varphi^t) \subseteq \mathfrak{F}_{k_t}$. Учитывая замкнутость $\mathfrak{A}$ относительно взятия подслов и используя предложение 5.2.4, найдём эффективно вложение $\varphi : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{F}_{k_{t+1}}$ такое, что φ тождественно на элементах $\mathfrak{F}_{k_{t+1}}$. Тогда композиция отображений

$$\mathfrak{A}_n^t \xrightarrow{\varphi^t} \mathfrak{F}_{k_t} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{F}_{k_{t+1}}$$

тоже будет изоморфным вложением. Положим $\varphi' = \varphi \circ \varphi^t$. Следовательно, φ' является изоморфным вложением вида $\varphi' : \mathfrak{A}_n^t \hookrightarrow \mathfrak{F}_{k_{t+1}}$.

Пусть после случаев (а)–(в) построены модель $\mathfrak{A}' = \langle A', A^{0'}, {}^0A', P'\rangle$ и вложение $\varphi' : \mathfrak{A}' \hookrightarrow \mathfrak{F}_{k_{t+1}}$. Выберем наименьшее правильное слово $w \in \mathfrak{F}_{k_{t+1}}$ такое, что $w \notin \mathrm{range}(\varphi')$. Найдём эффективно в $\mathfrak{F}_{k_{t+1}}$ все подслова слов, принадлежащих множеству $\mathrm{range}(\varphi') \cup \{w\}$. Пусть $w_0, \ldots, w_m$ — это те из найденных таким образом подслов, которые не попали в $\mathrm{range}(\varphi')$. В частности, $w \in \{w_0, \ldots, w_m\}$. Выберем наименьшие натуральные числа $n_0, \ldots, n_m$, не принадлежащие $\mathfrak{A}'$, и положим

$$A_n^{t+1} = A' \cup \{n_0, \ldots, n_m\},$$
$$A_n^{0t+1} = A^{0'} \cup \{n_i \mid w_i \text{ — слово 1-го типа}\},$$
$${}^0A_n^{t+1} = {}^0A' \cup \{n_i \mid w_i \text{ — слово 2-го типа}\},$$
$$\varphi^{t+1} = \varphi' \cup \{\langle n_0, w_0\rangle, \ldots, \langle n_m, w_m\rangle\},$$
$$P_n^{t+1} = \{\langle x, y, z\rangle \in (A_n^{t+1})^3 \mid \langle \varphi^{t+1}(x), \varphi^{t+1}(y), \varphi^{t+1}(z)\rangle \in P^{\mathfrak{F}_{k_{t+1}}}\},$$
$$\overline{P}_n^{t+1} = \{\langle x, y, z\rangle \in (A_n^{t+1})^3 \mid \langle \varphi^{t+1}(x), \varphi^{t+1}(y), \varphi^{t+1}(z)\rangle \notin P^{\mathfrak{F}_{k_{t+1}}}\}.$$

Из конструкции на шаге $t+1$ следует, что $P_n^t \subseteq P_n^{t+1}$, $\overline{P}_n^t \subseteq \overline{P}_n^{t+1}$ и $\mathrm{range}(\varphi^{t+1})$ замкнут относительно взятия подслов в $\mathfrak{F}_{k_{t+1}}$.

Для каждого $n \in \omega$ окончательно положим $A_n = \bigcup\limits_{t\in\omega} A_n^t$, $A_n^0 = \bigcup\limits_{t\in\omega} A_n^{0t}$, ${}^0A_n = \bigcup\limits_{t\in\omega} {}^0A_n^t$, $P_n = \bigcup\limits_{t\in\omega} P_n^t$, и определим модель $\mathfrak{A}_n = \langle A_n, A_n^0, {}^0A_n, P_n\rangle$ сигнатуры σ. Заметим, что носитель $A_n = \omega$, поскольку любое натуральное число появляется в конструкции на некотором шаге. В силу эффективности нашей конструкции, заключаем, что модель $\mathfrak{A}_n$ вычислима, причём равномерно по n.

Дальнейшее доказательство теоремы продолжим в следующих леммах. □

Лемма 5.3.3. *Для любого $s \in \omega$ значение $g(s)$, начиная с некоторого шага t, попадёт в набор guess_t на s-ое место и останется на нём на всех последующих шагах.*

Доказательство. По построению, очевидно, значение $g(0) = g_0(0) = 2$ попадёт на 0-ое место в набор guess_0 и больше его не покинет.

Пусть $g(0) \leqslant \cdots \leqslant g(s)$ уже попали в guess_t на шаге t на места с 0-го по s-ое соответственно и больше его не покидают. В частности, отсюда следует, что значения $g_t(0), \ldots, g_t(s)$ уже стабилизировались и набор guess_t, начиная с шага t, имеет длину не меньше чем $s+1$.

Рассмотрим значения $g_t(s+1), g_{t+1}(s+1), g_{t+2}(s+1), \ldots$. Данная последовательность стабилизируется на значении $g(s+1)$ и при этом $g(s+1) \geqslant g(s)$. Следовательно, если $g_t(s+1)$ не попало на $(s+1)$-ое место в guess_t, то наверняка $g_{t'}(s+1)$ попадёт на $(s+1)$-ое место в $\mathrm{guess}_{t'}$ на некотором шаге $t' \geqslant t$ за счёт случая (2). Далее на шагах $t'' \geqslant t'$ значение $g_{t''}(s+1)$ может несколько раз покинуть и вернуться в $\mathrm{guess}_{t''}$ (за счёт случаев (4) и (2)), или увеличиться, оставаясь на $(s+1)$-ом месте в $\mathrm{guess}_{t''}$ (за счёт случая (3)), после чего окончательно попадёт в набор $\mathrm{guess}_{t''}$ на $(s+1)$-ое место и больше его не покинет. □

Лемма 5.3.4. *Пусть* $\lim_s g(s) = k$. *Тогда существует бесконечно много шагов* t *таких, что* $k_t = k$.

Доказательство. Пусть s_0 — наименьшее такое, что $g(s) = k$ для всех $s \geqslant s_0$. По лемме 5.3.3, начиная с некоторого шага t_0, элементы $g(0), \ldots, g(s_0)$ всегда лежат в наборе guess_t, где $t \geqslant t_0$, на местах с 0-го по s_0-ое соответственно. Следовательно, по построению для всех $t \geqslant t_0$ справедливо $k_t \geqslant k$.

Допустим, напротив, существует шаг $t_1 \geqslant t_0$ такой, что $k_t > k$ для всех $t \geqslant t_1$. Следовательно, для всех $t \geqslant t_1$ в наборе guess_t есть элемент $g_t(s)$, где $s > s_0$, такой что $g_t(s) > k$. Пусть число $s_1 > s_0$ — наименьшее такое, что на шаге t_1 элемент $g_{t_1}(s_1)$ лежит в наборе guess_{t_1}, но ещё не стабилизировался, — такой s_1 существует в силу предыдущего замечания. Следовательно, $g_{t_1}(s_0+1) = \cdots = g_{t_1}(s_1 - 1) = k$, и эти значения уже стабилизировались и не покинут guess_t для всех $t \geqslant t_1$. Поскольку элемента набора guess_{t_1} не убывают, то $g_{t_1}(s_1) \geqslant k$.

В силу выбора s_1, после шага t_1 значение $g_t(s_1)$, где $t \geqslant t_1$, должно хотя бы один раз измениться. Поскольку $\lim_t g_t(s_1) = k$, заключаем, что значение $g_t(s_1)$, $t \geqslant t_1$, не может только увеличиваться. Отсюда следует, что обязательно наступит такой шаг $t_2 \geqslant t_1$, на котором значение $g_{t_2}(s_1)$ уменьшится. Тогда на шаге t_2 набор guess_{t_2} сколлапсирует до набора $\langle g_{t_2}(0), \ldots, g_{t_2}(s_1 - 1)\rangle$. Поскольку $g_{t_2}(s_1 - 1) = k$, заключаем, что $k_{t_2} = k$, что противоречит выбору t_1. □

Лемма 5.3.5. *Пусть* $\lim_s g(s) = k$. *Для любого* $x \in A_n$ *существует* $\lim_t \varphi^t(x)$, *причём* $\lim_t \varphi^t(x) \in \mathfrak{F}_k$.

Доказательство. Пусть $x \in A_n^t$ для всех $t \geqslant t_1$. По лемме 5.3.4 существует бесконечно много шагов $t \geqslant t_1$ таких, что $k_t = k$. На всех таких шагах по построению существует изоморфное вложение $\varphi^t : \mathfrak{A}_n^t \hookrightarrow \mathfrak{F}_k$. Следовательно, на всех таких шагах $\varphi^t(x) \in \mathfrak{F}_k$. Учитывая свойства наборов guess_t, отсюда заключаем, что найдётся шаг $t_2 \geqslant t_1$ такой, что $\varphi^{t_2}(x) \in \mathfrak{F}_k$ и $k_t \geqslant k$ для всех $t \geqslant t_2$.

Рассмотрим произвольный шаг $t+1$, где $t \geqslant t_2$. Если на этом шаге используется случай (а) или (б), то по построению $\varphi^t \subseteq \varphi^{t+1}$. Если же используется случай (в), то отображение

$\varphi : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{F}_{k_{t+1}}$ тождественно на элементах $\mathfrak{F}_{k_{t+1}}$, и значит, в силу выбора t_2, тождественно на элементах $\mathfrak{F}_k$. Таким образом, в любом случае имеем $\varphi^{t+1}(x) = \varphi^t(x)$, т.е. начиная с шага t_2, значение $\varphi^t(x)$, где $t \geqslant t_2$, не изменяется. Следовательно, последовательность $\{\varphi^t(x)\}_{t\in\omega}$ стабилизируется и её предел является элементом $\mathfrak{F}_k$. □

Лемма 5.3.6. *Пусть* $\lim_s g(s) = k$. *Тогда* $\mathfrak{A}_n \cong \mathfrak{F}_k$.

Доказательство. По лемме 5.3.5 для любого $x \in A_n$ существует $\lim_t \varphi^t(x) \in \mathfrak{F}_k$. Определим отображение $\varphi : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{F}_k$, положив $\varphi(x) = \lim_t \varphi^t(x)$ для каждого $x \in A_n$. Докажем, что φ является изоморфизмом модели $\mathfrak{A}_n$ на плоскость $\mathfrak{F}_k$.

Инъективность φ следует из инъективности вложений φ^t. Установим сюръективность φ. Пусть $w \in \mathfrak{F}_k$. Выберем шаг t_1 такой, что $k_t \geqslant k$ для всех $t \geqslant t_1$. В силу леммы 5.3.4 существует бесконечно много шагов $t \geqslant t_1$ таких, что $\mathfrak{F}_{k_t} = \mathfrak{F}_k$. По построению на таких шагах мы добавляем в range(φ^t) элементы из $\mathfrak{F}_k$, которые ранее не использовались в конструкции. Следовательно, существует шаг $t_2 \geqslant t_1$ такой, что $w = \varphi^{t_2}(x)$ для некоторого $x \in A_n^{t_2}$. Далее, рассуждая так же как в лемме 5.3.5, можно показать, что начиная с шага t_2, значение $\varphi^t(x)$, где $t \geqslant t_2$, не изменится. Следовательно, $w = \varphi(x)$.

Ясно, что φ сохраняет типы элементов проективной плоскости. Докажем, что φ сохраняет график операции умножения в проективной плоскости. Пусть $x, y, z \in A_n$. Рассмотрим шаг t_1 такой, что для всех $t \geqslant t_1$ имеет место $x, y, z \in A_n^t$, значения $\varphi^t(x), \varphi^t(y), \varphi^t(z)$ уже не меняются и $k_t \geqslant k$.

Если $\langle x, y, z\rangle \in P_n$, то существует $t_2 \geqslant t_1$ такой, что для всех $t \geqslant t_2$ справедливо $\langle x, y, z\rangle \in P_n^t$. Следовательно, поскольку φ^t является изоморфным вложением $\mathfrak{A}_n^t$ в $\mathfrak{F}_{k_t}$, заключаем, что $\langle \varphi^t(x), \varphi^t(y), \varphi^t(z)\rangle \in P^{\mathfrak{F}_{k_t}}$ для всех $t \geqslant t_2$. Тогда, в силу выбора t_1, для всех $t \geqslant t_2$ имеет место $\langle \varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)\rangle \in P^{\mathfrak{F}_{k_t}}$ и, значит $\langle \varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)\rangle \in P^{\mathfrak{F}_k}$.

Аналогично доказывается, что если $\langle x, y, z\rangle \in \overline{P}_n$, то $\langle \varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)\rangle \notin P^{\mathfrak{F}_k}$. □

Завершим доказательство теоремы 5.3.2.

Поскольку последовательность моделей $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ вычислима, существует вычислимая функция $a(n)$ такая, что $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{M}_{a(n)}$. По лемме 5.3.6 для каждого $n \in \omega$ имеем $\mathfrak{M}_{a(n)} \cong \mathfrak{F}_k$, где $k = \lim_s g(s)$, и значит $\mathfrak{M}_{a(n)} \in K_{FP}$.

Аналогично можно построить вычислимую последовательность $\{\mathfrak{B}_n\}_{n\in\omega}$ моделей сигнатуры σ такую, что если $k = \lim_s h(s)$, то $\mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{F}_k$. Следовательно, взяв вычислимую функцию $b(n)$ такую, что $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{M}_{b(n)}$, получим, что для каждого $n \in \omega$ справедливо $\mathfrak{B}_{b(n)} \cong \mathfrak{F}_k$, где $k = \lim_s h(s)$. В частности, $\mathfrak{M}_{b(n)} \in K_{FP}$.

Определим вычислимую функцию $F : \omega \longrightarrow I(K_{FP})\times I(K_{FP})$, положив $F(n)=\langle a(n), b(n)\rangle$. Тогда $n \in S$, если и только если $F(n) \in E(K_{FP})$, что окончательно доказывает теорему 5.3.2.

§ 5.4. Сложность проблемы вложимости проективных плоскостей

В данном параграфе мы рассмотрим проблему вложимости

$$Em(K) = \{\langle a, b\rangle \in I(K)^2 \mid \text{существует изоморфное вложение } \mathfrak{M}_a \hookrightarrow \mathfrak{M}_b\}$$

для тех же классов K проективных плоскостей, для которых в предыдущих параграфах были получены оценки сложности проблемы изоморфизма.

Мы докажем, что для классов папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема вложимости имеет такую же сложность как и проблема изоморфизма, т.е. является m-полным Σ_1^1-множеством. Вместе с тем проблема вложимости в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга вычислима внутри класса. Таким образом, в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга сложность проблемы вложимости меньше, чем сложность проблемы изоморфизма.

Известно [22], что в таких классах структур как линейные порядки, булевы алгебры, абелевы p-группы, неориентированные графы, поля фиксированной характеристики, 2-ступенно нильпотентные группы проблема вложимости имеет максимальную сложность, т.е. является m-полным Σ_1^1-множеством. В следующей теореме мы указываем классы проективных плоскостей, в которых $Em(K)$ также имеет максимально возможную сложность.

Теорема 5.4.1. *Проблема вложимости $Em(K)$ является m-полным Σ_1^1-множеством для следущих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости;

(2) дезарговы проективные плоскости;

(3) произвольные проективные плоскости.

Доказательство. Для верхней оценки сложности проблемы $Em(K)$ заметим, что для каждого класса из пунктов (1)–(3) индексное множество $I(K)$ является Π_2^0-множеством. Следовательно, для каждого из классов проблема вложимости является Σ_1^1-множеством.

Обозначим через K_{PP} класс всех папповых проективных плосостей. Докажем, что для любого множества $S \in \Sigma_1^1$ существует вычислимая функция $f : \omega \longrightarrow I(K_{PP}) \times I(K_{PP})$ такая, что для любого $n \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$n \in S \Longleftrightarrow f(n) \in Em(K_{PP}).$$

Отсюда будет вытекать справедливость утверждения (1). Более того, поскольку значениями функции f являются пары вычислимых индексов папповых проективных плоскостей, отсюда будет следовать и справедливость утверждений (2) и (3).

В [22] для произвольного Σ_1^1-множества S были построены равномерно вычислимая последовательность полей $\{\mathfrak{K}_n\}_{n\in\omega}$ и некоторое вычислимое поле $\mathfrak{K}$ такие, что для любого $n \in \omega$ справедлива эквивалентность: $n \in S$ тогда и только тогда, когда существует изоморфное вложение $\mathfrak{K} \hookrightarrow \mathfrak{K}_n$.

В силу вычислимости последовательности $\{\mathfrak{K}_n\}_{n\in\omega}$, существует вычислимая функция h такая, что для любого $n \in \omega$ значение $h(n)$ является вычислимым индексом поля $\mathfrak{K}_n$.

Рассмотрим для каждого $n \in \omega$ паппову проективную плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n}$, определённую координатным полем $\mathfrak{K}_n$, а также паппову проективную плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, определённую координатным полем $\mathfrak{K}$. В силу предложения 2.3.1 существуют вычислимое представление

$\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n}$, где $n \in \omega$, и вычислимое представление $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$. Конструкция из доказательства предложения 2.3.1 равномерно эффективным образом зависит от индекса ассоциативного тела (поля), поэтому существует частично вычислимая функция $g : \mathrm{range}(h) \longrightarrow I(K_{PP})$ такая, что $g(h(n))$ является вычислимым индексом плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}$, $n \in \omega$.

Обозначим через n_0 вычислимый индекс плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$, и определим вычислимую функцию $f(n) = \langle n_0, g(h(n))\rangle$. Докажем, что f — искомая сводящая функция.

Пусть $n \in S$. Следовательно, существует изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{K} \hookrightarrow \mathfrak{K}_n$. Так же как и в доказательстве предложения 2.3.1 представим любой элемент папповой плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ единственным образом в одном из следующих шести видов:

(а) $\langle e_1\rangle$,

(б) $\langle xe_1 + e_2\rangle, x \in \mathfrak{K}$,

(в) $\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle, x, y \in \mathfrak{K}$,

(г) $\langle e_3^\top\rangle$,

(д) $\langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle, z \in \mathfrak{K}$,

(е) $\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle, y, z \in \mathfrak{K}$.

Для элементов плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n}$ справедливо аналогичное представление.

Определим отображение $\psi : \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n}$ с помощью следующих шести соотношений:

$$\begin{aligned}
&\psi(\langle e_1\rangle) = \langle e_1\rangle,\\
&\psi(\langle xe_1 + e_2\rangle) = \langle \varphi(x)e_1 + e_2\rangle, x \in \mathfrak{K},\\
&\psi(\langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle) = \langle \varphi(x)e_1 + \varphi(y)e_2 + e_3\rangle, x, y \in \mathfrak{K},\\
&\psi(\langle e_3^\top\rangle) = \langle e_3^\top\rangle,\\
&\psi(\langle e_2^\top + ze_3^\top\rangle) = \langle e_2^\top + \varphi(z)e_3^\top\rangle, z \in \mathfrak{K},\\
&\psi(\langle e_1^\top + ye_2^\top + ze_3^\top\rangle) = \langle e_1^\top + \varphi(y)e_2^\top + \varphi(z)e_3^\top\rangle, y, z \in \mathfrak{K}.
\end{aligned}$$

Ясно, что отображение ψ инъективно и сохраняет типы элементов проективной плоскости. Докажем, что ψ сохраняет график частичной операции умножения в проективной плоскости, рассмотрев правила умножения (аб)–(ее2), приведённые в доказательстве предложения 2.3.1.

Допустим, например, в плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ справедливо $a \cdot b = c$ и тройка элементов a, b, c удовлетворяет правилу умножения (бв), т.е. для некоторых $x, y, z \in \mathfrak{K}$ имеет место $a = \langle ze_1 + e_2\rangle, b = \langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle, c = \langle e_1^\top - ze_2^\top + (yz - x)e_3^\top\rangle$. Отсюда, используя определение отображения ψ и тот факт, что φ является изоморфным вложением поля $\mathfrak{K}$ в поле $\mathfrak{K}_n$, заключаем, что $\psi(a) = \langle \varphi(z)e_1 + e_2\rangle$, $\psi(b) = \langle \varphi(x)e_1 + \varphi(y)e_2 + e_3\rangle$, $\psi(c) = \langle e_1^\top - \varphi(z)e_2^\top + (\varphi(y)\cdot\varphi(z) - \varphi(x))e_3^\top\rangle$. Следовательно, тройка $\psi(a), \psi(b), \psi(c)$ удовлетворяет правилу умножения (бв) в плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n}$, и значит $\psi(a) \cdot \psi(b) = \psi(c)$.

Допустим, в плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n}$ выполняется $\psi(a)\cdot\psi(b) = \psi(c)$ и тройка $\psi(a), \psi(b), \psi(c)$ удовлетворяет правилу умножения (бв), т.е. для некоторых $x', y', z' \in \mathfrak{K}_n$ имеет место $\psi(a) = \langle z'e_1 + e_2\rangle$, $\psi(b) = \langle x'e_1 + y'e_2 + e_3\rangle$, $\psi(c) = \langle e_1^\top - z'e_2^\top + (y'z' - x')e_3^\top\rangle$. Поскольку $\psi(a), \psi(b) \in \mathrm{range}(\psi)$, существуют $x, y, z \in \mathfrak{K}$ с условием $a = \langle ze_1 + e_2\rangle$, $b = \langle xe_1 + ye_2 + e_3\rangle$, и при этом $z' = \varphi(z)$, $y' = \varphi(y)$ и $x' = \varphi(x)$. Отсюда следует, что $\varphi(-z) = -z'$ и $\varphi(yz - x) = y'z' - x'$, и значит

$c = \langle e_1^\top - ze_2^\top + (yz-x)e_3^\top \rangle$. В таком случае тройка элементов a, b, c удовлетворяет правилу умножения (бв) в плоскости $\mathfrak{P}_\mathfrak{K}$ и, следовательно, $a \cdot b = c$.

Аналогично разбираются остальные случаи из списка правил (аб)–(ее2).

Таким образом, мы построили изоморфное вложение $\psi : \mathfrak{P}_\mathfrak{K} \hookrightarrow \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_n}$. Тогда вычислимая проективная плоскость $\mathfrak{A}_\mathfrak{K}$ изоморфно вкладывается в вычислимую плоскость $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}$. Следовательно $f(n) \in Em(K_{PP})$.

Пусть теперь $f(n) \in Em(K_{PP})$, т.е. существует изоморфное вложение $\psi : \mathfrak{A}_\mathfrak{K} \hookrightarrow \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}$. Зафиксируем остов $\overline{a} = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ в проективной плоскости $\mathfrak{A}_\mathfrak{K}$. Тогда четвёрка $\overline{b} = \langle \psi(a_1), \psi(a_2), \psi(a_3), \psi(a_4) \rangle$ является остовом в проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}$.

Используя формулы $\Phi_1, \mathcal{X}, \Theta$ из § 2.2, определим в проективных плоскостях $\mathfrak{A}_\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}$ отношения

$$
\begin{aligned}
&D(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}) = \{u \mid \mathfrak{A}_\mathfrak{K} \models \Phi_1(u, \overline{a})\},\\
&P_+(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}) = \{\langle u, v, w \rangle \mid \mathfrak{A}_\mathfrak{K} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{a})\},\\
&P_\times(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}) = \{\langle u, v, w \rangle \mid \mathfrak{A}_\mathfrak{K} \models \Theta(u, v, w, \overline{a})\},\\
&D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}) = \{u \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n} \models \Phi_1(u, \overline{b})\},\\
&P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}) = \{\langle u, v, w \rangle \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n} \models \mathcal{X}(u, v, w, \overline{b})\},\\
&P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}) = \{\langle u, v, w \rangle \mid \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n} \models \Theta(u, v, w, \overline{b})\}.
\end{aligned}
$$

Тогда алгебраическая система $\mathfrak{K}' = \langle D(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}), P_+(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}), P_\times(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}) \rangle$ является полем, изоморфным (в предикатном языке) координатному полю плоскости $\mathfrak{A}_\mathfrak{K}$, а значит изоморфным полю $\mathfrak{K}$. По тем же причинам алгебраическая система $\mathfrak{K}_n' = \langle D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}), P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}), P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}) \rangle$ является полем, изоморфным полю $\mathfrak{K}_n$.

Поскольку ψ является изоморфным вложением $\mathfrak{A}_\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}$, а каждая из формул $\Phi_1, \mathcal{X}, \Theta$ эквивалентна некоторой $\exists$-формуле, заключаем, что для любых $u, v, w \in \mathfrak{A}_\mathfrak{K}$ справедливы импликации

$$
\begin{gathered}
u \in D(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}) \Longrightarrow \psi(u) \in D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}),\\
\langle u, v, w \rangle \in P_+(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}) \Longrightarrow \langle \psi(u), \psi(v), \psi(w) \rangle \in P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}),\\
\langle u, v, w \rangle \in P_\times(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}) \Longrightarrow \langle \psi(u), \psi(v), \psi(w) \rangle \in P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}).
\end{gathered}
$$

С другой стороны, каждая из формул $\Phi_1, \mathcal{X}, \Theta$ эквивалентна некоторой $\forall$-формуле. Поэтому для любых $u, v, w \in \mathfrak{A}_\mathfrak{K}$ справедливы импликации

$$
\begin{gathered}
\psi(u) \in D(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}) \Longrightarrow u \in D(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}),\\
\langle \psi(u), \psi(v), \psi(w) \rangle \in P_+(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}) \Longrightarrow \langle u, v, w \rangle \in P_+(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}),\\
\langle \psi(u), \psi(v), \psi(w) \rangle \in P_\times(\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_n}, \overline{b}) \Longrightarrow \langle u, v, w \rangle \in P_\times(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a}).
\end{gathered}
$$

Таким образом, отображение $\varphi = \psi \restriction D(\mathfrak{A}_\mathfrak{K}, \overline{a})$ является изоморфным вложением поля $\mathfrak{K}'$ в поле $\mathfrak{K}_n'$. В таком случае существует изоморфное вложение поля $\mathfrak{K}$ в поле $\mathfrak{K}_n$, и значит $n \in S$. $\square$

В классе свободных проективных плоскостей конечного ранга сложность проблемы вложимости меньше чем сложность проблемы изоморфизма.

Теорема 5.4.2. *Проблема вложимости для класса всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является вычислимым множеством внутри класса.*

Доказательство. В работах [33, 47] установлено, что любая свободная проективная плоскость конечного ранга изоморфно вкладывается в свободную проективную плоскость ранга 8. Отсюда следует, что любые две свободные плоскости конечных рангов вложимы друг в друга.

Как и ранее обозначим через K_{FP} класс всех свободных проективных плоскостей конечного ранга. Тогда, в силу замечания выше, имеем

$$Em(K_{FP}) = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \omega\} \cap (I(K_{FP}) \times I(K_{FP})),$$

т.е. множество $Em(K_{FP})$ является вычислимым внутри $I(K_{FP}) \times I(K_{FP})$. □

§ 5.5. Сложность проблемы вычислимой категоричности проективных плоскостей

В данном параграфе мы докажем, что проблема вычислимой категоричности является m-полным Π^1_1-множеством в следующих классах моделей: папповы проективные плоскости, дезарговы проективные плоскости, произвольные проективные плоскости.

Напомним, что *проблемой вычислимой категоричности* для класса K мы называем индексное множество

$$I_{cc}(K) = \{e \in I(K) \mid \mathfrak{M}_e \text{ вычислимо категорична}\},$$

где через $\mathfrak{M}_e$ обозначена вычислимая структура сигнатуры σ, вычислимым индексом которой является число e.

Если множество $I(K)$ гиперарифметично, то в худшем случае $I_{cc}(K)$ лежит в классе Π^1_1. Действительно, свойство вычислимой категоричности вычислимой структуры $\mathfrak{M}_e$ эквивалентно следующему Π^1_1-условию: для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M}_i$ и любой функции $f : \omega \to \omega$, если f является изоморфизмом $\mathfrak{M}_e$ на $\mathfrak{M}_i$, то существует вычислимый изоморфизм $\varphi_n : \mathfrak{M}_e \to \mathfrak{M}_i$. (Здесь через φ_n обозначена частично вычислимая функция с клиниевским номером n.) В [42] доказано, что проблема вычислимой категоричности в классе деревьев является m-полным Π^1_1-множеством. Отсюда следует, что проблема вычислимой категоричности также является m-полным Π^1_1-множеством для многих эффективно полных классов структур, к которым в частности относятся класс симметричных иррефлексивных графов [52] и класс полей [63].

В §§ 4.5–4.6 был предложен эффективный метод кодирования полей в папповых проективных плоскостях, сохраняющий основные алгоритмические свойства структур. Оказывается, данный метод позволяет перенести результат о Π^1_1-полноте проблемы вычислимой категоричности полей в класс проективных плоскостей. В данном параграфе, используя результаты работ [42, 52, 63], мы докажем, что в указанных выше классах проективных плоскостей проблема вычислимой категоричности также достигает максимально возможной сложности. Основным результатом настоящего параграфа является следующая

Теорема 5.5.1. *Проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$ является m-полным Π^1_1-множеством для следующих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости,

(2) дезарговы проективные плоскости,

(3) все проективные плоскости.

Доказательство. Ранее мы уже замечали, что во всех трёх случаях индексное множество $I(K)$ является Π^0_2-множеством. Следовательно, проблема вычислимой категоричности для каждого класса из пунктов (1)–(3) является Π^1_1-множеством.

Как и выше обозначим через K_F класс всех полей, а через K_{PP} — класс всех папповых проективных плоскостей. Будем обозначать через $\mathfrak{K}_e$ вычислимую модель сигнатуры полей с вычислимым индексом e, а через $\mathfrak{M}_e$ — вычислимую модель сигнатуры проективных плоскостей с вычислимым индексом e.

Докажем, что для любого Π^1_1-множества S существует вычислимая функция $f : \omega \longrightarrow I(K_{PP})$ такая, что для любого $e \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$e \in S \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_{f(e)} \text{ вычислимо категорична.}$$

Отсюда очевидно будет вытекать справедливость утверждения (1). Более того, поскольку значениями функции f являются вычислимые индексы папповых проективных плоскостей, отсюда будет следовать и справедливость утверждений (2) и (3).

В силу [42, теорема 5.2], существует вычислимая последовательность деревьев $\{T_e\}_{e\in\omega}$ такая, что T_e вычислимо категорично тогда и только тогда, когда $e \in S$. В свою очередь, в силу [52, теорема 3.1], мы можем для каждого вычислимого дерева равномерно эффективно построить симметричный иррефлексивный граф, обладающий такой же вычислимой размерностью как и дерево. Наконец, используя построенный в [63] вычислимый функтор, мы можем равномерно эффективно закодировать любой вычислимый симметричный иррефлексивный граф в некоторое вычислимое поле с сохранением вычислимой размерности.

Таким образом, можно утверждать, что существует такая вычислимая функция $h : \omega \longrightarrow I(K_F)$, что для любого $e \in \omega$ справедлива эквивалентность

$$e \in S \Longleftrightarrow \mathfrak{K}_{h(e)} \text{ вычислимо категорично.}$$

Рассмотрим для каждого $e \in \omega$ паппову проективную плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_{h(e)}}$, определённую координатным полем $\mathfrak{K}_{h(e)}$. В силу предложения 2.3.1 существуют вычислимое представление $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_{h(e)}}$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_{h(e)}}$, $e \in \omega$. Конструкция из доказательства предложения 2.3.1 равномерно эффективным образом зависит от индекса $h(e)$ исходного поля. Следовательно, найдётся частично вычислимая функция $g : \mathrm{range}(h) \longrightarrow I(K_{PP})$ такая, что $g(h(e))$ является вычислимым индексом проективной плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_{h(e)}}$, $e \in \omega$.

В предложение 4.6.2 доказано, что вычислимая размерность построенной таким образом плоскости $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}_{h(e)}}$ совпадает с вычислимой размерностью исходного поля $\mathfrak{K}_{h(e)}$. Следовательно, для любого $e \in \omega$ имеет место эквивалентность

$$\mathfrak{K}_{h(e)} \text{ вычислимо категорично} \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_{g(h(e))} \text{ вычислимо категорична.}$$

Таким образом, вычислимая функция $f = g \circ h$ является искомой. Что и требовалось доказать. □

В заключение приведём некоторое следствие, касающееся алгоритмической сложности проблемы фиксированной конечной вычислимой размерности. Пусть n — натуральное число такое, что $n > 1$. Для произвольного, замкнутого относительно изоморфизмов, класса моделей K рассмотрим множество

$$\mathrm{CompDim}^n(K) = \{e \in I(K) \mid \text{вычислимая размерность } \mathfrak{M}_e \text{ равна } n\},$$

состоящее из всех индексов вычислимых структур из K, вычислимая размерность которых равна n.

В [12, теорема 3] установлено, что для класса K всех ориентированных графов множество $\mathrm{CompDim}^n(K)$ является m-полным Π^1_1-множеством. Легко видеть, что данный результат также можно перенести в класс проективных плоскостей, используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 5.5.1. Таким образом, справедливо следующее

Следствие 5.5.2. *Пусть $n \in \omega$, $n > 1$. Множество $\mathrm{CompDim}^n(K)$ является m-полным Π^1_1-множеством для следующих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости,

(2) дезарговы проективные плоскости,

(3) все проективные плоскости.

Заключение

В диссертации исследовались проблемы теории вычислимых моделей в приложении к основным классам проективных плоскостей и проблема разрешимости теории класса свободно порождённых проективных плоскостей. Получены следующие основные результаты:

(1) Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

(2) Доказано, что ни один из следующих классов проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости.

(3) Показано, что в классе свободных проективных плоскостей реализуются только две вычислимые размерности: 1 и ω. Доказано, что произвольная свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.

(4) Доказано, что класс свободно порождённых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Как следствие, получен результат о том, что в классе свободно порождённых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$.

(5) Доказано, что теория класса свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.

(6) Доказано, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Установлено, что вычислимая размерность папповой (дезарговой) проективной плоскости совпадает с вычислимой размерностью её координатного поля (тела). В частности, в классе папповых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$.

(7) Найдены точные оценки сложности проблем изоморфизма, вложимости и вычислимой категоричности в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей. Для класса свободных проективных плоскостей конечного ранга найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма и вложимости.

В диссертации создано новое научное направление, связанное с решением алгоритмических проблем в теории проективных плоскостей. Полученные результаты содержат решения актуальных задач теории вычислимых моделей и вносят существенный вклад в развитие теории вычислимых проективных плоскостей. Решена известная проблема о разрешимости теории класса свободно порождённых проективных плоскостей. Результаты и методы диссертации могут быть использованы для дальнейших исследований по теории вычислимых проективных плоскостей. В диссертации также были получены некоторые структурные результаты и новые методы, относящиеся к свободно порождённым плоскостям, которые могут быть использованы в исследованиях алгебраических свойств проективных плоскостей.

Результаты диссертации также могут быть использованы в образовательном процессе при чтении специальных курсов по теории вычислимых моделей и теории проективных плоскостей, предназначенных для студентов и аспирантов высших учебных заведений.

Список литературы

[1] *Н.А. Баженов*, Степени категоричности суператомных булевых алгебр, Алгебра и логика, 52, № 3 (2013), 271–283.

[2] *Н.А. Баженов*, О степенях автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для булевых алгебр, Алгебра и логика, 55, № 2 (2016), 133–155.

[3] *В.В. Вдовин*, О гомоморфизмах проективных плоскостей I, Сиб. матем. ж., 27, № 1 (1986), 35–44.

[4] *В.В. Вдовин*, О гомоморфизмах проективных плоскостей II, Сиб. матем. ж., 27, № 4 (1986), 35–40.

[5] *В.В. Вдовин*, Гомоморфизмы и алгоритмические проблемы в проективных плоскостях, Сиб. матем. ж., 32, № 6 (1991), 24–29.

[6] *А.К. Войтов*, Δ^0_α-вычислимые нумерации классов проективных плоскостей, Магистерская диссертация, Новосибирск, Новосибирский гос. ун-т, 2015.

[7] *С.С. Гончаров*, Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр, Алгебра и логика, 12, № 1 (1973), 31–40.

[8] *С.С. Гончаров*, Автоустойчивость моделей и абелевых групп, Алгебра и логика, 19, № 1 (1980), 23–44.

[9] *С.С. Гончаров*, Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций, Алгебра и логика, 19, № 6 (1980), 621–639.

[10] *С.С. Гончаров*, Счетные булевы алгебры и разрешимость (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга, 1996.

[11] *С.С. Гончаров*, Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, Тр. МИАН, 274, М., Наука, 2011, 119–129.

[12] *С.С. Гончаров, Н.А. Баженов, М.И. Марчук*, Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей естественных классов, Доклады АН, 464, № 1 (2015), 12–14.

[13] *С.С. Гончаров, В.Д. Дзгоев*, Автоустойчивость моделей, Алгебра и логика, 19, № 1 (1980), 45–58.

[14] *С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов*, Конструктивные модели (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга, 1999.

[15] *С.С. Гончаров, А.В. Молоков, Н.С. Романовский*, Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности, Сиб. матем. ж., 30, № 1 (1989), 82–88.

[16] *С.С. Гончаров, Дж.Ф. Найт*, Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы, Алгебра и логика, 41, № 6 (2002), 639–681.

[17] *А.С. Денисенко*, Об автоматных представлениях проективных плоскостей, Дипломная работа, Новосибирск, Новосибирский гос. ун-т, 2012.

[18] *В.П. Добрица*, Вычислимость некоторых классов конструктивных алгебр, Сиб. матем. ж., 18, № 3 (1977), 570-579.

[19] *Ю.Л. Ершов, И.А. Лавров, А.Д. Тайманов, М.А. Тайцлин*, Элементарные теории, Успехи матем. наук, 20, № 4 (1965), 37–108.

[20] *Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин*, Математическая логика, 2-е изд., М., Наука, 1987.

[21] *И.Ш. Калимуллин*, Спектры степеней некоторых алгебраических структур, Алгебра и логика, 46, № 6 (2007), 729–744.

[22] *Дж. Карсон, Е. Фокина, В. Харизанова, Дж.Ф. Найт, С. Куинн, К. Сафрански, Дж. Воллбаум*, Вычислимая проблема вложимости, Алгебра и логика, 50, № 6 (2011), 707–732.

[23] *А.С. Морозов*, Функциональные деревья и автоморфизмы моделей, Алгебра и логика, 32, № 1 (1993), 54–72.

[24] *А.А. Никитин*, О гомоморфизмах свободно порожденных проективных плоскостей, Алгебра и логика, 20, № 4 (1981), 419–426.

[25] *А.А. Никитин*, О свободно порожденных проективных плоскостях, Алгебра и логика, 22, № 1 (1983), 61–77.

[26] *А.А. Никитин*, О некоторых алгоритмических проблемах для проективных плоскостей, Алгебра и логика, 23, № 5 (1984), 512–529.

[27] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972.

[28] *Р.И. Соар*, Вычислимо перечислимые множества и степени, Казань, Казанское мат. общ-во, 2000.

[29] *В. Харизанова, Р. Миллер, А.С. Морозов*, Простые структуры со сложной симметрией, Алгебра и логика, 2010, 49, № 1 (2010), 98–134.

[30] *Н.Г. Хисамиев*, Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп, Изв. Акад. наук Каз. ССР, Сер. физ.-мат., № 1 (1981), 51-55.

[31] *Б. Хусаинов, Р.А. Шор*, О решении проблемы Гончарова-Эша и проблемы спектра в теории вычислимых моделей, Доклады АН, 371, № 1 (2000), 30–31.

[32] *А.И. Ширшов*, О тернаре проективной плоскости, Алгебра и логика, 24, № 3 (1985), 365–370.

[33] *А.И. Ширшов, А.А. Никитин*, К теории проективных плоскостей, Алгебра и логика, 20, № 3 (1981), 330–356.

[34] *А.И. Ширшов, А.А. Никитин*, Алгебраическая теория проективных плоскостей, Новосибирск, Новосибирский гос. ун-т, 1987.

[35] *C.J. Ash, J.F. Knght*, Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy (Stud. Logic Found. Math., 144), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2000.

[36] *N. Bazhenov*, Categoricity spectra for polymodal algebras, Stud. Log., 104, № 6 (2016), 1083–1097.

[37] *W. Calvert*, The isomorphism problem for classes of computable fields, Arch. Math. Logic, 43, № 3 (2004), 327–336.

[38] *W. Calvert*, The isomorphism problem for computable Abelian p-groups of bounded length, J. Symb. Logic, 70, № 1 (2005), 331–345.

[39] *P. Cholak, S.S. Goncharov, B. Khoussainov, R.A. Shore*, Computably categorical structures and expansions by constants, J. Symb. Logic, 64, № 1 (1999), 13–37.

[40] *B.F. Csima, J.N.Y. Franklin, R.A. Shore*, Degrees of categoricity and the hyperarithmetic hierarchy, Notre Dame J. Form. Logic, 54, № 2 (2013), 215–231.

[41] *V.P. Dobritsa*, Computable classes of constructive models, in: Handbook of recursive mathematics, vol. 1 (Stud. Logic Found. Math., 138), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 183-233.

[42] *R.G. Downey, A.M. Kach, S. Lempp, A.E.M. Lewis-Pye, A. Montalbán, D.D. Turetsky*, The complexity of computable categoricity, Advances in Mathematics, 268 (2015), 423–466.

[43] *Yu.L. Ershov, S.S. Goncharov, A. Nerode, J.B. Remmel* (eds.), Handbook of recursive mathematics, vol. 1, 2 (Stud. Logic Found. Math., 138-139), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998.

[44] *E.B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller*, Degrees of categoricity of computable structures, Arch. Math. Logic, 49, № 1 (2010), 51–67.

[45] *A. Frolov, V. Harizanov, I. Kalimullin, O. Kudinov, R. Miller*, Spectra of high$_n$ and non-low$_n$ degrees, J. Log. Comput., 22, № 4 (2012), 755–777.

[46] *S. Goncharov, B. Khoussainov*, Open problems in the theory of constructive algebraic systems, in: Computability theory and its applications (Contemporary Math., 257), Providence, Amer. Math. Soc., 2000, 145–170.

[47] *M.J. Hall*, Projective planes, Trans. Am. Math. Soc., 54, № 2 (1943), 229–277.

[48] *V.S. Harizanov*, Uncountable degree spectra, Ann. Pure Appl. Logic, 54, № 3 (1991), 255–263.

[49] *V.S. Harizanov*, Some effects of Ash-Nerode and other decidability conditions on degree spectra, Ann. Pure Appl. Logic, 55, № 1 (1991), 51–65.

[50] *V.S. Harizanov*, The possible Turing degree of the nonzero member in a two element degree spectrum, Ann. Pure Appl. Logic, 60, № 1 (1993), 1–30.

[51] *D.R. Hirschfeldt*, Degree spectra of relations on structures of finite computable dimension, Ann. Pure Appl. Logic, 115, № 1-3 (2002), 233–277.

[52] *D.R. Hirschfeldt, B. Khoussainov, R.A. Shore, A.M. Slinko*, Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures, Ann. Pure Appl. Logic, 115, № 1-3 (2002), 71–113.

[53] *D.R. Hughes, F.C. Piper*, Projective planes, New York, Heidelrberg, Berlin, Springer, 1973.

[54] *B. Khoussainov, M. Minnes*, Three lectures on automatic structures, Logic Colloquium 2007 (Lect. Notes in Logic, 35), Cambridge University Press, 2010, 132–176.

[55] *B. Khoussainov, A. Nerode*, Automatic presentations of structures, Logic and computational complexity, Proc. of LCC-1994 (Lect. Notes Comput. Sci., 960), Berlin, Springer-Verl., 1995, 367–392.

[56] *B. Khoussainov, A. Nerode*, Open questions in the theory of automatic structures, Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci., 94 (2008), 181–204.

[57] *B. Khoussainov, R.A. Shore*, Computable isomorphisms, degree spectra of relations, and Scott families, Ann. Pure Appl. Logic, 93, № 1-3 (1998), 153-193.

[58] *J.F. Knight*, Degrees coded into jumps of orderings, J. Symb. Logic, 51, № 4 (1986), 1034–1042.

[59] *D. Kuske, J. Liu, M. Lohrey*, The isomorphism problem on classes of automatic structures with transitive relations, Trans. Amer. Math. Soc., 365, № 10 (2013), 5103–5151.

[60] *S. Lempp, C. McCoy, R. Miller, R. Solomon*, Computable categoricity of trees of finite height, J. Symb. Logic, 70, № 1 (2005), 151–215.

[61] *R. Miller*, The computable dimension of trees of infinite height, J. Symb. Logic, 70, № 1 (2005), 111–141.

[62] *R. Miller*, **d**-computable categoricity for algebraic fields, J. Symb. Logic, 74, № 4 (2009), 1325–1351.

[63] *R. Miller, B. Poonen, H. Schoutens, A. Shlapentokh*, A computable functor from graphs to fields, submitted, http://arxiv.org/abs/1510.07322

[64] *A. Nies*, Undecidable fragments of elementary theories, Algebra Univers., 35, № 1 (1996), 8–33.

[65] *L.J. Richter*, Degrees of structures, J. Symb. Logic, 46, № 4 (1981), 723–731.

[66] *J. Robinson*, Definability and decision problems in arithmetic, J. Symb. Logic, 14, № 2 (1949), 98–114.

[67] *S. Rubin*, Automata presenting structures: A survey of the finite string case, Bull. Symb. Log., 14, № 2 (2008), 169–209.

[68] *T.A. Slaman*, Relative to any nonrecursive set, Proc. Am. Math. Soc., 126, № 7 (1998), 2117–2122.

[69] *A. Tarski*, Undecidability of the theory of lattices and projective geometries, J. Symb. Logic, 14, № 1 (1949), 77–78.

[70] *T. Tsankov*, The additive group of the rationals does not have an automatic presentation, J. Symb. Logic, 76, № 4 (2011), 1341–1351.

[71] *V.V. Vdovin*, Simple projective planes, Arch. Math., 47, № 5 (1986), 469–480.

[72] *V.V. Vdovin*, Homomorphisms of freely generated projective planes, Commun. Algebra, 16, № 11 (1988), 2209–2230.

[73] *V.V. Vdovin*, Constructively presented projective planes, Geom. Dedicata, 39, № 1 (1991), 115–123.

[74] *S. Wehner*, Enumerations, countable structures and Turing degrees, Proc. Am. Math. Soc., 126, № 7 (1998), 2131–2139.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в журналах из перечня ВАК

[75] *Н.Т. Когабаев*, Класс проективных плоскостей невычислим, Алгебра и логика, 47, № 4 (2008), 428–455.

[76] *Н.Т. Когабаев*, Неразрешимость теории проективных плоскостей, Алгебра и логика, 49, № 1 (2010), 3–17.

[77] *Н.Т. Когабаев*, О вычислимой размерности папповых и дезарговых проективных плоскостей, Алгебра и логика, 51, № 1 (2012), 61–81.

[78] *Н.Т. Когабаев*, Сложность проблемы изоморфизма вычислимых проективных плоскостей, Вестник НГУ, Серия: матем., мех., информ., 13, № 1 (2013), 68–75.

[79] *Н.Т. Когабаев*, Невычислимость классов папповых и дезарговых проективных плоскостей, Сиб. матем. ж., 54, № 2 (2013), 325-335.

[80] *А.С. Денисенко, Н.Т. Когабаев*, Об автоматных представлениях проективных плоскостей, Сиб. матем. ж., 55, №1 (2014), 66–78.

[81] *Н.Т. Когабаев*, Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, Алгебра и логика, 54, №5 (2015), 599–627.

[82] *Н.Т. Когабаев*, Π^1_1-полнота проблемы вычислимой категоричности проективных плоскостей, Алгебра и логика, 55, №4 (2016), 432–440.

[83] *Н.Т. Когабаев*, Свободно порождённые проективные плоскости конечной вычислимой размерности, Алгебра и логика, 55, №6 (2016), 704–737.

[84] *Н.Т. Когабаев*, О проблеме вложимости вычислимых проективных плоскостей, Алгебра и логика, 56, №1 (2017), 110–117.

Прочие публикации

[85] *N. Kogabaev*, The computable dimension of free projective planes, Logic and Theory of Algorithms, CiE 2008, Local Proceedings (Athens, Greece, June 15-20, 2008), University of Athens, 2008, p.505.

[86] *N. Kogabaev*, Undecidability of the theory of projective planes, Logic Colloquium 2009, Abstracts (Sofia, Bulgaria, July 31 – August 5, 2009), Sofia University, 2009, p.60.

[87] *Н.Т. Когабаев*, Элементарная определимость неориентированных графов в классе проективных плоскостей, Труды международной научной конференции «Вычислимость и модели» (Усть-Каменогорск, 30 августа – 1 сентября 2009), Издательство ВКГТУ, 2010, с.38–42.

[88] *N. Kogabaev*, Computable presentations of desarguesian projective planes, Logic Colloquium 2011, Abstracts (Barcelona, Spain, July 11-16, 2011), Universitat de Barcelona, 2011, p.73.

[89] *N. Kogabaev*, On uniform computability in familiar classes of projective planes, Turing Centenary Conference CiE-2012, Abstract of Informal Presentations (Cambridge, England, June 18-23, 2012), University of Cambridge, 2012, p.79.

[90] *А.С. Денисенко, Н.Т. Когабаев*, Об автоматных представлениях проективных плоскостей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 12-16 ноября 2012), Институт математики СО РАН, 2012, с.36.

[91] *N. Kogabaev*, The isomorphism problem for computable projective planes, Logic Colloquium 2014 and LATD 2014, Abstract Booklet (Vienna, Austria, July 14-19, 2014), Technische Universität Wien, 2014, p.68.

[92] *Н. Т. Когабаев*, Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 10-13 ноября 2014), Институт математики СО РАН, 2014, с.41.

[93] *N. Kogabaev*, The theory of projective planes is complete with respect to degree spectra and effective dimensions, 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science and Logic Colloquium 2015, Book of Abstracts (Helsinki, Finland, 3-8 August 2015), University of Helsinki, 2015, p.687.

[94] *N. Kogabaev*, Freely generated projective planes with finite computable dimension, Logic Colloquium 2016, Book of Abstracts (Leeds, England, 31 July – 6 August 2016), University of Leeds, 2016, p.97–98.

[95] *Н. Т. Когабаев*, Вычислимые представления проективных плоскостей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 21-25 ноября 2016), Институт математики СО РАН, 2016, с.16.