Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
(ИМ СО РАН)

На правах рукописи

Тараненко Анна Александровна

ПЕРМАНЕНТЫ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность 01.01.09 –
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Потапов В.Н.

Новосибирск – 2017

Оглавление

Введение 4

Основные определения и обозначения 4

Исторический обзор 11

Перманенты двумерных матриц 11

Многомерные обобщения двумерного перманента 14

Цели и структура работы 16

1. Свойства, примеры и некоторые применения перманента многомерных матриц 23

1.1. Простейшие свойства перманентов многомерных матриц 23

1.2. Примеры 26

1.3. Применение перманента для подсчета числа комбинаторных объектов . 28

2. Полистохастические матрицы и классические теоремы для двумерных матриц 35

2.1. Положительность перманента и теорема Биркгофа 35

2.2. Экстремумы перманента полистохастических матриц 38

3. Верхние оценки перманента многомерных матриц 45

3.1. Оценка перманента полистохастических матриц 45

3.1.1. Свойства функций $P_n^d(\gamma)$ и $\varphi_n^d(\gamma)$ 46

3.1.2. Дифференциальное неравенство на функцию $P_n^d(\gamma)$ 48

3.1.3. Асимптотическая верхняя оценка перманента 51

3.2. Оценки перманента многомерных (0,1)-матриц 59

4. 1-Факторы и 1-факторизации гиперграфов 67

4.1. Оценка числа 1-факторов в гиперграфе 67

4.2. Оценка числа 1-факторизаций полного гиперграфа 81

5. Квазигруппы, латинские квадраты и гиперкубы 86

5.1. Трансверсали в латинских квадратах и гиперкубах 86

5.1.1. Подсчет числа трансверсалей с помощью многомерного перманента 86

5.1.2. Оценки числа трансверсалей 87

5.1.3. Трансверсали в некоторых латинских гиперкубах 89

5.2. Трансверсали в квазигруппах 91

5.2.1. Трансверсали в полностью разделимых квазигруппах 98

5.2.2. Трансверсали в полулинейных квазигруппах 101

5.2.3. Трансверсали в n-арных квазигруппах порядка 4 111

5.2.3. Трансверсали в итерированных группах $\mathbb{Z}_2^2$ и $\mathbb{Z}_4$ 116

Заключение 122

Литература 123

Введение

Основные определения и обозначения

Пусть $n, d \in \mathbb{N}$ и пусть $I_n^d = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) : \alpha_i \in \{1, \ldots, n\}\}$ – множество индексов. *d-Мерной матрицей A порядка n* будем называть массив чисел $(a_\alpha)_{\alpha \in I_n^d}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

Для $k \in \{0, \ldots, d\}$ *k-мерной гранью* матрицы A называется k-мерная подматрица матрицы A, полученная фиксацией значений $d - k$ координат, в то время как остальные k координат пробегают все n значений. $(d-1)$-Мерную грань d-мерной матрицы будем называть *гипергранью. Направлением* Θ грани матрицы назовем (0,1)-вектор длины d такой, что если в данной грани i-ая координата переменная, то соответствующая ей координата в векторе Θ равна 0, а если она фиксирована, то в векторе Θ i-ая координата равна 1.

Будем говорить, что две многомерные матрицы *эквивалентны*, если их можно перевести друг в друга с помощью перестановок координат (транспонирования) и перестановок гиперграней внутри одного направления.

Для d-мерной матрицы A порядка n и индекса $\alpha \in I_n^d$ *минором элемента* a_α называется d-мерная матрица $(A|\alpha)$ порядка $n-1$, которая получается из матрицы A удалением элементов a_β таких, что $\alpha_i = \beta_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Назовем *нормой* функцию w, которая сопоставляет матрице (или некоторой ее части) сумму всех ее элементов.

Пусть A – произвольная d-мерная матрица порядка n. Обозначим через $D(A)$ множество всех *диагоналей* матрицы A:

$$D(A) = \left\{(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) | \alpha^i \in I_n^d, \forall i \neq j \ \rho(\alpha^i, \alpha^j) = d\right\},$$

где ρ – расстояние Хэмминга (число позиций, в которых два вектора различаются). Другими словами, диагональ – это такой набор из n индексов матрицы, что каждая гипергрань содержит ровно один индекс.

Перманентом многомерной матрицы A называется величина

$$\mathrm{per} A = \sum_{p \in D(A)} \prod_{\alpha \in p} a_\alpha.$$

Определим различные классы многомерных матриц.

Матрицы, у которых все элементы равны нулю или единице будем для краткости называть (0,1)-матрицами. *Диагональная* матрица – это (0,1)-матрица, у которой индексы единичных элементов образуют диагональ. Матрица A называется *неотрицательной*, если $a_\alpha \geq 0$ для всех $\alpha \in I_n^d$.

Дважды стохастическая матрица – это неотрицательная двумерная матрица, для которой сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равна единице. Множество дважды стохастических матриц порядка n обозначается как Ω_n. Дважды стохастические матрицы образуют многогранник в пространстве всех матриц, который часто называют *многогранником Биркгофа*. Перманенты дважды стохастических матриц являются наиболее хорошо изученными объектами в теории двумерных перманентов.

Существует несколько способов обобщить понятие дважды стохастичности на многомерные матрицы. В качестве основного мы будем рассматривать следующее определение. Неотрицательную многомерную матрицу назовем *полистохастической*, если сумма элементов в любой ее одномерной грани равна единице. Множество всех d-мерных полистохастических матриц порядка n обозначим как Ω_n^d.

d-Мерным МДР-кодом порядка n и с расстоянием k называется такой набор из n^{d-k+1} элементов d-мерной матрицы порядка n, что расстояние Хэмминга между индексами различных элементов не меньше k. Другими словами, некоторое подмножество элементов d-мерной матрицы порядка n является МДР-кодом с расстоянием k, если любая $(k-1)$-мерная грань содержит ровно один элемент данного подмножества.

d-Мерным латинским гиперкубом Q порядка n называется d-мерная матрица порядка n, элементы которой принимают n различных значений, и все значения в любой одномерной грани которой различны. Двумерный латинский гиперкуб называется *латинским квадратом*, а трехмерный – *латинским кубом. Трансверсаль* латинского гиперкуба – это диагональ, содержащая все n различных значений. Число трансверсалей в гиперкубе Q будем обозначать как $T(Q)$.

Следующий способ связать многомерный перманент с числом трансверсалей в латинском гиперкубе описан еще в 1968 году в работе В. Б. Юрката и Х. Дж. Райзера [29].

Каждому d-мерному латинскому гиперкубу Q сопоставим $(d+1)$-мерную (0,1)-матрицу A того же порядка по следующему правилу: элемент гиперкуба q_α равен i тогда и только тогда, когда элемент матрицы $a_{\alpha,i}$ равен единице. Несложно видеть, что перманент такой матрицы A равен числу трансверсалей в гиперкубе Q, а сама матрица A является полистохастической матрицей. Будем говорить, что два d-мерных латинских гиперкуба *эквивалентны*, если эквивалентны соответствующие им $(d+1)$-мерные матрицы. В дальнейшем полистохастические d-мерные (0,1)-матрицы порядка n для краткости называются *d-мерными МДР-кодами порядка n*.

Обозначим через $\mathcal{Q}_n^d$ d-мерный латинский гиперкуб порядка n такой, что $q_{\alpha_1,\dots,\alpha_d} = \alpha_{d+1}$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{d+1} \alpha_i \equiv 0 \mod n$. Соответствующий гиперкубу $\mathcal{Q}_n^d$ $(d+1)$-мерный МДР-код порядка n, для которого элемент m_α равен единице тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{d+1} \alpha_i \equiv 0 \mod n$, обозначим как $\mathcal{M}_n^{d+1}$.

Пусть Σ_q есть множество $\{0,\dots,q-1\}$. *n-Арная квазигруппа порядка q* – это алгебраическая система, состоящая из множества Σ_q^n и n-арной операции $f : \Sigma_q^n \to \Sigma_q$ такой, что уравнение $x_0 = f(x_1,\dots,x_n)$ имеет единственное решение относительно любой переменной при произвольной фиксации значений всех остальных n переменных. В дальнейшем мы отождествляем квазигруппу с ее n-арной операцией f.

1-Арная квазигруппа порядка q есть биекция из множества Σ_q на себя, то есть она является некоторой перестановкой из симметрической группы S_q. 2-Арная квазигруппа (*бинарная квазигруппа*) – это стандартная квазигруппа. Таблица умножения любой бинарной квазигруппы порядка q является латинским квадратом порядка q. В общем случае, таблица Кэли n-арной квазигруппы порядка q будет n-мерным латинским гиперкубом того же порядка и наоборот.

Трансверсалью в n-арной квазигруппе f порядка q называется множество $\left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^q$ векторов $\alpha^i = (a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i)$, $a_k^i \in \Sigma_q$, такое, что $a_0^i = f(a_1^i, \ldots, a_n^i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $a_k^i \neq a_k^j$ для всех $i \neq j$ и $k \in \{0, \ldots, n\}$. Другими словами, квазигруппа f имеет трансверсаль, если существует набор перестановок $\tau_1, \ldots, \tau_n$ из симметрической группы S_q такой, что $a = f(\tau_1(a), \ldots, \tau_n(a))$ для всех $a \in \Sigma_q$. Обозначим через $T(f)$ число трансверсалей в квазигруппе f.

Заметим, что между трансверсалями в квазигруппе и в латинском гиперкубе, который представляет собой таблицу Кэли этой квазигруппы, естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие, поэтому все вопросы о трансверсалях в латинских гиперкубах можно переформулировать для квазигрупп и наоборот. Кроме того, график любой n-арной квазигруппы есть некоторый $(n+1)$-мерный МДР-код того же порядка, поэтому подсчет числа трансверсалей в n-арной квазигруппе эквивалентен вычислению перманента некоторой полистохастической (0,1)-матрицы.

n-Арные квазигруппы f и g порядка q *изотопны*, если для некоторого набора из $n+1$ перестановки $\sigma_i \in S_q$, $i = 0, \ldots, n$ выполняется

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sigma_0^{-1}\left(g(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n))\right).$$

n-Арная квазигруппа f порядка q является *суперпозицией* $(n-m)$-арной квазигруппы h и $(m+1)$-арной квазигруппы g, если существует такая перестановка $\sigma \in S_{n+1}$, что для всех $x_0, \ldots, x_n \in \Sigma_q$ верно

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_0 \Leftrightarrow g(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = h(x_{\sigma(m+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

n-Арная квазигруппа f при $n \geq 3$ называется *полностью разделимой*, если она является суперпозицией полностью разделимых квазигрупп h_1 и h_2, арность каждой из которых не меньше 2. Все бинарные квазигруппы также считаются полностью разделимыми.

Одним из наиболее простых примеров полностью разделимых квазигрупп является *n-арная итерированная группа* $\mathbb{Z}_q$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_0 \Leftrightarrow x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0,\ x_i \in \mathbb{Z}_q,$$

где $+$ означает групповую операцию в $\mathbb{Z}_q$. Таблица Кэли этой квазигруппы есть в точности латинский гиперкуб $\mathcal{Q}_q^n$, а ее график – это МДР-код $\mathcal{M}_q^{n+1}$.

Напомним также некоторые определения из теории гиперграфов.

Пара $H = (X, W)$ называется *гиперграфом* с множеством вершин X и множеством гиперребер W, где каждое гиперребро $w \in W$ есть некоторое подмножество вершин X. Гиперграф H называется *d-униформным*, если каждое его гиперребро состоит ровно из d вершин.

Обозначим через H_n^d *полный* d-униформный гиперграф на n вершинах, то есть гиперграф, множество гиперребер которого состоит из всех d-элементных подмножеств вершин.

Степень вершины $x \in X$ в гиперграфе H есть число гиперребер $w \in W$, содержащих x. Гиперграф называется *k-регулярным*, если все его вершины имеют степень k.

Каждому гиперграфу $H(X, W)$ можно однозначно поставить в соответствие двудольный граф $B(X, W; E)$, одна доля которого – это множество вершин X гиперграфа H, а вторая доля – множество его гиперребер W. Вершины x и w графа B соединены ребром, если вершина x принадлежит гиперребру w

в гиперграфе H. Такой граф $B(H) = B(X, W; E)$ будем называть *двудольным представлением* гиперграфа H.

Для гиперграфа $H(X, W)$ *двойственный гиперграф* $H^*(W, H)$ – это гиперграф, в котором множество вершин совпадает с множеством гиперребер H, множество гиперребер H^* соответствует множеству вершин H, а вершина w принадлежит гиперребру x в гиперграфе H^*, если гиперребро w содержит вершину x в гиперграфе H.

Тогда понятия регулярности и униформности будут двойственными в следующем смысле: если гиперграф H – d-регулярный, то двойственный к нему гиперграф H^* будет d-униформным, и наоборот, если H – d-униформный гиперграф, то гиперграф H^* d-регулярный. Также несложно видеть, что если гиперграф H является d-униформным, то степень любой вершины w из доли W в его двудольном представлении B равна d, а если d-регулярным, то степень любой вершины x из доли X в B равна d.

k-Фактором будем называть k-регулярный гиперграф, и будем говорить, что гиперграф H имеет *k-фактор*, если в нем содержится k-регулярный подгиперграф, покрывающий все множество вершин. Гиперграф H называется *1-факторизуемым*, если он может быть представлен в виде непересекающегося по гиперребрам объединения 1-факторов. Обозначим через $\varphi(H)$ количество 1-факторов в гиперграфе H. Заметим, что для существования хотя бы одного 1-фактора в d-униформном гиперграфе H на n вершинах необходимо, чтобы n было кратно d. 1-Факторы в гиперграфах являются естественным обобщением понятия совершенного паросочетания в графах.

Гиперграф H называется *простым*, если он не содержит кратных гиперребер. *Матрицей смежности* $A(H)$ простого d-униформного гиперграфа H на n вершинах назовем такую d-мерную (0,1)-матрицу порядка n, что ее элемент $a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}$ равен единице тогда и только тогда, когда множество вершин $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ является гиперребром гиперграфа H.

Хорошо известно, что число единиц в строке или в столбце матрицы смежности графа равно степени соответствующей вершины. Для матриц смежности гиперграфов аналогичное свойство верно по отношению к гиперграням: число единиц в i-ой гиперграни матрицы $A(H)$ равно $(d-1)!\deg(x_i)$, где $\deg(x_i)$ – степень вершины x_i.

Двойственными объектами к 1-факторам в d-униформных гиперграфах являются трансверсали в d-регулярных гиперграфах. *Трансверсалью* d-регулярного гиперграфа H называется набор вершин, однократно протыкающий каждое гиперребро.

Вершина $x \in X$ в гиперграфе H называется *кратной*, если существует вершина $y \in X$, отличная от x, такая, что наборы гиперребер, инцидентных вершинам x и y, совпадают.

Пусть H – d-регулярный гиперграф без кратных вершин, содержащий n гиперребер. Тогда для гиперграфа H можно построить *матрицу смежности гиперребер* $A^*(H)$, которая будет такой d-мерной (0,1)-матрицей порядка n, что ее элемент $a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}$ равен единице, если в пересечении гиперребер $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ лежит ровно одна вершина гиперграфа H. Заметим, что матрица смежности гиперребер гиперграфа H является матрицей смежности вершин для двойственного гиперграфа H^*, и наоборот:

$$A^*(H) = A(H^*); \qquad A(H) = A^*(H^*).$$

Таким образом, все отношения между числом 1-факторов в гиперграфе и перманентом его матрицы смежности можно переформулировать в терминах числа его трансверсалей и перманента матрицы смежности двойственного гиперграфа.

Гиперграф $H = (X, W)$ назовем *d-дольным*, если множество его вершин может быть разделено на такие d подмножеств (*долей*), что каждое гиперребро содержит ровно по одной вершине из каждого подмножества. Очевидно, что любой d-дольный гиперграф является d-униформным. d-Дольный гиперграф называется *k-сбалансированным*, если все его доли имеют мощность k.

Пусть H – d-дольный гиперграф с долями мощности n. *Матрицей смежности долей* $\tilde{A}(H)$ гиперграфа H назовем такую d-мерную матрицу порядка n, что ее элемент $a_{\alpha_1,\dots,\alpha_d}$ равен кратности гиперребра $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ в гиперграфе H, где α_i – вершина из доли с номером i. Таким образом, между неотрицательными целочисленными d-мерными матрицами и d-дольными сбалансированными гиперграфами есть взаимно однозначное соответствие, и, как несложно видеть, перманент матрицы смежности долей $\tilde{A}(H)$ равен числу 1-факторов в гиперграфе H. Соответствие между числом 1-факторов в простом d-дольном гиперграфе и перманентом многомерных (0,1)-матриц было описано С. Дж. Доу и П. М. Гибсоном в работе [23].

Так как трансверсали являются двойственным понятием к 1-факторам в гиперграфе, то для подходящих гиперграфов можно построить такую многомерную матрицу, что ее перманент будет равен количеству трансверсалей. Опишем эту конструкцию более подробно.

Пусть H есть δ-регулярный гиперграф, разбивающийся на непересекающиеся 1-факторы. Предположим, что каждый 1-фактор гиперграфа H содержит одинаковое число гиперребер, и обозначим их число через η. *Матрицей смежности 1-факторов* назовем δ-мерную матрицу $\tilde{A}^*(H)$ порядка η такую, что ее элемент a_α равен количеству вершин в пересечении гиперребер α_i из i-го 1-фактора по всем $i = 1,\dots,\delta$. Тогда перманент матрицы смежности 1-факторов $\tilde{A}^*(H)$ равен числу трансверсалей в гиперграфе H. Более того, каждой δ-мерной целочисленной матрице с неотрицательными элементами соответствует δ-регулярный гиперграф такой, что ее перманент равен количеству трансверсалей в гиперграфе, и наоборот.

Исторический обзор

Перманенты двумерных матриц

Считается, что понятие перманента двумерных матриц ввел О. Л. Коши в 1812 году в работе [17], а значит, история перманентов насчитывает уже более двухсот лет. Свойства перманентов хорошо изучены, и для них обнаружены разнообразные применения в теории графов, в теории комбинаторных структур, и даже в физике. Наиболее известно использование перманента для подсчета числа совершенных паросочетаний в двудольном графе. Исследованию перманентов посвящено множество работ, причем в значительной их части рассматриваются перманенты дважды стохастических матриц. Максимально полное для своего времени описание свойств перманента приведено в книге Х. Минка [4] 1982 года.

На перманенты двумерных матриц получено множество нижних и верхних оценок. Наиболее известной верхней оценкой является следующая теорема, которая была высказана в качестве гипотезы Х. Минком [36] и доказана в разное время и разными способами в работах Л. М. Брэгмана [2], А. Схрейвера [44] и Дж. Радхакришнана [41].

Теорема 1 (Брэгман). *Пусть A есть двумерная $(0,1)$-матрица порядка n, r_i – число единиц в i-ой строке матрицы A. Тогда*

$$\mathrm{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i}.$$

Равенство достигается на блочно-диагональных матрицах.

Немало других верхних оценок двумерного перманента можно найти в книге Х. Минка [4] или в работе [46].

Положительность перманента двумерных неотрицательных матриц легко проверяется с помощью следующего критерия, который можно либо доказать индукцией по порядку матрицы, либо получить как следствие теоремы Холла о системе различных представителей:

Теорема 2 (Фробениус, Кёниг). *Пусть A есть неотрицательная двумерная матрица порядка n. Перманент A равен нулю тогда и только тогда, когда A содержит такую нулевую $s \times t$-подматрицу, что $s + t = n + 1$.*

Одним из простых следствий теоремы 2 является тот факт, что перманент неотрицательной матрицы, у которой суммы элементов в любой строке и любом столбце совпадают, всегда положителен. Наилучшую нижнюю оценку для перманента таких матриц с целыми элементами дает следующая теорема, доказанная А. Схрейвером в [45]:

Теорема 3 (Схрейвер). *Пусть A есть неотрицательная двумерная матрица порядка n с целыми элементами, и пусть сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы A равна k. Тогда*

$$\mathrm{per} A \geq \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}} \right)^n .$$

Другим важным примером матриц с фиксированными суммами элементов по строкам и столбцам являются дважды стохастические матрицы. Как замечено ранее, из теоремы 2 следует

Теорема 4. *Перманент любой дважды стохастической матрицы положителен.*

На самом деле верно несколько более сильное утверждение:

Теорема 5 (Биркгоф). *Пусть A есть дважды стохастическая матрица порядка n. Тогда*

$$A = \sum_{i=1}^{k} \theta_i P_i,$$

где $P_1, \ldots, P_k$ – диагональные матрицы, а $\theta_1, \ldots, \theta_k$ – неотрицательные числа, $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1$.

Другими словами, углами многогранника Биркгофа дважды стохастических матриц являются диагональные матрицы и только они.

Рассмотрим задачу определения минимума и максимума перманента на множестве дважды стохастических матриц. Несложно понять, что максимум достигается на диагональной (0,1)-матрице и равен единице. На вопрос минимума перманента дважды стохастических матриц дает ответ следующая теорема, которую, как считается, высказал в качестве гипотезы Б. Л. ван дер Варден и которая была доказана в 1980 году независимо Г. П. Егорычевым [3] и Д. И. Фаликманом [9].

Теорема 6 (гипотеза ван дер Вардена). *Минимум перманента в классе дважды стохастических матриц порядка n равен $\frac{n!}{n^n}$ и достигается только на равномерной матрице J_n, каждый элемент которой равен $1/n$.*

Альтернативные доказательства этой теоремы позже были найдены в работах Р. Б. Бэпата [13] и Л. Гурвица [26].

Многомерные обобщения двумерного перманента

Разными авторами неоднократно предпринимались попытки обобщить понятие перманента на многомерные матрицы, но не было выполнено ни одного систематического исследования многомерного перманента и его приложений. Как следствие, в этой области пока не сложилось единых обозначений и терминологии. В ходе выполнения данной работы были упорядочены известные на текущий момент свойства многомерных перманентов и описаны возможные способы применения перманентов к различным задачам дискретной математики.

Одно из первых обобщений перманента на многомерный случай было предложено А. Кэли в 1849 году [18]. Затем упоминание перманента многомерной матрицы и его свойств встречается в книге [39] Т. Мюира, где многомерный перманент возникает как одно из возможных обобщений детерминанта. По аналогичным соображениям многомерные перманенты возникают в книгах [7, 8] Н. П. Соколова, в которых помимо определений приводятся несколько простых свойств.

До последнего времени статьи [22, 23] С. Дж. Доу и П. М. Гибсона, опубликованные в 1980-е годы, были единственными работами, в которых многомерный перманент являлся основным объектом исследования. В этих работах приведены доказательства нескольких несложных, но важных свойств перманентов многомерных матриц.

Естественно предположить, что задачи вычисления и проверки положительности перманента многомерных матриц не проще аналогичных двумерных проблем. Как известно, задача вычисления перманента двумерных (0,1)-матриц лежит в классе $\#P$-полных задач, то есть является одной из наиболее сложных вычислительных проблем. Но для проверки положительности двумерного перманента существует несложный полиномиальный алгоритм, основанный на теореме Кёнига–Фробениуса. В многомерном случае уже задача распознавания положительности перманента трехмерных (0,1)-матриц является NP-полной, так как она эквивалентна NP-полной задаче о максимальном 1-факторе в 3-униформном 3-дольном гиперграфе. Тем не менее, для некоторых многомерных матриц предложены полиномиальные алгоритмы вычисления их перманента [19].

Существует несколько возможных обобщений двумерного перманента на многомерный случай. Основное отличие между ними состоит в различных определениях диагонали.

В этой работе рассматривается перманент, в котором под диагоналями d-мерной матрицы понимаются МДР-коды с расстоянием d. Между тем, в качестве диагоналей можно использовать МДР-коды и с другими расстояниями.

Пусть A – d-мерная матрица порядка n. Определим *r-диагональ* матрицы A как множество индексов элементов МДР-кода с расстоянием r и обозначим через $D_r(A)$ множество всех r-диагоналей матрицы A. *r-Перманентом* матрицы A будем называть величину

$$\mathrm{per}_r A = \sum_{p \in D_r(A)} \prod_{\alpha \in p} a_\alpha.$$

При $r = d$ имеем определение перманента, принятое за основное в этой работе. Как известно, только МДР-коды с расстояниями 2 и d существуют в любой d-мерной матрице. Поэтому случай $r = 2$, как и $r = d$, достоин особого внимания. Кроме того, для 2-перманента также можно найти приложения в задачах перечисления. Например, количество $(d-1)$-мерных латинских гиперкубов порядка n равно 2-перманенту единичной d-мерной матрицы E_n^d порядка n. С помощью оценки 2-перманента такой матрицы Н. Линиал и З. Лурия получили следующий результат:

Теорема 7 ([33]). *Пусть $LC(d,n)$ – количество d-мерных латинских гиперкубов порядка n. Тогда*

$$LC(d,n) \leq \left((1+o(1))\frac{n}{e^d}\right)^{n^d} \text{ при } n \to \infty.$$

В пользу выбора d-перманента как основного обобщения двумерного перманента говорит тот факт, что r-перманент любой d-мерной матрицы A порядка n равен d-перманенту подходящей многомерной матрицы. Впервые такая конструкция была описана С. Дж. Доу и П. М. Гибсоном в работе [23], и с ее помощью они получили следующую оценку 2-перманента.

Теорема 8 ([22]). *Пусть A – трехмерная $(0,1)$-матрица порядка n, и пусть $r_{i,j}$ – число единиц в (i,j)-ой одномерной грани некоторого направления. Тогда*

$$\mathrm{per}_2 A \leq \prod_{i,j=1}^{n} r_{i,j}!^{1/r_{i,j}}.$$

Цели и структура работы

Основной **целью** данной работы является изучение свойств перманента многомерных матриц и поиск возможностей для его применения к оценке и подсчету числа различных комбинаторных структур. По-видимому, множество возможных приложений многомерных перманентов существенно богаче, чем множество приложений перманентов двумерных матриц. Многомерные перманенты тесно связаны с такими объектами, как трансверсали в латинских гиперкубах, 1-факторы в гиперграфах, замощения транзитивных графов, МДР-коды и комбинаторные дизайны. Многие результаты относительно данных объектов, можно переформулировать в терминах перманентов многомерных матриц, а многомерные перманенты в свою очередь могут помочь в решении некоторых проблем для таких объектов. Как и в случае двумерных матриц, многомерные перманенты находят свое применение в физике для описания взаимодействий элементарных частиц, о чем свидетельствует работа [48].

Часто матрицы, перманенты которых возникают в различных приложениях, имеют специальную структуру. Обычно это неотрицательные матрицы, у которых ненулевые элементы распределены по граням регулярным образом. Поэтому актуально отдельное рассмотрение перманентов многомерных матриц, у которых фиксированы суммы элементов по граням некоторой размерности. Такие классы матриц являются в некотором роде обобщением дважды стохастических матриц на многомерный случай, и для одного из таких классов, а именно для полистохастических матриц, в этой работе получен ряд свойств.

Опишем **структуру** данной работы.

В **первой** главе приведены такие основные свойства перманента многомерных матриц, как полилинейность, монотонность на множестве неотрицательных матриц, разложение перманента по гиперграни, разложение на сумму перманентов матриц меньшей размерности и другие. В качестве примеров посчитаны перманенты равномерной матрицы, всех полистохастических матриц порядка 2 и матрицы, являющейся дополнением к диагональной матрице. Также рассмотрена конструкция неотрицательных многомерных матриц четной размерности и четного порядка с нулевым перманентом, в каждой одномерной грани которых половина элементов отлична от нуля. Глава завершается списком комбинаторных объектов, количество которых можно выразить как перманент многомерной матрицы или как число 1-факторов гиперграфа, с описанием соответствующих конструкций.

Во **второй** главе рассматриваются перманенты полистохастических матриц и исследуется возможность обобщения теорем для дважды стохастических матриц на многомерный случай. В частности, доказано, что перманент любой полистохастической матрицы порядка 3 отличен от нуля и что равномерная матрица будет локальным экстремумом для перманента на множестве полистохастических матриц. В многомерном случае на равномерной матрице уже не будет глобального максимума или минимума перманента среди всех полистохастических матриц, что, например, подтверждается конструкцией многомерных матриц четной размерности и достаточно большого порядка, перманент которых асимптотически меньше перманента равномерной матрицы.

В **третьей** главе получены верхние оценки на перманент полистохастических и многомерных (0,1)-матриц. Одним из основных результатов данной главы является следующая оценка перманента полистохастических матриц.

Теорема 9. *Пусть $d \geq 3$ и пусть Ω_n^d есть множество всех d-мерных полистохастических матриц порядка n. Тогда*

$$\max_{A \in \Omega_n^d} \mathrm{per} A = \left((1 + o(1)) \frac{n^{d-2}}{e^{d-1}} \right)^n \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, максимум перманента полистохастических матриц асимптотически равен перманенту равномерной матрицы той же размерности и того же порядка. Аналогичная асимптотическая оценка верна и для многомерных матриц, достаточно близких к полистохастическим. Для многомерных (0,1)-матриц доказано несколько верхних оценок перманента, основанных либо на числе единиц в гипергранях матрицы, либо на распределении единиц по граням всех размерностей.

Основной результат **четвертой** главы есть верхняя оценка числа 1-факторов в d-униформном гиперграфе с помощью перманента его матрицы смежности.

Теорема 10. *Пусть H – простой d-униформный гиперграф на n вершинах, причем d делит n. Введем функцию $\mu(n, d)$ такую, что $\mu(n, 2) = 1$, $\mu(n, 3) =$*

$\left(\frac{2^{3/2}}{3}\right)^n$ *для всех* n *и*

$$\mu(n,d) = \left(\frac{d!^2}{d^d d!^{1/d}}\right)^n$$

для всех $d \geq 4$. *Тогда число* 1-*факторов в гиперграфе* H

$$\varphi(H) \leq \left(\frac{\mathrm{per} A(H)}{\mu(n,d)}\right)^{1/d}.$$

Данная теорема является обобщением на случай униформных гиперграфов следующей теоремы Н. Алона и С. Фридленда из работы [11].

Теорема 11. *Число* 1-*факторов в простом графе* G *не превосходит квадратного корня из перманента его матрицы смежности.*

С помощью теоремы 10 оценено число 1-факторизаций полного d-униформного гиперграфа H_n^d на n вершинах.

Теорема 12. *Если* $d = 3$, *то число* 1-*факторизаций полного* 3-*униформного гиперграфа* H_n^3 *на* n *вершинах удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(n,3) \leq \left((1+o(1))\frac{3n^2}{2^{3/2}\cdot e^3}\right)^{\frac{n^3}{6}} \text{ при } n \to \infty,$$

а для всех $d \geq 4$ *число* 1-*факторизаций* H_n^d

$$\Phi(n,d) \leq \left((1+o(1))\left(\frac{d}{e}\right)^d \frac{n^{d-1}}{d!^{2-1/d}}\right)^{\frac{n^d}{d!}} \text{ при } n \to \infty.$$

В **пятой** главе рассматриваются задачи о числе трансверсалей в квазигруппах, латинских квадратах и гиперкубах, которые эквивалентны вопросам о перманенте МДР-кодов. Проблема оценки максимального числа трансверсалей в латинских квадратах была поднята Я. М. Уонлессом на конференции Loops'03, а вопрос о трансверсалях в латинских гиперкубах был им сформулирован в виде следующей гипотезы.

Гипотеза 1 ([51]). *Любой латинский гиперкуб нечетной размерности или нечетного порядка имеет трансверсаль.*

Простым следствием теоремы 9 является верхняя оценка числа трансверсалей в латинских гиперкубах и квадратах.

Теорема 13. *Пусть $T(n,d)$ – максимальное число трансверсалей в d-мерных латинских гиперкубах порядка n. Тогда*

$$T(n,d) \leq \left((1+o(1))\frac{n^{d-1}}{e^d}\right)^n \text{ при } n \to \infty.$$

В частности, число трансверсалей в латинских квадратах порядка n асимптотически не превосходит $\left((1+o(1))\frac{n}{e^2}\right)^n$.

Из работ [24, 25] следует, что дальнейшее существенное улучшение асимптотики в теореме 13 невозможно. Предыдущая наилучшая верхняя оценка на число трансверсалей в латинских квадратах имела вид $c^n\sqrt{n}n!$, где $c \approx 0,614$, и была получена в работе [37].

Также в этой главе доказана нижняя оценка на число трансверсалей в латинских гиперкубах $\mathcal{Q}_n^d$ и найдено количество трансверсалей в латинских гиперкубах порядка 2 и 3.

Вторая часть пятой главы посвящена трансверсалям в полностью разделимых квазигруппах и в квазигруппах порядка 4. Для полностью разделимых квазигрупп нечетной арности и для довольно широкого семейства квазигрупп четной арности доказана нижняя оценка на число трансверсалей. Для одного класса квазигрупп порядка 4, известного как класс полулинейных квазигрупп, найдена характеризация всех возможных трансверсалей, что позволило посчитать количество трансверсалей в итерированных группах $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2^2$ и описать все квазигруппы порядка 4, не содержащие трансверсалей.

Теорема 14. *Пусть f – n-арная квазигруппа порядка 4, не содержащая трансверсалей. Тогда n четно и f изотопна итерированной группе $\mathbb{Z}_4$.*

Полученные в этой главе результаты подтверждают гипотезу 1 для всех латинских гиперкубов порядка $n \leq 4$ и для всех полностью разделимых n-арных квазигрупп нечетной арности.

Публикации. Результаты, полученные в данной диссертации, опубликованы в 14 работах [53–66], из которых 6 работ издано в журналах из списка ВАК [53–58], а 8 работ – в трудах и тезисах конференций [59–66].

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- IX Молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям. (Москва, 2013).
- Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory. (Москва, 2014).
- European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications 2015. (Берген, Норвегия, 2015).
- 39th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. (Брисбен, Австралия, 2015).
- 7th European Congress of Mathematics (Берлин, Германия, 2016).
- International Conference and PhD-Master Summer School on Graphs and Groups, Spectra and Symmetries. (Новосибирск, 2016).
- Семинар по теории кодирования Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН. (2014).
- Общеинститутский семинар Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. (2016).
- Семинары «Теория кодирования» и «Дискретный анализ» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и кафедры теоретической кибернетики НГУ. (2013–2017).

Благодарности. Я глубоко признательна своему научному руководителю В. Н. Потапову за всестороннюю поддержку и проявленный интерес к данной работе. Я благодарна С. В. Августиновичу за полезные обсуждения и идеи по развитию темы работы. Также я благодарна рецензентам своих печатных работ, замечания которых позволили существенно улучшить их тексты и исправить несколько ошибок. В заключение хочу поблагодарить сотрудников лаборатории алгебраической комбинаторики Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН за оказанную поддержку.

1 Свойства, примеры и некоторые применения перманента многомерных матриц

1.1 Простейшие свойства перманентов многомерных матриц

Свойство 1. *Перманенты эквивалентных матриц совпадают.*

Свойство 2. *Перманент является линейной функцией относительно гиперграней матрицы: при умножении любой гиперграни матрицы на число с перманент также умножатся на с; сумма перманентов матриц, отличающихся лишь одной гипергранью, равна перманенту матрицы, у которой эти гиперграни просуммированы.*

Свойство 3. *Для многомерных перманентов верен аналог разложения Лапласа: если* Γ *– гипергрань* d*-мерной матрицы* A *порядка* n*, то*

$$\mathrm{per} A = \sum_{a_\alpha \in \Gamma} a_\alpha \mathrm{per}(A|\alpha).$$

Свойство 4. *Пусть* A *и* B *есть неотрицательные* d*-мерные матрицы порядка* n *такие, что для любого* $\alpha \in I_n^d$ *элемент* b_α *меньше или равен* a_α*. Тогда* $\mathrm{per} B \leq \mathrm{per} A$.

Свойство 5. *Для положительности перманента неотрицательной* d*-мерной матрицы порядка* n *необходимо, чтобы для любой ее нулевой подматрицы, имеющей габариты* $x_1 \times \ldots \times x_d$*, выполнялось условие*

$$\sum_{i=1}^{d} x_i \leq (d-1)n.$$

Равенство достигается на диагональной матрице.

Доказательство. Заметим, что если перманент матрицы положителен, то существует множество из n ненулевых элементов, протыкающее все n гиперграней одного направления. Рассмотрим нулевую подматрицу с габаритами $x_1 \times \ldots \times x_d$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, d$ число гиперграней i-го направления, непересекающихся с этой подматрицей, равно $n - x_i$.

Если существует нулевая подматрица, для которой выполнено $\sum\limits_{i=1}^{d}(n - x_i) < n$, то все ненулевые элементы матрицы можно покрыть менее чем n гипергранями, что противоречит положительности перманента. □

Свойство 6. *Если d-мерная $(0,1)$-матрица A порядка n содержит ровно t нулей, то*

$$\mathrm{per} A \geq (n^{d-1} - t)(n-1)!^{d-1}.$$

Доказательство. Это свойство есть простое следствие того, что через каждый элемент d-мерной матрицы порядка n проходит ровно $(n-1)!^{d-1}$ диагоналей. □

Свойство 7. *Перманент многомерной матрицы можно выразить как сумму перманентов матриц меньшей размерности следующим образом.*

Пусть A есть d-мерная матрица порядка n и пусть $1 \leq k \leq d-2$. Зафиксируем направление k-мерных граней и занумеруем все грани этого направления $(d-k)$-мерными индексами. Определим множество Σ как множество таких отображений $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to I_n^{d-k}$, что $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ – диагональ в $(d-k)$-мерной матрице. Тогда

$$\mathrm{per} A = \sum_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{per} A_\sigma,$$

где A_σ – $(k+1)$-мерные матрицы порядка n, i-ая гипергрань которых есть $\sigma(i)$-ая k-мерная грань матрицы A.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что k-мерные грани матрицы A задаются фиксацией значений первых $d-k$ координат. По опре-

делению
$$\mathrm{per}A = \sum_{p\in D(A)} \prod_{\alpha\in p} a_\alpha.$$

Разобьем все множество диагоналей $D(A)$ матрицы A на подмножества

$$D_\sigma(A) = \{p \in D(A) | p = ((\sigma(1), *, \ldots, *), \ldots, (\sigma(n), *, \ldots, *))\},$$

где на месте $*$ могут стоять произвольные элементы множества $\{1, \ldots, n\}$. Перегруппируем слагаемые в сумме, определяющей перманент:

$$\mathrm{per}A = \sum_{\sigma\in\Sigma} \sum_{p\in D_\sigma(A)} \prod_{\alpha\in p} a_\alpha.$$

Остается заметить, что для фиксированного σ величина $\sum\limits_{p\in D_\sigma(A)} \prod\limits_{\alpha\in p} a_\alpha$ равна перманенту матрицы A_σ. □

Свойство 8. *Пусть A есть неотрицательная d-мерная матрица порядка n, а r_β – сумма элементов матрицы A в одномерных гранях некоторого направления, $\beta \in I_n^{d-1}$. Рассмотрим $(d-1)$-мерную матрицу B порядка n с элементами r_β. Тогда*
$$\mathrm{per}A \leq \mathrm{per}B.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что известны суммы в таких одномерных гранях матрицы A, у которых фиксированы значения всех координат кроме последней. По определению

$$\mathrm{per}B = \sum_{p\in D(B)} \prod_{\beta\in p} r_\beta = \sum_{p\in D(B)} \prod_{\beta\in p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{\beta,i} \right).$$

После раскрытия скобок это выражение можно переписать следующим образом:

$$\mathrm{per}B = \sum_{p\in D(B)} \left(\prod_{i=1,\ldots,n,\ \beta_i\in p} a_{\beta_i,i} + R(p) \right) = \mathrm{per}A + \sum_{p\in D(B)} R(p),$$

где $R(p)$ включает в себя слагаемые вида $\prod\limits_{i=1,\ldots,n,\ \beta_i\in p} a_{\beta_i,k_i}$, в которых числа k_i могут повторяться.

Так как матрица A неотрицательна, то $\sum\limits_{p\in D(B)} R(p)$ не меньше нуля, а значит, $\mathrm{per}B \geq \mathrm{per}A$. □

1.2 Примеры

Пример 1. *Равномерной* матрицей J_n^d назовем такую d-мерную матрицу порядка n, у которой каждый элемент равен $1/n$. Очевидно, что матрица J_n^d является полистохастической матрицей.

Число диагоналей в любой d-мерной матрице порядка n равно $n!^{d-1}$. По свойству 2 перманент равномерной матрицы в n^n раз меньше числа всех диагоналей. Следовательно,

$$\mathrm{per}J_n^d = \frac{n!^{d-1}}{n^n}.$$

Пример 2. Пусть E_n^d – d-мерная матрица порядка n, каждый элемент которой равен единице, D_n^d – диагональная d-мерная матрица порядка n. Найдем перманент матрицы $E_n^d - D_n^d$ с помощью принципа включения-исключения: из множества всех диагоналей матрицы E_n^d исключим те диагонали, которые проходят через один из элементов единичной диагонали D_n^d, затем добавим диагонали, проходящие ровно через два элемента этой диагонали, и так далее. Таким образом, имеем

$$\mathrm{per}(E_n^d - D_n^d) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)!^{d-1}.$$

Эта формула была впервые получена С. Дж. Доу и П. М. Гибсоном в работе [23].

Пример 3. Посчитаем перманент всех полистохастических матриц порядка 2. Так как сумма элементов в любой одномерной грани полистохастических матриц равна единице, то элементы таких матриц порядка 2 могут принимать лишь два значения. Пусть $A_2^d(x)$ – d-мерная матрица порядка 2, элемент a_α которой равен x, если индекс α содержит четное число единиц, и a_α равен $1-x$, если α содержит нечетное число единиц, $0 \leq x \leq 1$.

Любая диагональ матрицы $A_2^d(x)$ есть набор из двух индексов, которые переводятся друг в друга заменой в каждой позиции единицы на двойку и наоборот.

Если размерность d четна, то количество единиц в индексах из одной диагонали имеет одинаковую четность, а значит, на любой диагонали матрицы $A_2^d(x)$ стоят два одинаковых элемента. В силу симметрии, половина диагоналей этой матрицы вносит в перманент вклад равный x^2, а другая половина – $(1-x)^2$. Следовательно, для четной размерности

$$\mathrm{per} A_2^d(x) = 2^{d-2}(x^2 + (1-x)^2).$$

Максимум перманента четномерных матриц $A_2^d(x)$ достигается на (0,1)-матрице и равен 2^{d-2}, а минимум находится на равномерной матрице и равен 2^{d-3}.

Если размерность d нечетна, то количество единиц в индексах из одной диагонали имеет разную четность. Следовательно, любая диагональ $A_2^d(x)$ содержит как элемент x, так и $1-x$. Поэтому для нечетной размерности

$$\mathrm{per} A_2^d(x) = 2^{d-1}x(1-x).$$

Максимум перманента нечетномерных матриц $A_2^d(x)$ достигается на равномерной матрице и равен 2^{d-3}, а минимум находится на (0,1)-матрице и равен нулю.

Пример 4. Построим множество многомерных (0,1)-матриц с нулевым перманентом, у которых половина элементов любой одномерной грани равна единице. Этот пример ранее приводился в работах [10, 15].

Пусть d нечетно и $n \equiv 2 \mod 4$. Рассмотрим d-мерную (0,1)-матрицу A порядка n такую, что ее элемент a_α равен единице тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i$ четна. Заметим, что число нулей в любой одномерной грани матрицы A равно числу единиц.

Предположим, что перманент матрицы A больше нуля, и пусть $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$

есть единичная диагональ в матрице A. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^j.$$

С одной стороны, S – четно, так как по определению матрицы A величина $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^j$ четна для любого $j = 1, \ldots, n$. С другой стороны, так как все α_i^j различны для фиксированного i, то

$$S = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j = \sum_{i=1}^{d} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{dn(n+1)}{2},$$

и S нечетно. Противоречие.

1.3 Применение перманента для подсчета числа комбинаторных объектов

Актуальность рассматриваемых в данной работе задач поиска эффективных оценок числа 1-факторов в униформных гиперграфах и перманентов многомерных матриц обусловлена тем, что существует немало комбинаторных объектов, количество которых выражается в терминах числа 1-факторов некоторого гиперграфа или перманента многомерной матрицы. Перечислим некоторые из них.

1. *Системой Штейнера с параметрами* t, k, n $(t < k < n)$ называется такой набор k-элементных блоков в некотором n-элементном множестве X, что любое t-элементное подмножество множества X содержится ровно в одном блоке. Пусть $S(t, k, n)$ – количество систем Штейнера с параметрами t, k, n. Для подсчета этого числа рассмотрим D-униформный гиперграф $H_S(t, k, n)$ на N вершинах, где $D = C_k^t$, а $N = C_n^t$. Вершинами гиперграфа $H_S(t, k, n)$ являются все t-элементные подмножества в n-элементном множестве X, а гиперребро состоит из таких D вершин, что их объединение дает k-элементное множество.

Тогда число 1-факторов в гиперграфе $H_S(t,k,n)$ совпадает с числом систем Штейнера:

$$\varphi(H_S(t,k,n)) = S(t,k,n).$$

Проблемам существования систем Штейнера с заданными параметрами и оценки их числа посвящено немало работ. Например, верхняя оценка на число троек Штейнера доказана в работе [32], а асимптотика числа систем Штейнера для любых допустимых наборов параметров анонсирована в [30].

2. Рассмотрим граф $G(V,E)$ такой, что все его максимальные клики имеют мощность d. Набор максимальных клик назовем *совершенным кликосочетанием*, если объединение этих клик однократно покрывает все вершины графа. Обозначим через $PCM(G)$ число совершенных кликосочетаний в графе G. Построим по графу G d-униформный гиперграф $H_{PCM}(G)$ такой, что вершины этого гиперграфа являются вершинами графа G, а гиперребра $H_{PCM}(G)$ соответствуют максимальным кликам в графе G. Легко видеть, что число 1-факторов в гиперграфе $H_{PCM}(G)$ равно числу совершенных кликосочетаний в графе G:

$$\varphi(H_{PCM}(G)) = PCM(G).$$

3. Следующая конструкция была предложена С. В. Августиновичем в работе [1].

Пусть $G(V,E)$ – регулярный граф. Обозначим через $\mathrm{Aut}(G)$ группу автоморфизмов графа G (группу отображений вершин графа на себя, сохраняющих смежность). Граф G называется *транзитивным*, если группа $\mathrm{Aut}(G)$ транзитивно действует на множестве его вершин, то есть если для любых $u, v \in V$ существует автоморфизм $a \in \mathrm{Aut}(G)$ такой, что $u = a(v)$.

Выберем некоторое подмножество S мощности d вершин регулярного транзитивного графа G и назовем его плиткой. Набор автоморфизмов $\{a_i\}_{i=1}^n$ называется замощением графа G плиткой S, если $a_i(S) \cap a_j(S) = \emptyset$ для всех $i \neq j$, и для каждой вершины $v \in V$ существует такой автоморфизм a_i, что v принадлежит $a_i(S)$. Обозначим через $T(G,S)$ число замощений графа G плиткой S.

Построим d-униформный гиперграф $H_T(G,S)$, вершинами которого являются все вершины графа G, а каждое гиперребро есть множество вершин $a(S)$ для некоторого автоморфизма $a \in \mathrm{Aut}(G)$. Если гиперграф $H_T(G,S)$ является d-дольным (то есть если его вершины можно разбить на d групп мощности n так, чтобы пересечение всех $a(S)$ с любой из этих групп было не пусто), то для него можно построить матрицу смежности долей $A_T(G,S)$, которая будет иметь размерность d и порядок n, и перманент которой совпадет с числом замощений графа G плиткой S:

$$\mathrm{per} A_T(G,S) = T(G,S).$$

Большинство перечисленных далее конструкций являются частными случаями данной.

4. *Замощением* конечной абелевой группы $\langle R,+\rangle$ называется такая пара подмножеств (плиток) S и T, что $S+T=R$ и $|S||T|=|R|$. Обозначим через s мощность плитки S, а через $GT(R,S)$ число замощений группы R плиткой S. Рассмотрим гиперграф $H_{GT}(R,S)$, множеством вершин которого является множество всех элементов группы R, а гиперребра есть множества вида $x-S$ для некоторого элемента $x \in R$. Заметим, что число гиперребер в этом гиперграфе равно числу его вершин и что он является s-униформным и s-регулярным. Если в группе R существует хотя бы одно замощение (S,T) плиткой S, то гиперграф $H_{GT}(R,S)$ будет s-дольным, причем в качестве долей можно взять множества $s+T$, $s \in S$. Любому замощению группы R плиткой S можно поставить в соответствие как 1-фактор в $H_{GT}(R,S)$, так и трансверсаль. Таким образом, число замощений группы R равно и перманенту матрицы смежности долей $A_{GT}(R,S)$ размерности s и порядка $|R|/s$, и перманенту матрицы смежности 1-факторов $A^*_{GT}(R,S)$ той же размерности и того же порядка:

$$GT(R,S) = \mathrm{per} A_{GT}(R,S) = \mathrm{per} A^*_{GT}(R,S).$$

5. Пусть $\mathbb{Z}_2^n$ есть булев гиперкуб размерности n. *Совершенным кодом* C в гиперкубе $\mathbb{Z}_2^n$ называется такое подмножество, что любой шар единичного радиуса в $\mathbb{Z}_2^n$ содержит ровно один элемент из C.

Несложно видеть, что мощность каждого совершенного кода C равна $N = \frac{2^n}{n+1}$. Совершенные коды существуют только в булевых гиперкубах $\mathbb{Z}_2^n$ с $n = 2^m - 1$, причем любой такой гиперкуб можно разбить на $D = n + 1$ непересекающихся совершенных кодов. Обозначим через $PC(n)$ число совершенных кодов в гиперкубе $\mathbb{Z}_2^n$.

Заметим, что граф кратчайших расстояний в гиперкубе $\mathbb{Z}_2^n$ будет транзитивным графом, в качестве плитки в нем мы рассмотрим шар единичного радиуса и построим D-униформный гиперграф $H_{PC}(n)$, число 1-факторов в котором будет равно числу замощений булева куба шарами единичного радиуса. Так как гиперкуб $\mathbb{Z}_2^n$ разбивается на совершенные коды, то гиперграф $H_{PC}(n)$ будет D-дольным, а если в качестве автоморфизмов куба $\mathbb{Z}_2^n$ мы будем рассматривать только сдвиги на ненулевой вектор, то $H_{PC}(n)$ будет простым. Матрица смежности долей гиперграфа $H_{PC}(n)$ является D-мерной (0,1)-матрицей порядка $N = \frac{2^n}{n+1}$, и число всех совершенных кодов в булевом гиперкубе $\mathbb{Z}_2^n$ совпадает с ее перманентом:

$$\mathrm{per} A_{PC}(n) = PC(n).$$

6. Обозначим через $\mathbb{Z}_q^n$ n-мерный гиперкуб порядка q, а через $MDS(n, q, d)$ количество МДР-кодов с расстоянием d в $\mathbb{Z}_q^n$. .

Построим гиперграф $H_{MDS}(n, q, d)$, вершинами которого являются все $(d-1)$-мерные грани в гиперкубе $\mathbb{Z}_q^n$, а любое гиперребро есть такой набор различных $D = C_n^{d-1}$ $(d-1)$-мерных граней, что в их пересечении лежит ровно один элемент гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$. Полученный гиперграф является простым и D-дольным, где в качестве долей можно взять все $(d-1)$-мерные грани одного направления.

Матрица смежности долей $A_{MDS}(n, q, d)$ этого гиперграфа будет D-мерной (0,1)-матрицей порядка $N = q^{n-d+1}$, и ее перманент совпадает с числом МДР-кодов с расстоянием d в кубе $\mathbb{Z}_q^n$:

$$\mathrm{per}A_{MDS}(n,q,d) = MDS(n,q,d).$$

7. Рассмотрим снова n-мерный гиперкуб $\mathbb{Z}_q^n$ порядка q. Обозначим через $PMDS(n,q,d)$ число разбиений гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ на МДР-коды с расстоянием d. Построим простой гиперграф $H_{PMDS}(n,q,d)$, вершинами которого являются вершины гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$, а гиперребра соответствуют МДР-кодам с расстоянием d в $\mathbb{Z}_q^n$. Если такие МДР-коды существуют, то гиперграф $H_{PMDS}(n,q,d)$ будет не пустым и q^{n-d+1}-дольным, где в качестве долей можно взять множества вершин $(d-1)$-мерных граней одного направления.

Пусть $A_{PMDS}(n,q,d)$ – матрица смежности долей этого гиперграфа. Размерность D матрицы $A_{PMDS}(n,q,d)$ равна q^{n-d+1}, ее порядок N равен q^{d-1}. Перманент (0,1)-матрицы $A_{PMDS}(n,q,d)$ равен числу разбиений куба $\mathbb{Z}_q^n$ на МДР-коды с расстоянием d:

$$\mathrm{per}A_{PMDS}(n,q,d) = PMDS(n,q,d).$$

Данная конструкция может использоваться для подсчета числа латинских гиперкубов. Любой n-мерный латинский гиперкуб порядка q можно рассматривать как упорядоченное разбиение гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$ на МДР-коды с расстоянием 2. Если обозначить через $LC(n,q)$ число n-мерных латинских гиперкубов порядка q, то

$$LC(n,q) = q!PMDS(n,q,2) = q!\mathrm{per}A_{PMDS}(n,q,2).$$

В частности, число латинских квадратов порядка q выражается с помощью перманента q-мерной (0,1)-матрицы $A_{PMDS}(2,q,2)$ порядка q, элемент a_α которой равен единице, если набор индексов $\{(i,\alpha_i)\}_{i=1}^q$ является диагональю в квадрате $\mathbb{Z}_q^2$ порядка q:

$$LC(2,q) = q!PMDS(2,q,2) = q!\mathrm{per}A_{PMDS}(2,q,2).$$

Для подсчета числа латинских прямоугольников размера $k \times q$ строится k-мерная матрица порядка q со структурой, аналогичной матрице $A_{PMDS}(2, q, 2)$. Единичным элементам такой матрицы соответствуют наборы из k элементов прямоугольника $k \times q$, расположенных в разных строках и столбцах.

Асимптотическая верхняя оценка числа латинских гиперкубов доказана в [33].

8. С помощью многомерного перманента можно выразить не только число систем Штейнера, но и число H-дизайнов и A-дизайнов, являющихся их обобщениями, что было показано В. Н. Потаповым в работе [40].

Дизайном типа $H(n, q, w, t)$, где $n \geq w \geq t$, называется такой набор $(n-w)$-мерных граней гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$, что каждая $(n-t)$-мерная грань $\mathbb{Z}_q^n$ содержит ровно одну грань из этого набора. Заметим, что при $w = n$ дизайн $H(n, q, n, t)$ является МДР-кодом с расстоянием $d = n - t + 1$. *Дизайном типа* $A(n, q, w, t)$ называется такой набор $(n-t)$-мерных граней гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$, который однократно покрывает все его $(n-w)$-мерные грани.

Рассмотрим простой q^{w-t}-униформный гиперграф $H_{AHD}(n, q, w, t)$, вершины которого есть $(n-w)$-мерные грани гиперкуба $\mathbb{Z}_q^n$, а гиперребра состоят из таких q^{w-t} вершин, что объединение соответствующих им граней в гиперкубе $\mathbb{Z}_q^n$ дает $(n-t)$-мерную грань. Тогда число 1-факторов в гиперграфе $H_{AHD}(n, q, w, t)$ равно количеству A-дизайнов $A(n, q, w, t)$, а число его трансверсалей равно количеству H-дизайнов $H(n, q, w, t)$. Если гиперкуб $\mathbb{Z}_q^n$ разбивается на непересекающиеся H-дизайны, то число A-дизайнов в этом гиперкубе равно перманенту матрицы смежности долей гиперграфа $H_{AHD}(n, q, w, t)$, и наоборот, если $\mathbb{Z}_q^n$ разбивается на непересекающиеся A-дизайны, то число его H-дизайнов равно перманенту матрицы смежности 1-факторов гиперграфа $H_{AHD}(n, q, w, t)$.

9. Пусть X – множество из kd точек в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$, $k \geq 1$. Точка $p \in \mathbb{R}^{d-1}$ называется *точкой Бёрча* для множества X, если существует такое разбиение множества X на k подмножеств из d точек, что выпуклая оболочка каждого из k подмножеств содержит точку p. Разбиение множества X с таким

свойством назовем *разбиением Бёрча* относительно точки p, а через $BP(X,p)$ обозначим количество разбиений Бёрча.

Для множества точек X и точки p в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$ построим d-униформный гиперграф $H_{BP}(X,p)$: множество вершин этого гиперграфа есть множество точек X, и d точек объединены в гиперребро, если их выпуклая оболочка содержит точку p. Тогда число 1-факторов в гиперграфе $H_{BP}(X,p)$ равно числу разбиений Бёрча множества X относительно точки p:

$$\varphi(H_{BP}(X,p)) = BP(X,p).$$

Некоторые результаты о числе разбиений Бёрча изложены в [27].

10. Пусть X – множество из nd цветных точек в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$, причем число точек одного цвета равно n, и пусть p – точка в $\mathbb{R}^{d-1}$. *Цветным разбиением Бёрча* множества X относительно точки p назовем такое его разбиение на n непересекающихся подмножеств, что каждое подмножество состоит из d точек разных цветов и содержит в своей выпуклой оболочке точку p. Обозначим через $CBP(X,p)$ количество цветных разбиений Бёрча множества X относительно точки p.

Для фиксированного множества цветных точек X и точки p построим простой d-униформный гиперграф $H_{CBP}(X,p)$, множество вершин которого есть множество X, а набор из d разноцветных вершин составляет гиперребро, если их выпуклая оболочка содержит точку p. Очевидно, что этот гиперграф будет d-дольным, где долями являются множества точек одного цвета.

Матрица смежности долей $A_{CBP}(X,p)$ такого гиперграфа имеет размерность d и порядок n, и ее перманент равен числу цветных разбиений Бёрча множества X относительно точки p:

$$\mathrm{per} A_{CBP}(X,p) = CBP(X,p).$$

Оценки числа цветных разбиений Бёрча могут быть найдены в [28].

2 Полистохастические матрицы и классические теоремы для двумерных матриц

2.1 Положительность перманента и теорема Биркгофа

Так как любая выпуклая комбинация полистохастических матриц дает полистохастическую матрицу, то все d-мерные полистохастические матрицы порядка n образуют выпуклый многогранник в n^d-мерном пространстве d-мерных матриц порядка n. По аналогии с двумерным случаем, многогранник полистохастических матриц назовем *многогранником Биркгофа*. Несложно проверить, что размерность многогранника Биркгофа равна $(n-1)^d$.

Напомним, что в классе дважды стохастических матриц существует единственная с точностью до перестановки строк и столбцов матрица, состоящая из нулей и единиц. В d-мерном случае для достаточно больших порядков n существует множество неэквивалентных полистохастических (0,1)-матриц (неэквивалентных МДР-кодов).

Несмотря на то, что перманент любой дважды стохастической матрицы положителен, среди полистохастических матриц существуют такие, что их перманент равен нулю. Самым простым примером полистохастической матрицы с нулевым перманентом является МДР-код $\mathcal{M}_n^d$ нечетной размерности d и четного порядка n. С помощью описанного в примере 4 подсчета суммы индексов по единичной диагонали легко проверить, что перманент МДР-кода $\mathcal{M}_n^d$ равен нулю.

Тем не менее, пока не обнаружено ни одной полистохастической матрицы четвертой или другой четной размерности с нулевым перманентом. Поэтому можно высказать следующую гипотезу.

Гипотеза 2. *Все полистохастические матрицы четной размерности имеют положительный перманент.*

Хотя для дважды стохастических матриц это утверждение несложно доказать, все попытки обобщения известных доказательств на многомерный случай пока были безуспешны.

Также не найдено ни одной полистохастической матрицы нечетного порядка, которая бы имела нулевой перманент. Это позволяет предположить, что верна

Гипотеза 3. *Все полистохастические матрицы нечетного порядка имеют положительный перманент.*

В подтверждение этой гипотезы можно привести следующее утверждение.

Теорема 15. *Пусть A есть d-мерная полистохастическая матрица порядка 3. Тогда перманент матрицы A больше нуля.*

Доказательство. Сначала заметим, что в любой размерности МДР-код порядка 3 единствен с точностью до эквивалентности и что он имеет ненулевой перманент. Точное значение его перманента будет приведено в главе 5.

Пусть A – полистохастическая матрица порядка 3 с нулевым перманентом, и пусть некоторая ее одномерная грань содержит не менее двух ненулевых элементов. Без ограничения общности можно считать, что $a_{\alpha^1} \neq 0$ и $a_{\alpha^2} \neq 0$, где $\alpha^1 = (1, 3, \ldots, 3)$ и $\alpha^2 = (2, 3, \ldots, 3)$.

Обозначим через A^3 гипергрань вида $(3, *, \ldots, *)$, где $*$ принимает любые значения от 1 до 3. A^3 есть $(d-1)$-мерная полистохастическая матрица порядка 3. Обозначим через B минор элемента $a_{3,\ldots,3}$ в гиперграни A^3 и докажем, что B будет $(d-1)$-мерной матрицей порядка 2, состоящей из нулей и единиц.

Выберем в подматрице B ненулевой элемент a_β, $\beta = (3, x_2, \ldots, x_d)$, $x_i \in \{1, 2\}$ и обозначим через $a_{\bar\beta}$ диагональный элемент к a_β в матрице B: $\bar\beta = (3, \bar x_2, \ldots, \bar x_d)$, $\bar x_i = 3 - x_i$. Так как мы предположили, что перманент матрицы A равен нулю, то элемент a_{β^1}, $\beta^1 = (1, \bar x_2, \ldots, \bar x_d)$, дополняющий до диагонали элементы a_{α^2} и a_β, равен нулю. Аналогично, элемент a_{β^2} с $\beta^2 = (2, \bar x_2, \ldots, \bar x_d)$ равен нулю как дополняющий до диагонали элементы a_{α^1} и a_β.

Теперь заметим, что одномерная грань, заданная как $(*, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_d)$, содержит два нулевых элемента a_{β^1} и a_{β^2}, а значит оставшийся в ней элемент $a_{\bar{\beta}}$ должен быть равен единице. Аналогично, взяв в этом рассуждении в качестве начального элемента в подматрице B элемент $a_{\bar{\beta}}$, получаем, что a_β равен единице.

Таким образом, минор B элемента $a_{3,\dots,3}$ в гиперграни A^3 является (0,1)-матрицей. Тогда гипергрань A^3 в матрице A также представляет собой (0,1)-матрицу, так как если некоторый минор полистохастической матрицы есть (0,1)-матрица, то и вся матрица заполнена нулями и единицами.

Остается только заметить, что если в полистохастической матрице A порядка 3 некоторая гипергрань есть (0,1)-матрица, то матрица A будет выпуклой линейной комбинацией двух МДР-кодов, а значит, ее перманент положителен. $\square$

Как было отмечено ранее, не все полистохастические матрицы имеют положительный перманент, а значит, еще меньшая их часть может быть разложена в сумму диагональных матриц. Например, при помощи латинских квадратов с ненулевым числом трансверсалей, содержащих элементы, не входящие ни в одну трансверсаль, можно построить полистохастическую трехмерную матрицу с положительным перманентом, которая не представима в виде суммы диагональных матриц. Существование таких латинских квадратов доказано в работе [52].

Но среди полистохастических матриц четной размерности пока не найдено примеров, которые невозможно было бы разложить в сумму диагональных матриц. Поэтому можно предположить, что гипотеза 2 о положительности перманента может быть усилена до следующего утверждения, обобщающего теорему Биркгофа:

Гипотеза 4. *Все полистохастические матрицы четной размерности можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации диагональных матриц.*

Теорема Биркгофа имеет и другую интерпретацию, которая утверждает, что углами многогранника Биркгофа дважды стохастических матриц являются диагональные матрицы и только они. Несложно видеть, что любой МДР-код будет угловой матрицей в многограннике Биркгофа полистохастических матриц, но для размерности большей двух все угловые матрицы не исчерпываются МДР-кодами. Самый простой пример такого угла многогранника Биркгофа был найден в работах [34] и [20]:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & & 0 & 1/2 & 1/2 & & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \times & 1/2 & 1/2 & 0 & \times & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 1/2 & 0 & 1/2 & & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right).$$

Для матриц размерности $d \geq 3$ и порядка $n \geq 4$ углы многогранника Биркгофа, не являющиеся МДР-кодами, можно построить с помощью не дополняющихся до латинских гиперкубов латинских параллелепипедов.

Точное число углов в многограннике Биркгофа полистохастических матриц, а также доля МДР-кодов среди них, пока остаются неизвестными. Единственным результатом в этой области является конструкция углов многогранника трехмерных полистохастических матриц, предложенная в работе Н. Линиала и З. Лурии [34]:

Теорема 16. *Число вершин в многограннике Биркгофа трехмерных полистохастических матриц не менее $M(n)^{3/2-o(1)}$, где $M(n)$ – число трехмерных МДР-кодов порядка n.*

Заметим, что если бы для многогранника полистохастических матриц четной размерности удалось установить, что все его углы имеют положительный перманент, то гипотеза 2 была бы верна.

2.2 Экстремумы перманента полистохастических матриц

Напомним, что в двумерном случае максимум перманента достигается на диагональной матрице, а в соответствии с гипотезой ван дер Вардена (теоремой 6) минимум находится на равномерной матрице. Для полистохастических матриц пока не найдены матрицы, на которых достигался бы минимум и максимум перманента.

Между тем, обобщив доказательство из [4], можно доказать, что равномерная матрица является локальным экстремумом для перманента на множестве полистохастических матриц. Для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть A есть d-мерная полистохастическая матрица порядка n. Норма минора $(A|\alpha)$ матрицы A равна*

$$\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j C_d^j n^{d-j-1} + (-1)^d a_\alpha.$$

Доказательство. Посчитаем норму минора $(A|\alpha)$ по формуле включений-исключений:

$$\sum_{j=0,\dots,d,\ l\in L^j(A):a_\alpha\in l} (-1)^{d-j} w(l),$$

где через $L^j(A)$ обозначено множество всех j-мерных граней матрицы A, а $w(l)$ – норма грани l.

Количество граней размерности j, которые содержат фиксированный элемент a_α, равно C_d^j, а норма каждой из этих граней, в силу ограничения на сумму элементов в одномерных гранях, равна n^{j-1} при $j \neq 0$, и a_α для грани нулевой размерности. Отсюда

$$w(A|\alpha) = \sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j C_d^j n^{d-j-1} + (-1)^d a_\alpha.$$

□

Теорема 17. *Равномерная матрица J_n^d является точкой локального экстремума для функции перманента на множестве d-мерных полистохастических* *матриц порядка n, причем при четном d на J_n^d перманент имеет локальный минимум, а при нечетном d – локальный максимум.*

Доказательство. На множестве d-мерных полистохастических матриц перманент является дважды дифференцируемой функцией в точке J_n^d. Поэтому достаточно доказать, что по любому направлению равномерная матрица является экстремумом для перманента. Пусть A есть d-мерная полистохастическая матрица порядка n, настолько близкая к J_n^d, что все ее элементы положительны. Обозначим $a_\alpha = \min\limits_{\beta\in I_n^d} a_\beta$, $a_\alpha > 0$ и $\theta_0 = 1 - na_\alpha > 0$. Тогда матрица

$$B = \frac{1}{\theta_0}(A - (1-\theta_0)J_n^d)$$

является полистохастической матрицей, содержащей нулевой элемент, и верно $A = \theta_0 B + (1-\theta_0)J_n^d$. Положим

$$Lin(A) = \left\{S = \theta B + (1-\theta)J_n^d | 0 \leq \theta \leq 1\right\}$$

– линейный отрезок, лежащий в многограннике полистохастических матриц и проходящий через матрицы A и J_n^d.

Введем функцию

$$f(\theta) = \mathrm{per}(\theta B + (1-\theta)J_n^d),\ \theta \in [0,1].$$

Тогда $\mathrm{per}A = f(\theta_0)$. Функция $f(\theta)$ имеет производные любого порядка, поэтому в окрестности нуля ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$\mathrm{per}A = f(\theta_0) = f(0) + \theta_0 f'(0) + \frac{\theta_0^2}{2} f''(0) + O(\theta_0^3).$$

Посчитаем производную функции f, взяв производную от перманента:

$$f'(\theta) = \sum_{\alpha\in I_n^d} (b_\alpha - 1/n)\mathrm{per}(\theta B + (1-\theta)J_n^d | \alpha).$$

Поэтому

$$f'(0) = \sum_{\alpha\in I_n^d} (b_\alpha - 1/n)\mathrm{per}(J_n^d|\alpha) = \frac{(n-1)!^{d-1}}{n^{n-1}} \sum_{\alpha\in I_n^d} (b_\alpha - 1/n) = 0,$$

так как $\mathrm{per}(J_n^d|\alpha)$ равен $\frac{(n-1)!^{d-1}}{n^{n-1}}$ и не зависит от выбора α и так как нормы матриц B и J_n^d совпадают.

Найдем вторую производную функции $f(\theta)$:

$$f''(\theta) = \sum_{\alpha\in I_n^d} (b_\alpha - 1/n) \sum_{\beta\in I_n^d:\forall i\ \alpha_i\neq\beta_i} (b_\beta - 1/n)\mathrm{per}(\theta B + (1-\theta)J_n^d|\alpha,\beta).$$

Тогда

$$f''(0) = \sum_{\alpha\in I_n^d} (b_\alpha - 1/n) \sum_{\beta\in I_n^d:\forall i\ \alpha_i\neq\beta_i} (b_\beta - 1/n)\mathrm{per}(J_n^d|\alpha,\beta).$$

Перманент $(J_n^d|\alpha,\beta)$ не зависит от выбора α и β и равен $\frac{(n-2)!^{d-1}}{n^{n-2}}$. Заметим, что $\sum\limits_{\beta\in I_n^d:\forall i\ \alpha_i\neq\beta_i} (b_\beta - 1/n)$ равна разности норм миноров $(B|\alpha)$ и $(J_n^d|\alpha)$. Применив к этим минорам лемму 1, получим

$$f''(0) = \frac{(n-2)!^{d-1}}{n^{n-2}}(-1)^d \sum_{\alpha\in I_n^d} (b_\alpha - 1/n)^2.$$

Так как в матрице B по крайней мере один из элементов равен 0, то $\sum\limits_{\alpha\in I}(b_\alpha - 1/n)^2 > 0$.

Таким образом, $f''(0) > 0$ при четном d и $f''(0) < 0$ при нечетном d, откуда и следует утверждение теоремы. □

В отсутствии глобального экстремума перманента на равномерной матрице можно убедиться на следующих примерах.

Для порядков $n \leq 10$ всегда можно найти трехмерный МДР-код, перманент которого будет больше перманента равномерной матрицы. Для четырехмерных матриц порядка $n \leq 6$ перманент МДР-кода $\mathcal{M}_n^4$ больше не только перманента равномерной матрицы, но и перманента любого другого МДР-кода.

Напомним, что если верна гипотеза 2, то минимум перманента полистохастических матриц четной размерности отличен от нуля. По аналогии с гипотезой ван дер Вардена, в качестве наиболее вероятного претендента на матрицу с минимальным перманентом логично рассмотреть равномерную матрицу J_n^d, тем более что в четной размерности на этой матрице перманент имеет локальный минимум. С. Дж. Доу и П. М. Гибсон в работе [23] предположили, что среди многомерных матриц, которые являются выпуклой линейной комбинацией диагональных матриц, минимум перманента достигается на матрице, пропорциональной равномерной матрице.

Оба эти предположения ошибочны, так как по теореме 17 для нечетной размерности равномерная матрица является локальным максимумом на множестве полистохастических матриц, а для четной их можно опровергнуть с помощью следующей конструкции:

Утверждение 1. *Пусть порядок n нечетен или размерность d четна, $d \geq 3$. Тогда существует полистохастическая d-мерная матрица K_n^d порядка n, перманент которой асимптотически меньше перманента равномерной матрицы:*

$$\mathrm{per} K_n^d \leq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)^n \mathrm{per} J_n^d.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{M}$ МДР-код $\mathcal{M}_n^d$ порядка n, а через $\mathcal{M}'$ МДР-код, у которого элемент m_α равен единице тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i \equiv 1 \mod n$. Матрицы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ эквивалентны, и их перманенты совпадают. Положим

$$K_n^d = 1/2(\mathcal{M} + \mathcal{M}').$$

Заметим, что любая единичная диагональ в матрице $\mathcal{M}$ или $\mathcal{M}'$ переходит в K_n^d в диагональ заполненную числами $1/2$. Поэтому

$$\mathrm{per} K_n^d \geq 2^{-n}(\mathrm{per}\mathcal{M} + \mathrm{per}\mathcal{M}') = 2^{-n+1}\mathrm{per}\mathcal{M}.$$

Покажем, что остальные диагонали не оказывают влияния на перманент матрицы K_n^d. Предположим что для некоторого $k \in \{1, \dots, n-1\}$ существует диагональ $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$, проходящая через k единичных элементов матрицы $\mathcal{M}'$ и $n-k$ единичных элементов матрицы $\mathcal{M}$:

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^j \equiv 1 \mod n \text{ для } j = 1, \dots, k,$$

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^j \equiv 0 \mod n \text{ для } j = k+1, \dots, n.$$

Рассмотрим величину $S = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i^j$. Как и в примере 4, разный порядок суммирования дает

$$S \equiv k \mod n \text{ и } S \equiv d\frac{n(n+1)}{2} \mod n.$$

Если порядок n нечетен или размерность d четна, то последнее равенство принимает вид $S \equiv 0 \mod n$, а значит, матрица K_n^d не содержит новых диагоналей, влияющих на перманент, по сравнению с матрицами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$:

$$\mathrm{per} K_n^d = 2^{-n+1} \mathrm{per} \mathcal{M}.$$

По теореме 19, которая будет доказана в главе 3, максимум перманента полистохастических матриц асимптотически равен перманенту равномерной матрицы. Следовательно, для перманента МДР-кода $\mathcal{M}$ верно

$$\mathrm{per} \mathcal{M} \leq (1 + o(1))^n \mathrm{per} J_n^d.$$

Таким образом,

$$\mathrm{per} K_n^d \leq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)^n \mathrm{per} J_n^d \text{ при } n \to \infty.$$

□

На самом деле, даже для небольших порядков n перманент описанной матрицы K_n^d существенно меньше перманента J_n^d. Приведем небольшую таблицу значений перманентов этих матриц в четырехмерном случае:

n	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{per} K_n^4$	6,75	32	207,8125	1782	19574,734	273920
$\mathrm{per} J_n^4$	8	54	552,96	8000	155455,227	3906984,375

Табл. 1.

Более того, посчитав число трансверсалей в латинских гиперкубах порядка 3 (что будет сделано в главе 5), можно убедиться в том, что перманент матрицы K_3^d меньше перманента равномерной матрицы J_3^d для всех размерностей $d \geq 3$, что делает матрицу K_n^d новым кандидатом на матрицу с минимальным перманентом.

Заметим также, что среди полистохастических матриц четной размерности существуют МДР-коды, перманент которых меньше перманента равномерной матрицы. Пример такого четырехмерного МДР-кода порядка 6 можно построить на основе списка латинских гиперкубов, приведенного в работе [38].

3 Верхние оценки перманента многомерных матриц

Для перманентов неотрицательных многомерных матриц верна тривиальная верхняя оценка, которая легко доказывается индукцией по порядку матрицы.

Утверждение 2. *Пусть A есть d-мерная неотрицательная матрица порядка n. Предположим, что сумма элементов в i-ой гиперграни матрицы A не превосходит r_i. Тогда*

$$\mathrm{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i.$$

3.1 Оценка перманента полистохастических матриц

Пусть $n, d \in \mathbb{N},\ d \geq 3,\ \gamma \in \mathbb{R},\ 0 \leq \gamma \leq n^{d-2}$. Введем множество d-мерных матриц порядка n

$$M_n^d(\gamma) = \left\{ A | a_\alpha \geq 0, \sum_{\alpha \in I_n^d} a_\alpha = \gamma n, \forall l \in L^1(A) \sum_{a_\alpha \in l} a_\alpha \leq 1 \right\},$$

где $L^1(A)$ есть множество всех одномерных граней матрицы A.

Обозначим

$$P_n^d(\gamma) = \max_{A \in M_n^d(\gamma)} \mathrm{per} A$$

и

$$\varphi_n^d(\gamma) = \frac{\ln P_n^d(\gamma)}{n} - \ln \gamma + d - 1, \text{ то есть } P_n^d(\gamma) = \gamma^n e^{-(d-1)n + \varphi_n^d(\gamma) n}.$$

Функции $P_n^d(\gamma)$ и $\varphi_n^d(\gamma)$ определены корректно, так как $M_n^d(\gamma)$ – компактное множество. Заметим, что множество $M_n^d(n^{d-2})$ есть множество Ω_n^d d-мерных полистохастических матриц порядка n.

Основной целью дальнейших рассуждений будет получение равенства

$$P_n^d(\gamma) = \gamma^n e^{-(d-1)n + o(n)}$$

при $\gamma = n^{d-3+\delta}$ для произвольного $\delta \in (0,1]$, $d \geq 3$ и при $n \to \infty$.

3.1.1 Свойства функций $P_n^d(\gamma)$ и $\varphi_n^d(\gamma)$

Свойство 9. *$P_n^d(\gamma)$ и $\varphi_n^d(\gamma)$ непрерывны по γ в силу непрерывности перманента и непрерывного изменения множества $M_n^d(\gamma)$.*

Свойство 10. *$P_n^d(\gamma)$ и $\varphi_n^d(\gamma)$ дифференцируемы слева для любого $\gamma \in (0, n^{d-2}]$.*

Точки дифференцируемости $P_n^d(\gamma)$ и $\varphi_n^d(\gamma)$ совпадают. Функция $P_n^d(\gamma)$ может быть не дифференцируема только в тех точках, для которых существуют несколько матриц с максимальным перманентом. Для любой d-мерной матрицы из множества $M_n^d(\gamma)$ можно построить матрицу того же порядка и размерности, но с меньшим значением γ и меньшим перманентом, изменив на малую величину один из элементов исходной матрицы (примеры таких матриц используются в свойстве 13). Элементы матриц с максимальным перманентом являются непрерывными, кусочно-линейными функциями от γ, поэтому существует производная слева для функции $P_n^d(\gamma)$. Более того, эта производная будет равна линейной комбинации перманентов миноров матриц.

В дальнейших рассуждениях все производные следует понимать как левосторонние производные.

Свойство 11. *Для любых $d \geq 3$ и $0 \leq \gamma \leq n^{d-2}$ верно $0 \leq \varphi_n^d(\gamma) \leq d-1$.*

Доказательство. Пусть $A \in M_n^d(\gamma)$. Обозначим через r_i число единиц в i-ой гиперграни матрицы A. Из утверждения 2 следует, что

$$\mathrm{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i \leq \gamma^n.$$

С другой стороны, для d-мерной равномерной матрицы $J_{n,\gamma}^d$ порядка n, каждый элемент которой равен γ/n^{d-1}, формула Стирлинга дает

$$P_n^d(\gamma) \geq \mathrm{per} J_{n,\gamma}^d = \frac{(n!)^{d-1}\gamma^n}{n^{(d-1)n}} > \gamma^n e^{-(d-1)n}.$$

□

Свойство 12. *Пусть $d \geq 3$ и $0 < \gamma < n^{d-2}$. Обозначим через $J^d_{n,\gamma}$ d-мерную матрицу порядка n, каждый элемент которой равен γ/n^{d-1}. Тогда* $\mathrm{per} J^d_{n,\gamma} < P^d_n(\gamma)$.

Доказательство. Выберем произвольное ε, для которого $0 < \varepsilon \leq \frac{n^{d-2}-\gamma}{n^{d-2}}$ и рассмотрим матрицу B с элементами:

$$b_{1,\dots,1} = b_{2,\dots,2} = \frac{\gamma}{n^{d-1}} + \varepsilon;$$

$$b_{1,\dots,1,2} = b_{2,\dots,2,1} = \frac{\gamma}{n^{d-1}} - \varepsilon;$$

а все остальные элементы матрицы B равны $\frac{\gamma}{n^{d-1}}$.

Из определения следует, что матрица B принадлежит множеству $M^d_n(\gamma)$. Применив свойство 3, несложно получить, что $\mathrm{per} J^d_{n,\gamma} < \mathrm{per} B \leq P^d_n(\gamma)$. □

Свойство 13. *Для фиксированных n и d функция $\varphi^d_n(\gamma)$ является невозрастающей.*

Доказательство. По определению функции $\varphi^d_n(\gamma)$ имеем

$$\frac{d\varphi^d_n(\gamma)}{d\gamma} = \frac{1}{nP^d_n(\gamma)} \frac{dP^d_n(\gamma)}{d\gamma} - \frac{1}{\gamma}.$$

Пусть A есть d-мерная матрица порядка n, для которой $\mathrm{per} A = P^d_n(\gamma)$. Так как для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$ разница между перманентом матрицы A и перманентом произвольной матрицы из $M^d_n(\gamma - \varepsilon)$ не меньше, чем разница между $P^d_n(\gamma)$ и $P^d_n(\gamma - \varepsilon)$, то

$$\frac{dP^d_n(\gamma)}{d\gamma} \leq \frac{\mathrm{per} A - \mathrm{per} A^{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

для всех матриц $A^{\varepsilon} \in M^d_n(\gamma - \varepsilon)$ достаточно близких к матрице A.

Подберем подходящие матрицы A^{ε}. Найдем в матрице A гипергрань Γ, для которой $\sum\limits_{a_\alpha \in \Gamma} a_\alpha \geq \gamma$. Такая гипергрань существует, поскольку средняя норма гиперграней матрицы A равна γ. Найдем в этой грани положительный элемент a_β, для которого

$$\mathrm{per}(A|\beta) = \min\left\{\mathrm{per}(A|\alpha)|a_\alpha \in \Gamma, a_\alpha > 0\right\}.$$

Применяя свойство 3 и раскладывая перманент A по гиперграни Γ, получим

$$\mathrm{per}A = \sum_{a_\alpha \in \Gamma} a_\alpha \mathrm{per}(A|\alpha) \geq \mathrm{per}(A|\beta) \sum_{a_\alpha \in \Gamma} a_\alpha \geq \gamma \mathrm{per}(A|\beta),$$

откуда $\frac{\mathrm{per}(A|\beta)}{\mathrm{per}A} \leq \frac{1}{\gamma}$.

Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим семейство матриц $A^\varepsilon \in M_n^d(\gamma-\varepsilon)$, все элементы которых равны элементам матрицы A, за исключением $a_\beta^\varepsilon = a_\beta - \varepsilon n$. По определению перманента получаем

$$\frac{\mathrm{per}A - \mathrm{per}A^\varepsilon}{\varepsilon} = n\mathrm{per}(A|\beta).$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi_n^d(\gamma)}{d\gamma} = \frac{1}{nP_n^d(\gamma)} \frac{dP_n^d(\gamma)}{d\gamma} - \frac{1}{\gamma} \leq \frac{n\mathrm{per}(A|\beta)}{n\mathrm{per}A} - \frac{1}{\gamma} \leq 0,$$

и $\varphi_n^d(\gamma)$ является невозрастающей функцией. □

3.1.2 Дифференциальное неравенство на функцию $P_n^d(\gamma)$

В этом пункте будет доказано дифференциальное неравенство для функции $P_n^d(\gamma)$, которое позволит оценить сверху и саму функцию. Для его доказательства потребуются две вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Пусть $d \geq 3$, $1 \leq \gamma \leq n^{d-2}$ и пусть $A \in M_n^d(\gamma)$ – матрица, перманент которой положителен. Тогда существует такой элемент $a_\alpha > 0$, что*

$$w(A|\alpha) \leq \gamma\left(n - d + C_d^2 \frac{n^{d-3}}{\gamma}\right).$$

Доказательство. Так как перманент матрицы A положителен, то в матрице A существует диагональ $\left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^n$, состоящая из ненулевых элементов.

Положим $S_i = \gamma n - w(A|\alpha^i) = w(A) - w(A|\alpha^i)$ – норма «оболочки» минора $(A|\alpha^i)$. Рассмотрим сумму всех S_i. Так как индексы $\left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^n$ образуют диагональ, то в этой сумме каждый элемент матрицы A встречается d раз, за исключением элементов, которые лежат в $(d-2)$-мерных гранях, содержащих один из индексов α^i. Так как сумма элементов в любой одномерной грани матрицы A не превосходит единицы, то норма любой $(d-2)$-мерной грани не больше n^{d-3}. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n S_i \geq dw(A) - C_d^2 n^{d-2} = d\gamma n - C_d^2 n^{d-2}.$$

Отсюда средняя норма «оболочки» минора не меньше $d\gamma - C_d^2 n^{d-3}$ и существует номер $j \in \{1, \dots, n\}$, для которого $a_{\alpha^j} > 0$ и $S_j \geq d\gamma - C_d^2 n^{d-3}$. Таким образом,

$$w(A|\alpha^j) = w(A) - S_j \leq \gamma \left(n - d + C_d^2 \frac{n^{d-3}}{\gamma} \right).$$

$\square$

Следующее утверждение позволяет связать перманент произвольной матрицы из $M_n^d(\gamma)$ с перманентами матриц меньшего порядка и меньшим значением γ.

Лемма 3. *Пусть $d \geq 3$, $dn^{d-3} \leq \gamma \leq n^{d-2}$ и пусть $A \in M_n^d(\gamma)$ есть матрица, перманент которой положителен. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует семейство матриц $A^\varepsilon \in M_n^d(\gamma - \varepsilon)$ и матрица $B \in M_{n-1}^d(\gamma_B)$, где*

$$\gamma - \frac{dn^{d-2} - \gamma}{n-1} \leq \gamma_B \leq \gamma \left(1 - \frac{d - 1 - C_d^2 n^{d-3}/\gamma}{n-1} \right),$$

такие, что

$$\mathrm{per} A = \mathrm{per} A^\varepsilon + \varepsilon n \mathrm{per} B.$$

Доказательство. По лемме 2 в матрице A существует элемент $a_\alpha > 0$, для которого $w(A|\alpha) \leq \gamma(n - d + C_d^2 \frac{n^{d-3}}{\gamma})$.

Положим $B = (A|\alpha)$ – минор, соответствующий элементу a_α. Матрица B лежит во множестве $M^d_{n-1}(\gamma_B)$. Уменьшая на εn элемент a_α матрицы A, получим семейство матриц A^ε. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ матрицы A^ε принадлежат множеству $M^d_n(\gamma - \varepsilon)$. По определению перманента получаем, что

$$\mathrm{per} A = \mathrm{per} A^\varepsilon + \varepsilon n \mathrm{per} B.$$

Докажем неравенства на γ_B. Из леммы 2 имеем, что

$$\gamma_B = \frac{w(B)}{n-1} \le \gamma \frac{n - d + C_d^2 n^{d-3}/\gamma}{n-1} = \gamma \left(1 - \frac{d - 1 - C_d^2 n^{d-3}/\gamma}{n-1}\right).$$

С другой стороны, $w(B) \ge \gamma n - dn^{d-2}$, так как B есть некоторый минор матрицы A и так как норма любой из d гиперграней, окаймляющих минор B, не превосходит n^{d-2}. Поэтому

$$\gamma_B \ge \frac{\gamma n - dn^{d-2}}{n-1} \ge \gamma - \frac{dn^{d-2} - \gamma}{n-1}.$$

□

Наконец, получим дифференциальное неравенство на $P^d_n(\gamma)$.

Утверждение 3. *Пусть $d \ge 3$ и $dn^{d-3} \le \gamma \le n^{d-2}$. Тогда $P^d_n(\gamma)$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{dP^d_n(\gamma)}{d\gamma} \le nP^d_{n-1}(\tilde{\gamma})$$

для некоторого $\tilde{\gamma}$ из интервала $\left[\gamma - \frac{dn^{d-2}-\gamma}{n-1}, \gamma\left(1 - \frac{d-1-C_d^2 n^{d-3}/\gamma}{n-1}\right)\right]$.

Доказательство. Пусть на матрице A достигается максимум перманента на множестве $M^d_n(\gamma)$. Тогда перманент матрицы A строго больше нуля. По лемме 3 имеем, что существуют семейство матриц $A^\varepsilon \in M^d_n(\gamma - \varepsilon)$ и матрица $B \in M^d_{n-1}(\gamma_B)$, для которых

$$\gamma - \frac{dn^{d-2} - \gamma}{n-1} \le \gamma_B \le \gamma \left(1 - \frac{d - 1 - C_d^2 n^{d-3}/\gamma}{n-1}\right)$$

и

$$P_n^d(\gamma) = \mathrm{per}A = \mathrm{per}A^\varepsilon + \varepsilon n \mathrm{per}B.$$

Взяв максимумы от слагаемых в правой части равенства, получим

$$P_n^d(\gamma) \le \max_{A^\varepsilon \in M_n^d(\gamma-\varepsilon)} \mathrm{per}A^\varepsilon + \varepsilon n \max_{B \in M_{n-1}^d(\gamma_B)} \mathrm{per}B = P_n^d(\gamma-\varepsilon) + \varepsilon n P_{n-1}^d(\gamma_B).$$

Обозначим $\tilde{\gamma} = \gamma_B$. Разделив имеющееся неравенство на ε и устремив ε к нулю, имеем

$$\frac{dP_n^d(\gamma)}{d\gamma} \le n P_{n-1}^d(\tilde{\gamma}).$$

□

Следствие 1. *Пусть $d \ge 3$ и $dn^{d-3} \le \gamma \le n^{d-2}$. Если n достаточно велико и $n^{d-3} = o(\gamma)$, то*

$$\frac{dP_n^d(\gamma)}{d\gamma} \le n P_{n-1}^d(\tilde{\gamma})$$

для некоторого $\tilde{\gamma}$ из интервала $\left[\gamma - dn^{d-3}, \gamma\left(1 - \frac{d-1}{n-1} + o(1/n)\right)\right]$.

3.1.3 Асимптотическая верхняя оценка перманента

В этом разделе будет доказано, что для любого $\delta \in (0,1]$ и $\gamma = n^{d-3+\delta}$ верно равенство

$$P_n^d(\gamma) = \gamma^n e^{-(d-1)n + o(n)} \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть $\delta, \varepsilon \in (0,1]$. Рассмотрим функцию

$$F_n^d(\gamma) = \gamma^n e^{-n\left(d-2+\frac{\ln(\gamma/n^{d-3})}{\delta \ln n}\right)(1-\varepsilon)}. \tag{1}$$

Введем две функции, которые в дальнейшем будут использоваться как границы интервалов. Пусть $0 < \sigma \le \delta$ и $C \ge 1$ – некоторые константы. Положим $g_2(n,C) = C \ln n$ для $d = 3$ и $g_2(n,C) = Cn^{d-3+\sigma}$ для $d > 3$. Также обозначим

$g_1(n) = g_2(n,1) - dn^{d-3}$. Заметим, что

$$\frac{n^{d-3}}{g_1(n)} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{2}$$

Основная идея доказательства заключается в том, чтобы показать, что $F_n^d(\gamma)$ мажорирует $P_n^d(\gamma)$ для всех достаточно больших n и γ из интервала $\Lambda(n) = \left[g_1(n), n^{d-3+\delta}\right]$. Для этого докажем, что если n достаточно велико и если $F_{n-1}^d(\gamma)$ мажорирует $P_{n-1}^d(\gamma)$ для всех γ из некоторого интервала $\Delta(n-1)$, то $F_n^d(\gamma)$ мажорирует $P_n^d(\gamma)$ для всех γ из некоторого интервала $\Theta(n) \supset \Delta(n)$.

Утверждение 4. *Пусть $d \geq 3$, $\delta, \varepsilon \in (0,1]$, n достаточно велико и функция $F_n^d(\gamma)$ определена соотношением (1). Предположим, что $F_{n-1}^d(\gamma) \geq P_{n-1}^d(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Delta(n-1) = [g_1(n-1), g_2(n-1, C)]$ и что $F_n^d(\gamma) \geq P_n^d(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Delta_0(n) = [g_1(n), g_2(n,1)]$. Тогда*

$$F_n^d(\gamma) \geq P_n^d(\gamma)$$

для всех $\gamma \in \Theta(n) = \left[g_1(n), g_2(n, C)\frac{n-1}{n-2}\right]$.

Доказательство. Учитывая условие (2) для функции $g_1(n)$, определение интервала $\Theta(n)$ и следствие 1, имеем неравенство $\frac{dP_n^d(\gamma)}{d\gamma} \leq nP_{n-1}^d(\tilde{\gamma})$ для всех $\gamma \in \Theta(n)$ и для некоторого

$$\tilde{\gamma} \in \left[\gamma - dn^{d-3}, \gamma\left(1 - \frac{d-1}{n-1} + o(1/n)\right)\right].$$

Докажем, что

$$\frac{dF_n^d(\gamma)}{d\gamma} \geq nF_{n-1}^d(\tilde{\gamma}) \tag{3}$$

для всех $\gamma \in \Theta(n)$.

Для этого достаточно доказать, что неравенство

$$\frac{dF_n^d(\gamma)}{d\gamma} \geq n\gamma^{n-1} e^{-(d-1)+(d-2)\varepsilon-(n-1)\left(d-2+\frac{\ln(\chi(1-\mu/n))}{\delta \ln(n-1)}\right)(1-\varepsilon)} \tag{4}$$

верно для некоторого $\mu > 0$ и для всех $\gamma \in \Theta(n)$, и где через χ обозначено γ/n^{d-3}.

Действительно, заметим, что $F_{n-1}^d(\gamma)$ является возрастающей функцией для достаточно больших n. Поэтому

$$F_{n-1}^d(\tilde{\gamma}) \le F_{n-1}^d\left(\gamma\left(1 - \frac{d-1}{n-1} + o(1/n)\right)\right).$$

Далее существуют $N_0 \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ такие, что для $n > N_0$ и для всех $\gamma \in \Theta(n)$ выполнено

$$1 - \frac{d-1}{n-1} + o(1/n) \ge 1 - \frac{\mu}{n}$$

и

$$\left(1 - \frac{d-1}{n-1} + o(1/n)\right)^{n-1} \le e^{-(d-1)+(d-2)\varepsilon}.$$

С помощью этих неравенств и по определению $F_{n-1}^d\left(\gamma\left(1 - \frac{d-1}{n-1} + o(1/n)\right)\right)$ получаем

$$F_{n-1}^d(\tilde{\gamma}) \le \gamma^{n-1} e^{-(d-1)+(d-2)\varepsilon-(n-1)\left(d-2+\frac{\ln(\chi(1-\mu/n))}{\delta\ln(n-1)}\right)(1-\varepsilon)}.$$

Докажем неравенство (4). Оно может быть записано в виде

$$n\gamma^{n-1}e^{-n\left(d-2+\frac{\ln(\gamma/n^{d-3})}{\delta\ln n}\right)(1-\varepsilon)}\left(1 - \frac{1-\varepsilon}{\delta\ln n}\right) \ge \\ n\gamma^{n-1}e^{-(d-1)+(d-2)\varepsilon-(n-1)\left(d-2+\frac{\ln(\chi(1-\mu/n))}{\delta\ln(n-1)}\right)(1-\varepsilon)}. \quad (5)$$

Сокращая обе части неравенства (5) на множитель $n\gamma^{n-1}e^{-(d-2)n(1-\varepsilon)}$, перепишем (5) следующим образом:

$$1 - \frac{1-\varepsilon}{\delta\ln n} \ge e^{-1}e^{n(1-\varepsilon)\left(\frac{\ln\chi}{\delta\ln n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(\chi(1-\mu/n))}{\delta\ln(n-1)}\right)}.$$

Обозначим

$$\kappa_n(\gamma) = n\left(\frac{\ln\chi}{\delta\ln n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(\chi(1-\mu/n))}{\delta\ln(n-1)}\right).$$

Разлагая логарифм в ряд Тейлора и пренебрегая достаточно малыми слагаемыми, можно доказать, что

$$\kappa_n(\gamma) \le 1+\varepsilon$$

для всех достаточно больших n и $\gamma \in \Theta(n)$.

Так как ε больше нуля, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N$ и $\gamma \in \Theta(n)$

$$1 - \frac{1-\varepsilon}{\delta\ln n} \ge e^{-\varepsilon^2} \ge e^{-1+(1-\varepsilon)\kappa_n(\gamma)},$$

откуда следует неравенство (3).

Вспоминая, что для всех $\gamma \in \Theta(n)\setminus\Delta_0(n)$ выполнены неравенства $\gamma \le \frac{n-1}{n-2}g_2(n,C)$ и $\tilde{\gamma} \le \gamma\left(1-\frac{d-1}{n-1}+o(1/n)\right)$, можно доказать, что $\tilde{\gamma} \le g_2(n-1,C)$ для достаточно больших n. Также из определений g_1 и g_2 следует, что $g_1(n-1) < g_2(n,1) - dn^{d-3} \le \tilde{\gamma}$. Таким образом, $\tilde{\gamma}$ принадлежит $\Delta(n-1)$ для всех $\gamma \in \Theta(n)\setminus\Delta_0(n)$.

Напомним, что $F^d_{n-1}(\gamma) \ge P^d_{n-1}(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Delta(n-1)$. Следовательно,

$$\frac{dF^d_n(\gamma)}{d\gamma} \ge nF^d_{n-1}(\tilde{\gamma}) \ge nP^d_{n-1}(\tilde{\gamma}) \ge \frac{dP^d_n(\gamma)}{d\gamma}$$

для всех $\gamma \in \Theta(n)\setminus\Delta_0(n)$.

Так как $\frac{dF^d_n(\gamma)}{d\gamma} \ge \frac{dP^d_n(\gamma)}{d\gamma}$ для всех $\gamma \in \Theta(n)\setminus\Delta_0(n)$ и так как $F^d_n(\gamma) \ge P^d_n(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Delta_0(n)$, то

$$F^d_n(\gamma) \ge P^d_n(\gamma)$$

для всех $\gamma \in \Theta(n)$. $\square$

Утверждение 5. *Пусть $d \ge 3$, $\delta,\varepsilon \in (0,1]$ и функция $F^d_n(\gamma)$ определена со-*

отношением (1). Зафиксируем также достаточно большое k.

Предположим, что $F_n^d(\gamma) \geq P_n^d(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Delta_0(n) = [g_1(n), g_2(n,1)]$ и для всех $n \geq k$. Тогда существует m такое, что для всех $n \geq k+m$ и $\gamma \in \Lambda(n) = \left[g_1(n), n^{d-3+\delta}\right]$ верно

$$F_n^d(\gamma) \geq P_n^d(\gamma).$$

Доказательство. По утверждению 4 имеем, что $F_{k+1}^d(\gamma) \geq P_{k+1}^d(\gamma)$ для всех γ из интервала

$$\Delta_1(k+1) = \left[g_1(k+1), g_2(k+1,1)\frac{k}{k-1}\right] = \left[g_1(k+1), g_2\left(k+1, \frac{k}{k-1}\right)\right].$$

Применим снова утверждение 4 к интервалу $\Delta_1(k+1)$ и получим аналогичное неравенство для всех γ из $\Delta_2(k+2) = \left[g_1(k+2), g_2\left(k+2, \frac{k+1}{k-1}\right)\right]$, и так далее. После m шагов имеем, что $F_{k+m}^d(\gamma) \geq P_{k+m}^d(\gamma)$ для всех γ из $\Delta_m(k+m) = \left[g_1(k+m), g_2\left(k+m, \frac{k+m-1}{k-1}\right)\right]$.

В случае $d > 3$ найдем такое m, что $\frac{k+m-1}{k-1} \geq (k+m)^{\delta-\sigma}$, а если $d = 3$ выберем m, для которого $\frac{k+m-1}{k-1} \geq \frac{(k+m)^\delta}{\ln(k+m)}$. Тогда $g_2\left(k+m, \frac{k+m-1}{k-1}\right) \geq (k+m)^{d-3+\delta}$, и поэтому

$$F_n^d(\gamma) \geq P_n^d(\gamma)$$

для всех $n \geq k+m$ и для всех $\gamma \in \Lambda(n)$. □

Теперь для доказательства основного результата достаточно показать, что $F_n^d(\gamma) \geq P_n^d(\gamma)$ для всех $\gamma \in [g_1(n), g_2(n,1)]$ и для всех достаточно больших n. Для этого нам потребуется следующее утверждение, основанное на теореме Брэгмана (теореме 1).

Утверждение 6. *Пусть A есть неотрицательня двумерная матрица порядка n, элементы которой не превосходят единицы. Предположим, что сумма*

$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}$ *равна* γn. *Тогда*

$$\mathrm{per} A \leq (\gamma+1)^n e^{-n} (e\sqrt{\gamma+1})^{\frac{n}{\gamma+1}}.$$

Доказательство. Обозначим через v_i i-ую строку матрицы A и пусть $\gamma_i = w(v_i)$. Построим рекурсивно последовательность неотрицательных двумерных матриц $A = A^0, A^1, \ldots, A^n$, элементы которых не больше единицы и $\mathrm{per} A^i \leq \mathrm{per} A^{i+1}$ для всех $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Предположим, что матрица A^i уже построена. Переставим столбцы матрицы A^i таким образом, чтобы $\mathrm{per}(A^i|(i+1,k)) \geq \mathrm{per}(A^i|(i+1,k+1))$ для всех k, и обозначим получившуюся матрицу через B^i. Пусть $A^{i+1} = (a^{i+1}_{j,k})^n_{j,k=1}$ и $B^i = (b^i_{j,k})^n_{j,k=1}$. Положим $a^{i+1}_{j,k} = b^i_{j,k}$ для $j \neq i+1$, $a^{i+1}_{i+1,k} = 1$ для $k \leq \lceil \gamma_{i+1} \rceil$ и $a^{i+1}_{i+1,k} = 0$ для $k > \lceil \gamma_{i+1} \rceil$.

Тогда A^n будет (0,1)-матрицей с $\lceil \gamma_i \rceil$ единицами в i-ой строке, и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lceil \gamma_i \rceil \leq \sum\limits_{i=1}^{n} (\gamma_i + 1) = (\gamma+1)n$. По построению и по теореме 1 имеем, что

$$\mathrm{per} A \leq \mathrm{per} A^n \leq \prod_{i=1}^{n} \lceil \gamma_i \rceil !^{\frac{1}{\lceil \gamma_i \rceil}}.$$

Оценивая функцию факториала как

$$x! \leq e x^{x+1/2} e^{-x},$$

получаем, что

$$\mathrm{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} e^{-1+1/\lceil \gamma_i \rceil} \lceil \gamma_i \rceil^{1+\frac{1}{2\lceil \gamma_i \rceil}}.$$

Можно проверить, что $e^{1/x} x^{1+1/2x}$ есть логарифмически выпуклая функция (то есть ее логарифм представляет собой выпуклую функцию) для всех $x > 1$.

Таким образом,

$$\mathrm{per}A \le \prod_{i=1}^{n} e^{-1+\frac{1}{\gamma+1}}(\gamma+1)^{1+\frac{1}{2(\gamma+1)}} = (\gamma+1)^n e^{-n}(e\sqrt{\gamma+1})^{\frac{n}{\gamma+1}}.$$

$\square$

Наконец, все готово для доказательства основной теоремы этого раздела.

Теорема 18. *Пусть $d \ge 3$. Для любого $\delta \in (0,1]$ максимум перманента d-мерных матриц из множества $M_n^d(\gamma)$ при $\gamma = n^{d-3+\delta}$ и $n \to \infty$ равен $\gamma^n e^{-(d-1)n+o(n)}$:*

$$P_n^d(\gamma) = \gamma^n e^{-(d-1)n+o(n)}.$$

Доказательство. Докажем теорему индукцией по размерности матрицы.

База индукции: $d = 3$.

Выберем произвольные $\delta, \varepsilon \in (0,1]$ и для $\gamma \in \Lambda(n) = \left[\ln n - 3, n^{\delta}\right]$ рассмотрим функцию

$$F_n^3(\gamma) = \gamma^n e^{-n\left(1+\frac{\ln\gamma}{\delta\ln n}\right)(1-\varepsilon)}.$$

Пусть $\gamma \in \Delta_0(n) = [\ln n - 3, \ln n]$ и пусть A такая матрица из $M_n^3(\gamma)$, что $\mathrm{per}A = P_n^3(\gamma)$. Обозначим через $\tilde{A}$ двумерную матрицу, каждый элемент которой есть сумма элементов соответствующей одномерной грани матрицы A некоторого направления. По свойству 8 получаем, что $\mathrm{per}A \le \mathrm{per}\tilde{A}$. Из утверждения 6 следует, что

$$P_n^3(\gamma) = \mathrm{per}A \le \mathrm{per}\tilde{A} \le (\gamma+1)^n e^{-n}(e\sqrt{\gamma+1})^{\frac{n}{\gamma+1}}.$$

Так как ε отлично от нуля, то существует N такое, что для всех $n > N$ и $\gamma \in \Delta_0(n)$ выполняется

$$F_n^3(\gamma) = \gamma^n e^{-n\left(1+\frac{\ln\gamma}{\delta\ln n}\right)(1-\varepsilon)} \ge (\gamma+1)^n e^{-n}(e\sqrt{\gamma+1})^{\frac{n}{(\gamma+1)}} \ge P_n^3(\gamma).$$

Поэтому $F_n^3(\gamma) \ge P_n^3(\gamma)$ для всех достаточно больших n и $\gamma \in \Delta_0(n)$. С помощью утверждения 5 получаем, что это неравенство верно для всех $n \geq N(\varepsilon)$ и всех $\gamma \in \Lambda(n)$.

Положим $\gamma = n^\delta$. Тогда

$$P_n^3(\gamma) \leq F_n^3(\gamma) = \gamma^n e^{-2n(1-\varepsilon)}$$

начиная с некоторого $N(\varepsilon)$. Так как ε может быть выбрано сколь угодно близко к нулю для больших n, то

$$P_n^3(\gamma) \leq \gamma^n e^{-2n+o(n)} \text{ при } n \to \infty.$$

С другой стороны, из доказательства свойства 11 следует, что

$$P_n^3(\gamma) \geq \gamma^n e^{-2n+o(n)}.$$

Наконец, для всех $\delta \in (0,1]$ и $\gamma = n^\delta$ получаем

$$P_n^3(\gamma) = \gamma^n e^{-2n+o(n)} \text{ при } n \to \infty.$$

Шаг индукции. Предположим, что для всех $\delta \in (0,1]$ и $\gamma = n^{d-4+\delta}$ функция $P_n^{d-1}(\gamma)$ равна $\gamma^n e^{-(d-2)n+o(n)}$ при $n \to \infty$. Докажем аналогичное утверждение для $P_n^d(\gamma)$.

Как и раньше, зафиксируем $\delta \in (0,1]$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{d-2}$. Положим $g_2(n) = n^{d-3+\sigma}$, где $\sigma = \frac{\varepsilon\delta(d-3)}{1-\varepsilon} < \delta$. Для $\gamma \in \Lambda(n) = \left[g_1(n), n^{d-3+\delta}\right]$ рассмотрим функцию

$$F_n^d(\gamma) = \gamma^n e^{-n\left(d-2+\frac{\ln(\gamma/n^{d-3})}{\delta \ln n}\right)(1-\varepsilon)}.$$

Пусть $\gamma \in \Delta_0(n) = [g_1(n), n^{d-3+\sigma}]$ и пусть A такая матрица из $M_n^d(\gamma)$, что $\mathrm{per}A = P_n^d(\gamma)$. Спроектируем матрицу A на одну из своих гиперграней (то есть просуммируем все элементы в одномерных гранях некоторого направления) и поделим ее на n. Получим $(d-1)$-мерную матрицу $\tilde{A} \in M_n^{d-1}(\bar{\gamma})$, где $\bar{\gamma} = \gamma/n$

и $\mathrm{per}A \le n^n \mathrm{per}\tilde{A}$.

По предположению индукции и свойству 13, существует N такое, что

$$P_n^d(\gamma) = \mathrm{per}A \le n^n \mathrm{per}\tilde{A} \le n^n \bar{\gamma}^n e^{-n(d-2-\varepsilon)} \le F_n^d(\gamma)$$

для всех $n > N$ и $\gamma \in \Delta_0(n)$.

После применения утверждения 5 получим, что $F_n^d(\gamma) \ge P_n^d(\gamma)$ для всех достаточно больших n и $\gamma \in \Lambda(n)$, откуда, как и в трехмерном случае, следует, что

$$P_n^d(\gamma) = \gamma^n e^{-(d-1)n+o(n)} \text{ при } n \to \infty$$

для всех $\delta \in (0,1]$ и $\gamma = n^{d-3+\delta}$.

□

Заметим, что в условиях теоремы 18 максимум перманента матриц из множества $M_n^d(\gamma)$ асимптотически равен перманенту матриц $J_{n,\gamma}^d$, каждый элемент которых равен γ/n^{d-1} и асимптотическое поведение перманента которых легко находится с помощью формулы Стирлинга.

Так как при $\gamma = n^{d-2}$ множество $M_n^d(\gamma)$ совпадает с множеством полистохастических матриц, то для их перманента верна

Теорема 19. *Пусть $d \ge 3$ и пусть Ω_n^d – множество всех d-мерных полистохастических матриц порядка n. Тогда*

$$\max_{A \in \Omega_n^d} \mathrm{per}A = \left((1+o(1)) \frac{n^{d-2}}{e^{d-1}} \right)^n \text{ *при* } n \to \infty.$$

3.2 Оценки перманента многомерных (0,1)-матриц

Несмотря на то, здесь мы рассмотрим оценки для (0,1)-матриц, слегка ослабив большинство из них, можно получить оценки и на перманент произвольной неотрицательной матрицы, все элементы которой не превосходят единицы.

Напомним, что для двумерных (0,1)-матриц теорема Брэгмана дает верхнюю оценку перманента, которая достигается на всех блочно-диагональных матрицах и близка к нижней оценке для матриц с одинаковым числом единиц во всех строках и столбцах. Для многомерных матриц хотелось бы получить аналогичную оценку через число единиц в гранях матрицы, а именно, такую оценку, чтобы она была точна или близка к истинному значению перманента в достаточно большом числе случаев.

Одна из первых попыток обобщить теорему Брэгмана на трехмерные матрицы была предпринята в 1987 г. С. Дж. Доу и П. М. Гибсоном в работе [22]:

Теорема 20. *Пусть A – трехмерная $(0,1)$-матрица порядка n, и пусть число единиц в i-ой гиперграни матрицы A равно r_i. Тогда*

$$\mathrm{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i}.$$

Заметим, что если все суммы r_i в гипергранях матрицы A не превосходят n и если существует двумерная матрица B порядка n со строчными суммами r_i, на которой достигается равенство в теореме Брэгмана, то существует трехмерная матрица, на которой бы достигалась оценка теоремы 20. Для ее построения достаточно распределить строки матрицы B по одномерным граням трехмерной матрицы диагональным образом. Если суммы в гипергранях матрицы A больше n, то теорема 20 дает грубую оценку. Например, перманент единичной трехмерной матрицы E_n^3 равен $n!^2$, в то время как теорема 20 оценивает его величиной $(n^2)!^{1/n}$.

На данный момент не получено хорошего обобщения теоремы Брэгмана для матриц, у которых число единиц в гипергранях было бы близко к максимальному. В качестве кандидата на роль такой оценки можно предложить следующее утверждение.

Гипотеза 5. *Пусть A есть d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n. Предполо-*

жим, что i-ая гипергрань матрицы A содержит r_i единиц. Тогда

$$\mathrm{per}A \leq n!^{d-2} \prod_{i=1}^{n} \left\lceil \frac{r_i}{n^{d-2}} \right\rceil !^{\frac{1}{\lceil r_i/n^{d-2} \rceil}}.$$

Равенство здесь достигается на матрицах, все двумерные грани фиксированного направления которых равны такой двумерной матрице с r_i/n^{d-2} единицами в i-ой строке, что на ней достигается равенство в теореме Брэгмана.

Если гипотеза 5 была бы верна, то можно было бы достаточно точно оценивать перманент с помощью сумм элементов в гранях произвольной размерности. Действительно, пусть A – d-мерная (0,1)-матрица порядка n, l_β – k-мерные грани матрицы A фиксированного направления, $1 \leq k \leq d-1$, r_β – сумма элементов в грани l_β. По свойству 7 перманента многомерных матриц

$$\mathrm{per}A = \sum_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{per}A_\sigma,$$

где Σ есть множество таких отображений $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to I_n^{d-k}$, что набор $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ есть диагональ в $(d-k)$-мерной матрице, а матрица A_σ является $(k+1)$-мерной матрицей порядка n, i-ая гипергрань которой есть грань $l_{\sigma(i)}$ матрицы A. Заметим, что сумма элементов в гипергранях матриц A_σ равна $r_{\sigma(i)}$. Предполагая справедливость гипотезы 5, имеем

$$\mathrm{per}A_\sigma \leq n!^{k-1} \prod_{i=1}^{n} h_{\sigma(i)}!^{1/h_{\sigma(i)}},$$

где через $h_{\sigma(i)}$ обозначена величина $\left\lceil \frac{r_{\sigma(i)}}{n^{k-1}} \right\rceil$. Тогда будет выполнено неравенство

$$\mathrm{per}A \leq n!^{k-1} \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{i=1}^{n} h_{\sigma(i)}!^{1/h_{\sigma(i)}}.$$

Определив $(d-k)$-мерную матрицу B порядка n с элементами $b_\beta = h_\beta!^{1/h_\beta}$,

$\beta \in I_n^{d-k}$, это неравенство можно переписать в виде

$$\mathrm{per} A \leq n!^{k-1} \mathrm{per} B.$$

Если в этих рассуждениях грани l_β являются одномерными, то матрицы A_σ двумерны, и их перманенты можно оценить с помощью теоремы Брэгмана. Поэтому верно следующее утверждение.

Утверждение 7. *Пусть A – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n, l_β – одномерные грани матрицы A некоторого направления, r_β – сумма элементов в грани l_β. Построим $(d-1)$-мерную матрицу B порядка n с элементами $b_\beta = r_\beta!^{1/r_\beta}$. Тогда*

$$\mathrm{per} A \leq \mathrm{per} B.$$

Если в каждой гиперграни матрицы B мы заменим все элементы на максимальный в гиперграни и воспользуемся линейностью перманента, то в правой части неравенства утверждения 7 возникнет перманент некоторой $(d-1)$-мерной (0,1)-матрицы. Для оценки этого перманента можно снова применить утверждение 7, что даст следующий результат.

Теорема 21. *Пусть A – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n. Выберем в матрице A систему $\Theta_1, \ldots, \Theta_{d-1}$ вложенных направлений граней: вектор Θ_k задает направление k-мерных граней, и вектор Θ_{k-1} получается из вектора Θ_k заменой одного нуля на единицу (на каждом шаге одна из переменных координат становится фиксированной). Считаем, что гиперграни направления Θ_{d-1} пронумерованы числами от 1 до n.*

Предположим, что для $1 \leq k \leq d-1$ все единичные элементы k-мерных граней направления Θ_k, лежащих в i-ой гиперграни, можно покрыть $s_{i,k}$ $(k-1)$-мерными гранями направления Θ_{k-1}. Тогда

$$\mathrm{per} A \leq \prod_{k=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{n} s_{i,k}!^{1/s_{i,k}}.$$

Равенство в этом неравенстве будет достигаться, например, на блочно-диагональных матрицах. В то же время оценка сильно зависит от расположения единиц в гранях матрицы и часто не точна.

Теорема 21 может быть использована для верхней оценки перманентов матриц, которые содержат мало единиц и имеют достаточно регулярную структуру. Например, рассмотрим применение этой теоремы к матрице, перманент которой выражает число латинских квадратов.

Пусть $H_{LS}(n)$ – гиперграф, вершинами которого являются вершины куба $\mathbb{Z}_n^3$, а гиперребра соответствуют МДР-кодам с расстоянием 2 в $\mathbb{Z}_n^3$, и пусть $A_{LS}(n)$ – матрица смежности долей этого гиперграфа. Как было показано ранее, размерность и порядок матрицы $A_{LS}(n)$ равны n, и ее перманент совпадает с числом латинских квадратов порядка n. Для краткости обозначим это число через $LS(n)$.

Заметим, что для любого $2 \leq k \leq d-1$ для покрытия всех единиц в k-мерных гранях матрицы $A_{LS}(n)$ необходимо не более $k-1$ штук $(k-1)$-мерных граней, а любая одномерная грань матрицы $A_{LS}(n)$ содержит не более одной единицы. По теореме 21

$$LS(n) = n!\mathrm{per} A_{LS}(n) \leq n! \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n} k!^{1/k} = \prod_{k=1}^{n} k!^{n/k},$$

что совпадает с классической верхней оценкой числа латинских квадратов.

Можно также доказать, что гипотеза 5 выполняется асимптотически для матриц с достаточно большим числом единиц в гипергранях.

Теорема 22. *Пусть для некоторого* $d \in \mathbb{N}$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *задан набор из* n *натуральных чисел* $\{r_i(n)\}_{i=1}^n$ *такой, что* $\min\limits_{i=1,\dots,n} r_i(n)/n^{d-2} \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Обозначим через $\Lambda^d(n,r)$ *множество всех* d*-мерных* $(0,1)$*-матриц порядка* n*, у которых количество единиц в* i*-ой гиперграни не превосходит* $r_i(n)$*, и* *введем функцию* $F(x) = \lceil x \rceil !^{1/\lceil x \rceil}$. *Тогда*

$$\max_{A \in \Lambda^d(n,r)} \mathrm{per} A \leq n!^{d-2} e^{o(n)} \prod_{i=1}^{n} F\left(\frac{r_i(n)}{n^{d-2}}\right) \text{ \textit{при} } n \to \infty.$$

Доказательство. Докажем теорему индукцией по размерности матрицы. Базой индукции является случай $d = 2$, который легко проверяется с помощью теоремы 1.

Предположим, что для размерности $d-1$ теорема верна и докажем теорему для размерности d. Пусть A – произвольная матрица из $\Lambda^d(n,r)$. Тогда i-ая гипергрань некоторого направления матрицы A содержит не более $r_i(n)$ единиц.

Зафиксируем такое направление одномерных граней, что все грани l_β этого направления целиком лежат в выбранных гипергранях, и предположим, что в грани l_β содержится s_β единиц. Рассмотрим $(d-1)$-мерную матрицу B с элементами $b_\beta = s_\beta!^{1/s_\beta}$. Из утверждения 7 имеем, что $\mathrm{per} A \leq \mathrm{per} B$. Обозначим $f(x) = x!^{1/x}$. Используя известные оценки факториала, для функции $f(x)$ можно получить следующие неравенства:

$$(2\pi x)^{1/2x} x e^{-1} \leq f(x) \leq e^{1/x} x^{1+1/2x} e^{-1}.$$

Обозначим правую часть этого неравенства функцией $g(x)$. Можно проверить, что $g(x)$ – вогнутая функция. Так как $\sum\limits_{\beta=(i,*,\ldots,*)} s_\beta = r_i(n)$, то

$$\sum_{\beta=(i,*,\ldots,*)} g(s_\beta) \leq n^{d-2} g(r_i(n)/n^{d-2}),$$

где $*$ означает произвольный элемент множества $\{1,\ldots,n\}$. Тогда можно оценить сумму элементов в i-ой гиперграни матрицы B:

$$\sum_{\beta=(i,*,\ldots,*)} f(s_\beta) \leq n^{d-2} g(r_i(n)/n^{d-2}) = r_i(n) e^{-1+n^{d-2}/r_i(n)} \left(\frac{r_i(n)}{n^{d-2}}\right)^{n^{d-2}/2r_i(n)}.$$

Максимальное значение, которое могут принимать элементы матрицы B, равно $f(n)$. Пользуясь приемом из доказательства утверждения 6, перераспределим эту сумму так, чтобы максимальному минору соответствовал максимальный элемент $f(n)$. Получим некоторую $(d-1)$-мерную матрицу C порядка n, элементы которой равны либо нулю, либо $f(n)$, причем i-ая гипергрань матрицы C содержит не более $\frac{n^{d-2}g(r_i(n)/n^{d-2})}{f(n)}$ ненулевых элементов.

Оценивая снизу величину $f(n)$, получим, что число ненулевых элементов в i-ой гиперграни матрицы C не больше чем

$$\frac{n^{d-2}g(r_i(n)/n^{d-2})}{f(n)} \leq \frac{e^{n^{d-2}/r_i(n)}}{(2\pi n)^{1/2n}} \left(\frac{r_i(n)}{n^{d-2}}\right)^{n^{d-2}/2r_i(n)} \frac{r_i(n)}{n}.$$

Обозначим выражение в правой части этого неравенства через $s_i(n)$.

Пусть $\Lambda^{d-1}(n,s)$ – множество $(d-1)$-мерных матриц порядка n, для которых число единиц в i-ой гиперграни не превосходит $s_i(n)$. Тогда поделив все элементы матрицы C на $f(n)$, мы получим некоторую матрицу из $\Lambda^{d-1}(n,s)$.

Так как $\mathrm{per}B \leq \mathrm{per}C$ и $\mathrm{per}A \leq \mathrm{per}B$, то $\mathrm{per}A \leq \mathrm{per}C$. Поскольку A является произвольной матрицей из $\Lambda^{d-1}(n,s)$, имеем

$$\max_{A\in\Lambda^d(n,r)} \mathrm{per}A \leq f(n)^n \max_{C\in\Lambda^{d-1}(n,s)} \mathrm{per}C.$$

По условию теоремы $s_i(n) = (r_i(n)/n)^{1+o(1)}$ и $\min\limits_{i=1,\dots,n} s_i(n)/n^{d-3} \to \infty$ при $n\to\infty$. Поэтому множество $\Lambda^{d-1}(n,s)$ удовлетворяет условиям теоремы. Используя предположение индукции, получаем

$$\max_{A\in\Lambda^d(n,r)} \mathrm{per}A \leq f(n)^n n!^{d-3} e^{o(n)} \prod_{i=1}^{n} F\left(\left(\frac{r_i(n)}{n^{d-2}}\right)^{1+o(1)}\right)$$
$$= n!^{d-2} e^{o(n)} \prod_{i=1}^{n} F\left(\frac{r_i(n)}{n^{d-2}}\right) \text{ при } n\to\infty.$$

□

Случай когда элементы многомерной матрицы неотрицательны и не превосходят единицы можно свести к случаю (0,1)-матриц с помощью преобразований, подобных тем, что использованы в доказательстве утверждения 6.

В заключение, сравним перечисленные в этом разделе оценки на следующем примере. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1&1&1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{matrix} & \times & \begin{matrix} 0&0&1&1 \\ 1&1&1&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&0 \end{matrix} & \times & \begin{matrix} 0&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&1&1 \\ 1&1&0&0 \end{matrix} & \times & \begin{matrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&1 \\ 1&1&1&1 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Перманент матрицы A равен 74, сумма элементов в каждой гиперграни равна 8. Построим матрицу B с элементами $b_{i,j} = s_{i,j}!^{1/s_{i,j}}$, где $s_{i,j}$ – сумма элементов в (i,j)-ой строке матрицы A. Можно проверить, что $\mathrm{per} B \approx 104,23$, что больше чем величина $4! \cdot 2^{4/2} = 96$ из гипотезы 5. В то же время теорема 21 оценивает перманент A числом $4!^2 = 576$.

4 1-Факторы и 1-факторизации гиперграфов

Хорошо известно, что число 1-факторов в двудольном графе равно перманенту матрицы, в которой строки соответствуют вершинам одной доли, а столбцы – вершинам другой доли. С другой стороны, оно равно квадратному корню из перманента матрицы смежности такого графа. Для произвольного графа в работе [11] Н. Алоном и С. Фридлендом доказано, что число его 1-факторов не превосходит квадратного корня из перманента матрицы смежности.

С помощью оценок перманентов специальных матриц можно получить оценки на число 1-факторизаций полного графа [32]. Если обозначить через $\Phi(n)$ число 1-факторизаций полного графа на n вершинах, то

$$\left((1+o(1))\frac{n}{4e^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \leq \Phi(n) \leq \left((1+o(1))\frac{n}{e^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}.$$

Нижнюю оценку доказал П. Дж. Кэмерон в работе [16], и ее доказательство опирается на справедливость гипотезы ван дер Вардена. Верхнюю оценку можно обосновать с помощью теоремы Брэгмана для перманента (0,1)-матриц (теоремы 1) и уже упомянутой оценки на число 1-факторов через перманент матрицы смежности из работы [11].

Для графов специального вида существуют более точные оценки числа 1-факторизаций. Например, А. Схрейвер для двудольных d-регулярных графов в работе [45] доказал следующую теорему.

Теорема 23. *Пусть G есть d-регулярный двудольный граф на $2n$ вершинах. Тогда число 1-факторизаций графа G не меньше чем $\left(\frac{d!^2}{d^d}\right)^n$.*

4.1 Оценка числа 1-факторов в гиперграфе

Так как для существования хотя бы одного 1-фактора в d-униформном гиперграфе на n вершинах необходимо, чтобы n делилось на d, то в дальнейшем будем считать, что число вершин гиперграфа кратно мощности гиперребер.

Как и для графов, так и для униформных гиперграфов сложно найти необходимые и достаточные условия существования в них 1-факторов. Нередко достаточные условия для существования 1-фактора в гиперграфе выражаются в требовании того, чтобы любое подмножество вершин мощности k покрывалось достаточно большим числом гиперребер. Проблема существования 1-факторов в гиперграфах рассматривалась, например, в работах [35, 42, 49].

Несложно понять, что число 1-факторов в гиперграфе H не превосходит перманента его матрицы смежности. Действительно, пусть $w_1, \dots, w_{n/d}$ – набор гиперребер, образующий 1-фактор в гиперграфе H. Для каждого из гиперребер рассмотрим некоторое упорядочение входящих в него вершин. Затем циклическими сдвигами вершин в каждом гиперребре построим упорядоченные наборы $\alpha^1, \dots, \alpha^n$. По определению матрицы смежности $A(H)$ получим, что элемент $a_{\alpha^i} = 1$ для любого $i = 1, \dots, n$. Кроме того, расстояние Хэмминга между различными наборами α^i и α^j будет равно d по построению. Значит, наборы $\alpha^1, \dots, \alpha^n$ образуют единичную диагональ в матрице $A(H)$, и поэтому $\varphi(H) \leq \mathrm{per} A(H)$.

В этом разделе будут получены существенно лучшие оценки числа 1-факторов с помощью многомерного перманента. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 24. *Пусть H – простой d-униформный гиперграф на n вершинах, причем d делит n. Введем функцию $\mu(n, d)$ такую, что $\mu(n, 2) = 1$, $\mu(n, 3) = \left(\frac{2^{3/2}}{3}\right)^n$ для всех n и*

$$\mu(n, d) = \left(\frac{d!^2}{d^d d!^{1/d}}\right)^n$$

для всех $d \geq 4$. Тогда число 1-факторов в гиперграфе H

$$\varphi(H) \leq \left(\frac{\mathrm{per} A(H)}{\mu(n, d)}\right)^{1/d}.$$

Приведем сначала несколько простых следствий этой теоремы:

Следствие 2. *Если $d \neq 3$, то число 1-факторов в простом d-униформном ги-*

перграфе не превосходит корня степени d из перманента его матрицы смежности:

$$\varphi(H) \le (\mathrm{per}A(H))^{1/d}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что функция $\mu(n,d)$ не меньше единицы для всех $d \ge 4$ и $n \ge d$. $\square$

Случай $d = 3$ является исключением, но можно предположить, что верна

Гипотеза 6. *Число 1-факторов в простом 3-униформном гиперграфе не больше кубического корня перманента его матрицы смежности.*

Теорема 24 также позволяет оценить число 1-факторов в гиперграфе с помощью степеней его вершин.

Следствие 3. *Пусть $H = (X, W)$ – простой d-униформный гиперграф и пусть r_i – степени вершин $x_i \in X$. Тогда число 1-факторов в гиперграфе H*

$$\varphi(H) \le \left(\frac{(d-1)!^n}{\mu(n,d)} \prod_{i=1}^{n} r_i \right)^{1/d}.$$

Доказательство. Рассмотрим i-ую гипергрань k-ого направления в матрице смежности $A(H)$. Элементы в этой гиперграни проиндексированы такими упорядоченными наборами из d вершин, что на k-ой позиции находится вершина с номером i. Тогда каждое гиперребро, содержащее i-ую вершину, порождает $(d-1)!$ единиц в i-ой гиперграни, которые соответствуют $(d-1)!$ перестановке оставшихся в гиперребре вершин. Следовательно, число единиц в i-ой гиперграни некоторого направления равно $r_i(d-1)!$. По утверждению 2 имеем $\mathrm{per}A(H) \le (d-1)!^n \prod_{i=1}^{n} r_i$. $\square$

Начнем доказательство теоремы 24. Для этого введем несколько вспомогательных объектов.

Обозначим через $\mathfrak{F}(H)$ множество всех упорядоченных наборов из d 1-факторов в графе H, причем один и тот же 1-фактор может встречаться в одном наборе несколько раз. Очевидно, что $|\mathfrak{F}(H)| = \varphi^d(H)$.

По произвольному набору $f \in \mathfrak{F}(H)$ из d 1-факторов построим d-униформный гиперграф F на n вершинах такой, что множество гиперребер F в точности равно множеству всех гиперребер набора f, взятых с той же кратностью, с какой они встречаются в f. По построению F является d-фактором, разбивающимся на 1-факторы. Обозначим через $\Phi(F)$ число различных упорядоченных наборов $f \in \mathfrak{F}(H)$, соответствующих этому гиперграфу (то есть число всех 1-факторизаций гиперграфа F).

Пусть w – некоторое гиперребро гиперграфа H. Произвольное упорядочение вершин w назовем *ориентацией* этого гиперребра. *Ориентацией* гиперграфа H назовем совокупность ориентаций всех его гиперребер, причем каждое гиперребро имеет столько ориентаций, с какой кратностью оно входит в гиперграф H. *Правильной ориентацией* гиперграфа H будем называть такую его ориентацию, что никакая вершина не может занимать одну и ту же позицию в различных ориентациях его гиперребер. Обозначим через $\delta(H)$ множество всех правильных ориентаций гиперграфа H и пусть $\Delta(H) = |\delta(H)|$ есть мощность этого множества.

Если $d = 2$, то довольно легко понять, что множество правильных ориентаций $\delta(F)$ 1-факторизуемого 2-униформного гиперграфа F, каждая вершина которого имеет степень 2, не пусто. Действительно, в этом случае F является обычным графом, представляющим собой объединение циклов четной длины. Выберем для каждого цикла направление обхода и ориентируем ребра F согласно этому направлению. Такая ориентация ребер будет правильной ориентацией F. Позже мы докажем, что и для произвольного d-фактора F, разбивающегося на 1-факторы, существует правильная ориентация.

Пусть F_1 и F_2 – два d-униформных d-фактора, разбивающихся на 1-факторы. Заметим, что если множества гиперребер F_1 и F_2 совпадают (с учетом кратности вхождения гиперребер), то $\delta(F_1) = \delta(F_2)$ по определению. В случае, если множества гиперребер F_1 и F_2 различны, то у любых двух их ориентацией найдутся по крайней мере два разных гиперребра, а значит, $\delta(F_1) \cap \delta(F_2) = \emptyset$.

Таким образом, все наборы 1-факторов из $\mathfrak{F}(H)$ можно разбить на такие классы, что наборам из одного класса соответствует одинаковый d-фактор F, мощность каждого класса равна $\Phi(F)$, и множества правильных ориентаций для различных классов не пересекаются.

Сформулируем ключевое утверждение для доказательства теоремы 24.

Утверждение 8. *Пусть F – d-униформный гиперграф, являющийся 1-факторизуемым d-фактором. Тогда*

$$\Phi(F) \leq \frac{\Delta(F)}{\mu(n,d)}.$$

Имея этот результат, несложно доказать теорему 24. Действительно, для простого d-униформного гиперграфа H введем $\gamma(H) = \bigcup \delta(F)$, где объединение берется по всем таким d-униформным d-факторам F, которые могут быть построены по одному из $f \in \mathfrak{F}(H)$. Несложно заметить, что если из матрицы смежности $A(H)$ взять n элементов, индексы которых в точности совпадают с одной из ориентаций из $\gamma(H)$, то эти элементы образуют единичную диагональ в $A(H)$. Таким образом, $|\gamma(H)| \leq \mathrm{per} A(H)$. Следующее свойство является простым следствием утверждения 8.

Следствие 4. *Пусть H – d-униформный гиперграф на n вершинах. Тогда*

$$|\mathfrak{F}(H)| \leq \frac{|\gamma(H)|}{\mu(n,d)}.$$

Доказательство. Как было замечено ранее, множества $\mathfrak{F}(H)$ всех наборов из d 1-факторов и ориентаций $\gamma(H)$ согласованным образом разбиваются на непересекающиеся подмножества, причем этим подмножествам однозначно соответствует d-униформные d-факторы F. Если неравенство $\Phi(F) \leq \frac{\Delta(F)}{\mu(n,d)}$ выполнено для каждого построенного d-фактора F, то аналогичное неравенство выполнено и для мощностей множеств $\mathfrak{F}(H)$ и $\gamma(H)$:

$$|\mathfrak{F}(H)| \leq \frac{|\gamma(H)|}{\mu(n,d)}.$$

□

Доказательство теоремы 24. Напомним, что $\varphi^d(H) = |\mathfrak{F}(H)|$. По следствию 4 имеем, что $|\mathfrak{F}(H)| \leq \frac{|\gamma(H)|}{\mu(n,d)}$. Также было замечено, что $|\gamma(H)|$ не превосходит перманента матрицы смежности $A(H)$. Из этих неравенств получаем

$$\varphi(H) \leq \left(\frac{\mathrm{per}A(H)}{\mu(n,d)}\right)^{1/d}.$$

□

Перейдем теперь к доказательству утверждения 8. Сначала покажем, что достаточно рассмотреть только случай, когда гиперграф F – связный.

Лемма 4. *Предположим, что для любого связного* 1*-факторизуемого* d*-униформного* d*-фактора* F *на* n *вершинах верно* $\Phi(F) \leq \frac{\Delta(F)}{\mu(n,d)}$. *Тогда это неравенство верно и для несвязных* 1*-факторизуемых* d*-факторов.*

Доказательство. Пусть $F_1, \ldots, F_k$ – все компоненты связности гиперграфа F: $F = F_1 \cup \ldots \cup F_k$. Так как F – 1-факторизуемый гиперграф, то каждая компонента связности имеет кратное d число вершин. Обозначим эти числа через $n_1, \ldots, n_k$, $n_1 + \ldots + n_k = n$. Гиперграфы $F_1, \ldots, F_k$ могут быть независимо разбиты на 1-факторы и для каждого гиперграфа можно независимо выбирать ориентацию. Поэтому верно, что $\Phi(F) = \Phi(F_1) \cdot \ldots \cdot \Phi(F_k)$ и $\Delta(F) = \Delta(F_1) \cdot \ldots \cdot \Delta(F_k)$.

Предположим, что для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено $\Phi(F_i) \leq \frac{\Delta(F_i)}{\mu(n_i,d)}$. Так как для функции $\mu(n,d)$ верно

$$\mu(n,d) = \mu(n_1,d) \cdot \ldots \cdot \mu(n_k,d),$$

то

$$\Phi(F) \le \frac{\Delta(F)}{\mu(n,d)}.$$

$\square$

Прежде чем перейти к доказательству утверждения 8, рассмотрим более простой случай, когда F является обычным графом ($d = 2$). В этом случае связный граф F, представляющий собой 1-факторизуемый 2-фактор, есть некоторый цикл четной длины. Если граф F содержит более двух вершин, то его можно разбить на 1-факторы двумя способами. Также существуют лишь две возможные ориентации его ребер, соответствующие выбору направления обхода этого цикла. Если же граф F состоит всего из двух вершин, то его можно разбить на 1-факторы лишь одним способом, и для его двух ребер существует единственный способ задать их ориентацию. Таким образом, для обычных графов $\Phi(F) = \Delta(F)$.

Для доказательства утверждения 8 потребуется понятие двудольного представления гиперграфа. Напомним, что для гиперграфа $H = (X, W)$ его *двудольное представление* есть двудольный граф $B(H) = (X, W; E)$ с множеством вершин $X \cup W$ и множеством ребер E таким, что для $x \in X$ и $w \in W$ ребро $xw \in E$ тогда и только тогда, когда в гиперграфе H гиперребро w содержит вершину x. Заметим, что матрица смежности долей графа $B(H)$ является в точности матрицей инцидентности гиперграфа H. Также, если гиперграф H – связный, то его двудольное представление тоже будет связным графом.

Любой двудольный граф можно считать двудольным представлением некоторого гиперграфа. Если H есть d-униформный d-фактор, то его двудольное представление $B(H)$ будет таким d-регулярным графом, что в каждой строке и каждом столбце его матрицы смежности содержится d единиц.

Свяжем количество наборов 1-факторов и число правильных ориентаций гиперграфа F с числом некоторых структур в его двудольном представлении. Для этого нам потребуются следующие определения.

Пусть $G = (V, E)$ – обычный граф. *Правильной раскраской ребер* в k цветов графа G называется такое отображение множества ребер графа во множество «цветов», что никакие два смежных ребра не имеют одинаковый цвет. Если граф G является d-регулярным двудольным графом, то любая правильная раскраска его ребер в d цветов соответствует некоторой его 1-факторизации.

Пусть $B = (X, Y; E)$ – произвольный d-регулярный двудольный граф с долями X и Y такими, что $|X| = |Y| = n$, и пусть d делит n. *Правильным разбиением* доли Y назовем такое разбиение Y на непересекающиеся подмножества $Y_1, \ldots, Y_d$, что окрестность каждого множества Y_i (которая есть объединение окрестностей элементов y по всем $y \in Y_i$) равна X. При правильном разбиении доли Y любая вершина $x \in X$ смежна ровно с одной вершиной из каждого подмножества Y_i.

Напомним, что рассматриваемый в утверждении 8 гиперграф F может содержать мультиребра, которые в двудольном представлении $B(F)$ перейдут в различные, но имеющие одинаковые окрестности, вершины доли W. Пусть гиперграф F содержит лишь k различных ребер, и пусть i-ое ребро входит в гиперграф F с кратностью l_i, $i = 1, \ldots, k$. Введем функцию $R(F) = \prod_{i=1}^{k} l_i!$. Свяжем число правильных ориентаций F с числом правильных раскрасок ребер графа $B(F)$ в d цветов.

Лемма 5. *Пусть F – d-униформный гиперграф на n вершинах, являющийся 1-факторизуемым d-фактором, $B(F)$ – его двудольное представление. Обозначим через $P(B)$ число правильных раскрасок ребер графа $B(F)$ в d цветов. Тогда*

$$\Delta(F) = P(B)/R(F).$$

Доказательство. Каждой правильной раскраске ребер графа $B(F)$ в d цветов можно сопоставить некоторую правильную ориентацию гиперграфа F по следующему правилу: если элементы $x \in X$ и $w \in W$ соединены в графе $B(F)$ ребром цвета i, то в ориентации гиперребра w элемент x будет стоять на i-ой позиции. Разным правильным раскраскам ребер $B(F)$ могут соответствовать одинаковые ориентации F только в том случае, если гиперграф F содержит кратные гиперребра, причем раскраски ребер $B(F)$, которым соответствует одинаковая ориентация, переводятся одна в другую произвольной перестановкой номеров вершин в доле W с одинаковыми окрестностями. Таким образом, при построении ориентаций по правильным раскраскам каждая ориентация будет посчитана $R(F)$ раз, а значит, $\Delta(F) = P(B)/R(F)$. □

Как следствие теоремы Кёнига–Фробениуса (теоремы 2) имеем, что для любого двудольного d-регулярного графа существует правильная раскраска ребер в d цветов. Поэтому верно

Следствие 5. *Число правильных ориентаций d-униформного d-фактора F, разбивающегося на 1-факторы, не равно нулю.*

Далее аналогичным образом свяжем число 1-факторизаций F с числом правильных разбиений доли W графа $B(F)$.

Лемма 6. *Пусть F есть d-униформный гиперграф на n вершинах, являющийся 1-факторизуемым d-фактором, $B(F)$ – его двудольное представление. Обозначим через $T(B)$ число правильных разбиений доли W. Тогда*

$$\Phi(F) = T(B)/R(F).$$

Доказательство. Каждому правильному разбиению доли W можно сопоставить некоторую 1-факторизацию гиперграфа F по следующему правилу: если элемент $w \in W$ попал при разбиении в подмножество W_i, то гиперребро w гиперграфа F будет лежать в 1-факторе с i-ым номером. Аналогично доказательству леммы 5 получаем, что $\Phi(F) = T(B)/R(F)$. □

Теперь для доказательства утверждения 8 достаточно доказать, что верна следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $B = (X, Y; E)$ есть d-регулярный связный двудольный граф на $2n$ вершинах, причем d делит n. Тогда $T(B) \leq \frac{P(B)}{\mu(n,d)}$.*

Доказательство. Сначала докажем это неравенство в более простом случае $d \geq 4$.

Оценим величину $T(B)$ сверху. Для этого сначала оценим, сколькими способами можно построить подмножество Y_1 в разбиении: первый элемент $x_1 \in X$ можно покрыть любой смежной вершиной $y \in Y$. Поэтому элемент y_1 для подмножества Y_1 можно выбрать d способами. Пусть x_2 – произвольный элемент, не лежащий в окрестности y_1. Число вершин, смежных с x_2, не превосходит d, а значит, число способов выбрать вторую вершину y_2 для множества Y_1 не больше d. Продолжая этот процесс далее, получаем, что элементы для подмножества Y_1 можно выбрать не более чем $d^{n/d}$ способами.

Удалим выбранные на предыдущем шаге элементы $y_1, \ldots, y_{n/d}$ из доли Y и все инцидентные им ребра из графа B. В оставшемся графе аналогичным образом оцениваем число способов составить подмножество Y_2, и получаем, что это число не превосходит $(d-1)^{n/d}$. Продолжая эту процедуру далее и перемножая получающиеся на каждом шаге оценки, находим, что число способов правильно разбить долю Y на подмножества не превосходит $d!^{n/d}$:

$$T(B) \leq d!^{n/d}.$$

Для нижней оценки числа правильных раскрасок ребер графа B в d цветов используем теорему 23:

$$P(B) \geq \left(\frac{d!^2}{d^d}\right)^n.$$

Таким образом,

$$\frac{T(B)}{P(B)} \leq \left(\frac{d!^{1/d} d^d}{d!^2}\right)^n = \frac{1}{\mu(n,d)}$$

для любого связного d-регулярного двудольного графа B на $2n$ вершинах.

Рассмотрим случай $d = 3$. Для оценки величины $T(B)$ мы теперь будем учитывать, что граф B является связным. Построим подмножества Y_1, Y_2 и Y_3

поэтапно.

Перед первым этапом выберем вершину y_1^1 для подмножества Y_1, которая покроет некоторую фиксированную вершину $x_1 \in X$. Заметим, что выбрать такую вершину y_1^1 можно тремя способами.

Предложим, что после k-ого этапа мы имеем $Y_i = \left\{y_i^1, \ldots, y_i^{m_i}\right\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, где $m_1 + m_2 + m_3 \geq 2k + 1$, и ни одна из вершин $x \in X$ не смежна в точности двум вершинам из $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$. Так как граф B связен, то существует вершина $x' \in X$, которая покрыта ровно одной вершиной из $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$. Без ограничения общности можно считать, что x' смежна некоторой вершине из Y_1. Тогда число способов выбрать вершины $y_2^{m_2+1}$ для множества Y_2 и $y_3^{m_3+1}$ для множества Y_3, покрывающие вершину x', равно двум. Если существует, например, вершина x'', которая смежна некоторым вершинам $y_1^j \in Y_1$ и $y_2^k \in Y_2$ и не смежна всем вершинам из Y_3, то последняя вершина, покрывающая x'' находится однозначно и добавляется во множество Y_3. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока каждая вершина $x \in X$ не станет смежной трем, одной или ни одной вершинам из $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$.

Заметим, что самая последняя вершина в построении множеств Y_1, Y_2 и Y_3 определяется однозначно. Так как на каждом этапе мощность $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ возрастает не менее чем на 2, то общее количество этапов не превосходит $\frac{n}{2} - 1$. Следовательно, число правильных разбиений доли Y

$$T(B) \leq 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Для оценки величины $P(B)$ используем теорему Схрейвера (теорему 3) и учтем, что перманент матрицы, две диагонали которой заполнены единицами, не меньше 2:

$$P(B) \geq 2\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Таким образом,

$$\frac{T(B)}{P(B)} \leq \frac{3^{n+1}}{2^{3n/2+2}} < \frac{3^n}{2^{3n/2}} = \frac{1}{\mu(n,3)}.$$

□

Как было отмечено ранее, из леммы 7 следует утверждение 8, а значит, можно считать доказательство теоремы 24 завершенным.

Для d-дольных гиперграфов несложно доказать другую оценку числа 1-факторов. Но при большом числе вершин в гиперграфе она будет хуже оценки из теоремы 24.

Пусть $LS(n)$ есть число всех латинских квадратов порядка n, а через $QS(n)$ обозначим число всех латинских квадратов, у которых один из столбцов (например, первый) фиксирован. Несложно видеть, что $LS(n) = QS(n)n!$.

Сначала докажем небольшую вспомогательную лемму:

Лемма 8. *Пусть $U(d)$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка d такая, что ее элемент $u_\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда все компоненты $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ различны. Тогда перманент матрицы $U(d)$ равен числу латинских квадратов с фиксированным заполнением одного из столбцов:*

$$\mathrm{per} U = QS(d).$$

Доказательство. Пусть набор индексов $(\alpha^1, \ldots, \alpha^d)$ формирует единичную диагональ в матрице $U(s)$. Составим таблицу T размера $d \times d$ с элементами $t_{i,j} = \alpha^i_j$. В любой строке T все элементы различны, так как индекс α^i соответствует единичному элементу матрицы $U(d)$. В любом столбце таблицы T значения элементов также различны, так как индексы $(\alpha^1, \ldots, \alpha^d)$ формируют диагональ, а значит, ни на какой позиции в них не могут оказаться два одинаковых элемента.

Следовательно, таблица T является латинским квадратом порядка d. По любому латинскому квадрату порядка d аналогичным образом строится единичная диагональ в матрице $U(d)$. Заметим, что любая перестановка строк квадрата T не меняет диагональ, которой соответствует этот квадрат. Поэтому перманент U равен числу латинских квадратов с фиксированным заполнением одного из столбцов. □

Докажем с помощью этой леммы оценку на число 1-факторов в k-сбалансированном d-дольном гиперграфе:

Теорема 25. *Пусть H есть простой k-сбалансированный d-дольный гиперграф. Тогда число 1-факторов в гиперграфе H*

$$\varphi(H) \le \left(\frac{\mathrm{per}A(H)}{QS(d)}\right)^{1/d}.$$

Доказательство. Занумеруем доли гиперграфа H от 1 до d. Так как гиперграф H – d-дольный, то его матрицу смежности $A(H)$ можно разбить на блоки v_β порядка k, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ и $\beta_i \in \{1, \ldots, d\}$, такие, что элемент a_α попадает в блок v_β тогда и только тогда, когда вершина с номером α_i принадлежит β_i-ой доли гиперграфа H. Заметим, что единицы матрицы $A(H)$ могут содержаться только в таких блоках v_β, что все значения $\beta_1, \ldots, \beta_d$ различны. Поэтому d-мерная (0,1)-матрица порядка d, элемент которой равен единице тогда и только тогда, когда блок v_β содержит единицы, совпадает с матрицей $U(d)$.

Рассмотрим произвольный 1-фактор в гиперграфе H. Заметим, что гиперребра этого 1-фактора можно ориентировать так, чтобы все соответствующие этой ориентации элементы $A(H)$ сформировали частичную диагональ длины k, целиком лежащую в некотором блоке v_β. Если $f \in \mathfrak{F}(H)$ есть набор из d 1-факторов гиперграфа H и $(\beta^1, \ldots, \beta^d)$ – единичная диагональ в матрице $U(d)$, то можно ориентировать правильно гиперребра i-ого 1-фактора f так, чтобы соответствующие им элементы $A(H)$ сформировали частичную единичную диагональ, лежащую в блоке v_{β^i}. Объединение всех элементов, соответствующих гиперребрам f, даст единичную диагональ в $A(H)$. Таким образом, число правильных ориентаций фиксированного набора f из d 1-факторов не меньше перманента матрицы $U(d)$.

По лемме 8 перманент $U(d)$ равен $QS(d)$. Поэтому каждому $f \in \mathfrak{F}(H)$ можно поставить в соответствие не менее $QS(d)$ различных диагоналей в $A(H)$.

Отсюда $|\mathfrak{F}(H)| \leq \mathrm{per} A(H)/QS(d)$. Вспоминая, что $\varphi^d(H) = |\mathfrak{F}(H)|$, имеем

$$\varphi(H) \leq \left(\frac{\mathrm{per} A(H)}{QS(d)}\right)^{1/d}.$$

□

В завершение этого раздела приведем несколько примеров, на основании которых можно сделать выводы о степени точности теоремы 24.

Пример 1. Пусть H – d-униформный гиперграф на d вершинах с единственным гиперребром, $d \geq 4$. Очевидно, что $\varphi(H) = 1$. Элемент a_α матрицы смежности $A(H)$ равен единице тогда и только тогда, когда все компоненты индекса α различны, откуда $A(H) = U(d)$. По лемме 8 имеем, что $\mathrm{per} A(H) = QS(d) = LS(d)/d!$. Наилучшая из известных на данный момент нижняя оценка числа латинских квадратов порядка d:

$$LS(d) \geq \frac{d!^{2d}}{d^{d^2}}.$$

В то же время

$$\mu(d, d) = \frac{d!^{2d}}{d^{d^2} d!},$$

и любое улучшение функции $\mu(n, d)$ для данного случая означало бы аналогичное улучшение нижней оценки числа латинских квадратов.

Пример 2. Рассмотрим полный d-униформный гиперграф H_n^d на n вершинах, $d \geq 4$. Число 1-факторов гиперграфа H_n^d равно количеству неупорядоченных разбиений множества вершин на n/d подмножеств мощности d:

$$\varphi(H_n^d) = \frac{1}{(n/d)!}\binom{n}{d, \ldots, d} = \frac{n!}{d!^{n/d}(n/d)!}.$$

С помощью формулы Стирлинга получаем, что

$$\varphi(H_n^d) = e^{o(n)} \left(\frac{1}{(d-1)!}\frac{n^{d-1}}{e^{d-1}}\right)^{n/d} \text{ при } n \to \infty.$$

Перманент матрицы смежности $A(H_n^d)$ не превосходит перманента d-мерной единичной матрицы E_n^d порядка n. Так как перманент такой матрицы равен $n!^{d-1}$, то из теоремы 24 имеем

$$\varphi(H_n^d) \leq \left(\frac{\mathrm{per} A(H_n^d)}{\mu(n,d)}\right)^{1/d} \leq \left(\frac{d^{dn} d!^{n/d}}{d!^{2n}} n!^{d-1}\right)^{1/d}.$$

Снова применив формулу Стирлинга, мы можем оценить число 1-факторов в H_n^d как

$$\varphi(H_n^d) \leq e^{o(n)} \left(\frac{d!^{1/d} d^d}{d!^2} \frac{n^{d-1}}{e^{d-1}}\right)^{n/d} \quad \text{при } n \to \infty.$$

4.2 Оценка числа 1-факторизаций полного гиперграфа

Вспомним, что для существования хотя бы одного 1-фактора в полном d-униформном гиперграфе H_n^d на n вершинах необходимо, чтобы n было кратно d. Как известно из работы [14], это условие будет достаточным для существования и 1-факторизации. Также несложно проверить, что каждая 1-факторизация H_n^d состоит из $t = C_{n-1}^{d-1}$ 1-факторов. Обозначим через $\Phi(n,d)$ число 1-факторизаций гиперграфа H_n^d.

Докажем сначала тривиальную оценку на число 1-факторизаций H_n^d.

Утверждение 9. *Число 1-факторизаций гиперграфа H_n^d*

$$\Phi(n,d) \leq \left((1+o(1))\frac{n^{d-1}}{(d-1)!}\right)^{\frac{n^d}{d!}} \quad \text{\emph{при} } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$ – некоторая 1-факторизация гиперграфа H_n^d. Построим по этой 1-факторизации раскраску единичных элементов матрицы смежности $A(H_n^d)$ в t цветов по следующему правилу: элемент a_α имеет цвет i, если ребро $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ принадлежит 1-фактору φ_i. Заметим, что если элемент a_α имеет цвет i, то и для любого β такого, что $(\beta_1, \ldots, \beta_d)$ есть перестановка элементов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, элемент a_β будет иметь цвет i. Поэтому любая такая раскраска всех единичных элементов $A(H_n^d)$ может быть задана раскраской не более чем $n^d/d!$ элементов этой матрицы.

Число всевозможных раскрасок $n^d/d!$ элементов $A(H_n^d)$ в t цветов равно $t^{\frac{n^d}{d!}}$. Так как $t = C_{n-1}^{d-1} = (1+o(1))\frac{n^{d-1}}{(d-1)!}$ при $n \to \infty$, то число всех 1-факторизаций H_n^d

$$\Phi(n,d) \leq \left((1+o(1))\frac{n^{d-1}}{(d-1)!}\right)^{\frac{n^d}{d!}} \text{ при } n \to \infty.$$

$\square$

Будем оценивать сверху число 1-факторизаций гиперграфа H_n^d тем же методом, что и для полного графа. Но в данном случае для связи числа 1-факторов в произвольном d-униформном гиперграфе и перманента его матрицы смежности будет применена теорема 24, а для верхней оценки перманентов многомерных матриц используем теорему 22.

Сформулируем и докажем основную теорему этого раздела.

Теорема 26. *Число 1-факторизаций полного d-униформного гиперграфа H_n^d на n вершинах*

$$\Phi(n,d) \leq \left((1+o(1))\frac{n^{d-1}}{\mu(n,d)^{1/n}e^d}\right)^{\frac{n^d}{d!}} \text{ \textit{при} } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ – некоторый набор из i непересекающихся 1-факторов гиперграфа H_n^d. Обозначим через H_i гиперграф $H_n^d \setminus \{\varphi_1, \ldots, \varphi_i\}$. Пусть $A_i = A(H_i)$ – матрица смежности гиперграфа H_i.

По теореме 24 число способов выбрать в гиперграфе H_n^d 1-фактор, непересекающийся с 1-факторами $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ не превосходит $\left(\frac{\mathrm{per} A_i}{\mu(n,d)}\right)^{1/d}$. Тогда число 1-факторизаций в гиперграфе H_n^d

$$\Phi(n,d) \leq \prod_{i=0}^{t-1} \max_{\varphi_1,\ldots,\varphi_i} \left(\frac{\mathrm{per} A_i}{\mu(n,d)}\right)^{1/d},$$

где $A_0 = A(H_n^d)$ и максимум берется по всем непересекающимся наборам 1-факторов.

Посчитаем число единиц в гипергранях матриц A_i. Сначала заметим, что гиперграф H_i содержит $(t-i)n/d$ гиперребер. Каждое гиперребро H_i соответствует $d!$ единичным элементам матрицы $A(H_i)$, и множества элементов, соответствующие разным гиперребрам, не пересекаются. Следовательно, в матрице $A(H_i)$ содержится $n(d-1)!(t-i)$ единиц. Поскольку все вершины гиперграфа H_i имеют одинаковую степень, то каждая гипергрань $A(H_i)$ содержит одинаковое число единиц, а именно

$$R_i = (t-i)(d-1)!.$$

Можно проверить, что для всех i из интервала $\Delta(l) = \left[l\frac{n^{d-2}}{(d-1)!}, (l+1)\frac{n^{d-2}}{(d-1)!}\right]$ величина R_i не превосходит $(n-l)n^{d-2}$. Заметим, что каждый промежуток $\Delta(l)$ содержит не более $\left\lceil\frac{n^{d-2}}{(d-1)!}\right\rceil$ значений i. Среди всех матриц A_i, где $i \in \Delta(l)$, можно выбрать матрицу $N(l)$ с максимальным перманентом. Обозначим через $A(l)$ матрицу, которая получается из $N(l)$ заменой некоторых нулей на единицы так, чтобы любая гипергрань некоторого направления содержала ровно $(n-l)n^{d-2}$ единиц. Очевидно, что $\mathrm{per}A_i \leq \mathrm{per}N(l) \leq \mathrm{per}A(l)$ для всех $i \in \Delta(l)$.

Тогда оценку числа 1-факторизаций можно переписать в следующем виде:

$$\Phi(n,d) \leq \mu(n,d)^{-t/d}\left(\prod_{l=0}^{n-1}\mathrm{per}^{1/d}A(l)\right)^{\left\lceil\frac{n^{d-2}}{(d-1)!}\right\rceil}.$$

Разобьем произведение перманентов матриц $A(l)$ на две части: когда l лежит в промежутке от 0 до $n-\sqrt{n}$, и когда оно находится между $n-\sqrt{n}$ и $n-1$. Для первой части оценим асимптотически перманенты этих матриц с помощью теоремы 22:

$$\prod_{l=0}^{n-\sqrt{n}}\mathrm{per}A(l) \leq \prod_{l=0}^{n-\sqrt{n}} n!^{d-2}e^{o(n)}F^n\left(n-l\right).$$

По определению функции F и по формуле Стирлинга имеем

$$\prod_{l=0}^{n-\sqrt{n}} e^{o(n)} F^n\left(n-l\right) = \prod_{l=0}^{n-\sqrt{n}} e^{o(n)}\left(n-l\right)!^{\frac{n}{(n-l)}}$$
$$= \prod_{l=0}^{n-\sqrt{n}} e^{o(n)}\left(n-l\right)^n e^{-n} \le e^{-n^2+o(n^2)} n!^n = e^{o(n^2)}\left(\frac{n}{e^2}\right)^{n^2}.$$

Во второй части оценим перманенты $A(l)$ с помощью утверждения 2:

$$\prod_{l=n-\sqrt{n}}^{n} \mathrm{per} A(l) \le \left(n^{d-2}\sqrt{n}\right)^{n\sqrt{n}} = n^{o(n^2)}.$$

Таким образом,

$$\prod_{l=0}^{n-1} \mathrm{per}^{1/d} A(l) \le \left(n!^{(d-2)n} e^{o(n^2)}\left(\frac{n}{e^2}\right)^{n^2}\right)^{1/d}.$$

Подставляя эту оценку в полученное выражение для числа 1-факторизаций, имеем

$$\Phi(n,d) \le \mu(n,d)^{-t/d} e^{o(n^d)}\left(\frac{n}{e^2}\right)^{\frac{n^d}{d!}} n!^{\frac{(d-2)n^{d-1}}{d!}}$$
$$= \mu(n,d)^{-t/d} e^{o(n^d)}\left(\frac{n^{d-1}}{e^d}\right)^{\frac{n^d}{d!}}.$$

Вспомним, что $t = C_{n-1}^{d-1} = \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + o(n^{d-1})$. Поэтому

$$\Phi(n,d) \le \left((1+o(1))\frac{n^{d-1}}{\mu(n,d)^{1/n} e^d}\right)^{\frac{n^d}{d!}} \text{ при } n \to \infty.$$

$\square$

Следствие 6. *Если $d = 3$, то число 1-факторизаций полного 3-униформного* *гиперграфа* H_n^3 *на* n *вершинах удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(n,3) \le \left((1+o(1))\frac{3n^2}{2^{3/2}\cdot e^3}\right)^{\frac{n^3}{6}} \text{ при } n \to \infty,$$

а для всех $d \ge 4$ *число* 1-*факторизаций* H_n^d

$$\Phi(n,d) \le \left((1+o(1))\left(\frac{d}{e}\right)^d \frac{n^{d-1}}{d!^{2-1/d}}\right)^{\frac{n^d}{d!}} \text{ при } n \to \infty.$$

5 Квазигруппы, латинские квадраты и гиперкубы

5.1 Трансверсали в латинских квадратах и гиперкубах

5.1.1 Подсчет числа трансверсалей с помощью многомерного перманента

Как было замечено во введении, число трансверсалей в любом $(d-1)$-мерном латинском гиперкубе равно перманенту соответствующего d-мерного МДР-кода. Рассмотрим другой способ связать число трансверсалей с многомерным перманентом и приведем несколько его применений.

Пусть Q есть d-мерный латинский гиперкуб порядка n, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ – набор переменных. Построим по гиперкубу Q гиперкуб $Q(X)$ с элементами $\{x_i\}_{i=1}^n$ такой, что элемент $q_\alpha(X)$ гиперкуба $Q(X)$ равен x_i тогда и только тогда, когда элемент q_α гиперкуба Q равен i. Очевидно, что перманент гиперкуба $Q(X)$ является полиномом степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Назовем такой полином *перманентом* латинского гиперкуба Q.

Некоторые свойства латинского гиперкуба находят свое отражение в его перманенте [21]. Здесь мы используем только тот факт, что число трансверсалей $T(Q)$ в гиперкубе Q совпадает с коэффициентом перед $\prod\limits_{i=1}^n x_i$ перманента гиперкуба. Это наблюдение позволяет выразить число трансверсалей в любом латинском гиперкубе как сумму перманентов матриц специального вида.

Для полинома $p(x_1, \ldots, x_n)$ степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$ введем функцию $\langle r \rangle\, p(X)$, которая равна сумме значений полинома $p(X)$ по всем (0,1)-векторам длины n и веса r. По принципу включения-исключения коэффициент перед $\prod\limits_{i=1}^n x_i$ в полиноме $p(X)$ есть $\sum\limits_{r=0}^n (-1)^{n-r} \langle r \rangle\, p(X)$. Поэтому число трансверсалей в гиперкубе Q удовлетворяет равенству

$$T(Q) = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \langle r \rangle\, \mathrm{per} Q(X),$$

где $\langle r\rangle\,\mathrm{per}Q(X)$ можно рассматривать как сумму перманентов d-мерных (0,1)-матриц порядка n, каждая одномерная грань которых содержит ровно r единиц.

С помощью данного соответствия можно доказать, что число трансверсалей в латинском гиперкубе четного порядка четно.

Теорема 27 ([53]). *Любой d-мерный латинский гиперкуб четного порядка имеет четное число трансверсалей.*

В работе [12] аналогичное утверждение было получено для латинских квадратов.

Рассмотренная конструкция позволяет выразить через линейную комбинацию перманентов матриц специального вида не только число трансверсалей в латинских гиперкубах, но и перманент любой многомерной матрицы.

Утверждение 10. *Пусть A есть d-мерная матрица порядка n. Построим по матрице A $(d-1)$-мерный гиперкуб $Q(X)$ порядка n от переменных $x_1,\dots,x_n$ следующим образом: элементам $\left\{a_{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-1},i}\right\}_{i=1}^{n}$ одномерной грани матрицы A поставим в соответствие элемент $q_{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-1}} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-1},i}x_i$ гиперкуба $Q(X)$. Тогда*

$$\mathrm{per}A = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\,\langle r\rangle\,\mathrm{per}Q(X).$$

5.1.2 Оценки числа трансверсалей

Так как число трансверсалей в $(d-1)$-мерном латинском гиперкубе равно перманенту некоторого d-мерного МДР-кода, то часто результаты, полученные относительно одного из этих объектов, применимы и ко второму объекту. Например, с помощью теоремы 19 можно оценить сверху число трансверсалей в латинских гиперкубах.

Теорема 28. *Пусть $T(n,d)$ – максимальное число трансверсалей в d-мерных латинских гиперкубах порядка n. Тогда*

$$T(n,d) \le \left((1+o(1))\frac{n^{d-1}}{e^d}\right)^n \quad \text{при } n\to\infty.$$

В частности, число трансверсалей в латинских квадратах порядка n асимптотически не превосходит $\left((1+o(1))\frac{n}{e^2}\right)^n$.

В работе [25] Р. Глебов и З. Лурия предложили вероятностную конструкцию, доказывающую асимптотическую точность этой оценки для латинских квадратов и строящую бесконечную серию достигающих ее латинских гиперкубов. Кроме того, в этой работе приводится альтернативное доказательство теоремы 28.

Проблему оценки максимального числа трансверсалей в латинских квадратах $T(n,2)$ поставил Я. М. Уонлесс на конференции Loops'03 в 2003 году, и наилучшую до момента доказательства теоремы 28 оценку на число $T(n,2)$ получили Б. Д. Маккай, Дж. К. Маклеод и Я. М. Уонлесс в работе [37]:

$$b_1^n \leq T(n,2) \leq b_2^n \sqrt{n} n!,$$

где $b_1 \approx 1,719$ и $b_2 \approx 0,614$. Правая часть этого неравенства эквивалентна неравенству $T(n,2) \leq \left((1+o(1))\frac{n}{e^c}\right)^n$ с $c \approx 1,48$.

Перейдем к проблеме нижней оценки числа трансверсалей в латинских гиперкубах. К сожалению, даже для латинских квадратов не предложено хорошего метода поиска трансверсалей. Пока не обнаружено ни одного латинского квадрата нечетного порядка без трансверсалей, а гипотеза о том, что все такие квадраты содержат трансверсаль, обычно приписывается Х. Дж. Райзеру [43]. Было предпринято несколько попыток доказательства этой гипотезы, но все они оказались безуспешными. К данному моменту с помощью численных экспериментов гипотеза проверена для всех латинских квадратов порядка не более 9. Более подробную информацию о трансверсалях в латинских квадратах можно найти в обзоре [51].

На основании анализа числа трансверсалей в латинских гиперкубах малых порядков и размерностей Я. М. Уонлесс в работе [51] выдвинул следующие гипотезы.

Гипотеза 7. *Все латинские гиперкубы нечетного порядка имеют по крайней мере одну трансверсаль.*

Гипотеза 8. *Все латинские гиперкубы нечетной размерности имеют по крайней мере одну трансверсаль.*

Заметим, что первая из них является обобщением гипотезы Х. Дж. Райзера на многомерный случай, а вторая – ослаблением гипотезы 2 о положительности перманента полистохастических матриц на случай МДР-кодов.

5.1.3 Трансверсали в некоторых латинских гиперкубах

Изучение трансверсалей в латинских кубах специального вида начнем с гиперкуба $\mathcal{Q}_n^d$.

То, что любой латинский гиперкуб $\mathcal{Q}_n^d$ нечетной размерности d имеет по крайней мере одну трансверсаль было впервые получено в работе [47]. Наилучшую нижнюю оценку на число трансверсалей в этом гиперкубе дает теорема 30, которая будет доказана в следующем разделе, а верхнюю – теорема 28.

Нахождение асимптотики числа трансверсалей $\mathcal{Q}_n^d$ является сложной задачей даже для латинских квадратов $\mathcal{Q}_n^2$. И. Варди [50] предположил, что существует константы $0 < c_1 < c_2 < 1$ такие, что число трансверсалей в квадратах $\mathcal{Q}_n^2$ удовлетворяет неравенству $c_1^n n! \leq T(\mathcal{Q}_n^2) \leq c_2^n n!$ для всех нечетных $n \geq 3$.

После ряда работ, посвященных нижним и верхним оценкам числа $T(\mathcal{Q}_n^2)$, гипотеза Варди была усилена Я. М. Уонлессом:

Гипотеза 9 ([51])**.** *Пусть n – нечетно. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(T(\mathcal{Q}_n^2)/n!) = -1.$$

Из теоремы 28 следует, что этот предел действительно не превосходит -1, а в работе [24] утверждается, что гипотеза 9 верна, и анонсирована даже более точная асимптотика числа $T(\mathcal{Q}_n^2)$.

Гипотезу 9 можно обобщить на многомерный случай, предположив, что если число трансверсалей в гиперкубе $\mathcal{Q}_n^d$ не равно нулю, то оно близко к максимальному:

Гипотеза 10. *Пусть n или d нечетно. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(T(\mathcal{Q}_n^d)/n!^{d-1}) = -1.$$

Рассмотрим, сколько трансверсалей может содержаться в латинских гиперкубах малых порядков. Для любой размерности d латинский гиперкуб порядка 2 экивалентен гиперкубу $\mathcal{Q}_2^d$. Напомним, что число трансверсалей $\mathcal{Q}_2^d$ равно перманенту $(d+1)$-мерного МДР-кода $\mathcal{M}_2^{d+1}$. Используя формулы из примера 3 первой главы, получаем, что $T(\mathcal{Q}_2^d) = 0$ для четного d и $T(\mathcal{Q}_2^d) = 2^{d-1}$ для нечетного.

Для порядка 3 d-мерный латинский гиперкуб также единствен с точностью до эквивалентности. Для подсчета числа трансверсалей $\mathcal{Q}_3^d$ выберем в нем $(d-2)$-мерные грани диагональным образом и составим из них всевозможные $(d-1)$-мерные гиперкубы. Заметим, что в трех из шести случаев получившиеся гиперкубы являются латинскими, а в другой половине случаев гиперграни гиперкубов заполнены одинаково. Таким образом, выполнено следующее рекуррентное соотношение:

$$T(\mathcal{Q}_3^d) = 3T(\mathcal{Q}_3^{d-1}) + 18T(\mathcal{Q}_3^{d-2});\ T(\mathcal{Q}_3^2) = 3,\ T(\mathcal{Q}_3^3) = 27.$$

Решив это соотношение, получаем

$$T(\mathcal{Q}_3^d) = 3^{d-2}(2^d - (-1)^d)$$

– последовательность A080424 в [5].

5.2 Трансверсали в квазигруппах

В этом разделе мы оценим число трансверсалей в полностью разделимых квазигруппах и исследуем трансверсали в квазигруппах порядка 4.

Напомним, что n-арная алгебраическая операция f на множестве Σ_q^n является n-арной квазигруппой порядка q, если уравнение $x_0 = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет единственное решение относительно любой переменной при произвольной фиксации значений всех остальных n переменных, а трансверсалью в квазигруппе f называется множество $\left\{\alpha^i\right\}_{i=1}^q$ векторов $\alpha^i = (a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i)$, $a_k^i \in \Sigma_q$, такое, что $a_0^i = f(a_1^i, \ldots, a_n^i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $a_k^i \neq a_k^j$ для всех $i \neq j$ и $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Изотопией называется набор из $n+1$ перестановки $\sigma_i \in S_q$, $i = 0, \ldots, n$. n-Арные квазигруппы f и g одинакового порядка *изотопны*, если для некоторой изотопии $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ выполняется

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sigma_0^{-1}\left(g(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n))\right).$$

Две n-арные квазигруппы f и g *парастрофны*, если существует такая перестановка $\pi \in S_{n+1}$, что

$$x_0 = f(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow x_{\pi(0)} = g(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

При этом перестановка π называется *парастрофией*.

Несложно видеть, что если $\left\{(a_0^i, a_1^i, \ldots, a_n^i)\right\}_{i=1}^q$ есть трансверсаль в квазигруппе f, $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ – изотопия, переводящая квазигруппу f в квазигруппу g, и π – парастрофия квазигруппы f в квазигруппу h, то наборы

$$\left\{(\sigma_0(a_0^i), \sigma_1(a_1^i), \ldots, \sigma_n(a_n^i))\right\}_{i=1}^q \text{ и } \left\{(a_{\pi(0)}^i, a_{\pi(1)}^i, \ldots, a_{\pi(n)}^i)\right\}_{i=1}^q$$

являются трансверсалями в квазигруппах g и h соответственно. Таким образом, число трансверсалей в изотопных и парастрофных квазигруппах совпадает.

Если квазигруппа f есть суперпозиция двух квазигрупп, арность каждой из которых не меньше 2, то f называется *перестановочно разделимой*. В дальнейшем слово «перестановочно» мы будем опускать. n-Арная квазигруппа f при $n \geq 3$ называется *полностью разделимой*, если она является суперпозицией полностью разделимых квазигрупп. Минимальными полностью разделимыми квазигруппами считаются бинарные квазигруппы.

В дальнейшем нам также потребуется следующее свойство полностью разделимых квазигрупп.

Лемма 9. *Пусть полностью разделимая n-арная квазигруппа f порядка q задает МДР-код M. Тогда существует квазигруппа g, также соответствующая МДР-коду M, которая может быть задана соотношением*

$$h_1(x_{\pi(0)}, x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n-2)}) = h_2(x_{\pi(n-1)}, x_{\pi(n)}),$$

где $\pi \in S_{n+1}$ – некоторая перестановка, h_1 – полностью разделимая $(n-1)$-арная квазигруппа порядка q, а h_2 – бинарная квазигруппа порядка q.

Доказательство. Известно, что структуру любой полностью разделимой n-арной квазигруппы f можно представить в виде некорневого бинарного дерева $\mathcal{T}$, состоящего из $n-1$ вершины степени 3 (внутренних вершин), которые соответствуют бинарным операциям, составляющим квазигруппу f, и из листьев, помеченных переменными $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Дерево $\mathcal{T}$ однозначно задает МДР-код M, соответствующий квазигруппе f. Более подробное описание дерева $\mathcal{T}$ и его свойства могут быть найдены, например, в работе [6].

Так как число листьев в дереве $\mathcal{T}$ больше числа его внутренних вершин, то существует внутренняя вершина смежная с двумя листьями. Полагая, что данной вершине соответствует бинарная операция h_2, получаем, что дерево $\mathcal{T}$ задает квазигруппу

$$g(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = x_{\pi(0)} \Leftrightarrow h_1(x_{\pi(0)}, x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n-2)}) = h_2(x_{\pi(n-1)}, x_{\pi(n)}),$$

где $\pi \in S_{n+1}$ есть некоторая перестановка, а h_1 – полностью разделимая $(n-1)$-арная квазигруппа. $\square$

Определенную в лемме 9 квазигруппу g будем называть *правильным представлением* квазигруппы f, а квазигруппу h_2 – *внешней* квазигруппой правильного представления g. Заметим, что полностью разделимая n-арная квазигруппа может иметь не единственное правильное представление.

Перейдем к рассмотрению квазигрупп порядка 4. Определим функции $l : \{0,1,2,3\} \to \mathbb{Z}_2$ и $\nu : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ (или $\nu : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ в зависимости от контекста), которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем:

$$l(0) = l(1) = 0,\ l(2) = l(3) = 1;$$

$$\nu(0) = 1,\ \nu(1) = 0,\ \nu(2) = 3,\ \nu(3) = 2.$$

Действие этих функций на вектора всегда предполагается покоординатным.

Для того, чтобы выделить специальный класс квазигрупп порядка 4, нам также потребуется понятие булевой функции. Произвольная функция $\lambda : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ называется *булевой функцией*, а множество $\mathbb{Z}_2^n$ нередко называют *n-мерным булевым гиперкубом. Весом* булевого вектора $z \in \mathbb{Z}_2^n,\ z = (z_1, \dots, z_n)$ назовем величину

$$w(z) = z_1 + \ldots + z_n.$$

Будем говорить, что n-арная квазигруппа f порядка 4 *стандартная полулинейная*, если для некоторой булевой функции $\lambda : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ выполнено

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow l(x_0) \oplus \ldots \oplus l(x_n) = 0 \text{ и } x_0 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \lambda(l(x_1), \dots, l(x_n)) = 0,$$

где $\oplus$ означает сложение по модулю 2. Заметим, что булева функция λ однозначно определяет стандартную полулинейную квазигруппу f и наоборот.

Квазигруппа f называется *полулинейной*, если она изотопна некоторой стандартной полулинейной квазигруппе. По существу, полулинейность означает, что соответствующий $(n+1)$-мерный МДР-код порядка 4 может быть получен как прямое произведение двух $(n+1)$-мерных МДР-кодов порядка 2, преобразованное булевой функцией λ.

Следующая характеризация n-арных квазигрупп порядка 4 была получена в [31]:

Теорема 29. *Любая n-арная квазигруппа порядка 4 разделимая или полулинейная.*

Рассмотрим два важных примера квазигрупп порядка 4. n-Арную квазигруппу f порядка 4 назовем *$\mathbb{Z}_4$-линейной* (*$\mathbb{Z}_2^2$-линейной*), если она изотопна итерированной группе $\mathbb{Z}_4$ (итерированной группе $\mathbb{Z}_2^2$). В следующих двух леммах приводятся основные свойства $\mathbb{Z}_4$-линейных и $\mathbb{Z}_2^2$-линейных квазигрупп.

Лемма 10. *Предположим, что f есть n-арная $\mathbb{Z}_4$-линейная квазигруппа.*

1. *f – полностью разделимая квазигруппа.*

2. *f является полулинейной квазигруппой и изотопна стандартной полулинейной квазигруппе $h_{\mathbb{Z}_4}$, определенной булевой функцией $\lambda_{\mathbb{Z}_4}$ такой, что $\lambda_{\mathbb{Z}_4}(z) = 0$, если вес вектора z сравним с 0 или 3 по модулю 4, и $\lambda_{\mathbb{Z}_4}(z) = 1$, если вес z сравним с 1 или 2 по модулю 4.*

3. *Стандартная полулинейная квазигруппа, определенная булевой функцией λ является $\mathbb{Z}_4$-линейной тогда и только тогда, когда для любой двумерной грани P в n-мерном булевом гиперкубе выполняется $\sum\limits_{z\in P}\lambda(z) \equiv 1 \mod 2$.*

Доказательство. 1. Из определения следует, что итерированная группа $\mathbb{Z}_4$ является полностью разделимой. Применение изотопии сохраняет это свойство.

2. Докажем, что n-арная итерированная группа $\mathbb{Z}_4$, определенная соотношением

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0,\ x_i \in \mathbb{Z}_4$$

изотопна стандартной полулинейной квазигруппе $h_{\mathbb{Z}_4}$, заданной с помощью булевой функции $\lambda_{\mathbb{Z}_4}$.

Для этого проверим, что изотопия $(\sigma, \sigma, \ldots, \sigma)$, где

$$\sigma(0) = 0,\ \sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 1,\ \sigma(3) = 3,$$

переводит итерированную группу $\mathbb{Z}_4$ в стандартную полулинейную квазигруппу $h_{\mathbb{Z}_4}$.

Действительно, несложно видеть, что для всех $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_4$ верно

$$a_1 + a_2 = a_3 \Rightarrow l(\sigma(a_1)) + l(\sigma(a_2)) = l(\sigma(a_3)) \mod 2.$$

Поэтому для всех $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ таких, что $y_0 = h_{\mathbb{Z}_4}(y_1, \ldots, y_n)$, имеем $l(y_0) \oplus \ldots \oplus l(y_n) = 0$, а значит, получаемая при такой изотопии квазигруппа $h_{\mathbb{Z}_4}$ является стандартной полулинейной.

Докажем, что полученная квазигруппа определяется булевой функцией $\lambda_{\mathbb{Z}_4}$, для которой $\lambda_{\mathbb{Z}_4}(z) = 0$, если $w(z) \equiv 0$ или $3 \mod 4$, и $\lambda_{\mathbb{Z}_4}(z) = 1$, если $w(z) \equiv 1$ или $2 \mod 4$.

Рассмотрим вектор $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ длины $n+1$, принадлежащий графику квазигруппы $h_{\mathbb{Z}_4}$, и пусть $w((l(y_1), \ldots, l(y_n))) \equiv k \mod 4$. Так как $l(y_0) \oplus l(y_1) \oplus \ldots \oplus l(y_n) = 0$, то имеем $l(y_0) \equiv k \mod 2$. Поэтому $w((l(y_0), l(y_1), \ldots, l(y_n))) = 2 \mod 4$ если k равно 1 или 2, и $w((l(y_0), l(y_1), \ldots, l(y_n))) = 0 \mod 4$ если k равно 0 или 3.

Обозначим через N'_a число индексов i, для которых $y_i = a$, а через N_a – число индексов i, для которых $\sigma^{-1}(y_i) = a$. Из определения перестановки σ получаем, что

$$N_0 = N'_0;\ N_1 = N'_2;\ N_2 = N'_1;\ N_3 = N'_3.$$

Рассмотрим случай, когда k равно 1 или 2 и $w((l(y_0), l(y_1), \ldots, l(y_n))) = 2 \mod 4$. Для другого случая все рассуждения аналогичны. Заметим, что равенство $w((l(y_0), l(y_1), \ldots, l(y_n))) = 2 \mod 4$ означает, что $N'_2 + N'_3 \equiv 2 \mod 4$. Поэтому $N_1 + N_3 \equiv 2 \mod 4$. Также, поскольку $\sigma^{-1}(y_0) + \sigma^{-1}(y_1) + \ldots + \sigma^{-1}(y_n) \equiv 0$

$\mod 4$, то $N_1 + 2N_2 + 3N_3 = 0 \mod 4$. Из этих двух равенств получаем, что $N_2 + N_3 = 1 \mod 4$, откуда $N_1' + N_3' = 1 \mod 4$. Остается только заметить, что

$$\lambda_{\mathbb{Z}_4}(l(y_1), \ldots, l(y_n)) = y_0 \oplus y_1 \oplus \ldots \oplus y_n = N_1' \oplus N_3' = 1.$$

3. *Необходимость.* Рассмотрим стандартную полулинейную квазигруппу $h_{\mathbb{Z}_4}$, заданную булевой функцией $\lambda_{\mathbb{Z}_4}$ равной 0 на всех векторах, вес которых сравним с 0 или 3 по модулю 4, и равной 1 иначе. Каждая двумерная грань P в n-мерном булевом гиперкубе состоит из одного булевого вектора веса $k-1$, двух булевых векторов веса k и одного булевого вектора веса $k+1$ для некоторого $1 \leq k \leq n-1$. Поэтому $\sum\limits_{z \in P} \lambda(z) \equiv 1 \mod 2$.

Для завершения доказательства остается только заметить, что все изотопии, которые сохраняют свойство стандартной полулинейности, строятся из перестановок

$$\sigma' = (1023),\ \sigma'' = (0132),\ \sigma''' = (2301),$$

которые не меняют сумму значений данной булевой функции по двумерным граням.

Достаточность. Доказательство индукцией по n. Случай $n = 2$ проверяется непосредственно.

Пусть f есть n-арная стандартная полулинейная квазигруппа, и обозначим через f' квазигруппу, определенную соотношением $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = x_0$. Квазигруппа f' является $(n-1)$-арной стандартной полулинейной квазигруппой, заданной с помощью булевой функции λ', которая имеет нечетную сумму по всем двумерным граням. По предположению индукции существует изотопия $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$, которая сохраняет нечетность сумм булевой функции по всем двумерным граням и переводит квазигруппу f' в $(n-1)$-арную квазигруппу $h_{\mathbb{Z}_4}$, заданную булевой функцией $\lambda_{\mathbb{Z}_4}$ на $(n-1)$-мерном булевом гиперкубе.

Применим данную изотопию к квазигруппе f и получим некоторую квазигруппу g, определенную с помощью такой булевой функции λ'', что сумма значений λ'' по любой двумерной грани нечетна. Заметим, что в n-мерном булевом гиперкубе существует такая гипергрань Γ, на которой функция λ'' совпадает с функцией $\lambda_{\mathbb{Z}_4}$. Поэтому если известно значение функции λ'' на некотором элементе, не принадлежащем гиперграни Γ, то мы можем найти значение функции λ'' на всех элементах, лежащих в таких двумерных гранях, что они пересекают гипергрань Γ и содержат выбранный вне Γ элемент, а значит, возможно восстановить и всю функцию λ''.

Таким образом, существуют лишь две возможные квазигруппы g, одна из которых совпадает с n-арной квазигруппой $h_{\mathbb{Z}_4}$, а вторая может быть переведена в эту квазигруппу с помощью изотопии $(\varepsilon, \dots, \varepsilon, (0132))$, где через ε обозначена тождественная перестановка. $\square$

Лемма 11. *Предположим, что f есть n-арная $\mathbb{Z}_2^2$-линейная квазигруппа.*

1. *f – полностью разделимая квазигруппа.*

2. *f является полулинейной квазигруппой и изотопна стандартной полулинейной квазигруппе $h_{\mathbb{Z}_2^2}$, определенной булевой функцией $\lambda_{\mathbb{Z}_2^2}$ такой, что $\lambda_{\mathbb{Z}_2^2}(z) = 0$ для всех векторов z.*

3. *Стандартная полулинейная квазигруппа, определенная булевой функцией λ является $\mathbb{Z}_2^2$-линейной тогда и только тогда, когда для любой двумерной грани P в n-мерном булевом гиперкубе выполняется $\sum\limits_{z\in P} \lambda(z) \equiv 0 \mod 2$.*

Доказательство. 1. По определению итерированная группа $\mathbb{Z}_2^2$ является полностью разделимой. Применение изотопии сохраняет это свойство.

2. Рассмотрим n-арную итерированную группу $\mathbb{Z}_2^2$:

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0,\ x_i \in \mathbb{Z}_2^2.$$

Известно, что элементы $a \in \mathbb{Z}_2^2$ можно представить как булевы вектора $\tilde{a} = (l(a), p(a))$, где $p(a) \equiv a \mod 2$. Также заметим, что для любых $a_1, a_2, a_3 \in$

$\mathbb{Z}_2^2$ выполнено

$$a_1 + a_2 = a_3 \Leftrightarrow \tilde{a}_1 \oplus \tilde{a}_2 = \tilde{a}_3.$$

Тогда для всех $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_2^2$ имеем

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0 \Leftrightarrow l(x_0) \oplus \ldots \oplus l(x_n) = 0 \text{ и } x_0 \oplus \ldots \oplus x_n = 0.$$

Таким образом, итерированная группа $\mathbb{Z}_2^2$ совпадает со стандартной полулинейной квазигруппой $h_{\mathbb{Z}_2^2}$, заданной с помощью тождественно нулевой булевой функции $\lambda_{\mathbb{Z}_2^2}$.

3. Доказательство этого пункта аналогично доказательству из леммы 10.

$\square$

5.2.1 Трансверсали в полностью разделимых квазигруппах

Предположим, что n-арная квазигруппа f порядка q является суперпозицией $(n-m)$-арной квазигруппы h и $(m+1)$-арной квазигруппы g, то есть что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_0 \Leftrightarrow g(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = h(x_{\sigma(m+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

для некоторой перестановки $\sigma \in S_{n+1}$.

Лемма 12. *Если квазигруппа f есть суперпозиция квазигрупп g и h, которые содержат $T(g)$ и $T(h)$ трансверсалей соответственно, то f имеет по крайней мере $T(g)T(h)$ трансверсалей:*

$$T(f) \geq T(g)T(h).$$

Доказательство. Пусть $\left\{(a^i_{m+1}, \ldots, a^i_n, i)\right\}_{i=1}^q$ – трансверсаль в квазигруппе h, а $\left\{(a^i_0, a^i_1, \ldots, a^i_m, i)\right\}_{i=1}^q$ – трансверсаль в квазигруппе g. Несложно проверить, что набор

$$\left\{(a^i_{\sigma^{-1}(0)}, a^i_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a^i_{\sigma^{-1}(n)})\right\}_{i=1}^q$$

является трансверсалью в квазигруппе f, и различные пары трансверсалей из g и h дают разные трансверсали в f. $\square$

Лемма 13. *Предположим, что для некоторого $a \in \Sigma_q$ $(n-m-1)$-арная квазигруппа h^a, определенная соотношением $h(x_{m+1},\ldots,x_n) = a$ содержит $T(h^a)$ трансверсалей, а m-арная квазигруппа g^a, определенная соотношением $g(x_0,x_1,\ldots,x_m) = a$ содержит $T(g^a)$ трансверсалей. Тогда квазигруппа f имеет по крайней мере $q!\cdot T(h^a)T(g^a)$ трансверсалей:*

$$T(f) \geq q! \cdot T(h^a)T(g^a).$$

Доказательство. Пусть $\left\{(a^i_{m+1},\ldots,a^i_n)\right\}_{i=1}^q$ – трансверсаль в квазигруппе h^a, а $\left\{(a^j_0,a^j_1,\ldots,a^j_m)\right\}_{j=1}^q$ – трансверсаль в квазигруппе g^a. Несложно проверить, что для любой перестановки $\tau \in S_q$ набор

$$\left\{(a^{\tau(i)}_{\sigma^{-1}(0)},a^{\tau(i)}_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,a^{\tau(i)}_{\sigma^{-1}(m)},a^{i}_{\sigma^{-1}(m+1)},\ldots,a^{i}_{\sigma^{-1}(n)})\right\}_{i=1}^q$$

является трансверсалью в квазигруппе f, и каждая пара трансверсалей из g^a и h^a дает $q!$ различных трансверсалей в f. $\square$

С помощью этих лемм докажем нижнюю оценку на число трансверсалей в некоторых полностью разделимых квазигруппах.

Теорема 30. *Пусть f есть полностью разделимая n-арная квазигруппа порядка q.*

1. *Если n нечетно, то f содержит не менее $(q\cdot q!)^{\frac{n-1}{2}}$ трансверсалей.*

2. *Если n четно и внешняя квазигруппа в одном из правильных представлений f имеет трансверсаль, то f содержит не менее $(q\cdot q!)^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}$ трансверсалей.*

Доказательство. 1. Доказательство проводится индукцией по n. Очевидно, что перестановка (1-арная квазигруппа) содержит единственную трансверсаль.

Так как n-арная квазигруппа f полностью разделима, то по лемме 9 вместо квазигруппы f можно рассматривать квазигруппу g определенную соотношением

$$h_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = h_2(x_{n-1}, x_n),$$

где h_1 есть полностью разделимая $(n-1)$-арная квазигруппа, а h_2 – некоторая бинарная квазигруппа.

Рассмотрим для каждого $a \in \Sigma_q$ 1-арную квазигруппу h_2^a, определенную соотношением $h_2(x_{n-1}, x_n) = a$, и $(n-2)$-арную квазигруппу h_1^a, определенную соотношением $h_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = a$. Так как элемент a можно выбрать q различными способами, то по лемме 13

$$T(g) \geq (q \cdot q!)T(h_1^a)T(h_2^a) = (q \cdot q!)T(h_1^a).$$

Заметим, что $n-2$ нечетно, поэтому из предположения индукции имеем, что квазигруппа h_1^a содержит не менее $(q \cdot q!)^{\frac{n-3}{2}}$ трансверсалей. Так как квазигруппы f и g имеют одинаковое число трансверсалей, то $T(f) \geq (q \cdot q!)^{\frac{n-1}{2}}$.

2. При сделанных предположениях и по лемме 9 для квазигруппы f существует правильное представление g, заданное соотношением

$$h_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = h_2(x_{n-1}, x_n),$$

где h_1 – полностью разделимая $(n-1)$-арная квазигруппа, а бинарная квазигруппа h_2 содержит трансверсаль. По предыдущему пункту, квазигруппа h_1 имеет не менее $(q \cdot q!)^{\frac{n-2}{2}}$ трансверсалей. Применение леммы 12 дает

$$T(f) = T(g) \geq T(h_1)T(h_2) \geq (q \cdot q!)^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}.$$

$\square$

5.2.2 Трансверсали в полулинейных квазигруппах

Благодаря удобному способу задания стандартных полулинейных квазигрупп множество всех их трансверсалей может быть разделено на хорошо описываемые классы, что позволяет достаточно точно проанализировать число трансверсалей в полулинейных квазигруппах. Введем необходимые для этой цели понятия.

Неупорядоченную четверку (z^1, z^2, z^3, z^4) булевых векторов z^j длины $n+1$ назовем *правильной*, если для всех $i \in \{0, \dots, n\}$ множество $\left\{z_i^1, z_i^2, z_i^3, z_i^4\right\}$ совпадает с множеством $\{0, 0, 1, 1\}$ как мультимножество. Другими словами, четверка булевых векторов называется правильной, если в каждой позиции нули и единицы покрыты этими векторами двукратно.

В большинстве случаев нас будет интересовать лишь некоторое специальное подмножество правильных четверок, а именно полезные четверки. Правильная четверка (z^1, z^2, z^3, z^4) называется *полезной*, если все вектора z^j имеют четный вес.

Следующая лемма позволяет понять, в чем заключается польза полезных четверок.

Лемма 14. *Пусть f есть стандартная полулинейная n-арная квазигруппа порядка 4 такая, что*

$$x_0 = f(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow l(x_0) \oplus \dots \oplus l(x_n) = 0 \text{ и } x_0 \oplus \dots \oplus x_n \oplus \lambda(l(x_1), \dots, l(x_n)) = 0.$$

Предположим, что набор $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$ является трансверсалью в квазигруппе f. Тогда четверка $(l(\alpha^1), l(\alpha^2), l(\alpha^3), l(\alpha^4))$ – полезная.

Лемма непосредственно следует из определений трансверсали, стандартной полулинейной квазигруппы и полезной четверки.

Разделим множество полезных четверок на два класса, а именно, на сдвоенные и типичные четверки. Заметим, что если полезная четверка (z^1, z^2, z^3, z^4) содержит два одинаковых вектора длины $n+1$, то два других вектора этой четверки также должны совпадать. Более того, в этом случае можно считать, что $z^1 = z^2$ и $z^3 = z^4 = \nu(z^1) = \nu(z^2)$. Будем говорить, что полезные четверки, составленные из двух пар одинаковых векторов, являются *сдвоенными*, а полезные четверки, состоящие из четырех попарно различных векторов, являются *типичными*. Очевидно, что сдвоенные четверки существуют только если $n+1$ четно (то есть если n нечетно), а типичные четверки существуют для всех $n \geq 2$.

Сначала рассмотрим трансверсали, которые порождаются сдвоенными четверками.

Лемма 15. *Пусть n нечетно и предположим, что f – стандартная полулинейная n-арная квазигруппа порядка 4 такая, что*

$$x_0 = f(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow l(x_0) \oplus \ldots \oplus l(x_n) = 0 \text{ и } x_0 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \lambda(l(x_1), \ldots, l(x_n)) = 0.$$

Тогда число трансверсалей $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$ квазигруппы f, для которых четверка $(l(\alpha^1), l(\alpha^2), l(\alpha^3), l(\alpha^4))$ является сдвоенной, равно 8^{n-1}.

Доказательство. Заметим, что число сдвоенных четверок равно числу таких неупорядоченных пар $(z, \nu(z))$ в булевом $(n+1)$-мерном гиперкубе, что и z, и $\nu(z)$ имеют четный вес. Следовательно, в булевом $(n+1)$-мерном гиперкубе содержится 2^{n-1} сдвоенных четверок.

Пусть $(z, z, \nu(z), \nu(z))$ – сдвоенная четверка. Рассмотрим все неупорядоченные пары (α^1, α^2) векторов длины $n+1$, где $\alpha^1 = (a_0^1, \ldots, a_n^1)$ и $\alpha^2 = (a_0^2, \ldots, a_n^2)$, $a_j^i \in \Sigma_4$, удовлетворяющие следующим условиям:

- $l(a_0^1) = l(a_0^2) = z_0, \ldots, l(a_n^1) = l(a_n^2) = z_n$;
- $a_0^1 \neq a_0^2, \ldots, a_n^1 \neq a_n^2$;
- $a_0^1 \oplus \ldots \oplus a_n^1 = a_0^2 \oplus \ldots \oplus a_n^2 = \lambda(z_1, \ldots, z_n)$.

Для каждого вектора α^1, удовлетворяющего этим условиям, существует единственный дополняющий его до пары вектор α^2. Более того, из данных условий следует, что $\alpha^2 = \nu(\alpha^1)$. Таким образом, число различных пар (α^1, α^2), которые дают нам первые два элемента трансверсалей, равно 2^{n-1}.

Последние два элемента α^3 и α^4 для трансверсалей в квазигруппе f строятся независимо от α^1 и α^2 и удовлетворяют аналогичным условиям, в которых вместо вектора z используется вектор $\nu(z)$. Несложно видеть, что все α^i, $i = 1, \ldots, 4$ попарно различны в каждой координате, что их объединение дает трансверсаль. Также можно заметить, что любая трансверсаль $(\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4)$, для которой $(l(\beta^1), l(\beta^2), l(\beta^3), l(\beta^4)) = (z, z, \nu(z), \nu(z))$, покрывается данной конструкцией. Таким образом, сдвоенные четверки порождают ровно $\left(2^{n-1}\right)^3$ трансверсалей в квазигруппе f. $\square$

Из леммы 15 следует нижняя оценка на число трансверсалей в полулинейных квазигруппах нечетной арности.

Следствие 7. *Пусть f есть полулинейная n-арная квазигруппа порядка 4, где n нечетно. Тогда f содержит по крайней мере 8^{n-1} трансверсалей.*

Перейдем к рассмотрению трансверсалей стандартных полулинейных квазигрупп, порожденных типичными четверками. В дальнейшем для вектора $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ длины $n+1$ через $\overline{z}$ мы обозначаем вектор $(z_1, \ldots, z_n)$ длины n.

Лемма 16. *Пусть f есть стандартная полулинейная n-арная квазигруппа такая, что*

$$x_0 = f(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow l(x_0) \oplus \ldots \oplus l(x_n) = 0 \text{ и } x_0 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \lambda(l(x_1), \ldots, l(x_n)) = 0.$$

Пусть (z^1, z^2, z^3, z^4) – типичная четверка булевых векторов длины $n+1$.

1. *Если $\lambda(\overline{z^1}) \oplus \lambda(\overline{z^2}) \oplus \lambda(\overline{z^3}) \oplus \lambda(\overline{z^4}) = 1$, то не существует ни одной трансверсали $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$ в квазигруппе f такой, что $(l(\alpha^1), l(\alpha^2), l(\alpha^3), l(\alpha^4)) = (z^1, z^2, z^3, z^4)$.*

2. *Если $\lambda(\overline{z^1}) \oplus \lambda(\overline{z^2}) \oplus \lambda(\overline{z^3}) \oplus \lambda(\overline{z^4}) = 0$, то существует ровно $2 \cdot 4^{n-1}$ трансверсалей $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$ квазигруппы, для которых $(l(\alpha^1), l(\alpha^2), l(\alpha^3), l(\alpha^4))$*

совпадает с (z^1, z^2, z^3, z^4).

Доказательство. 1. Предположим, что квазигруппа f содержит трансверсаль $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, где $\alpha^j = (a_0^j, \ldots, a_n^j)$, для которой $\lambda(l(\overline{\alpha^1})) \oplus \lambda(l(\overline{\alpha^2})) \oplus \lambda(l(\overline{\alpha^3})) \oplus \lambda(l(\overline{\alpha^4})) = 1$. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{j=1}^{4} a_0^j \oplus \ldots \oplus a_n^j \oplus \lambda(l(\overline{\alpha^j})).$$

Сумма S равна нулю, так как из определения квазигруппы f следует, что каждое слагаемое равно нулю. С другой стороны, из равенств $a_i^1 \oplus \ldots \oplus a_i^4 = 0$ для всех $i \in \{0, \ldots, n\}$ и $\sum\limits_{j=1}^{4} \lambda(l(\overline{\alpha^j})) \equiv 1 \mod 2$ следует, что

$$S = \lambda(l(\overline{\alpha^1})) \oplus \lambda(l(\overline{\alpha^2})) \oplus \lambda(l(\overline{\alpha^3})) \oplus \lambda(l(\overline{\alpha^4})) = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

2. Для начала докажем, что для любой функции $\mu : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{Z}_2$ такой, что $\mu(1) \oplus \mu(2) \oplus \mu(3) \oplus \mu(4) = 0$, и для любой правильной четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) различных векторов длины $n+1$ существует ровно $2 \cdot 4^{n-1}$ правильных четверок (y^1, y^2, y^3, y^4) булевых векторов длины $n+1$, удовлетворяющих следующим условиям:

- Если $z_i^j = z_i^k$, то $y_i^j \neq y_i^k$.
- $y_0^j \oplus y_1^j \oplus \ldots \oplus y_n^j \oplus \mu(j) = 0$ для всех $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

С этого момента и далее в данном доказательстве четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) и (y^1, y^2, y^3, y^4) считаются упорядоченными наборами.

Если $n = 1$, то не теряя общности можно предполагать, что

$$z^1 = (0, 0),\ z^2 = (0, 1),\ z^3 = (1, 0),\ z^4 = (1, 1).$$

Несложно убедиться в том, что для любой функции μ существует ровно 2 требуемых набора (y^1, y^2, y^3, y^4), например, перечислив все правильные четверки

(y^1, y^2, y^3, y^4) для всех основных типов функции μ:

1. $\mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = \mu(4) = 0$.

$$y^1 = (0,0),\ y^2 = (1,1),\ y^3 = (1,1),\ y^4 = (0,0).$$

$$y^1 = (1,1),\ y^2 = (0,0),\ y^3 = (0,0),\ y^4 = (1,1).$$

2. $\mu(1) = \mu(2) = 0,\ \mu(3) = \mu(4) = 1$.

$$y^1 = (1,1),\ y^2 = (0,0),\ y^3 = (1,0),\ y^4 = (0,1).$$

$$y^1 = (0,0),\ y^2 = (1,1),\ y^3 = (0,1),\ y^4 = (1,0).$$

3. $\mu(1) = \mu(4) = 0,\ \mu(2) = \mu(3) = 1$.

$$y^1 = (0,0),\ y^2 = (1,0),\ y^3 = (0,1),\ y^4 = (1,1).$$

$$y^1 = (1,1),\ y^2 = (0,1),\ y^3 = (1,0),\ y^4 = (0,0).$$

4. $\mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = \mu(4) = 1$.

$$y^1 = (0,1),\ y^2 = (1,0),\ y^3 = (1,0),\ y^4 = (0,1).$$

$$y^1 = (1,0),\ y^2 = (0,1),\ y^3 = (0,1),\ y^4 = (1,0).$$

Если $n \geq 2$, то число правильных четверок (y^1, y^2, y^3, y^4), удовлетворяющих данным условиям, также не зависит от выбора функции μ. Действительно, пусть μ и μ' – две различные функции такие, что

$$\mu(1) \oplus \mu(2) \oplus \mu(3) \oplus \mu(4) = \mu'(1) \oplus \mu'(2) \oplus \mu'(3) \oplus \mu'(4) = 0.$$

Предположим, что $z^k_{i_1} \neq z^k_{i_2}$, $z^k_{i_1} \neq z^j_{i_1}$ и $z^j_{i_1} \neq z^j_{i_2}$. Такие индексы i_1, i_2, j, и k существуют, так как все вектора z^1, z^2, z^3, и z^4 различны. Любая правильная четверка (y^1, y^2, y^3, y^4), удовлетворяющая данным условиям с функцией μ, может быть преобразована в правильную четверку (y'^1, y'^2, y'^3, y'^4), удовлетворяющую условиям с функцией μ', изменением значений в i_1-ой и i_2-ой компонентах всех векторов. Также заметим, что число различных функций $\mu : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{Z}_2$, для которых $\mu(1) \oplus \mu(2) \oplus \mu(3) \oplus \mu(4) = 0$, равно 8.

Так как для произвольной правильной четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) векторов длины $n + 1$ существует ровно 4^{n+1} правильных четверок (u^1, u^2, u^3, u^4) таких, что при $z_i^j = z_i^k$ выполнено $u_i^j \neq u_i^k$, то мы имеем ровно $2 \cdot 4^{n-1}$ правильных четверок (y^1, y^2, y^3, y^4), удовлетворяющих требуемым условиям для четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) и функции μ.

Пусть теперь (z^1, z^2, z^3, z^4) является типичной четверкой булевых векторов длины $n + 1$ таких, что $\lambda(\overline{z^1}) \oplus \lambda(\overline{z^2}) \oplus \lambda(\overline{z^3}) \oplus \lambda(\overline{z^4}) = 0$. Тогда существует по крайней мере $2 \cdot 4^{n-1}$ правильных четверок (y^1, y^2, y^3, y^4) булевых векторов длины $n + 1$, для которых $y_0^j \oplus y_1^j \oplus \ldots \oplus y_n^j \oplus \lambda(\overline{z^j}) = 0$ для всех $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $z_i^j = z_i^k \Rightarrow y_i^j \neq y_i^k$ для всех $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Положим

$$a_i^j = 2z_i^j + y_i^j$$

для всех $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $i \in \{0, \ldots, n\}$, где z_i^j и y_i^j булевы, но сложение и умножение проводится в $\mathbb{Z}$. Определим также $\alpha^j = (a_0^j, a_1^j, \ldots, a_n^j)$.

Непосредственным образом можно проверить, что условия на четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) и (y^1, y^2, y^3, y^4) обеспечивают, что набор $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$ является трансверсалью в квазигруппе f. Также, по любой трансверсали $(\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4)$, соответствующей типичной четверке (z^1, z^2, z^3, z^4), можно однозначно восстановить четверку (y^1, y^2, y^3, y^4), удовлетворяющую заявленным условиям. □

Следствием этой леммы является

Утверждение 11. *Пусть n четно и пусть f – стандартная полулинейная*

n-арная квазигруппа порядка 4 такая, что

$$x_0 = f(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow l(x_0) \oplus \ldots \oplus l(x_n) = 0 \text{ и } x_0 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \lambda(l(x_1), \ldots, l(x_n)) = 0.$$

Квазигруппа f не содержит трансверсалей тогда и только тогда, когда для любой типичной четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) выполнено $\lambda(\overline{z^1}) \oplus \lambda(\overline{z^2}) \oplus \lambda(\overline{z^3}) \oplus \lambda(\overline{z^4}) = 1$.

Для того, чтобы более детально проанализировать число трансверсалей в полулинейных квазигруппах, необходимо изучить поведение булевых функций на типичных четверках, в чем и состоит назначение следующей леммы. Мы сформулируем эту лемму в наиболее полном виде, который потребуется в дальнейших рассуждениях.

Лемма 17. *Пусть λ – булева функция в n-мерном булевом гиперкубе. Предположим, что для любой типичной четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) векторов длины $n+1$ выполнено $\lambda(\overline{z^1}) \oplus \lambda(\overline{z^2}) \oplus \lambda(\overline{z^3}) \oplus \lambda(\overline{z^4}) = \delta$.*

1. *Если $\delta = 1$ и n четно, то для любой двумерной грани P n-мерного булева гиперкуба выполнено $\sum\limits_{z \in P} \lambda(z) \equiv 1 \mod 2$. Для нечетного n удовлетворяющей данному условию булевой функции не существует. Более того, для произвольного нечетного n и для любой булевой функции λ сумма $\lambda(\overline{z^1}) \oplus \lambda(\overline{z^2}) \oplus \lambda(\overline{z^3}) \oplus \lambda(\overline{z^4})$ равна 0 на по крайней мере $\frac{1}{6}(4^{n-1} - 2^{n-1})$ типичных четверках (z^1, z^2, z^3, z^4).*

2. *Если $\delta = 0$ и n четно, то для любой двумерной грани P n-мерного булевого гиперкуба выполнено $\sum\limits_{z \in P} \lambda(z) \equiv 0 \mod 2$. Если n нечетно, то для любых двумерных граней P_1 и P_2 имеем $\sum\limits_{z \in P_1} \lambda(z) \equiv \sum\limits_{z \in P_2} \lambda(z) \mod 2$.*

Доказательство. Для удобства доказательства будем рассматривать правильные четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) различных векторов длины n такие, что два вектора z^j имеют четный вес, а два других вектора z^j имеют нечетный вес, и будем предполагать, что для любой такой четверки выполнено $\lambda(z^1) \oplus \lambda(z^2) \oplus \lambda(z^3) \oplus \lambda(z^4) = \delta$.

1. Пусть n четно и больше 2, так как для $n = 2$ утверждение, очевидно, верно. Без потери общности можно считать, что двумерная грань P состоит из векторов a^1, a^2, a^3 и a^4, где вектора a^2 и a^4 имеют четный вес, а вектора a^1 и a^3 нечетного веса. Например, можно взять

$$a^1 = (0, 1, 0, \ldots, 0);\; a^2 = (0, 0, 0, \ldots, 0);$$

$$a^3 = (1, 0, 0, \ldots, 0);\; a^4 = (1, 1, 0, \ldots, 0).$$

Предположим, что $\lambda(a^1) \oplus \lambda(a^2) \oplus \lambda(a^3) \oplus \lambda(a^4) = 0$.

Рассмотрим четверку $(a^2, a^4, \nu(a^1), \nu(a^3))$. Заметим, что она является правильной и содержит два вектора четного веса и два вектора нечетного веса. По условию леммы имеем $\lambda(a^2) \oplus \lambda(a^4) \oplus \lambda(\nu(a^1)) \oplus \lambda(\nu(a^3)) = 1$. Четверки $(a^1, a^2, \nu(a^1), \nu(a^2))$ и $(a^2, a^3, \nu(a^2), \nu(a^3))$ также правильные и состоят из двух векторов четного веса и двух векторов нечетного веса. Следовательно,

$$\lambda(a^2) \oplus \lambda(a^4) \oplus \lambda(\nu(a^1)) \oplus \lambda(\nu(a^3)) = (\lambda(a^1) \oplus \lambda(a^2) \oplus \lambda(a^3) \oplus \lambda(a^4)) \oplus$$
$$\oplus (\lambda(a^1) \oplus \lambda(a^2) \oplus \lambda(\nu(a^1)) \oplus \lambda(\nu(a^2))) \oplus (\lambda(a^2) \oplus \lambda(a^3) \oplus \lambda(\nu(a^2)) \oplus \lambda(\nu(a^3)))$$
$$= 0 \text{ (по предположению) } \oplus 1 \text{ (по условию) } \oplus 1 \text{ (по условию) } = 0;$$

противоречие. Таким образом, сумма значений функции λ по любой двумерной грани нечетна.

Предположим, что $n \geq 3$ нечетно. Рассмотрим множество U всех правильных четверок вида $(z^1, z^2, \nu(z^1), \nu(z^2))$, где $z^1 \neq z^2$ и где вектора z^1 и z^2 имеют четный вес. Мощность множества U равна числу неупорядоченных пар различных векторов четного веса в n-мерном булевом гиперкубе, то есть равна $\frac{1}{2}(4^{n-1} - 2^{n-1})$. Разобьем множество U на непересекающиеся подмножества

$\{Z_1, \ldots, Z_6\}$ правильных четверок вида

$$Z_1 = (z^1, z^2, \nu(z^1), \nu(z^2));\ Z_2 = (z^1, z^3, \nu(z^1), \nu(z^3));\ Z_3 = (z^1, z^4, \nu(z^1), \nu(z^4));$$

$$Z_4 = (z^2, z^3, \nu(z^2), \nu(z^3));\ Z_5 = (z^2, z^4, \nu(z^2), \nu(z^4));\ Z_6 = (z^3, z^4, \nu(z^3), \nu(z^4)).$$

Для $Z_i = (z^k, z^l, \nu(z^k), \nu(z^l))$ положим $\Lambda_i = \lambda(z^k) \oplus \lambda(z^l) \oplus \lambda(\nu(z^k)) \oplus \lambda(\nu(z^l))$. Несложно видеть, что Λ_i удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \Lambda_4 = 0;\quad \Lambda_1 \oplus \Lambda_3 \oplus \Lambda_5 = 0;\quad \Lambda_2 \oplus \Lambda_3 \oplus \Lambda_6 = 0.$$

Отсюда получаем, что по крайней мере двое из шести Λ_i равны нулю. Таким образом, сумма значений булевой функции λ четна на по крайней мере трети правильных четверок из U.

2. Для четного n доказательство аналогично тому, что было приведено в пункте 1.

Предположим, что n нечетно и больше 3. Для $n = 3$ утверждение леммы проверяется непосредственно. Докажем, что для любых двумерных граней P_1 и P_2 таких, что $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, выполнено $\sum\limits_{z \in P_1} \lambda(z) \equiv \sum\limits_{z \in P_2} \lambda(z) \mod 2$. Из этого будет следовать, что аналогичное равенство верно и для любых пар двумерных граней.

Без потери общности положим, что грань P_1 состоит из векторов a^1, a^2, a^3 и a^4, а грань P_2 состоит из векторов a^1, a^2, a^5 и a^6, где a^2, a^4, a^6 имеют четный вес, а a^1, a^3, a^5 имеют нечетный вес, $\sum\limits_{a^j \in P_1} \lambda(a^j) \equiv 0 \mod 2$ и $\sum\limits_{a^j \in P_2} \lambda(a^j) \equiv 1 \mod 2$. Тогда

$$\lambda(a^3) \oplus \lambda(a^4) \oplus \lambda(a^5) \oplus \lambda(a^6) =$$
$$= (\lambda(a^1) \oplus \lambda(a^2) \oplus \lambda(a^3) \oplus \lambda(a^4)) \oplus (\lambda(a^1) \oplus \lambda(a^2) \oplus \lambda(a^5) \oplus \lambda(a^6)) = 0 \oplus 1 = 1.$$

Далее заметим, что четверки $(a^3, a^4, \nu(a^3), \nu(a^4))$ и $(a^5, a^6, \nu(a^5), \nu(a^6))$ являются правильными и состоят из двух векторов четного веса и двух векторов нечетного веса. Следовательно,

$$\lambda(\nu(a^3)) \oplus \lambda(\nu(a^4)) \oplus \lambda(\nu(a^5)) \oplus \lambda(\nu(a^6)) = (\lambda(a^3) \oplus \lambda(a^4) \oplus \lambda(a^5) \oplus \lambda(a^6)) \oplus$$
$$\oplus (\lambda(a^3) \oplus \lambda(a^4) \oplus \lambda(\nu(a^3)) \oplus \lambda(\nu(a^4))) \oplus (\lambda(a^5) \oplus \lambda(a^6) \oplus \lambda(\nu(a^5)) \oplus \lambda(\nu(a^6)))$$
$$= 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1.$$

Так как $\lambda(a^3) \oplus \lambda(a^4) \oplus \lambda(a^5) \oplus \lambda(a^6) = 1$, то либо $\lambda(a^3) \oplus \lambda(a^6) = 1$, либо $\lambda(a^4) \oplus \lambda(a^5) = 1$. Аналогично, равенство $\lambda(\nu(a^3)) \oplus \lambda(\nu(a^4)) \oplus \lambda(\nu(a^5)) \oplus \lambda(\nu(a^6)) = 1$ означает, что либо $\lambda(\nu(a^3)) \oplus \lambda(\nu(a^6)) = 0$, либо $\lambda(\nu(a^4)) \oplus \lambda(\nu(a^5)) = 0$. Несложно видеть, что четверки

$$(a^3, a^6, \nu(a^3), \nu(a^6)),\ (a^3, a^6, \nu(a^4), \nu(a^5)),$$

$$(a^4, a^5, \nu(a^3), \nu(a^6)),\ (a^4, a^5, \nu(a^4), \nu(a^5))$$

правильные и состоят из двух векторов четного веса и двух векторов нечетного веса. По условию леммы, сумма значений функции λ должна быть четной на каждой из них, что невозможно. □

Следствием данной леммы, а также лемм 15 и 16, является более точная нижняя оценка на число трансверсалей в полулинейных квазигруппах нечетной арности.

Следствие 8. *Полулинейная квазигруппа порядка 4 и нечетной арности n имеет не менее $\frac{1}{3}(16^{n-1} + 2 \cdot 8^{n-1})$ трансверсалей.*

Также, можно доказать следующую теорему.

Теорема 31. *Полулинейная n-арная квазигруппа f не имеет трансверсалей тогда и только тогда, когда n четно и f есть $\mathbb{Z}_4$-линейная квазигруппа.*

Доказательство. Из следствия 7 получаем, что n четно. То, что $\mathbb{Z}_4$-линейные квазигруппы являются единственными квазигруппами без трансверсалей среди полулинейных квазигрупп, вытекает утверждения 11, леммы 17 и леммы 10. □

5.2.3 Трансверсали в n-арных квазигруппах порядка 4

Имея нижнюю оценку на число трансверсалей в полулинейных квазигруппах нечетной арности, а также характеризацию полулинейных квазигрупп четной арности без трансверсалей, можно получить аналогичные утверждения и для произвольных n-арных квазигрупп порядка 4. Сначала докажем нижнюю оценку на число трансверсалей в квазигруппах порядка 4 и нечетной арности.

Теорема 32. *Пусть f – n-арная квазигруппа порядка 4, где n нечетно. Тогда f содержит не менее 8^{n-1} трансверсалей.*

Доказательство. Доказательство индукций по n. Для $n = 1$ утверждение, очевидно, верно.

Пусть n нечетно и больше 1. По теореме 29 любая n-арная квазигруппа порядка 4 является полулинейной или разделимой. Если f – полулинейная квазигруппа, то по следствию 7 она имеет не менее 8^{n-1} трансверсалей.

Если f есть разделимая квазигруппа, то для некоторого $1 \le m \le n-2$ найдутся $(n-m)$-арная квазигруппа h, $(m+1)$-арная квазигруппа g и перестановка $\sigma \in S_{n+1}$ такие, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_0 \Leftrightarrow g(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = h(x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Если и $m+1$, и $n-m$ нечетно, то из предположения индукции следует, что квазигруппы h и g имеют не менее 8^{n-m-1} и 8^m трансверсалей соответственно. По лемме 12 получаем

$$T(f) \ge T(h)T(g) \ge 8^{n-1}.$$

Если и $m+1$, и $n-m$ четно, то для каждого $a \in \Sigma_4$ рассмотрим $(n-m-1)$-арную квазигруппу h^a, определенную соотношением $h(x_{m+1}, \dots, x_n) = a$, и m-арную квазигруппу g^a, определенную соотношением $g(x_0, x_1, \dots, x_m) = a$. По предположению индукции квазигруппы h^a и g^a имеют не менее 8^{n-m-2} и 8^{m-1}

трансверсалей соответственно. Применяя лемму 13, получаем

$$T(f) \geq 96 \cdot T(h^a)T(g^a) \geq 96 \cdot 8^{n-3} > 8^{n-1}.$$

$\square$

Для доказательства следующей теоремы потребуется ввести еще несколько вспомогательных понятий и сформулировать дополнительную лемму. Изотопия $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ между n-арными квазигруппами f_1 и f_2 называется *главной*, если σ_0 есть тождественная перестановка. Другими словами, квазигруппы f_1 и f_2 связаны главной изотопией, если

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv f_2(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n)).$$

Поскольку существуют изотопные, но не связанные главной изотопией квазигруппы порядка 4, то разделим множество изотопных между собой квазигрупп на так называемые *главные классы*, которые замкнуты относительно главных изотопий. Например, несложно проверить, что все бинарные $\mathbb{Z}_2^2$-линейные квазигруппы лежат в одном главном классе, но существуют $\mathbb{Z}_4$-линейные квазигруппы, принадлежащие различным главным классам.

Также заметим, что n-арная квазигруппа при $n \geq 3$, которая определена соотношением $x_1 +^1 \ldots +^{n-1} x_n = x_0$, является $\mathbb{Z}_4$-линейной, только если все операции $+^i$ принадлежат одному главному классу.

Лемма 18. *Пусть f – n-арная квазигруппа порядка 4. Предположим, что для всех $a \in \Sigma_4$ квазигруппы, определенные соотношениями $f(x_1, \ldots, x_n) = a$, являются $\mathbb{Z}_4$-линейными. Тогда квазигруппа f изотопна квазигруппе*

$$(x_1 + \ldots + x_{n-1}) +' x_n = x_0 \text{ или } (x_1 + \ldots + x_{n-1}) \oplus x_n = x_0,$$

где $+$ и $+'$ означают операции из (возможно, одинаковых) главных классов бинарной $\mathbb{Z}_4$-линейной квазигруппы, а $\oplus$ означает операцию в квазигруппе $\mathbb{Z}_2^2$.

Доказательство. Докажем следующее эквивалентное утверждение:

Пусть f – n-арная квазигруппа порядка 4. Предположим, что для всех $a \in \Sigma_4$ квазигруппы, определенные соотношениями $f(x_1, \ldots, x_n) = a$, являются $\mathbb{Z}_4$-линейными. Тогда квазигруппа f полностью разделима.

Действительно, несложно видеть, что если все квазигруппы, определенные равенствами $f(x_1, \ldots, x_n) = a$, являются $\mathbb{Z}_4$-линейными и если f полностью разделима, то квазигруппа f есть суперпозиция $(n-1)$-арной $\mathbb{Z}_4$-линейной квазигруппы и некоторой бинарной квазигруппы.

Доказательство ведется индукцией по n. Для $n \leq 5$ утверждение леммы проверяется непосредственно с помощью списка латинских гиперкубов малых порядков и размерностей, приведенного в [38].

Для шага индукции используется следующий результат работы [31].

Утверждение 12. *Пусть $n \geq 5$ и пусть f – n-арная квазигруппа порядка 4. Предположим, что для всех $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ и для всех выборов $0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ и $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in \Sigma_4$ квазигруппы $f^{i_1,\ldots,i_k}_{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}}$, определенные соотношениями*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_0,\ x_{i_1} = a_{i_1}, \ldots,\ x_{i_k} = a_{i_k}$$

разделимы. Тогда квазигруппа f полностью разделима.

Предположим, что $n \geq 5$ и что f есть такая n-арная квазигруппа порядка 4, что для всех $a \in \Sigma_4$ квазигруппы, определенные уравнением $f(x_1, \ldots, x_n) = a$, являются $\mathbb{Z}_4$-линейными. Выберем произвольным образом $k \in \{1, \ldots, n-2\}$, числа $0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ и элементы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in \Sigma_4$ и рассмотрим квазигруппу $f^{i_1,\ldots,i_k}_{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}}$.

Если $i_1 = 0$, то квазигруппа $f^{i_1,\ldots,i_k}_{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}}$ получается из квазигруппы $f^0_{a_{i_0}}$ путем фиксации значений некоторых переменных, а значит, является разделимой. Если $i_1 \neq 0$, то для всех $a \in \Sigma_4$ рассмотрим квазигруппы $f^{0,i_1,\ldots,i_k}_{a,a_{i_1},\ldots,a_{i_k}}$.

Квазигруппа $f^{0,i_1,\ldots,i_k}_{a,a_{i_1},\ldots,a_{i_k}}$ получается из $\mathbb{Z}_4$-линейной квазигруппы f^0_a фиксацией значений некоторых переменных, и поэтому она является $\mathbb{Z}_4$-линейной. По предположению индукции квазигруппа $f^{i_1,\dots,i_k}_{a_{i_1},\dots,a_{i_k}}$ полностью разделима.

Так как для всех $k \in \{1,\dots,n-2\}$ и для всех наборов $0 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ и $a_{i_1},\dots,a_{i_k} \in \Sigma_4$ квазигруппы $f^{i_1,\dots,i_k}_{a_{i_1},\dots,a_{i_k}}$ разделимы, то по утверждению 12 квазигруппа f полностью разделима.

$\square$

В дальнейшем для бинарной операции $*$, задающей некоторую квазигруппу порядка 4, через $*^{-1}$ будем обозначать ее *правое обращение*:

$$x_1 * x_2 = x_0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 *^{-1} x_2.$$

Несложно видеть, что $\oplus^{-1} = \oplus$.

Наконец, все готово для описания всех n-арных квазигрупп порядка 4, не содержащих трансверсалей.

Теорема 33. *Пусть f – n-арная квазигруппа порядка 4, которая не имеет трансверсалей. Тогда n четно и f является $\mathbb{Z}_4$-линейной квазигруппой.*

Доказательство. Доказательство индукцией по n. С точностью до эквивалентности существуют лишь две различные бинарные квазигруппы порядка 4: $\mathbb{Z}_4$-линейная квазигруппа, которая не имеет трансверсалей, и $\mathbb{Z}_2^2$-линейная квазигруппа, содержащая 8 трансверсалей. Также если n нечетно, то по теореме 32 получаем, что n-арная квазигруппа порядка 4 имеет трансверсаль.

Пусть $n \ge 4$ четно. Предположим, что для всех $k < n$ среди всех k-арных квазигрупп порядка 4 только $\mathbb{Z}_4$-линейные квазигруппы четной арности не содержат трансверсалей. По теореме 29 любая n-арная квазигруппа порядка 4 разделимая или полулинейная. Для полулинейных квазигрупп утверждение теоремы верно по теореме 31. Таким образом, можно предполагать, что квазигруппа f является разделимой, то есть, что для некоторых $1 \le m \le n-2$, $(m+1)$-арной квазигруппы g, $(n-m)$-арной квазигруппы h и перестановки

$\sigma \in S_{n+1}$ верно

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_0 \Leftrightarrow g(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = h(x_{\sigma(m+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Для определенности предположим, что $m+1$ нечетно, а $n-m$ четно (случай четного $m+1$ и нечетного $n-m$ рассматривается аналогично). По теореме 32 квазигруппа g содержит трансверсаль, а значит, из леммы 12 следует, что квазигруппа f не имеет трансверсалей, только если квазигруппа h не содержит трансверсалей. По предположению индукции получаем, что h является $\mathbb{Z}_4$-линейной квазигруппой и изотопна квазигруппе, определенной соотношением $x_{\sigma(m+1)} + \ldots + x_{\sigma(n)} = y_0$, где $+$ означает операцию, задающую некоторый главный класс $\mathbb{Z}_4$-линейных квазигрупп.

Далее, для каждого $a \in \mathbb{Z}_4$ расмотрим квазигруппы h^a и g^a, определенные соотношениями $h(x_{\sigma(m+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = a$ и $g(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = a$ соответственно. Теперь квазигруппы h^a имеют нечетную арность, а квазигруппы g^a – четную арность, поэтому по предположению индукции и по лемме 13 квазигруппа f может не иметь трансверсалей, только если для всех $a \in \mathbb{Z}_4$ квазигруппы g^a являются $\mathbb{Z}_4$-линейными.

Из леммы 18 получаем, что квазигруппа g изотопна квазигруппе

$$(x_{\sigma(0)} +' \ldots +' x_{\sigma(m-1)}) +'' x_{\sigma(m)} = y_0 \text{ или } (x_{\sigma(0)} +' \ldots +' x_{\sigma(m-1)}) \oplus x_{\sigma(m)} = y_0,$$

где $+'$ и $+''$ означают некоторые операции главных классов бинарной $\mathbb{Z}_4$-линейной квазигруппы, а $\oplus$ есть операция в $\mathbb{Z}_2^2$.

Таким образом, квазигруппа f изотопна квазигруппе, определенной соотношением

$$(x_{\sigma(0)} +' \ldots +' x_{\sigma(m-1)}) +'' x_{\sigma(m)} = x_{\sigma(m+1)} + \ldots + x_{\sigma(n)}$$

или квазигруппе

$$(x_{\sigma(0)} +' \ldots +' x_{\sigma(m-1)}) \oplus x_{\sigma(m)} = x_{\sigma(m+1)} + \ldots + x_{\sigma(n)}.$$

Во втором случае имеем, что квазигруппа f изотопна квазигруппе

$$x_{\sigma(0)} +' \ldots +' x_{\sigma(m-2)} = ((x_{\sigma(m+1)} + \ldots + x_{\sigma(n)}) \oplus x_{\sigma(m)}) +'^{-1} x_{\sigma(m-1)},$$

которая имеет трансверсаль, так как она есть суперпозиция квазигрупп нечетной арности и квазигруппы четной арности, не являющейся $\mathbb{Z}_4$-линейной.

Рассмотрим теперь первый возможный вариант для квазигруппы f. Если бинарные операции $+'$ и $+''$ или операции $+'$ и $+^{-1}$ определяют различные главные классы, то квазигруппа f изотопна квазигруппе, заданной соотношением

$$((x_{\sigma(0)} +' \ldots +' x_{\sigma(m-1)}) +'' x_{\sigma(m)}) +^{-1} x_{\sigma(n)} = x_{\sigma(m+1)} + \ldots + x_{\sigma(n-1)}.$$

Данная квазигруппа является суперпозицией квазигруппы четной арности, не являющейся $\mathbb{Z}_4$-линейной, и квазигруппы нечетной арности. Следовательно, по лемме 12, квазигруппа f содержит по крайней мере одну трансверсаль.

Если все бинарные операции $+'$, $+''$ и $+^{-1}$ определяют одинаковый главный класс $\mathbb{Z}_4$-линейных квазигрупп, то квазигруппа f представляет собой n-арную $\mathbb{Z}_4$-линейную квазигруппу, определенную соотношением

$$x_{\sigma(0)} +' \ldots +' x_{\sigma(m)} +' x_{\sigma(n)} +' \ldots +' x_{\sigma(m+2)} = x_{\sigma(m+1)},$$

которая не имеет трансверсалей. $\square$

5.2.4 Трансверсали в итерированных группах $\mathbb{Z}_2^2$ и $\mathbb{Z}_4$

В этом параграфе будет вычислено количество трансверсалей в n-арных $\mathbb{Z}_4$-линейных квазигруппах нечетной арности и во всех n-арных $\mathbb{Z}_2^2$-линейных квазигруппах.

Напомним, что по лемме 14 любая трансверсаль в стандартной полулинейной квазигруппе порождает сдвоенную или типичную четверку. Количество трансверсалей, происходящих от сдвоенных четверок, было получено в лемме 15. Для того чтобы найти число трансверсалей, соответствующих всем типичным четверкам, необходимо посчитать число самих типичных четверок.

Лемма 19. *Пусть $W(n)$ – число типичных четверок в булевом $(n+1)$-мерном гиперкубе. Тогда*

- $W(n) = \frac{1}{32}(6^n - 2^n)$, *если n четно;*
- $W(n) = \frac{1}{32}(6^n - 3 \cdot 2^n)$, *если n нечетно.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}_n$ множество булевых $4 \times (n+1)$ матриц, в каждом столбце которых содержится ровно два нуля и две единицы. Также введем следующие обозначения:

- $A^{00}(n)$ – число матриц $A \in \mathcal{A}_n$ таких, что сумма элементов по каждой строке четна.
- $A^{01}(n)$ – число матриц $A \in \mathcal{A}_n$ таких, что сумма элементов по некоторым двум строкам четна, а по другим двум строкам – нечетна.
- $A^{11}(n)$ – число матриц $A \in \mathcal{A}_n$ таких, что сумма элементов по каждой строке нечетна.
- $B^{00}(n)$ – число матриц $A \in \mathcal{A}_n$, состоящих из двух пар одинаковых строк таких, что сумма элементов по каждой строке четна.
- $B^{01}(n)$ – число матриц $A \in \mathcal{A}_n$, состоящих из двух пар одинаковых строк таких, что сумма элементов по двум из строк четна, а по двум другим строкам – нечетна.
- $B^{11}(n)$ – число матриц $A \in \mathcal{A}_n$, состоящих из двух пар одинаковых строк таких, что сумма элементов по каждой строке нечетна.

Заметим, что число типичных четверок в булевом $(n+1)$-мерном гиперкубе выражается как

$$W(n) = \frac{1}{4!}\left(A^{00}(n) - B^{00}(n)\right).$$

Величины $A^{00}(n), A^{01}(n)$ и $A^{11}(n)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$A^{00}(n) = A^{01}(n-1);\ A^{11}(n) = A^{01}(n-1);$$

$$A^{01}(n) = 4A^{01}(n-1) + 6(A^{00}(n-1) + A^{11}(n-1)).$$

Отсюда имеем

$$A^{01}(n) = 4A^{01}(n-1) + 12A^{01}(n-2).$$

Решив это рекуррентное соотношение с $A^{01}(0) = 6$ и $A^{01}(1) = 24$, получаем

$$A^{01}(n) = \frac{3}{4}\left(6^{n+1} - (-2)^{n+1}\right).$$

Следовательно,

$$A^{00}(n) = \frac{3}{4}\left(6^{n} - (-2)^{n}\right).$$

Далее заметим, что $B^{00}(n)$ и $B^{11}(n)$ равны нулю, если n четно, и $B^{01}(n)$ равно нулю, если n нечетно. Также, $B^{00}(n), B^{01}(n)$ и $B^{11}(n)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$B^{00}(2k+1) = B^{01}(2k);\ B^{11}(2k+1) = B^{01}(2k);$$

$$B^{01}(2k+2) = 2(B^{00}(2k+1) + B^{11}(2k+1)).$$

Тогда для $B^{01}(2k)$ выполнено

$$B^{01}(2k) = 4B^{01}(2k-2).$$

Решив данное рекуррентное соотношение с $B^{01}(0) = 6$, находим

$$B^{01}(2k) = 6 \cdot 2^{2k}.$$

Следовательно, $B^{00}(n) = 0$ для четного n и $B^{00}(n) = 3 \cdot 2^n$ для нечетного n.

Наконец, если n четно, то

$$W(n) = \frac{1}{24}\left(A^{00}(n) - B^{00}(n)\right) = \frac{1}{32}\left(6^n - 2^n\right),$$

а если n нечетно, то

$$W(n) = \frac{1}{24}\left(A^{00}(n) - B^{00}(n)\right) = \frac{1}{32}\left(6^n + 2^n - 4 \cdot 2^n\right) = \frac{1}{32}\left(6^n - 3 \cdot 2^n\right).$$

□

Теорема 34. *1. Если n нечетно, то число трансверсалей в n-арных $\mathbb{Z}_2^2$-линейных квазигруппах равно числу трансверсалей в n-арных $\mathbb{Z}_4$-линейных квазигруппах и равно $\frac{3}{8} \cdot 24^{n-1} + 5 \cdot 8^{n-2}$.*

2. Если n четно, то число трансверсалей в n-арных $\mathbb{Z}_2^2$-линейных квазигруппах равно $\frac{3}{8} \cdot 24^{n-1} - 8^{n-2}$.

Более того, данные квазигруппы являются единственными с точностью до изотопий и парастрофий полулинейными квазигруппами, содержащими максимальное число трансверсалей.

Доказательство. 1. По лемме 15 любая полулинейная квазигруппа нечетной арности n содержит 8^{n-1} трансверсалей, порожденных сдвоенными четверками. Также напомним, что по лемме 16 для стандартной полулинейной квазигруппы, определенной булевой функцией λ, типичная четверка (z^1, z^2, z^3, z^4) соответствует трансверсалям квазигруппы тогда и только тогда, когда $\lambda(\overline{z^1}) \oplus \lambda(\overline{z^2}) \oplus \lambda(\overline{z^3}) \oplus \lambda(\overline{z^4}) = 0$.

Из леммы 11 получаем, что любая n-арная $\mathbb{Z}_2^2$-линейная квазигруппа изотопна стандартной полулинейной квазигруппе $f_{\mathbb{Z}_2^2}$, заданной с помощью тождественно нулевой булевой функции $\lambda_{\mathbb{Z}_2^2}$. Следовательно, для любой типичной четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) сумма $\lambda_{\mathbb{Z}_2^2}(\overline{z^1}) \oplus \lambda_{\mathbb{Z}_2^2}(\overline{z^2}) \oplus \lambda_{\mathbb{Z}_2^2}(\overline{z^3}) \oplus \lambda_{\mathbb{Z}_2^2}(\overline{z^4})$ равна нулю, а значит, каждая типичная четверка порождает трансверсали в квазигруппе $f_{\mathbb{Z}_2^2}$.

Далее, по лемме 10 любая n-арная $\mathbb{Z}_4$-линейная квазигруппа изотопна стандартной полулинейной квазигруппе $f_{\mathbb{Z}_4}$, заданной такой булевой функцией $\lambda_{\mathbb{Z}_4}$, что $\lambda_{\mathbb{Z}_4}(z) = 0$, если вес z сравним с 0 или 3 по модулю 4, и $\lambda_{\mathbb{Z}_4}(z) = 1$, если вес z сравним с 1 или 2 по модулю 4.

Рассмотрим типичную четверку (z^1, z^2, z^3, z^4) в $(n+1)$-мерном булевом гиперкубе. По определению каждый вектор z^j имеет четный вес и $w(z^1)+w(z^2)+w(z^3) + w(z^4) = 2n + 2 \equiv 0 \mod 4$. Тогда число векторов z^j, вес которых сравним с 2 по модулю 4, четно, а значит, четное число векторов $\overline{z^j}$ имеют вес сравнимый с 1 или 2 по модулю 4. Отсюда

$$\lambda_{\mathbb{Z}_4}(\overline{z^1}) \oplus \lambda_{\mathbb{Z}_4}(\overline{z^2}) \oplus \lambda_{\mathbb{Z}_4}(\overline{z^3}) \oplus \lambda_{\mathbb{Z}_4}(\overline{z^4}) = 0,$$

и каждая типичная четверка порождает трансверсали в квазигруппе $f_{\mathbb{Z}_4}$.

Из леммы 16 имеем, что любая типичная четверка соответствует ровно $2 \cdot 4^{n-1}$ трансверсалям в квазигруппах $f_{\mathbb{Z}_2^2}$ и $f_{\mathbb{Z}_4}$. Таким образом,

$$T(f_{\mathbb{Z}_2^2}) = T(f_{\mathbb{Z}_4}) = 2 \cdot 4^{n-1} W(n) + 8^{n-1} =$$
$$= \frac{1}{16} \cdot 4^{n-1} \left(6^n - 3 \cdot 2^n\right) + 8^{n-1} = \frac{3}{8} \cdot 24^{n-1} + 5 \cdot 8^{n-2}.$$

2. Если n четно, то трансверсалям полулинейных квазигрупп могут соответствовать только типичные четверки.

Как и раньше, n-арные $\mathbb{Z}_2^2$-линейные квазигруппы изотопны стандартной полулинейной квазигруппе $f_{\mathbb{Z}_2^2}$, определенной с помощью тождественно нулевой булевой функции, и все типичные четверки порождают ровно $2 \cdot 4^{n-1}$ трансверсалей в квазигруппе $f_{\mathbb{Z}_2^2}$. Поэтому

$$T(f) = 2 \cdot 4^{n-1} W(n) = \frac{1}{16} \cdot 4^{n-1} \left(6^n - 2^n\right) = \frac{3}{8} \cdot 24^{n-1} - 8^{n-2}.$$

Так как в квазигруппах $f_{\mathbb{Z}_4}$ нечетной арности и в квазигруппах $f_{\mathbb{Z}_2^2}$ любая типичная четверка дает трансверсали, то эти квазигруппы содержит максимальное число трансверсалей среди всех полулинейных квазигрупп. По лемме 17, если для некоторой булевой функции λ и для каждой типичной четверки (z^1, z^2, z^3, z^4) выполнено $\lambda(\overline{z^1}) \oplus \lambda(\overline{z^2}) \oplus \lambda(\overline{z^3}) \oplus \lambda(\overline{z^4}) = 0$, то для любой двумерной грани P n-мерного булева гиперкуба имеем, что сумма $\sum\limits_{z \in P} \lambda(z)$ сравнима либо с 0, либо с 1 по модулю 2 для нечетного n и сравнима с 0 по модулю 2 для четного n. Из леммы 11 следует, что такие булевы функции могут определять только $\mathbb{Z}_4$-линейные и $\mathbb{Z}_2^2$-линейные квазигруппы. $\square$

Заметим, что тривиальная верхняя оценка на число трансверсалей в n-арных квазигруппах порядка 4 есть $4!^{n-1} = 24^{n-1}$, и что число трансверсалей в $\mathbb{Z}_2^2$-линейных и $\mathbb{Z}_4$-линейных квазигруппах довольно близко к данной оценке. Поэтому можно предположить, что верна

Гипотеза 11. *$\mathbb{Z}_4$-Линейные квазигруппы нечетной арности и $\mathbb{Z}_2^2$-линейные квазигруппы имеют максимальное число трансверсалей во множестве всех n-арных квазигрупп порядка 4.*

Численные данные, полученные при помощи [38], подтверждают эту гипотезу для всех $n \leq 5$.

Заключение

Перечислим основные результаты данной работы:

1. Доказана асимптотически точная с ростом порядка верхняя оценка перманента полистохастических матриц, из которой в качестве следствия получена асимптотически неулучшаемая верхняя оценка числа трансверсалей в латинских квадратах и гиперкубах.

2. Получено обобщение верхней оценки числа 1-факторов графа через перманент его матрицы смежности на случай униформных гиперграфов. Доказана верхняя оценка на число 1-факторизаций полного d-униформного гиперграфа.

3. Найдена нижняя оценка числа трансверсалей в полностью разделимых квазигруппах нечетной арности. Доказано, что на множестве n-арных квазигрупп порядка 4 только квазигруппы, изотопные итерированной группе $\mathbb{Z}_4$ четной арности, не содержат трансверсалей. Для итерированных групп $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2^2$ произвольной арности вычислено количество трансверсалей.

Литература

[1] Августинович, С. В. Многомерные перманенты в задачах перечисления / С. В. Августинович // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 3–5.

[2] Брэгман, Л. М. Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов / Л. М. Брэгман // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211, № 1. — С. 27–30.

[3] Егорычев, Г. П. Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов / Г. П. Егорычев // Сиб. мат. журнал. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 65–71.

[4] Минк, Х. Перманенты / Х. Минк. — М.: Мир, 1982. — 213 с.

[5] Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей [Электронный ресурс]. — Режим доступа: `https://oeis.org`.

[6] Потапов, В. Н. О дополняемости частичных n-квазигрупп порядка 4 / В. Н. Потапов // Мат. труды. — 2011. — Т. 14, № 2. — С. 147–172.

[7] Соколов, Н. П. Пространственные матрицы и их приложения / Н. П. Соколов. — М.: Физматлит, 1960. — 299 с.

[8] Соколов, Н. П. Введение в теорию многомерных матриц / Н. П. Соколов. — Киев: Наукова думка, 1972. — 177 с.

[9] Фаликман, Д. И. Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы / Д. И. Фаликман // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29, № 6. — С. 931–938.

[10] Aharoni, R. Perfect matchings in r-partite r-graphs / R. Aharoni, A. Georgakopoulos, P. Sprüssel // European J. Combin. — 2009. — Vol. 30. — P. 39–42.

[11] Alon, N. The maximum number of perfect matchings in graphs with a given degree sequence / N. Alon, S. Friedland // Electron. J. Combin. — 2008. — Vol. 15, N13. — P. 1–2.

[12] Balasubramanian, L. On transversals in Latin squares / L. Balasubramanian // Linear Algebra Appl. — 1990. — Vol. 131. — P. 125–129.

[13] Bapat, R. B. A stronger form of the Egorychev–Falikman theorem on permanents / R. B. Bapat // Linear Algebra Appl. — 1984. — Vol. 63. — P. 95–100.

[14] Baranyai, Zs. On the factorization of the complete uniform hypergraph / Zs. Baranyai // Infinite and Finite Sets (Hajnal A., Rado T., Sós V.T., eds.). Vol. 1. — Amsterdam: North-Holland, 1973. — P. 91–108.

[15] Barvinok, A. Computing the partition function for perfect matchings in a hypergraph / A. Barvinok, A. Samorodnitsky // Combin. Probab. Comput. — 2011. — Vol. 20, No. 6.— P. 815–835.

[16] Cameron, P. J. Parallelism of complete designs / P. J. Cameron. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 23.) — 144 p.

[17] Cauchy, A.-L. Mèmoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions operées entre les variables qu'elles renferment / A.-L. Cauchy // J. Éc. Polyt. — 1812. — Vol. 10, Cah. 17. — P. 29–112.

[18] Cayley, A. On the theory of determinants / A. Cayley // Trans. Cambridge. Philos. Soc. — 1849. — Vol. 8. — P. 75–88.

[19] Cifuentes, D. An efficient tree decomposition method for permanents and mixed discriminants / D. Cifuentes, P. A. Parrilo // Linear Algebra Appl. — 2016. — Vol. 493. — P. 45–81.

[20] Csima, J. Multidimensional stochastic matrices and patterns / J. Csima // J. Algebra. — 1970. — Vol. 14. — P. 194–202.

[21] Donovan, D. Permanents and determinants of Latin squares / D. Donovan, K. Johnson, I. M. Wanless // J. Combin. Des. — 2016. — Vol. 24, No. 3. — P. 132–148.

[22] Dow, S. J. An upper bound for the permanent of a 3-dimensional (0,1)-matrix / S. J. Dow, P. M. Gibson // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 99, No. 1. — P. 29–34.

[23] Dow, S. J. Permanents of d-dimensional matrices / S. J. Dow, P. M. Gibson // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 90. — P. 133–145.

[24] Eberhard, S. Additive triples of bijections, or the toroidal semiqueens problem [Электронный ресурс] / S. Eberhard, F. Manners, R. Mrazović. — Режим доступа: `https://arxiv.org/pdf/1510.05987.pdf`.

[25] Glebov, R. On the maximum number of Latin transversals / R. Glebov, Z. Luria // J. Combin. Theory Ser. A. — 2016. — Vol. 141. — P. 136–146.

[26] Gurvits, L. Van der Waerden/Schrijver–Valiant like conjectures and stable (aka hyperbolic) homogeneous polynomials: One theorem for all / L. Gurvits // Electron. J. Combin. — 2008. — Vol. 15, R66. — P. 1–26.

[27] Hell, S. On the number of Birch partitions / S. Hell // Discrete Comput. Geom. — 2008. — Vol. 40. — P. 586–594.

[28] Hell, S. On the number of colored Birch and Tverberg partitions / S. Hell // Electron. J. Combin. — 2014. — Vol. 21, No. 3, P3.23. — P. 1–12.

[29] Jurkat, W. B. Extremal configurations and decomposition theorems / W. B. Jurkat, H. J. Ryser // J. Algebra. — 1968. — Vol. 8. — P. 194–222.

[30] Keevash, P. Counting designs [Электронный ресурс] / P. Keevash. — Режим доступа: `https://arxiv.org/pdf/1504.02909.pdf`.

[31] Krotov, D. S. n-Ary quasigroups of order 4 / D. S. Krotov, V. N. Potapov // SIAM J. Discrete Math. — 2009. — Vol. 23, No. 2. — P. 561–570.

[32] Linial, N. An upper bound on the number of Steiner triple systems / N. Linial, Z. Luria // Random Structures Algorithms. — 2013. — Vol. 34, No 4. — P. 399–406.

[33] Linial, N. An upper bound on the number of high-dimensional permutations / N. Linial, Z. Luria // Combinatorica. — 2014. — Vol. 34, No. 4. — P. 471–486.

[34] Linial, N. On the vertices of the d-dimensional Birkhoff polytope / N. Linial, Z. Luria // Discrete Comput. Geom. — 2014. — Vol. 51. — P. 161–170.

[35] Lo, A. Perfect matchings in 3-partite 3-uniform hypergraphs / A. Lo, K. Markström // J. Combin. Theory Ser. A. — 2014. — Vol. 127. — P. 22–57.

[36] Minc, H. Upper bound for permanents of (0,1)-matrices / H. Minc // Bull. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 69. — P. 789–791.

[37] McKay, B. D. The number of transversals in a Latin square / B. D. McKay, J. C. McLeod, I. M. Wanless // Des. Codes Cryptogr. — 2006. — Vol. 40. — P. 269–284.

[38] McKay, B. D. A census of small latin hypercubes / B. D. McKay, I. M. Wanless // SIAM J. Discrete Math. — 2008. — Vol. 22. — P. 719–736.

[39] Muir, T. A treatis on the theory of determinants / T. Muir. — London: Macmillan and Co., 1882. — 774 p.

[40] Potapov, V. N. On the multidimensional permanent and q-ary designs / V. N. Potapov // Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 451–456.

[41] Radhakrishnan, J. An entropy proof of Bregman's theorem / J. Radhakrishnan // J. Combin. Theory Ser. A. — 1997. — Vol. 77. — P. 161–164.

[42] Rödl, V. Perfect matchings in large uniform hypergraphs with large minimum collective degree / V. Rödl, A. Ruciński, E. Szemerédi // J. Combin. Theory Ser. A. — 2009. — Vol. 116. — P. 613–636.

[43] Ryser, H. J. Neuere Probleme der Kombinatorik / H. J. Ryser // Vortrage über Kombinatorik (Germany, Oberwolfach, July 24–29, 1967). — Oberwolfach: Math. Forschungsinst. Oberwolfach, 1967. — P. 69–91.

[44] Schrijver, A. A short proof of Minc's conjecture / A. Schrijver // J. Combin. Theory Ser. A. — 1978. — Vol. 25. — P. 80–83.

[45] Schrijver, A. Counting 1-factors in regular bipartite graphs / A. Schrijver // J. Combin. Theory Ser. B. — 1998. — Vol. 72, No. 1. — P. 122–135.

[46] Soules, G. W. Permanental bounds for nonnegative matrices via decomposition / G. W. Soules // Linear Algebra Appl. — 2005. — Vol. 394. — P. 73–89.

[47] Sun, Z.-W. An additive theorem and restricted sumsets / Z.-W. Sun // Math. Res. Lett. — 2008. — Vol. 15, No. 6. — P. 1263–1276.

[48] Tichy, M. C. Partially distinguishable Boson-Sampling and the multi-dimensional permanent / M. C. Tichy // Physical Review A. — 2015. — Vol. 91, No. 2. — 022316.

[49] Treglown, A. Exact minimum degree thresholds for perfect matchings in uniform hypergraphs / A. Treglown, Yi. Zhao // J. Combin. Theory Ser. A. — 2012. — Vol. 119. — P. 1500–1522.

[50] Vardi, I. Computational Recreations in Mathematics / I. Vardi. — Redwood City:Addison-Wesley, 1991. — 304 p.

[51] Wanless, I. M. Transversals in latin squares: a survey / I. M. Wanless // Surveys in Combinatorics 2011, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 392. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2011. — P. 403–437.

[52] Wanless, I. M. The existence of latin squares without orthogonal mates / I. M. Wanless, B. S. Webb // Des. Codes Cryptogr. — 2006. — Vol. 40. — P. 131–135.

Публикации автора по теме диссертации

[53] Тараненко, А. А. Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения / А. А. Тараненко // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 35–101. (Перевод: Taranenko, A. A. Permanents of multidimensional matrices: properties and applications / A. A. Taranenko // J. Appl. Ind. Math. — 2016. — V. 10, № 4. — P. 567–604.)

[54] Тараненко, А. А. О количестве трансверсалей в n-арных квазигруппах порядка 4 / А. А. Тараненко // Математические заметки. — 2017. — Т. 101, вып. 5. — С. 798–800.

[55] Taranenko, A. A. Upper bounds on the permanent of multidimensional (0,1)-matrices / A. A. Taranenko // Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 958–965.

[56] Taranenko, A. A. Multidimensional permanents and an upper bound on the number of transversals in latin squares / A. A. Taranenko // J. Combin. Des. — 2015. — V. 23. — P. 305–320.

[57] Taranenko, A. A. Upper bounds on the numbers of 1-factors and 1-factorizations of hypergraphs / A. A. Taranenko // Electron. Notes Discrete Math. — 2015. — V. 49. — P. 85–92.

[58] Taranenko, A. A. On the numbers of 1-factors and 1-factorizations of hypergraphs / A. A. Taranenko // Discrete Math. — 2017. — V. 340. — P. 753–762.

[59] Тараненко, А. А. Верхняя оценка числа трансверсалей латинского квадрата / А. А. Тараненко // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 12–18 апреля, 2013). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ. — 2013. — С. 236.

[60] Тараненко, А. А. Перманенты многомерных матриц / А. А. Тараненко // Материалы IX молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. (Москва, 16–21 сентября, 2013). — М.: Изд-во ИПМ РАН. — 2013. — с. 106-111.

[61] Тараненко, А. А. О перманентах многомерных матриц / А. А. Тараненко // Материалы 52-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 11–18 апреля, 2014). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ. — 2014. — С. 223.

[62] Тараненко, А. А. О количестве 1-факторов в гиперграфах / А. А. Тараненко // Материалы 53-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 11–17 апреля, 2015). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ. — 2015. — С. 130.

[63] Taranenko, A. Multidimensional permanents and an upper bound on the number of transversals in latin squares / A. A. Taranenko // Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory. Program and Abstracts. (January 27 – February 2, 2014. Moscow, Russia). — Moscow: MIPT. — 2014. — P. 37.

[64] Taranenko, A. On transversals in multidimensional arrays [Электронный ресурс] / A. A. Taranenko // 39th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. Abstract list.

(December 7–11, 2015. Brisbane, Australia). — P. 45. — Режим доступа: http://39accmcc.smp.uq.edu.au/AbstractsList.pdf.

[65] Taranenko, A. On the length of partial transversals in latin hypercubes and in multidimensional arrays [Электронный ресурс] / A. A. Taranenko // 7th European Congress of Mathematics. Conference Scientific Program. (July 18–22, 2016. Berlin, Germany). — P. 74. — Режим доступа: http://www.7ecm.de/program/contributed_talks.html.

[66] Taranenko, A. On transversals in completely reducible quasigroups and in quasigroups of order 4 [Электронный ресурс] / A. A. Taranenko // Abstract for the International Conference and PhD-Master Summer School on Graphs and Groups, Spectra and Symmetries. (August 15–28, 2016. Akademgorodok, Novosibirsk, Russia). — P. 105. — Режим доступа: http://math.nsc.ru/conference/g2/g2s2/exptext/Book%20of%20abstract-G2S2-2016.pdf.